DEDEKIND ASAL HALKALAR VE GENELLEŞTİRMELERİ

DEDEKIND PRIME RINGS AND THEIR GENERALIZATIONS

GÖZDE KOÇAK

DOÇ. DR. EVRİM AKALAN
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2015

GÖZDE KOÇAK' ın hazırladığı "**Dedekind Asal Halkalar ve Genelleştirmeleri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU
Başkan

Doç. Dr. Evrim AKALAN
Danışman

Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ
Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/06/2015

GÖZDE KOÇAK

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK, Proje No: 113F02) tarafından desteklenmiştir.

ÖZET

DEDEKIND ASAL HALKALAR VE GENELLEŞTİRMELERİ

Gözde KOÇAK

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Evrim AKALAN

Haziran 2015, 60 sayfa

Literatürde Dedekind tamlık bölgelerinin değişmeli halkalar için oldukça iyi geliştirilmiş bir teorisi olmasının yanında, ideallerin aritmetiği ve Dedekind tamlık bölgeleri üzerindeki modüllerin yapısı hakkında da pek çok şey bilinmektedir. Geçen yüzyılın ortalarından itibaren değişmeli halkaların Dedekind tamlık bölgesi düşüncesinin değişmeli olmayan halkalara genelleştirilmesi konusu üzerinde sıklıkla çalışılmıştır. Bu tezin amacı, değişmeli olmayan halkalarda bu genellemenin doğurduğu Dedekind asal halkalar, Asano sağ düzen halkaları, kalıtsal halkalar ve G-Dedekind asal halka sınıfları ile Asano sağ düzen halkalarda yerelleştirme probleminin incelenmesidir. Giriş bölümü, tez konusunun tarihsel gelişimi ve önemi ile ilgili bilgilerden oluşmaktadır. İkinci bölüm, sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde, Dedekind asal halkalar ve genelleştirmesi olan Asano sağ düzen halkaları incelenmiş, dördüncü bölümde Asano sağ düzen halkalarında yerelleştirme problemi ele alınmıştır. Son bölümde, hem Dedekind asal halkaları hem de Noether tek türlü çarpanlarına ayırma halkalarını (TÇH) kapsayan G-Dedekind asal halka sınıfının tanım ve karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde konuya ilişkin ilerideki çalışmalarımıza yön verebilecek problemlere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dedekind asal halka, Asano sağ düzen halkası, kalıtsal halka, maksimal sağ düzen halkası, yerelleştirme, G-Dedekind asal halka.

ABSTRACT

DEDEKIND PRIME RINGS AND THEIR GENERALIZATIONS

Gözde KOÇAK

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Evrim AKALAN

June 2015, 60 pages

The commutative theory of Dedekind domains is well developed in literature and much is known about the arithmetic of ideals and also the structure of modules over a Dedekind domain. There have been many studies on the generalization of the commutative idea of a Dedekind domain to noncommutative rings. The aim of this thesis is to investigate the class of rings which arose from this idea of generalization namely; Dedekind prime rings, Asano right orders, hereditary rings and G-Dedekind prime rings and to investigate the localization problem on the ring of Asano right orders. The introductory chapter consists of informations about the significance and the historical improvement of the subject. Second chapter contains the definitions and theorems needed in the third, fourth and the fifth chapters. In the third chapter, the class of Dedekind prime rings and the class of Asano right orders which is a generalization of the class of Dedekind prime rings are investigated, and in the fourth chapter the problem of localization on the ring of Asano right orders is studied. In the last chapter, definition and the characterizations of G-Dedekind prime rings which contain both the class of Dedekind prime rings and the class of Noetherian unique factorization rings is introduced. Moreover, open problems on the subject are given in this chapter.

Keywords: Dedekind prime ring, Asano right order, hereditary ring, maximal right order, localization, G-Dedekind prime ring.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında önemli katkıları olan, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum, bilgi ve tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı çok değerli hocam
Doç. Dr. Evrim AKALAN'a;

yardımlarıyla yükümü hafifleten ve manevi desteğini her zaman hissettiğim sevgili hocam
Yrd. Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU'ya;

bilgi ve önerilerini benden esirgemeyen sayın hocam
Doç. Dr. Bülent SARAÇ'a;

hayatımın her anında destekleriyle beni cesaretlendiren, her adımımda arkamda olduklarını bildiğim canım aileme;

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	R birimli halka
M_R	M birimli sağ R–modül
Q	R'nin sağ bölüm halkası
R_S	R'nin kısmi sağ bölüm halkası
$\oplus M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
ΠM_i	M_i modüllerinin dik çarpımı
$\bigcap M_i$	M_i modüllerinin arakesiti
$\bigcup M_i$	M_i modüllerinin birleşimi
$r(S)$	$\{x \in R \mid Sx = 0\}$, S kümesinin sağ sıfırlayıcısı
$r(m)$	$\{x \in R \mid mx = 0\}$, sağ sıfırlayıcı
$l(S)$	$\{x \in R \mid xS = 0\}$, S kümesinin sol sıfırlayıcısı
$l(m)$	$\{x \in R \mid xm = 0\}$, sol sıfırlayıcı
$I \lhd R$	I R'nin ideali
$A \subseteq M$	A M'nin altkümesi
$A \subsetneqq M$	A M'nin altkümesi ve $A \neq M$
$A \leq M$	A M'nin altmodülü
$A < M$	A M'nin altmodülü ve $A \neq M$
$A \leq_e M$	A M'nin geniş altmodülü
$A \leq_\oplus M$	A M'nin dik toplananı
$J = J(R)$	R halkasının Jacobson Radikali
$Spec(R)$	R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi
$Soc(M)$	$\cap\{N \mid N \leq_e M\} = \oplus\{L \mid L$ M'nin basit altmodülü$\}$
$Z(M)$	$\{m \in M \mid r(m) \leq_e R\}$
$Z(R)$	$Z(R_R)$
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	M'den N'ye R–modül homomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{Hom}^r_R(M, N)$	M'den N'ye sağ R–modül homomorfizmalarının kümesi
Çek(f)	f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	Prüfer p–grup

1 GİRİŞ

Literatürde Dedekind tamlık bölgelerinin değişmeli halkalar için oldukça iyi geliştirilmiş bir teorisi olmasının yanında, ideallerin aritmetiği ve Dedekind tamlık bölgeleri üzerindeki modüllerin yapısı hakkında da pek çok şey bilinmektedir. Geçen yüzyılın ortalarından itibaren değişmeli halkaların Dedekind tamlık bölgesi düşüncesinin değişmeli olmayan halkalara genelleştirilmesi konusu üzerinde sıklıkla çalışılmıştır. Ortaya konulan çalışmalardan bu genellemenin, bakış açısına göre, bir tek yolla olması gerekmediği anlaşılmaktadır. Bir değişmeli Dedekind tamlık bölgesi, sıfırdan farklı idealleri çarpma işlemine göre grup oluşturan bir Noether tamlık bölgesidir. Denk olarak bir Dedekind tamlık bölgesi, sıfırdan farklı tüm idealleri projektif olan bir tamlık bölgesidir. Çalışmalar göstermiştir ki değişmeli olmayan halkalar için farklı olasılıklar ortaya çıkmaktadır:

(1) Sıfırdan farklı her idealin "tersinir" olması

(2) Sıfırdan farklı her idealin (sağ ideal olarak) "projektif" olması ve

(3) Yukarıdaki **(1)** ve **(2)** şıklarının birleşimi.

Asal ve yarıasal halkalar üzerindeki Goldie Teoremlerinden, bu genellemeler için en uygun zeminin kesirler halkası bir basit Artin halka olan asal halkalar olduğu söylenebilir. Bilindiği gibi bu halkalar asal Goldie halkalardır. Noether halkaların, sağladıkları birçok önemli özelliğin yanında, Goldie halka olmalarından dolayı, yukarıda bahsedilen genellemelerin asal Noether halkalar için ele alınmış olması hiç de şaşırtıcı değildir.

Tüm sağ idealleri projektif olan halkaya *sağ kalıtsal (hereditary)* halka denmektedir. Sol kalıtsal halka kavramı da benzer şekilde tanımlanabilir. Eğer bir halka hem sağ hem de sol kalıtsal ise o zaman bu halkaya *kalıtsal (hereditary)* halka denilmektedir. Yukarıdaki **(1)** özelliğini sağlayan bir düzen halkasına bir *Asano sağ düzeni* denir. Asano sağ düzen halkaları tam olarak yukardaki **(1)** özelliğini sağlayan maksimal düzen halkalarıdır. Asal kalıtsal Noether olan bir Asano sağ düzen halkasına *Dedekind asal halka* adı verilir. Bir asal halkanın Dedekind olması kalıtsal ve maksimal düzen halkası olması ile karakterize edilebilir. Değişmeli halka teorisinde çakışıyor olmalarına karşın değişmeli olmayan halkalarda Asano sağ düzen halkalarının sınıfı Dedekind asal halkaların sınıfından, Dedekind asal halkaların sınıfı da kalıtsal Noether asal halkaların sınıfından çok daha geniştir.

Eğer maksimal düzen olan bir asal halkanın her refleksif ideali tersinir ise bu halkaya bir *genelleştirilmiş Dedekind asal halka* ya da kısaca *G-Dedekind asal halka* denir. G-

Dedekind asal halkaların sınıfı hem Dedekind asal halkaları hem de Noether tek türlü çarpanlarına ayırma halkalarını (TÇH) kapsayan çok geniş bir halka sınıfıdır.

Bu tezde Dedekind asal, Asano sağ düzen ve G-Dedekind asal halka sınıfları incelenecek, aralarındaki ilişkiler örneklerle ortaya konacak ve Asano düzen halkalarında yerelleştirme problemi ele alınacaktır.

Bu tez boyunca her halkanın birimli halka olduğu kabul edilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zincir Koşulları

Bu bölümdeki tanım ve teoremler için [11] ve [3] kaynak alınmıştır.

Tanım 2.1.1 A bir R–modül ve $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ A'nın altmodüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun.

- Eğer A'nın altmodüllerinin her boştan farklı ailesi bir maksimal (minimal) elemana sahipse A'ya altmodülleri üzerinde *maksimum (minimum) koşulunu (maximum (minimum) condition) sağlar* denir.
- Eğer A'nın altmodüllerinin $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \cdots$ şeklindeki her artan dizisi sonlu adımda duruyorsa yani, her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa A'ya *artan zincir koşulunu (ascending chain condition) sağlar* denir.
- Eğer A'nın altmodüllerinin $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \cdots$ şeklindeki her azalan zinciri sonlu adımda duruyorsa yani, her $i \geq m$ için $A_i = A_m$ olacak şekilde bir m tamsayısı varsa A'ya *azalan zincir koşulunu (descending chain conditition) sağlar* denir.

Önerme 2.1.2 *Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *A, altmodülleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.*

(2) *A'nın altmodüllerinin boştan farklı her ailesi bir maksimal elemana sahiptir.*

(3) *A'nın her altmodülü sonlu üretilmiştir yani B, A'nın bir altmodülü ise*

$$B = x_1R + x_2R + \cdots + x_nR$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ vardır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2): A altmodülleri ile artan zincir koşulunu sağlasın ve $\mathcal{A}$, A'nın altmodüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$'nın maksimal elemanının olmadığını kabul edelim. Bir $A_1 \in \mathcal{A}$ alalım. $A_1 \in \mathcal{A}$ maksimal olmadığından $A_2 > A_1$ olacak şekilde bir $A_2 \in \mathcal{A}$ vardır. Bu işleme devam edilirse A'nın altmodüllerinin $A_1 < A_2 < A_3 < \cdots$ şeklinde sonsuz artan zincirini elde ederiz. Bu da kabulümüzle çelişir.

(2) $\Rightarrow$ (3): B, A'nin bir altmodülü ve $\mathcal{B}$, B'nin tüm sonlu üretilmiş altmodüllerinin ailesi olsun. $\mathcal{B}$ sıfırı içerdiğinden boştan farklıdır. (2)'den $\mathcal{B}$ bir maksimal eleman içerir. Bu elemana C diyelim. $C \neq B$ ise bir $x \in B/C$ elemanı vardır. C', B'nin C ve x ile üretilen bir altmodülü olsun. $C' \in \mathcal{B}$ ve $C' > C$ oluşu C'nin seçimi ile çelişir. Böylece $C = B$ olur. B sonlu üretilmiştir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $B_1 \leq B_2 \leq \cdots$ A'nın altmodüllerinin bir artan zinciri olsun. $B = \bigcup B_n$ diyelim. (3)'den B sonlu üretilmiştir. X, B'nin sonlu bir üreteç kümesi olsun. X sonlu olduğundan bir B_n kümesinde kapsanır. Böylece $B = B_n$ dir. Dolayısla her $m \geq n$ için $B_n = B_m$'dir. İstenen elde edilir. $\square$

Önerme 2.1.3 [12, Teorem 1.4] *Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) A, altmodülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.

(2) A'nın altmodüllerinin boştan farklı her ailesi bir minimal elemana sahiptir.

Önerme 2.1.2'nin denk koşullarını sağlayan A modülüne *Noether modül*, Önerme 2.1.3'ün denk koşullarını sağlayan bir A modülüne *Artin modül denir.*

R_R Noether (Artin) modül ise R'ye *sağ (sol) Noether halka* denir. Sol Noether (Artin) halka da benzer şekilde tanımlanır.

Hem sağ hem de sol Noether (Artin) olan halkaya *Noether (Artin) halka* denir.

Örnekler 2.1.4 1) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$–modül olarak Noetherdir fakat Artin değildir.

2) Her cisim, her bölümlü halka ve sonlu sayıda ideale (ya da sonlu sayıda elemana) sahip halka hem Noether hem Artindir.

3) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Prüfer p–grubu $\mathbb{Z}$–modül olarak Artindir fakat Noether değildir.

4) Her değişmeli temel ideal halkası Noetherdir.

Önerme 2.1.5 *A bir modül ve B, A'nın bir altmodülü olsun. Bu durumda;*

$$A \textit{ Noetherdir} \Leftrightarrow B \textit{ ve } A/B \textit{ Noetherdir}$$

İspat: A Noether olsun. B'nin altmodüllerinin her artan zinciri aynı zamanda A'da bir artan zincirdir. Buradan B'nin Noether olduğu açıktır.

$C_1 \leq C_2 \leq \cdots$ A/B'nin altmodüllerinin bir artan zinciri olsun. A/B'nin her altmodülü, $B \subseteq A_i \subseteq A$ olmak üzere A_i/B formundadır. Dolayısıyla $A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ zinciri elde edilir. A Noether olduğundan, her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Böylece her $i \geq n$ için $C_i = C_n$ olur. A/B Noetherdir.

Tersine, B ve A/B Noether olsun. A'nın altmodüllerinin $A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ şeklinde bir artan zincirini alalım. Sırasıyla B'nin ve A/B'nin altmodüllerinin;

$$A_1 \cap B \leq A_2 \cap B \leq \cdots \quad \text{ve} \quad (A_1 + B)/B \leq (A_2 + B)/B \leq \cdots$$

şeklinde birer artan zincirini elde ederiz. Buradan her $i \geq n$ için $A_i \cap B = A_n \cap B$ ve $(A_i + B)/B = (A_n + B)/B$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. İkinci eşitlikten $(A_i + B) = (A_n + B)$ elde edilir. Böylece;

$$A_i = A_i \cap (A_i + B) = A_i \cap (A_n + B) = A_n + (A_i \cap B) = A_n + (A_n \cap B) = A_n$$

elde ederiz. O halde A Noetherdir. □

Sonuç 2.1.6 *Noether modüllerin sonlu dik toplamı da Noetherdir.*

İspat: İspatı iki modül için yapmak yeterlidir. A_1 ve A_2 Noether olsun. $A = A_1 \oplus A_2$ diyelim. $B = A_1 \oplus 0$, A'nın altmodülüdür. Ayrıca $B \cong A_1$ ve $A/B \cong A_2$'dir. B ve A/B Noether olduğundan, Önerme 2.1.5'ten A Noetherdir. İstenen elde edilir. □

Sonuç 2.1.7 *R bir sağ Noether halka ve A bir sonlu üretilmiş sağ R–modül olsun. Bu durumda A modülü Noetherdir.*

İspat: Her modül bir serbest modülün homomorfik görüntüsü olduğundan, $A \cong F/K$ olacak şekilde bir serbest R–modül F ve bir $K \leq F$ altmodülü vardır. F, bir Noether modül olan R_R'nin kopyalarının sonlu dik toplamına izomorf olduğundan Noetherdir. Dolayısıyla Önerme 2.1.5'ten A modülü Noetherdir. □

Önerme 2.1.8 [3, Önerme 4.5] *A bir modül ve B, A'nın bir altmodülü olsun. Bu durumda;*

$$A \text{ Artindir} \Leftrightarrow B \text{ ve } A/B \text{ Artindir.}$$

Önerme 2.1.9 [3, Önerme 4.6] *Artin modüllerin dik çarpımı Artindir.*

Önerme 2.1.10 *Sağ Artin halka üzerindeki sonlu üretilmiş sağ modüller de Artindir.*

Teorem 2.1.11 ***(Hopkins, Levitzki)*** *Her sağ Artin halka bir sağ Noether halkadır.*

İspat: [11, Teorem 4.15] □

Noether halkalarla ilgili bir diğer önemli sonuç ise Hilbert Taban Teoremidir:

Teorem 2.1.12 ***(Hilbert Taban Teoremi)*** *R bir sağ (sol) Noether halka ise $R[x]$ polinomlar halkası da sağ (sol) Noetherdir.*

İspat: R sağ Noether ve I, $R[x] = S$'de bir ideal olsun. $I = 0$ ise sonuç aşikardır. O halde $I \neq 0$ olsun.

1.Adım: J, I'daki polinomların başkatsayılarının oluşturduğu küme olsun. Yani,

$$J = \{r \in R \ \mid \ rx^d + r_{d-1}x^{d-1} + \cdots + r_0 \in I, r_{d-1}, \cdots, r_0 \in R\}$$

olsun. J, R'nin bir sağ idealidir.

2.Adım: R sağ Noether olduğundan J sonlu üretilmiştir. J'nin üreteçleri $r_1, r_2, \cdots, r_k$ olsun. Her $i = 1 \cdots k$ için $r_i \neq 0$ kabul edebiliriz. Her $i = 1 \cdots k$ için r_i, derecesi n_i olan bir $p_i \in I$ polinomunun başkatsayısıdır.

$n = maks\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ olsun. p_i polinomunu, derecesi n olan $p_i x^{n-n_i}$ polinomu ile değiştirebiliriz. Buradan, genelliği bozmadan p_i polinomlarını aynı derecede kabul edebiliriz.

3.Adım: $N = R + xR + \cdots + x^{n-1}R = R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$, S'nin derecesi n'den küçük olan elemanlarının bir kümesi olsun. N kümesi S'nin bir ideali değildir. Fakat N hem sağ hem de sol R–modüldür. N'yi bir sağ R–modül olarak görürsek N sonlu üretilmiştir. R_R Noether ve N sonlu üretilmiş sağ R–modül olduğundan, N sağ R–modül olarak Noetherdir. Yani N_R Noetherdir. O halde $I \cap N$, N'nin sağ R–altmodülü olduğundan sonlu üretilmiş olmalıdır. $q_1, q_2, \cdots, q_t$ sağ R–modül olan $I \cap N$'nin üreteçlerinin kümesi olsun.

4.Adım:

İddia: $q_1 \cdots, q_t, p_1, \cdots, p_k$ I'nın üreteçleridir.

S'nin bu polinomlarla üretilen sağ idealini I_0 ile gösterelim. Buradan $I_0 \subseteq I$'dır. Şimdi $I \subseteq I_0$ olduğunu gösterelim. I'nın, derecesi n'den küçük olan polinomları için ispat oldukça kolaydır. $derp < n$ olsun. O halde $p \in I \cap N$ ve $p = q_1a_1 + \cdots + q_ta_t$ olacak şekilde $a_i \in R$ vardır. Buradan $p \in I_0$ olur.

5.Adım: $p \in I$'nın derecesi $m \geq n$ olsun ve I_0, I'nın derecesi m'den küçük olan her polinomunu içersin. r, p'nin başkatsayısı olsun. Buradan $r \in J$ olur ve $r = r_1a_1+\cdots+r_ka_k$ olacak şekilde $a_i \in R$ vardır. $q = (p_1a_1 + \cdots + p_ka_k)x^{m-n}$ olsun. $q \in I_0$, q'nun derecesi m ve başkatsayısı r'dir. Buradan $p - q$, I'nın derecesi m'den küçük olan bir polinomudur. Varsayımdan $p - q \in I_0$' dır. O halde $p \in I_0$ olur. Sonuç olarak $I = I_0$'dır ve I sonlu üretilmiştir. □

2.2 Asal ve Yarıasal Halkalar ve İdealler

Bu bölümde [11] kaynak olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.2.1 R bir halka ve I, R'de bir ideal olsun. Aşağıdaki denk koşulları sağlayan I idealine *yarıasal ideal (semiprime ideal)* denir.

(1) Bir $a \in R$ için $aRa \subseteq I \Rightarrow a \in I$.

(2) R'nin bir A ideali için $A^2 \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I$.

(3) R'nin bir A sağ ideali için $A^2 \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I$.

Tanım 2.2.2 R bir halka ve I, R'de bir ideal olsun. Aşağıdaki denk koşulları sağlayan I idealine *asal ideal (prime ideal)* denir.

(1) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I \Rightarrow a \in I \ \vee \ b \in I$.

(2) R'nin herhangi A ve B idealleri için $AB \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I \ \vee \ B \subseteq I$.

(3) R'nin herhangi A ve B sağ idealleri için $AB \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I \ \vee \ B \subseteq I$.

Eğer R'nin 0 ideali yarıasal ise R'ye *yarıasal halka (semiprime ring)*, 0 ideali asalsa R'ye *asal halka (prime ring)* denir. R'nin tüm asal ideallerinin kümesine *R'nin spektrumu* denir ve Spec(R) ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 R'nin diğer asal ideallerini öz olarak kapsamayan asal idealine *R'nin minimal asal ideali* denir.

Örneğin; R bir asal halka ise, 0 ideali R'nin minimal asal idealidir ve tektir.

Tanım 2.2.4 $P, P_1, P_2, \cdots, P_n$ R'nin asal idealleri olsun. $P \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_n$ şeklindeki tüm sonlu zincirlerinin uzunluklarının supremumuna (eğer varsa) *P asal idealinin yüksekliği (height)* denir.

Tanım 2.2.5 R bir halka ve S, R'nin bir altkümesi olsun.

$$r(S) = \{x \in R : Sx = 0\}$$
$$l(S) = \{x \in R : xS = 0\}$$

şeklinde tanımlanan $r(S)$ kümesine *S'nin sağ sıfırlayıcısı (right annihilator)*, $l(S)$ kümesine de *S'nin sol sıfırlayıcısı (left annihilator)* denir.

Eğer S tek bir a elemanından oluşuyorsa, $r(\{a\})$'yı $r(a)$ şeklinde göstereceğiz. R'nin bir sağ sıfırlayıcısı, S, R'nin bir altkümesi olmak üzere $r(S)$ formundaki bir sağ idealidir. Benzer şekilde R'nin bir sol sıfırlayıcısı, T, R'nin bir altkümesi olmak üzere $l(T)$ formundaki bir sol idealidir.

Sağ ve sol sıfırlayıcılar için ispatı kolaylıkla yapılabilecek bazı ifadeler verelim:

- $S \subseteq T$ iken $r(T) \subseteq r(S)$ ve $l(T) \subseteq l(S)$'dir.
- $r(l(r(S))) = r(S)$'dir.
- $l(r(l(S))) = l(S)$'dir.

Tanım 2.2.6 Eğer R'nin bir c elemanı için $r(c) = 0$ oluyorsa c'ye *sağ regüler eleman (right regular element)*, $l(c) = 0$ oluyorsa c'ye *sol regüler eleman (left regular element)* denir. Eğer c hem sağ hem sol regüler ise, c'ye *regüler eleman* denir. Eğer I, R'nin bir ideali ise $\mathcal{C}(I)$ kümesi, görüntüsü R/I halkasında regüler olan elemanların oluşturduğu kümedir.

$$\mathcal{C}(I) = \{r \in R : r+I,\ R/I\text{'da regüler}\}$$

Yukarıdaki gösterimle $\mathcal{C}(0)$ R'nin tüm regüler elemanlarından oluşur.

2.3 Jacobson Radikali ve Nakayama Önteoremi

Bu bölümde [11] kaynak olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.3.1 R'nin tüm maksimal sağ (sol) ideallerinin arakesitine R'nin *Jacobson radikali* denir ve $J = J(R)$ ile gösterilir.

Önteorem 2.3.2 *R bir halka M, R'nin bir maksimal sağ ideali ve $a \in R$ olsun. $K = \{x \in R \mid ax \in M\}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda K, R'nin bir sağ idealidir. Ayrıca;*

(i) $a \in M$ *ise* $K = R$*'dir.*

(ii) $a \notin M$ *ise* K *da* R*'nin bir maksimal sağ idealidir.*

İspat: K'nın, R'nin bir sağ ideali olduğu kolayca gösterilebilir.

(i) $a \in M$ ise $1 \in K$ olur. O halde $K = R$'dir.

(ii) $a \notin M$ olsun. O halde $M + aR = R$'dir. Her $r \in R$ için $\theta(r) = ar + M$ olacak şekilde bir $\theta : R \to R/M \quad R$–modül homomorfizması tanımlayalım. $M + aR = R$ olduğundan θ dönüşümü örtendir. Böylece 1.İzomorfizma Teoreminden;

$$R/M \cong R/\text{Çek}\theta = R/K$$

elde edilir. Buradan K, R'nin bir maksimal sağ idealidir.

□

Önerme 2.3.3 *J, R'nin bir çift yönlü idealidir.*

İspat: J'nin, R'nin bir sağ ideali olduğu açıktır.

Tersine; bir $j \in J$ ve $a \in R$ alalım. $aj \notin J$ olduğunu kabul edelim. Buradan R'nin $aj \notin M$ olacak şekilde en az bir M maksimal sağ ideali vardır. O halde $a \notin M$'dir. Önteorem 2.3.2'deki $K = \{x \in R \mid ax \in M\}$ kümesini ele alalım. K, R'nin bir maksimal sağ idealidir. $aj \notin M$ olduğundan $j \notin K$ ve buradan da $j \notin J$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde her $a \in R$ ve $j \in J$ için $aj \in J$ olmalıdır. □

Tanım 2.3.4 P, R'nin bir ideali olsun. Eğer $P = r(A)$ olacak şekilde bir A basit sağ (sol) R–modülü varsa P'ye *sağ (sol) ilkel ideal (right primitive ideal)* denir.

Önerme 2.3.5 *R bir halka olsun. Bu durumda;*

$$\begin{aligned} J(R) &= \bigcap \{R\text{'nin tüm maksimal sağ idealleri}\} \\ &= \bigcap \{R\text{'nin tüm maksimal sol idealleri}\} \\ &= \bigcap \{R\text{'nin tüm ilkel sağ idealleri}\} \\ &= \bigcap \{R\text{'nin tüm ilkel sol idealleri}\} \end{aligned}$$

İspat: [11, Önerme 3.16] □

Şimdi bir R halkasının Jacobson radikali ile ilgili birkaç önemli özellik verelim.

Önteorem 2.3.6 *R bir halka ve I, R'nin bir tek yönlü ideali olsun. Bu durumda;*

$$I,\ J(R) \text{ tarafından kapsanır} \Leftrightarrow \text{Her } x \in I \text{ için } 1-x \quad R\text{'de tersinirdir.}$$

İspat: Bir $x \in I$ için $1-x$'in sağ tersi olmasın. O halde $(1-x)R \neq R$'dir. $(1-x)R$, R'nin bir öz sağ ideali olduğundan R'nin bir maksimal sağ idealinde kapsanır. Bu maksimal sağ ideale M diyelim. Yani $(1-x)R \subseteq M$'dir. Ayrıca J'nin tanımından $x \in M$'dir. $1 = (1-x) + x$ eşitliğinden $1 \in M$ ve buradan $M = R$ elde ederiz. Bu durum M'nin maksimal ideal oluşu ile çelişir. $1-x$'in sol tersinin var olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Tersine; I, R'nin bir sağ ideali ve M, R'nin bir maksimal sağ ideali olsun. Eğer $I \nsubseteq M$ ise $I + M = R$'dir. O halde $x + m = 1$ olacak şekilde bir $x \in I$ ve $m \in M$ vardır. Buradan $1 - x = m \in M$ olur. $1-x$ tersinir olduğundan, $(1-x)y = 1$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. Dolayısıyla $my = 1 \in M$ ve böylece $M = R$ olur. O halde $I \subseteq M$ olmalıdır. R'nin keyfi bir maksimal sağ ideali için doğru olduğundan $I \subseteq J$ elde edilir. □

Önteorem 2.3.7 ***(Nakayama Önteoremi)*** *R bir halka, A bir sonlu üretilmiş sağ R–modül ve $AJ = A$ olsun. Bu durumda $A = 0$'dır.*

İspat: A'nın n tane üreteci olduğunu kabul edelim. İspatı n üzerinde tümevarımla yapacağız.

$n = 1$ yani A devirli bir sağ R–modül olsun. Bu durumda bir $a \in A$ için $A = aR$'dir. Böylece $A = AJ(R) = aJ(R)$ ve buradan da bir $x \in J(R)$ için $a = ax$ olur. Önteorem 2.3.6'dan $1 - x$ tersinir olduğundan $a = 0$ olur. A'nın keyfi bir a elemanı için $a = 0$ olduğundan $A = 0$ elde ederiz.

$n-1$ tane üreteç için teoremin sağlandığını kabul edelim ve n tane üreteç için gösterelim.

$$A = a_1R + a_2R + \cdots + a_nR \ ; \ a_i \in A$$

olsun. $(A/a_1R)J(R) = A/a_1R$ ve A/a_1R, $n-1$ üreteçli olduğundan tümevarım kabülünden $A/a_1R = 0$'dır. Buradan $A = a_1R$ elde ederiz. A'nın devirli olduğu durumdan $A = 0$'dır. □

2.4 Geniş ve Tekil Altmodüller

Bu bölümde [4] kaynak olarak kullanılmştır.

Tanım 2.4.1 M bir sağ R–modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin sıfırdan farklı herhangi bir A altmodülü için $A \cap K \neq 0$ oluyorsa, K'ya *M'nin geniş (essential) altmodülü* veya *M'de geniştir* denir ve $K \leq_e M$ ile gösterilir. Bu durumda M'ye, *K'nın geniş genişlemesi (essential extension)* denir.

- M'nin sonlu sayıda geniş altmodülün arakesiti M'de geniştir.
- M'nin geniş bir altmodülünü içeren her altmodülü M'de geniştir.

Tanım 2.4.2 Eğer R'nin bir sağ ideali sağ R–modül olarak genişse yani, R'nin sıfırdan farklı her sağ ideali ile arakesiti sıfırdan farklı oluyorsa bu sağ ideale *geniş sağ ideal* denir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$ halkasında sıfırdan faklı her ideal geniştir. Çünkü $\mathbb{Z}$'deki sıfırdan farklı her ideal çifti sıfırdan farklı bir arakesite sahiptir.

Geniş altmodül olmanın bir başka denk koşulunu verelim.

Önerme 2.4.3 *M bir sağ R–modül olsun.*
$K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter kosul her $0 \neq m \in M$ için $mR \cap K \neq 0$ olmasıdır.

Önteorem 2.4.4 *M bir sağ R–modül, $0 \neq a \in M$ ve K, M'nin geniş altmodülü olsun. Bu durumda R'nin, $aL \neq 0$ ve $aL \subseteq K$ olacak şekilde R'nin bir geniş sağ ideali L vardır.*

İspat: $L = \{r \in R : ar \in K\}$ kümesini tanımlayalım. L, R'nin bir sağ idealidir ve $aL \subseteq K$'dır. K, M'de geniş olduğundan Önerme 2.4.3'ten $aR \cap K \neq 0$'dır. O halde bir $r \in R$ için ar, K'nın sıfırdan farklı bir elemanıdır. Buradan $aL \neq 0$ elde ederiz.

Şimdi L'nin R'de bir geniş sağ ideal olduğunu gösterelim. I, R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Amacımız $I \cap L \neq 0$ olduğunu göstermektir. $aI = 0$ ise bu durum gerçekleşir. $aI \neq 0$ olsun. aI, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü ve $K \leq_e M$ olduğundan $aI \cap K \neq 0$' dır. Buradan bir $x \in I$ için ax, K'nın sıfırdan farklı bir elemanıdır ve $x \in L$ olur. Böylece $I \cap L \neq 0$ elde edilir. □

Aşağıda vereceğimiz önerme, bir modülün geniş altmodüllerini elde etmekte önemli bir yoldur.

Tanım 2.4.5 A, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin herhangi bir C altmodülü, $A \cap C = 0$ özelliğine göre maksimal ise C'ye, *A'nın M'deki dik tamlayanı (direct complement)* denir.

Zorn Önteoreminden her $A \leq M$ altmodülünün M'de bir dik tamlayanı vardır. Gerçekten; A ve B R'nin $A \cap B = 0$ olacak şekilde iki altmodülü olsun.

$$\mathcal{S} = \{K \leq M : A \cap K = 0 \ , \ B \subseteq K\}$$

kümesine Zorn Önteoremini uygularsak, M'nin $A \cap C = 0$ ve $B \subseteq C$ olacak şekilde bir C maksimal altmodülünü elde ederiz. C, A'nın M'deki dik tamlayanıdır.

Önerme 2.4.6 *$A \leq M$ olsun. C, A'nın M'deki dik tamlayanı ise $A \oplus C \leq_e M$'dir.*

İspat: M'nin sıfırdan farklı her T altmodülü için $(A \oplus C) \cap T \neq 0$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $C \cap T = 0$'dır.

İddia: $A \cap (C \oplus T) = 0$'dır.

$a \in A \cap (C \oplus T)$ alalım. Bir $c \in C$ ve $t \in T$ için $a = c + t$ şeklindedir ve $t = a - c \in (A \oplus C) \cap T = 0$ olduğundan $t = 0$'dır. Böylece $a = c \in A \cap C = 0$ olur ki buradan $a = 0$'dır. İddia gerçeklenmiş olur. Fakat C, $A \cap C = 0$ olacak şekildeki maksimal altmodül olduğundan $C = C \oplus T$ olmalıdır. Yani $T \subseteq C$ ve böylece $C \cap T = T = 0$ olur ki bu $T \neq 0$ olması ile çelişir. Her $0 \neq T \leq M$ için $(A \oplus C) \cap T \neq 0$'dır. $A \oplus C \leq_e M$ elde edilir. □

R bir asal halka ise, R'nin sıfırdan farklı her ideali sağ ideal olarak geniştir. Gerçekten; I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve R' nin sıfırdan farklı bir J sağ ideali için $I \cap J = 0$ ise $JI = 0$ olur. 0 ideali R'de asal ideal olduğundan $I = 0$ veya $J = 0$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Yani I sağ ideal olarak geniştir.

Tanım 2.4.7 R bir halka olmak üzere $e^2 = e$ olacak şekildeki $e \in R$ elemanına *eşkare (idempotent) eleman* denir. Buna ek olarak her $r \in R$ için $er = re$ oluyorsa e'ye *merkez eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir halkada 0 ve 1 her zaman eşkare elemandır.

Önerme 2.4.8 *I, R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun.*

I, R'nin bir dik toplananıdır $\Leftrightarrow$ $I = eR$ olacak şekilde bir $e \in I$ eşkare elemanı vardır.

İspat: $I \leq_{\oplus} R$ yani, R'nin $R = I \oplus J$ olacak şekilde bir J ideali var olsun. Bu durumda $1 = e_1 + e_2$ olacak şekilde $e_1 \in I$ ve $e_2 \in J$ vardır. Herhangi bir $a \in I$ için $a = e_1 a + e_2 a$ yazarız. Buradan $a - e_1 a = e_2 a \in I \cap J = 0$ olur. Yani $a = e_1 a$'dir. Buradan $I = e_1 R$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi $e_1 \in I$'nin bir eşkare eleman olduğunu gösterelim. $1 = e_1 + e_2$ olduğundan $e_1 = e_1 e_1 + e_2 e_1$'dir. Buradan $e_1 - e_1^2 = e_2 e_1 \in I \cap J = 0$ olduğundan $e_1 = e_1^2$ elde ederiz.

Tersine; $e \in R$ eşkare eleman ve $I = eR$ olsun.

İddia: $R = eR \oplus (1 - e)R$'dir.

Öncelikle $eR \cap (1-e)R = 0$ olduğunu gösterelim. Bir $x \in eR \cap (1-e)$ alalım. $x \in eR$ ve $x \in (1-e)R$ olur. O halde $x = et$ ve $x = (1-e)k$ olacak şekilde $t, k \in R$ vardır. Buradan;

$et = k - ek \Rightarrow e(t+k) = k \Rightarrow e^2(t+k) = ek \Rightarrow et + ek = ek \Rightarrow et = 0 \Rightarrow x = 0$ olur.

Ayrıca her $r \in R$ için $r = er + (1-e)r$ olduğundan $R = eR + (1-e)R$ elde edilir. □

Tanım 2.4.9 I, bir R halkasının (sağ) ideali olmak üzere her $x \in I$ için $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa I'ya *nil (sağ) ideal* denir. Eğer $I^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa I'ya *üstel sıfır (nilpotent) (sağ) ideal* denir.

Tanım 2.4.10 M herhangi bir sağ R–modül olsun.

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0 \text{ olacak şekilde } I \leq_e R_R \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlı kümeye *tekil altmodülü (singular submodule)* denir.

Tanım 2.4.11 $Z(M) = M$ ise M'ye *tekil (singular) modül*, $Z(M) = 0$ ise M'ye *tekil olmayan (non-singular) modül* denir.

Tanım 2.4.12 R bir halka olmak üzere;

$$Z(R) = \{r \in R \mid rK = 0 \text{ olacak şekilde } R\text{'nin bir geniş ideali } K \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlı kümeye *R'nin sağ tekil ideali (right singular ideal)* denir. Sol tekil ideal de benzer şekilde tanımlanır. Eğer $Z(R) = 0$ ise R'ye *sağ (sol) tekil olmayan halka* denir.

Başka bir ifadeyle; bir $x \in R$ için $x \in Z(R)$ olması için gerek ve yeter koşul $r(x)$'in R'nin bir geniş ideali olmasıdır. Ayrıca, $Z(R)$ sağ (sol) tekil ideali R'nin bir çift yönlü idealidir.

Aşağıda ispatlayacağımız birkaç teorem ve sonuç, ileride vereceğimiz Goldie teoremleri ve bazı yararlı sonuçları için gerekmektedir.

Teorem 2.4.13 ***(Mewborn and Winton)*** *R sağ sıfırlayıcıları üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ise R'nin sağ tekil ideali üstel sıfırdır.*

İspat: İspat boyunca kolaylık sağlaması açısından R'nin sağ tekil ideali $Z(R)$'yi Z ile göstereceğiz. $Z \supseteq Z^2 \supseteq \cdots$ olduğundan $r(Z) \subseteq r(Z^2) \subseteq \cdots$ olur. Teoremin hipotezinden $r(Z^n) = r(Z^{n+1})$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $Z^{n+1} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $Z^n a \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in Z$ vardır. a elemanını $r(a)$ maksimal olacak şekilde seçelim. Bir $b \in Z$ alırsak $r(b)$, R'nin bir geniş sağ ideali olur. Dolayısıyla $aR \cap r(b) \neq 0$'dır. Buradan $ar \neq 0$ ve $ar \in r(b)$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır ve $bar = 0$ elde edilir. Ayrıca $ba \in Z$ ve $r(a) \subseteq r(ba)$ olduğunu biliyoruz. $ar \neq 0$ ve $bar = 0$ oluşu $r(a) \subsetneqq r(ba)$ olmasını gerektirir. a'nın seçiminden bu bir çelişkidir. Böylece yine a'nın seçiminden $Z^n ba = 0$ olur. $b \in Z$ keyfi bir eleman olduğundan $Z^{n+1} a = 0$ ve dolayısıyla $Z^n a = 0$ elde ederiz. □

2.5 Yarıbasit Halka ve Modüller

Bu bölümdeki tanım ve teoremler için [11] kaynak alınmıştır.

Tanım 2.5.1 Bir $0 \neq A$ modülünün aşikar olmayan hiçbir altmodülü yoksa A'ya *basit modül (simple module)* denir.

Tanım 2.5.2 A modülünün *sokulu* A'nın tüm basit altmodüllerin (dik) toplamı, aynı zamanda tüm geniş altmodüllerinin arakesitidir ve $\mathrm{Soc}(A)$ ile gösterilir. ($\mathrm{Soc}(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A'nın hiç basit altmodülünün olmamasıdır.)

Tanım 2.5.3 Bir A modülü için $\mathrm{Soc}(A) = A$ oluyorsa yani, $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, A modülünün basit altmodüllerinin ailesi olmak üzere, $A = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ yazılımı varsa A'ye *yarıbasit modül (semisimple module)* denir.

Bu tanımdan her basit modülün yarıbasit modül olduğu aşikardır.

Önteorem 2.5.4 ***(Modüler Kuralı)*** *A bir R–modül ve $B, CveD$ A modülünün birer altmodülü olsun.*

$$B \leq D \;\Rightarrow\; (B + C) \cap D = B + (C \cap D)\text{'dir.}$$

İspat: [3, Teorem 2.1.12] □

Tanım 2.5.5 A bir R–modül, $\{A_i \mid i \in I\}$ A modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer A_i'lerin toplamı bir dik toplamsa yani, $A_i \cap (\sum_{i \neq k} A_k) = 0$ ise $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesine *bağımsız aile (independent family)* denir.

Önerme 2.5.6 *Bir A modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul A'nın her altmodülünün A'nın bir dik toplananı olmasıdır.*

İspat: A modülü yarıbasit ve B, A'nın bir altmodülü olsun. Zorn Önteoreminden A'nın, öyle bir C altmodülü vardır ki C, $B \cap C = 0$ özelliği ile maksimaldir. (C, B'nin A'daki dik tamlayanıdır.)

İddia: $A = B \oplus C$'dir.

$B \oplus C \lneqq A$ olsun. Bu durumda A'nın bir basit altmodülü S vardır ki $S \nleq B \oplus C$'dir. Buradan $S \cap (B \oplus C) \neq S$ olur. S basit altmodül olduğundan $S \cap (B \oplus C) = 0$'dır. Dolayısıyla $S + (B \oplus C)$ bir dik toplamdır. Yani $\{S, B, C\}$ bağımsızdır. Buradan $B \cap (C \oplus S) = 0$ elde edilir. Fakat bu durum C'nin maksimal oluşuyla çelişir.

Tersine, A'nın her altmodülü A'nın bir dik toplananı olsun. Özel olarak A'nın bir B altmodülü için $A = \mathrm{Soc}(A) \oplus B$ yazılabilir. $B \neq 0$ olduğunu kabul edelim. C, B'nin sıfırdan farklı bir devirli altmodülü ve c, C'nin bir üreteci olsun. $\{X \mid X \subseteq cR\ ,\ c \notin X\}$ kümesine Zorn Önteoremini uygularsak C'nin öyle bir M altmodülü vardır ki M, $c \notin M$ özelliği ile maksimaldir. Bu durumda M, C'nin bir maksimal öz altmodülü olur. Kabulden A'nın bir N altmodülü için $A = M \oplus N$'dir. Buradan $M \leq C$ olduğundan Önteorem 2.4.4'den $C = C \cap (M \oplus N) = M \oplus (C \cap N)$ elde ederiz. Ayrıca $C \cap N \cong C/M$'dır ki buradan $C \cap N$, A'nın bir basit altmodülüdür. Yani $C \cap N \leq \mathrm{Soc}(A)$'dır. $C \cap N \leq B$ olduğundan, bu durum mümkün değildir. $B = 0$ olmalıdır. □

Sonuç 2.5.7 *Yarıbasit bir modülün her alt modülü yarıbasittir.*

İspat: A bir yarıbasit modül C, A'nın bir altmodülü ve B de C'nin bir altmodülü olsun. Bu durumda B, A'nın bir dik toplananıdır. A'nın bir D altmodülü için $A = B \oplus D$ yazılabilir. Buradan Önteorem 2.5.4'den $C = C \cap (B \oplus D) = B \oplus (C \cap D)$ elde ederiz. B, C'nin bir dik toplananı olur. Önerme 2.5.6'dan C yarıbasittir. □

Teorem 2.5.8 [11, Teorem 4.4] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *Tüm sağ R–modüller yarıbasittir.*

(2) *Tüm sol R–modüller yarıbasittir.*

(3) *R_R yarıbasittir.*

(4) *${}_RR$ yarıbasittir.*

(5) *$R = 0$'dır ya da her $i = 1 \cdots k$ için D_i bir bölümlü halka ve n_i bir pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$$

şeklindedir. (Burada $M_{n_k}(D_k)$, D_k bölümlü halkası üzerinde tanımlı olan $n_k \times n_k$'lık matrislerin halkasıdır.)

Tanım 2.5.9 Yukarıdaki teoremin koşullarını sağlayan bir halkaya *yarıbasit halka (semisimple ring)* denir.

Teorem 2.5.10 ***(Wedderburn Artin Teoremi)*** *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Artindir ve $J(R) = 0$'dır.*

(2) *R sol Artindir ve $J(R) = 0$'dır.*

(3) *R yarıbasittir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3): $\mathcal{B}$=$\{I \mid I$ R'de sağ ideal ve R/I bir yarıbasit modül $\}$ olsun. $R \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B} \neq \emptyset$'dır. R sağ Artin olduğundan $\mathcal{B}$'nin bir minimal elemanı vardır. Bu elemana K diyelim. $K \neq 0$ ise $J(R) = 0$ olduğundan R'nin, $K \nleq M$ olacak şekilde bir M maksimal sağ ideali vardır. M maksimal olduğundan $K + M = R$ ve böylece

$$R/(K \cap M) \cong (R/K) \oplus (R/M)$$

olur. Buradan $R/(K \cap M)$ yarıbasittir. Bu durum K'nın $\mathcal{B}$'de minimal oluşuyla çelişir. Yani $K = 0$ olmalıdır. O halde R_R yarıbasittir.

(3) $\Rightarrow$ (1): R_R yarıbasit olduğundan, her i için S_i bir basit sağ R–modül olmak üzere $R_R = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$ olacak şekilde yazılır. (R_R sonlu üretilmiş olduğundan bu dik toplam sonlu olmak zorundadır.) Her i için S_i Artin olduğundan Önerme 2.1.11'den R sağ Artindir. Her bir $r(S_i)$ sağ sıfırlayıcısı R'nin bir sağ ilkel ideali olduğundan $J(R)$'yi içerir. Dolayısıyla her i için $S_iJ(R) = 0$'dır. Buradan $J(R) = 0$ elde ederiz.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Sağ için yapılan ispat sol için de uygulanabilir. $\square$

Teorem 2.5.11 [11, Sonuç 4.17] ***(Noether)*** *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Artin ve yarıasaldır.*

(2) *R sol Artin ve yarıasaldır.*

(3) *R yarıbasittir.*

Sonuç 2.5.12 [11, Sonuç 4.18] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R asal ve sağ Artindir.*

(2) *R asal ve sol Artindir.*

(3) *R basit ve sağ Artindir.*

(4) *R basit ve sol Artindir.*

(5) *R basit ve yarıbasittir.*

(6) *Bir D bölümlü halkası ve n pozitif tamsayısı için* $R \cong M_n(D)$*'dir.*

Tanım 2.5.13 Yukarıdaki sonucun koşullarını sağlayan halkaya *basit Artin halka (simple Artinian ring)* denir.

2.6 Bölüm Halkaları

Bu bölümde [4] ve [16] kaynak olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.6.1 R bir halka olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan Q halkasına (eğer varsa) *R'nin bir sağ bölüm halkası (right quotient ring)* denir.

(1) R, Q'nun bir althalkasıdır.

(2) R'nin her regüler elemanı Q'da tersinirdir.

(3) Q'nun her elemanı $a, c \in R$ ve c, R'de regüler olmak üzere ac^{-1} formundadır. (Yani bir regüler $c \in R$ için $qc \in R$'dir.)

Sol bölüm halkası da benzer şekilde tanımlanır. (ac^{-1} yerine ca^{-1})

R'nin sağ bölüm halkası, eğer varsa, izomorfizma farkıyla tektir. (R'nin herhangi iki sağ bölüm halkası, R üzerine kısıtlandığında birim fonksiyon olan bir homomorfizma altında izomorftur.) Ayrıca R'nin hem sağ hem sol bölüm halkası varsa bunlar eşittir. Bunu ileride ispatlayacağız.

Tanım 2.6.2 Q'nun her regüler elemanının Q'da tersi varsa Q'ya *bölüm halkası (quotient ring)* denir.

R bir halka ve Q, R'nin sağ bölüm halkası olsun. O halde Q bir bölüm halkasıdır: $a, c \in R$ ve c, R de regüler olmak üzere $q = ac^{-1} \in Q$, Q'nun bir regüler elemanı olsun. q'nun Q da tersinir olduğunu göstermek için a'nın R'nin bir regüler elemanı olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in R$ için $xa = 0$ olsun. Bu durumda $xq = 0$ olur. q, Q'da regüler olduğundan $x = 0$'dır. Yani a, R'de sol regülerdir. Şimdi $ay = 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ alalım.

$$\begin{aligned} a = qc \Rightarrow qcy &= 0 \\ \Rightarrow cy &= 0 \\ \Rightarrow y &= 0 \end{aligned}$$

olur. a, R'de sağ regülerdir.

Tanım 2.6.3 Aşağıdaki koşulları sağlayan R halkasına, bir Q bölüm halkasında *sağ düzen halkası (right order)* denir.

(1) $R \subseteq Q$

(2) Q'nun her elemanı $a, c \in R$ ve c, R'de regüler olmak üzere ac^{-1} formundadır. Burada c^{-1}, $c \in R$ regüler elemanının Q'daki tersidir.

R, Q'da bir sağ düzen halkası ve T, $R \subseteq T \subseteq Q$ olacak şekilde bir halka olsun. T'nin de Q'da bir sağ düzen halkası olduğu kolayca gösterilebilir.

Düzen halkası ve bölüm halkası tanımlarını kıyaslayacak olursak aşağıdaki durumları elde ederiz.

(1) R'nin sağ bölüm halkası Q ise R, Q'da bir sağ düzen halkasıdır.

(2) R, Q'da bir sağ düzen halkası olsun. Q'nun, R'nin sağ bölüm halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin regüler elemanlarının Q'nun elemanları olarak da regüler olmasıdır.

Örneğin; R, Q'da aynı zamanda bir sol düzen halkası ya da Q Artinse ikinci koşul sağlanır. (Aşağıdaki önteoremden sonra bu durumu inceleyeceğiz.)

Önteorem 2.6.4 *R bir sağ Artin halka olsun. Her $c \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R'de $r(c) = 0$'dır.*

(2) *c, R'nin bir regüler elemanıdır.*

(3) *c, R'de tersinirdir.*

İspat: (3) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (1) açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (3): $r(c) = 0$ olsun. R'nin sağ ideallerinin

$$cR \supseteq c^2R \supseteq c^3R \supseteq \cdots$$

şeklindeki azalan zincirini ele alalım. R Artin halka olduğundan $c^nR = c^{n+1}R$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Buradan bir $x \in R$ için $c^n = c^{n+1}x$ yazılabilir. Yani; $c^n(cx-1) = 0$ olur. Ayrıca $r(c) = 0$ olması $r(c^n) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $cx = 1$ olur. O halde c'nin sağ tersi vardır.

Şimdi $1 = cx$ ifadesinin her iki tarafını sağdan c ile çarpalım. $c = cxc$ ve buradan $c(1-xc) = 0$ olur. $xc = 1$ yani, c'nin sol tersi vardır. O halde c, R'de tersinir olur. □

Önerme 2.6.4'ten Artin halkalar bölüm halkasıdır.

Şimdi R'nin, Q'da bir sağ düzen halkası olduğunu kabul edelim. c, R'nin bir regüler elemanı ve bir $q \in Q$ için $cq = 0$ olsun. $a, b \in R$ ve b regüler olmak üzere $q = ab^{-1}$ olduğundan;

$$\begin{aligned} ca = cqb = 0 &\Rightarrow a = 0 \\ &\Rightarrow q = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece c, Q'da sağ regüler olur.

Eğer R aynı zamanda Q'da bir sol düzen halkası ise benzer şekilde c'nin sol regüler olduğunu gösterebiliriz. Yani c, Q'da regüler olur.

Eğer Q bir Artin halkaysa o zaman Önteorem 2.6.4'ten c, Q'da sağ regüler iken regüler olur. Böylece her iki durumda da Q, R'nin sağ bölüm halkasıdır.

Önteorem 2.6.5 *R bir sağ Artin halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $c = ab$ olsun. c'nin regüler olması için gerek ve yeter koşul a ve b'nin regüler olmasıdır.*

İspat: a ve b regüler iken c'nin regüler olduğu açıktır.

Tersine; c regüler olsun. Bu durumda $r(b) = 0$'dır. Önteorem 2.6.4'ten b, R'de regülerdir. Ayrıca $b^{-1} \in Q$ ve b^{-1}, R'de regüler olur. Böylece $a = (ab)b^{-1}$ olduğundan a regüler olur. □

Aşağıda tanımlayacağımız Ore koşulu bir halkanın bölüm halkasının var olup olmadığını belirlememizi sağlar.

Tanım 2.6.6 R bir halka ve S, R' nin bir altkümesi olsun.

1. $0 \notin S$.
2. $a, b \in S$ iken $ab \in S$.

koşullarını sağlayan S'ye *çarpımsal kapalı küme (multiplicatively closed set)* denir.

Tanım 2.6.7 R bir halka ve S, R'nin bir çarpımsal kapalı altkümesi olsun.Verilen $x \in R$ ve $a \in S$ için $xb = ay$ olacak şekilde $y \in R$ ve $b \in S$ varsa R'ye *S kümesi ile sağ Ore koşulunu sağlar (right Ore condition)* denir. Sol Ore koşulu da benzer şekilde tanımlanır.

Önteorem 2.6.8 *R bir halka, S, R'nin bir çarpımsal kapalı kümesi ve I, R'nin S'de kapsanan bir ideali olsun. Bu durumda,*

R halkası S kümesi ile (sağ) Ore koşulunu sağlıyorsa R/I halkası S/I kümesi ile (sağ) Ore koşulunu sağlar.

Teorem 2.6.9 [6, Syf. 66] *R bir halka olsun. Q'nun, R'nin bir sağ bölüm halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin, $C(0)$ kümesi ile sağ Ore koşulunu sağlamasıdır yani; verilen $a, c \in R$ ve $c \in \mathcal{C}(0)$ için $ad = cb$ olacak şekilde $b, d \in R$ ve $d \in \mathcal{C}(0)$ vardır.*

Eğer sağ ve sol bölüm halkası varsa eşittir ve kısaca R'nin bölüm halkasıdır denir. Gerçekten, R bir halka ve Q, R'nin sağ bölüm halkası olsun. Kabul edelim ki R sol Ore koşulunu sağlasın, (yani R'nin bir sol bölüm halkası var olsun). Q'nun aynı zamanda R'nin sol bölüm halkası olduğunu gösterelim. $q \in Q$ olsun. O halde,

$$a, c \in R \text{ ve } c \in \mathcal{C}(0) \text{ olmak üzere } q = ac^{-1}$$

olur. R sol Ore koşulunu sağladığından, $da = bc$ olacak şekilde $b \in R$ ve $d \in \mathcal{C}(0)$ vardır. Buradan $q = ac^{-1} = d^{-1}b$ olur.

Şimdi Q, R'nin bir sağ bölüm halkası ve I, Q'nun bir sağ ideali olsun. $q \in I$ ise R'nin bir regüler elemanı c için $qc \in R$'dir. Buradan;

$$q = qcc^{-1}\ ,\ \ qc \in I \cap R \quad \text{ve} \quad c^{-1} \in Q$$

olur. $I \subseteq (I \cap R)Q$ elde edilir. Ayrıca $(I \cap R)Q \subseteq I$ olduğu kolayca gösterilebilir. Yani,

$$(I \cap R)Q = I$$

elde edilir. Bu eşitlik R'nin bazı özelliklerini Q'ya aktarmamızı sağlayacaktır.

Örneğin; R yarıasal, asal, basit, sağ Noether, sağ Artin veya sonlu Goldie boyutuna sahipse (bir sonraki bölümde verilecek) Q halkasının da aynı özelliklere sahip olduğunu söyleyebiliriz.

R'nin sağ bölüm halkasının herhangi sonlu alt kümesinin elemanlarını aynı payda ile kesir şeklinde yazabiliriz: $q_1, q_2 \in Q$ olsun. O halde R'nin öyle c_1, c_2 regüler elemanları vardır ki $q_1c_1 \in R$ ve $q_2c_2 \in R$'dir. q_1 ve q_2'yi ortak bir c paydası ile kesir olarak yazmak için $q_1c \in R$ ve $q_2c \in R$ olacak şekilde R'nin bir c regüler elemanını bulmalıyız. Bunun için de $c_1R \cap c_2R$'nin bir c regüler elemanını içerdiğini göstermek yeterlidir. R sağ Ore koşulunu sağladığından ve c_2 regüler olduğundan, $c_1x_1 = c_2x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in R$ ve $x_1 \in \mathcal{C}(0)$ vardır. $c = c_1x_1$ alırsak, c regüler ve $c \in c_1R \cap c_2R$ olur.

Bu durumu Q'nun elemanlarının sonlu bir altkümesine genişletebiliriz.

Sonuç 2.6.10 [16, Sonuç 1.1.9] *R, Q'nun bir sağ düzen halkası ve I, R'nin bir sağ ideali olsun.*

$$IQ = \{ac^{-1} \mid \ a \in I \ , c \in R \textit{ ve } c, \textit{ R'de regüler}\}$$

Teorem 2.6.11 *R bir halka, Q R'nin sağ Noether bir sağ bölüm halkası ve I, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda IQ, Q'nun bir idealidir.*

İspat: Amacımız $QIQ \subseteq IQ$ olduğunu göstermektir. Q'nun her elemanı, $r, c \in R$ ve c, R de regüler olmak üzere rc^{-1} formundadır.

Dolayısıyla R'nin her c regüler elemanı için $c^{-1}IQ \subseteq IQ$ olduğunu göstermek yeterlidir. $cI \subseteq I$ olduğundan $I \subseteq c^{-1}I$ olur. Böylece;

$$IQ \subseteq c^{-1}IQ \subseteq c^{-2}IQ \subseteq c^{-3}IQ \subseteq \cdots$$

şeklinde artan zincir elde ederiz. Q sağ Noether olduğundan $c^{-n}IQ = c^{-(n+1)}IQ$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Her iki tarafı soldan c^n ile çarparsak $IQ = c^{-1}IQ$ elde ederiz. □

2.7 Goldie Teoremleri

Bu bölümde [4] ve [16] kaynak olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.7.1
- U sıfırdan farklı bir R–modül olsun. Eğer U'nun herhangi iki sıfırdan farklı altmodülünün arakesiti sıfırdan farklıysa, yani U'nun sıfırdan farklı her altmodülü U'da genişse U'ya *düzgün modül (uniform module)* denir.

- M bir R–modül olsun. Eğer M, sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz dik toplamını içermiyorsa M'ye *sonlu Goldie boyutuna sahiptir (finite Goldie dimension)* denir. M modülü Noether veya Artinse, sonlu Goldie boyutuna sahiptir.

- Bir R halkası, R–modül olarak sonlu Goldie boyutuna sahipse R'ye *sonlu Goldie boyutuna sahiptir* denir.

- Eğer R sonlu sağ Goldie boyutuna sahip ve sağ sıfırlayıcıları üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa, R'ye *sağ Goldie halkası (Goldie ring)* denir. Bir sağ Noether halka, sağ Goldie halkasıdır. Fakat herhangi değişmeli tamlık bölgesi bir Goldie halkası olduğundan tersi her zaman doğru değildir.

M sonlu Goldie boyutuna sahip bir modül olsun. M'nin her altmodülü sonlu Goldie boyutuna sahiptir. Fakat bu durum M'nin herhangi bölüm modülü için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Q}$'nun bir $\mathbb{Z}$-modül olarak Goldie boyutu 1'dir. Fakat $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sonlu Goldie boyutuna sahip değildir.

Aşağıdaki önteorem Goldie teoremlerinin ispatı için gerekli olmasa da sonlu Goldie boyutuna sahip modüllerin temel özelliklerini ifade etmektedir.

Önteorem 2.7.2 [4, Önteorem 1.9] *M sıfırdan farklı bir sağ $R-$ modül olsun.*

(1) *M sonlu Goldie boyutuna sahipse M'nin sıfırdan farklı her altmodülü bir düzgün altmodül içerir. Ayrıca M'nin, toplamları dik ve M'de geniş olan sonlu tane düzgün altmodülü vardır.*

(2) *$U_1, \cdots, U_n$, M'nin, $U_1 + \cdots + U_n$ toplamı dik ve M'nin geniş altmodülü olacak şekilde düzgün altmodülleri olsun. Bu durumda M sonlu Goldie boyutuna sahiptir ve n sayısı U_i'lerin seçiminden bağımsızdır.*

Tanım 2.7.3 Önteorem 2.7.2'de belirtilen n sayısına M'nin *Goldie boyutu (Goldie dimension)* denir ve $dimM$ ile gösterilir.

Önerme 2.7.4 *R sonlu sağ Goldie boyutuna sahip bir halka ve c, R'nin bir sağ regüler elemanı olsun. Bu durumda cR, R'nin bir geniş sağ idealidir.*

İspat: I, R'nin bir sağ ideali ve $cR \cap I = 0$ olsun. Bu durumda,

$$I + cI + c^2I + \cdots$$

toplamı diktir. R sonlu Goldie boyutuna sahip olduğundan $c^n I = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. c sağ regüler olduğundan;

$$c^{n-1}I = 0, c^{n-2}I = 0 \cdots , cI = 0$$

olur. Sonuç olarak $I = 0$'dır. □

Önteorem 2.7.5 *R sonlu sağ Goldie boyutuna sahip bir sağ tekil olmayan halka olsun. Bu durumda R'nin sağ regüler elemanları regülerdir.*

İspat: $c \in R$ sağ regüler olsun. Önerme 2.7.4'ten cR, R'nin geniş sağ idealidir. Ayrıca $l(c) = l(cR)$ olduğu kolayca gösterilebilir. $y \in l(c)$ alalım. $ycR = 0$ ve cR, R'nin geniş sağ ideali olduğundan $y \in Z(R)$'dir. R sağ tekil olmayan halka olduğundan $y = 0$ olur. İstenen elde edilir. □

Sonuç 2.7.6 *R bir yarıasal sağ Goldie halkası olsun. Bu durumda R'nin sağ regüler elemanları regülerdir.*

İspat: Teorem 2.4.13'ten R'nin sağ tekil ideali üstel sıfırdır. O halde $(Z(R))^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. R yarıasal olduğundan $Z(R) = 0$ olur. O halde R sağ tekil olmayan halkadır. Önteorem 2.7.5'ten, R'nin sağ regüler elemanları regüler olur. □

Teorem 2.7.7 *R sağ sıfırlayıcıları ile artan zincir koşulunu sağlayan bir yarıasal halka olsun. Bu durumda R'nin sıfırdan farklı nil tek yönlü ideali yoktur.*

İspat: I, R'nin sıfırdan farklı bir tek yönlü ideali ve $0 \neq a \in I$, $r(a)$ maksimal olacak şekilde bir eleman olsun. R yarıasal olduğundan $axa \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Dolayısıyla axa, I'nın sıfırdan farklı bir elemanıdır ve $r(a) \subseteq r(axa)$'dır. a'nın seçiminden dolayı $r(a) = r(axa)$ olmalıdır. Ayrıca $ax \neq 0$ yani, $x \notin r(a)$'dır. Böylece $x \notin r(axa)$ ve $(ax)^2 \neq 0$'dır. Buradan $xax \notin r(a)$ yani $(ax)^3 \neq 0$'dır. Böyle devam edersek; I'nın elemanı olan ax'in (benzer şekilde xa) üstel sıfır eleman olmadığını görürüz. O halde I nil ideal olamaz. □

Teorem 2.7.8 *R bir yarıasal sağ Goldie halkası ve I, R'nin bir geniş sağ ideali olsun. Bu durumda I, R'nin bir regüler elemanını içerir.*

İspat: R'nin bir sağ regüler eleman içerdiğini gösterirsek Sonuç 2.7.6'dan bir regüler eleman içerdiğini göstermiş oluruz. Teorem 2.7.7'den I nil ideal değildir. a_1, I'nın $r(a_1)$ maksimal olacak şekilde üstel sıfır olmayan bir elemanı olsun. $r(a_1) \subseteq r(a_1^2)$ ve $a_1^2 \in I$ üstel sıfır değildir. a_1'in seçiminden $r(a_1) = r(a_1^2)$ olmalıdır.

$r(a_1) = 0$ ise istenen elde edilir. $r(a_1) \neq 0$ olsun. O zaman $r(a_1) \cap I \neq 0$'dır. a_2, $r(a_1) \cap I$'nın üstel sıfır olmayan bir elemanı olsun. a_2'yi $r(a_2)$ maksimal olacak şekilde seçelim. Benzer şekilde $r(a_2) = r(a_2^2)$ olmalıdır.

1.İddia: $a_1R + a_2R$ toplamı diktir.

$r_1, r_2 \in R$ için $a_1r_1 = a_2r_2$ olsun. $a_2 \in r(a_1)$ olduğundan $a_1a_2 = 0$'dır. O halde $a_1^2r_1 = 0$'dır. Buradan da $a_1r_1 = 0$ elde ederiz. $a_1R \cap a_2R = 0$'dır. Yani $a_1R + a_2R$ toplamı diktir.

Buradan $r(a_1 + a_2) = r(a_1) \cap r(a_2)$ olduğu gösterilebilir.

Eğer $r(a_1 + a_2) = 0$ ise istenen elde edilir. $r(a_1 + a_2) \neq 0$ olsun. a_3, $r(a_1 + a_2) \cap I$'nın üstel sıfır olmayan bir elemanı olsun. a_3'ü $r(a_3)$ maksimal olacak şekilde seçelim. Benzer şekilde $r(a_3) = r(a_3^2)$ olmalıdır.

2.İddia: $a_1R + a_2R + a_3R$ toplamı diktir.

$r_1, r_2, x \in R$ için $a_3x = a_1r_1 + a_2r_2$ olsun. $a_3 \in r(a_1 + a_2) = r(a_1) \cap r(a_2)$ olduğundan $a_1a_2 = a_1a_3 = a_2a_3 = 0$'dır. Böylece $a_1r_1 = a_2r_2 = 0$ elde edilir. $a_3x = 0$ ve buradan da $(a_1R + a_2R) \cap a_3R = 0$'dır. İstenen elde edilir. Bu bilgiden,

$$r(a_1 + a_2 + a_3) = r(a_1) \cap r(a_2) \cap r(a_3)$$

olduğu gösterilebilir. R sonlu Goldie boyutuna sahip olduğundan bu işlem sonlu adımda durmalıdır. Yani I'nın öyle $a_1, \cdots, a_n$ elemanlarını buluruz ki

$$r(a_1 + \cdots + a_n) = 0$$

olur. Sonuç 2.7.6'dan bu eleman aynı zamanda regülerdir. □

R bir yarıasal halka, A ve B, R'nin $AB = 0$ olacak şekilde iki sağ ideali olsun.

$$(BA)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad (A \cap B)^2 = 0$$

olduğundan $BA = 0$ ve $A \cap B = 0$ elde ederiz.

Şimdi I, R'nin bir ideali olsun. $I.r(I) = 0$'dır. Yukarıdaki bilgiden $r(I).I = 0$ olur. Benzer şekilde $I.l(I) = 0$'dır. Böylece $r(I) = l(I)$ elde edilir.

Şimdi Goldie'nin yarıasal ve asal halkalar üzerindeki önemli teoremlerini ispatlayalım.

Teorem 2.7.9 ***(Goldie)*** *R bir halka olsun. R'nin yarıbasit Artin bir sağ bölüm halkasına sahip olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarıasal sağ Goldie halkası olmasıdır.*

İspat: R yarıasal sağ Goldie halkası, $a, c \in R$ ve c, R'de regüler olsun. Önteorem 2.7.4'ten cR, R'nin bir geniş sağ idealidir. O halde Önteorem 2.4.4'ten $0 \neq a \in R$ için $aL \subseteq cR$ olacak şekilde bir L geniş sağ ideali vardır. Ayrıca $K = \{r \in R \mid ar \in cR\}$ kümesi de R'nin bir geniş sağ idealidir.

Böylece Teorem 2.7.8'den K, R'nin bir regüler elemanını içerir. Bu elemana d diyelim. Yani $ad \in cR$ olacak şekilde bir $d \in R$ regüler elemanı vardır. O halde R halkası regüler elemanlarıyla sağ Ore koşulunu sağlar ve böylece bir sağ bölüm halkasına sahiptir. R'nin sağ bölüm halkasını Q ile gösterelim.

Q'nun yarıasal olduğunu biliyoruz. A ve B, Q'nun $B \subseteq A$ olacak şekilde iki sağ ideali ve $B \cap R$, $A \cap R$'nin geniş sağ R–altmodülü olsun. $A = B$ olduğunu gösterelim. Bir $x \in A \cap R$ alalım. $B \cap R \leq_e A \cap R$ olduğundan Önteorem 2.4.4'ten R'nin, $xK \subseteq B \cap R$ olacak şekilde bir geniş sağ ideali K vardır. Ayrıca Teorem 2.7.8'den K, R'nin bir regüler elemanını içerir. Bu elemana c diyelim. Böylece;

$$xc \in B \cap R \quad \text{ve} \quad x = xcc^{-1} \in (B \cap R)Q = B$$

olur. $A \cap R \subseteq B$ ve buradan da $A = (A \cap R)Q \subseteq B$ elde ederiz.

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \cdots$$

Q'nun sağ ideallerinin kesin azalan bir zinciri olsun. Her i için R'nin

$$X_i \subseteq R \cap A_i \text{ ve } X_i \cap (R \cap A_{i+1}) = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı X_i idealleri mevcuttur. Gerçekten, $X_i \subseteq R \cap A_i$ olan her sıfırdan farklı X_i ideali için $X_i \cap (R \cap A_{i+1}) \neq 0$ olsaydı, $A_{i+1} \cap R \leq_e A_i \cap R$ olurdu. Ayrıca $A_{i+1} \subseteq A_i$ olduğundan bir önceki paragraftan $A_{i+1} = A_i$ olurdu. Bu durum A_i'lerin birbirinden farklı olmasıyla çelişir.

Ayrıca $X_1 + X_2 + \cdots$ toplamı diktir ve R sağ Goldie halkası olduğundan bu toplam sonludur. Dolayısıyla her X_i idealine karşılık bir A_i ideali var olduğundan sonlu tane A_i ideali olmalıdır. Böylece Q sağ Artindir. Q yarıasal ve sağ Artin halka olduğundan yarıbasit Artindir.

Tersine Q, R'nin yarıbasit Artin olan bir bölüm halkası olsun. Q sol sıfırlayıcıları ile azalan zincir koşulunu (DCC) sağladığından buna denk olarak, sağ sıfırlayıcıları ile artan zincir koşulununu (ACC) sağlar. Dolayısıyla R de sağ sıfırlayıcıları ile artan zincir koşulunu sağlar. Ayrıca A ile B, R'nin $A \cap B = 0$ olacak şekilde iki sağ ideali iken $AQ \cap BQ = 0$'dır. Bunu kullanarak R'nin sonlu sağ Goldie boyutuna sahip olduğunu gösterelim. Her i için B_i'ler R'nin sıfırdan farklı idealleri ve $B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \subseteq R$ olsun. Her $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = 0$'dir. Buradan $B_iQ \cap B_jQ = 0$'dır. Yani;

$$B_1Q + B_2Q + B_3Q \cdots$$

toplamı diktir. Q sağ Artin olduğundan Teorem 2.1.11'den sağ Noetherdir. O halde sonlu Goldie boyutuna sahiptir. Dolayısıyla B_i'lerin sayısı sonlu olmalıdır.

Şimdi R'nin yarıasal olduğunu gösterelim. N, R'nin $N^2 = 0$ olacak şekilde bir ideali olsun. Öncelikle Q'nun, $QNQ = eQ$ olacak şekilde bir e merkez eşkare elemanının var olduğunu gösterelim. Önerme 2.4.8'den Q yarıbasit ve QNQ, Q'nun bir sağ ideali olduğundan Q'nun $QNQ = eQ$ olacak şekilde bir e eşkare elemanı vardır. QNQ aynı zamanda Q'nun sol ideali olduğundan, Önerme 2.4.8'in sol versiyonundan $QNQ = Qf$ olacak şekilde bir f eşkare elemanı vardır. Hatta $e = f$ ve e merkez eşkaredir.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} e \in QNQ = Qf &\Rightarrow e = qf \ , \ q \in Q \\ &\Rightarrow ef = qf^2 = qf \\ &\Rightarrow e = ef \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} f \in QNQ = eQ &\Rightarrow f = eq^{'}, \ q' \in Q \\ &\Rightarrow ef = e^2q' = eq' \\ &\Rightarrow ef = f \end{aligned}$$

olur. Yani, $e = f$ ve $eQ = Qe$ elde ederiz. Sonuç olarak $e \in Q$ merkez eşkare elemandır.

$$e = x_1n_1y_1 + \cdots + x_kn_ky_k \quad ; \ x_i, y_i \in Q \ \ , \ \ n_i \in N$$

olacak şekilde yazılır. Her i için y_i'ler aynı payda ile kesir olarak yazılabildiğinden, R'nin bir c regüler elemanı ve $a_i \in R$ için $y_i = a_ic^{-1}$'dir. Böylece $ec \in QN$ olur. O halde,

$$ecN \in QN^2 = 0 \Rightarrow 0 = ecN = ceN \Rightarrow eN = 0$$

olur. $N \subseteq QNQ$ yani, $N \subseteq eQ$ olduğundan $N = eN = 0$ elde edilir.

□

Teorem 2.7.10 ***(Goldie)*** *R bir halka olsun. R'nin basit Artin bir sağ bölüm halkasına sahip olması için gerek ve yeter koşul R'nin asal sağ Goldie halkası olmasıdır.*

İspat: R bir asal sağ Goldie halkası olsun. O halde R yarıasaldır ve Teorem 2.7.9'dan R'nin bir yarıbasit Artin bölüm halkası mevcuttur. R'nin bölüm halkasına Q diyelim ve Q'nun basit olduğunu gösterelim.

I, Q'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. O halde $I \cap R$, R'nin sıfırdan farklı bir idealidir. Bir asal halkanın sıfırdan farklı her ideali tek yönlü ideal olarak, geniş olduğundan $I \cap R$ bir sağ ideal olarak geniştir. O halde Teorem 2.7.8'den bir regüler eleman içerir. Bu elemana c diyelim. Fakat c, Q'da tersinirdir. I ideali tersinir eleman içerdiğinden $I = Q$ olur. İstenen elde edilir.

Tersine; Q, R'nin basit Artin olan bir sağ bölüm halkası olsun. O zaman Q yarıbasit Artindir. Yani, R'nun asal halka olduğunu göstermek yeterlidir. İspatı Teorem 2.7.9'a benzer şekilde gerçekleştireceğiz. A ve B, R'nin iki ideali, $AB = 0$ ve $A \neq 0$ olsun. $B = 0$ olduğunu gösterelim.

$QAQ = eQ$ olacak şekilde bir $e \in Q$ merkez eşkare eleman bulabiliriz.

$$e = x_1a_1y_1 + \cdots + x_ka_ky_k \quad ; \quad x_i, y_i \in Q \quad \text{ve} \quad a_i \in A$$

olacak şekilde yazılır. $ec \in QA$ olacak şekilde bir $c \in R$ regüler elemanı vardır. $AB = 0$ olduğundan $ecB = 0$'dır. $e \in Q$ merkez eşkare eleman olduğundan $ceB = 0$ olur. c regüler olduğundan $eB = 0$ elde edilir.

$$B \subseteq QBQ = eQ \Rightarrow B \subseteq eB$$

olur. $eB = 0$ olduğundan istenen elde edilir. □

Şimdi zincir koşulları bölümünde Noether halkada herhangi idealler için vermiş olduğumuz Önerme 2.1.2'nin, asal Goldie halkasında geniş idealler için doğru olduğunu göstereceğiz. Bu teorem Asano düzen halkalarının yerelleştirilmesi konusunda kullanılacaktır.

Teorem 2.7.11 *R bir asal sağ Goldie halkası olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) R geniş sağ idealleri ile artan zincir koşulunu sağlar.

(b) R'nin geniş sağ ideallerin boştan farklı bir ailesinin bir maksimal elemanı vardır.

(c) R'nin geniş sağ idealleri sonlu üretilmiştir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$: R geniş sağ idealleri ile artan zincir koşulunu sağlasın ve $\mathcal{A}$, R'nin geniş sağ ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$'nın maksimal elemanı olmasın. Bir $A_1 \in \mathcal{A}$ alalım. $A_1 \in \mathcal{A}$ maksimal olmadığından $A_2 > A_1$ olacak şekilde bir $A_2 \in \mathcal{A}$ vardır. Bu işleme devam edilirse R'nin geniş sağ ideallerinin,

$$A_1 < A_2 < A_3 < \cdots$$

şeklinde sonsuz artan zincirini elde ederiz. Bu da kabulümüzle çelişir.

$(b) \Rightarrow (c)$: B, R'nin bir geniş sağ ideali ve $\mathcal{B}$, R'nin B'de geniş olan tüm sonlu üretilmiş ideallerinin ailesi olsun. R asal sağ Goldie halkası olduğundan B bir regüler eleman içerir. Bu elemana c diyelim. Ayrıca,

$$cR \subseteq B \quad \text{ve} \quad cR \leq_e R$$

olur. Bu durumda $cR \leq_e B$ ve cR sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $\mathcal{B} \neq \emptyset$'dır. (b)'den $\mathcal{B}$ bir maksimal eleman içerir. Bu elemana C diyelim. $C \neq B$ ise bir $x \in B/C$ elemanı vardır. C', R'nin, B'de kapsanan, C ve x ie üretilen bir ideali olsun. $C \subseteq C' \subseteq B$ ve $C \leq_e B$ olduğundan $C' \leq_e B$ elde ederiz. $C' \in \mathcal{B}$ ve $C' > C$ olması C'nin maksimal oluşuyla çelişir. Böylece $C = B$ olur. B sonlu üretilmiştir.

$(c) \Rightarrow (a)$: $B_1 \leq B_2 \leq \cdots$ R'nin geniş sağ ideallerinin bir artan zinciri olsun. $B = \bigcup B_n$ diyelim. (c)'den B sonlu üretilmiştir. X, B'nin sonlu bir üreteç kümesi olsun. X sonlu olduğundan bir B_n kümesinde kapsanır. Böylece $B = B_n$ dir. Dolayısla her $m \geq n$ için $B_n = B_m$'dir. İstenen elde edilir. $\square$

2.8 Kısmi Bölüm Halkaları ve Yerelleştirme

Bu bölümde [16] ve [4] kaynak olarak kullanılmıştır.

Önerme 2.8.1 *S, R'nin bir çarpımsal kapalı kümesi ve R, S'nin elemanları ile sağ Ore koşulunu sağlasın. O zaman;*

$$I = \{x \in R : bir\ s \in S\ için\ xs = 0\}$$

R'nin bir çift yönlü idealidir.

İspat: $x, y \in I$ ve $a \in R$ alalım. O halde $s_1, s_2 \in S$ için $xs_1 = ys_2 = 0$ dır. $s, h \in S$ için $s_1 s = s_2 h$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(x \pm y)s_1 s = 0$ ve $(x \pm y) \in I$ olur. Şimdi bir $s^* \in S$ için $as^* = s_1 a^*$ olsun. Buradan $(xa)s^* = 0$ olur. Yani, $xa \in I$'dir. Ayrıca $(ax)s_1 = 0$ olduğundan $ax \in I$ olur. Böylece I, R'nin bir çift yönlü idealidir. $\square$

Önerme 2.8.2 *R sağ sıfırlayıcıları ile maksimum koşulunu ve bir çarpımsal kapalı S kümesinin elemanları ile sağ Ore koşulunu sağlayan bir halka olsun. Bu durumda, S'nin elemanları sol regüler ise aynı zamanda sağ regülerdir.*

İspat: S'nin elemanları sol regüler olsun. Kabulden bir $s \in S$ için $r(s^k) = r(s^{k+1})$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ tamsayısı vardır. Bir $y \in R$ için $sy = 0$ olsun. R halkası S kümesi ile sağ Ore koşulunu sağladığından,

$$ys_1 = s^k y_1 \text{ olacak şekilde } s_1 \in S,\ y_1 \in R$$

vardır. Bu durumda $s^{k+1}y_1 = 0$ ve buradan da $y = 0$ olur. $\square$

S, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir çarpımsal kapalı küme ise aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.8.3 Aşağıdaki koşulları sağlayan R'ye *bir kısmi sağ bölüm halkasına (R_S) sahiptir (right partial quotient ring)* denir.

(1) $R \subseteq R_S$

(2) S'nin her elemanı R_S'de tersinirdir.

(3) R_S'nin her elemanı $a \in R$ ve $c \in S$ olmak üzere ac^{-1} formundadır.

Kısmi sol bölüm halkası da benzer şekilde tanımlanır. Özel olarak S, R'nin tüm regüler elemanlarının kümesi ise R_S (eğer varsa) daha önce tanımladığımız sağ bölüm halkasının kendisidir. Bu sebeple ilerideki birçok sonuç bölüm halkalarında verilen ispatlara benzer şekilde yapılacaktır.

Önerme 2.8.4 [16, Önerme 1.2.5] *S, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir çarpımsal kapalı küme olsun. R'nin kısmi sağ bölüm halkasına sahip olması için gerek ve yeter koşul R'nin S kümesiyle sağ Ore koşulunu sağlamasıdır.*

Sonuç 2.8.5 [16, Önteorem 1.2.7] *I, R'nin bir sağ ideali ve R_S var olsun. Bu durumda;*

$$IR_S = \{ic^{-1} : i \in I\ ,\ c \in S\}'dir.$$

Önteorem 2.8.6 *R_S var olsun.*

(1) *J, R_S'nin bir sağ ideali olmak üzere $J = (J \cap R)R_S$'dir.*

(2) R sağ Noether ise R_S de sağ Noetherdir.

İspat:

(1) $(J \cap R)R_S \subseteq J$ olduğu açıktır.

Tersine, $j \in J$ alalım. Bir $a \in R$ ve $c \in S$ için $j = ac^{-1}$'dir. Buradan,

$jc = a \in J \cap R$ ve $j = jcc^{-1} \in (J \cap R)R_S$ olur. O halde $J = (J \cap R)R_S$'dir.

(2) R sağ Noether ve $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq R_S$, R_S'nin sağ ideallerinin bir artan zincirini alalım. Bu durumda bir m pozitif tamsayısı için $J_m \cap R = J_{m+1} \cap R$ olur. Böylece;

$$J_m = (J_m \cap R)R_S = (J_{m+1} \cap R)R_S = J_{m+1}$$

elde ederiz.

□

R'yi asal sağ Goldie halkası ve S'yi R'nin elemanlarının bir çarpımsal kapalı kümesi olarak düşünelim. R halkası S kümesi ile sağ Ore koşulunu sağlıyorsa;

$$I = \{x \in R : \text{bir } s \in S \text{ için } xs = 0\}$$

kümesi Önerme 2.8.1'den R'nin bir idealidir. Eğer $I \neq 0$ ise bir regüler eleman içerir. Bu elemana d diyelim. I'nın tanımından $ds = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Buradan $s = 0$ olur ki bu durum S'nin çarpımsal kapalı küme oluşuyla çelişir. O halde $I = 0$ olmalıdır. S'nin elemanları sol regüler olur. Önerme 2.8.2'den aynı zamanda sağ regülerdir. Dolayısıyla Önerme 2.8.4'ten R'nin kısmi sağ bölüm halkası R_S vardır ve R'nin sağ bölüm halkası olan Q'da kapsanır.

R'yi sağ Noether halka ve P'yi R'nin sıfırdan farklı bir asal ideali olarak düşünelim. Biliyoruz ki $\mathcal{C}(P)$, R'nin elemanlarının bir çarpımsal kapalı kümesidir. R'nin $\mathcal{C}(P)$ ile sağ Ore koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu durumda Önerme 2.8.1'den

$$I = \{x \in R : \text{bir } s \in \mathcal{C}(P) \text{ için } xs = 0\}$$

R'nin bir idealidir ve P'de kapsanır. Ayrıca P/I, R/I halkasında bir asal idealdir ve $\mathcal{C}(P/I)$'nın elemanları $\mathcal{C}(P)$'nin elemanlarının doğal dönüşüm altındaki görüntüleridir. Yani;

$$\mathcal{C}(P/I) = \mathcal{C}(P)/I$$

olur. R halkası $\mathcal{C}(P)$ ile sağ Ore koşulunu sağladığından, R/I halkası $\mathcal{C}(P)/I = \mathcal{C}(P/I)$ ile sağ Ore koşulunu sağlar. $\mathcal{C}(P/I)$ 'nın elemanları sol regüler olduğundan Önerme 2.8.2'den regüler olur.

$I = 0$ alırsak $\mathcal{C}(P)$ 'nin elemanları R'de regüler olur. Böylece Önerme 2.8.4'ten $R_{\mathcal{C}(P)}$ halkası vardır. Kolaylık sağlaması açısından, $R_{\mathcal{C}(P)}$ yerine R_P yazacağız.

Aşağıdaki teorem R_P halkasının yapısı hakkında önemli bilgiler vermektedir.

Teorem 2.8.7 *R bir sağ Noether halka ve P, R'nin R_P var olacak şekilde bir asal ideali olsun. Bu durumda PR_P, R_P'nin tek maksimal ideali ve böylece Jacobson radikalidir. Ayrıca R_P/PR_P bir basit Artin halkadır ve $PR_P \cap R = P$ 'dir.*

İspat: İspatı beş adımda gerçekleştireceğiz.

1.Adım: PR_P'nin R_P'nin bir ideali olduğunu gösterelim.

Bir $c \in \mathcal{C}(P)$ ve $p \in P$ alalım. $pd = cr$ olacak şekilde $r \in R$ ve $d \in \mathcal{C}(P)$ vardır. Buradan R_P halkasında $c^{-1}p = rd^{-1}$ eşitliğini elde ederiz. Fakat $cr \in P$ olması $r \in P$ olmasını gerektirir. Böylece;

$$c^{-1}p \in PR_P \quad \text{ve} \quad R_P P \subseteq PR_P$$

olur. İstenen elde edilir.

2.Adım: PR_P'nin, R_P'nin öz ideali olduğunu gösterelim.

$PR_P = R_P$ olduğunu kabul edelim. Buradan;

$$1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i s_i \;\; ; \;\; p_i \in P \;\; , \;\; s_i \in R_P$$

olacak şekilde yazılır. Her $i = 1, \cdots, n$ için $s_i \in R_P$ olduğundan, $s_i d \in R$ olacak şekilde $d \in \mathcal{C}(P)$ vardır. Böylece;

$$d = (\textstyle\sum p_i s_i) d = p_1 s_1 d + \cdots + p_n s_n d \in P$$

olur. Bu da $d \in \mathcal{C}(P)$ oluşu ile çelişir. O halde PR_P, R_P'nin öz idealidir.

3.Adım: $(PR_P) \cap R = P$ olduğunu gösterelim.

$P \subseteq (PR_P) \cap R$ olduğu açıktır.

Tersine; $(PR_P) \cap R \nsubseteq P$ olduğunu kabul edelim. O halde $c \in (PR_P) \cap R$ ve $c \notin P$ olacak şekilde bir c elemanı vardır. $c \in \mathcal{C}(P)$ olduğundan

$$c = pd^{-1} \quad ; \; p \in P \;\; , \;\; d \in \mathcal{C}(P)$$

olacak şekilde yazılır. Buradan $cd = p \in P$ olur. $d \in \mathcal{C}(P)$ olduğundan $c \in P$ olur ki bu bir çelişkidir.

Bu bilgiden PR_P'nin R_P halkasında bir asal ideal olduğunu göstermek oldukça kolaydır.

4.Adım: R_P/PR_P'nin basit Artin halka olduğunu gösterelim.

R_P/PR_P asal sağ Goldie halkası olduğundan Teorem 2.7.10'dan basit Artin olan bir bölüm halkasına sahiptir. Eğer R_P/PR_P'nin sağ bölüm halkasının kendisi olduğunu gösterirsek, R_P/PR_P basit Artin olur. Bunun için R_P/PR_P'nin her regüler elemanının kendisinde tersinir olduğunu görelim.

$ac^{-1} + PR_P$, R_P/PR_P'nin bir regüler elemanı olsun. Bir $x \in R$ için $ax \in P$ ise

$$(ac^{-1} + PR_P).(cx + PR_P) = (0 + PR_P)$$

olur. Buradan $ac^{-1} + PR_P$ regüler olduğundan $cx \in PR_P \cap R = P$ olur. Böylece $a \in \mathcal{C}(P)$'dir ve a'nın R_P'de bir tersi vardır. Bu terse a^{-1} diyelim. Buradan;

$$(ac^{-1} + PR_P).(ca^{-1} + PR_P) = (1 + PR_P)$$

olur. Sonuç olarak R_P/PR_P bir basit Artin halkadır ve buradan da PR_P, R_P'nin bir maksimal idealidir.

5.Adım: PR_P'nin, R_P'nin tek maksimal ideali olduğunu gösterelim.

Bunun için PR_P'nin, R_P'deki tüm maksimal sağ ideallerde kapsandığını görelim. Aksini kabul edelim. R_P'nin herhangi bir M maksimal sağ ideali için $PR_P \nsubseteq M$ olsun. Buradan $M + PR_P = R_P$ olur. O halde;

$$1 = m + pc^{-1} \quad ; \quad m \in M \quad , \ p \in P \ \text{ ve } \ c \in \mathcal{C}(P)$$

olacak şekilde vardır. Böylece $mc = c - p \in M \cap R$ ve buradan $mc \in \mathcal{C}(P)$ olur. mc, R_P'de tersinir olduğundan $M = (M \cap R)R_P = R_P$ elde edilir ki bu M'nin öz ideal oluşuyla çelişir. Sonuç olarak PR_P, R_P'nin tek maksimal ideali ve böylece Jacobson radikalidir.

□

R, Jacobson radikali J tek maksimal ideali olan bir halka ve R/J halkası Artin ise R'ye *yerel halka (local ring)* denir. Bu sebeple yukarıda inşa edilen R_P halkası bir yerel halkadır. R halkasından R_P halkasının inşası işlemine de *yerelleştirme (localisation)* denir.

3 Maksimal Düzen, Dedekind Asal ve Asano Düzen Halkaları

3.1 Maksimal Düzen Halkaları

Bu bölümde maksimal düzen halkaları ve maksimal düzen halkalarının önemli alt sınıfları olan Asano düzen halkaları ile Dedekind asal halkaları inceleyeceğiz. Genel olarak [16] ve [4] kaynak olarak kullanılmıştır.

Tanım 3.1.1 R ile S, Q'da birer sağ düzen halkası olsun. Eğer;

$$aSb \subseteq R \quad \text{ve} \quad cRd \subseteq S$$

olacak şekilde $a, b, c, d \in Q$ regüler elemanları varsa R ile S *denktir (equivalent)* denir ve $R \sim S$ ile gösterilir. $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Eğer Q'da, R'yi kesin kapsayan ve R'ye denk olan bir sağ düzen halkası yoksa o zaman R'ye *maksimal sağ düzen halkası (maximal right order)* denir.

Tanım 3.1.2 I, Q'nun bir toplamsal altgrubu olsun. Eğer;

(1) I bir sağ R–modüldür.

(2) I bir regüler eleman içerir.

(3) $bI \subseteq R$ olacak şekilde bir $b \in Q$ regüler elemanı vardır.

koşulları sağlanıyorsa I'ya *(fractional) sağ R–ideal* denir. Eğer $I \subseteq R$ ise o zaman I'ya *integral sağ R–ideal* denir. Benzer şekilde sol R–idealleri ve çift yönlü R–idealleri tanımlayabiliriz.

Eğer R asal sağ Goldie halkası ise R'nin geniş sağ idealleriyle integral sağ R–idealleri aynıdır.

I bir sağ R–ideal olsun. I'yı Q'nun iki althalkasıyla ilişkilendirelim.

$$O_r(I) = \{x \in Q : Ix \subseteq I\}$$

$$O_l(I) = \{x \in Q : xI \subseteq I\}$$

Bu durumda her biri Q'nun birer sağ düzen halkasıdır, R'ye denktir ve birimi içerir. ([14, syf. 120])

Teorem 3.1.3 [18, Önerme 2.1.1] *R, Q'da bir düzen halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R, Q'da maksimal düzen halkasıdır.*

(2) *Her sol R-ideal I için $O_l(I) = R$ ve her sağ R-ideal J için $O_r(J) = R$'dir.*

(3) *Her R-ideal A için $O_l(A) = R = O_r(A)$'dır.*

Örnekler 3.1.4 [17, syf. 133]

- Herhangi basit sağ Goldie halkası maksimal sağ düzen halkasıdır.
- K bir cisim olmak üzere, $A_n(K)$ Weyl cebiri maksimal düzen halkasıdır.
- K bir cisim, g sonlu boyutlu K-Lie cebiri olmak üzere, $U(g)$ (universal enveloping algebra) maksimal düzen halkasıdır.
- Değişmeli tamlık bölgesi maksimal düzen halkasıdır ancak ve ancak tamamen integral kapalıdır. (completely integrally closed)

I bir sağ R–ideal olsun. I'nın tersi;

$$I^{-1} = \{q \in Q : IqI \subseteq I\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca;

$$I^{-1} = \{q \in Q : qI \subseteq O_r(I)\} \quad \text{ve} \quad I^{-1} = \{x \in Q : Iq \subseteq O_l(I)\}$$

olduğu açıktır. I^{-1}, bir sağ $O_l(I)$–ideal ve bir sol $O_r(I)$–idealdir. Son olarak,

$$I^* = \{q \in Q : qI \subseteq R\} \text{ ve } I^{'} = \{q \in Q : Iq \subseteq R\}$$

kümelerini tanımlayalım. I^* sol R–idealdir. Eğer $I \subseteq J$ iki sağ R–ideal ise $J^* \subseteq I^*$'dir.

Şimdi düzen halkaları arasında iki tane daha denklik bağıntısı tanımlayacağız ve bunu $\sim$ ile ilişkilendireceğiz.

Tanım 3.1.5 R ve S, Q'da birer sağ düzen halkası olsun. Eğer $aR \subseteq S$ ve $bS \subseteq R$ olacak şekilde $a, b \in Q$ regüler elemanları varsa R ile S'ye *sağ denktir* denir ve $R \sim^r S$ ile gösterilir. Sol denklik de benzer şekilde tanımlanır. Eğer R, kendisine sağ denk ve kendisinden kesin büyük hiçbir sağ düzen halkasında kapsanmıyorsa R'ye *maksimal sağ denk sağ düzen halkası* denir.

Teorem 3.1.6 *$R \subseteq S$, Q'da birer sağ düzen halkası ve $R \sim S$ olsun. Bu durumda;*

$$R \subseteq T \subseteq S \quad ve \quad R \overset{l}{\sim} T \overset{r}{\sim} S$$

$$R \subseteq T_1 \subseteq T \quad ve \quad R \overset{r}{\sim} T_1 \overset{l}{\sim} S$$

olacak şekilde Q'da T ve T_1 sağ düzen halkaları vardır.

İspat: $xSy \subseteq R$ olacak şekilde $x, y \in Q$ regüler elemanları vardır. Buradan;

$$x = ab^{-1} \text{ ve } y = cd^{-1} \quad ; \quad a, b, c, d \in R \text{ ve } b, d \in \mathcal{C}(0)$$

olacak şekilde yazarız. $d \in R$ oluşu $Rd \subseteq R$ olmasını ve $b \in R$ oluşu $bS \subseteq S$ olmasını gerektirir. Buradan $S \subseteq b^{-1}S$ olur. Böylece $aSc \subseteq ab^{-1}Sc \subseteq Rd \subseteq R$ elde edilir. Şimdi T, S'nin aS ve R ile üretilen bir althalkası olsun. Bu durumda $T = R + aS + RaS$ olur. $aS \subseteq T$ ve $Tc \subseteq R$ olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $R \subseteq T \subseteq S$ ve böylece $R \overset{l}{\sim} T \overset{r}{\sim} S$ olur. Benzer şekilde T_1 halkası da inşa edilebilir. □

Önerme 3.1.7 *R, Q'da bir sağ düzen halkası ve I_1, I_2 birer sağ R–ideal olsun. Bu durumda;*

$$Hom_R^r(I_1, I_2) \cong \{q \in Q \mid qI_1 \subseteq I_2\}$$

olur.

İspat: $\{q \in Q \mid qI_1 \subseteq I_2\} \subseteq \mathrm{Hom}_R^r(I_1, I_2)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

I_1 bir regüler eleman içerdiğinden $I_1Q = Q$'dur. Buradan herhangi $q \in Q$ elemanı, $i \in I_1$ ve c, R'de regüler olmak üzere $q = ic^{-1}$ şeklinde yazılır.

$$f^*(q) = f(i)c^{-1} \quad ; \quad f \in \mathrm{Hom}_R^r(I_1, I_2)$$

tanımlayalım. Ayrıca $q = i_1c_1^{-1}$ olduğunu kabul edersek $c^{-1}d, c_1^{-1}d \in R$ olacak şekilde $d \in R$ regüler elemanı vardır. Böylece;

$$f^*(ic^{-1})d = f(ic^{-1}d) = f(i_1c_1^{-1}d) = f^*(i_1c_1^{-1})d$$

ve d regüler olduğundan $f^*(ic^{-1}) = f^*(i_1c_1^{-1})$ olur. Yani f^* iyi tanımlıdır. Ayrıca $f^* \in \mathrm{Hom}_Q^r(I_1Q, I_2Q) \cong Q$ olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda $f^*(1) = q \in Q$ olduğundan her $x \in I_1Q$ için $f^*(x) = qx$ olur. Her $i \in I_1$ için $f^*(i) = f(i)$ olduğundan $f^*|_{I_1} = f$'dir. Buradan $f(i) = qi \in I_2$ elde ederiz. Böylece istenen elde edilir. □

Önerme 3.1.8 *R, Q'da bir sağ düzen halkası ve I_1, I_2 birer sağ R–ideal olsun. Bu durumda;*

$$Hom_R^r(I_1, I_2) \cong \{q \in Q \mid qI_1 \subseteq I_2\}$$

olur.

İspat: $\{q \in Q \mid qI_1 \subseteq I_2\} \subseteq \mathrm{Hom}_R^r(I_1, I_2)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

I_1 bir regüler eleman içerdiğinden $I_1Q = Q$'dur. Buradan herhangi $q \in Q$ elemanı, $i \in I_1$ ve c, R'de regüler olmak üzere $q = ic^{-1}$ şeklinde yazılır.

$$f^*(q) = f(i)c^{-1} \quad ; \quad f \in \mathrm{Hom}_R^r(I_1, I_2)$$

tanımlayalım. Ayrıca $q = i_1c_1^{-1}$ olduğunu kabul edersek $c^{-1}d, c_1^{-1}d \in R$ olacak şekilde $d \in R$ regüler elemanı vardır. Böylece;

$$f^*(ic^{-1})d = f(ic^{-1}d) = f(i_1c_1^{-1}d) = f^*(i_1c_1^{-1})d$$

ve d regüler olduğundan $f^*(ic^{-1}) = f^*(i_1c_1^{-1})$ olur. Yani f^* iyi tanımlıdır. Ayrıca $f^* \in \mathrm{Hom}_R^r(I_1Q, I_2Q) \cong Q$ olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda $f^*(1) = q \in Q$ olduğundan her $x \in I_1Q$ için $f^*(x) = qx$ olur. Her $i \in I_1$ için $f^*(i) = f(i)$ olduğundan $f^*|_{I_1} = f$'dir. Buradan $f(i) = qi \in I_2$ elde ederiz. Böylece istenen elde edilir. □

Tanım 3.1.9 P sağ R–modül, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ P'de ve $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ $\mathrm{Hom}_R(P,R)$'de olmak üzere, her $x \in P$ için,

(1) Hemen hemen her $\alpha \in I$ için $f_\alpha(x) = 0$, ve

(2) $x = \sum\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(x)x_\alpha$

koşulları sağlanıyorsa $((x_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ çiftine P'nin *dual tabanı* (dual basis) denir.

Önteorem 3.1.10 ***(Dual Taban Önteoremi)***

P projektif sağ R–modüldür ancak ve ancak P bir dual tabana sahiptir.

İspat: İspatın her iki yönünde de $\{x_i : i \in I\}$ kümesini P'nin üreteç kümesi, F'yi bir serbest R–modül ve $\{e_i : i \in I\}$ kümesini F'nin bir tabanı olarak kabul edeceğiz. F bir serbest R–modül olduğundan,

$$\pi_i : F \to R \quad \pi_i(\sum_{j\in I} r_je_j) = r_i$$

dönüşümü vardır. Bu dönüşüm her $y \in F$ için

- Hemen hemen her i için $\pi_i y = 0$
- $y = \sum\limits_{i \in I} \pi_i y e_i$

koşullarını sağlar.

Her $i \in I$ için $\varphi : F \to P \quad \varphi(e_i) = x_i$ tanımlayalım.

Şimdi P projektif olsun. Bu durumda $\varphi\psi = 1_P$ olacak şekilde $\psi : P \to F$ R–modül homomorfizması vardır. Her $i \in I$ için $f_i = \pi_i \psi$ diyelim. Buradan her $x \in P$ için $x = \varphi\psi x = \varphi(\sum\limits_{i \in I}(\pi_i \psi x) e_i) = \varphi(\sum\limits_{i \in I}(f_i x) e_i) = \sum\limits_{i \in I}(f_i x)\varphi e_i = \sum\limits_{i \in I}(f_i x) x_i$.
İstenen elde edilir.

Tersine; P'nin F'nin bir dik toplananı olduğunu gösterelim. Bunu $\psi\varphi = 1_P$ olacak şekilde bir $\varphi : P \to F$ R–modül homomorfizması bularak yapalım. Her $x \in P$ için $\psi x = \sum\limits_{i \in I}(f_i x) e_i$ tanımlayalım. Buradan;

$$\varphi\psi x = \sum_{i \in I}(f_i x)\varphi x_i = \sum_{i \in I}(f_i x) x_i = x$$

olur.

□

Önerme 3.1.11 *R, Q'da bir sağ düzen halkası ve I bir sağ R–ideal olsun. Bu durumda;*

$II^{-1} = O_l(I)$ olması için gerek ve yeter koşul I'nın bir projektif sağ $O_r(I)$–ideal olmasıdır. Buradan I bir sonlu üretilmiş sağ $O_r(I)$–ideal olur.

İspat: I projektif sağ $O_r(I)$–ideal olsun. Önteorem 3.1.10'dan $x_\alpha \in I$ ve $f_\alpha \in \mathrm{Hom}^r_R(I, O_r(I))$ olacak şekilde $\{x_\alpha\}$ ve $\{f_\alpha\}$ aileleri vardır. $O_r(I)$, Q'da bir sağ düzen halkası olduğundan, Q'nun her elemanı $a, b \in O_r(I)$ ve b, $O_r(I)$'da regüler olmak üzere ab^{-1} formundadır. Ayrıca I bir regüler eleman içerdiğinden $IQ = Q$'dur. Buradan Q'nun her elemanı $i \in I$ ve $c \in O_r(I)$ olmak üzere ic^{-1} şeklinde yazılır. $\theta : I \to O_r(I)$ şeklindeki her $O_r(I)$–homomorfizmasını, Q'nun $\theta^*(ic^{-1}) = \theta(i)c^{-1}$ biçiminde tanımlı bir θ^* endomorfizmasına genişletebiliriz. Yani $\theta^*|_I = \theta$'dır. Böylece Önerme 3.1.8'den

$$\mathrm{Hom}^r_R(I, O_r(I)) \cong \{q \in Q \mid qI \subseteq O_r(I)\} = I^{-1}$$

olur. Bu izomorfizma altında $f_\alpha \to q_\alpha$ olsun. Bu durumda her $x \in I$ için sonlu α dışında $f_\alpha x = q_\alpha x = 0$. Eğer x regüler ise $q_\alpha = 0$ olur. $x \in I$ yine keyfi bir eleman olsun. Buradan;

$$x = \sum_{\alpha} x_\alpha (f_\alpha x) = \sum_{\alpha} x_\alpha q_\alpha x = (\sum_{\alpha} x_\alpha q_\alpha) x$$

olur. Böylece;

$$\sum_{\alpha} x_\alpha q_\alpha = 1 \in II^{-1}$$

elde ederiz. O halde $II^{-1} = O_l(I)$ olur. I'nın sonlu üretilmiş olduğu açıktır.

Tersine; $II^{-1} = O_l(I)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $q_\alpha \in I^{-1}$ ve $x_\alpha \in I$ olan $\{q_\alpha\}$ ve $\{x_\alpha\}$ aileleri vardır ki $\sum_{\alpha} x_\alpha q_\alpha = 1$'dir. Böylece her $x \in I$ için $\sum_{\alpha} x_\alpha q_\alpha x = x$ olur. $\phi_\alpha \in \mathrm{Hom}_R^r(I, O_r(I))$'yı her $x \in I$ için $\phi_\alpha x = q_\alpha x$ ile tanımlarsak, $\sum_{\alpha} x_\alpha \phi_\alpha x = x$ olur. Önteorem 3.1.10'den I bir projektif $O_r(I)$–idealdir. I'nın sonlu üretilmiş olduğu açıktır.

İspatın bu yönü R bir sol düzen halkası olduğunda da doğrudur. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz. □

Sonuç 3.1.12 *R, Q'da bir sol düzen halkası ve I bir sağ R–ideal olsun. Bu durumda; $II^{-1} = O_l(I)$ ise I bir sonlu üretilmiş projektif sağ $O_r(I)$–idealdir.*

Sonuç 3.1.13 *R, Q'da bir sağ düzen halkası ve I bir sağ R–ideal olsun. $II^* = O_l(I)$ olması için gerek ve yeter koşul I'nın projektif sağ R–ideal olmasıdır. Bu durumda I sonlu üretilmiş R–idealdir.*

İspat: Önerme 3.1.11'de $O_r(I)$ yerine R ve I^{-1} yerine I^* yazarsak istenen elde edilir. □

Eğer R bir maksimal düzen halkası ve I bir sağ R–ideal ise

$$R \subseteq O_r(I) \;\text{ ve }\; R \sim O_r(I)$$

olduğundan $R = O_r(I)$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} q \in I^* &\Leftrightarrow qI \subseteq R \\ &\Leftrightarrow IqI \subseteq I \end{aligned}$$

olduğundan $I^* = I^{-1}$ olur. Eğer I aynı zamanda bir sol R–idealse $R = O_l(I)$'dır. O halde

$$\begin{aligned} q \in I' &\Leftrightarrow Iq \subseteq R \\ &\Leftrightarrow IqI \subseteq R. \end{aligned}$$

olduğundan $I' = I^{-1}$ olur.

Yani R bir maksimal düzen halkası ve I herhangi bir R–ideal ise $I^* = I' = I^{-1}$ olduğu söylenebilir.

Böylece Önerme 3.1.11'i kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.14 *R, Q'da bir maksimal sağ düzen halkası olsun.*

(1) *I bir sağ R–ideal olsun. Bu durumda;* $II^{-1} = O_l(I)$ *olması için gerek ve yeter koşul I'nın bir projektif sağ R–ideal olmasıdır. Buradan I bir sonlu üretilmiş sağ R–ideal olur.*

(2) *T bir çift yönlü R–ideal olsun. Bu durumda;* $TT^{-1} = R$ *olması için gerek ve yeter koşul T'nın bir projektif sağ R–ideal olmasıdır. Buradan T bir sonlu üretilmiş sağ R–ideal olur.*

Tanım 3.1.15 I bir çift yönlü R–ideal olsun. Eğer $II^{-1} = I^{-1}I = R$ ise I'ya *tersinir ideal (invertible ideal)* denir.

Herhangi bir R–ideal tersinir ise $I^* = I' = I^{-1}$'dir. Ayrıca Sonuç 3.1.12'nin sol versiyonundan ve Sonuç 3.1.14 (2)'den tersinir bir ideal sağ ve sol R–ideal olarak projektiftir.

3.2 Dedekind Asal ve Asano Düzen Halkaları

Tanım 3.2.1 R, Q'da bir sağ düzen halkası olsun.

(1) Eğer R'nin tüm çift yönlü R–idealleri çarpımsal bir grup oluşturuyorsa R'ye *Asano sağ düzen halkası (right Asano order)* denir.

(2) Eğer R'nin tüm sağ idealleri projektif ise R'ye *sağ kalıtsal halka (right hereditary ring)* denir. Sol kalıtsallık benzer şekilde tanımlanır. Hem sağ hem sol kalıtsal halka kalıtsaldır.

(3) Eğer R asal, Noether Asano düzen halkası ve R aynı zamanda kalıtsal ise R'ye *Dedekind asal halka (Dedekind prime ring)* denir.

Şimdi J.C.Robson'ın Asano düzen halkaları için vermiş olduğu önemli karakterizasyonu ele alalım.

Teorem 3.2.2 *R bir sağ düzen halkası olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir Asano sağ düzen halkasıdır.*

(2) *R bir maksimal sağ düzen halkasıdır ve her çift yönlü integral R–ideal, sağ ideal olarak projektiftir.*

(3) *Her integral R–ideal T için* $TT' = T'T = R$ *olacak şekilde bir* T' *R–ideali vardır.*

(4) *R–idealler çarpımsal abel grup oluştururlar.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : I bir R-ideal olsun. $RI = IR = I$ olur ve buradan R grup birimidir. Öncelikle R'nin maksimal düzen halkası olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim yani R'den kesin büyük ve R'ye denk bir S sağ düzen halkası vardır. O halde Teorem 3.1.6'dan $bS \subseteq R$ veya $Sb \subseteq R$ olacak şekilde bir $b \in Q$ regüler elemanı vardır. $bS \subseteq R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda RbS bir integral R-idealdir. Teoremin kabulünden $T.RbS = R$ olacak şekilde bir T R-ideali vardır. Buradan;

$$S = RS = T.RbS.S = T.RbS = R$$

olur. Bu da $S \neq R$ olduğu kabulüyle çelişir. O halde R maksimal sağ düzen halkasıdır.

R maksimal sağ düzen halkası ise herhangi R–ideal I için $O_r(I) = O_l(I) = R$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca I^{-1}'in tanımından $II^{-1} \subseteq R$ ve $I^{-1}I \subseteq R$'dir. Kabulden $IJ = JI = R$ olacak şekilde bir J R-ideali vardır. O halde $J \subseteq I^{-1}$ ve $I^{-1}I = II^{-1} = R$ olur. Sonuç 3.1.14'ten I projektif sağ R–ideal olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sonuç 3.1.14'ten integral R–ideallerin hepsi sonlu üretilmiştir. Buradan R, integral R–ideallerle artan zincir koşulunu (ACC) sağlar. M bir maksimal integral R–ideal olsun. Yine Sonuç 3.1.14'ten $MM^{-1} = R$'dir. $R = M^{-1}$ olsa $R = M$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $R \subsetneq M^{-1}$'dir. Buradan $M^{-1}MM^{-1} = M^{-1}R \neq R$'dir ve böylece $M^{-1}M \neq M$ olur. Fakat $M \subseteq M^{-1}M \subseteq R$ ve M maksimal olduğundan $R = M^{-1}M$ olmalıdır. Yani $M^{-1}M = MM^{-1} = R$'dir.

Şimdi T herhangi bir integral R–ideal ve bir M_1 maksimal integral R–ideali için $T \subseteq M_1$ olsun. Bu durumda $T \subseteq M_1^{-1}T \subseteq R$'dir. Eğer $T = M_1^{-1}T$ ise

$$R = TT^{-1} = M_1^{-1}TT^{-1} = M_1^{-1}R = M_1^{-1}$$

olur ki bu ifade doğru olamaz. O halde $T \subsetneq M_1^{-1}T$ olmalıdır. Eğer $M_1^{-1}T \neq R$ ise bu şekilde devam edersek;

$$T \subsetneq M_1^{-1}T \subsetneq M_2^{-1}M_1^{-1}T \subsetneq ...$$

şeklinde R–ideallerin bir artan zincirini elde ederiz. Buradan M_i'ler maksimal integral R–ideal olmak üzere $M_n^{-1}...M_1^{-1}T = R$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Böylece $T = M_1...M_n$ olur. $T' = M_n^{-1}...M_1^{-1}$ alırsak $TT' = T'T = R$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): T herhangi bir R-ideal olsun. $S = \{x \in R : xT \subseteq R\}$ kümesini tanımlayalım. R–ideal tanımından $qT \subseteq R$ olacak şekilde $q \in Q$ regüler elemanı vardır. Ayrıca $a, b \in R$ ve b, R'de regüler olmak üzere $q = ab^{-1}$ formundadır. a'nın regüler olduğu kolayca gösterilebilir. $bT \subseteq T$ ve buradan da $aT \subseteq ab^{-1}T \subseteq R$ olur, dolayısıyla $a \in S$ elde ederiz. O halde S ve ST birer integral R–idealdir. Kabulden;

$$T = RT = S'.ST \text{ ve } S'ST.(ST)'.S = (ST)'.S.S'.ST = R$$

yazılabilir. Böylece her R–ideal bir grup tersine sahiptir. (Burada R grup birimidir.)

(2) $\Rightarrow$ (4): (2) $\Rightarrow$ (3)'ün ispatında her integral R–idealin, maksimal integral R–ideallerin çarpımı olarak yazılabildiğini gösterdik. M ve N keyfi maksimal integral R–idealler olsun. $MN = NM$ olduğunu gösterirsek, integral R–ideallerin çarpımının değişmeli olduğunu göstermiş oluruz. $N = M$ ise istenen elde edilir.

$N \neq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M$, N'de kapsanan bir R–idealdir. (2) $\Rightarrow$ (3)'ün ispatından bir integral R–ideal A için $N \cap M = NA$'dır. $NA \subseteq M$ ve $N \nsubseteq M$ olduğundan $A \subseteq M$ olur. Böylece;

$$N \cap M \subseteq NM \subseteq N \cap M \text{ ve } N \cap M = NM$$

olur. Bu ispatın simetriği ile birlikte $MN = NM$ elde edilir.

Şimdi T herhangi bir R–ideal ve $S = \{x \in R : xT \subseteq R\}$ olsun. Daha önce söylediğimiz gibi S and ST birer integral R–idealdir. N_i, M_i maksimal integral R–idealler olmak üzere

$$S = N_1 \cdots N_n \text{ and } ST = M_1 \cdots M_m$$

olsun. Bu durumda;

$$T = N_n^{-1} \cdots .N_1^{-1}.M_1 \cdots M_m$$

olur ve buradan da R–ideallerin çarpımı değişmeli olur.

(4) $\Rightarrow$ (1): Açıktır. □

Şimdi bu önemli teoremi kullanarak bir R Asano düzen halkasının R–ideallerinin özelliklerini verelim.

Sonuç 3.2.3 *R bir Asano düzen halkası olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

1. *R, integral R–ideallerle artan zincir koşulunu (ACC) sağlar.*

2. *Asal integral R–idealler maksimaldir.*

3. *Her integral R–ideal, asal integral R–ideallerin çarpımı olarak tek türlü yazılır.*

4. *R, belli bir integral R–ideali kapsayan integral R–ideallerle azalan zincir koşulunu (DCC) sağlar.*

5. *Her T R–ideali için $TT^{-1} = T^{-1}T = R$'dir.*

6. Her R–ideal sonlu üretilmiştir ve hem sağ hem de sol ideal olarak projektiftir.

Örnekler 3.2.4 *F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve $R = F[x, y \mid xy - yx = 1]$ iki değişkenli polinom halkası olsun.* [10]*'dan R halkasının basit kalıtsal Noether halka olduğu bilinmektedir. R halkası basit olduğundan Asano düzen halkasıdır ve dolayısıyla Dedekind asal halkadır.*

Örnekler 3.2.5 *$A_n(K)$, K cismi üzerindeki Weyl cebiri olsun.* [11]*'den $A_n(K)$ Noether, basit bir halkadır ve dolayısıyla Asano düzen halkasıdır. $gl - dimA_n(K) = n$ olduğundan* [18]*'den kalıtsal değildir ve dolayısıyla Dedekind asal halka değildir.*

4 Asano Düzen Halkalarında Yerelleştirme

Bu bölümde C. R. Hajarnavis ve T. H. Lenagan'ın "Journal of Algebra" dergisinde yayınladıkları makaleyi (Bkz. [13]) inceleyeceğiz.

R basit olmayan, sağ ve sol Noether olan bir asal halka ve Q, R'nin basit Artin olan bir bölüm halkası olarak gösterilecektir. R halkasının geniş tek yönlü idealleri bir sıfırdan farklı çift yönlü ideal kapsıyor ise R'ye *sınırlı halka (bounded ring)* denir. Eğer Noether ve asal olan R halkasının çift yönlü R–idealleri bir çarpımsal grup oluşturuyor ise R'ye *Asano düzen halkası* denir. Eğer Noether ve asal olan bir Asano düzen halkasının tüm tek yönlü idealleri projektif ise R'ye *Dedekind asal halka* denir.

Bir sınırlı Asano düzen halkası, Dedekind asal halkadır. [9, Teorem 3.5]

4.1 Temel Sonuçlar

Önerme 4.1.1 *R asal, Noether halka ve Q, R'nin bir bölüm halkası olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *R Asano düzen halkasıdır.*
2. *R'nin sıfırdan faklı her T ideali için $TT' = T'T = R$ olacak şekilde bir T' R–ideali vardır.*
3. *R–idealler çarpımsal abel grup oluşturur.*

Önteorem 4.1.2 *I, R'nin bir geniş sağ ideali olsun.*

I'nın bir projektif sağ R–modül olması için gerek ve yeter koşul $1 \in II^*$ olmasıdır.

R'nin bir yerel halka olması durumunda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.1.3 *R yerel, Noether ve asal halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R'nin Jacobson radikali J tersinirdir.*
2. *R kalıtsaldır.*
3. *R sağ ve sol temel ideal halkasıdır.*

Eğer bu koşullardan biri (dolayısıyla hepsi) sağlanıyorsa R bir sınırlı Asano düzen halkası olur.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): M, R'nin bir maksimal sağ ideal olsun. R/J basit Artin halka olduğundan, $M \cap N = J$ ve $M + N = R$ olacak şekilde R'nin bir N sağ ideali vardır. $\theta : M \oplus N \to R$, $\theta(m,n) = m - n$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün çekirdeği $M \cap N = J$'ye izomorftur. Bu durumda;

$$0 \to J \to M \oplus N \to R \to 0$$

dizisi bir kısa tam dizidir. Böylece $M \oplus N \cong J \oplus R$ olur. Kabulden J tersinir olduğundan, Önteorem 4.1.2'den J projektiftir. Dolayısıyla M de projektif olur.

Şimdi R'nin bir kalıtsal halka olmadığını kabul edelim. Bu durumda R halkasının projektif olmayan en az bir tek yönlü ideali vardır. Ayrıca her geniş olmayan sağ ideal bir geniş sağ idealin bir dik toplananı olduğundan, R'nin bir K geniş sağ ideali vardır ki R'nin projektif olmayan sağ idealleri içinde maksimaldir. Eğer

$$R \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq ... \supseteq K$$

R'nin ideallerinin bir azalan zinciri ise bu zincir ya sonludur; yani $I_n = K$ olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı vardır ya da zincir sonsuzdur. Gerçekten, K geniş sağ ideal olduğundan bir regüler eleman içerir. Bu elemana c diyelim. O halde

$$R \subseteq I_1^* \subseteq I_2^* \subseteq \cdots \subseteq Rc^{-1}$$

olur. R Noether olduğundan Q da Noetherdir. Böylece $I_n^* = I_{n+1}^*$ olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı vardır. Önteorem 4.1.2'den $I_n = I_{n+1}$ olur. Yani $I_n = K$ olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı vardır. Dolayısıyla I_{n-1}/K bir basit modüldür. $I_{n-1}/K \cong R/M_1$ olacak şekilde bir M_1 maksimal sağ ideali vardır ve M_1 ilk parağraftan projektiftir. Shanuel Önteoreminden;

$$0 \to M_1 \to R \to R/M_1 \to 0 \text{ ve } 0 \to K \to I_{n-1} \to I_{n-1}/K \to 0$$

kısa tam dizileri için $I_{n-1}/K \cong R/M_1$ olduğundan, $I_{n-1} \oplus M_1 \cong K \oplus R$ elde ederiz. K projektif olur ki bu bir çelişkidir.

(2) $\Rightarrow$ (3): [7, Teorem 4.10] , [9, Teorem 3.4]

(3) $\Rightarrow$ (1): Açık

R'nin Asano düzen halkası oluşu ise [9, Önerme 2.3]'den elde edilir. □

Teorem 4.1.4 *R bir Noether halka J, R'nin tek maksimal ideali ve R'de tersinir olsun. Bu durumda R'nin sıfırdan farklı her ideali J'nin bir kuvveti şeklindedir.*

İspat: Y, R'nin sıfırdan ve J'den farklı bir ideali olsun. Hipotezin aksini kabul edelim. Yani, her s pozitif tamsayısı için $Y \neq J^s$ olsun. Ayrıca J, R'nin tek maksimal ideali olduğundan $Y \subseteq J$'dir. O halde $YJ^{-1} \subseteq R$ olmalıdır. $Y \neq J^s$ olduğundan $Y(J^{-1})^s \subsetneqq R$ dir. Buradan R'nin

$$YJ^{-1} \subseteq YJ^{-2} \subseteq YJ^{-3} \subseteq \cdots$$

şeklinde artan bir zincirini elde ederiz. R Noether olduğundan $Y(J^{-1})^n = Y(J^{-1})^{n+1}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Her iki tarafı J^{n+1} ile çarpacak olursak $YJ = Y$ elde ederiz. Önteorem 2.3.7'den $Y = 0$ olmalıdır. Bu da Y'nin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir.

□

- A ile B Q'nun sağ R–modülleri ve P, R'nin bir tersinir ideali olsun. Bu durumda $(A \cap B)P = AP \cap BP$'dir.
- c, R'nin bir regüler elemanı ise $(A \cap B)c = Ac \cap Bc$ olur.

Simetrik koşulları kabul ettiğimizden sağ için yapılan tüm ispatlar sol için de geçerlidir.

Şimdi Asano düzen halkaları için bir karakterizasyon vereceğiz. İlk önce R bir Asano düzen halkası ve M, R'nin bir maksimal ideali iken R_M kısmi bölüm halkasının var olduğunu göstereceğiz. Bunu R halkasının Artin-Rees özelliğini sağladığını ispatlayarak ve ardından Goldie metodunu kullanarak, yani R'nin $\mathcal{C}(M)$ ile Ore koşulunu sağladığını göstererek yapacağız.

4.2 Yerelleştirme

Şimdi Asano düzen halkaları için bir karakterizasyon vereceğiz. İlk önce R bir Asano düzen halkası ve M, R'nin bir maksimal ideali iken R_M kısmi bölüm halkasının var olduğunu göstereceğiz. Bunu R halkasının aşağıda tanımı verilen Artin-Rees özelliğini sağladığını ispatlayarak ve ardından Goldie metodunu kullanarak, yani R'nin $\mathcal{C}(M)$ ile Ore koşulunu sağladığını göstererek yapacağız.

Tanım 4.2.1 R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. E, R'nin bir sağ ideali olmak üzere $E \cap I^n \subseteq EI$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı var ise I idealine *Artin-Rees özelliğini sağlar (Artin-Rees property)* denir.

Önteorem 4.2.2 *R Noether, asal bir halka ve I, R'nin tersinir bir ideali olsun. Bu durumda I Artin-Rees özelliğini sağlar.*

İspat: Her $j \geq 1$ tamsayısı için $(E \cap I^j)I^{-j} \subseteq R$ olduğu açıktır. R Noether olduğundan öyle bir $k \geq 1$ tamsayısı vardır ki

$$\sum_{j=1}^{k}(E \cap I^j)I^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty}(E \cap I^j)I^{-j}$$

Buradan,

$$(E \cap I^{k+1})I^{-k-1} \subseteq (E \cap I)I^{-1} + \cdots + (E \cap I^k)I^{-k} \quad \text{ve}$$

$$(E \cap I^{k+1}) \subseteq (E \cap I)I^k + \cdots + (E \cap I^k)I \subseteq EI$$

elde edilir. Benzer ispat sol versiyonu için de uygulanabilir. $\square$

Sonuç 4.2.3 *R asal ve Noether halka olsun. $I \neq R$, R'nin bir tersinir ideali ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$'dır.*

İspat: $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ diyelim. $K \neq 0$ ise K bir regüler eleman kapsar. Bu elemana c diyelim. O halde bir m pozitif tamsayısı için $cR \subseteq cR \cap I^m \subseteq cRI = cI$'dır. Buradan $cR = cI$ olur. c regüler olduğundan $I = R$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. $\square$

Yukarıda verilen Önteorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.3'ün ifadeleri bir R Asano düzen halkası için de doğrudur. Çünkü Asano düzen halkasında sıfırdan farklı her ideal tersinirdir.

Şimdi bir R Asano düzenindeki bir P maksimal ideali için $\mathcal{C}(P)$ kümesinin elemanlarını inceleyelim.

Önteorem 4.2.4 *1. Her $n \geq 1$ tamsayısı için $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(P^n)$'dır.*

2. P, R Asano düzen halkasında bir maksimal ideal olmak üzere $\mathcal{C}(P) \subseteq \mathcal{C}(0)$'dir.

İspat:

1. $c \in \mathcal{C}(P)$ alalım. Bir $x \in R$ için $cx \in P^2$ olsun. Buradan $x \in P$ olur. O halde $xP^{-1} \subseteq R$ ve $cxP^{-1} \subseteq P$ elde edilir. Böylece $xP^{-1} \subseteq P$ ve $x \in P^2$ olur. Yani $c \in \mathcal{C}(P^2)$'dir. Benzer şekilde her $n \geq 1$ tamsayısı için $c \in \mathcal{C}(P^n)$ olduğu gösterilir.

   Bir $x \in R$ için $cx \in P$ olduğunu kabul edelim. Buradan $cxP^{n-1} \subseteq P^n$ olur. Böylece $xP^{n-1} \subseteq P^n$ olur ki $x \in P$'dir.

2. $c \in \mathcal{C}(P)$ alalım. Bir $x \in R$ için $cx = 0$ olsun. (1)'den $c \in \mathcal{C}(P^n)$ olur. Buradan $x \in P^n$'dir. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$'dır.

$\square$

Önerme 4.2.6'nın ispatı için Goldie metodunu kullanacağız ve R/P^n halkasına Small teoremini uygulayacağız.

Teorem 4.2.5 ***(Small teoremi)*** *R sağ Noether halka olsun. R'nin Artin olan bir sağ bölüm halkasının olması için gerek ve yeter koşul N, R'nin üstel sıfır radikali olmak üzere $\mathcal{C}(N) = \mathcal{C}(O)$ olmasıdır.*

Önerme 4.2.6 *R bir Asano düzen halkası ve P, R'nin bir maksimal ideali olsun. Bu durumda R, $\mathcal{C}(P)$ kümesi ile Ore koşulunu sağlar.*

İspat: Her $n \geq 1$ tamsayısı için $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(P^n)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca her $n \geq 1$ tamsayısı için R/P^n halkasının üstel sıfır radikali P/P^n'dir. Böylece Small Teoremi'nden R/P^n halkasının Artin olan bir bölüm halkası vardır. Dolayısıyla her $i \geq 1$ tamsayısı için R/P^i halkası R/P^i'nin regüler elemanlarıyla (sağ) Ore koşulunu sağlar. Yani; her $a \in R$ ve $c \in \mathcal{C}(P)$ için $ac_i - ca_i = p_i \in P^i$ olacak şekilde $a_i \in R$ ve $c_i \in \mathcal{C}(P^i)$ vardır.

$E = p_1R + p_2R + \cdots$ olsun. E, R'nin bir sağ idealidir ve R Noether olduğundan E sonlu üretilmiştir. Yani; bir $n \geq 1$ tamsayısı için

$$E = p_1R + p_2R + \cdots + p_nR$$

olur. P Artin-Rees özelliğine sahip olduğundan $E \cap P^m \subseteq EP$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ tamsaysı vardır. $r > maks\{n, m\}$ seçersek, $ac_r - ca_r = p_r \in E \cap P^m \subseteq EP$ olur. Böylece her i için $b_i \in P$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} ac_r - ca_r &= p_1b_1 + \cdots + p_nb_n \\ &= (ac_1 - ca_1)b_1 + \cdots + (ac_n - ca_n)b_n \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak;

$$a(c_r - c_1b_1 - \cdots - c_nb_n) = c(a_r - a_1b_1 - \cdots - a_nb_n)$$

$c_r \in \mathcal{C}(P)$ ve $c_1b_1 + \cdots + c_nb_n \in P$ olduğundan $c' = c_r - c_1b_1 - \cdots - c_nb_n \in \mathcal{C}(P)$ olur. Böylece R, $\mathcal{C}(P)$ ile sağ Ore koşulunu sağlar. Sol Ore koşulunu sağladığı da benzer şekilde gösterilebilir. $\square$

Yukarıda ispatladığımız önerme sayesinde bir R Asano düzen halkasının kısmi bölüm halkası R_P'yi inşa edebiliriz. $\mathcal{C}(P) \subseteq \mathcal{C}(0)$ olduğundan $R \subseteq R_P \subseteq Q$'dur. Daha önceki bölümde R_P'nin, Jacobson radikali PR_P olan bir yerel halka olduğunu göstermiştik. Ayrıca PR_P tersinirdir ve PR_P'nin tersinin $P^{-1}R_P$ olduğu da kolayca gösteribilir. R_P'nin Jacobson radikali tersinir olduğundan Önerme 4.1.3'ten R_P halkası kalıtsaldır.

Temel teoremdeki karakterizasyonu elde edebilmek için aşağıdaki önteoremi ispatlayalım.

Önteorem 4.2.7 *R asal Noether halka ve P, R'nin, R_P var ve kalıtsal olacak şekilde bir maksimal ideali olsun. Bu durumda; $qP \subseteq R$ ve $qP \nsubseteq P$ olacak şekilde bir $q \in Q$ vardır.*

İspat: Önerme 4.1.3'ten $PR_P = aR_P$ olacak şekilde bir $a \in PR_P$ vardır. Bir $c \in P$ ve $d \in \mathcal{C}(P)$ için $a = cd^{-1}$ olduğundan $PR_P = cR_P$ yazabiliriz. $l(P) = 0$ olduğundan c R'nin bir regüler elemanıdır. Ayrıca $P \subseteq cR_P$ ve R Noether olduğundan P bir R–modül olarak sonlu üretilmiştir. Böylece her i için $b_i \in R_P$ olmak üzere

$$P = cb_1R + cb_2R + \cdots + cb_nR$$

olur. Buradan bir $d \in \mathcal{C}(P)$ ve $k_i \in R$ için;

$$P = cd^{-1}(k_1R + k_2R + \cdots + k_nR)$$

olur. Dolayısıyla $dc^{-1}P \subseteq R$'dir.

Eğer $dc^{-1}P \subseteq P$ ise, $dc^{-1}PR_P \subseteq PR_P$ olur. Önerme 4.1.3'ten PR_P, R_P'nin tersinir idealidir. Dolayısıyla $dc^{-1}R_P \subseteq R_P$ ve buradan da $c^{-1} \in d^{-1}R_P = R_P$ olur. Fakat bu durumda $1 = cc^{-1} \in PR_P$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $q = dc^{-1}$ aranılan elemandır. □

Teorem 4.2.8 *R Noether ve asal halka olsun. R'nin Asano düzen halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin her P maksimal ideali için R_P halkasının var ve kalıtsal olmasıdır.*

İspat: Eğer R Asano düzeni ise Önerme 4.2.6'dan R'nin her P maksimal ideali için R_P halkası var ve kalıtsaldır.

Tersini ispatlamak için önce R'nin her maksimal idealinin tersinir olduğunu gösterelim. P, R'nin bir maksimal ideali olsun. Önteorem 4.2.7'den $P^*P \neq P$'dir. Ayrıca P^*P, R'nin P'yi kapsayan bir idealidir. P maksimal olduğundan $P^*P = R$ olmalıdır. Benzer şekilde $P' = \{q \in Q : Pq \subseteq R\}$ kümesi için $PP' = R$ olur. Buradan;

$$P^* = P^*R = P^*PP' = RP' = P'$$

elde edilir. Yani P^*, P idealinin tersidir.

Şimdi R'nin Asano düzen halkası olmadığını kabul edelim ve tersinir olmama özelliğine göre maksimal olan bir A ideali seçelim. $A \subsetneq P$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. Bu durumda $A \subseteq AP^{-1} \subseteq PP^{-1} = R$ ve AP^{-1} R'nin bir idealidir. Eğer $AP^{-1} = A$ ise $A = AP = AP^2 = \cdots$ ve Sonuç 4.2.3'ten $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$ olur. Böylece $AP^{-1} \supsetneq A$ olur ve buradan AP^{-1} tersinirdir. O halde $A = (AP^{-1})P$ olduğundan A da tersinir olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak R bir Asano düzen halkasıdır. $\square$

Şimdi R Asano düzen halkası için Asano üst halka tanımlayacağız.

$$S = \{q \in Q : \ R\text{'nin } qB \subseteq R \text{ olacak şekilde } 0 \neq B \text{ ideali vardır.}\}$$

kümesini tanımlayalım. $R \subseteq S$ olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca B, R'nin sıfırdan farklı tüm ideallerini taramak üzere $S = \bigcup B^{-1}$'dir. Böylece;

$$S = \{q \in Q : \ R\text{'nin } Bq \subseteq R \text{ olacak şekilde } 0 \neq B \text{ ideali vardır.}\}$$

olduğu söylenebilir.

I, S'nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda $(I \cap R)S = I$ olur:

$(I \cap R)S \subseteq I$ olduğu açıktır.

Tersine; bir $x \in I$ alalım. R'nin, $xB \subseteq I \cap R$ olacak şekilde $0 \neq B$ ideali vardır. $B^{-1} \subseteq S$ olduğundan $x \in (xB)B^{-1} \subseteq (I \cap R)S$ olur.

Sonuç olarak R Noether olduğundan S de Noetherdir.

Şimdi I, S'nin sıfırdan farklı bir çift yönlü ideali olsun. Buradan $(I \cap R)^{-1} \subseteq S$ olur. Böylece $1 \in (I \cap R)(I \cap R)^{-1} \subseteq IS = I$ elde edilir. Bu durumda $I = S$ olmalıdır. S basit halkadır.

Bu bölümden itibaren R bir Asano düzen halkasını temsil edecektir.

Teorem 4.2.9 *P, R'nin tüm maksimal ideallerini taramak üzere;*

$$R = (\bigcap R_P) \cap S\text{'dir.}$$

İspat: $R \subseteq (\bigcap R_P) \cap S$ olduğu açıktır.

Tersine; $q \in (\bigcap R_P) \cap S$ alalım. $q \in S$ olduğundan R'nin, $qB \subseteq R$ olacak şekilde $0 \neq B$ ideali vardır. B'yi bu özellikteki ideallerin maksimali seçelim. Eğer $B = R$ ise $q \in R$ olur. $B \neq R$ ise, R'nin $B \subseteq P$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. Bu durumda R'nin,

B'yi kesin kapsayan bir $B^{'}$ ideali vardır ki $B = B^{'}P$'dir. Böylece $qB^{'}P \subseteq R$ ve buradan $qB^{'} \subseteq P^{-1}$ olur. Ayrıca $q \in R_P$ olduğundan $qB^{'} \subseteq R_P$ olur. Yani $qB^{'} \subseteq R_P \cap P^{-1}$ elde edilir. Fakat;

$$R_P \cap P^{-1} = P^{-1}P(R_P \cap P^{-1}) \subseteq P^{-1}(PR_P \cap R) = P^{-1}P = R$$

olur. $qB^{'} \subseteq R$ olur ki bu da B'nin maksimal oluşuyla çelişir. $B = R$ ve $q \in R$'dir. □

Sonuç 4.2.10 *I, R'nin projektif geniş bir sağ ideali olsun. Bu durumda;*

$$I = (\bigcap IR_P) \cap IS\text{'dir.}$$

İspat: $I \subseteq (\bigcap IR_P) \cap IS$ olduğu açıktır. $I^{**} = \{q \in Q : I^{*}q \subseteq R\}$ olmak üzere $I^{**} = I$ olduğunu göstermek kolaydır. Buradan;

$$I^{*}[(\bigcap IR_P) \cap \subseteq IS] \subseteq (\bigcap I^{*}IR_P) \cap I^{*}IS \subseteq (\bigcap R_P) \cap S = R$$

olur. Böylece; $(\bigcap IR_P) \cap IS \subseteq I^{**} = I$ elde edilir. □

Şimdi $T = \bigcap R_P$ halkasını ele alacağız. T bir asal Goldie halkasıdır ve T'nin bölüm halkası da Q'dur. Ayrıca T'nin Q'da bir sınırlı Asano düzen halkası olduğunu ve buradan da bir Dedekind asal halka olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki iki önteoremi ispatlayalım.

Önteorem 4.2.11 (a) *$P_1, P_2, \cdots, P_n$ R'nin farklı maksimal idealleri ise*

$$P_1^{-1} + \cdots + P_n^{-1} = (P_1 \cdots P_n)^{-1}\text{'dir.}$$

(b) *A ile B, R'nin birer ideali ve $A + B = R$ olsun. Bu durumda $A^{-1} \cap B^{-1} = R$'dir.*

İspat:

(a) $(P_1^{-1} + \cdots + P_n^{-1})(P_1 \cdots P_n) = (P_2 \cdots P_n) + \cdots + (P_1 \cdots P_{i-1}P_{i+1} \cdots P_n) + \cdots (P_1 \cdots P_{n-1})$

Eşitliğin sağ tarafı R'nin hiçbir maksimal idealinde kapsanmayan bir ideali olur. Dolayısıyla R'ye eşit olmalıdır. Böylece $P_1^{-1} + \cdots + P_n^{-1} = (P_1 \cdots P_n)^{-1}$ elde edilir.

(b) $(A^{-1} \cap B^{-1})(A + B) \subseteq R$'dir. $A + B = R$ olduğundan $A^{-1} \cap B^{-1} \subseteq R$ olur.

$A^{-1} \cap B^{-1} = R$ elde edilir.

□

Önteorem 4.2.12 *c, R'nin bir regüler elemanı ise R'nin sonlu tanesi dışındaki tüm maksimal P idealleri için $c \in \mathcal{C}(P)$ olur.*

İspat: R Noether olduğundan sol taraftaki toplam R'nin tüm maksimal ideallerini taramak üzere;

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}(P_{\alpha}^{-1}) \cap R = \sum_{i=1}^{k}(P_i^{-1}) \cap R$$

olur. Buradan R'nin herhangi bir P maksimal ideali için;

$$(P^{-1}c) \cap R \subseteq \sum_{i=1}^{k}[(P_i^{-1}c) \cap R] \subseteq \sum_{i=1}^{k}(P_i^{-1}c) \subseteq [\sum_{i=1}^{k}(P_i^{-1})]c$$

elde ederiz. Önteorem 4.2.11'in (a) şıkkından $(P^{-1}c) \cap R \subseteq (P_1 \cdots P_k)^{-1}c$ olur. Böylece;

$$(P^{-1}c) \cap R \subseteq (P_1 \cdots P_k)^{-1}c \cap P^{-1}c = [(P_1 \cdots P_k)^{-1} \cap P^{-1}]c$$

olur. Eğer $1 \leq j \leq k$ olacak şekildeki herhangi j sayısı için $P \neq P_j$ ise, $(P_1 \cdots P_k)+P = R$ olduğundan, Önteorem 4.2.11'in (b) şıkkından $(P_1 \cdots P_k)^{-1} \cap P^{-1} = R$ olur. Böylece $P^{-1}c \cap R \subseteq Rc$ ve buradan da $Rc \cap P \subseteq Pc$ elde edilir. Herhangi bir $x \in R$ için $xc \in P$ ise $xc \in Pc$ olur. c regüler olduğundan $x \in P$'dir. Buradan $c \in \mathcal{C}(P)$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.13 *$T = \bigcap R_P$ halkası Q'da bir sınırlı Asano düzen halkasıdır.*

İspat: İspatı üç aşamada yapacağız.

(a) T sınırlıdır.

(b) T Noetherdir.

(c) T'nin sıfırdan farklı her ideali tersinirdir.

(a) Önceden de belirtildiği üzere T, Q'da bir düzen halkasıdır. Şimdi X, T'nin bir geniş sağ ideali olsun. Amacımız X'in, T'de bir sıfırdan farklı ideal kapsadığını göstermektir. $x \in X$ T'de regüler olsun. O zaman $a, c \in R$ ve c, R'de regüler olmak üzere $x = ac^{-1}$'dir. Ayrıca a da R'de regülerdir. Bu durumda $a = xc \in X$ olur. Böylece T'nin her geniş sağ ideali R'nin bir regüler elemanını içerir. a regüler olduğundan $X \supseteq aT = a(\bigcap R_P) = \bigcap aR_P$ olur. Bir önceki önteoremden R'nin sonlu tanesi dışındaki her maksimal P ideali için $aR_P = R_P$'dir. R'nin geriye kalan maksimal ideallerinin $P_1, \cdots, P_n$ olduğunu kabul edelim. Önerme 4.1.3'ten her $i = 1, \cdots, n$ için R_{P_i} sınırlı olduğundan, aR_{P_i} R_{P_i}'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Bu ideali $A(P_i)$ ile gösterelim.

$$T = \bigcap R_P = R_{P_1} \cap \cdots \cap R_{P_n} \cap (\bigcap_{i \neq 1,..,n} R_{P_i}) = R_{P_1} \cap \cdots \cap R_{P_n} \cap (\bigcap_{i \neq 1,..,n} aR_{P_i})$$

Şimdi her iki taraftan $A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n)$ ile arakesite geçersek,

$$A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap T = A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap (\bigcap_{i \neq 1..n} aR_{P_i})$$

elde edilir. Ayrıca, $A(P_1) \subseteq aR_{P_1}, \cdots, A(P_n) \subseteq aR_{P_n}$ olduğundan

$$A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \subseteq aR_{P_1} \cap \cdots \cap aR_{P_n}$$

olur. Her iki taraftan $(\bigcap_{i \neq 1..n} aR_{P_i})$ ile arakesite geçilirse, $A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap T \subseteq \bigcap aR_{P_n}$ olur. Bu durumda;

$$X \supseteq \bigcap aR_P \supseteq A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap T$$

olur. $A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap T$, T'nin sıfırdan farklı bir ideali olduğundan istenen elde edilir.

(b) X, T'nin bir geniş sağ ideali olsun. $x \in X$ alalım. R'nin her P maksimal ideali için $x \in R_P$ olduğundan $xc_i \in X \cap R$ olacak şekilde $c_i \in \mathcal{C}(P_i)$ vardır. Böylece α R'nin tüm maksimal ideallerini tararken, $\sum_{\alpha} xc_\alpha T \subseteq (X \cap R)T$ olur.

<u>İddia</u>: $c_\alpha T$, R'nin P_α'da kapsanmayan bir idealini içerir.

$\{P_\alpha\}$, R'nin tüm maksimal ideallerinin kümesi ve her α için $c_\alpha \in \mathcal{C}(P_\alpha)$ olsun. Her α için $\mathcal{C}(P_\alpha) \subseteq \mathcal{C}(0)$ olduğundan c_α R'de regülerdir. Bu durumda Önteorem 4.2.12'den sonlu tane maksimal ideal $P_1, \cdots, P_n$ için $c_\alpha \notin \mathcal{C}(P_1), \cdots, \mathcal{C}(P_n)$'dir. O halde c_α, $R_{P_1}, \cdots, R_{P_n}$'de tersinir değildir. Böylece her $i = 1 \cdots n$ için $c_\alpha R_{P_i} \neq R_{P_i}$'dir. Ayrıca $P_\alpha \notin \{P_1, \cdots, P_n\}$'dir.

R_{P_i} sınırlı olduğundan R_{P_i}'nin, $A(P_i) \subseteq c_\alpha R_{P_i}$ olacak şekilde $0 \neq A(P_i)$ ideallerinin varlığını (a) şıkkında söylemiştik. Yine (a) şıkkındakine benzer olarak;

$$A(P_1) \cap A(P_2) \cdots \cap A(P_n) \cap R \subseteq c_\alpha T$$

olduğu gösterilebilir.

Önerme 4.1.3'ten R_{P_i} Noether, yerel, tek maksimal ideali ve Jacobson radikali $P_iR_{P_i}$ olan halka olduğundan R_{P_i}'nin sıfırdan farklı her ideali $P_iR_{P_i}$'nin bir kuvvetidir. Yani; $A(P_i) = (P_iR_{P_i})^{m_i} = P_i^{m_i}R_{P_i}$ olacak şekilde bir $m_i > 0$ tamsayısı vardır. Buradan $P_i^{m_i} \subseteq A(P_i) \cap R$ olur. Dolayısıyla;

$$P_1^{m_1} \cdots P_n^{m_n} \subseteq A(P_1) \cap \cdots \cap A(P_n) \cap R \subseteq c_\alpha T$$

elde edilir. $P_1^{m_1} \cdots P_n^{m_n}$, R'nin her α için P_α'da kapsanmayan bir idealidir. Ayrıca $P_1^{m_1} \cdots P_n^{m_n}$ ideallerinin toplamı R'dir ve 1'i içerir. Buradan $x \in \sum_{\alpha} xc_\alpha T$ ve $X \subseteq (X \cap R)T$ olur. Sonuç olarak $X = (X \cap R)T$ olur. Yani T'de geniş sağ ideallerin artan zinciri sonlu adımda durur. Asal Goldie halkasında bu ifadeye denk olarak her geniş sağ ideal sonlu üretilmiştir.

Dolayısıyla T'nin her geniş sağ ideali sonlu üretilmiştir. Buradan T'nin her sağ ideali sonlu üretilmiş olur. T sağ Noetherdir. Benzer şekilde sol Noether olduğu da gösterilebilir.

(c) I, T'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. (b) şıkkından $I = (I \cap R)T$'dir.

$$(I \cap R)^{-1}(I \cap R)T = RT = T$$

olduğundan I'nın sol tersi vardır. Benzer şekilde sağ tersinin varlığı da gösterilir. Yani I tersinirdir. □

Sonuç 4.2.14 *R'nin bir sınırlı Asano düzen halkası olması için gerek ve yeter koşul $R = \bigcap R_P$ olmasıdır.*

İspat: R sınırlı Asano düzeni olsun. Bir $q \in Q$ alalım. $a, c \in R$ ve c, R'de regüler olmak üzere $q = ac^{-1}$ olarak yazılır. Buradan $qcR \subseteq R$ olur. R sınırlı olduğundan, R'nin $B \subseteq cR$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir B ideali vardır. O halde $qB \subseteq R$ ve $q \in S$ olur. Böylece $Q = S$ elde ederiz. Teorem 4.2.10'dan,

$$R = (\bigcap R_P) \cap S = (\bigcap R_P) \cap Q = \bigcap R_P$$

olur. Tersi Teorem 4.2.13'den açıktır. İstenen elde edilir. □

5 G-Dedekind Asal Halkalar

Anderson ve Kang [2] ve Zafrullaf [20], R halkası değişmeli tamlık bölgesi iken R'nin sıfırdan farklı her A ve B fractional ideallerinin

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \qquad (1)$$

eşitliğini hangi durumlarda sağladığı problemini araştırmışlar ve (1) eşitliğini sağlayan değişmeli tamlık bölgelerine *G-Dedekind bölge (G-Dedekind domain)* adını vermişlerdir. Akalan [1] bu problemi değişmeli olmayan maksimal düzen halkalarında incelemiştir.

R (değişmeli olması gerekmeyen) maksimal düzen halkası ve A, B R–idealler olsun. Bu durumda, $(AB)^* \supseteq B^*A^*$ her zaman sağlanır ve R halkası Dedekind asal halka olduğunda eşitlik vardır yani; $(AB)^* = B^*A^*$ eşitliği sağlanır. Fakat bu eşitlik genelde doğru değildir. Akalan, [1] makalesinde

$$\text{her } A, B \ R\text{–ideali için } (AB)^* = B^*A^*$$

eşitliğinin sağlandığı maksimal düzen halkalarını karakterize etmiş, bu eşitliği sağlayan asal Noether maksimal düzen halkalarını *G-Dedekind asal halka (G-Dedekind prime ring)* olarak adlandırmıştır.

G-Dedekind asal halkaların sınıfı hem Dedekind asal halkaları hem de Noether tek türlü çarpanlarına ayırma halkalarını (TÇH) kapsayan çok geniş bir halka sınıfıdır. Ayrıca G-Dedekind asal olup Dedekind asal olmayan ve Noether TÇH olmayan pek çok örnek bulunmaktadır.

Tanım 5.0.15 R bir maksimal düzen halkası ve I bir R–ideal olsun. $I = I^{**}$ eşitliğini sağlıyorsa I'ya *refleksif R–ideal (reflexive R–ideal)* denir. Tersinir R–ideallerin refleksif olduğu açıktır.

Aşağıdaki teorem G-Dedekind asal halkaların çeşitli karakterizasyonlarını vermektedir.

Teorem 5.0.16 *R bir düzen halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Her A R–ideali için, $A^{**}A^* = R$ ve $A'A'' = R$ sağlanır.*

(2) *R bir maksimal düzen halkası ve her A, B R–idealleri için $(AB)^* = B^*A^*$'dır.*

(3) *R bir maksimal düzen halkası ve refleksif R–ideallerin çarpımı refleksifdir.*

(4) *R bir maksimal düzen halkası ve D(R)={ refleksif R–idealler } çarpma işlemine göre gruptur.*

(5) *R bir maksimal düzen halkası ve her refleksif R–ideal tersinirdir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): Her A R–ideali için $A^{**}A^{*} = R$ ve $A'A'' = R$ olsun. R'nin maksimal düzen halkası olduğunu göstermek için R'nin herhangi bir I R–ideali için $O_r(I) = O_l(I) = R$ olduğunu göstermeliyiz. Bir I R–ideali ve $x \in O_l(I)$ alalım. Yani $xI \subseteq I$ olsun. Bu durumda $I^{*}xI \subseteq R$ ve $I^{*}x \subseteq I^{*}$ olur ki buradan $I^{**}I^{*}x \subseteq I^{**}I^{*}$ elde edilir. Kabulden $x \in R$ olur. Benzer şekilde $O_r(I) \subseteq R$ olduğu gösterilebilir. Böylece R bir maksimal düzen halkasıdır.

Şimdi A, B iki R–ideal olsun. $B^{*}A^{*}AB \subseteq R$ olduğundan, $B^{*}A^{*} \subseteq (AB)^{*}$ kapsaması her zaman vardır. $(AB)(AB)^{*}A \subseteq A$ ve R bir maksimal düzen halkası olduğundan $B(AB)^{*}A \subseteq R$ olur ki buradan $(AB)^{*}A \subseteq B^{*}$ elde edilir. Ayrıca $((AB)^{*}A)^{**} = ((AB)^{*}A^{**})^{**}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $(AB)^{*}A^{**} \subseteq ((AB)^{*}A)^{**} \subseteq B^{*}$ olur. Kabulden $(AB)^{*} \subseteq B^{*}A^{*}$'dır.

(2) $\Rightarrow$ (3): C ve D iki refleksif R–ideal olsun. CD'nin refleksif olduğunu ispatlamak yeterlidir. Kabulden $(CD)^{**} = ((CD)^{*})^{*} = (D^{*}C^{*})^{*}$'dır. Bu eşitliğe kabulümüzü tekrar uygulayacak olursak, C ve D refleksif olduğundan $(D^{*}C^{*})^{*} = C^{**}D^{**} = CD$ eşitliğini elde ederiz. Buradan $(CD)^{**} = CD$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (4): R bir maksimal düzen halkası ve refleksif R–ideallerin çarpımı refleksif olsun. R maksimal düzen halkası olduğundan, $D(R)$ kümesi $A \circ B = (AB)^{**}$ işlemi ile bir gruptur. Kabulden $A \circ B = (AB)^{**} = AB$ ve böylece $D(R)$ çarpma işlemiyle de bir grup oluşturur.

(4) $\Rightarrow$ (5): (4) numaralı ifadenin sağladığını kabul edelim. O halde her refleksif R–idealin bir tersi vardır yani her refleksif R–ideal tersinirdir.

(5) $\Rightarrow$ (1): R maksimal düzen halkası olduğundan $A^{**}A^{*} = R$ olduğunu göstermek yeterlidir. A^{**} bir refleksif R–ideal olduğundan bu eşitlik açıktır. $\square$

[1] ve [8] makalelerinde G-Dedekind asal halka üzerindeki polinom halkaları, Rees halkaları, Ore genişlemeleri çalışılmıştır. G-Dedekind asal halka üzerindeki grup halkalarının yapısı ve bu halka sınıfının özelliklerinin maksimal düzen olması gerekmeyen halkalarda incelenmesi problemleri ileride çalışmayı planladığımız açık problemlerdir.

Kaynaklar

[1] Akalan, E., On generalized Dedekind prime rings, *Journal of Algebra*, 320, 2907-2916, **2008**.

[2] Anderson, D.D., Kang, B.G., Pseudo Dedekind domains and divisorial ideals in $R[X]_T$, *Journal of Algebra*, 122, 323-336, **1989**.

[3] Beachy, J.A., *Lectures on Rings and Modules*, Cambridge University Press, **1999**.

[4] Chatters, A.W., Hajarnavis, C. R., *Rings with Chain Conditions*, Research Notes in Mathematics, 44. Pitman, **1980**.

[5] Chatters, A W., Jordan, D. A., Non-commutative unique factorisation rings. *Journal of London Mathematical Society*, (2), 33, 22-32, **1986**.

[6] Divinsky, N.J., *Rings and Radicals*, University of Toronto Press, **1965**

[7] Eisenbud, D., Robson, J.C., Hereditary Noetherian Rings, *Journal of Algebra*, 16, 86-104, **1970**.

[8] Helmi, R.M., Marubayashi, H., Ueda, A., Differential polynomial rings which are generalized Asano prime rings, *Indian Journal of Pure Applied Mathematics*, 44, (5), 673-681, **2013**.

[9] Michler, G.O., Asano orders, *Proceedings of London Mathematical Society*, 19, 421-443, **1969**.

[10] Rinehart, G.S., Note On The Global Dimension of a Certain Ring, *Proceedings of London Mathematical Society*, 13, 341-346, **1962**.

[11] Goodearl, K. R., Warfield, R. B., *An introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, **2004**.

[12] Hungerford, T.W., *Algebra*, Springer-Verlag New York Press, **1925**

[13] Hajarnavis, C. R., Lenagan, T. H., Localisation in Asano orders, *Journal of Algebra*, 21, 441-449, **1972**.

[14] Jacobson N., *The theory of rings.* American Mathematical Society 2., New York, **1943**

[15] Lam, T.Y., *A First Course in Non-commutative Rings*, Springer-Verlag, **1991**.

[16] Lenagan, T.H.,*Asano and Hereditary Orders in Simple Artinian Rings*, Doktora tezi, University of Leeds, **1972**.

[17] McConnell, J.C., Robson, J.C. with the cooperation of Small, L.W., *Noncommutative Noetherian rings*, Wiley, **1987**.

[18] Marubayashi, H., Oystaeyen, F.V., *Prime Divisors and Noncommutative Valuation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 2059 Springer, **2012**

[19] Robson, J.C., Non-commutative Dedekind Rings, *Journal of Algebra*, 9, 249-265, **1968**.

[20] Zafrullah, M., On generalized Dedekind domains, *Mathematika*, 33, 285-295, **1986**.

Dizin

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Gözde KOÇAK
Doğum Yeri	:	HATAY
Medeni Hali	:	Bekar
E-posta	:	gkocak07@hacettepe.edu.tr

Eğitim

Lise	:	2002-2006 Hatay Osman Ötken Anadolu Lisesi
Lisans	:	2007-2008 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık 2008-2012 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Çok iyi

İş Deneyimi

–

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–