ASİMETRİK TOPOLOJİK UZAYLAR

ASYMMETRIC TOPOLOGICAL SPACES

ESRA KARATAŞ

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2013

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..

Prof. Dr. Ali BÜLBÜL

Üye (Danışman) :............................

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Üye :..

Prof. Dr. A.Haydar EŞ

Üye :..

Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ

Üye :..

Yrd. Doç. Dr. Filiz YILDIZ

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ..../..../2013 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..../..../2013 tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ASİMETRİK TOPOLOJİK UZAYLAR

ESRA KARATAŞ

ÖZ

Bu tezin amacı; asimetrik topolojik uzaylar ve bu uzayların daha iyi topolojik özelliklere sahip olmalarını sağlamak amacıyla tanımlanan dual uzaylar üzerine bir derleme yapmaktır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak temel bilgileri içermektedir.

Üçüncü bölümde asimetrik topolojik uzaylar ve topolojik dualiteden bahsedilmiştir. Ayrıca verilen bir topoloji için, zayıf, Alexandroff ve de Groot duallerin tanımları verilmiş ve ikili topolojik uzaylar yardımıyla, bir topoloji ile duali arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ikili topolojik uzaylarda kompaktlık kavramına yer verilmiştir. Bunun yanı sıra kompakt Hausdorff uzayların ikili topolojik uzaylardaki oluşumları olan ortak kompakt uzaylar ve asimetrik topolojik uzaylardaki oluşumları olan skew kompakt uzaylar incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Nachbin'in sıralı topolojik uzayları incelenmiş ve skew kompakt uzaylar, sıralı topolojik uzaylar yardımıyla karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asimetrik topolojik uzay, zayıf simetri, Alexandroff özellendirme sıralaması, Urysohn aile, topolojik dual, doymuş küme, zayıf dual, Alexandroff dual, de Groot dual, dengeli ikili topolojik uzay, ortak kompakt ikili topolojik uzay, skew kompakt uzay, indirgenemez küme, sober uzay, kuvvetli sober uzay, dengeli yerel kompakt uzay, sıralı topolojik uzay

Danışman: Prof. Dr. Rıza Ertürk

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

ASYMMETRIC TOPOLOGICAL SPACES

ESRA KARATAŞ

ABSTRACT

The aim of this thesis is to make a compilation about asymmetric topological spaces and dual spaces which are defined in order to provide asymmetric spaces to have better topological properties. This work consists of five chapters. The first chapter is an introduction. The second chapter contains the fundamental information which will be used in posterior chapters of the thesis.

In the third chapter, asymmetric topological spaces and topological duality are mentioned. In addition, for a given topology, weak, Alexandroff and de Groot duals are defined and with the help of bitopological spaces, relations between a topology and its dual are investigated.

In the forth chapter, the notion of compactness in bitopological spaces are given. Moreover, bitopological and asymmetric versions of compact Hausdorff spaces which are, respectively, join compact and skew compact spaces are investigated.

Finally in the fifth chapter, Nachbin's ordered topological spaces are given and skew compact spaces are characterized by means of ordered topological spaces.

Keywords: Asymmetric topological space, weak symmetry, Alexandroff specialization order, Urysohn collection, topological dual, saturated set, weak dual, Alexandroff dual, de Groot dual, stable bitopological space, joincompact bitopological space, skew compact space, irreducible set, sober space, strongly sober space, stably locally compact space, topological ordered space

Supervisor: Prof.Dr. Rıza Ertürk

Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını benden esirgemeyen, bana sabır ve anlayışla yol gösteren değerli hocam Prof.Dr. Rıza ERTÜRK'e,

Tez çalışmalarım sırasında desteklerini gördüğüm bölüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma,

Benden sevgi ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve hayatımı daha güzel kılan kardeşim Kübra'ya,

Tüm hayatını, hayatımı güzelleştirmeye adayan ve varlığıyla bana güç veren teyzem Tülin ÖZÜKAYA'ya,

Bana her zaman güvenen, attığım her adımda yanımda olan ve bu süre zarfında her türlü olumsuzlukta yardımıma koşan Mustafa KORKMAZ'a,

Ayrıca vermiş olduğu yüksek lisans bursu ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathscr{P}(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
$\mathcal{T}_s$	: Standart topoloji
$\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$	: x noktasının $\mathcal{T}$ topolosine göre komşuluklar sistemi
$\mathscr{X} = (X, d, A, P)$	: Süreklilik uzayı
$\mathcal{T}_0(\mathscr{X})$	: $\mathcal{X}$ süreklilik uzayı ile üretilen topoloji
$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$	: $\mathcal{U}$ (quasi) düzgünlüğü ile üretilen topoloji
δ	: yakınımsı bağıntı
$\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$	: İkili topolojik uzay
$kap^{\mathcal{T}}(A)$	: A kümesinin $\mathcal{T}$ topolojisine göre kapanışı
$\text{iç}^{\mathcal{T}}(A)$	: A kümesinin $\mathcal{T}$ topolojisine göre içi
$\leq_{\mathcal{T}}$	: $\mathcal{T}$ topolojisine göre Alexandroff özellendirme
zs	: zayıf simetri
pH	: pseudo Hausdorff
$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$	: X'den Y'ye ikişer sürekli fonksiyon
$\mathcal{T}^W$	: $\mathcal{T}$'nin zayıf duali
$\mathcal{T}^A$	: $\mathcal{T}$'nin Alexandroff duali
$\mathcal{T}^G$	: $\mathcal{T}$'nin de Groot duali
$(X, \mathcal{T}, \leq)$	: Sıralı topolojik uzay

1 GİRİŞ

Bu tezde; asimetrik topolojik uzaylar, bu asimetri durumunu ortadan kaldırmak amacıyla tanımlanan dual uzaylar, bu dual uzayların asimetrik topolojik uzaylar ile ilişkileri ve aynı küme üzerinde tanımlanan bu iki topolojiyi birlikte göz önüne alarak tanımlanan ikili topolojik uzayların özelliklerini kapsayan bir derleme çalışması sunmak amaçlanmaktadır.

Birçok matematiksel yapının simetrik ve asimetrik yapıları vardır. Örneğin değişmeli ve değişmeli olmayan cebirsel yapılar, simetrik önsıralamalar (denklik bağıntıları) ve asimetrik önsıralamalar (kısmi sıralama bağıntıları), metrik ve quasi-metrik uzaylar, düzgünlükler ve quasi-düzgünlükler bu konuda bilinen bazı örneklerdir.

Asimetrik uzaklık fonksiyonları ilk kez 1914 yılında, F. Hausdorff tarafından [3] tanımlanmıştır. Yazar bu çalışmasında, kümeler teorisi üzerine yazdığı kitapta, bir metrik uzayın herhangi iki alt kümesinin birbirine olan uzaklıklarını ölçen ve simetri özelliği taşımayan bir uzaklık tanımlayarak literatüre asimetri kavramını kazandırmıştır. Asimetri konusunda yukarıdaki çalışmayı izleyen önemli gelişmelerden bazıları da, 1931 yılında W.A. Wilson tarafından [16] quasi-metrik kavramının tanımlanması; L. Nachbin'in [11] 1948 yılında düzgün önsıralı uzaylar üzerine yaptığı çalışmalardan esinlenilerek quasi-düzgün uzayların çalışılmaya başlanmış olmasıdır.

Genel yapılardaki asimetrik topoloji kavramı, ilk kez R. Kopperman tarafından [6], *bir* $(X, \mathcal{T})$ *uzayı, "her* $x, y \in X$ *için* $x \in kap(y) \Rightarrow y \in kap(x)$*" özelliğini sağlıyorsa bu uzaya zayıf simetrik ya da* R_0 *uzay ve zayıf simetri özelliğini sağlamayan uzaylara asimetrik topolojik uzay denilerek,* tanımlanmıştır. Herhangi bir T_1 topolojik uzayı zayıf simetri özelliğini sağladığından, uzun bir süre asimetrik topolojik uzayların genel özelliklerini araştırma ve inceleme çalışmaları yapılmamıştır. Genelde, Hausdorff (T_2) gibi kuvvetli bir ayırma aksiyomunu sağlayan klasik topolojik uzaylarda, "*kompakt her alt kümenin kapalı olması, yakınsak dizi ve süzgeçlerin tek limitlerinin var olması*" gibi, bu uzayların incelenmesini basitleştiren özelliklerin var olması nedeniyle, uzun süre Hausdorff uzaylar çalışılmıştır. Fakat bilgisayar teknolojilerindeki ilerleme, asimetrik topolojik uzaylar teorisi üzerine yapılan çalışmaları hızlandırmıştır. Çünkü,

• $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ kümeleri ile üretilen topolojiden oluşan Khalimsky doğrusu,

• Dijital k-uzaylar gibi, görüntü işleme teknolojisinde kullanılan bazı topolojik uzaylar asimetriktir.

Herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlanan metrikler ve düzgünlükler gibi birçok simetrik yapı, ürettikleri topolojiler ile elde edilen $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzaylarının özelliklerini büyük ölçüde belirler. Örneğin bir topolojik uzay metriklenebiliyorsa ya da düzgünleştirilebiliyorsa regüler ve tamamen regülerdir. Fakat bu simetrili yapılar yerine, simetri özelliğinin olmadığı quasi-metrikler ve quasi-düzgünlükler ile üretilen topolojik uzaylarda bu özelliklerin sağlanması beklenemez. Bunun için, verilen simetrisiz yapı için bir dual tanımlanıp kaybedilen özellikler yeniden elde edilebilir. Duallere birçok matematiksel yapıda rastlamak mümkündür. Örneğin,

- $\mathcal{R} = (R, +, \text{x})$ halkası için, $a, b \in R$, $a * b = b\text{x}a$ olmak üzere, $\mathcal{R}^* = (R, +, *)$ halkası,
- $\mathcal{S} = (S, \leq)$ kısmi sıralı kümesi için $\mathcal{S}^* = (S, \geq)$ kısmi sıralı kümesi,
- (M, d) quasi-metrik uzayı için $x, y \in X$, $d^*(x, y) = d(y, x)$ olmak üzere (M, d^*) quasi-metrik uzayı birer dualdir.

Asimetrik topolojik uzaylar için de birçok dual tanımlanıp, bu dualler yardımıyla uzay daha iyi özelliklere sahip bir hale getirilebilir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, tez içerisinde kullanılacak olan temel yapılar, bu yapıların temel kavram ve özellikleri ve ayrıca birbirleriyle olan ilişkileri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tezin asıl amacı olan asimetrik topolojik uzaylara ilişkin bilgiler verilmiştir. Bunun yanı sıra topolojik dual kavramı tanımlanıp, verilen bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayından elde edilen zayıf, Alexandroff ve de Groot duallerden bahsedilmiştir. Topolojik dualiteyi anlamak için ikili topolojik uzaylardan faydalanmak gerekmektedir. Çünkü, herhangi bir X kümesi üzerinde verilen $\mathcal{T}$ topolojisinin duali olan topolojiyi tanımak ve $\mathcal{T}$ topolojisi ile arasındaki ilişkileri incelemek için iki topoloji ile aynı anda çalışılmalıdır ki, bu ikili topolojik uzaylar teorisinde mümkündür. Bu nedenle dualite ve ikili topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ikili topolojik uzaylar için kompaktlık çalışılmıştır. İkili topolojik uzaylarda kompaktlık, topolojilerden sadece biriyle ilişkili iken, dengelilik iki topolojik uzayı birbirine bağlayan özellik olacaktır. Bu nedenle, dengelilik ile ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca kompakt Hausdorff uzayların ikili topolojik uzay oluşumları olan ortak kompakt uzayların bazı özellikleri verilmiştir. Bu bölümün son kısımlarında, skew kompakt uzay tanımı verilmiş, bu uzayların kompakt

Hausdorff uzayların asimetrik oluşumları olarak ifade edilebileceği gösterilmiş ve skew kompakt uzaylar için bazı karakterizasyonlar araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, ikili topolojik uzaylar temelli dualite teorisi ile Nachbin'in [10] sıralı topolojik uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve son olarak da skew kompakt uzaylar, sıralı topolojik uzaylar yardımıyla karakterize edilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tez konusu için gerekli olan temel bilgileri içermektedir.

2.1 SÜZGEÇLER

Bu kesimde [1] nolu kaynaktan yararlanılarak, süzgeçlerle ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. **(a)** $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ailesine X üzerinde bir *süzgeç* denir.

(s1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$'dir.

(s2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$'dir.

(s3) $F_1 \in \mathcal{F}$ ve $F_1 \subseteq F_2$ ise, $F_2 \in \mathcal{F}$'dir.

(b) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $F \in \mathcal{F}$ için $B \subseteq F$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa, $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{F}$'nin bir *tabanı* denir.

Önerme 2.1.2. Bir X kümesinin boştan farklı bazı alt kümelerinden oluşan ve boş olmayan bir $\mathcal{B}$ ailesinin X üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ için } \exists B_3 \in \mathcal{B}\, ;\ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

özelliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.1.3. **(a)** $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının bu uzaydaki bütün komşuluklarının $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir. Bu süzgece x noktasının *komşuluk süzgeci* denir.

(b) X bir küme ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise,

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$$

ailesi X üzerinde bir süzgeçtir ve $\mathcal{B} = \{A\}$ bu süzgecin bir tabanıdır.

Tanım 2.1.4. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

(a) $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$, X üzerinde iki süzgeç olsunlar. Eğer $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$'den daha *kabadır* ya da $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$'den daha *incedir* denir.

Eğer $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$'den kesin olarak daha incedir denir.

(b) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer X üzerinde $\mathcal{F}$'den kesin olarak daha ince olan başka bir süzgeç yoksa, $\mathcal{F}$ süzgecine bir *ultrasüzgeç* denir.

Teorem 2.1.5. Her süzgeç bir ultrasüzgeç tarafından kapsanır.

Teorem 2.1.6. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$'nin bir ultrasüzgeç olması için gerek ve yeter koşul her $A \subseteq X$ için $A \in \mathcal{F}$ ya da $X - A \in \mathcal{F}$ olmasıdır.

Önerme 2.1.7. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Eğer $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n \in \mathcal{F}$ ise, $F_k \in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vardır.

Kanıt: $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ olsun. Bu durumda, $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ bir ultrasüzgeç olduğundan $X - F = \bigcap_{k=1}^{n}(X - F_k) \notin \mathcal{F}$'dir. Öyleyse (s2)'den $X - F_k \notin \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vardır. O halde, Teorem 2.1.6'dan $F_k \in \mathcal{F}$ olmalıdır. ■

Tanım 2.1.8. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç, $x \in X$ ve $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ x'in $\mathcal{T}$ topolojisine göre komşuluk sistemi olsun. Eğer $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) \subseteq \mathcal{F}$ ise, $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına *yakınsar* denir ve $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ile gösterilir. Bu x noktasına $\mathcal{F}$ süzgecinin bir *limiti* adı verilir.

Teorem 2.1.9. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda, $(X, \mathcal{T})$ uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu uzay üzerinde tanımlı her ultrasüzgecin yakınsak olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun ve tersine $\mathcal{F}$ yakınsak olmasın. Bu durumda her $x \in X$ için $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) \nsubseteq \mathcal{F}$ olduğundan $U \notin \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ komşuluğu vardır. Ayrıca $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ olduğundan, $x \in G_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $G_x \in \mathcal{T}$ vardır ve $\forall x \in X$ için $G_x \notin \mathcal{F}$'dir. Gerçekten $G_x \in \mathcal{F}$ olsaydı, $X - G_x \notin \mathcal{F}$ olurdu ancak $\mathcal{F}$ bir ultrasüzgeç olduğundan $X - U \in \mathcal{F}$ ve $X - U \subseteq X - G_x$ olduğundan $X - G_x \in \mathcal{F}$ elde edilirdi ki, bu bir çelişkidir. Bu durumda, $\{G_x : x \in X,\ G_x \notin \mathcal{F}\}$ ailesi X'in bir açık örtüsüdür. X uzayı kompakt olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i} \in \mathcal{F}$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ vardır. Öyleyse Önerme 2.1.7'den $G_{x_k} \in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmalıdır ki, bu bir çelişkidir.

($\Leftarrow$) X üzerinde tanımlı her ultrasüzgecin yakınsak olduğunu ancak X'in kompakt olmadığını kabul edelim. O halde X'in, hiçbir sonlu alt örtüsü olmayan bir $(G_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$

açık örtüsü vardır. Bu durumda, her sonlu $S \subseteq \Lambda$ için

$$A_S = X - \bigcup_{\alpha \in S} G_\alpha \neq \emptyset$$

dir. Bu şekilde elde edilen $\{A_S : S \subseteq \Lambda,\ S \text{ sonlu}\}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır. Öyleyse Teorem 2.1.5'den, bu aile ile üretilen süzgeç, bir $\mathcal{G}$ ultrasüzgeci tarafından kapsanır. Varsayımdan, bu $\mathcal{G}$ süzgeci bir x noktasına yakınsar. Diğer yandan, $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, X'in bir açık örtüsü olduğundan $x \in G_\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in \Lambda$ vardır. G_μ açık olduğundan x'in bir komşuluğudur ve $\mathcal{G} \longrightarrow x$ olduğundan $G_\mu \in \mathcal{G}$'dir. Fakat $\mathcal{G}$'nin inşası göz önüne alınırsa, $X - G_\mu \in \mathcal{G}$ olmalıdır. Böylece, $G_\mu \in \mathcal{G}$ ve $X - G_\mu \in \mathcal{G}$ elde edilir ki, bu $\mathcal{G}$'nin (ultra)süzgeç olması ile çelişir. O halde X uzayı kompakttır. ■

Teorem 2.1.10. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul bu uzay üzerinde tanımlı her yakınsak süzgecin tek limit noktasına sahip olmasıdır.

Kanıt:

($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir yakınsak süzgeç ve tersine $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ve $\mathcal{F} \longrightarrow y$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff olduğundan $x \in G$, $y \in H$, $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G, H \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Öyleyse, G x'in, H y'nin komşulukları olduğundan $G, H \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Fakat $G \cap H = \emptyset$ olduğundan, bu durum $\mathcal{F}$'nin süzgeç olması ile çelişir.

($\Leftarrow$) $(X, \mathcal{T})$ uzayının Hausdorff olmadığını kabul edelim. Bu durumda, öyle $x, y \in X$, $x \neq y$ vardır ki, $x \in G$, $y \in H$ biçimindeki her $G, H \in \mathcal{T}$ için $G \cap H \neq \emptyset$' dir. Öyleyse,

$$\mathcal{S} = \{G \cap H : x \in G,\ y \in H\ , G, H \in \mathcal{T}\}$$

ailesi X üzerinde bir $\mathcal{F}$ süzgecinin tabanıdır. Bu $\mathcal{F}$ süzgeci için $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ve $\mathcal{F} \longrightarrow y$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı Hausdorff olmalıdır. ■

2.2 SÜREKLİLİK UZAYLARI

Bu kesimde, Kopperman [7] tarafından tanımlanan genelleştirilmiş metrikler yardımı ile üretilen süreklilik uzayları ve bu uzayların topolojik uzaylarla olan ilişkileri incelenecektir.

Tanım 2.2.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve $* : A \times A \longrightarrow A$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olmak üzere, eğer $\forall a, b, c \in A$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ oluyorsa $(A, *)$ ikilisine bir *yarı-grup* denir.

NOT 2.2.2. Eğer $(A, +)$, 0 birim elemanına sahip bir toplamsal yarı-grup ise, A üzerinde bir $\leq$ bağıntısı "$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in A\, ;\, b = a + x$" biçiminde tanımlanabilir. Açıkça gösterilebilir ki, bu bağıntı yansımalı ve geçişmelidir.

Tanım 2.2.3. 0 birim elemanına ve $\infty \neq 0$ yutan elemanına sahip, aşağıdaki özellikleri sağlayan toplamsal değişmeli $(A, +)$ yarı-grubuna bir *değer yarı-grup* denir.

(v1) $\forall a, b \in A$ için $a = b + x$ ve $b = a + y$ olacak şekilde $x, y \in A$ varsa $a = b$'dir.

(v2) $\forall a \in A$ için $b + b = a$ olacak şekilde tek bir $b \in A$ vardır ve bu b elemanı $\frac{a}{2}$ biçiminde gösterilir.

(v3) $\forall a, b \in A$ için $a \wedge b$ (a ile b'nin infimumu) vardır ve $a \wedge b \in A$ dir.

(v4) $\forall a, b, c \in A$ için $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$'dir.

NOT 2.2.4. Yukarıdaki tanımda verilen (v1) özelliği ile birlikte, Not 2.2.2'de tanımlanan $\leq$ bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu söylenebilir.

Örnek 2.2.5. Negatif olmayan genişletilmiş gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^* = [0, \infty]$ bilinen toplama işlemi ile bir değer yarı-gruptur. Fakat tam sayılar kümesi bilinen toplama işlemi ile bir değer yarı-grup değildir çünkü (v2) koşulunu sağlamaz.

Önerme 2.2.6. $\forall i \in I$ için $(A_i, +_i, 0_i, \infty_i)$ birer değer yarı-grup ise, $A = \prod_{i \in I} A_i$ olmak üzere, $(A, +, 0, \infty)$ bir değer yarı-gruptur. (Burada $+$, 0, inf ve $\forall a \in A$ için $\frac{a}{2}$ koordinatsal olarak tanımlanmıştır.)

Kanıt: $a \in A$ için $a = (a_i)_{i \in I}$ olarak gösterilsin ve $\forall i \in I$ için $(a_i +_i b_i) = (a + b)_i$ olsun. Bu durumda $(A, +)$ bir değişmeli yarı-gruptur. Şimdi $(A, +, 0, \infty)$'nın bir değer yarı-grup olduğunu göstermek için (v1), (v2), (v3) ve (v4) özelliklerinin sağlandığını gösterelim:

(v1) $a, b \in A$ olmak üzere $a = b + x$ ve $b = a + y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $a_i = b_i +_i x_i$, $b_i = a_i +_i y_i$ ve $(A_i, +_i, 0_i, \infty_i)$ değer yarı-grup olduğundan $\forall i \in I$ için $a_i = b_i$ olur. Böylece $a = b$ elde edilir.

(v2) $a \in A$ olsun. $\forall i \in I$ için $(A_i, +_i, 0_i, \infty_i)$ değer yarı-grup olduğundan $a_i = \frac{b_i}{2}$ olacak şekilde tek bir $b_i \in A_i$ vardır. O halde $b = (b_i)_{i \in I}$ olmak üzere $a = \frac{b}{2}$ ve bu $b \in A$ tektir.

(v3) $a, b \in A$ olsun. $\forall i \in I$ için $(A_i, +_i, 0_i, \infty_i)$ değer yarı-grup olduğundan $\forall i \in I$ için $a_i \wedge_i b_i \in A_i$ ve böylece $a \wedge b \in A$'dir.

(v4) $a, b, c \in A$ olsun. $(a \wedge b) + c = (a_i \wedge_i b_i)_{i \in I} +_i (c_i)_{i \in I} = (a_i +_i c_i)_{i \in I} \wedge_i (b_i +_i c_i)_{i \in I} = (a + c) \wedge (b + c)$ dir. ■

Bilindiği gibi, $\mathbb{R}^* = [0, \infty]$'da "pozitif olma" kavramı, sıfırdan farklı olmayla çakışır. Fakat örneğin $\mathbb{R}^2$'deki $(0, 1)$ ve $(1, 0)$ noktaları, infimumu 0 olan iki pozitif elemandır. Birçok metrik uzayda, ispat yaparken iki pozitif sayının infimumunun pozitif olduğu gerçeği kullanılır. Gerçekten pozitif sayıların yukarıda bahsedilen bu özelliği, onların sıfıra yakınlıklarından daha kullanışlıdır. Öyleyse, bir değer yarı-grup için kullanışlı olacak olan bir "pozitifler kümesi"nin tanımlanması gerekir.

Tanım 2.2.7. A bir değer yarı-grup olsun. Eğer $P \subseteq A$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, P'ye A'nın *pozitifler kümesi* denir.

(a1) $r, s \in P$ ise, $r \wedge s \in P$'dir.

(a2) $r \in P$ ve $a \in A$ için $r \leq a \in A$ ise, $a \in P$'dir.

(a3) $r \in P$ ise, $\frac{r}{2} \in P$'dir.

(a4) $a, b \in A$ olmak üzere, eğer $\forall r \in P$ için $a \leq b + r$ ise, $a \leq b$'dir.

NOT 2.2.8. (a4)'den $P \neq \emptyset$ olduğu söylenebilir. Gerçekten, $\infty = 0 + x$ olacak şekilde bir $x = \infty \in A$ olduğundan $0 \leq \infty$'dir. Ayrıca, $\infty \neq 0$ ve $\leq$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olduğundan $\infty \nleq 0$ dir. Öyleyse (a4)'den $\infty \nleq 0 + p$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır. Burada $p \neq \infty$'dir, çünkü $p = \infty$ olsaydı $\infty \nleq 0 + \infty = \infty$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla P kümesinde (∞'dan farklı olan) bir p elemanı vardır.

Örnek 2.2.9. $P = (0, \infty]$, $\mathbb{R}^* = [0, \infty]$ değer yarı-grubunun pozitifler kümesidir.

Önerme 2.2.10. $\forall i \in I$ için $(A_i, +_i, 0_i, \infty_i)$ birer değer-yarı grup, $P_i \subseteq A_i$ pozitifler kümesi ve $(A, +, 0, \infty)$ A_i'lerin çarpım değer yarı-grubu olsun. Bu durumda P_i'lerin toplamı

$P = \{r : \forall i \in I \text{ için } r(i) \in P_i \text{ ve sonlu tane } i \in I \text{ dışında } r(i) = \infty_i\}$

kümesi A'nın pozitifler kümesidir.

Kanıt:

(a1) $r, s \in P$ alalım. $I = \{i_1, i_2, \dots i_n\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots j_m\}$ olmak üzere, $i \notin I$ için $r(i) = \infty_i$ ve $i \notin J$ için $s(i) = \infty_i$ olsun.

$i \in I \cup J$ için $r(i) \neq \infty_i$ ve $s(i) \neq \infty_i$ olduğundan $r(i) \wedge_i s(i) \in P_i$

$i \in I - J$ için $r(i) \neq \infty_i$ ve $s(i) = \infty_i$ olduğundan $r(i) \wedge_i s(i) = r(i) \in P_i$

$i \in J - I$ için $r(i) = \infty_i$ ve $s(i) \neq \infty_i$ olduğundan $r(i) \wedge_i s(i) = s(i) \in P_i$

$i \notin I \cup J$ için $r(i) = \infty_i$ ve $s(i) = \infty_i$ olduğundan $r(i) \wedge_i s(i) = \infty_i \in P_i$'dir.

(a2) $r \in P$ ve $r \leq a \in A$ olsun. $r \in P$ olduğundan $\forall i \in I$ için $r(i) \in P_i$ ve sonlu tane $i \in I$ dışında $r(i) = \infty_i$'dir. $r(i) \leq a(i)$ ve P_i pozitifler kümesi olduğundan sonlu tane $i \in I$ dışında $r(i) = \infty_i \leq a(i)$ ve böylece $a_i = \infty_i \in P_i$ olduğundan $a \in P$'dir.

(a3) $r \in P$ ise $\forall i \in I$ için $r(i) \in P_i$ ve sonlu tane $i \in I$ dışında $r(i) = \infty_i$ dir. Bu durumda, $\forall i \in I$ için $\frac{r(i)}{2} = \frac{r}{2}(i) \in P_i$ ve sonlu tane $i \in I$ dışında $\frac{r}{2}(i) = \infty_i$ olduğundan $\frac{r}{2} \in P$'dir.

(a4) $a \not\leq b$ ise $a(i) \not\leq b(i)$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Böylece, P_i pozitifler kümesi olduğundan $a(i) \not\leq b(i) +_i s_i$ olacak şekilde bir $s_i \in P_i$ vardır. Bu durumda,

$$r(j) = \begin{cases} s_i & j = i \quad ise \\ \infty_i & j \neq i \quad ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $r \in \mathcal{P}$ için $a \not\leq b + r$ sağlanır. ■

Tanım 2.2.11. $X \neq \emptyset$ bir küme, A bir değer yarı-grup, P, A'nın pozitifler kümesi ve $d : X \times X \longrightarrow A$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için,

(m1) $d(x, x) = 0$

(m2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlıyorsa d'ye bir *süreklilik fonksiyonu*, $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ dörtlüsüne de bir *süreklilik uzayı* denir.

Eğer d fonksiyonu (m1) ve (m2) koşullarına ek olarak,

(m3) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

koşulunu sağlıyorsa $\mathscr{X}$'e *ayrılmış*,

(m4) $d(x,y) = d(y,x)$

koşulunu sağlıyorsa $\mathscr{X}$'e *simetriktir* denir.

NOT 2.2.12. Her simetrisiz yarı-metrik (quasi-pseudo metrik) bir süreklilik fonsiyonu değildir. Çünkü, bir d quasi-pseudo metriği $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ şeklinde tanımlıdır ve $[0,\infty)$ kümesinin yutan elemanı yoktur.

Örnek 2.2.13 (Yapı Uzayları). [4] $R \neq \emptyset$ bir küme, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(R)$, R'nin kuvvet kümesi ve $\leq := \subseteq$ olmak üzere, $(\mathcal{A}, \cup, \emptyset, R)$ bir değer yarı-gruptur. $\mathcal{A}$'nın pozitifler kümesi
$\mathcal{P} = \{R - F : F \text{ sonlu}\}$ biçimindedir. $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$ ve $I, J \in \mathcal{Y}$ için $d : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{A}$ dönüşümü $d(I,J) = J - I$ biçiminde tanımlı olmak üzere $(\mathcal{Y}, d, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ bir süreklilik uzayıdır. Bu uzaya *yapı uzayı* denir.

Kanıt: Öncelikle $\mathcal{A}$'nın bir değer yarı-grup olduğunu gösterelim:

(**v1**) $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$ için $R_1 = R_2 \cup A$ ve $R_2 = R_1 \cup B$ olacak şekilde $A, B \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda, $R_2 \subseteq R_1$ ve $R_1 \subseteq R_2$ olduğundan $R_1 = R_2$ dir.

(**v2**) $R_1 \in \mathcal{A}$ olsun. $R_2 := R_1$ olarak seçilirse, $R_2 \cup R_2 = R_1$ olacak şekilde tek bir $R_2 \in \mathcal{A}$ bulunmuş olur.

(**v3**) $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$ için $\inf\{R_1, R_2\} = R_1 \cap R_2 \in \mathcal{A}$'dir. Gerçekten, $\leq := \subseteq$ biçiminde tanımlı olduğundan ve $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$, $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$ sağlandığından, $R_1 \cap R_2$, R_1 ve R_2 için bir alt sınırdır. Ayrıca, $R_3 \subseteq R_1$ ve $R_3 \subseteq R_2$ olacak şekildeki $R_3 \in \mathcal{A}$ için $R_3 \subseteq R_1 \cap R_2$ olduğundan $R_1 \cap R_2$, R_1 ve R_2'nin infimumudur.

(**v4**) $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{A}$ olmak üzere $(R_1 \cap R_2) \cup R_3 = (R_1 \cup R_3) \cap (R_2 \cup R_3)$ sağlanır.

O halde $\mathcal{A}$ bir değer yarı gruptur.

Şimdi $\mathcal{P}$'nin, $\mathcal{A}$'nın pozitifler kümesi olduğunu gösterelim:

(**a1**) $P_1, P_2 \in P$ olsun. O halde, $P_1 = R - F_1$ ve $P_2 = R - F_2$ olacak şekilde sonlu F_1, F_2 kümeleri vardır. $R - P_1 = F_1$ ve $R - P_2 = F_2$ kümeleri sonlu olduğundan $F_1 \cup F_2 = (R - P_1) \cup (R - P_2) = R - (P_1 \cap P_2)$ sonludur ve böylece $\inf\{P_1, P_2\} = P_1 \cap P_2 \in P$'dir.

(**a2**) $P_1 \in P$ ve $P_1 \subseteq P_2 \in \mathcal{A}$ olsun. $R - P_1$ sonlu ve $R - P_2 \subseteq R - P_1$ olduğundan $R - P_2$ de kümesi de sonludur. Buradan $P_2 \in \mathcal{P}$ olduğu görülebilir.

(**a3**) $P_1 \in \mathcal{P}$ olmak üzere $P_2 \cup P_2 = P_1$ sağlanacak şekilde $P_2 := P_1$ vardır.

(**a4**) $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$, her $P \in \mathcal{P}$ için $R_1 \subseteq R_2 \cup P$ ve $R_1 \nsubseteq R_2$ olsun. Bu durumda, $r \in R_1$ ve $r \notin R_2$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır ve $r \in R_1$ olduğundan $r \in R_2 \cup P$ dir. Ayrıca, $r \notin R_2$ olduğundan her $P \in \mathcal{P}$ için $r \in P$ olmalıdır. Fakat $R - (R - \{r\}) = \{r\}$ sonlu ve böylece $R - \{r\} \in \mathcal{P}$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Son olarak d fonksiyonunun bir süreklilik fonksiyonu olduğunu gösterelim:

(**m1**) $I \in \mathcal{Y}$ için $d(I, I) = I - I = \emptyset$ dir.

(**m2**) $I, J, K \in \mathcal{Y}$ için $d(I, J) = J - I \subseteq (K - I) \cup (J - K) = d(I, K) \cup d(K, J)$'dir.

O halde $(\mathcal{Y}, d, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ bir süreklilik uzayıdır. ∎

Tanım 2.2.14. $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ süreklilik uzayı olsun. $d^*(x, y) = d(y, x)$ olmak üzere $\mathscr{X}^* = (X, d^*, A, P)$'e $\mathscr{X}$'in *duali* ; $d^s(x, y) = d(x, y) + d^*(x, y)$ olmak üzere $\mathscr{X}^s = (X, d^s, A, P)$'e $\mathscr{X}$'in *simetrikleşmesi* adı verilir.

NOT 2.2.15. Kolayca gösterilebilir ki, $\mathscr{X}^*$ bir süreklilik uzayı ve $\mathscr{X}^s$ bir simetrik süreklilik uzayıdır.

Tanım 2.2.16. $\mathscr{X}_1 = (X_1, d_1, A_1, P_1)$ ve $\mathscr{X}_2 = (X_2, d_2, A_2, P_2)$ birer süreklilik uzayı ve $f : \mathscr{X}_1 \longrightarrow \mathscr{X}_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $r \in P_2$ için $d_1(x, y) \leq s$ iken $d_2(f(x), f(y)) \leq r$ olacak şekilde bir $s \in P_1$ varsa f fonksiyonuna süreklilik uzayları arasında *quasi düzgün süreklidir* denir.

Tanım 2.2.17. $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir süreklilik uzayı, $x \in X$ ve $b \in P$ olmak üzere,

$$N_b(x) = \{y : d(x, y) \leq b\}$$

kümesine x *civarındaki* b *yarıçaplı bir yuvar* denir.

Önerme 2.2.18. A bir değer yarı-grup ve P, A'nın pozitifler kümesi olsun. $a \in A$ ve $r, t \in P$ için

$$a \leq r \text{ ve } a \leq t \Leftrightarrow a \leq (r \wedge t)$$

sağlanır.

Kanıt: $a \leq r$ ve $a \leq t$ olsun. Bu durumda $\exists r_1, t_1 \in A$ için $r = a + r_1$ ve $t = a + t_1$ dir. $r \wedge t = (a + r_1) \wedge (a + t_1) = a + (r_1 \wedge t_1)$ olduğundan $a \leq (r \wedge t)$ dir. ∎

Önerme 2.2.19. $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir süreklilik uzayı olmak üzere

$$\mathcal{T}_0(\mathscr{X}) = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists r \in P\ ;\ N_r(x) \subseteq G\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Kanıt:

(**i**) "$x \in \emptyset \Rightarrow \exists r \in P\ ;\ N_r(x) \subseteq \emptyset$" ifadesi doğru olduğundan $\emptyset \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ dir ve

$\forall r \in P$ ve $\forall x \in X$ için $N_r(x) \subseteq X$ olduğundan $X \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ dir.

(**ii**) $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ ve $x \in G_1 \cap G_2$ olsun. Bu durumda, $x \in G_1$ ve $x \in G_2$ olduğundan, $N_r(x) \subseteq G_1$ ve $N_t(x) \subseteq G_2$ olacak şekilde $r, t \in P$ vardır. O halde Önerme 2.2.18'den her $y \in X$ için

$$d(x, y) \leq r \ \ ve \ \ d(x, y) \leq t \Leftrightarrow d(x, y) \leq (r \wedge t)$$

olduğundan

$$N_{r \wedge t}(x) = N_r(x) \cap N_t(x) \subseteq G_1 \cap G_2$$

elde edilir. Öyleyse $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$'dir.

(**iii**) $\forall i \in I$ için $G_i \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olsun.

Eğer $\forall i \in I$ için $G_i = \emptyset$ ise, $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ sağlanır.

O halde $\exists i \in I$ için $G_i \neq \emptyset$ olsun. $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ ise, $x \in G_{i_0} \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ ve böylece $N_r(x) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır. Öyleyse $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ dir.

O halde $\mathcal{T}_0(\mathscr{X})$, X üzerinde bir topolojidir. ■

Tanım 2.2.20. $\mathcal{T}_0(\mathscr{X}) = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists r \in P\ ;\ N_r(x) \subseteq G\}$ topolojisine $\mathscr{X}$ *süreklilik uzayı ile üretilen topoloji* denir.

Önerme 2.2.21. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $G \subseteq X$ olsun. Bu durumda, $q > 0$ gerçel sayısı için, $d_G : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$,

$$d_G(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{“}x \in G \Rightarrow y \in G\text{''} \\ q & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan d_G fonksiyonu bir süreklilik fonksiyonudur.

Kanıt:

(**m1**) Her $x \in X$ için "$x \in G \Rightarrow x \in G$" olduğundan $d_G(x, x) = 0$'dır.

(m2) • $d_G(x,z) = 0$ ve $d_G(z,y) = 0$ olsun. Bu durumda "$x \in G \Rightarrow z \in G$" ve "$z \in G \Rightarrow y \in G$" olduğundan "$x \in G \Rightarrow y \in G$" dir. Öyleyse $0 = d_G(x,y) \leq d_G(x,z) + d_G(z,y)$ sağlanır.

• $d_G(x,z) = q$ ya da $d_G(z,y) = q$ olsun. Bu durumda $d_G(x,y) = 0$ ya da $d_G(x,y) = q$ olacağından $d_G(x,y) \leq d_G(x,z) + d_G(z,y)$ sağlanır. ■

Önerme 2.2.22. $X \neq \emptyset$ bir küme, $G \subseteq X$ ve d_G fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlı olmak üzere $\mathscr{X}^G = (X, d_G, [0,\infty], (0,\infty])$ süreklilik uzayı ile üretilen topoloji $\mathcal{T}_0(\mathscr{X}^G) = \{\emptyset, G, X\}$'dir.

Kanıt: $p \in (0,\infty]$ olmak üzere;

- $p < q$ ise,

$$N_p(x) = \{y \in X : d_G(x,y) \leq p\} = \{y \in X : d_G(x,y) = 0\} = \begin{cases} G & x \in G \\ \emptyset & x \notin G \end{cases}$$

- $p \geq q$ ise, $N_p(x) = X$'dir.

Öyleyse $\mathcal{T}_0(\mathscr{X}) = \{\emptyset, G, X\}$ dir. ■

Teorem 2.2.23. Her topoloji bir süreklilik uzayı tarafından üretilir.

Kanıt: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $q \in (0,\infty]$ kanıt boyunca sabit olsun. Her $G \in \mathcal{T}$ için $d_G : X \times X \longrightarrow [0,\infty]$

$$d_G(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{“}x \in G \Rightarrow y \in G'' \\ q & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan d_G'nin bir süreklilik fonksiyonu olduğunu biliyoruz.

Şimdi $A_G = [0,\infty]$, $P_G = (0,\infty]$ olmak üzere A, A_G'lerin çarpımı, P ise P_G'lerin toplamı olsun. Önerme 2.2.6'dan A bir değer yarı grup ve Önerme 2.2.10'dan P, A'nın pozitifler kümesidir. Ayrıca d_G bir süreklilik fonksiyonu olduğundan,

$$d : X \times X \longrightarrow A, \quad d(x,y) = (d_G(x,y))_{G \in \mathcal{T}}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonu da bir süreklilik fonksiyonudur. Böylece $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir süreklilik uzayıdır.

Şimdi $\mathcal{T}_0(\mathscr{X}) = \mathcal{T}$ olduğunu gösterelim:

$G \in \mathcal{T}$ olsun. $p \in (0, \infty]$ için $r(G,p)$ pozitifi

$$r(G,p)(H) = \begin{cases} \infty & H \in \mathcal{T} \quad ve \quad H \neq G \text{ ise} \\ p & H = G \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

$x \in G$ ve $p < q$ seçilirse Önerme 2.2.22'den $N_{r(G,p)}(x) = G$ dir. O halde $G \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ yani $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$'dir.

Ters yönü için; $x \in G \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olsun. Bu durumda, $N_{r_x}(x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r_x \in P$ vardır ve $r_x \in P$ olduğundan $\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{T} : r_x(H) < \infty_i\}$ kümesi sonludur. $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots H_n\}$ olarak alınsın ve

$$r_x(H_i) = \begin{cases} p_i & H_i \in \mathcal{H} \\ \infty_i & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$r(H_i, p_i)(H) = \begin{cases} p_i & H = H_i \quad ise \\ \infty_i & H \neq H_i \quad ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere,

$$r_x = r(H_1, p_1) \wedge r(H_2, p_2) \wedge \ldots \wedge r(H_n, p_n)$$

ve böylece

$$N_{r_x}(x) = N_{r(H_1,p_1)}(x) \cap N_{r(H_2,p_2)}(x) \cap \ldots \cap N_{r(H_n,p_n)}(x) \;\; dir.$$

Ayrıca Önerme 2.2.22'den $N_{r(H_i,p_i)}(x)$'ler X'e ya da H_i'ye eşit olacağından $N_{r_x}(x) \in \mathcal{T}$ dir. Böylece $G \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_0(\mathscr{X}) \subseteq \mathcal{T}$ elde edilir. ∎

Teorem 2.2.24. [7] Bir topolojik uzayın tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul bu topolojinin bir simetrik süreklilik uzay tarafından üretilmesidir.

Kanıt: Teoremin ispatında, [7] nolu makalenin genel bilgi ve sonuçları kullanıldığı için, çok yer tutacağı düşüncesiyle ispata yer verilmemiştir.

NOT 2.2.25. $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir süreklilik uzayı olmak üzere, bu uzayın T_0 olması ürettiği $(X, \mathcal{T}_0(\mathscr{X}))$ topolojik uzayının T_0 olması anlamındadır.

Önerme 2.2.26. $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ süreklilik uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) + d(y,x) \neq 0$ olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\mathscr{X}$ uzayı T_0, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in G$, $y \notin G$ ya da $y \in G$, $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ vardır.

• $x \in G$, $y \notin G$ ise $N_r(x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır ve $y \notin N_r(x)$'dir. Bu durumda $d(x, y) > r$ olduğundan $d(x, y) \neq 0$'dır.

• $y \in G$, $x \notin G$ ise $N_r(y) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır ve $x \notin N_r(y)$'dir. Bu durumda $d(y, x) > r$ olduğundan $d(y, x) \neq 0$'dır.

O halde, $d(x, y) \neq 0$ ya da $d(y, x) \neq 0$ olduğundan $d(x, y) + d(y, x) \neq 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Varsayım gereği $d(x, y) + d(y, x) \neq 0$ olduğundan $d(x, y) \neq 0$ ya da $d(y, x) \neq 0$ olmalıdır. O halde $d(x, y) > r$ ya da $d(y, x) > r$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır. Buradan, $x \in N_r(x)$, $y \notin N_r(x)$ ya da $y \in N_r(y)$, $x \notin N_r(y)$ sağlandığından ve $N_r(x), N_r(y) \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olduğundan $\mathscr{X}$ süreklilik uzayı T_0'dır. ■

Tanım 2.2.27. **(a)** $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir simetrik süreklilik uzay ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer her $r \in P$ için " $x, y \in V$ ise $d(x, y) \leq r$ " olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa, $\mathcal{V}$'ye *Cauchy süzgeci* denir.

(b) Bir simetrik süreklilik uzayda her Cauchy süzgeci yakınsaksa bu uzay *tamdır* denir.

(c) $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir simetrik süreklilik uzay olsun. Eğer $\forall r \in P$ için "$x \in X \Rightarrow \exists y \in F$; $d(x, y) \leq r$" koşulu sağlanacak şekilde sonlu bir $F \subseteq X$ kümesi varsa, bu uzaya *tamamen sınırlıdır* denir.

2.3 QUASİ DÜZGÜN UZAYLAR

Bu kesimde [1] ve [15] nolu kaynaklardan yararlanılarak, quasi metrik uzaylardan daha geniş, fakat topolojik uzaylardan daha dar bir uzay sınıfı olan "quasi düzgün uzaylar" ile ilgili bazı temel özellikler verilecektir. Ayrıca bu uzayların topolojik uzaylar ve süreklilik uzaylarla olan ilişkileri incelenecektir.

Tanım 2.3.1. **(a)** $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesine X'in *köşegeni* denir.

(b) $A \subseteq X \times X$ olmak üzere $A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$ olarak tanımlıdır. Eğer $A = A^{-1}$ ise, A'ya *simetriktir* denir.

(c) $A, B \subseteq X \times X$ ise, $A \circ B = \{(x,y) : \exists z \in X \; ; \; (x,z) \in B, (z,y) \in A\}$ biçiminde tanımlıdır.

NOT 2.3.2. $A, B \subseteq X \times X$ olsun. Bu durumda,

(a) $A \subseteq B$ ise, $A^{-1} \subseteq B^{-1}$ ve $\forall C \subseteq X \times X$ için $A \circ C \subseteq B \circ C$ dir.

(b) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$'dir.

Tanım 2.3.3. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$ alt ailesi

(u1) $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $\Delta \subseteq U$'dur.

(u2) $\forall\, U, V \in \mathcal{U}$ için $U \cap V \in \mathcal{U}$'dir.

(u3) $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V = V^2 \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(u4) $U \in \mathcal{U}$ ve $U \subseteq V \in \mathscr{P}(X \times X)$ ise, $V \in \mathcal{U}$'dir.

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{U}$'ya X üzerinde bir *quasi düzgünlük* ve $(X, \mathcal{U})$ ikilisine *quasi düzgün uzay* denir. Eğer $\mathcal{U}$ ailesi (u1),(u2),(u3),(u4) koşullarına ek olarak,

(u5) $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{U}$'ya bir *düzgünlük*, $(X, \mathcal{U})$'ya bir *düzgün uzay* denir.

NOT 2.3.4. **(a)** (u5) özelliğinin "$\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $U^{-1} \in \mathcal{U}$'dir" ifadesi ile denk olduğu kolayca gösterilebilir.

(b) (u3) ve (u5) koşulları birlikte, "$\forall U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır" koşuluna denktir:

(u3) ve (u5) koşulları sağlansın ve $U \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda (u3)'den $V_1 \circ V_1 \subseteq U$ olacak şekilde bir $V_1 \in \mathcal{U}$ ve böylece (u5)'den $V_2^{-1} \subseteq V_1$ olacak şekilde bir $V_2 \in \mathcal{U}$ vardır. $V = V_1 \cap V_2$ olarak seçilirse, $V \circ V^{-1} \subseteq U$ elde edilir. Gerçekten, $(x,y) \in V \circ V^{-1}$ alınırsa, $(x,z) \in V^{-1}$ ve $(z,y) \in V$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda, $(z,x) \in V$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olduğundan $(x,z) \in V_2^{-1} \subseteq V_1$ ve $(z,y) \in V_1$ elde edilir. O halde, $(x,y) \in V_1 \circ V_1 \subseteq U$ ve böylece $V \circ V^{-1} \subseteq U$'dir.

Diğer taraftan eğer "$\forall U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır" koşulu sağlanıyorsa, verilen her $U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan, $V^{-1} \subseteq U$ ve $W = V \circ V^{-1} \in \mathcal{U}$ için $W \circ W \subseteq U$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece (u3) ve (u5) koşulları sağlanır.

Tanım 2.3.5. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{U}$, X üzerinde bir quasi düzgünlük olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi de bir quasi düzgünlüktür ve $\mathcal{U}$'nun *duali (eşleniği)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.6. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \Delta$ oluyorsa $(X,\mathcal{U})$'ya *ayrılmış düzgün uzay* denir.

Tanım 2.3.7. $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ bir alt aile olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa $\mathcal{V}$'ye $\mathcal{U}$ quasi düzgünlüğünün bir *tabanı* denir.

Teorem 2.3.8. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{V} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$ verilsin. Eğer $\mathcal{V}$ ailesi,

(v1) $\forall\, V \in \mathcal{V}$ için $\Delta \subseteq V$'dir.

(v2) $\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ için $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$ olacak şekilde bir $V_3 \in \mathcal{V}$ vardır.

(v3) $\forall\, V \in \mathcal{V}$ için $W \circ W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{V}$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa bu aile X üzerinde bir $\mathcal{U}$ quasi düzgünlüğünün tabanıdır.

Kanıt: $\mathcal{V} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$ ailesi (v1), (v2) ve (v3) özelliklerini sağlamak üzere, $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X : \exists V \in \mathcal{V}\,;\, V \subseteq U\}$ ailesinin X üzerinde bir quasi düzgünlük olduğunu gösterelim:
(**u1**) $U \in \mathcal{U}$ ise, $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır ve (v1)'den $\Delta \subseteq V \subseteq U$ dir.
(**u2**) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ ise, $V_1 \subseteq U_1$ ve $V_2 \subseteq U_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ vardır ve böylece (v2)'den $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ dir. O halde, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ dir.
(**u3**) $U \in \mathcal{U}$ ise, $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. Öyleyse, (v3)'den $W \circ W \subseteq V \subseteq U$ olacak şekilde $W \in \mathcal{V}$ bulunabilir. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan, $W \in \mathcal{U}$ ve $W \circ W \subseteq U$ dir.
(**u4**) $U \in \mathcal{U}$ ve $D \in \mathscr{P}(X \times X)$ için $U \subseteq D$ ise, $V \subseteq U \subseteq D$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. Böylece $D \in \mathcal{U}$'dir.

Öyleyse $\mathcal{U}$, X üzerinde bir quasi düzgünlüktür ve $\mathcal{U}$'nun tanımından, $\mathcal{V}$'nin $\mathcal{U}$ için bir taban olduğu açıktır. ■

Tanım 2.3.9. $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$'nin tüm sonlu arakesitlerinin kümesi $\mathcal{U}$ için bir taban oluyorsa, $\mathcal{S}$'ye $\mathcal{U}$ quasi düzgünlüğünün bir *alt tabanı* denir.

Önerme 2.3.10. [9] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\Phi \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$ olsun. Φ'nin X üzerinde bir quasi düzgünlüğün alt tabanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(i) $\forall B \in \Phi$ için $\Delta \subseteq B$'dir.

(ii) $\forall A \in \Phi$ için $(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)^2 \subseteq A$ olacak şekilde $B_1, B_2 \ldots B_n \in \Phi$ vardır.

Kanıt: Φ ailesi (i) ve (ii) koşullarını sağlasın.

$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in I} B_i : B_i \in \Phi,\ I \text{ sonlu}\}$ ailesinin X üzerinde bir quasi düzgünlüğün tabanı olduğunu gösterelim:

(**v1**) $C \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $C = \bigcap_{i \in I} B_i$ olacak şekilde $B_i \in \Phi$ ve I sonlu indeks kümesi vardır. Öyleyse (i)'den $\forall i \in I$ için $\Delta \subseteq B_i$ yani $\Delta \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i = C$ dir.

(**v2**) $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ ise, $C_1 = \bigcap_{i \in I} B_i$ ve $C_2 = \bigcap_{j \in J} B_j$ olacak şekilde $B_i, B_j \in \Phi$ ve I ve J sonlu indeks kümeleri vardır. $C_3 = \bigcap_{k \in I \cup J} B_k$ olarak tanımlanırsa, $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$ ve $I \cup J$ sonlu olduğundan $C_3 \in \mathcal{B}$ dir.

(**v3**) $C \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $C = \bigcap_{i \in I} B_i$ olacak şekilde $B_i \in \Phi$ ve I sonlu indeks kümesi vardır. Öyleyse (ii)'den $\forall i \in I$ için $(D_{1,i} \cap D_{2,i} \cap \ldots \cap D_{j,i})^2 \subseteq B_i$ olacak şekilde $D_{j,i} \in \Phi$ vardır. Böylece,
$\left(\bigcap_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{j} D_{k,i}\right)^2 \subseteq \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{k=1}^{j} D_{k,i}\right)^2 \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i = C$ olduğundan $D = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{j} D_{k,i}$ için $D^2 = D \circ D \subseteq C$ elde edilir.

Şimdi Φ , X üzerinde bir $\mathcal{U}$ quasi düzgünlüğünün alt tabanı olmak üzere Φ'nin (i) ve (ii) koşullarını sağladığını gösterelim:

$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in I} B_i : B_i \in \Phi,\ I \text{ sonlu}\}$ ailesi Φ ile üretilen taban olsun.

(**i**) $B \in \Phi$ için $B \in \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}$ bir taban olduğundan $\Delta \subseteq B$ dir.

(**ii**) $B \in \Phi$ ise, $B \in \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}$ bir taban olduğundan, $C^2 \subseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ vardır. Öyleyse, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = C$ olacak şekilde $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Phi$ bulunabilir. Buradan $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Phi$ için,

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^2 = C^2 \subseteq B$$

elde edilir. ■

Tanım 2.3.11. **(a)** $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olmak üzere her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}$ biçiminde tanımlanır.

(b) $A \subseteq X$ ve $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere, $U[A] = \bigcup_{x\in A} U[x] = \{y \in X : \exists x \in A\ ;\ (x,y) \in U\}$ biçiminde tanımlanır.

NOT 2.3.12. $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere, kolaylık için, $U[x]$ yerine $U(x)$ gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 2.3.13. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda, her $U \in \mathcal{U}$ için $V^2 \subseteq U$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

Teorem 2.3.14. $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olmak üzere,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ U(x) \subseteq G\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir ve $\mathcal{U}_x = \{U(x) : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi bu topolojinin x noktasında komşuluk sistemidir.

Kanıt: $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ U(x) \subseteq G\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim:

(**i**) • "$x \in \emptyset \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ U(x) \subseteq \emptyset$" doğru olduğundan $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$'dir.

• $\forall x \in X$ ve $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \subseteq X$ olduğundan $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$'dir.

(**ii**) $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, $x \in G_1 \cap G_2$ ise $U_1(x) \subseteq G_1$ ve $U_2(x) \subseteq G_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda (u2)'den $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ dir ve $(U_1 \cap U_2)(x) = U_1(x) \cap U_2(x) \subseteq G_1 \cap G_2$ sağlanır. Öyleyse $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ dir.

(**iii**) $\forall i \in I$ için $G_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ olsun.

Eğer $\forall i \in I$ için $G_i = \emptyset$ ise, $\bigcup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ sağlanır.

O halde $\exists i \in I$ için $G_i \neq \emptyset$ olsun. $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$ ise, $x \in G_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Bu durumda $U(x) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ bulunabilir.

Öyleyse $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ bir topolojidir ve $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$'nun tanımından $\mathcal{U}_x$'in x noktasının bu topolojiye göre komşuluk sistemi olduğu açıktır. ■

Tanım 2.3.15. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ U(x) \subseteq G\}$ topolojisine $\mathcal{U}$ *quasi düzgünlüğü ile üretilen topoloji* denir.

NOT 2.3.16. $(X,\mathcal{U})$ bir (quasi) düzgün uzay ve T_i $(i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4)$ ayırma aksiyomları olmak üzere, $(X,\mathcal{U})$ uzayının T_i olması ürettiği $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ topolojisinin T_i olması anlamındadır.

Önerme 2.3.17. Bir $(X,\mathcal{U})$ (quasi) düzgün uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $(x,y) \notin U$ ya da $(y,x) \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $(X,\mathcal{U})$ uzayı T_0 ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in G$, $y \notin G$ ya da $y \in G$, $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ vardır.

- $x \in G$, $y \notin G$ ise, $U(x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ve $y \notin U(x)$'dir. Buradan $(x,y) \notin U$ elde edilir.
- $y \in G$, $x \notin G$ ise, $U(y) \subseteq G$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ve $x \notin U(y)$'dir. Buradan $(y,x) \notin U$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda varsayım gereği, $(x,y) \notin U$ ya da $(y,x) \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan, $x \in U(x)$, $y \notin U(x)$ ya da $y \in U(y)$, $x \notin U(y)$ sağlandığından ve $U(x), U(y) \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ olduğundan $(X,\mathcal{U})$ uzayı T_0'dır. ■

Önerme 2.3.18. Bir $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayının ayrılmış olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ topolojik uzayının Hausdorff olmasıdır.

Tanım 2.3.19. $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ birer quasi düzgün uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer "$\forall\, V \in \mathcal{V}$ için $\exists U \in \mathcal{U}$; $\forall (x,y) \in U$ için $(f(x), f(y)) \in V$" koşulu sağlanıyorsa f'ye *quasi düzgün sürekli fonksiyon* denir.

Teorem 2.3.20. Verilen bir $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ süreklilik uzayı ve $r \in P$ için, $N_r = \{(x,y) : d(x,y) \leq r\}$ olmak üzere,

$$\mathcal{U}(\mathscr{X}) = \{U \subseteq X \times X : \exists r \in P\, ;\ N_r \subseteq U\}$$

ailesi X üzerinde bir quasi düzgünlüktür.

Kanıt:

(u1) $\forall x \in X$ için $d(x,x) = 0$ olduğundan $\forall\, U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ için $\Delta \subseteq U$ dir.

(u2) $U, V \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ ise, $N_r \subseteq U$ ve $N_t \subseteq V$ olacak şekilde $r, t \in P$ vardır. Önerme 2.2.18'den $N_{r \wedge t} = N_r \cap N_t \subseteq U \cap V$ ve böylece $U \cap V \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ dir.

(u3) $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ ve $U \subseteq V \in \mathscr{P}(X \times X)$ olsun. Bu durumda $N_r \subseteq U \subseteq V$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır, yani $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ dir.

(u4) $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ ise, $N_r \subseteq U$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır. $r \in P$ ve P pozitifler kümesi olduğundan $\frac{r}{2} \in P$ dir. $V := N_{\frac{r}{2}}$ olarak tanımlanırsa $V \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ dir. Ayrıca

$V \circ V \subseteq U$ sağlanır. Gerçekten, $(x, y) \in V \circ V$ ise $(x, z), (z, y) \in V$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Buradan $d(x, y) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ dir. O halde $(x, y) \in N_r \subseteq U$ ve dolayısıyla $V^2 = V \circ V \subseteq U$ dir ve böylece $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ ailesi X üzerinde bir quasi düzgünlük olur. ■

NOT 2.3.21. **(a)** Eğer $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ bir simetrik süreklilik uzayı olsaydı, $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ ailesi bir düzgünlük olurdu. Gerçekten, $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ ise, $N_r \subseteq U$ olacak şekilde $r \in P$ vardır. $\mathscr{X}$ simetrik olduğundan $N_r \subseteq U^{-1}$ olur. O halde $U^{-1} \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$'dir ve böylece $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ bir düzgünlüktür.

(b) $\mathscr{X}$ bir (simetrik) süreklilik uzayı ve $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ bu uzay ile üretilen (düzgünlük) quasi düzgünlük olmak üzere, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}(\mathscr{X})} = \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.3.22. [14] **(a)** $(X,\mathcal{U})$ bir (quasi) düzgün uzay ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \in \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $\mathcal{V}$ süzgecine *Cauchy süzgeci* denir.

(b) Bir $(X,\mathcal{U})$ (quasi) düzgün uzayındaki her Cauchy süzgeci yakınsak ise, $(X,\mathcal{U})$'ya *tam (quasi) düzgün uzay* denir.

(c) $(X,\mathcal{U})$ bir (quasi) düzgün uzay olsun. Eğer $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $U[F] = X$ olacak şekilde bir sonlu $F \subseteq X$ alt kümesi varsa, $(X,\mathcal{U})$ (quasi) düzgün uzayına *tamamen sınırlıdır* denir.

Teorem 2.3.23. [14] Bir $(X,\mathcal{U})$ quasi düzgün uzayının tamamen sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bu uzaydaki her ultrasüzgecin bir Cauchy süzgeci olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $(X,\mathcal{U})$ tamamen sınırlı bir quasi düzgün uzay ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Şimdi $\mathcal{V}$'nin bir Cauchy süzgeci olduğunu göstermek için $U \in \mathcal{U}$ alınsın. $(X,\mathcal{U})$ tamamen sınırlı olduğundan $U[F] = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \ldots \cup U(x_n) = X$ olacak şekilde bir sonlu $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi vardır. Ayrıca $\mathcal{V}$ bir ultrasüzgeç olduğundan Önerme 2.1.7'den $U(x_i) \in \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $x_i \in F$ vardır ve böylece $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgecidir.

$(\Leftarrow)$ X üzerindeki her ultrasüzgecin bir Cauchy süzgeci olduğunu ve iddianın aksine $(X,\mathcal{U})$ uzayının tamamen sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda, her sonlu $F \subseteq X$ alt kümesi için $U[F] \neq X$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ve böylece,

$$\mathcal{B} = \{X - U[F]\ ;\ F \subseteq X \text{ sonlu}\}$$

ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır. $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ ailesi ile üretilen süzgeç olmak üzere, Teorem 2.1.5'den $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $\mathcal{V}$ ultrasüzgeci vardır. O halde varsayım gereği $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgeci olduğundan $U(x) \in \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabilir. Diğer taraftan $\mathcal{B}$'nin tanımı gereği $X - U(x) \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ olduğu için $X - U(x) \in \mathcal{V}$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $(X,\mathcal{U})$ tamamen sınırlıdır. ■

Sonuç 2.3.24. $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olmak üzere, $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ topolojik uzayı kompakt ise, $(X,\mathcal{U})$ uzayı tamamen sınırlıdır.

Kanıt: $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakt ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun ve de $U \in \mathcal{U}$ verilsin. $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ kompakt olduğundan Teorem 2.1.9'dan $\mathcal{V} \longrightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan, $U(x) \in \mathcal{V}$ ve böylece $(X,\mathcal{U})$ uzayı tamamen sınırlıdır. ■

Teorem 2.3.25. [14] $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olmak üzere, $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ topolojik uzayı kompakt ise, $(X,\mathcal{U})$ uzayındaki her Cauchy süzgeci yakınsaktır.

Kanıt: $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakt ve $\mathcal{V}$, $(X,\mathcal{U})$ uzayında yakınsak olmayan bir Cauchy süzgeci olsun. Bu durumda, $\mathcal{V}$ bir limit noktasına sahip olmadığından, her $x \in X$ için $U_x(x) \notin \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $U_x \in \mathcal{U}$ vardır. $(X,\mathcal{U})$ uzayının bir quasi düzgün uzay olması nedeniyle, $V_x \circ V_x \subseteq U_x$ olacak şekilde bir $V_x \in \mathcal{U}$ vardır ve $V_x(x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$ olduğundan $x \in G_x \subseteq V_x(x)$ olacak şekilde bir $G_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ bulunabilir. $\{G_x\ ;\ x \in X\}$ ailesi X'in bir açık örtüsü ve $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakt olduğundan, $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}(x_i)$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ $(i \in I)$ vardır. Şimdi, $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{U}$ bir quasi düzgünlük olduğundan $V \in \mathcal{U}$'dir ve $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgeci olduğundan $V(p) \in \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. Ayrıca $X = V_{x_1}(x_1) \cup V_{x_2}(x_2) \cup \ldots \cup V_{x_n}(x_n)$ olduğundan $p \in V_{x_i}(x_i)$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır ve böylece $V(p) \subseteq U_{x_i}(x_i)$ sağlanır. Gerçekten, $y \in V(p)$ alınırsa, $(p, y) \in V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n}$ olduğu bilindiğinden $(p, y) \in V_{x_i}$'dir. Ayrıca, $p \in V_{x_i}(x_i)$ olduğundan $(x_i, p) \in V_{x_i}$ ve böylece $(x_i, y) \in V_{x_i} \circ V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$'dir. Buradan, $(x_i, y) \in U_{x_i}$ yani $y \in U_{x_i}(x_i)$ elde edilir. $V(p) \subseteq U_{x_i}(x_i)$ ve $V(p) \in \mathcal{V}$ olduğundan, $U_{x_i}(x_i) \in \mathcal{V}$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $(X,\mathcal{U})$ uzayında her Cauchy süzgeci yakınsaktır. ■

Teorem 2.3.26. [14] $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul $(X,\mathcal{U})$ uzayının tam ve tamamen sınırlı olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ Teorem 2.3.25 ve Sonuç 2.3.24'den kolayca görülebilir.

($\Leftarrow$) $(X,\mathcal{U})$ uzayı tam tamamen sınırlı ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Bu durumda, Teorem 2.3.23'den $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgecidir ve $(X,\mathcal{U})$ uzayı tam olduğundan yakınsaktır. Böylece Teorem 2.1.9'dan $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakttır. ■

Önerme 2.3.27. Bir simetrik süreklilik uzayın tam ve tamamen sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın ürettiği düzgünlüğün tam ve tamamen sınırlı olmasıdır.

Kanıt: $\mathscr{X} = (X,d,A,P)$ bir simetrik süreklilik uzay olsun. "$\mathscr{X}$ tamdır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ tamdır." olduğunu göstermek için "$\mathcal{V}$, $\mathscr{X}$'de bir Cauchy süzgecidir $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}, \mathcal{U}(\mathscr{X})$'de bir Cauchy süzgecidir" olduğunu göstermemiz yeterlidir.

($\Rightarrow$) $\mathcal{V}$, $\mathscr{X}$ uzayında bir Cauchy süzgeci ve $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ olsun. Bu durumda $N_r \subseteq U$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır. Öyleyse $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgeci olduğundan $x,y \in V \Rightarrow d(x,y) \leq r$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır ve her $x \in V$ için $V \subseteq N_r(x) \subseteq U(x)$ olup $U(x) \in \mathcal{V}$ sağlanır. Gerçekten, $y \in V$ alınırsa $x \in V$ olduğundan $d(x,y) \leq r$ ve böylece $y \in N_r(x)$ dir. Ayrıca, $N_r \subseteq U$ sağlandığından $N_r(x) \subseteq U(x)$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ uzayında bir Cauchy süzgecidir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{V}, \mathcal{U}(\mathscr{X})$ uzayında bir Cauchy süzgeci ve $r \in P$ olsun. O halde, $N_{\frac{r}{2}} \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$'dir ve $\mathcal{V}$ bir Cauchy süzgeci olduğundan $N_{\frac{r}{2}}(x) \in \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $y,z \in N_{\frac{r}{2}}(x)$ olmak üzere $d(x,y) = d(y,x) \leq \frac{r}{2}$ ve $d(x,z) \leq \frac{r}{2}$ ve böylelikle $d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z) \leq \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r$ dir. O halde keyfi $r \in P$ için, $y,z \in V$ ise $d(y,z) \leq r$ olacak şekilde bir $V = N_{\frac{r}{2}}(x) \in \mathcal{V}$ bulunduğundan, $\mathcal{V}$, $\mathscr{X}$ uzayında bir Cauchy süzgecidir.

Son olarak "$\mathscr{X}$ tamamen sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ tamamen sınırlıdır." olduğunu gösterelim:

($\Rightarrow$) $\mathscr{X}$ tamamen sınırlı ve $U \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ olsun. Bu durumda Önerme 2.3.13'den $V^2 \subseteq U$ ve $V = V^{-1}$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ vardır. Buradan, $N_r \subseteq V$ olacak şekilde bir $r \in P$ ve böylece "$x \in X \Rightarrow \exists y \in F$; $d(x,y) \leq r$" koşulu sağlanacak şekilde sonlu bir $F \subseteq X$ kümesi vardır. $F = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ olmak üzere $V[F] = X$ sağlanır. Gerçekten, $x \in X$ ise $d(x,x_i) \leq r$ olacak şekilde bir $x_i \in F$ vardır. Buradan, $(x,x_i) \in N_r \subseteq V$ ve V simetrik olduğundan $(x_i,x) \in V$ ve böylece $x \in V[F]$ dir. O halde, $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ tamamen sınırlıdır.

($\Leftarrow$) $\mathcal{U}(\mathscr{X})$ tamamen sınırlı ve $r \in P$ olsun. Bu durumda $r \in P$ için $N_r \in \mathcal{U}(\mathscr{X})$ olduğundan $N_r[F] = X$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq X$ alt kümesi vardır. Şimdi, $x \in X$ alınırsa $x \in N_r[F]$ olduğundan $(y,x) \in N_r$ olacak şekilde bir $y \in F$ vardır. O halde $\mathscr{X}$ simetrik bir süreklilik uzayı olduğundan $d(y,x) = d(x,y) \leq r$ olacak şekilde bir $y \in F$

vardır ve böylece $\mathscr{X}$ tamamen sınırlıdır. ■

Önerme 2.3.28. Bir T_0 düzgünlükten (T_0 simetrik süreklilik uzayından) elde edilen topolojik uzayın kompakt Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul bu düzgünlüğün (simetrik süreklilik uzayının) tam ve tamamen sınırlı olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) Teorem 2.3.26'den açıktır.

($\Leftarrow$) $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayı T_0 ve ayrıca tam ve tamamen sınırlı olsun. Öncelikle, Teorem 2.3.26'den $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakt olur. Şimdi eğer $(X,\mathcal{U})$ uzayının ayrılmış olduğu gösterilirse Önerme 2.3.18'den $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$'nun Hausdorff olduğu söylenebilir.

Bunun için, tersine $(X,\mathcal{U})$ uzayının ayrılmış olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $(x,y) \in U$ olacak şekilde $x, y \in X$, $x \neq y$ vardır. O halde bu $x \neq y$ olan $(x,y) \in X \times X$ noktası için $(x,y) \notin U$ ya da $(y,x) \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ bulunamaz ki bu durum $(X,\mathcal{U})$ uzayının T_0 olması ile çelişir.

O halde $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ uzayı kompakt Hausdorff'tur. ■

2.4 YAKINIMSI UZAYLAR

Bu kesimde yakınımsı uzaylar ile ilgili bazı temel özellikler verilerek bu uzayların quasi düzgün uzaylar ve topolojik uzaylarla olan ilişkileri incelenecektir. Bu kesimde verilen özellikler ve sonuçlar [12] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 2.4.1. $X \neq \emptyset$ bir küme, $A, B, C \subseteq X$ ve δ, $\mathscr{P}(X)$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili bağıntı olmak üzere δ'ya bir *yakınımsı bağıntı*, (X,δ) uzayına bir *yakınımsı uzay* denir.

(p1) $(A \cup B)\delta C \Leftrightarrow A\delta C$ veya $B\delta C$

(p2) $A\delta(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta B$ veya $A\delta C$

(p3) $A\delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$

(p4) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\delta B$

(p5) $A \not\delta B \Rightarrow \exists C \subseteq X$; $A \not\delta C$ ve $(X - C) \not\delta B$ dir.

Eğer (X,δ) uzayı yukarıdaki koşullara ek olarak,

(p6) $\{x\}\delta\{y\} \Rightarrow x = y$

koşulunu sağlıyorsa bu uzaya *ayrılmış (Hausdorff)* yakınımsı uzay,

(p7) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$

koşulunu sağlıyorsa *yakınlık uzayı* denir.

NOT 2.4.2. **(a)** Yukarıdaki tanımda $A\delta B$ "A, B'ye yakın" ; $A \not\delta B$ ise "A, B'den uzak" anlamına gelir.

(b) δ bir yakınımsı bağıntı olsun. Bu durumda "$A\delta^{-1}B \Leftrightarrow B\delta A$" biçiminde tanımlanan δ^{-1} bağıntısı da bir yakınımsı bağıntıdır ve δ'nın duali (eşleniği) olarak adlandırılır.

(c) "$\{x\}\delta\{y\}$" kısaca "$x\delta y$" olarak gösterilebilir.

Sonuç 2.4.3. (X, δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere her $C \subseteq X$ için $\emptyset \not\delta C$ ve $C \not\delta \emptyset$ dir.

Önerme 2.4.4. (X, δ) bir yakınımsı uzay $A, B, C, D \subseteq X$ olsun.

(a) $A\delta B$, $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ ise, $C\delta D$ dir. Böylece X, boştan farklı her alt kümesine yakındır.

(b) Herhangi bir $x \in X$ için $A\delta x$ ve $x\delta B$ oluyorsa, $A\delta B$ dir.

Kanıt:

(**a**) $A\delta B$, $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ olsun. $A\delta B$ olduğundan (p1)'den $(A \cup C)\delta B$'dir. Ayrıca, $A \subseteq C$ olduğundan $A \cup C = C$ ve böylece $C\delta B$'dir. Buradan, (p2) koşulu ile $C\delta(B \cup D)$ elde edilir. O halde, $B \cup D = D$ olduğundan $C\delta D$'dir.

İspatın ikinci kısmı için , $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. (p4)'den $A\delta A$'dır. $A\delta A$, $A \subseteq X$ ve $A \subseteq A$ olduğundan ispatın ilk kısmından $X\delta A$'dır. Böylece X, A'ya yakındır.

(**b**) $A \not\delta B$ olsun. Bu durumda, $A \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta B$ olacak şekilde bir $E \subseteq X$ vardır. Şimdi herhangi bir $x \in X$ alınırsa, $x \in E$ veya $x \in (X - E)$ olacaktır.

$x \in E$ ise $A \not\delta E$ olduğundan (a)'dan $A \not\delta x$ elde edilir.

$x \in (X - E)$ ise $(X - E) \not\delta B$ olduğundan (a)'dan $x \not\delta B$ elde edilir. Dolayısıyla $A \not\delta B$ ise $\forall x \in X$ için $A \not\delta x$ ya da $x \not\delta B$ dir, yani (b) sağlanır. ■

Tanım 2.4.5. (X, δ) bir yakınımsı uzay, $A, B \subseteq X$ olmak üzere, bir $\ll$ bağıntısı

$$A \ll B \Leftrightarrow A \not\delta (X - B)$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 2.4.6. (X, δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere yukarıdaki gibi tanımlanan $\ll$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar.

(k1) $X \ll X$ ve $\emptyset \ll \emptyset$ dir.

(k2) $A \ll B$ ise, $A \subseteq B$ dir.

(k3) $A \subseteq B \ll C \subseteq D$ ise, $A \ll D$ dir.

(k4) $A \ll B_1$ ve $A \ll B_2 \Leftrightarrow A \ll B_1 \cap B_2$ dir.

(k5) $A_1 \ll B$ ve $A_2 \ll B \Leftrightarrow A_1 \cup A_2 \ll B$ dir.

(k6) $A \ll B$ ise, $\exists C \subseteq X \;\; ; \;\; A \ll C \ll B$ dir.

Eğer (X, δ) ayrılmış ise,

(k7) $x \ll X - \{y\} \Leftrightarrow x \neq y$ sağlanır.

Kanıt:
(**k1**) Sonuç 2.4.3'den $X \not\delta\, \emptyset$ ve $\emptyset \not\delta\, X$ olduğundan $X \ll X$ ve $\emptyset \ll \emptyset$ dir.
(**k2**) $A \ll B$ ise $A \not\delta\, (X - B)$ dir. Böylece (p4)'den $A \cap (X - B) = \emptyset$, yani $A \subseteq B$ dir.
(**k3**) $A \subseteq B \ll C \subseteq D$ ve tersine $A \not\ll D$ olsun. O halde, $A\delta(X - D)$, $A \subseteq B$ ve $X - D \subseteq X - C$ olduğundan Önerme 2.4.4'den $B\delta(X - C)$ dir ki bu $B \ll C$ ile çelişir. O halde, $A \ll D$ olmalıdır.
(**k4**)
$$
\begin{aligned}
A \ll B_1 \text{ ve } A \ll B_2 &\Leftrightarrow A \not\delta\, (X - B_1) \text{ ve } A \not\delta\, (X - B_2) \\
&\Leftrightarrow A \not\delta\, [(X - B_1)] \cup [(X - B_2)] \\
&\Leftrightarrow A \not\delta\, [X - (B_1 \cap B_2)] \\
&\Leftrightarrow A \ll B_1 \cap B_2
\end{aligned}
$$
(**k5**)
$$
\begin{aligned}
A_1 \ll B \text{ ve } A_2 \ll B &\Leftrightarrow A_1 \not\delta\, (X - B) \text{ ve } A_2 \not\delta\, (X - B) \\
&\Leftrightarrow A_1 \cup A_2 \not\delta\, (X - B) \\
&\Leftrightarrow A_1 \cup A_2 \ll B
\end{aligned}
$$
(**k6**) $A \ll B$ ise $A \not\delta\, (X - B)$ dir. Öyleyse (p5)'den $A \not\delta\, (X - C)$ ve $C \not\delta\, (X - B)$ olacak şekilde bir $C \subseteq X$ vardır. Buradan, $A \ll C \ll B$ elde edilir.
(**k7**) Şimdi, (X, δ) ayrılmış olsun. $x \neq y$ ise $x \not\delta\, y$ ve böylece $x \ll X - \{y\}$'dir.

Tersi için, $x \ll X - \{y\}$ ise $x \not\delta\, y$ dir. Böylece (p4)'den $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ yani $x \neq y$ dir. ■

Teorem 2.4.7. $X \neq \emptyset$ bir küme, $A, B \subseteq X$ ve $\ll$, $\mathscr{P}(X)$ üzerinde tanımlı, (k1),(k2),(k3), (k4) (k5),(k6) koşullarını sağlayan bir ikili bağıntı olsun. Bu durumda,

$$A \not\delta B \;\Leftrightarrow\; A \ll (X - B)$$

biçiminde tanımlanan δ ikili bağıntısı X üzerinde bir yakınımsı bağıntıdır.

Kanıt:
(**p1**) $(A \cup B) \not\delta C$ ise $A \cup B \ll X - C$ dir. Bu durumda (k5)'den $A \ll X - C$ ve $B \ll X - C$, yani $A \not\delta C$ ve $B \not\delta C$ elde edilir.

Ters yönü için, $A \not\delta C$ ve $B \not\delta C$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A \ll X - C$ ve $B \ll X - C$ olduğundan (k5)'den $(A \cup B) \ll X - C$ ve böylece $(A \cup B) \not\delta C$ elde edilir. Öyleyse $(A \cup B) \not\delta C$ dir $\Leftrightarrow$ $A \not\delta C$ ve $B \not\delta C$ dir.
(**p2**) (p1) ile benzer şekilde gösterilebilir.
(**p3**) $A \delta B$ ise $A \not\ll X - B$ dir. Bu durumda;

$X \ll X$ olduğundan $A \neq X$ ve $X - B \neq X$, yani $B \neq \emptyset$ dir.

$\emptyset \ll \emptyset$ olduğundan $A \neq \emptyset$ ve $X - B \neq \emptyset$ dir.

(**p4**) $A \not\delta B$ ise $A \ll X - B$ dir. Bu durumda (k2)'den $A \subseteq X - B$ yani $A \cap B = \emptyset$'dir.
(**p5**) $A \not\delta B$ ise $A \ll X - B$ dir. Böylece $A \ll X - C \ll X - B$ olacak şekilde bir $C \subseteq X$ vardır. O halde, bu $C \subseteq X$ için $A \not\delta C$ ve $(X - C) \not\delta B$ sağlanır. ■

Sonuç 2.4.8. Bir δ yakınımsı bağıntısı Tanım 2.4.5'deki $\ll$ ikili bağıntısı ile de ifade edilebilir.

Teorem 2.4.9. $(X,\mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olmak üzere, $\mathscr{P}(X)$ üzerinde

$$A \delta B \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \text{ için } (A \times B) \cap U \neq \emptyset$$

biçiminde tanımlanan δ ikili bağıntısı bir yakınımsı bağıntıdır. Yani her quasi düzgünlük bir yakınımsı bağıntı üretir.

Kanıt: (**p1**)
$$\begin{aligned}(A \cup B) \not\delta C &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\,;\ [(A \cup B) \times C] \cap U = \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\,;\ [(A \times C) \cup (B \times C)] \cap U = \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}\,;\ (A \times C) \cap U = \emptyset \quad \text{ve} \quad (B \times C) \cap U = \emptyset \\ &\Rightarrow A \not\delta C \quad \text{ve} \quad B \not\delta C\end{aligned}$$

Ters yönü için, $A \not\delta C$ ve $B \not\delta C$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $(A \times C) \cap U = \emptyset$ ve $(B \times C) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{U}$ vardır. $\mathcal{U}$ bir quasi düzgünlük olduğundan

$U \cap V \in \mathcal{U}$'dir ve ayrıca $[(A \cup B) \times C] \cap (U \cap V) = [(A \times C) \cup (B \times C)] \cap (U \cap V) = \emptyset$ sağlanır. Buradan $(A \cup B) \not\delta C$ elde edilir.

(**p2**) (p1) ile benzer şekilde gösterilebilir.

(**p3**) $A\delta B$ ise, $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $A \times B \neq \emptyset$, dolayısıyla $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ dir.

(**p4**) $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $x \in A \cap B$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Böylece $(x, x) \in A \times B$ dir. Ayrıca $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $\Delta \subseteq U$ olduğundan $(x, x) \in U$'dur. Dolayısıyla, $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$ ve böylece $A\delta B$ dir.

(**p5**) $A \not\delta B$ ise, $(A \times B) \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Öyleyse (u3)'den $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ bulunabilir.

$$E = V^{-1}[B] = \{y \in X : \exists b \in B\ ;\ (y, b) \in V\}$$

olarak tanımlanırsa $(A \times E) \cap V = \emptyset$ ve $((X - E) \times B) \cap V = \emptyset$ dir. Buradan, $A \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta B$ elde edilir. ■

Teorem 2.4.10. $(X, \mathcal{U})$ bir quasi düzgün uzay olsun. Bu durumda $A \ll B$ olması için gerek ve yeter koşul $U[A] \subseteq B$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ olmasıdır.

Kanıt: $A \ll B \Leftrightarrow A \not\delta (X - B)$

$$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ (A \times (X - B)) \cap U = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ ;\ U[A] \subseteq B \qquad \blacksquare$$

Her quasi düzgünlüğün bir yakınımsı bağıntı ürettiğini gösterdik. Şimdi de her yakınımsı bağıntının bir quasi düzgünlük ürettiğini gösterelim.

Önerme 2.4.11. (X, δ) bir yakınımsı uzay ve $A, B \subseteq X$ için, $T(A, B) = X \times X - (A \times B)$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{C} = \{T(A, B) : A \not\delta B\}$$

ailesi X üzerinde bir quasi düzgünlüğün alt tabanıdır.

Kanıt: $\mathcal{C}$ ailesinin Önerme 2.3.10'daki (i) ve (ii) koşullarını sağladığını gösterelim:

(**i**) $T(A, B) \in \mathcal{C}$ ise, $A \not\delta B$ olduğundan (p4)'den $A \cap B = \emptyset$ ve bu nedenle $\forall x \in X$ için $(x, x) \notin A \times B$ dir. Buradan $(x, x) \in X \times X - (A \times B) = T(A, B)$ ve dolayısıyla $\Delta \subseteq T(A, B)$'dir.

(ii) $T(A,B) \in \mathcal{C}$ ise $A \not\delta B$ dir. Öyleyse (p5)'den $A \not\delta (X-C)$ ve $C \not\delta B$ olacak şekilde bir $C \subseteq X$ vardır.

Eğer $[T(A,X-C) \cap T(C,B)]^2 \subseteq T(A,B)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunun için, bir $(x,y) \in X \times X$ noktası için, $(x,y) \in [T(A,X-C) \cap T(C,B)]^2$ ve tersine $(x,y) \notin T(A,B)$ olsun. Buradan $(x,y) \in A \times B$ yani $x \in A$, $y \in B$ elde edilir.

Ayrıca $(x,z),(z,y) \in T(A,X-C) \cap T(C,B)$ olacak şekilde bir $z \in X$ olduğu söylenebilir. $(x,z) \in T(A,X-C) \cap T(C,B)$ olduğundan $(x,z) \in T(A,X-C)$ ve böylece $(x,z) \notin A \times (X-C)$ dir. $(z,y) \in T(A,X-C) \cap T(C,B)$ olduğundan $(z,y) \in T(C,B)$ ve böylece $(z,y) \notin C \times B$'dir.

Son elde edilen iki durum, $x \in A$ ve $y \in B$ olduğundan $z \notin X-C$ ve $z \notin C$ çelişkisini verir. O halde

$$[T(A,X-C) \cap T(C,B)]^2 \subseteq T(A,B)$$

olmalıdır. Böylece $\mathcal{C}$, X üzerinde bir quasi düzgünlüğün alt tabanıdır. ■

Teorem 2.4.12. (X,δ) bir yakınımsı uzay olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{T}^k(\delta) = \{A \subseteq X : \text{“}x\delta A \Rightarrow x \in A\text{”}\}$$

ailesi, X üzerinde bir topolojinin kapalı kümeler ailesidir.

Kanıt: $\mathcal{T}^k(\delta) = \{A \subseteq X : \text{“}x\delta A \Rightarrow x \in A\text{”}\}$ ailesinin kapalı kümeler aksiyomlarını sağladığını gösterelim:

(i) • Sonuç 2.4.3'den $\forall A \subseteq X$ için $A \not\delta \emptyset$ olduğundan “$x \notin \emptyset \Rightarrow x \not\delta \emptyset$” sağlanır. Öyleyse $\emptyset \in \mathcal{T}^k(\delta)$ dir.

• “$x\delta X \Rightarrow x \in X$” ifadesi doğru olduğundan $X \in \mathcal{T}^k(\delta)$ dir.

(ii) $\mathcal{A} = \{A_i : A_i \in \mathcal{T}^k(\delta), i \in I\}$ ve $x\delta \bigcap_{i\in I} A_i$ olsun. Bu durumda Önerme 2.4.4'den $\forall i \in I$ için $x\delta A_i$ ve $\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{T}^k(\delta)$ olduğundan $x \in A_i$ $(\forall i \in I)$ dir. Dolayısıyla $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, yani $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}^k(\delta)$ dir.

(iii) $A_1, A_2 \in \mathcal{T}^k(\delta)$ ve $x\delta(A_1 \cup A_2)$ olsun. Bu durumda (p2)'den $x\delta A_1$ veya $x\delta A_2$ dir. Böylece $x \in A_1$ veya $x \in A_2$, yani $x \in (A_1 \cup A_2)$ dir.

Öyleyse $\mathcal{T}^k(\delta)$, X üzerinde bir topolojinin kapalı kümeler ailesidir. ■

Tanım 2.4.13. (X,δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere, kapalı kümeler ailesi

$$\mathcal{T}^k(\delta) = \{A \subseteq X : \text{“}x\delta A \Rightarrow x \in A\text{”}\}$$

ailesi olan topolojiye, δ *yakınımsı bağıntısı ile üretilen topoloji* denir ve bu topoloji $\mathcal{T}(\delta)$ ile gösterilir.

NOT 2.4.14. Bir yakınımsı uzay ile çalışırken, δ bağıntısı yerine $\ll$ bağıntısını kullanabileceğimizi söylemiştik. Bu durumda bir yakınımsı uzayı $(X, \mathcal{P})$ biçiminde göstereceğiz ve "$A \ll B$" yerine "$(A, B) \in \mathcal{P}$" yazacağız.

Teorem 2.4.15. $(X, \mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay olmak üzere bu yakınımsı bağıntı ile üretilen topoloji,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \{T \subseteq X : x \in T \Rightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{P}\ ;\ x \in A,\ B \subseteq T\}$$

biçimindedir.

Kanıt: $A, B \subseteq X$ olmak üzere "$(A, B) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow A \not\delta\ (X - B)$" olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}(\delta)$ olduğunu gösterelim.

$T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ olsun ve $x \in X$ için $x \notin X - T$ verilsin. Bu durumda $x \in T$ ve $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ olduğundan $x \in A$ ve $B \subseteq T$ olacak şekilde bir $(A, B) \in \mathcal{P}$ vardır. $(A, B) \in \mathcal{P}$ olduğundan $A \not\delta\ (X - B)$ dir. Ayrıca $\{x\} \subseteq A$ ve $X - T \subseteq X - B$ olduğundan Önerme 2.4.4'den $x \not\delta\ X - T$ dir. Böylece $X - T \in \mathcal{T}^k(\delta)$, yani $T \in \mathcal{T}(\delta)$ elde edilir.

Ters kapsama için, $x \in T$ ve $T \in \mathcal{T}(\delta)$ olsun. $x \notin X - T$ ve $X - T \in \mathcal{T}^k(\delta)$ olduğundan $x \not\delta\ X - T$ dir. Bu durumda $x \in \{x\}$, $T \subseteq T$ ve $(\{x\}, T) \in \mathcal{P}$ olduğu için $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ dir. ■

Tanım 2.4.16. $(X, \mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $(A, B) \in \mathcal{P}$ oluyorsa, B kümesine A'nın bir δ_- *komşuluğu* denir.

Önerme 2.4.17. $(X, \mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay ve $L \subseteq X$ olmak üzere,

$$G(L) = \{x \in X : \exists (A, B) \in \mathcal{P}\ ;\ x \in A,\ B \subseteq L\}$$

kümesi $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ topolojisine göre açıktır.

Kanıt: $x \in G(L)$ olsun. Bu durumda, $x \in A$, $B \subseteq L$ olacak şekilde bir $(A, B) \in \mathcal{P}$ vardır. O halde (k6)'dan $(A, C), (C, B) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde bir $C \subseteq X$ bulunabilir. Şimdi eğer $C \subseteq G(L)$ olduğunu gösterebilirsek, $x \in A$ ve $C \subseteq G(L)$ olacak şekilde bir $(A, C) \in \mathcal{P}$ olduğundan $G(L) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ elde ederiz.

Gerçekten, $y \in C$ ise, $(C, B) \in \mathcal{P}$ için $y \in C$ ve $B \subseteq L$ olduğundan $y \in G(L)$ ve böylece $C \subseteq G(L)$'dir. ■

NOT 2.4.18. $(X,\mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay olmak üzere, bu uzayın T_0 olması ürettiği $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ topolojik uzayının T_0 olması anlamındadır.

Önerme 2.4.19. $(X,\mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay olsun. Bu durumda, $(X,\mathcal{P})$ uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul her $x,y \in X$, $x \neq y$ için $x \in A$, $y \notin B$ ya da $y \in A$, $x \notin B$ olacak şekilde bir $(A,B) \in \mathcal{P}$ olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $(X,\mathcal{P})$ uzayı T_0, $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in T$, $y \notin T$ ya da $y \in T$, $x \notin T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ vardır.

- $x \in T$, $y \notin T$ ise, $x \in A$, $B \subseteq T$ olacak şekilde bir $(A,B) \in \mathcal{P}$ vardır ve $y \notin B$'dir.
- $y \in T$, $x \notin T$ ise, $y \in A$, $B \subseteq T$ olacak şekilde bir $(A,B) \in \mathcal{P}$ vardır ve $x \notin B$'dir.

$(\Leftarrow)$ $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in A$, $y \notin B$ ya da $y \in A$, $x \notin B$ olacak şekilde bir $(A,B) \in \mathcal{P}$ vardır. Buradan, $x \in G(B)$, $y \notin G(B)$ ya da $y \in G(B)$, $x \notin G(B)$ sağlandığından ve $G(B) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ olduğundan $(X,\mathcal{P})$ uzayı T_0'dır. ■

Tanım 2.4.20. $(X,\mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay olmak üzere,
$\mathcal{P}^* = \{(A,B) : (X-B, X-A) \in \mathcal{P}\}$ $\mathcal{P}$'nin *duali* ve $\mathcal{P}^s = \mathcal{P} \vee \mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}$'nin *simetrikleşmesi* olarak adlandırılır.

Açıkça, $\mathcal{P}^*$ bir yakınımsı bağıntı ve $\mathcal{P}^s$ bir yakınlık bağıntısıdır.

2.5 İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu kesimde ikili topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilecektir. Ayrıca bu uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlanacak ve ikişer tamamen regüler ikili topolojik uzaylar ile süreklilik uzayları arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler [6] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 2.5.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}^*$ bu küme üzerinde tanımlı iki keyfi topoloji olmak üzere $\mathcal{X} = (X,\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$ uzayına ikili topolojik uzay denir.

Örnek 2.5.2. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $\mathcal{T}_{\text{sağ}} = \{\mathbb{R},\emptyset\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sol}} = \{\mathbb{R},\emptyset\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$ topolojileri sırasıyla sağ topoloji ve sol topoloji olarak adlandırılır [1]. $\mathcal{U} = \{(a,1] : a \geq 0, a \in \mathbb{R}\} \cup \{I,\emptyset\}$ ve
$\mathcal{L} = \{[0,a) : a \leq 1, a \in \mathbb{R}\} \cup \{I,\emptyset\}$,sırasıyla, $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojilerinin $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi üzerinde ürettikleri alt uzay topolojileri olsun. Bu durumda, $\mathbb{I} = (I,\mathcal{U},\mathcal{L})$ bir ikili topolojik uzaydır.

NOT 2.5.3. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, X üzerinde bir topoloji ailesi olmak üzere, bu ailenin supremumu, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ ailesi ile üretilen topolojidir ve $\bigvee_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.5.4. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda,

(a) $\mathcal{X}^* = (X, \mathcal{T}^*, \mathcal{T})$ uzayına $\mathcal{X}$ uzayının *duali* denir.

(b) $\mathcal{T}^s = \mathcal{T} \vee \mathcal{T}^*$ olmak üzere $\mathcal{X}^s = (X, \mathcal{T}^s)$ uzayına $\mathcal{X}$ uzayının *simetrikleşmesi* denir.

(c) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayı için $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ ise, bu uzaya *simetrik ikili topolojik uzay* denir.

Örnek 2.5.5. $\mathbb{I} = (I, \mathcal{U}, \mathcal{L})$ uzayının duali $\mathbb{I}^* = (I, \mathcal{L}, \mathcal{U})$ ikili topolojik uzayı; simetrikleşmesi ise, $\mathcal{T}_s$ standart topoloji olmak üzere, $(I, \mathcal{T}_s)$ uzayıdır.

NOT 2.5.6. Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı, bir $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ simetrik ikili topolojik uzayına karşılık gelir. O halde simetrik ikili topolojik uzaylar teorisi, topolojik uzaylar teorisi ile çakışır.

Tanım 2.5.7. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun.
$\mathcal{T}_Y = \{T \cap Y : T \in \mathcal{T}\}$ ve $\mathcal{T}^*_Y = \{T^* \cap Y : T^* \in \mathcal{T}^*\}$ olmak üzere, $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{T}^*_Y)$ ikili topolojik uzayına $\mathcal{X}$ uzayının bir *alt uzayı* denir.

Tanım 2.5.8. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ve $\mathcal{X}' = (X', \mathcal{T}', \mathcal{T}'^*)$ ikili topolojik uzaylar ve
$f : X \longrightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathcal{T} - \mathcal{T}'$ ve $\mathcal{T}^* - \mathcal{T}'^*$ sürekli ise, f'ye X'den X''ye *ikişer süreklidir* denir ve $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ biçiminde gösterilir.

Önerme 2.5.9. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$, $\mathcal{X}' = (X', \mathcal{T}', \mathcal{T}'^*)$ ikili topolojik uzaylar ve
$f : X \longrightarrow X'$ fonksiyonu ikişer sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonu $\mathcal{T}^s - \mathcal{T}'^s$ süreklidir.

Kanıt: $T'^s \in \mathcal{T}'^s$ ve $x \in f^{-1}(T'^s)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in T'^s$ dir ve
$\mathcal{T}'^s = \mathcal{T}' \vee \mathcal{T}'^*$ olduğundan $f(x) \in T' \cap T'^* \subseteq T'^s$ olacak şekilde $T' \in \mathcal{T}'$, $T'^* \in \mathcal{T}'^*$ vardır. Buradan, $x \in f^{-1}(T' \cap T'^*) = f^{-1}(T') \cap f^{-1}(T'^*) \subseteq f^{-1}(T'^s)$ dir. Ayrıca f ikişer sürekli olduğundan $f^{-1}(T') \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(T'^*) \in \mathcal{T}^*$ dir. O halde, $f^{-1}(T') \cap f^{-1}(T'^*) \in \mathcal{T}^s$ olduğundan $f^{-1}(T'^s) \in \mathcal{T}^s$ ve böylece f fonksiyonu $\mathcal{T}^s - \mathcal{T}'^s$ süreklidir. ■

Örnek 2.5.10. Önerme 2.5.9'daki ifadenin tersi genelde doğru değildir.

$I = [0,1]$ olmak üzere $f : (I,\mathcal{U},\mathcal{L}) \longrightarrow (I,\mathcal{L},\mathcal{U})$, $f(x) = x$ birim fonksiyonu $\mathcal{T}_s - \mathcal{T}_s$ süreklidir fakat ikişer sürekli değildir.

NOT 2.5.11. Birden çok topolojiyle çalışmak kavram karmaşası yaratabilir. Bu durumu çözmek için, elimizde birden çok topoloji var ve hangisinden söz edildiği ifade edilmiyorsa, bu topoloji $\mathcal{T}$ olarak anlaşılmalıdır. Örneğin, $(X,\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere $kap(A)$, A'nın $\mathcal{T}$ topolojisine göre kapanışını $kap^*(A)$ ise A'nın $\mathcal{T}^*$ topolojisine göre kapanışını gösterecektir. A kümesi $\mathcal{T}^*$ topolojisine göre kapalı ise, bu kümeden *-kapalı olarak bahsedilecektir.

Tanım 2.5.12. (İkili topolojik uzaylar için ayırma aksiyomları) $\mathcal{X} = (X,\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olsun.

(a) Eğer $\mathcal{X}^s = (X,\mathcal{T}^s)$ simetrikleşme uzayı T_0 oluyorsa, $\mathcal{X}$ uzayına T_0 denir.

(b) Eğer her $x, y \in X$, $x \notin kap(y)$ için $x \in T$, $y \in T^*$ ve $T \cap T^* = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri varsa, $\mathcal{X}$ uzayına *pseudo-Hausdorff (pH)* denir.

(c) $\mathcal{X}$ uzayı T_0 ve pH ise, bu uzaya *Hausdorff* (T_2) denir.

(d) Eğer her $T \in \mathcal{T}$ ve $x \in T$ için $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonu, $f(x) = 1$ ve her $y \notin T$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\mathcal{X}$ uzayına *tamamen regüler* denir.

(e) $\mathcal{X}$ uzayı T_0 ve tamamen regüler ise, bu uzaya $T_{3\frac{1}{2}}$ *(Tychonoff)* denir.

(f) Eğer her $T \in \mathcal{T}$ ve $x \in T$ için $x \in U \subseteq D^* \subseteq T$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri varsa, $\mathcal{X}$ uzayına *regüler* denir.

(g) $\mathcal{X}$ uzayı T_0 ve regüler ise, bu uzaya T_3 denir.

(h) $C^* \subseteq T$ olacak şekilde C^* *-kapalı ve $T \in \mathcal{T}$ kümeleri için, $C^* \subseteq U \subseteq D^* \subseteq T$ sağlanacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri varsa, $\mathcal{X}$ uzayına *normal* denir.

Tanım 2.5.13. $\mathcal{X} = (X,\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve Q ikili topolojik uzayların bir özelliği olsun. Eğer $\mathcal{X}^* = (X,\mathcal{T}^*,\mathcal{T})$ uzayı Q özelliğine sahipse, $\mathcal{X}$ *dual Q'dur* denir. Eğer hem $\mathcal{X}$ hem de $\mathcal{X}^*$ Q özelliğine sahipse $\mathcal{X}$ uzayı *ikişer Q'dur* denir.

NOT 2.5.14. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve Q ikili topolojik uzayların bir özelliği olmak üzere, $\mathcal{X}^*$ uzayının Q özelliğine sahip olması, "$\mathcal{X}$ uzayının Q* özelliğine sahip olması" biçiminde de ifade edilebilir.

Önerme 2.5.15. [5] $\mathscr{X}$ bir süreklilik uzayı olmak üzere, $(X, \mathcal{T}_0(\mathscr{X}), \mathcal{T}_0(\mathscr{X}^*))$ ikili topolojik uzayı ikişer tamamen regülerdir. Tersine, tüm ikişer tamamen regüler ikili topolojik uzaylar süreklilik uzaylarından elde edilir.

Kanıt: $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikişer tamamen regüler ikili topolojik uzay olsun ve $F = \{f \mid f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}\}$ biçiminde tanımlansın.

$A = [0, \infty]^F = \{a \mid a : F \longrightarrow [0, \infty]\}$ bir değer yarı grup ve $P = \{r \in A : \forall f \in F \;\text{ için}\, r(f) \in (0, \infty] \text{ ve sonlu f dışında}\, r(f) = \infty\}$ kümesi A'nın pozitifler kümesidir. Ayrıca, $d_f : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$, $d_f(x, y) = (f(y) - f(x)) \vee 0$ bir süreklilik fonksiyonudur. Böylece, $d(x, y) = (d_f(x, y))_{f \in F}$ fonksiyonu da bir süreklilik fonksiyonudur ve $\mathscr{X} = (X, d, A, P)$ uzayı bir süreklilik uzayıdır.

Şimdi, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ olduğunu gösterelim:

$x \in G \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$ ise, $N_r(x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r \in P$ vardır.

$$r(f) = \begin{cases} r(i) & f \in \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \text{ ise} \\ \infty_i & f \notin \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Şimdi eğer $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((f_i(x) - r(i), f_i(x) + r(i))) \subseteq G$ olduğu gösterilirse her bir $f_i, \mathcal{T} - \mathcal{U}$ sürekli olduğundan,

$(f_i(x) - r(i), f_i(x) + r(i)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f_i(x) - r(i), f_i(x) + r(i) - \frac{1}{n}] \in \mathcal{U}$ ve böylece $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((f_i(x) - r(i), f_i(x) + r(i))) \in \mathcal{T}$ olduğundan $G \in \mathcal{T}$ elde edilir.

Bunun için, $y \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((f_i(x) - r(i), f_i(x) + r(i)))$ alınsın ve tersine $y \notin G$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\forall i \in I$ için $f_i(x) - r(i) < f_i(y) \leq f_i(x) + r(i)$ sağlanır. Ayrıca, $y \notin G$ olduğundan $y \notin N_r(x)$ olacaktır. Buradan, $d(x, y) > r$ ve böylece $\forall i \in I$ için

$d_{f_i}(x, y) = (f_i(y) - f_i(x)) \vee 0 > r(i)$'dir.

- $f_i(y) - f_i(x) \leq 0$ ise $d_{f_i}(x, y) = (f_i(y) - f_i(x)) \vee 0 = 0 > r(i)$ olur ki bu $r(i) \in (0, \infty]$ olması ile çelişir.
- $f_i(y) - f_i(x) > 0$ ise $f_i(y) - f_i(x) < r(i)$ olması ile çelişir.

Öyleyse $y \in G$ ve böylece $G \in \mathcal{T}$'dir.

Ters kapsamayı göstermek için, $x \in G \in \mathcal{T}$ alınsın. $\mathcal{X}$ uzayı ikişer tamamen regüler olduğundan $f(x) = 1$ ve her $y \notin G$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bir $f \in F$ vardır. Şimdi,

$$r(g) = \begin{cases} 0.5 & g = f \text{ ise} \\ \infty_i & g \neq f \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $r \in P$ için $N_r(x) \subseteq G$ sağlandığını gösterelim:

$y \in N_r(x)$ ve $y \notin G$ ise, $d(x, y) \leq r$ olduğundan $d_f(x, y) \leq r(f) = 0.5$ elde edilir. Fakat, $d_f(x, y) = (f(y) - f(x)) \vee 0 = (1 - 0) \vee 0 = 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $y \in G$ ve böylece $G \in \mathcal{T}_0(\mathscr{X})$'dir.

Her süreklilik uzaydan elde edilen $(X, \mathcal{T}_0(\mathscr{X}), \mathcal{T}_0(\mathscr{X}), \mathcal{T}_0(\mathscr{X}^*))$ ikili topolojik uzayının ikişer tamamen regüler olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. ■

3 TOPOLOJİDE ASİMETRİ VE DUALİTE

3.1 TOPOLOJİDE ASİMETRİ KAVRAMI

Bu kesimde, topolojik uzaylar için "asimetri" kavramından bahsedilecek ve sonraki bölümlerde de sık sık kullanılacak bir önsıralama bağıntısı tanımlanacaktır. Bu kesimde verilen bilgiler [6] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 3.1.1. **(a)** $X \neq \emptyset$ bir küme ve $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için "$x \in kap(y) \Rightarrow y \in kap(x)$" özelliği sağlanıyorsa bu uzaya *zayıf simetrik (zs)* denir.

(b) Zayıf simetrik olmayan bir uzaya *asimetrik uzay* denir.

Örnek 3.1.2. $(I, \mathcal{U})$ uzayı asimetriktir.

NOT 3.1.3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere zayıf simetri özelliği "$x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow kap(x) \subseteq G$" biçiminde de ifade edilebilir. Bu özellik R_0 özelliği olarak da bilinir.

Kanıt: Zayıf simetri özelliğinin "$x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow kap(x) \subseteq G$" ifadesine denk olduğunu gösterelim:

$(X, \mathcal{T})$ zayıf simetrik ve $x \in G \in \mathcal{T}$ iken $y \in kap(x)$ olsun. Bu durumda zayıf simetriden $x \in kap(y)$ ve böylece $y \in G$'dir.

Ters yönü için, "$x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow kap(x) \subseteq G$" sağlansın ve iddianın aksine $(X, \mathcal{T})$ zayıf simetrik olmasın. Bu durumda, $x \in kap(y)$ ancak $y \notin kap(x)$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Buradan, $y \in G$ ve $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ bulunabilir ve varsayımdan $kap(y) \subseteq G$'dir. O halde, $x \notin G$ ve $kap(y) \subseteq G$ olduğundan $x \notin kap(y)$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Öyleyse $(X, \mathcal{T})$ zayıf simetriktir. $\blacksquare$

Önerme 3.1.4. Her T_1 uzayı ve her regüler uzay zayıf simetriktir.

Kanıt: $(X, \mathcal{T})$ bir T_1 uzayı, $x, y \in X$ ve $x \in kap(y)$ olsun. T_1 uzaylarında tek nokta kümeleri kapalı olduğundan, $x \in kap(y) = \{y\}$ ise $y \in kap(x) = \{x\}$ dir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı zayıf simetriktir.

Şimdi, $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay, $x, y \in X$, $x \in kap(y)$ ancak $y \notin kap(x)$ olsun. X uzayı regüler olduğundan $y \in G$, $kap(x) \subseteq H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G, H \in \mathcal{T}$

vardır. Ayrıca, $x \in kap(y)$ ve $H \in \mathcal{T}$ olduğundan $y \in H$ olmalıdır ki, bu $G \cap H = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $y \in kap(x)$ olmalıdır ve böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayı zayıf simetriktir. ■

Sonuç 3.1.5. T_1 uzayları ve regüler uzaylar asimetrik değildir.

Tanım 3.1.6. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda, "$x \leq_{\mathcal{T}} y \;\Leftrightarrow\; x \in kap(y)$" biçiminde tanımlanan $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısına *Alexandroff özellendirme sıralaması* ya da kısaca *özellendirme sıralaması* denir.

NOT 3.1.7. Bundan sonra bir topolojik uzay üzerinde bir sıralamadan bahsedildiğinde, bu sıralama özellendirme sıralamasına göre olacaktır.

Önerme 3.1.8. Özellendirme sıralaması bir önsıralamadır.

Kanıt: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\leq_{\mathcal{T}}$ özellendirme sıralaması olsun. Şimdi, bu bağıntının yansıma ve geçişme özelliklerini sağladığını gösterelim:

• $\forall x \in X$ için $x \in kap(x)$ olduğundan $x \leq_{\mathcal{T}} x$ dir, yani $\leq_{\mathcal{T}}$ yansıma özelliğini sağlar.

• $x, y, z \in X$ olsun. $x \leq_{\mathcal{T}} y \wedge y \leq_{\mathcal{T}} z \Rightarrow x \in kap(y) \wedge y \in kap(z)$
$\Rightarrow x \in kap(y) \subseteq kap(kap(z)) = kap(z) \Rightarrow x \leq_{\mathcal{T}} z$'dir. Böylece $\leq_{\mathcal{T}}$ geçişme özelliğini sağlar. ■

Önerme 3.1.9. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

(a) $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısının bir kısmi sıralama olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_0 olmasıdır.

(b) $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısının bir aşikar (ayrık) sıralama olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_1 olmasıdır.

Kanıt:
(a) $(\Rightarrow)$ $\leq_{\mathcal{T}}$ bir kısmi sıralama ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $\leq_{\mathcal{T}}$ bir kısmi sıralama olduğundan, $x \nleq_{\mathcal{T}} y$ veya $y \nleq_{\mathcal{T}} x$'dir. Buradan, $x \notin kap(y)$ veya $y \notin kap(x)$'dir ve böylece $x \in G$, $y \notin G$ veya $y \in G$, $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0'dır.

$x, y \in X$, $x \neq y$ vardır ki her $G \in \mathcal{T}$ için $x \in G$ ise $y \in G$ ve $y \in G$ ise $x \in G$'dir. Buradan $x \in kap(y)$ ve $y \in kap(x)$ yani $x \leq_{\mathcal{T}} y$ ve $y \leq_{\mathcal{T}} x$ elde edilir. Bu durumda $\leq_{\mathcal{T}}$

bağıntısı ters simetrik olduğundan $x = y$ olmalıdır ki, bu bir çelişkidir. O halde $(X, \mathcal{T})$ T_0'dır.

($\Leftarrow$) $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 olsun. $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısının yansımalı ve geçişmeli olduğu bilindiğinden, ters simetrik olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in X$ için $x \leq_{\mathcal{T}} y$, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ ancak $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 olduğundan $x \in G$, $y \notin G$ ya da $y \in G$, $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır.

$x \in G$, $y \notin G \Rightarrow x \notin kap(y) \Rightarrow x \nleq_{\mathcal{T}} y$ çelişkidir.

$y \in G$, $x \notin G \Rightarrow y \notin kap(x) \Rightarrow y \nleq_{\mathcal{T}} x$ çelişkidir.

O halde $x = y$'dir ve böylece $\leq_{\mathcal{T}}$ ters simetriktir.

(**b**) ($\Rightarrow$) $\leq_{\mathcal{T}}$ bir aşikar sıralama olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_1 olduğunu göstermek için her tek nokta kümesinin kapalı olduğunu, yani $\forall x \in X$ için $kap(x) = \{x\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{x\} \subseteq kap(x)$ olduğu açıktır. Ters kapsama için, $y \in kap(x)$ ise $y \leq_{\mathcal{T}} x$ dir. Bu durumda, $\leq_{\mathcal{T}}$ bir aşikar sıralama olduğundan $y = x$ olmadır. Öyleyse $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_1'dir.

($\Leftarrow$) X uzayı T_1 ve $x \leq_{\mathcal{T}} y$ olsun. Buradan, $x \in kap(y) = \{y\}$ yani $x = y$'dir. Böylece $\leq_{\mathcal{T}}$ bir aşikar sıralamadır. ■

Önerme 3.1.10. $(X, \mathcal{T})$ ve $(X^*, \mathcal{T}^*)$ topolojik uzaylar ve $f : X \longrightarrow X^*$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ise özellendirme sıralamasını korur.

Kanıt: $x, y \in X$ ve $x \leq_{\mathcal{T}} y$ ise, $x \in kap(y)$ ve buradan $f(x) \in f(kap(y))$'dir. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f(kap(y)) \subseteq kap^*(f(y))$ ve böylece $f(x) \leq_{\mathcal{T}^*} f(y)$'dir. O halde f özellendirme sıralamasını korur. ■

Önerme 3.1.11. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının zs ve T_0 olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın T_1 olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $(X, \mathcal{T})$ uzayı zs ve T_0 olsun. Bu uzayın T_1 olduğunu göstermek için $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısının bir aşikar sıralama olduğunu gösterelim:

$x \leq_{\mathcal{T}} y$ ise $x \in kap(y)$'dir. Buradan, $(X, \mathcal{T})$ zs olduğundan $y \in kap(x)$ yani $y \leq_{\mathcal{T}} x$ elde edilir. $x \leq_{\mathcal{T}} y$, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ ve $\leq_{\mathcal{T}}$ bir kısmi sıralama olduğundan $x = y$ olmalıdır. Öyleyse, $\leq_{\mathcal{T}}$ bir aşikar sıralamadır.

($\Leftarrow$) $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_1 olsun. Öncelikle her T_1 uzayı T_0'dır. Ayrıca Önerme 3.1.4'den $(X, \mathcal{T})$ uzayı zs'dir. ■

Sonuç 3.1.12. Asimetrik topolojik uzaylar T_1 değildir.

3.2 İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR VE ASİMETRİ

Bu kesimde, [6] nolu kaynaktan yararlanılarak, ikili topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları ile ilgili bazı özellikler verilecek ve bu ayırma aksiyomları arasındaki ilişkileri incelemek için gerekli olan "Urysohn aile" kavramından bahsedilecektir.

Tanım 3.2.1. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olsun.

(a) Eğer her $x, y \in X$ için "$x \notin kap(y) \Rightarrow y \notin kap^*(x)$" özelliği sağlanıyorsa, $\mathcal{X}$ uzayına *zayıf simetrik (zs)* denir.

(b) $\mathcal{X}$ uzayı T_0 ve zs ise, bu uzaya T_1 denir.

(c) $\mathcal{X}$ uzayı T_1 ve normal ise, bu uzaya T_4 denir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve Q ikili topolojik uzayların bir özelliği olsun. Eğer "$\mathcal{X}$ uzayı Q'dur $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ uzayı dual Q'dur" sağlanıyorsa Q özelliği *kendi kendine dualdir* denir.

Önerme 3.2.3. T_0 ve normal olma özellikleri kendi kendine dualdir.

Kanıt: $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay olsun.

$\mathcal{X}$ uzayı T_0'dır. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}^s$ T_0'dır. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}^*$ T_0'dır. O halde T_0 kendi kendine dualdir.

$\mathcal{X}$ uzayı normal, $T^* \in \mathcal{T}^*$, $C \subseteq X$ kapalı ve $C \subseteq T^*$ olsun. $X - T^*$ *-kapalı, $X - C \in \mathcal{T}$, $X - T^* \subseteq X - C$ ve $\mathcal{X}$ uzayı normal olduğundan, $X - T^* \subseteq U \subseteq D^* \subseteq X - C$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri vardır. Buradan $C \subseteq X - D^* \subseteq X - U \subseteq T^*$, $X - D^* \in \mathcal{T}^*$ ve $X - U$ kapalı olduğundan $\mathcal{X}^*$ uzayı normaldir.

$\mathcal{X}^*$ uzayı normal ise, $\mathcal{X}$ uzayının da normal olacağı benzer şekilde gösterilebilir.

O halde normallik kendi kendine dualdir. ■

Örnek 3.2.4. Bir $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayı için zs, pH, regüler ve tamamen regüler olma özellikleri kendi kendine dual değildir. Örneğin, X sonsuz elemanlı bir küme, $\mathcal{T}$, X üzerindeki ayrık olmayan topoloji ve $\mathcal{T}^*$ ayrık topoloji olmak üzere, $\mathcal{X}$ uzayı zs, pH, regüler ve tamamen regüler olmasına reğmen, $\mathcal{X}^*$ uzayı zs, pH, regüler ve tamamen regüler değildir.

Örnek 3.2.5. $\mathbb{I}$ ve $\mathbb{I}^*$ ikili topolojik uzayları bütün ayırma aksiyomlarını sağlarlar.

Önerme 3.2.6. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve Q özelliği bu uzay için zs, pH, regüler ve tamamen regüler özelliklerinden biri olsun. Eğer $\mathcal{X}$ uzayı Q ve $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$ ise, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayı da Q'dur.

Kanıt: Q=zs olsun. $x \notin kap(y)$ ise, $\mathcal{X}$ zs olduğundan $y \notin kap^*(x)$'dir. Bu durumda $T^* \cap \{x\} = \emptyset$ olacak şekilde bir $y \in T^* \in \mathcal{T}^*$ vardır. Ayrıca $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$ olduğundan $T^* \in \mathcal{T}^+$ dir. O halde $y \notin kap^+(x)$ ve böylece $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayı zs'dir.

Q=tamamen regüler olsun. $x \in T \in \mathcal{T}$ ise, $\mathcal{X}$ tamamen regüler olduğundan $f(x) = 1$ ve her $y \notin T$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bir $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonu vardır.
$g : (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+) \longrightarrow (I, \mathcal{U}, \mathcal{L})$ fonksiyonu $g(x) = f(x)$ $(\forall x \in X)$ olarak tanımlansın. f, $\mathcal{T} - \mathcal{U}$ sürekli olduğundan g de $\mathcal{T} - \mathcal{U}$ süreklidir. Ayrıca f, $\mathcal{T}^* - \mathcal{L}$ sürekli ve $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$ olduğundan g fonksiyonu da $\mathcal{T}^+ - \mathcal{L}$ süreklidir. Öyleyse $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayı tamamen regülerdir.

Q=pH ve Q=regüler olması durumları da benzer şekilde gösterilebilir. ■

Sonuç 3.2.7. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve Q özelliği bu uzay için zs, pH, regüler ve tamamen regüler özelliklerinden biri olsun. Eğer $\mathcal{X}$ uzayı Q ise, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^s)$ uzayı da Q'dur.

Kanıt: $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan Önerme 3.2.6'dan açıktır. ■

Önerme 3.2.8. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay olsun.

(a) Aşağıdakiler denktir:

- **(i)** $\leq_{\mathcal{T}^*} \subseteq \geq_{\mathcal{T}}$,
- **(ii)** $x \notin kap(y) \Rightarrow kap^*(x) \subseteq X - kap(y)$,
- **(iii)** $x \in T \in \mathcal{T} \Rightarrow kap^*(x) \subseteq T$,
- **(iv)** $\mathcal{X}$ uzayı zs'dir.

(b) $\mathcal{X}$ pH ve $\mathcal{X}^*$ zs ise, $\mathcal{X}^*$ pH'dir ve böylece $\mathcal{X}$ ikişer pH'dir.

(c) $\mathcal{X}^*$ zs olsun. Bu durumda, $\mathcal{T}$ T_0'dır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ T_0'dır.

(d) Aşağıdakiler denktir:

(i) $\mathcal{X}$ uzayı T_0'dır.

(ii) $x \neq y$ ise, x ve y'den sadece birini içeren bir $T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ vardır.

(iii) $x \leq_{\mathcal{T}} y$, $y \leq_{\mathcal{T}} x$, $x \leq_{\mathcal{T}^*} y$ ve $y \leq_{\mathcal{T}^*} x$ ise, $x = y$'dir.

(e) $\mathcal{X}$ uzayının pH olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her $\mathcal{V}$ süzgeci için x, $\mathcal{V}$'nin bir limiti ve y, $\mathcal{V}$'nin bir *-limiti ($\mathcal{T}^*$ topolojisine göre limiti) ise, $x \leq_{\mathcal{T}} y$ olmasıdır.

Kanıt:

(**a**) (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) $\leq_{\mathcal{T}^*} \subseteq\ \geq_{\mathcal{T}}$, $x \notin kap(y)$ ve iddianın tersine $kap^*(x) \nsubseteq X - kap(y)$ olsun. Bu durumda $z \in kap^*(x)$ ve $z \notin X - kap(y)$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır ve $z \in kap^*(x)$ olduğundan $z \leq_{\mathcal{T}^*} x$'dir. Ayrıca, $\leq_{\mathcal{T}^*} \subseteq\ \geq_{\mathcal{T}}$ olduğundan $z \geq_{\mathcal{T}} x$ sağlanır. Diğer taraftan $z \notin X - kap(y)$ olduğundan $z \in kap(y)$ ve böylece $z \leq_{\mathcal{T}} y$'dir. O halde, $x \leq_{\mathcal{T}} z$, $z \leq_{\mathcal{T}} y$ ve $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısı geçişmeli olduğundan $x \leq_{\mathcal{T}} y$'dir ki, bu $x \notin kap(y)$ olması ile çelişir.

Öyleyse $kap^*(x) \subseteq X - kap(y)$ olmalıdır.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) (ii) koşulu sağlansın ve iddianın tersine $kap^*(x) \nsubseteq T$ olsun. Bu durumda, $y \in kap^*(x)$ ve $y \notin T$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $x \in T$, $y \notin T$ ve $T \in \mathcal{T}$ olduğundan $x \notin kap(y)$'dir. Böylece varsayımdan $kap^*(x) \subseteq X - kap(y)$ elde edilir ki bu, $y \in kap^*(x)$ olması ile çelişir.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**iv**) $x \notin kap(y)$ olsun. $x \in X - kap(y) \in \mathcal{T}$ olduğundan $kap^*(x) \subseteq X - kap(y)$ ve buradan $y \notin kap^*(x)$'dir. Öyleyse $\mathcal{X}$ uzayı zs'dir.

(**iv**) $\Rightarrow$ (**i**) $\mathcal{X}$ zs ve $x \leq_{\mathcal{T}^*} y$ olsun. Bu durumda, $x \in kap^*(y)$ ve $\mathcal{X}$ zs olduğundan $y \in kap(x)$'dir. Buradan $y \leq_{\mathcal{T}} x$, yani $x \geq_{\mathcal{T}} y$ elde edilir. O halde $\leq_{\mathcal{T}^*} \subseteq\ \geq_{\mathcal{T}}$'dir.

(**b**) $\mathcal{X}$ pH, $\mathcal{X}^*$ zs ve $x \notin kap^*(y)$ olsun. $\mathcal{X}^*$ zs olduğundan $y \notin kap(x)$'dir. Öyleyse $\mathcal{X}$ pH olduğundan $y \in T$, $x \in T^*$ ve $T \cap T^* = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ vardır ve böylece $\mathcal{X}^*$ uzayı pH'dir.

(**c**) $\mathcal{X}$ uzayı zs olsun.

($\Rightarrow$) $\mathcal{T}$, T_0 ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in G$, $y \notin G$ (ya da $y \in G$, $x \notin G$) olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan $G \in \mathcal{T}^s$ ve böylece $\mathcal{X}$ uzayı T_0'dır.

($\Leftarrow$) $\mathcal{X}$, T_0 ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in G^s$, $y \notin G^s$ (ya da $y \in G^s$, $x \notin G^s$) olacak şekilde bir $G^s \in \mathcal{T}^s$ vardır. $x \in G^s \in \mathcal{T}^s$ ve $\mathcal{T}^s$'nin tanımından,

$x \in G \cap G^* \subseteq G^s$ olacak şekilde $G \in \mathcal{T}$ ve $G^* \in \mathcal{T}^*$ vardır ve $y \notin G \cap G^*$'dir. Buradan iki durum elde edilir:

- Eğer $y \notin G$ ise, ispat tamamlanır.
- Eğer $y \notin G^*$ ise, $x \notin kap^*(y)$ ve $\mathcal{X}^*$ zs olduğundan $y \notin kap(x)$'dir. Buradan, $y \in H$, $x \notin H$ olacak şekilde bir $H \in \mathcal{T}$ bulunabilir.

Öyleyse $\mathcal{T}$, T_0'dır.

(d) **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** $\mathcal{X}$ uzayı T_0, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $x \in T^s$, $y \notin T^s$ ya da $y \in T^s$, $x \notin T^s$ olacak şekilde bir $T^s \in \mathcal{T}^s$ vardır.

- $x \in T^s$, $y \notin T^s$ ise, $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ ailesi $\mathcal{T}^s$ için bir alt taban olduğundan $x \in T \cap T^* \subseteq T^s$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ vardır. Buradan, $x \in T$, $y \notin T$ ve $T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ veya $x \in T^*$, $y \notin T^*$ ve $T^* \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ elde edilir.
- $y \in T^s$, $x \notin T^s$ olması durumu da benzer şekilde yapılabilir.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** $x \leq_{\mathcal{T}} y$, $y \leq_{\mathcal{T}} x$, $x \leq_{\mathcal{T}^*} y$, $y \leq_{\mathcal{T}^*} x$ ve tersine $x \neq y$ olsun. Bu durumda (ii)'den $x \in T$, $y \notin T$ ya da $y \in T$, $x \notin T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ vardır.

- $x \in T$, $y \notin T$ ve $T \in \mathcal{T}^*$ ise, $x \notin kap^*(y)$'dir ki bu, $x \leq_{\mathcal{T}^*} y$ ile çelişir.
- $y \in T$, $x \notin T$ ve $T \in \mathcal{T}^*$ ise, $y \notin kap^*(x)$'dir ki bu, $y \leq_{\mathcal{T}^*} x$ ile çelişir.
- $x \in T$, $y \notin T$ ve $T \in \mathcal{T}$ ise, $x \notin kap(y)$'dir ki bu, $x \leq_{\mathcal{T}} y$ ile çelişir.
- $y \in T$, $x \notin T$ ve $T \in \mathcal{T}$ ise, $y \notin kap(y)$'dir ki bu, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ ile çelişir.

O halde $x = y$ olmalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda (iii)'den $x \nleq_{\mathcal{T}} y$ ya da $y \nleq_{\mathcal{T}} x$ ya da $x \nleq_{\mathcal{T}^*} y$ ya da $y \nleq_{\mathcal{T}^*} x$ olmalıdır.

- $x \nleq_{\mathcal{T}} y \Rightarrow x \notin kap(y) \Rightarrow x \in T$, $y \notin T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^s$ vardır.
- $y \nleq_{\mathcal{T}} x \Rightarrow y \notin kap(x) \Rightarrow y \in T$, $x \notin T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^s$ vardır.

Diğer durumlar da benzer şekilde incelenerek, $\mathcal{X}$ uzayının T_0 olduğu sonucuna ulaşılabilir.

(e) ($\Rightarrow$) $\mathcal{X}$ uzayı pH, $\mathcal{V}$, X üzerinde bir süzgeç, x, $\mathcal{V}$'nin bir limiti ve y, $\mathcal{V}$'nin bir *-limiti ancak tersine $x \nleq_{\mathcal{T}} y$ olsun. Bu durumda $x \notin kap(y)$'dir ve $\mathcal{X}$ uzayı pH olduğundan $x \in T$, $y \in \mathcal{T}^*$, $T \cap T^* = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri vardır. Buradan $T \in \mathcal{V}$, $T^* \in \mathcal{V}$ ve böylece $T \cap T^* = \emptyset \in \mathcal{V}$ olur ki, bu bir çelişkidir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{X}$ uzayının pH olmadığını kabul edelim. Bu durumda öyle $x, y \in X$ noktaları vardır ki, $x \notin kap(y)$ olmak üzere, $x \in T$ ve $y \in T^*$ olacak şekildeki her $T \in \mathcal{T}$ ve

$T^* \in \mathcal{T}^*$ için $T \cap T^* \neq \emptyset$'dir. O halde

$$\mathcal{G} = \{T \cap T^* : x \in T \in \mathcal{T},\ \ y \in T^* \in \mathcal{T}^*\}$$

ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır. Bu durumda $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ ailesi ile üretilen süzgeç olmak üzere, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ ve $\mathcal{U}_{\mathcal{T}^*}(y) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ olduğundan, x, $\mathcal{V}$'nin bir limiti ve y, $\mathcal{V}$'nin bir *-limitidir. Böylece varsayımdan $x \leq_{\mathcal{T}} y$ olur ki bu $x \notin kap(y)$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{X}$ uzayı pH'dir. ■

Tanım 3.2.9. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{P}$'ye bir *Urysohn aile* ve $(X, \mathcal{P})$ ikilisine de bir *Urysohn uzayı* denir.

(p1*) $(A, B) \in \mathcal{P}$ ise, $A \subseteq B$'dir.

(p2*) $(A, B) \in \mathcal{P}$ ise, $(A, E), (E, B) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde bir $E \subseteq X$ vardır.

(p3*) $(A, B) \in \mathcal{P}$, $\ E \subseteq A$ ve $B \subseteq F$ ise, $(E, F) \in \mathcal{P}$'dir.

Tanım 3.2.10. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile olsun. Bu durumda, $\mathcal{P}^* = \{(X - B, X - A) : (A, B) \in \mathcal{P}\}$ ailesi $\mathcal{P}$ ailesinin *duali* olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.11. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $(X, \mathcal{P})$ bir yakınımsı uzay ise, $\mathcal{P}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir Urysohn ailedir.

(i) $(\emptyset, \emptyset)$,$(X, X) \in \mathcal{P}$

(ii) $(A, B), (A, B') \in \mathcal{P} \Rightarrow (A, B \cap B') \in \mathcal{P}$

(iii) $(A, B), (A', B) \in \mathcal{P} \Rightarrow (A \cup A', B) \in \mathcal{P}$

Kanıt: Teorem 2.4.6'dan kolayca görülebilir. ■

NOT 3.2.12. [6] $\emptyset \neq X$ kümesi ve bu X kümesi üzerinde verilen bir $\mathcal{P}$ Urysohn ailesi için,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \{T \subseteq X : x \in T \Rightarrow \exists (A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_n, B_n) \in \mathcal{P}\ ;\ x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq T\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. $\mathcal{P}$ bir Urysohn aile olduğundan,

$$\sqcup\mathcal{P} = \{(C, D) : \exists (A, B), (A', B') \in \mathcal{P}\ ;\ C \subseteq A \cup A',\ B \cup B' \subseteq D\}$$

ve

$$\sqcap\mathcal{P} = \{(C,D) : \exists (A,B),(A',B') \in \mathcal{P}\ ;\ C \subseteq A \cap A',\ B \cap B' \subseteq D\}$$

ailelerinin de birer Urysohn aile olduğu kolayca gösterilebilir.

$\mathcal{P}_0 = \{(\emptyset,\emptyset),(X,X)\} \cup \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P}_{n+1} = \begin{cases} \sqcup\mathcal{P}_n & \text{n çift ise} \\ \sqcap\mathcal{P}_n & \text{n tek ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı olmak üzere $\mathcal{P}^p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}$ Urysohn ailesini kapsayan en küçük yakınımsı bağıntıdır ve $\mathcal{P}$ *ile üretilen yakınımsı bağıntı* olarak adlandırılır. Bir $\mathcal{P}$ Urysohn ailesi ile üretilen topoloji $\mathcal{P}^p$ yakınımsı uzayı ile üretilen topoloji ile aynıdır.

Tanım 3.2.13. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile ise, yukarıda bir topoloji olduğu ifade edilen $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ailesine $\mathcal{P}$ *Urysohn ailesinin ürettiği topoloji* adı verilir.

Tanım 3.2.14. $(X,\mathcal{P})$, $(Y,\mathcal{P}')$ birer Urysohn uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $(A,B) \in \mathcal{P}'$ için $(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathcal{P}$ oluyorsa, f fonksiyonuna bir *Urysohn dönüşümü* denir.

Önerme 3.2.15. $(X,\mathcal{P})$, $(Y,\mathcal{P}')$ birer Urysohn uzayı ve $f : (X,\mathcal{P}) \longrightarrow (Y,\mathcal{P}')$ bir Urysohn dönüşümü olsun. Bu durumda $f : (X,\mathcal{P}^*) \longrightarrow (Y,\mathcal{P}'^*)$ fonksiyonu da bir Urysohn dönüşümüdür. Ayrıca $f : (X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}},\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*}) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_{\mathcal{P}'},\mathcal{T}_{\mathcal{P}'^*})$ fonksiyonu ikişer süreklidir.

Kanıt: $(A^*,B^*) \in \mathcal{P}'^*$ olsun. Bu durumda $(Y-B^*, Y-A^*) \in \mathcal{P}'$ dir ve f bir Urysohn dönüşümü olduğundan $(f^{-1}(Y-B^*), f^{-1}(Y-A^*)) \in \mathcal{P}$ sağlanır.
$(f^{-1}(Y-B^*), f^{-1}(Y-A^*)) = (X - f^{-1}(B^*), X - f^{-1}(A^*)) \in \mathcal{P}$ olduğundan,
$(f^{-1}(A^*), f^{-1}(B^*)) \in \mathcal{P}^*$ ve böylece $f : (X,\mathcal{P}^*) \longrightarrow (Y,\mathcal{P}'^*)$ bir Urysohn dönüşümüdür.

Şimdi f'nin ikişer sürekli olduğunu gösterelim:

$T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$ ve $x \in f^{-1}(T)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$ olduğundan $f(x) \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq T$ olacak şekilde $(A_i,B_i) \in \mathcal{P}'$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Ayrıca, f bir Urysohn dönüşümü olduğundan $(f^{-1}(A_i), f^{-1}(B_i)) \in \mathcal{P}$ dir. Böylece,

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(T)$$

ve $\forall (1 \leq i \leq n)$ için $(f^{-1}(A_i), f^{-1}(B_i)) \in \mathcal{P}$ olduğundan $f^{-1}(T) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$'dir. Yani f, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} - \mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$ süreklidir.

Benzer şekilde f'nin $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} - \mathcal{T}_{\mathcal{P}'^*}$ sürekli olduğu da gösterilebilir. Öyleyse f ikişer süreklidir. ■

Önerme 3.2.16. $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı,

$$\mathcal{S} = \{(A,B) : \exists r,s \in \mathbb{R}, r < s\ ;\ A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1] \text{ ve } (r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B\}$$

ailesi bir yakınımsı bağıntıdır.

Kanıt: $\mathcal{S}$'nin bir yakınımsı bağıntı olduğunu göstermek için, Teorem 2.4.6'daki (k1),(k2), (k3),(k4) (k5),(k6) koşullarının sağlandığını gösterelim:

(**k1**) $(\emptyset,\emptyset) \in \mathcal{S}$ ve $([0,1],[0,1]) \in \mathcal{S}$ olduğu tanımdan kolayca gösterilebilir.

(**k2**) $(A,B) \in \mathcal{S}$ verilmek üzere, $A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1]$ ve $(r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B$ olacak şekilde $r,s \in \mathbb{R}$, $r < s$ vardır. Buradan, $A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1] \subseteq (r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B$ olduğundan $A \subseteq B$ elde edilir.

(**k3**) $(B,C) \in \mathcal{S}$, $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ olsun. Bu durumda $A \subseteq B \subseteq [s,\infty) \cap [0,1]$ ve $(r,\infty) \cap [0,1] \subseteq C \subseteq D$ olacak şekilde $r,s \in \mathbb{R}$, $r < s$ vardır ve böylece $(A,D) \in \mathcal{S}$'dir.

(**k4**) $(A,B_1),(A,B_2) \in \mathcal{S}$ verilsin. Bu durumda, $A \subseteq [s_1,\infty)\cap[0,1]$ ve $(r_1,\infty) \cap [0,1] \subseteq B_1$ olacak şekilde $r_1,s_1 \in \mathbb{R}$, $r_1 < s_1$ ve $A \subseteq [s_2,\infty) \cap [0,1]$ ve $(r_2,\infty) \cap [0,1] \subseteq B_2$ olacak şekilde $r_2,s_2 \in \mathbb{R}$, $r_2 < s_2$ vardır. $r = \text{maks}\{r_1,r_2\}$ ve $s = \text{maks}\{s_1,s_2\}$ olarak seçilirse, $r,s \in \mathbb{R}$, $r < s$, $A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1]$ ve $(r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B_1 \cap B_2$ olduğundan, $(A, B_1 \cap B_2) \in \mathcal{S}$ elde edilir.

Tersi için, $(A, B_1 \cap B_2) \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $A \subseteq [s,\infty)\cap[0,1]$ ve $(r,\infty)\cap[0,1] \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $r,s \in \mathbb{R}$, $r < s$ vardır. Buradan, $(r,\infty)\cap[0,1] \subseteq B_1$ ve $(r,\infty)\cap[0,1] \subseteq B_2$ olduğundan $(A,B_1),(A,B_2) \in \mathcal{S}$ elde edilir.

(**k5**) (k4) ile benzer şekilde gösterilebilir.

(**k6**) $(A,B) \in \mathcal{S}$ verilmek üzere, $A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1]$ ve $(r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B$ olacak şekilde $r,s \in \mathbb{R}$, $r < s$ vardır. $r < p < s$ olmak üzere, $C = (p,\infty) \cap [0,1]$ olarak seçilirse, $A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1]$, $(p,\infty) \cap [0,1] \subseteq C$ olduğundan $(A,C) \in \mathcal{S}$ ve $C \subseteq [p,\infty) \cap [0,1]$, $(r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B$ olduğundan $(C,B) \in \mathcal{S}$ elde edilir. Böylelikle $\mathcal{S}$ bir yakınımsı bağıntıdır.

Tanım 3.2.17. $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı,

$$\mathcal{S} = \{(A,B) : \exists r,s \in \mathbb{R}, r < s\ ;\ A \subseteq [s,\infty) \cap [0,1] \text{ ve } (r,\infty) \cap [0,1] \subseteq B\}$$

bağıntısı *standart yakınımsı bağıntı* ve $\mathbb{I} = ([0,1],\mathcal{S})$ uzayı *standart yakınımsı uzay* olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.18. $\mathbb{I} = ([0,1],\mathcal{S})$ standart yakınımsı uzay için $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{U}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{S}^*} = \mathcal{L}$'dir.

Kanıt: $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{U}$ olduğunu gösterelim:

$x \in T \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq T$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{S}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Ayrıca her $i = 1, \ldots n$ için $(A_i, B_i) \in \mathcal{S}$ olduğundan $A_i \subseteq [s_i, \infty) \cap [0,1]$ ve $(r_i, \infty) \cap [0,1] \subseteq B_i$ olacak şekilde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$, $r_i < s_i$ vardır. $r_j = \text{maks}\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ olmak üzere $(r_j, \infty) \cap [0,1] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq T$ ve r_j ile aynı indeksli s_j için $x \in [s_j, \infty) \cap [0,1] \subseteq (r_j, \infty) \cap [0,1] \subseteq T$ olduğundan $T \in \mathcal{U}$'dir.

Ters kapsama için, $x \in T \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda $x \in (a, 1] \subseteq T$ olacak şekilde bir $a \in [0, 1)$ vardır. Öyleyse, $x \in [x, 1]$, $(a, 1] \subseteq T$ ve $([x, 1], (a, 1]) \in \mathcal{S}$ olduğundan $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$'dir.

Benzer şekilde $\mathcal{T}_{\mathcal{S}^*} = \mathcal{L}$ olduğu da gösterilebilir. ■

Tanım 3.2.19. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile ve $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olsun. Eğer her $(A, B) \in \mathcal{P}$ için $kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)$ sağlanıyorsa, $\mathcal{P}$ ailesi $\mathcal{X}$ uzayı ile *uyumludur* denir.

Önerme 3.2.20. **(a)** [Urysohn] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile olsun. Bu durumda her $(A, B) \in \mathcal{P}$ için $f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{I}, \mathcal{S})$, $f(A) = 1$ ve $f(X - B) = 0$ olacak şekilde bir f Urysohn dönüşümü vardır.

(b) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{X}$'in normal olması için gerek ve yeter koşul $\{(A, B) : kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)\}$ ailesinin bir Urysohn aile olmasıdır.

(c) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay ve $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile olsun. $\mathcal{P}$'nin $\mathcal{X}$ ile uyumlu olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ olmasıdır. Bu durumda her $f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{I}, \mathcal{S})$ Urysohn dönüşümü için $f : (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ ikişer süreklidir. Son olarak $Y \subseteq X$ olmak üzere,

$$\text{iç}^{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} Y = \{x : \exists (A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_n, B_n) \in \mathcal{P} \,;\, x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq Y\}$$

biçiminde tanımlıdır.

(d) $\mathcal{A}$, X kümesinden $[0,1]$ aralığına, 0,1 sabitlerini (yani, $f(x) = 1$ ve $f(x) = 0$ sabit fonksiyonlarını) de içeren bir fonksiyonlar ailesi ve $\forall f, g \in \mathcal{A}$ için $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \{(A, B) : \exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, f \in \mathcal{A} \,;\, A \subseteq f^{-1}[b, 1],\ f^{-1}(a, 1] \subseteq B\}$$

X üzerinde bir yakınımsı bağıntıdır. Ters olarak, $\mathcal{P}$ bir yakınımsı bağıntı, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \{f \mid f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{S})$ Urysohn dönüşümü$\}$ ve $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarını ikişer sürekli yapan en zayıf topolojilerin oluşturduğu ikili topolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ ve $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}$'dir.

(e) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayının (ikişer) tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ ($\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} = \mathcal{T}^*$) olacak şekilde bir $\mathcal{P}$ Urysohn ailesinin olmasıdır.

Kanıt: (**a**) $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile, $(A, B) \in \mathcal{P}$, $A_1 = A$ ve $A_0 = B$ olsun. n üzerinden tümevarımla her $\gamma = \frac{m}{2^n} \in [0,1]$ için A_γ kümesi her $\beta < \gamma$ için $(A_\gamma, A_\beta) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde seçilsin.

n=0 için $\gamma = m = 1$'dir. Bu durum için $(A_1, A_0) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde A_1 seçimi ispatın başında yapılmıştı.

Şimdi, n-1 için bu seçimin mümkün olduğunu varsayalım ve n için bu seçimin yapılabileceğini gösterelim:

• Eğer m çift ise, $m = 2m'$ olacak şekilde bir $m' \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $\gamma = \frac{m}{2^n} = \frac{2m'}{2^n} = \frac{m'}{2^{n-1}}$ olduğundan tümevarım hipotezinden uygun bir seçim yapılabilir.

• Eğer m tek ise, $m-1$ ve $m+1$ çift olduğundan istenilen özelliğe sahip $A_{\frac{m-1}{2^n}}$ ve $A_{\frac{m+1}{2^n}}$ kümeleri seçilebilir. Ayrıca $(A_{\frac{m+1}{2^n}}, A_{\frac{m-1}{2^n}}) \in \mathcal{P}$'dir çünkü $A_{\frac{m+1}{2^n}}$ kümesi her $\delta < \frac{m+1}{2^n}$ için $(A_{\frac{m+1}{2^n}}, A_\delta)$ olacak şekilde seçilmişti.
$\mathcal{P}$ bir Urysohn aile olduğundan $(A_{\frac{m+1}{2^n}}, A_\gamma)$, $(A_\gamma, A_{\frac{m-1}{2^n}}) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde bir $A_\gamma \subseteq X$ vardır. Şimdi, $\gamma < \beta$ için, $\beta = \frac{m+p}{2^n}$, $2^n - m \geq p > 0$ olmak üzere Tanım 3.2.9 (p1*) ve (p3*)'dan $(A_\beta, A_\gamma) \in \mathcal{P}$ elde edilir, ki bu n için de uygun bir seçimin yapılabileceğini gösterir.

Şimdi, $z \in X$ için $f(z) = sup(\{\gamma : z \in A_\gamma\} \cup \{0\})$ olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}[s,1] = \cap\{A_\gamma : s > \gamma\} \text{ ve } f^{-1}(r,1] = \cup\{A_\gamma : \gamma > r\}$$

dir. Böylece eğer $r < s$ ise, $\{\frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \ldots, 2^n\}$ kümesi $[0,1]$ aralığında yoğun olduğundan $r < \beta < \gamma < s$ olacak şekilde β, γ seçilebilir. O halde, $(A_\gamma, A_\beta) \in \mathcal{P}$, $f^{-1}[s,1] \subseteq A_\gamma$ ve $A_\beta \subseteq f^{-1}(r,1]$ olduğundan $(f^{-1}[s,1], f^{-1}(r,1]) \in \mathcal{P}$ elde edilir. Dolayısıyla $f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{I}, \mathcal{S})$ bir Urysohn dönüşümüdür ve açıkça $f(A) = f(A_1) = 1$, $f(X - B) = f(X - A_0) = 0$ sağlanır.

(**b**) ($\Rightarrow$) $\mathcal{X}$ uzayı normal olmak üzere, $\mathcal{P} = \{(A, B) : kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)\}$ ailesinin bir Urysohn aile olduğunu gösterelim:

(**p1***) $(A, B) \in \mathcal{P}$ ise, $A \subseteq kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B) \subseteq B$ olduğundan $A \subseteq B$'dir.

(**p2***) $(A, B) \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda, $kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)$, $kap^*(A)$ *-kapalı, $\text{iç}(B) \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{X}$ uzayı normal olduğundan $kap^*(A) \subseteq U \subseteq D^* \subseteq \text{iç}(B)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri vardır.

Şimdi, $E = U \cap D^*$ olarak seçilirse, $\text{iç}(E) = \text{iç}(U \cap D^*) = \text{iç}(U) = U$ olduğundan $kap^*(A) \subseteq \text{iç}(E)$'dir. Ayrıca, $U \cap D^* \subseteq D^*$ ve D^* kümesi *-kapalı olduğundan $kap^*(E) = kap^*(U \cap D^*) \subseteq D^* \subseteq \text{iç}(B)$'dir. O halde, $(A, E), (E, B) \in \mathcal{P}$ elde edilir.

(**p3***) $(A, B) \in \mathcal{P}$, $E \subseteq A$ ve $B \subseteq F$ olsun. Buradan, $kap^*(E) \subseteq kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B) \subseteq \text{iç}(F)$ olduğundan $(E, F) \in \mathcal{P}$'dir.

Böylece, $\mathcal{P}$ bir Urysohn ailedir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{P} = \{(A, B) : kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)\}$ bir Urysohn aile ve $C^* \subseteq T$, C^* *-kapalı ve $T \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda, $kap^*(C^*) = C^* \subseteq T = \text{iç}(T)$ olduğundan $(C^*, T) \in \mathcal{P}$'dir ve $\mathcal{P}$ bir Urysohn aile olduğundan $(C^*, U), (U, T) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde bir $U \subseteq X$ vardır. Buradan, $C^* = kap^*(C^*) \subseteq \text{iç}(U) \subseteq U \subseteq kap^*(U) \subseteq T$ ve böylece $\mathcal{X}$ uzayı normaldir.

(**c**) $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile, $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay ve $\mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ ile uyumlu olsun. $x \in T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq T$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}\,(1 \leq i \leq n)$ vardır. $\mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ ile uyumlu olduğundan $\forall 1 \leq i \leq n$ için $kap^*(A_i) \subseteq \text{iç}(B_i)$ sağlanır ve buradan

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n kap^*(A_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \text{iç}(B_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq T$$

elde edilir. O halde $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{iç}(B_i) \subseteq T$ olduğundan $T \in \mathcal{T}$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$'dir.

Benzer şekilde $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ olduğu da gösterilebilir.

Ters yönü için, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ ve $(A, B) \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda (a)'dan $f(A) = 1$ ve $f(X - B) = 0$ olacak şekilde bir $f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{I}, \mathcal{S})$ Urysohn dönüşümü bulunabilir. Ayrıca Önerme 3.2.15'den $f : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}^*}) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ ikişer sürekli olduğundan ve $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ sağlandığından $f : (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ fonksiyonu da ikişer süreklidir. Böylece, $kap^*(A) \subseteq f^{-1}[\{1\}] \subseteq f^{-1}(0,1] \subseteq \text{iç}(B)$ olduğundan $\mathcal{P}$, X ile uyumludur.

İspatın son kısmı için, $Y \subseteq X$ ve

$$\widetilde{Y} = \{x : \exists (A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_n, B_n) \in \mathcal{P}\ ;\ x \in \bigcap_{i=1}^n A_i,\ \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq Y\}$$

olsun. $\widetilde{Y} = \text{iç}^{\mathcal{T_P}} Y$ olduğunu gösterelim:

$x \in \widetilde{Y}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq Y$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır ve $\mathcal{P}$ bir Urysohn aile olduğundan $\forall i \in I$ için $A_i \subseteq B_i$'dir. Buradan,
$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq Y$ ve böylece $\widetilde{Y} \subseteq Y$ elde edilir.

Şimdi, $\widetilde{Y}$'nın açık olduğu gösterilirse, $\text{iç}^{\mathcal{T_P}} Y$, Y'yi içeren en geniş açık küme olduğundan $\widetilde{Y} \subseteq \text{iç}^{\mathcal{T_P}} Y$ olduğu söylenebilir.

$x \in \widetilde{Y}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq Y$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Ayrıca $\mathcal{P}$ bir Urysohn aile olduğundan her $1 \leq i \leq n$ için $(A_i, E_i), (E_i, B_i) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde bir $E_i \subseteq X$ vardır. $y \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ ise, $(E_i, B_i) \in \mathcal{P}$ $\quad (1 \leq i \leq n)$ için $y \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ ve $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq Y$ olduğundan $y \in \widetilde{Y}$'dir.

$x \in \widetilde{Y}$ için $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \subseteq \widetilde{Y}$ olacak şekilde $(A_i, E_i) \in \mathcal{P}$ $\quad (1 \leq i \leq n)$ olduğundan $\widetilde{Y}$, $\mathcal{T_P}$ topolojisine göre açıktır.

Şimdi de, $\text{iç}^{\mathcal{T_P}} Y \subseteq \widetilde{Y}$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayalım. $x \in \text{iç}^{\mathcal{T_P}} Y$ ise, $x \in T \subseteq Y$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T_P}$ vardır. Bu durumda, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq T \subseteq Y$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Öyleyse $x \in \widetilde{Y}$'dir.

(**d**) Öncelikle $\mathcal{P_A}$'nın X üzerinde bir yakınımsı bağıntı olduğunu gösterelim:

(**k1**) $g, h : X \longrightarrow [0,1]$, $g(x) = 0$ ve $h(x) = 1$ olmak üzere $h, g \in \mathcal{A}$ olduğu biliniyor. O halde,

$\emptyset \subseteq g^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ ve $g^{-1}(0,1] \subseteq \emptyset$ olduğundan $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{P_A}$'dır.

$X \subseteq h^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ ve $h^{-1}(0,1] \subseteq X$ olduğundan $(X, X) \in \mathcal{P_A}$'dır.

(**k2**) $(A, B) \in \mathcal{P_A}$ ise, $\exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, f \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq f^{-1}[b,1] \subseteq f^{-1}(a,1] \subseteq B$ ve buradan $A \subseteq B$'dir.

(**k3**) $(A, B) \in \mathcal{P_A}$, $E \subseteq A$ ve $B \subseteq F$ olsun. Bu durumda, $\exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, f \in \mathcal{A}$ için $E \subseteq A \subseteq f^{-1}[b,1]$, $\quad f^{-1}(a,1] \subseteq B \subseteq F$ olduğundan $(E, F) \in \mathcal{P_A}$'dır.

(**k4**) $(A, B), (A, B') \in \mathcal{P_A}$ olsun. Bu durumda,

$\exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, f \in \mathcal{A} \;\; ; \;\; A \subseteq f^{-1}[b,1], \quad f^{-1}(a,1] \subseteq B$ ve

$\exists c, d \;\; 0 \leq c < d \leq 1, g \in \mathcal{A} \;\; ; \;\; A \subseteq g^{-1}[d,1], \quad g^{-1}(c,1] \subseteq B'$ dir.

$m = min\{b, d\}$ ve $n = maks\{a, c\}$ olarak seçilirse,

$A \subseteq f^{-1}[b,1] \cap g^{-1}[d,1] \subseteq f^{-1}[m,1] \cap g^{-1}[m,1] = (f \wedge g)^{-1}[m,1]$,

$(f \wedge g)^{-1}(n,1] = f^{-1}(n,1] \cap g^{-1}(n,1] \subseteq f^{-1}(a,1] \cap g^{-1}(c,1] \subseteq B \cap B'$ ve $f \wedge g \in \mathcal{A}$ olduğundan $(A, B \cap B') \in \mathcal{P_A}$ elde edilir.

(**k5**) (k4) ile benzer şekilde gösterilebilir.

(**k6**) $(A,B)\in\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ ise, $\exists a,b\ \ 0\le a<b\le 1, f\in\mathcal{A}\ \ ;\ \ A\subseteq f^{-1}[b,1],\quad f^{-1}(a,1]\subseteq B$'dir. $c\in(a,b)$ olmak üzere $C=f^{-1}[c,1]$ seçelim. Bu durumda, $A\subseteq f^{-1}[b,1]\subseteq f^{-1}(c,1]\subseteq C=f^{-1}[c,1]\subseteq f^{-1}(a,1]\subseteq B$ olduğundan $(A,C),(C,B)\in\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ dır. Böylece $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, X üzerinde bir yakınımsı bağıntıdır.

Şimdi, $\mathcal{P}$, X üzerinde bir yakınımsı bağıntı,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}=\{f\mid f:(X,\mathcal{P})\longrightarrow([0,1],\mathcal{S})\text{ Urysohn dönüşümü}\}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}=\{(A,B):\exists a,b\ \ 0\le a<b\le 1, f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\ ;\ A\subseteq f^{-1}[b,1],\ f^{-1}(a,1]\subseteq B\}$$

olmak üzere $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$ olduğunu gösterelim:

$(A,B)\in\mathcal{P}$ ise, bu önermenin (a) şıkkından $f(A)=1$, $f(X-B)=0$ olacak şekilde bir $f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ vardır ve $A\subseteq f^{-1}[\frac{1}{2},1]$, $f^{-1}(0,1]\subseteq B$ sağlandığından $(A,B)\in\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$ elde edilir. Öyleyse $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$'dir.

Ters kapsama için, $(A,B)\in\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$ olsun. Bu durumda, $\exists a,b\ \ 0\le a<b\le 1, f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ için $A\subseteq f^{-1}[b,1]$, $f^{-1}(a,1]\subseteq B$'dir. Ayrıca $\mathcal{S}$'nin tanımından $([b,1],(a,1])\in\mathcal{S}$ ve $f:(X,\mathcal{P})\longrightarrow([0,1],\mathcal{S})$ bir Urysohn dönüşümü olduğundan $(f^{-1}[b,1],f^{-1}(a,1])\in\mathcal{P}$ olmalıdır. Öyleyse $(A,B)\in\mathcal{P}$, böylece $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}\subseteq\mathcal{P}$ ve dolayısıyla $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}=\mathcal{P}$'dir.

Şimdi de,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}=\{f\mid f:(X,\mathcal{P}_{\mathcal{A}})\longrightarrow([0,1],\mathcal{S})\text{ Urysohn dönüşümü}\}$$

olmak üzere $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ olduğunu gösterelim:

$f\in\mathcal{A}$ olsun. $(A,B)\in\mathcal{S}$ ise, $A\subseteq[s,1]$, $(r,1]\subseteq B$ olacak şekilde birer $r,s\in[0,1]$, $r<s$ vardır. Buradan, $f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}[s,1]$, $f^{-1}(r,1]\subseteq f^{-1}(B)$ olduğundan $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$'nın tanımından $(f^{-1}(A),f^{-1}(B))\in\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ elde edilir. O halde, $f:(X,\mathcal{P}_{\mathcal{A}})\longrightarrow([0,1],\mathcal{S})$ bir Urysohn dönüşümü ve böylece $f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$'dir.

Son olarak $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=(X,\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$ ve $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}=(X,\mathcal{V},\mathcal{V}^*)$, sırasıyla, $f\in\mathcal{A}$ ve $f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ fonksiyonlarını ikişer sürekli yapan en zayıf topolojilerin oluşturduğu ikili topolojik uzaylar olmak üzere $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}$ olduğunu gösterelim:

Öncelikle, $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ olduğundan $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{V}$ ve $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{V}^*$ olduğu açıktır.

Ters kapsama için, $f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ alınsın. $f:(X,\mathcal{P}_{\mathcal{A}})\longrightarrow([0,1],\mathcal{S})$ bir Urysohn dönüşümü
olduğundan Önerme 3.2.15 ve Örnek 3.2.18'dan $f:(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}},\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^*})\longrightarrow([0,1],\mathcal{U},\mathcal{L})$ fonksiyonu ikişer süreklidir. O halde, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}$ uzayı $f\in\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ fonksiyonlarını sürekli yapan en zayıf topolojilerin oluşturduğu ikili topolojik uzay olduğundan $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ ve

$\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{T}_{(\mathcal{P}_\mathcal{A})^*}$'dır. Şimdi eğer $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_\mathcal{A})^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ olduğu gösterilirse $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{T}^*$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. Bunu göstermek için, bu önermenin (c) şıkkından $\mathcal{P}_\mathcal{A}$'nın $\mathcal{X}_\mathcal{A}$ ile uyumlu olduğunu göstermek yeterlidir.

$(A, B) \in \mathcal{P}_\mathcal{A}$ ise, $\exists a, b \ 0 \leq a < b \leq 1, f \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq f^{-1}[b, 1]$, $f^{-1}(a, 1] \subseteq B$'dir. Ayrıca, $[b, 1]$ aralığı $\mathcal{L}$ topolojisine göre kapalı, $(a, 1]$ aralığı $\mathcal{U}$ topolojisine göre açık ve f ikişer sürekli olduğundan, $kap^{\mathcal{T}^*} f^{-1}[b, 1] = f^{-1}[b, 1]$ ve $\text{iç}^{\mathcal{T}} f^{-1}(a, 1] = f^{-1}(a, 1]$'dir. O halde,

$kap^{\mathcal{T}^*}(A) \subseteq kap^{\mathcal{T}^*} f^{-1}[b, 1] = f^{-1}[b, 1] \subseteq f^{-1}(a, 1] = \text{iç}^{\mathcal{T}} f^{-1}(a, 1] \subseteq \text{iç}^{\mathcal{T}}(B)$ sağlanır ve böylece $\mathcal{P}_\mathcal{A}$, $\mathcal{X}_\mathcal{A}$ uzayı ile uyumludur.

(e) $(\Leftarrow)$ $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay ve $\mathcal{P}$, X üzerinde bir Urysohn aile olsun ve $\mathcal{T}_\mathcal{P} = \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ sağlansın.

$x \in T \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq T$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Öyleyse (a)'dan $\forall(1 \leq i \leq n)$ için $f_i(A_i) = 1$, $f_i(X - B_i) = 0$ olacak şekilde $f_i : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{S})$ Urysohn dönüşümleri vardır. Ayrıca (c)'den, $\mathcal{P}$ Urysohn ailesi X ile uyumludur ve böylece Önerme 3.2.15'den her $(1 \leq i \leq n)$ için $f_i : (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ dönüşümleri ikişer süreklidir.

$g = \bigwedge\{f_i : i = 1, 2, \ldots, n\} : (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, g fonksiyonu ikişer süreklidir ve $g(x) = 1$, $g(X - T) = 0$ sağlanır. O halde $\mathcal{X}$ uzayı tamamen regülerdir.

$\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} = \mathcal{T}^*$ olması durumunda $\mathcal{X}^*$ uzayının ikişer tamamen regüler olacağı benzer şekilde gösterilebilir.

$(\Rightarrow)$ $\mathcal{X}$ uzayı tamamen regüler ve $\mathcal{A} = \{f \mid f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}\}$ olsun. $\mathcal{X}$ tamamen regüler olduğundan $\mathcal{A} \neq \emptyset$'dir. Şimdi, $\mathcal{P}_\mathcal{A}$'nın istenilen özelliğe sahip bir yakınımsı bağıntı olduğunu yani, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}} = \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_\mathcal{A})^*} \subseteq \mathcal{T}^*$'ın sağlandığını gösterelim:

$\mathcal{P}_\mathcal{A}$'nın bir Urysohn aile olduğu (d)'den yararlanılarak gösterilebilir, çünkü açıkça $\mathcal{A}$ kümesi 0,1 sabitlerini içerir ve $\forall f, g \in \mathcal{A}$ için $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathcal{A}$'dir.

$x \in G \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ ve $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq G$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}_\mathcal{A}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Öyleyse $\forall i \leq n$ için $\exists a_i, b_i \ 0 \leq a_i < b_i \leq 1, f \in \mathcal{A}$; $A_i \subseteq f^{-1}[b_i, 1]$, $f^{-1}(a_i, 1] \subseteq B_i$'dir. Buradan,

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n f^{-1}[b_i, 1] \subseteq \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(a_i, 1] \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq G$$

dir. Ayrıca $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(a_i, 1] \in \mathcal{T}$ ve böylece $G \in \mathcal{T}$'dir. Öyleyse

$\mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \subseteq \mathcal{T}$ sağlanır.

Ters kapsama için, $x \in G \in \mathcal{T}$ ise $\mathcal{X}$ tamamen regüler olduğundan $f(x) = 1$ ve her $y \notin G$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{A}$ vardır. Buradan, $\varepsilon > 0$ için $x \in f^{-1}[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1], f^{-1}(\frac{1}{2}, 1] \subseteq G$ ve $(f^{-1}[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1], f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ olduğundan $G \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$'dır. Öyleyse $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ sağlanır.

Son olarak, $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ olduğunu gösterelim. Fakat bunun için önce, $\mathcal{A}^* = \{1 - f : f \in \mathcal{A}\}$ olmak üzere $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^* = \mathcal{P}_{\mathcal{A}^*}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$(A, B) \in (\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^* \Leftrightarrow (X - B, X - A) \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$

$\Leftrightarrow \exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, \; f \in \mathcal{A} \,; \; X - B \subseteq f^{-1}[b, 1], \;\; f^{-1}(a, 1] \subseteq X - A$

$\Leftrightarrow \exists a, b \;\; 0 \leq a < b \leq 1, \; f \in \mathcal{A} \,; \; A \subseteq f^{-1}[0, a], \;\; f^{-1}[0, b) \subseteq B$

$\Leftrightarrow \exists 1 - a, 1 - b \;\; 0 \leq 1 - b < 1 - a \leq 1, \;\; 1 - f \in \mathcal{A}^* \,; \; A \subseteq (1 - f)^{-1}[1 - a, 1],$
$(1 - f)^{-1}(1 - b, 1] \subseteq B$

$\Leftrightarrow (A, B) \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}^*}$

$x \in G^* \in \mathcal{T}_{(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^*} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}^*}}$ ise, $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ ve $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq G^*$ olacak şekilde $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}^*}$ $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Buradan,

$$\forall 1 \leq i \leq n \text{ için } \exists a_i, b_i \;\; 0 \leq a_i < b_i \leq 1, g \in \mathcal{A}^* \,; \; A_i \subseteq g^{-1}[b_i, 1], \; g^{-1}(a_i, 1] \subseteq B_i$$

dir. Ayrıca, $g \in \mathcal{A}^*$ olduğundan $1 - f = g$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{A}$ vardır. Öyleyse,

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n f^{-1}[0, 1 - b_i] \subseteq \bigcap_{i=1}^n f^{-1}[0, 1 - a_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq G^*$$

ve $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^n f^{-1}[0, 1 - a_i) \in \mathcal{T}^*$'dır. O halde $G^* \in \mathcal{T}^*$'dır ve böylece $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ sağlanır.

İkişer tamamen regüler olma durumunda $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^*} = \mathcal{T}^*$ olacağı da benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 3.2.21. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay olsun.

(a) $\mathcal{X}$ uzayı, normal ve zs $\Rightarrow$ tamamen regüler $\Rightarrow$ regüler $\Rightarrow$ pH $\Rightarrow$ zs 'dir.

(b) $(X, \mathcal{T})$ uzayının normal olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ ikili topolojik uzayının normal olmasıdır.

Q=T_0, T_1, T_2,regüler, tamamen regüler özelliklerinden biri olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının Q olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayının Q olmasıdır. Ayrıca $\mathcal{X}$ ikişer Q ise, $\mathcal{X}^s = (X, \mathcal{T}^s)$ uzayı Q'dur.

Kanıt: (**a**)

• $\mathcal{X}$ uzayı normal ve zs olsun. Bu durumda Önerme 3.2.20 (b)'den $\mathcal{P} = \{(C^*, T) : C^* \subseteq T, C^* \text{ *-kapalı}, T \in \mathcal{T}\}$ ailesi $\mathcal{X}$ ile uyumlu bir Urysohn ailedir. Şimdi eğer $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ olduğu gösterilirse Önerme 3.2.20 (e)'den $\mathcal{X}$ uzayının tamamen regüler olduğu söylenebilir.

$x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. $C^* = kap^*(x)$ olmak üzere, $\mathcal{X}$ zs olduğundan Önerme 3.2.8 (a)'dan $C^* \subseteq T$'dir. O halde, $x \in C^*$, $T \subseteq T$ ve $(C^*, T) \in \mathcal{P}$ olduğundan $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ve böylece $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$'dir.

$x \in T \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ise, $x \in D^*$, $G \subseteq T$ olacak şekilde bir $(D^*, G) \in \mathcal{P}$ yani $G \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri vardır. O halde, $x \in D^* \subseteq G \subseteq T$ olduğundan $T \in \mathcal{T}$ ve böylece $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$'dir.

Son olarak, $x \in G^* \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}^*}$ ise, $x \in C$, $T^* \subseteq G^*$ olacak şekilde bir $(C, T^*) \in \mathcal{P}^*$ yani $T^* \in \mathcal{T}^*$ ve C kapalı kümeleri vardır. Buradan, $x \in C \subseteq T^* \subseteq G^*$ ve böylece $G^* \in \mathcal{T}^*$'dır. Öyleyse $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^*} \subseteq \mathcal{T}^*$'dır.

• $\mathcal{X}$ uzayı tamamen regüler ve $x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $f(x) = 1$ ve her $y \notin T$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bir $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ vardır. $(\frac{1}{2}, 1] \in \mathcal{U}$, $[\frac{1}{2}, 1]$ $\mathcal{L}$-kapalı ve f ikişer sürekli olduğundan $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$ ve $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ *-kapalıdır. Buradan, $x \in f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \subseteq f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) \subseteq T$ ve böylece $\mathcal{X}$ regülerdir.

• $\mathcal{X}$ uzayı regüler ve $x \notin kap(y)$ olsun. Bu durumda, $x \in G$, $y \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathcal{X}$ regüler olduğundan $x \in U \subseteq D^* \subseteq G$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı kümeleri bulunabilir. Buradan, $x \in U$, $y \in X - D^*$, $U \in \mathcal{T}$, $X - D^* \in \mathcal{T}^*$ ve $U \cap (X - D^*) = \emptyset$ ve böylece $\mathcal{X}$ uzayı pH'dir.

• $\mathcal{X}$ uzayı pH ve $x \notin kap(y)$ olsun. Bu durumda $x \in T$, $y \in T^*$, $T \cap T^* = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri vardır. $x \notin T^*$ ve $y \in T^*$ olduğundan $y \notin kap^*(x)$'dir. Öyleyse $\mathcal{X}$ uzayı zs'dir.

(**b**) $(X, \mathcal{T})$ uzayı normal $C \subseteq T$, $C \subseteq X$ kapalı ve $T \subseteq X$ açık olsun. Bu durumda, C ve $X - T$ kümeleri ayrık kapalı kümeler olduğundan $C \subseteq U$, $X - T \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. O halde, $U \in \mathcal{T}$ ve $X - V$ kapalı kümeleri için $C \subseteq U \subseteq X - V \subseteq T$ sağlanır ve böylece $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayı normaldir.

Ters yönü için, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayı normal, $C, D \subseteq X$ kapalı kümeler ve $C \cap D = \emptyset$ olsun. $C \subseteq X - D$, C kümesi kapalı $X - D$ kümesi açık ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayı normal olduğundan $C \subseteq U \subseteq V \subseteq X - D$ olacak şekilde U açık ve V kapalı kümeleri vardır.

O halde, $C \subseteq U$, $D \subseteq X - V$, $U \cap X - V = \emptyset$ olacak şekilde $U, X - V \in \mathcal{T}$ kümeleri olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı normaldir.

"$(X, \mathcal{T})$ uzayı Q'dur $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayı Q'dur." kısmı tanımlardan açıktır.

Şimdi, $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı ikişer tamamen regüler olmak üzere $\mathcal{X}^s$ uzayının tamamen regüler olduğunu gösterelim:

$x \in T^s \in \mathcal{T}^s$ ise, $x \in T \cap T^* \subseteq T^s$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri vardır. $x \in T \in \mathcal{T}$, $x \in T^* \in \mathcal{T}^*$ ve $\mathcal{X}$ ikişer tamamen regüler olduğundan, $f(x) = 1$, her $y \notin T$ için $f(y) = 0$ olacak şekilde bir $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{I}$ ve $f^*(x) = 1$, her $y \notin T^*$ için $f^*(y) = 0$ olacak şekilde bir $f^* : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^s$ ve $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan $f, f^* : (X, \mathcal{T}^s) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{T}_s)$ fonksiyonları süreklidir. Buradan, $f \wedge f^* : (X, \mathcal{T}^s) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{U}_s)$ sürekli, $(f \wedge f^*)(x) = 1$ ve her $y \notin T^s$ için $(f \wedge f^*)(y) = 0$ olduğundan $\mathcal{X}^s$ tamamen regülerdir.

Q=regüler,T_2, T_1, T_0 olması durumları da benzer şekilde gösterilebilir. ■

3.3 TOPOLOJİDE DUALİTE

Bu kesimde amaç, verilen bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı için, bu uzaydan daha iyi özelliklere sahip olan bir ikili topolojik uzay elde etmektir. Bunun için ise, topolojik uzayların bir sınıfı üzerinde dual kavramından bahsedilecek ve $(X, \mathcal{T})$ uzayının dualiyle birlikte oluşturduğu ikili topolojik uzay, en azından ikişer zayıf simetrik olacak şekilde, bazı topolojik dualler tanımlanacaktır. Ayrıca bu duallerin $\mathcal{T}$ topolojisi ile ilişkileri incelenecektir. Bu kesimde verilen tanım, teorem ve sonuçlar [6] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 3.3.1. $\mathcal{D}$ topolojik uzayların bir sınıfı olmak üzere, $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa D'ye $\mathcal{D}$ üzerinde bir *topolojik dualdir* denir.

(d1) Her $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ için $\mathfrak{X}$ ile $D(\mathfrak{X})$ aynı küme üzerinde tanımlıdır.

(d2) $D^3 = D \circ D \circ D = D$'dir.

NOT 3.3.2. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ olmak üzere $D(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}^D)$ biçimindedir. Ayrıca, $\mathcal{T}^{SD} = \mathcal{T} \vee \mathcal{T}^D$, $BD(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^D)$ ve $\mathcal{BD} = \{BD(\mathfrak{X}) : \mathfrak{X} \in \mathcal{D}\}$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 3.3.3. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere eğer $D^2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ oluyorsa $\mathfrak{X}$ uzayına *D-yansımalıdır* denir.

Tanım 3.3.4. $\mathcal{D}$, topolojik uzayların bir sınıfı olsun. Bu durumda;

(a) Q ikili topolojik uzayların bir özelliği olmak üzere, eğer her $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}$ için $BD(\mathfrak{X})$ ikili topolojik uzayı Q ise, D topolojik duali Q'dur denir.

(b) Q ikili topolojik uzayların bir özelliği olmak üzere, eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $BD(D^n(\mathfrak{X}))$ ikili topolojik uzayı Q oluyorsa, $\mathfrak{X}$ uzayı DQ'dur denir. DQ uzayların sınıfı $\mathcal{D}_Q$ biçiminde gösterilir.

Önerme 3.3.5. $\mathcal{D}$, topolojik uzayların bir sınıfı ve $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü $\mathcal{D}$ üzerinde bir topolojik dual olsun. Bu durumda;

(a) Bir topolojik uzayın D-yansımalı olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın D dönüşümünün görüntü kümesinde olmasıdır.

(b) $n > 0$ için n tek ise $D^n = D$, n çift ise $D^n = D^2$'dir. Böylece
$BD(D^n(\mathfrak{X})) = (X, \mathcal{T}^{D^n}, \mathcal{T}^{D^{n+1}}) = BD(D^{n+1}(\mathfrak{X}))^*$ sağlanır.

(c) Aşağıdaki ifadelerin her biri $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ uzayının DQ olması ile denktir:

(i) $\forall n \leq 2$ için $BD(D^n(\mathfrak{X}))$ Q'dur.

(ii) $BD(\mathfrak{X})$ Q ve $BD(D(\mathfrak{X}))$ ikişer Q'dur.

(d) D, $\mathcal{D}_Q$ sınıfı üzerinde bir Q topolojik dualdir.

(e) $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}_Q$ D-yansımalı ise, $BD(\mathfrak{X})$ uzayı ikişer Q'dur.

Kanıt: (**a**) ($\Rightarrow$) $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ uzayı D-yansımalı ise, $\mathfrak{X} = D(D(\mathfrak{X}))$ olduğundan $\mathfrak{X}$ uzayı D'nin görüntü kümesindedir.

($\Leftarrow$) $\mathfrak{X}$ uzayı D'nin görüntü kümesinde olsun. Bu durumda $D(\mathcal{Y}) = \mathfrak{X}$ olacak şekilde bir $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}$ vardır. Buradan, $D^3(\mathcal{Y}) = D^2(\mathfrak{X})$'dir. Ayrıca, D bir topolojik dual olduğundan $D^3(\mathcal{Y}) = D(\mathcal{Y})$ olmalıdır. O halde, $D^2(\mathfrak{X}) = D^3(\mathcal{Y}) = D(\mathcal{Y}) = \mathfrak{X}$ olduğundan $\mathfrak{X}$ uzayı D-yansımalıdır.

(**b**) Bir topolojik dual için $D^3 = D$ olduğundan teoremin ilk kısmı açıktır.
$BD(D^n(\mathfrak{X})) = (X, \mathcal{T}^{D^n}, \mathcal{T}^{D^{n+1}})$ ve $BD(D^{n+1}(\mathfrak{X}))^* = (X, \mathcal{T}^{D^{n+2}}, \mathcal{T}^{D^{n+1}})$ biçimindedir.
n çift ise $n+2$ çift olduğundan $\mathcal{T}^{D^n} = \mathcal{T}^{D^{n+2}} = \mathcal{T}^{D^2}$,
n tek ise $n+2$ tek olduğundan $\mathcal{T}^{D^n} = \mathcal{T}^{D^{n+2}} = \mathcal{T}^{D}$ eşitlik sağlanır.
(**c**) Öncelikle $n = 0$ için $BD(D^n(\mathfrak{X})) = BD(\mathfrak{X})$ ve (b)'den

$$BD(D^n(\mathfrak{X})) = \begin{cases} (X, \mathcal{T}^{D^2}, \mathcal{T}^{D}) & n \text{ çift } ve\ n \neq 0 \text{ ise} \\ (X, \mathcal{T}^{D}, \mathcal{T}^{D^2}) & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu söylenebilir.

(**i**) $\mathfrak{X}$ uzayı DQ'dur. $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $BD(D^n(\mathfrak{X}))$ Q'dur.

$\Leftrightarrow (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^D)$, $(X, \mathcal{T}^{D^2}, \mathcal{T}^D)$ ve $(X, \mathcal{T}^D, \mathcal{T}^{D^2})$ Q'dur.

$\Leftrightarrow BD(\mathfrak{X})$, $BD(D(\mathfrak{X}))$ ve $BD(D^2(\mathfrak{X}))$ Q'dur.

$\Leftrightarrow \forall n \leq 2$ için $BD(D^n(\mathfrak{X}))$ Q'dur.

(**ii**) $BD(D(\mathfrak{X}))$'in ikişer Q olması, $BD(D(\mathfrak{X})) = (X, \mathcal{T}^D, \mathcal{T}^{D^2})$ ve $BD(D(\mathfrak{X}))^* = (X, \mathcal{T}^{D^2}, \mathcal{T}^D)$ uzaylarının Q olması anlamına geldiğinden, (i)'den kolayca görülebilir.

(**d**) Öncelikle D, $\mathcal{D}$ üzerinde bir topolojik dual olduğundan (d1) ve (d2) özelliklerini sağlar. O halde her $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}_Q$ için $D(\mathfrak{X}) \in \mathcal{D}_Q$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, (c)'den $BD(D(\mathfrak{X}))$'in Q ve $BD(D^2(\mathfrak{X}))$'in ikişer Q olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathfrak{X} \in \mathcal{D}_Q \Leftrightarrow BD(\mathfrak{X})$ Q'dur ve $BD(D(\mathfrak{X}))$ ikişer Q'dur.

$\Leftrightarrow BD(D(\mathfrak{X}))$, $BD(D^2(\mathfrak{X})) = BD(D(\mathfrak{X}))^*$ ve $BD(D^2(\mathfrak{X}))^* = BD(D(\mathfrak{X}))$ Q'dur.

$\Leftrightarrow BD(D(\mathfrak{X}))$ Q ve $BD(D^2(\mathfrak{X}))$ ikişer Q'dur.

(**e**) $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}_Q$ ise, (c)'den $BD(D(\mathfrak{X})) = (X, \mathcal{T}^D, \mathcal{T}^{D^2})$ ikişer Q'dur. Ayrıca $\mathfrak{X}$ D-yansımalı olduğundan $\mathcal{T}^{D^2} = \mathcal{T}$'dir. Öyleyse $(X, \mathcal{T}^D, \mathcal{T})$ ve dolayısıyla $BD(\mathfrak{X})$ ikişer Q'dur. ■

Yukarıda, dualler yardımı ile bir $BD(\mathfrak{X})$ ikili topolojik uzayı tanımlandı. Şimdi de, $\mathfrak{X}$ uzayından daha iyi özelliklere sahip bir $BD(\mathfrak{X})$ uzayı elde etmek amaçlanmaktadır. Yani en azından, $\mathfrak{X}$ zayıf simetrik olmasa bile $BD(\mathfrak{X})$ uzayının ikişer zayıf simetrik olması istenmektedir. Bunun için de Önerme 3.2.8 (a)'dan, elde edilecek ikili topolojik uzayın $\leq_{\mathcal{T}^*} = \geq_{\mathcal{T}}$ özelliğini sağlaması gerektiği biliniyor. Bu koşul önsıralamalar ile ilgili olduğundan, bir X kümesi üzerindeki keyfi bir $\leq$ önsıralama bağıntısı için bazı kavramlar tanımlanacaktır.

Tanım 3.3.6. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\leq$ ikili bağıntısı X üzerinde bir önsıralama ve $S \subseteq X$ olmak üzere,

$$\uparrow^{\leq} [S] = \{y \in X : \exists s \in S \; ; \; s \leq y\}$$

$$\downarrow_{\leq} [S] = \{y \in X : \exists s \in S \; ; \; y \leq s\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda,

(a) $\uparrow^{\leq} [S]$ kümesine S'nin $\leq$-*doyumu* denir.

(b) Eğer $S = \uparrow^{\leq} [S]$ oluyorsa, S kümesi $\leq$-*doymuştur* yada $\leq$-*yukarı kümedir* denir.

(c) Eğer $S = \uparrow^{\geq} [S]$ oluyorsa, S kümesi $\geq$-*doymuştur* denir.

(d) Eğer $S = \downarrow_{\leq} [S]$ oluyorsa S kümesi $\leq$-*aşağı kümedir* denir.

NOT 3.3.7. **(a)** $x \in X$ olmak üzere kolaylık için $\downarrow_{\leq} [\{x\}] = \downarrow_{\leq} (x)$ ve $\uparrow^{\leq} [\{x\}] = \uparrow^{\leq} (x)$ biçiminde gösterilecektir.

(b) $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\leq_{\mathcal{T}}$ bağıntısı $\mathcal{T}$'nun özellendirme sıralaması olmak üzere, kolaylık için $\downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} [S] = \downarrow_{\mathcal{T}} [S]$ ve $\uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [S] = \uparrow^{\mathcal{T}} [S]$ biçiminde de kullanılabilir.

(c) $\leq$ bağıntısı bir önsıralama olduğundan yansıma özelliğini sağlar. Böylece yukarıdaki tanımlarda $S \subseteq \downarrow_{\leq} [S]$ ve $S \subseteq \uparrow^{\leq} [S]$ kapsamaları her zaman sağlanır.

Önerme 3.3.8. $(X, \leq)$ bir önsıralı küme ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

(a) $\leq$-doymuş kümelerin keyfi birleşimleri ve keyfi arakesitleri $\leq$-doymuştur.

(b) S kümesinin $\leq$-doymuş olması için gerek ve yeter koşul $X - S$'nin $\geq$-doymuş olmasıdır.

(c) $\uparrow^{\leq} [S] = \downarrow_{\geq} [S]$'dir.

(d) S kümesini kapsayan en küçük $\leq$-doymuş küme $\uparrow^{\leq} [S]$'dir.

(e) Bir topolojinin açık (kapalı) kümeleri $\leq$-doymuş kümeler tarafından üretilmişse, bu topolojinin tüm açık (kapalı) kümeleri $\leq$-doymuştur.

(f) $\leq$-doymuş kümelerin sıra koruyan fonksiyonlar altındaki ters görüntüleri de $\leq$-doymuştur.

Kanıt: **(a)** $\{A_i : i \in I\}$, $\leq$-doymuş kümelerin bir ailesi olsun.

$$\begin{aligned} x \in \uparrow^{\leq} [\textstyle\bigcup_{i \in I} A_i] &\Rightarrow \exists a \in \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i \; ; \; a \leq x \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in I \; ; \; a \in A_{i_0} \;\; \wedge \;\; a \leq x \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in I \; ; \; x \in \uparrow^{\leq} [A_{i_0}] \subseteq A_{i_0} \\ &\Rightarrow x \in \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

O halde $\bigcup_{i \in I} A_i$ $\leq$-doymuştur. Benzer şekilde $\bigcap_{i \in I} A_i$'nin de $\leq$-doymuş olduğu gösterilebilir.

(b) $(\Rightarrow)$ S kümesi $\leq$-doymuş, $x \in \uparrow^{\geq} [X - S]$ ancak $x \notin X - S$ olsun. Bu durumda $y \geq x$ olacak şekilde bir $y \in X - S$ vardır. Öyleyse, $x \leq y$ ve $x \in S$ olduğundan

$y \in \uparrow^{\leq} [S]$'dir. Ayrıca S kümesi $\leq$-doymuş olduğundan $\uparrow^{\leq} [S] \subseteq S$'dir. Buradan $y \in S$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $x \in X - S$ ve böylece $X - S$ kümesi $\geq$-doymuştur.

($\Leftarrow$) $X - S$ kümesi $\geq$-doymuş, $x \in \uparrow^{\leq} [S]$ ve tersine $x \notin S$ olsun. Bu durumda $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in S$ vardır. Öyleyse, $x \geq y$ ve $x \in X - S$ olduğundan $y \in \uparrow^{\geq} [X - S]$'dir. Ayrıca $X - S$ kümesi $\geq$-doymuş olduğundan $\uparrow^{\geq} [X - S] \subseteq X - S$'dir. Buradan, $y \in X - S$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $x \in S$ ve böylece S kümesi $\leq$-doymuştur.

(**c**) $x \in \uparrow^{\leq} [S]$ ise, $s \leq x$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Buradan, $x \geq s$ olduğundan $x \in \downarrow_{\geq} [S]$ elde edilir. Ters kapsaması da benzer şekilde gösterilebilir.

(**d**) Öncelikle, $\uparrow^{\leq} [S]$ kümesinin $\leq$-doymuş olduğunu gösterelim:

$x \in \uparrow^{\leq} [\uparrow^{\leq} [S]]$ ise, $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in \uparrow^{\leq} [S]$ vardır. $y \in \uparrow^{\leq} [S]$ olduğundan $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in S$ bulunabilir. O halde , $z \leq y \leq x$ ve $\leq$ bağıntısı geçişmeli olduğundan $z \leq x$ ve böylece $x \in \uparrow^{\leq} [S]$'dir. Öyleyse $\uparrow^{\leq} [S]$ kümesi $\leq$-doymuştur.

Şimdi, $S \subseteq D$ ve D kümesi $\leq$-doymuş olsun. Eğer $\uparrow^{\leq} [S] \subseteq \uparrow^{\leq} [D]$ olduğu gösterilirse $\uparrow^{\leq} [S] \subseteq \uparrow^{\leq} [D] \subseteq D$ olduğundan $\uparrow^{\leq} [S]$'nin S'yi kapsayan en küçük $\leq$-doymuş küme olduğu söylenebilir. Bunun için, $x \in \uparrow^{\leq} [S]$ olsun. Bu durumda $s \leq x$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır ve $S \subseteq D$ olduğundan $s \in D$'dir. Öyleyse buradan $x \in \uparrow^{\leq} [D]$ elde edilir.

(**e**) (a)'dan kolayca görülebilir.

(**f**) $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ birer önsıralı küme, $f : X \longrightarrow Y$ sıra koruyan bir fonksiyon ve $S \subseteq Y$ kümesi $\leq$-doymuş olsun. $x \in \uparrow^{\leq} [f^{-1}(S)]$ ise, $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in f^{-1}(S)$ vardır. Buradan, f sıra koruyan bir fonksiyon olduğundan $f(y) \leq f(x)$'dir. Öyleyse $f(y) \in S$ olduğundan $f(x) \in \uparrow^{\leq} [S] \subseteq S$'dir ve böylece $x \in f^{-1}[S]$ elde edilir. O halde $f^{-1}[S]$ $\leq$-doymuş bir kümedir. ■

Önerme 3.3.9. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere bu uzaydaki kapalı kümeler $\geq_{\mathcal{T}}$-doymuştur.

Kanıt: $C \subseteq X$ kümesi kapalı ve $x \in \uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}} [C]$ olsun. Bu durumda, $c \geq_{\mathcal{T}} x$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır. Buradan, $x \in kap^{\mathcal{T}}(c) \subseteq kap^{\mathcal{T}} C = C$ olduğundan $x \in C$ ve böylece C kümesi $\geq_{\mathcal{T}}$-doymuştur. ■

Sonuç 3.3.10. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere bu uzaydaki açık kümeler $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuştur.

Kanıt: Önerme 3.3.8 (b) ve Önerme 3.3.9'den kolayca görülebilir. ■

Önerme 3.3.11. $(X, \mathcal{T})$ bir T_1 uzayı olmak üzere her $A \subseteq X$ kümesi $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuştur.

Kanıt: $x \in \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [A]$ ise, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ olacak şekilde bir $y \in A$ vardır. Buradan, $y \in kap^{\mathcal{T}}(x) = \{x\}$ olduğundan $x \in A$'dır. O halde A kümesi $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuştur. ■

Şimdi bir X kümesi üzerindeki bir $\leq$ önsıralama ile iki yeni topoloji tanımlanarak bu topolojiler yardımıyla $BD(\mathfrak{X})$ ikili topolojik uzayı ikişer zayıf simetrik olacak şekilde iki topolojik dual elde edilebileceği gösterilecektir.

Tanım 3.3.12. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\leq$ ikili bağıntısı X üzerinde bir önsıralama olsun. Bu durumda;

(a) Kapalı kümeleri $\mathcal{S} = \{\downarrow_{\leq} (x) : x \in X\} = \{\{y \in X : y \leq x\} : x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen topoloji $W(\leq)$ biçiminde gösterilecektir.

(b) $\{S \subseteq X : S \ \leq$ -doymuştur$\}$ ailesi, Önerme 3.3.8 ile X üzerinde bir topolojidir ve bu topoloji $A(\leq)$ biçiminde gösterilecektir.

Önerme 3.3.13. Özellendirme sıralaması $\leq$ olan en zayıf topoloji $W(\leq)$, en ince topoloji $A(\leq)$'dir.

Kanıt:

• $W(\leq)$'in tanımından $\forall x \in X$ için $kap^{W(\leq)}(x) = \bigcap\{\downarrow_{\leq} (y) : x \in \downarrow_{\leq} (y)\} = \downarrow_{\leq} (x)$ olduğu açıktır. Şimdi bu bilgiyi kullanarak $W(\leq)$'in özellendirme sıralamasının $\leq$ olduğunu göstermek için $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda,

$x \leq_{W(\leq)} y \Leftrightarrow x \in kap^{W(\leq)}(y) \Leftrightarrow x \in \downarrow_{\leq} (y) \Leftrightarrow x \leq y$ olduğundan $\leq_{W(\leq)} = \leq$'dir.

$\mathcal{T}$, X üzerinde özellendirmesi $\leq$ olan, $W(\leq)$'den daha zayıf bir topoloji olsun. Bu durumda $\downarrow_{\leq} (x)$, $\mathcal{T}$ topolojisine göre kapalı olmayacak şekilde bir $x \in X$ vardır. O halde, $kap^{\mathcal{T}}(\downarrow_{\leq} (x)) \neq \downarrow_{\leq} (x)$'dir ve böylece $y \in kap^{\mathcal{T}}(\downarrow_{\leq} (x))$ ve $y \notin \downarrow_{\leq} (x)$ olacak şekilde bir $y \in X$ bulunabilir. Buradan, her $s \in \downarrow_{\leq} (x)$ için $y \in kap^{\mathcal{T}}(s)$ dir ve $\leq_{\mathcal{T}} = \leq$ olduğundan $y \leq s$ elde edilir. $y \leq s \leq x$ ve $\leq$ bağıntısı geçişme özelliğini sağladığından $y \leq x$ dir ancak bu, $y \notin \downarrow_{\leq} (x)$ olması ile çelişir. O halde özellendirmesi $\leq$ olan en zayıf topoloji $W(\leq)$'dir.

• Öncelikle $\forall x \in X$ için $\uparrow^{\leq} (x)$ kümesi $A(\leq)$ topolojisine göre açıktır ve Önerme 3.3.8 (d)'den x'i kapsayan en küçük açık kümedir. Şimdi bunu kullanarak $A(\leq)$'in özellendirme sıralamasının $\leq$ olduğunu göstermek için $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda,

$x \leq_{A(\leq)} y \Leftrightarrow x \in kap^{A(\leq)}(y) \Leftrightarrow y \in \uparrow^{\leq} (x) \Leftrightarrow x \leq y$ olduğundan $\leq_{A(\leq)} = \leq$'dir.

Şimdi $\mathcal{T}$, X üzerinde özellendirmesi $\leq$ olan, $A(\leq)$'den daha ince bir topoloji olsun. Bu durumda $\uparrow^{\leq}(x) \nsubseteq T$ olacak şekilde bir $x \in T \in \mathcal{T}$ vardır. $y \in \uparrow^{\leq}(x) - T$ alınırsa, $x \leq y$ ve $x \notin kap^{\mathcal{T}}(y)$ yani, $x \leq y$ ve $x \nleq_{\mathcal{T}} y$ elde edilir. Fakat bu durum $\mathcal{T}$'nun özellendirmesinin $\leq$ olması ile çelişir. O halde özellendirmesi $\leq$ olan en ince topoloji $A(\leq)$'dir. ■

Önerme 3.3.14. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T}^W = W(\geq_{\mathcal{T}})$ ve $\mathcal{T}^A = A(\geq_{\mathcal{T}})$ olmak üzere $W(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}^W)$ ve $A(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}^A)$ topolojik uzayları $\mathcal{T}$ için birer topolojik dualdir.

Kanıt: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere, $(X, \mathcal{T}^W)$ ve $(X, \mathcal{T}^A)$ uzaylarının $\mathcal{T}$ için birer dual olduklarını göstermek için, Tanım 3.3.1'deki koşulları sağladıklarını gösterelim:

Öncelikle $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^A$ ve $\mathcal{T}^W$ topolojileri aynı küme üzerinde tanımlı olduklarından (d1) koşulu sağlanır. Önerme 3.3.13'den $\leq_{(\mathcal{T}^A)^A} = \geq_{\mathcal{T}^A}$ ve $\leq_{(\mathcal{T}^W)^W} = \geq_{\mathcal{T}^W}$ eşitlikleri vardır. Böylelikle $\leq_{((\mathcal{T}^A)^A)^A} = \geq_{(\mathcal{T}^A)^A} = \leq_{\mathcal{T}^A}$ ve $\leq_{((\mathcal{T}^W)^W)^W} = \geq_{(\mathcal{T}^W)^W} = \leq_{\mathcal{T}^W}$ sağlanır. Öyleyse, Tanım 3.3.12'den $((\mathcal{T}^A)^A)^A = \mathcal{T}^A$ ve $((\mathcal{T}^W)^W)^W = \mathcal{T}^W$'dir ki bu, (d2) koşulunun sağlandığı anlamına gelir. ■

Tanım 3.3.15. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere, $(X, \mathcal{T}^W)$ ve $(X, \mathcal{T}^A)$ uzayları, sırasıyla, *zayıf dual* ve *Alexandroff dual* olarak adlandırılırlar.

Önerme 3.3.16. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere, $BA(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^A)$ ve $BW(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^W)$ uzayları ikişer zs'dir.

Kanıt: • Öncelikle $\mathcal{T}^A = A(\geq_{\mathcal{T}}) = \{S \subseteq X : S \ \geq_{\mathcal{T}}\text{-doymuştur}\}$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}}(x) = \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}}(x)$ kümesi $A(\geq_{\mathcal{T}})$'ya göre açıktır ve ayrıca x'i bulunduran en küçük açık kümedir. O halde,
$x \in kap^{\mathcal{T}}(y) \Leftrightarrow x \leq_{\mathcal{T}} y \Leftrightarrow x \in \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}}(y) \Leftrightarrow y \in kap^{\mathcal{T}^A}(x)$ olduğundan $BA(\mathfrak{X})$ uzayı ikişer zs'dir.

• $x \in kap^{\mathcal{T}}(y) \Leftrightarrow x \leq_{\mathcal{T}} y \Leftrightarrow y \in \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}}(x) = kap^{\mathcal{T}^W}(x)$ olduğundan $BW(\mathfrak{X})$ uzayı ikişer zs'dir. ■

Önerme 3.3.17. $(X, \mathcal{T})$ bir T_1 uzayı olmak üzere $W(\geq_{\mathcal{T}})$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisidir.

Kanıt: $(X, \mathcal{T})$ bir T_1 uzayı ve $\mathcal{T}^*$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi olsun. Öncelikle, $(X, \mathcal{T})$ uzayı ve X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi T_1 olduğundan bu uzayda tek nokta kümeleri kapalıdır ve böylece, $\forall x \in X$ için $kap^{\mathcal{T}^*}(x) = \{x\} = kap^{\mathcal{T}}(x)$'dir. Buradan,

$$x \leq_{\mathcal{T}^*} y \Leftrightarrow x \in kap^{\mathcal{T}^*}(y) = \{y\} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow y \in kap^{\mathcal{T}}(x) = \{x\} \Leftrightarrow y \leq_{\mathcal{T}} x \Leftrightarrow x \geq_{\mathcal{T}} y$$

ve böylece $\mathcal{T}^*$ topolojisinin özellendirmesi $\geq_{\mathcal{T}}$ yani, $\leq_{\mathcal{T}^*} = \geq_{\mathcal{T}}$'dir. O halde, $W(\geq_{\mathcal{T}})$ topolojisi özellendirmesi $\geq_{\mathcal{T}}$ olan en zayıf topoloji olduğundan $W(\geq_{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{T}^*$ elde edilir. Diğer taraftan $kap^{W(\geq_{\mathcal{T}})}(x) = \downarrow_{\geq_{\mathcal{T}}} (x) = \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} (x) = \{y \in X \; ; \; x \leq_{\mathcal{T}} y\} = \{y \in X \; ; \; x \in kap^{\mathcal{T}}(y) = \{y\}\} = \{x\}$ olduğundan $W(\geq_{\mathcal{T}})$ uzayı T_1'dir. Bir X kümesi üzerindeki T_1 olan en zayıf topoloji sonlu tümleyenler topolojisi olduğundan $\mathcal{T}^* \subseteq W(\geq_{\mathcal{T}})$ sağlanır, yani $\mathcal{T}^* = W(\geq_{\mathcal{T}})$'dir. Öyleyse, $W(\geq_{\mathcal{T}})$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisidir. ∎

Önerme 3.3.18. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere, $A(\geq_{\mathcal{T}})$ topolojisi $\mathcal{T}$-kapalı kümeler tarafından üretilen topolojidir.

Kanıt: Öncelikle, Önerme 3.3.9'den kapalı kümelerin $A(\geq_{\mathcal{T}})$ topolojisinde olduğu söylenebilir. Şimdi, $x \in T \in A(\geq_{\mathcal{T}})$ olsun. $\uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}} (x)$, x'i içeren en küçük açık küme olduğundan $\uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}} (x) \subseteq T$'dir. Diğer taraftan $kap^{\mathcal{T}}(x) = \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (x) = \uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}} (x)$ olduğundan $kap^{\mathcal{T}}(x) \in A(\geq_{\mathcal{T}})$ ve $x \in kap^{\mathcal{T}}(x) \subseteq T$'dir. O halde $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq T$ olacak şekilde, kapalı kümelerden oluşan sonlu bir $\mathcal{F}$ ailesi bulunabilir ve böylece kapalı kümeler $A(\geq_{\mathcal{T}})$ için bir alt tabandır. ∎

Sonuç 3.3.19. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere $\mathfrak{X}$ üzerinde sürekli olan her fonksiyon $BA(\mathfrak{X})$ uzayı üzerinde ikişer süreklidir.

Önerme 3.3.20. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere $BA(\mathfrak{X})$ uzayı normaldir.

Kanıt: $C^A \subseteq X$ $\mathcal{T}^A$-kapalı, $T \in \mathcal{T}$ ve $C^A \subseteq T$ olsun. Bu durumda Önerme 3.3.18'den $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $D_{j,k}$ kümeleri kapalı olmak üzere $X - C^A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{n} D_{j,k}$ biçiminde yazılabilir. O halde,
$C^A = X - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{n} D_{j,k} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X - \bigcap_{j=1}^{n} D_{j,k} \subseteq X - \bigcap_{j=1}^{n} D_{j,k} = \bigcup_{j=1}^{n} (X - D_{j,k}) \in \mathcal{T}$ olur. Öyleyse $U = \bigcup_{j=1}^{n} (X - D_{j,k}) \cap T$ ve $D^A = U$ olmak üzere $C^A \subseteq U \subseteq D^A \subseteq T$ sağlanır. Ayrıca, $U \in \mathcal{T}$ ve Önerme 3.3.18'den U, $\mathcal{T}^A$-kapalıdır. O halde $BA(\mathfrak{X})$ uzayı normaldir. ∎

Tanım 3.3.21. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{K} = \{\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [S] : S \subseteq X \text{ kompakt}\}$ olsun. Bu durumda, kapalı kümeleri $\mathcal{K}$ ailesi tarafından üretilen topolojiye, $\mathcal{T}$'nin *de Groot duali* denir ve $\mathcal{T}^G$ ile gösterilir.

Örnek 3.3.22. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi, $\mathcal{T}_s$ standart topoloji ile göz önüne alınsın. Öncelikle bu uzay T_1 olduğundan Önerme 3.3.11'dan $\mathbb{R}$'nin her alt kümesi doymuştur. Ayrıca, $K \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olması olduğundan $\mathcal{S} = \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ kümesi kapalı ve sınırlıdır}\}$ ailesi $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler için bir alt tabandır. Bu aile sonlu birleşim ve keyfi arakesit altında kapalı olduğundan $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler ailesi $\mathcal{S}$'ye eşittir.

Önerme 3.3.23. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere

$$\mathcal{SK} = \{\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K] : K \subseteq X \text{ kompakt}\}$$

ailesi $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler için bir tabandır.

Kanıt: Kompakt kümelerin sonlu birleşimleri kompakt ve Önerme 3.3.8 (a)'dan $\leq_\mathcal{T}$-doymuş kümelerin sonlu birleşimleri $\leq_\mathcal{T}$-doymuş olduğundan $\mathcal{SK}$ sonlu birleşim altında kapalıdır. O halde $\mathcal{SK}$ ailesi $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler için bir tabandır. ∎

NOT 3.3.24. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere, Sonuç 3.3.10 gereği, açık kümeler $\leq_\mathcal{T}$-doymuş olduğundan, bu uzaydaki her $K \subseteq X$ kompakt kümesi için $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K]$ kümesi de kompakttır. Gerçekten, $\{G_\alpha \,;\, \alpha \in \Lambda\}$ ailesi $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K]$'nın bir açık örtüsü olmak üzere, $K \subseteq \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K] \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ ve K kümesi kompakt olduğundan bu örtünün $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ olacak şekilde sonlu bir alt örtüsü vardır. Buradan,

$$\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K] \subseteq \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}] = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [G_{\alpha_i}] = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

elde edilir ve böylece $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K]$ kümesi kompakttır. O halde $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler için taban olarak,

$$\{K : K \subseteq X \text{ kompakt ve doymuştur.}\}$$

ailesi de kullanılabilir.

Tanım 3.3.25. $(X, \mathcal{T})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ birer topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\mathcal{V}$-kompakt ve $\leq_\mathcal{V}$-doymuş her $K \subseteq Y$ kümesi için

$$f^{-1}(K) = \bigcap \{L \subseteq X : f^{-1}(K) \subseteq L,\ \ L \ \mathcal{T}\text{-kompakt ve } \leq_\mathcal{T} \text{-doymuş}\}$$

oluyorsa f fonksiyonu *de Groottur* denir.

Önerme 3.3.26. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda;

(a) $\mathcal{T}^W \subseteq \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^A$ olacak şekilde bir $\mathcal{T}^*$ topolojisi için, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı ikişer zs'dir.

(b) $\mathcal{T}^W \subseteq \mathcal{T}^G \subseteq \mathcal{T}^A$ sağlanır ve böylece $BG(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ uzayı ikişer zs'dir.

Kanıt:
(**a**) Öncelikle Önerme 3.3.8 (b) ve (d)'den $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x)$ kümesi $\leq_\mathcal{T}$-doymuş olduğundan $\mathcal{T}^A$-kapalıdır ve x'i kapsayan en küçük $\mathcal{T}^A$-kapalı küme olduğundan $kap^{\mathcal{T}^A}(x) = \uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x)$ dir. O halde

$$\uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x) = kap^{\mathcal{T}^A}(x) \subseteq kap^{\mathcal{T}^*}(x) \subseteq kap^{\mathcal{T}^W}(x) = \uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x)$$

sağlanır ve böylece $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı da ikişer zs'dir.
(**b**) Öncelikle, $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x)$ kümesi $\{x\}$ kompakt kümesinin $\leq$-doyumu olduğundan $\mathcal{T}^G$-kapalıdır ve Önerme 3.3.8'den x'i içeren en küçük $\mathcal{T}^G$-kapalı küme olduğundan $kap^{\mathcal{T}^G}(x) = \uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(x)$'dir. Öyleyse,

$$x \leq_{\mathcal{T}^G} y \Leftrightarrow x \in kap^{\mathcal{T}^G}(y) = \uparrow^{\leq_\mathcal{T}}(y) \Leftrightarrow y \leq_\mathcal{T} x \Leftrightarrow x \geq_\mathcal{T} y$$

sağlandığından $\mathcal{T}^G$'nin özellendirmesinin $\geq_\mathcal{T}$ olduğu söylenebilir. O halde, özellendirmesi $\geq_\mathcal{T}$ olan en kaba topoloji $\mathcal{T}^W$, en ince topoloji $\mathcal{T}^A$ olduğundan $\mathcal{T}^W \subseteq \mathcal{T}^G \subseteq \mathcal{T}^A$ sağlanır. Böylece, (a)'dan $BG(\mathfrak{X})$ uzayı ikişer zs'dir. ■

Önerme 3.3.27. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ olsun.

(a) $\mathfrak{X}$ uzayı kompakt Hausdorff ise, $\mathcal{T}^G = \mathcal{T}$'dir.

(b) $\mathcal{T}$ sonlu tümleyenler topolojisi ise, $\mathcal{T}^G$, X üzerinde ayrık topolojidir.

(c) $\mathcal{T}$ ayrık topoloji ise, $\mathcal{T}^G$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisidir.

Kanıt: (**a**) Öncelikle, $\mathfrak{X}$ uzayı Hausdorff olduğundan T_1'dir ve böylece Önerme 3.3.11'dan X'in her alt kümesi $\leq_\mathcal{T}$-doymuştur. Şimdi X üzerinde tanımlı bu iki topolojinin birbirine eşit olduğunu gösterelim:

$T \in \mathcal{T}^G$ ise, her $i \in I$ için T_i'ler kompakt kümeler olmak üzere $X - T = \bigcap_{i \in I} T_i$ biçiminde yazılabilir. $\mathfrak{X}$ uzayı Hausdorff olduğundan her bir T_i kapalıdır ve böylece $T = X - \bigcap_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I}(X - T_i) \in \mathcal{T}$ elde edilir. Ters kapsama için, $T \in \mathcal{T}$ olmak

üzere, kompakt bir uzayın kapalı alt kümeleri kompakt olduğundan $X - T$ kompakttır. $\mathfrak{X}$ uzayı T_1 olduğundan $X - T$ kümesi $\mathcal{T}^G$-kapalı ve böylece $T \in \mathcal{T}^G$'dir.
(**b**) $A \subseteq X$ verilsin. $\mathcal{T}$ sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere, bu topolojiye göre $A \subseteq X$ kompakttır. Ayrıca $\mathfrak{X}$ uzayı T_1 olduğundan $A \subseteq X$ $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuştur. O halde her $A \subseteq X$ kümesi $\mathcal{T}^G$-kapalı olur ki, bu $\mathcal{T}^G$'nin X üzerinde ayrık topoloji olması demektir.
(**c**) $\mathcal{T}$ ayrık topoloji olmak üzere, $\mathfrak{X}$ uzayının tüm sonlu alt kümeleri kompakttır. Ayrıca $\mathfrak{X}$ uzayı T_1 olduğundan X'in her alt kümesi $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuştur. Öyleyse,
$\mathcal{S} = \{A \subseteq X : A \text{ kümesi sonludur}\} \cup \{X\}$ ailesi $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler için bir alt tabandır. O halde bu aile sonlu birleşim ve keyfi arakesit altında kapalı olduğundan $\mathcal{T}^G$-kapalı kümeler ailesi $\mathcal{S}$'ye eşittir ve böylece $\mathcal{T}^G$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisidir. ■

Tanım 3.3.28. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ olmak üzere $\mathcal{G}$ ailesi

$$\mathcal{G} = \{\mathfrak{X} : BG(\mathfrak{X}) \text{ ve } BG(G(\mathfrak{X})) \text{ pH'dir}\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Önerme 3.3.29. $\mathcal{G}_Q$, Tanım 3.3.4 (b)'deki DQ notasyonunun özel bir hali olmak üzere $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{pH}$'dir.

Kanıt: $\mathfrak{X} \in \mathcal{G}_{pH}$ olmak üzere, $BG(\mathfrak{X})$ pH ve $BG(G(\mathfrak{X}))$ ikişer pH olduğundan $\mathfrak{X} \in \mathcal{G}$'dir.

Ters kapsama için, $\mathfrak{X} \in \mathcal{G}$ ise, $BG(\mathfrak{X})$ ve $BG(G(\mathfrak{X}))$ pH'dır. Ayrıca $BG(G(\mathfrak{X}))$ ikişer zs olduğundan, Önerme 3.2.8 (b) ile ikişer pH ve böylece $\mathfrak{X} \in \mathcal{G}_{pH}$'dir. ■

4 ORTAK VE SKEW KOMPAKT UZAYLAR

4.1 ORTAK KOMPAKT UZAYLAR

Bu kesimde [6] nolu kaynaktan yararlanılarak ikili topolojik uzaylarda kompaktlık incelenecektir. Topolojik uzayların, "herhangi bir kompakt kümenin her kapalı alt kümesi kompakttır" ve "Hausdorff bir uzayın kompakt alt kümeleri kapalıdır" gibi kullanışlı özellikleri vardır. İkili topolojik uzaylarda, bu iki kullanışlı özelliği inceleyebilmek için, kompakt, *-kompakt, kapalı, *-kapalı gibi özellikler göz önünde bulundurulacaktır.

Teorem 4.1.1. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay olsun. Eğer $\mathcal{X}$ pH ise, her K^* *-kompakt kümesi için,

$$kap(K^*) = \bigcup\{kap(y) : y \in K^*\} = \downarrow_{\mathcal{T}} [K^*]$$

sağlanır. Böylece $\mathcal{X}$ pH ise, *-kompakt bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin $\leq_{\mathcal{T}}$-aşağı bir küme olmasıdır.

Ayrıca, $\mathcal{X}$ ikişer pH ise, *-kompakt kümelerin kapanışları da *-kompakttır.

Kanıt: $\mathcal{X}$ uzayı pH, K^* *-kompakt ve $C = \downarrow_{\mathcal{T}} [K^*]$ olsun. Öncelikle, $C = \bigcup\{kap(y) : y \in K^*\}$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} z \in \bigcup\{kap(y) : y \in K^*\} &\Leftrightarrow \exists y \in K^* \,;\, z \in kap(y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in K^* \,;\, z \leq_{\mathcal{T}} y \\ &\Leftrightarrow z \in \downarrow_{\mathcal{T}} [K^*] = C \end{aligned}$$

O halde $kap(K^*) \supseteq \bigcup\{kap(y) : y \in K^*\} = C$ sağlanır.

Ters kapsamayı göstermek için, $x \notin C$ alınırsa, $\forall y \in K^*$ için $x \nleq_{\mathcal{T}} y$, yani $x \notin kap(y)$ olur. Öyleyse $\mathcal{X}$ pH olduğundan $x \in T_y$, $y \in {T_y}^*$, $T_y \cap {T_y}^* = \emptyset$ olacak şekilde $T_y \in \mathcal{T}$ ve ${T_y}^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri vardır. $\{{T_y}^* : y \in K^*\}$ ailesi K^* kümesinin bir *-açık örtüsü ve K^* *-kompakt olduğundan, $K^* \subseteq {T_{y_1}}^* \cup {T_{y_2}}^* \cup \ldots \cup {T_{y_n}}^*$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K^*$ vardır. Bu durumda, $x \in \bigcap_{i=1}^n T_{y_i} \in \mathcal{T}$ ve $(\bigcap_{i=1}^n T_{y_i}) \cap K^* = \emptyset$ olup $x \notin kap(K^*)$, yani $kap(K^*) \subseteq C$'dir.

K^* kapalıdır $\Leftrightarrow K^* = kap(K^*) = \downarrow_{\mathcal{T}} [K^*] \Leftrightarrow K^*$, $\leq_{\mathcal{T}}$-aşağı bir kümedir. Teoremin son kısmı için, $\mathcal{X}$ uzayı ikişer pH, K^* *-kompakt ve $\mathcal{S}^*$ ailesi $kap(K^*)$ kümesinin bir *-açık örtüsü olsun. $\mathcal{S}^*$ aynı zamanda K^* kümesinin de bir *-açık örtüsüdür ve K^* *-kompakt olduğundan $K^* \subseteq {T_1}^* \cup {T_2}^* \cup \ldots \cup {T_n}^*$ olacak şekilde ${T_1}^*, {T_2}^*, \ldots, {T_n}^* \in \mathcal{S}^*$ vardır. Ayrıca, $\mathcal{X}$ pH^* olduğundan Teorem 3.2.21 (a)'dan $\mathcal{X}$ zs^*'dir. O halde, her

$y \in K^*$ için $y \in {T_1}^* \cup {T_2}^* \cup \ldots \cup {T_n}^* \in \mathcal{T}^*$ olduğundan Önerme 3.2.8 (a)'dan her $y \in K^*$ için $kap(y) \subseteq {T_1}^* \cup {T_2}^* \cup \ldots \cup {T_n}^* \in \mathcal{T}^*$ dir. Buradan,

$$\text{kap}(K^*) = \bigcup\{\text{kap}(y) : y \in K^*\} \subseteq {T_1}^* \cup {T_2}^* \cup \ldots \cup {T_n}^*$$

olduğundan $kap(K^*)$ *-kompakttır. ■

Sonuç 4.1.2. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı pH^* ve K kompakt bir küme olsun. Bu durumda K'nın *-kapalı olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin $\leq_{\mathcal{T}^*}$'a göre bir aşağı küme olmasıdır.

Tanım 4.1.3. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzay olsun.

(a) X kümesinin *-kapalı özalt kümeleri kompaktsa $\mathcal{X}$ uzayına *dengeli* denir.

(b) X kümesinin her noktasının her komşuluğu, *-kapalı ve kompakt bir komşuluğu içeriyorsa $\mathcal{X}$ uzayına *yerel dengeli* denir.

(c) $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompaktsa $\mathcal{X}$ uzayına *kompakt* denir.

(d) $(X, \mathcal{T}^*)$ uzayı kompaktsa $\mathcal{X}$ uzayına **-kompakt* denir.

(e) X kümesinin her noktasının her komşuluğu, kompakt bir komşuluğu içeriyorsa $\mathcal{X}$ uzayına *yerel kompakt* denir.

Tanım 4.1.4. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayı ikişer kompakt, ikişer dengeli ve ikişer T_2 ise, $\mathcal{X}$ uzayına *ortak kompakt* denir.

Örnekler 4.1.5. **(a)** $\mathbb{I} = ([0,1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ ikili topolojik uzayı ortak kompakttır.

- $\mathbb{I}^s = ([0,1], \mathcal{T}_s)$ uzayı kompakt ve $\mathcal{U}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}_s$ olduğundan $([0,1], \mathcal{U})$ ve $([0,1], \mathcal{L})$ uzayları da kompakttır. O halde $\mathbb{I}$ uzayı ikişer kompakttır.
- $K, L \subsetneq I = [0,1]$ kümeleri sırasıyla $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{L}$ topolojilerine göre kapalı kümeler olsunlar. $\mathcal{U}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}_s$ olduğundan bu kümeler $\mathcal{T}_s$ topolojisine göre de kapalıdırlar. Ayrıca, $([0,1], \mathcal{T}_s)$ uzayı Hausdorff olduğundan bu kümeler bu uzayda kompakttırlar. O halde K ve L kümeleri her bir alt uzayda kompakttırlar ve böylece $\mathbb{I}$ uzayı ikişer dengelidir.
- Örnek 3.2.5'den $\mathbb{I}$ uzayı ikişer T_2'dir.

(b) $(X, \mathcal{T})$ kompakt Hausdorff bir uzay ise, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ uzayı ortak kompakttır.

(c) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı zs ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer $Y \subseteq kap^*(x)$ olacak şekilde bir $x \in Y$ varsa, Y kompakttır.

Gerçekten, eğer $\mathcal{S}$ ailesi Y'nin bir açık örtüsü ise, $x \in Y$ olduğunda $x \in T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{S}$ vardır. Bu durumda, Önerme 3.2.8 (a)'dan $Y \subseteq kap^*(x) \subseteq T$'dir. O halde $\{T\}$, $\mathcal{S}$'nin Y'yi örten sonlu bir alt örtüsüdür ve böylece $Y \subseteq X$ kompakttır.

Yardımcı Teorem 4.1.6 (Alexander alt taban teoremi)**.** [13] $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$ ailesi bu uzay için bir alt taban olsun. Eğer X uzayının $\mathcal{S}$'nin elemanlarından oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayı kompakttır.

Önerme 4.1.7. **(a)** $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayının dengeli (kompakt) olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} - \{\emptyset\}$ boştan farklı, $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}^* - \{\emptyset\}$ boştan farklı (boş) ve $X = \bigcup\{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*\}$ ise, $X = \bigcup\{\mathcal{F} \cup \mathcal{S}^*\}$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ alt ailesinin olmasıdır.

(b) $\mathcal{X}$ uzayı için aşağıdakiler denktir:

(i) $\mathcal{X}$ ikişer dengeli ve ikişer kompakttır.

(ii) X kümesi $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$-kompakttır.

(iii) $\mathcal{X}^s$ kompakttır.

(c) $\mathcal{X}$ uzayı dengeli , $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$ ve $\mathcal{T}^* \supseteq \mathcal{T}^{*\prime}$ ise, $(X, \mathcal{T}', \mathcal{T}^{*\prime})$ uzayı da dengelidir.

(d) $\mathcal{X}$ uzayı dengeli, zs^* ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayı pH ise, $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$'dır. Böylece verilen bir $(X, \mathcal{T})$ uzayı için $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ortak kompakt olacak şekilde bir $\mathcal{T}^*$ topolojisi varsa, bu topoloji tektir ve bu durumda *-kapalı kümeler kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı kümeler olur.

Kanıt: (a) $(\Rightarrow)$ $\mathcal{X}$ uzayı dengeli, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} - \{\emptyset\}$, $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}^* - \{\emptyset\}$ aileleri boştan farklı ve $X = \bigcup\{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*\}$ olsun. $K^* = X - \bigcup \mathcal{S}^* = \bigcup \mathcal{S}$ olmak üzere, $\mathcal{X}$ uzayı dengeli ve K^* *-kapalı bir özalt küme olduğundan K^* kompakttır. O halde $K^* = X - \bigcup \mathcal{S}^* = \bigcup \mathcal{F}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ sonlu alt ailesi vardır. Öyleyse buradan $X = \bigcup\{\mathcal{F} \cup \mathcal{S}^*\}$ elde edilir.

$\mathcal{X}$ uzayı kompakt, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} - \{\emptyset\}$, $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}^* - \{\emptyset\}$ boş ve $X = \bigcup\{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*\}$ olması durumu, kompaktlığın tanımından açıktır.

($\Leftarrow$) $K^* \subsetneq X$ kümesi *-kapalı ve $\mathcal{S}$ bu kümenin bir açık örtüsü olsun. $\mathcal{S}^* = \{X - K^*\}$ ise açıkça, $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}^* - \{\emptyset\}$'dir. Ayrıca, $X = K^* \cup (X - K^*) \subseteq \bigcup\{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*\}$ olduğundan, varsayımdan $X = \bigcup\{\mathcal{F} \cup \mathcal{S}^*\}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ sonlu alt ailesi vardır ve böylece K^* kompakttır.

(**b**) (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) $\mathcal{G}$ ailesi, X'in $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ ailesinin elemanlarından oluşan bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{G} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ olacak şekilde $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}^*$ alt aileleri vardır.

• $\mathcal{S} = \emptyset$ ise, $\mathcal{X}$ *-kompakt olduğundan, $X = \bigcup \mathcal{F}^*$ olacak şekilde $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{S}^*$ sonlu alt ailesi vardır.

• $\mathcal{S}^* = \emptyset$ ise, $\mathcal{X}$ kompakt olduğundan, $X = \bigcup \mathcal{F}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ sonlu alt ailesi vardır.

• $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{S}^* \neq \emptyset$ ise, $\mathcal{X}$ ikişer dengeli olduğundan, (a) gereği $X = \bigcup\{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*\}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ ve $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{S}^*$ sonlu alt aileleri vardır.

O halde X uzayı $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$- kompakttır.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^*$ ailesi $\mathcal{X}^s$ uzayı için bir alt taban olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.6'den $\mathcal{X}^s$ kompakttır.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) $\mathcal{X}^s$ uzayı kompakt olsun. Öncelikle $\mathcal{T}, \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan $\mathcal{X}$ uzayı kompakt ve *-kompakt, dolayısıyla ikişer kompakttır.

$\mathcal{X}$ uzayının dengeli olduğunu göstermek için $K^* \subsetneq X$ *-kapalı kümesi alınsın. $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan K^* kümesi $\mathcal{T}^s$ topolojisine göre kapalıdır. O halde $\mathcal{X}^s$ kompakt olduğundan K^* kümesi $\mathcal{T}^s$ topolojisine göre kompakttır. Ayrıca, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan K^* kompakttır.

$\mathcal{X}$ uzayının *-dengeli olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Öyleyse $\mathcal{X}$ ikişer dengelidir.

(**c**) $\mathcal{X}$ uzayı dengeli , $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$ ve $\mathcal{T}^* \supseteq \mathcal{T}^{*\prime}$ ve $K' \subsetneq X$ kümesi $\mathcal{T}^{*\prime}$ topolojisine göre kapalı olsun. $\mathcal{T}^* \supseteq \mathcal{T}^{*\prime}$ olduğundan K' *-kapalıdır ve $\mathcal{X}$ dengeli olduğundan K' kompakttır. Ayrıca, $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$ olduğundan K' kümesi $\mathcal{T}'$ topolojisine göre de kompakttır. O halde $(X, \mathcal{T}', \mathcal{T}^{*\prime})$ uzayı dengelidir.

(**d**) $\mathcal{X}$ uzayı dengeli, zs^* ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayı pH olsun. Öncelikle $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$ olduğunu gösterelim:

$x \in T^* \in \mathcal{T}^*$ ise, $\mathcal{X}$ zs^* olduğundan Önerme 3.2.8 gereği $kap(x) \subseteq T^*$'dır.
$y \in X - T^*$ olmak üzere $y \notin kap(x)$ ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ pH olduğundan $x \in {T_y}^+$, $y \in T_y$, $T_y \cap {T_y}^+ = \emptyset$ olacak şekilde ${T_y}^+ \in \mathcal{T}^+$ ve $T_y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $X - T^* \subsetneq X$ alt kümesi

*-kapalı ve $\mathcal{X}$ dengeli olduğundan $X - T^*$ kompakttır. Bu durumda, $\{T_y : y \in X - T^*\}$ ailesi $X - T^*$ kümesinin bir açık örtüsü olduğundan $X - T^* \subseteq T_{y_1} \cup T_{y_2} \cup \ldots \cup T_{y_n}$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X - T^*$ vardır. O halde,
$x \in {T_{y_1}}^+ \cap \ldots \cap {T_{y_n}}^+ \in \mathcal{T}^+$ ve $({T_{y_1}}^+ \cap \ldots \cap {T_{y_n}}^+) \cap (T_{y_1} \cup \ldots \cup T_{y_n}) = \emptyset$'dir ve buradan, $x \in {T_{y_1}}^+ \cap \ldots \cap {T_{y_n}}^+ \subseteq T^*$ elde edilir. Öyleyse $T^* \in \mathcal{T}^+$'dır.

Şimdi, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ uzayları ortak kompakt olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ dengeli, zs^* ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ pH olduğundan $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}^+$'dır. Ayrıca, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ dengeli, zs^+ ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ pH olduğundan $\mathcal{T}^+ \subseteq \mathcal{T}^*$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^+$'dır.

O halde $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ortak kompakt olacak şekilde bir $\mathcal{T}^*$ topolojisi varsa, tektir.

Son olarak, $\mathcal{X}$ ortak kompakt uzayında *-kapalı kümelerin kompakt $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı kümeler olduğunu gösterelim: $K^* \subseteq X$ kümesi *-kapalı olsun. $K^* = X$ ise, $\mathcal{X}$ ortak kompakt olduğundan K^* kompakttır. $K^* \neq X$ ise, $\mathcal{X}$ dengeli olduğundan K^* kompakttır. Ayrıca, $\mathcal{X}$ zs^* olduğundan K^*, $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı kümedir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
y \in \uparrow^{\mathcal{T}} [K^*] &\Rightarrow \exists x \in K^* \,;\ x \leq_{\mathcal{T}} y \\
&\Rightarrow \exists x \in K^* \,;\ x \in kap(y) \\
&\Rightarrow \exists x \in K^* \,;\ y \in kap^*(x) \subseteq kap^*(K^*) = K^*
\end{aligned}
$$

olduğundan $\uparrow^{\mathcal{T}} [K^*] \subseteq K^*$ dir. ■

Önerme 4.1.8. **(a)** $\mathcal{X}$ uzayı zs^* olsun. Bu durumda, $\mathcal{X}$'in yerel dengeli olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{X}$'in regüler ve yerel kompakt olmasıdır.

(b) Her regüler dengeli uzay yerel dengelidir.

Kanıt: (a) $\mathcal{X}$ uzayı zs^* olsun.

($\Rightarrow$) $\mathcal{X}$ yerel dengeli ise tanımlardan yerel kompakt olduğu açıktır. $\mathcal{X}$'in regüler olduğunu göstermek için $x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{X}$ yerel dengeli olduğundan x noktasının $D^* \subseteq T$ olacak şekilde kompakt,*-kapalı bir D^* komşuluğu vardır. Ayrıca D^* x'in bir komşuluğu olduğundan $x \in U \subseteq D^* \subseteq T$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ vardır. O halde $\mathcal{X}$ regülerdir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{X}$ uzayı yerel kompakt, regüler ve $x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{X}$ yerel kompakt olduğundan $x \in U \subseteq K \subseteq T$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve K kompakt kümeleri vardır. Ayrıca, $\mathcal{X}$ regüler olduğundan Teorem 3.2.21 (a)'dan pH ve pH+zs^* olduğundan Önerme 3.2.8 (b)'den pH^* dır. Böylece Teorem 4.1.1'den $kap^*(K) = \bigcup\{kap^*(x) : x \in K\}$ kompakttır. Ayrıca, $\mathcal{X}$ pH olduğundan zs olduğu için Önerme 3.2.8 (a)'dan her $x \in K$ için $kap^*(x) \subseteq T$ olup, $x \in U \subseteq kap^*(K) \subseteq T$ sağlanır. O halde $\mathcal{X}$ uzayı yerel dengelidir.

(**b**) $\mathcal{X}$ regüler, dengeli ve $V \neq X$ x'in bir açık komşuluğu olsun. $x \in T \in \mathcal{T}$ ise, $\mathcal{X}$ regüler olduğundan $x \in U \subseteq C^* \subseteq V \cap T$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve C^* *-kapalı kümeleri vardır. Ayrıca, $C^* \neq X$ ve $\mathcal{X}$ dengeli olduğundan C^* kompakttır. Öyleyse, $C^* \subseteq T$ ve C^* kompakt olduğundan $\mathcal{X}$ yerel dengelidir.

Şimdi, x noktasının tek komşuluğunun X kümesi olması durumunda da $\mathcal{X}$'in yerel dengeli olduğunu gösterelim. Öncelikle X'in *-kapalı olduğunu biliyoruz. O halde X'in kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, $\mathcal{S}$ ailesi X'in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, $x \in T$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{S}$ vardır ve açıkça $T = X$ olmalıdır. Yani $\{T\}$, $\mathcal{S}$'nin X'i örten sonlu bir alt örtüsüdür ve böylece X kompakttır. ■

İkili topolojik uzaylardaki iki topolojiyi birbirine bağlayan özellik dengeliliktir. O halde ayırma aksiyomları ile dengelilik arasında da ilişkiler olmalıdır. Şimdi bu ilişkiler incelenecektir.

Teorem 4.1.9. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ ikili topolojik uzaylar olsun. Bu durumda,

(a) $\mathcal{X}$ *-dengeli ve pH ise, regülerdir.

(b) $\mathcal{X}$ uzayı yerel dengeli ise,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{(A, B) : kap^*(A) \text{ kompakt ve } kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)\}$$

ailesi $\mathcal{X}$ ile uyumlu bir Urysohn ailedir. Böylece $\mathcal{X}$ dengeli ve regüler ise, normaldir ve $\mathcal{X}$ yerel dengeli ise, tamamen regülerdir.

(c) $\mathcal{X}$ ikişer dengeli, pH (ya da özel olarak ortak kompakt) ise, normaldir.

(d) $\mathcal{X}$ *-dengeli (ya da özel olarak ortak kompakt) $\mathcal{Y}$ Hausdorff ve $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ birebir örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda f'nin bir homeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $f(kap(x)) \supseteq kap(f(x))$ olmasıdır.

Kanıt: (**a**) $\mathcal{X}$ *-dengeli, pH ve $x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. Her $y \in X - T$ için $x \notin kap(y)$ ve $\mathcal{X}$ pH olduğundan $x \in U_y$, $y \in {U_y}^*$, $U_y \cap {U_y}^* = \emptyset$ olacak şekilde $U_y \in \mathcal{T}$ ve ${U_y}^* \in \mathcal{T}^*$ kümeleri vardır. Ayrıca, $\mathcal{X}$ *-dengeli olduğundan $X - T$ kümesi *-kompakttır. O halde, $\{{U_y}^* : y \in X - T\}$ ailesi $X - T$'nin bir *-açık örtüsü olduğundan $X - T \subseteq \bigcup_{y \in F} {U_y}^*$ olacak şekilde bir $F \subseteq X - T$ sonlu alt kümesi vardır. Bu durumda, $U = \bigcap\{U_y : y \in F\}$,

$V = \bigcup\{U_y{}^* : y \in F\}$ olmak üzere $x \in U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}^*$ ve $U \cap V = \emptyset$'dir. Buradan, $x \in U \subseteq X - V \subseteq T$ elde edilir ve böylece $\mathcal{X}$ uzayı regülerdir.

(**b**) $\mathcal{X}$ uzayı yerel dengeli olsun. Öncelikle $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$'in bir Urysohn aile olduğunu gösterelim:

(**p1***) $(A, B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ ise, $A \subseteq kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B) \subseteq B$'dir yani $A \subseteq B$ sağlanır.

(**p2***) $(A, B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ ise $kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B)$'dir ve $kap^*(A)$ kompakttır. Şimdi eğer $kap^*(A) \subseteq U$, $D^* \subseteq \text{iç}(B)$ ve $U \subseteq D^*$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$, D^* *-kapalı, kompakt kümeleri bulunabilirse $(A, D^*), (D^*, B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ olacak şekilde bir $D^* \subseteq X$ elde edilmiş olur.

$y \in kap^*(A)$ ise $y \in \text{iç}(B) \in \mathcal{T}$'dir. $\mathcal{X}$ yerel dengeli olduğundan $y \in U_y \subseteq T^* \subseteq \text{iç}(B)$ olacak şekilde $U_y \in \mathcal{T}$ ve *-kapalı, kompakt bir T^* kümesi vardır. Buradan, $kap^*(U_y) \subseteq kap^*(T^*) = T^* \subseteq \text{iç}(B)$ elde edilir. Ayrıca, T^* kümesi kompakt olduğundan, $kap^*(U_y)$ de kompakttır. Bu durumda, $\{U_y : y \in kap^*(A)\}$ ailesi $kap^*(A)$'nın bir açık örtüsüdür ve $kap^*(A)$ kompakt olduğundan $kap^*(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_n \in kap^*(A)$ vardır.

Şimdi, $U = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$ ve $D^* = kap^*(U)$ olarak seçilirse, $U \subseteq D^*$, $U \in \mathcal{T}$ ve D^* *-kapalı, kompakttır. O halde, $(A, D^*), (D^*, B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$'dir.

(**p3***) $(A, B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, $E \subseteq A$ ve $B \subseteq F$ olsun. Bu durumda,
$kap^*(E) \subseteq kap^*(A) \subseteq \text{iç}(B) \subseteq \text{iç}(F)$ ve $kap^*(A)$ kompakt olduğundan $kap^*(E)$ kompakt olacaktır ve dolayısıyla $(E, F) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$'dir.

O halde $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ bir Urysohn ailedir ve $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$'in tanımından $\mathcal{X}$ ile uyumlu olduğu açıktır.

Şimdi, $\mathcal{X}$ dengeli ve regüler ise, Önerme 4.1.8 (b)'den $\mathcal{X}$ yerel dengelidir. Dolayısıyla $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ ile uyumlu bir Urysohn ailedir ve böylece Önerme 3.2.20 (b)'den $\mathcal{X}$ normaldir.

Son olarak, $\mathcal{X}$ yerel dengeli olsun. $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ ile uyumlu olduğundan Önerme 3.2.20 (c)'den $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}_{(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})^*} \subseteq \mathcal{T}^*$ dir. Şimdi eğer, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}}$ olduğu gösterilirse Önerme 3.2.20 (e)'den $\mathcal{X}$'in tamamen regüler olduğu söylenebilir. Bunun için, $x \in G \in \mathcal{T}$ alınırsa, $\mathcal{X}$ yerel dengeli olduğundan $x \in K^* \subseteq G$ olacak şekilde bir K^* *-kapalı, kompakt kümesi vardır. Ayrıca, $(K^*, G) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$'dir çünkü K^* kompakt olduğundan $kap^*(K^*)$ kompakttır ve $kap^*(K^*) = K^* \subseteq G = \text{iç}(G)$ sağlanır. Buradan, $x \in K^*$, $G \subseteq G$ ve $(K^*, G) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ olduğundan $G \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}}$'dir.

(**c**) $\mathcal{X}$ uzayı pH ve ikişer dengeli ise, (a)'dan bu uzay regülerdir. O halde $\mathcal{X}$ dengeli ve regüler olduğundan (b)'den bu uzay normaldir.

(**d**) $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ *-dengeli, $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ Hausdorff ve $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ birebir örten bir fonksiyon olsun.

($\Rightarrow$) f bir homeomorfizma ise, f fonksiyonu kapalı bir fonksiyon olduğundan "$\{x\} \subseteq kap(x) \Rightarrow f(x) \subseteq f(kap(x)) \Rightarrow kap(f(x)) \subseteq kap(f(kap(x))) = f(kap(x))$" sağlanır.

($\Leftarrow$) $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ birebir ve örten olduğundan f'in bir homeomorfizma olduğunu göstermek için f'in kapalı bir fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle, f örten olduğundan $f(X) = Y$'dir ve böylece $f(X)$ kapalıdır.

$C \subsetneq X$ kümesi kapalı ise, $\mathcal{X}$ *-dengeli olduğundan C *-kompakt, aşağı bir kümedir. Bu durumda f *-sürekli olduğundan $f(C)$ kümesi de *-kompakttır. Şimdi eğer $f(C)$'nin bir aşağı küme olduğu gösterilirse, $\mathcal{Y}$ Hausdorff, dolayısıyla pH olduğundan Teorem 4.1.1'den $f(C)$'nin kapalı olduğu söylenebilir.

$y \in \downarrow_{\mathcal{V}} [f(C)]$ olsun. Bu durumda $y \leq_{\mathcal{V}} f(c)$ olacak şekilde bir $f(c) \in f(C)$ ve ayrıca, f örten olduğundan, $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

$f(x) \leq_{\mathcal{V}} f(c) \Rightarrow f(x) \in kap(f(c))$ ve $kap(f(c)) \subseteq f(kap(c))$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
f(x) \in f(kap(c)) &\Rightarrow x \in f^{-1}(f(kap(c))) = kap(c) \\
&\Rightarrow x \leq_{\mathcal{T}} c \\
&\Rightarrow x \in \downarrow_{\mathcal{T}} [C] = C \\
&\Rightarrow y = f(x) \in f(C)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $f(C) \subseteq \downarrow_{\mathcal{V}} [f(C)]$ her zaman var olduğundan $f(C)$ aşağı bir kümedir. ■

Önerme 4.1.10. Her ortak kompakt uzay bir süreklilik uzaydan elde edilir.

Kanıt: $\mathcal{X}$ uzayı ortak kompakt olsun. Bu durumda Teorem 4.1.9 (c)'den $\mathcal{X}$ normaldir. Ayrıca bu uzay ikişer T_2 olduğundan ikişer pH ve böylece ikişer zs'dir. O halde Teorem 3.2.21 (a)'dan $\mathcal{X}$ uzayı ikişer tamamen regülerdir ve böylece Önerme 2.5.15'den bir süreklilik uzaydan elde edilebilir. ■

Teorem 4.1.11. Bir süreklilik uzaydan elde edilen ikili topolojik uzay ortak kompakt ise, üzerindeki her ikişer sürekli fonksiyon süreklilik uzayları arasında quasi düzgün süreklidir.

Kanıt: $\mathcal{X}$ uzayı bir süreklilik uzaydan elde edilen ortak kompakt ikili topolojik uzay ve f bu uzay üzerinde tanımlı ikişer sürekli fakat quasi düzgün sürekli olmayan bir fonksiyon olmak üzere, her t pozitifi için $d(x_t, y_t) \leq t$ fakat $d(f(x_t), f(y_t)) \nleq t$ olacak şekilde $x_t, y_t \in X$ bulunabilir. $\mathcal{X}$ uzayı ortak kompakt olduğundan Önerme 4.1.7(b)'den $\mathcal{X}^s = (X, \mathcal{T}^s)$ uzayı kompakttır. Bu durumda, $(X \times X, \mathcal{T}^s \times \mathcal{T}^s)$ çarpım uzayı kompakt olduğundan, bu yolla elde edilen ağın yakınsak bir alt ağı olacaktır. Bu bilgileri ve f'nin ikişer sürekli bir fonksiyon olmasını kullanarak bir çelişki elde edilir. (Teoremin ispatı "ağlar" konusuyla ilgili detaylar içerdiğinden kısaca bahsedilmiştir. Ayrıntıları için [6] nolu kaynaktan yararlanılabilir.)

4.2 SKEW KOMPAKT UZAYLAR

Bu kesimde, kompakt Hausdorff uzayların asimetrik versiyonları olan "skew kompakt" uzaylardan bahsedilecek ve bu uzayların bazı karakterizasyonları verilecektir. Bu kısımda verilen bilgiler [6] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 4.2.1. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere eğer $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayı ortak kompakt olacak şekilde bir $\mathcal{T}^*$ topolojisi varsa, $\mathfrak{X}$ uzayına *skew kompakt (asimetrik olarak kompakt Hausdorff)* denir.

NOT 4.2.2. Yukarıdaki tanımda söz edilen $\mathcal{T}^*$ topolojisi varsa, Önerme 4.1.7 (d)'den bu topoloji tektir.

Örnek 4.2.3. $([0,1], \mathcal{U})$ uzayı skew kompakttır, çünkü Örnek 4.1.5'den $([0,1], \mathcal{U}, \mathcal{L})$ uzayı ortak kompakttır.

Önerme 4.2.4. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, $\mathfrak{Y} = (Y, \mathcal{V})$ birer topolojik uzay olsunlar. Bu durumda;

(a) **(i)** $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ uzayı ortak kompakt ise, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^G$'dir.

(ii) $\mathfrak{X}$ uzayının skew kompakt olması için gerek ve yeter koşul $BG(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ uzayının ortak kompakt olmasıdır.

(iii) $\mathfrak{X}$ uzayının skew kompakt olması için gerek ve yeter koşul T_0 olması ve aşağıdaki koşulları sağlamasıdır:

(1) $x \notin kap(y)$ ise, $x \in T \subseteq K$, $K \cap kap(y) = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve K kompakt kümeleri vardır.

(2) $\mathcal{S}$, elemanları kapalı ya da kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümeler olan bir aile ve $\bigcap \mathcal{S} = \emptyset$ ise, $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ sonlu alt ailesi vardır.

((1) koşulu $BG(\mathfrak{X})$ uzayının pH olması ile, (2) koşulu ise $(X, \mathcal{T}^{SG})$'nin kompakt olması ile denktir.)

(**iv**) $\mathfrak{X}$ skew kompakt ise yerel kompakttır ve $\mathfrak{X}$ yerel kompakt ise, $BG(\mathfrak{X})$ tamamen regülerdir.

(b) (**i**) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ve $\leq_{\mathcal{T}} = \leq_{\mathcal{T}'}$ ise, $\mathcal{T}'^{G} \subseteq \mathcal{T}^{G}$'dir.

(**ii**) $BG(\mathfrak{X})$ uzayı pH ise, $(\mathcal{T}^{G})^{G} \subseteq \mathcal{T}$ dir.

(**iii**) $BG(\mathfrak{X})$ ve $BG(G(\mathfrak{X}))$ uzayları pH ise, $((\mathcal{T}^{G})^{G})^{G} = \mathcal{T}^{G}$'dir. Böylece G, $\mathcal{G}$ üzerinde bir topolojik dualdir.

(c) $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ dönüşümünün de Groot olması için gerek ve yeter koşul $f : BG(\mathfrak{X}) \longrightarrow BG(\mathcal{Y})$ dönüşümünün ikişer sürekli olmasıdır.

(d) $BG(\mathfrak{X})$ pH olmak üzere, $\mathfrak{X}$ uzayının de Groot yansımalı olması için gerek ve yeter koşul her kapalı kümenin $\mathcal{T}^{G}$-kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-aşağı kümelerin keyfi arakesiti biçiminde yazılabilmesidir.

Kanıt: (**a**) (**i**) $\mathcal{X}$ uzayı ortak kompakt olmak üzere $\mathcal{T}^{*} = \mathcal{T}^{G}$ olduğunu gösterelim: $T \in \mathcal{T}^{*}$ ise $X - T$ kümesi, Önerme 4.1.7 (d)'den kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı yani $\mathcal{T}^{G}$-kapalı bir küme ve böylece $T \in \mathcal{T}^{G}$'dir. Ters kapsama için, $x \in T \in \mathcal{T}^{G}$ alınırsa $x \in X - K \subseteq T$ olacak şekilde kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı bir K kümesi vardır. $\mathcal{X}$ ikişer zs olduğundan Önerme 3.2.8(a) gereği $\leq_{\mathcal{T}^{*}} = \geq_{\mathcal{T}}$ ve böylece K kümesi $\leq_{\mathcal{T}^{*}}$-aşağı bir kümedir. O halde Sonuç 4.1.2'den K kümesi *-kapalı ve böylece $T \in \mathcal{T}^{*}$ dir.

(**ii**) $\mathfrak{X}$ skew kompakt ise, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^{*})$ ortak kompakt olacak şekilde bir $\mathcal{T}^{*}$ topolojisi vardır ve (i)'den $\mathcal{T}^{G} = \mathcal{T}^{*}$ olduğundan $BG(\mathfrak{X})$ ortak kompakttır. Ters yönü skew kompaktlığın tanımından açıktır.

(**iii**) Öncelikle (1) koşulunun $BG(\mathfrak{X})$ uzayının pH olması ile, (2) koşulunun ise $(X, \mathcal{T}^{SG})$'nin kompakt olması ile denk olduğunu gösterelim:

$BG(\mathfrak{X})$ pH ve $x \notin kap(y)$ olsun. Bu durumda $x \in T$, $y \in T^{G}$, $T \cap T^{G} = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^{G} \in \mathcal{T}^{G}$ kümeleri vardır. $T^{G} \in \mathcal{T}^{G}$ olduğundan $y \in X - K \subseteq T^{G}$ olacak şekilde bir K kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümesi vardır. Böylece, $T \subseteq X - T^{G} \subseteq K$ ve K $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş olduğundan $y \notin \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K]$'dır. Buradan, $kap(y) \cap K = \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) \cap K = \emptyset$ elde edilir ve böylece (1) sağlanır.

Ters yönü için, (1) sağlansın ve $x \notin kap(y)$ olsun. Bu durumda $x \in T \subseteq K$, $K \cap kap(y) = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve K kompakt kümeleri vardır. Ayrıca, Sonuç 3.3.10'dan $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [T] = T$ ve böylece $y \in X- \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K] \subseteq X- \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [T] = X - T$'dir. O halde T ve $X- \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K]$ aranılan ayrık açık komşuluklar olup, $BG(\mathfrak{X})$ pH'dır.

Diğer taraftan, (2) koşulunun $\mathcal{T}^{SG}$'nin kompakt olması ile denk olduğu Önerme 4.1.7 (b)'den açıktır.

$\mathfrak{X}$ skew kompakt ise, $BG(\mathfrak{X})$ ortak kompakttır. Bu durumda, $BG(\mathfrak{X})$ ikişer T_2 olduğundan ikişer pH ve T_0'dır. O halde $BG(\mathfrak{X})$ pH^* olduğundan zs^* olacağı için Önerme 3.2.8 (c)'den $\mathfrak{X}$ uzayı T_0'dır. Ayrıca $BG(\mathfrak{X})$ ikişer kompakt ve ikişer dengeli olduğundan Önerme 4.1.7 (b)'den $(X, \mathcal{T}^{SG})$ kompakttır.

Ters yönü için, $\mathfrak{X}$ uzayı T_0 olsun ve (1) ve (2) koşulları sağlansın.

• $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{SG}$ olduğundan $BG(\mathfrak{X})$ uzayı da T_0'dır.

• $BG(\mathfrak{X})$ ikişer zs ve pH olduğundan Önerme 3.2.8 (b)'den ikişer pH'dır. O halde ikişer pH ve T_0 olduğundan ikişer T_2'dir.

• $(X, \mathcal{T}^{SG})$ kompakt olduğundan Önerme 4.1.7 (b)'den $BG(\mathfrak{X})$ ikişer dengeli ve ikişer kompakttır.

O halde, $BG(\mathfrak{X})$ uzayı ortak kompakt ve böylece $\mathfrak{X}$ skew kompakttır.

(**iv**) $\mathfrak{X}$ skew kompakt ise, $BG(\mathfrak{X})$ uzayı ortak kompakt ve Teorem 4.1.9 (a)'dan regülerdir. O halde Önerme 4.1.8 (b)'den yerel dengeli ve böylece yerel kompakttır.

$\mathfrak{X}$ yerel kompakt ve $x \in T \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $x \in U \subseteq K \subseteq T$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ ve K kompakt kümeleri vardır. Öyleyse Sonuç 3.3.10'dan $x \in U \in \uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K] \subseteq T$ olup $\uparrow^{\leq_\mathcal{T}} [K]$, $\mathcal{T}^G$-kapalıdır ve kompakt bir kümenin $\leq_\mathcal{T}$-doyumu olduğundan kompakttır. O halde $BG(\mathfrak{X})$ yerel dengeli ve böylece Teorem 4.1.9 (b)'den tamamen regülerdir.

(**b**) (**i**) $x \in T' \in \mathcal{T}'^G$ ise, $x \in X - K \subseteq T'$ olacak şekilde $\mathcal{T}'$-kompakt, $\leq_{\mathcal{T}'}$-doymuş bir K kümesi vardır. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ olduğundan K kümesi $\mathcal{T}$ topolojisine göre de kompakttır ve $\leq_\mathcal{T} = \leq_{\mathcal{T}'}$ olduğundan K $\leq_\mathcal{T}$-doymuştur. O halde $T' \in \mathcal{T}^G$ ve böylece $\mathcal{T}'^G \subseteq \mathcal{T}^G$'dir.

(**ii**) $BG(\mathfrak{X})$ pH olsun. Önerme 3.3.26(b)'den $BG(\mathfrak{X})$ ikişer zs ve böylece Önerme 3.2.8 (b)'den ikişer pH'dir. O halde Teorem 4.1.1'den her $\mathcal{T}^G$-kompakt kümenin $\leq_{\mathcal{T}^G}$-doyumu kapalı olduğundan, $(\mathcal{T}^G)^G$ topolojisinin kapalı kümelerinin tabanına ait her küme kapalıdır. Böylece $(\mathcal{T}^G)^G \subseteq \mathcal{T}$ elde edilir.

(**iii**) $BG(\mathfrak{X})$ ve $BG(G(\mathfrak{X}))$ uzayları pH olsun. Öncelikle $BG(G(\mathfrak{X}))$ pH olduğundan, (ii)'den $((\mathcal{T}^G)^G)^G \subseteq \mathcal{T}^G$ dir. Ters kapsama için, $BG(\mathfrak{X})$ pH olduğundan, (ii)'den $(\mathcal{T}^G)^G \subseteq \mathcal{T}$ dir. Eğer $\leq_{(\mathcal{T}^G)^G} = \leq_{\mathcal{T}}$ olduğu gösterilirse (i)'den $\mathcal{T}^G \subseteq ((\mathcal{T}^G)^G)^G$ elde edilir. Önerme 3.3.26 ile $BG(G(\mathfrak{X}))$ ve $BG(\mathfrak{X})$ ikişer zs olduğundan Önerme 3.2.8(a)'dan $\leq_{(\mathcal{T}^G)^G} = \geq_{\mathcal{T}^G}$ ve $\leq_{\mathcal{T}^G} = \geq_{\mathcal{T}}$'dir. Böylece, $\leq_{(\mathcal{T}^G)^G} = \geq_{\mathcal{T}^G} = \leq_{\mathcal{T}}$ ve bu sayede $((\mathcal{T}^G)^G)^G = \mathcal{T}^G$ elde edilmiş olur.

Şimdi, G'nin $\mathcal{G}$ üzerinde bir topolojik dual olduğunu gösterelim. $G^3 = G$ ve G ile $G(\mathfrak{X})$'in aynı küme üzerinde tanımlı olduğu biliniyor. O halde $G : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ olmak üzere, $\mathfrak{X} \in \mathcal{G}$ ise $G(\mathfrak{X}) \in \mathcal{G}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathfrak{X} \in \mathcal{G}$ ise, Önerme 3.3.29'dan $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{pH}$ ve böylece $BG(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ pH ve $BG(G(\mathfrak{X})) = (X, \mathcal{T}^G, (\mathcal{T}^G)^G)$ ikişer pH'dır. Öyleyse $BG(G(\mathfrak{X}))$ ve $BG(G(G((\mathfrak{X})))) = (X, (\mathcal{T}^G)^G, ((\mathcal{T}^G)^G)^G) = (X, (\mathcal{T}^G)^G, \mathcal{T}^G)$ pH olduğundan $G(\mathfrak{X}) \in \mathcal{G}$'dir.

(**c**) f fonksiyonu de Groot ise f, $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ süreklidir. f'nin $\mathcal{T}^G - \mathcal{V}^G$ sürekli olduğunu göstermek için, $K \subseteq Y$, $\mathcal{V}^G$'nin kapalı kümeler ailesinin tabanına ait bir küme ise Tanım 3.3.25'den $f^{-1}(K)$, onu içeren $\mathcal{T}^G$-kapalı kümelerin arakesitine eşittir ve böylece $\mathcal{T}^G$-kapalıdır. Öyleyse f, $\mathcal{T}^G - \mathcal{V}^G$ süreklidir.

Ters yönü için $f : BG(\mathfrak{X}) \longrightarrow BG(\mathfrak{Y})$ ikişer sürekli ise, $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{V})$ dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. $K \subseteq Y$, $\mathcal{V}$-kompakt ve $\leq_{\mathcal{V}}$-doymuş ise, $\mathcal{V}^G$-kapalıdır. Öyleyse, f ikişer sürekli olduğundan $f^{-1}(K)$, $\mathcal{T}^G$-kapalıdır. Buradan, $f^{-1}(K) = kap(f^{-1}(K))$ olduğundan kapanışın tanımından $f^{-1}(K)$, onu içeren $\mathcal{T}^G$-kapalı, dolayısıyla kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümelerin arakesitine eşittir. O halde f dönüşümü de Groottur.

(**d**) $\mathfrak{X}$ uzayı de Groot yansımalı, yani $(\mathcal{T}^G)^G = \mathcal{T}$ olsun. $K \subseteq X$, $\mathcal{T}$-kapalı bir küme ise, K aynı zamanda $(\mathcal{T}^G)^G$-kapalı olacağından Önerme 3.3.23'den $\mathcal{T}^G$-kompakt, $\leq_{\mathcal{T}^G}$-doymuş kümelerin keyfi arakesiti biçiminde yazılabilir. Şimdi eğer $\leq_{\mathcal{T}^G}$-doymuş kümelerin $\leq_{\mathcal{T}}$-aşağı kümeler oldukları gösterilirse ispatın bu yönü tamamlanmış olur. Bunun için, L kümesi $\leq_{\mathcal{T}^G}$-doymuş olsun. Bu durumda Önerme 3.3.26 gereği $BG(\mathfrak{X})$ ikişer zs olduğundan $\leq_{\mathcal{T}^G} = \geq_{\mathcal{T}}$'dir. Buradan, $L = \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}^G}} [L] = \uparrow^{\geq_{\mathcal{T}}} [L] = \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} [L]$ elde edilir ve böylece L bir $\leq$-aşağı kümedir.

Ters yönü için, K kümesi $\mathcal{T}$-kapalı ise, $\mathcal{T}^G$-kompakt ve $\leq_{\mathcal{T}^G}$-doymuş kümelerin arakesiti biçiminde yazılabildiği için $(\mathcal{T}^G)^G$-kapalıdır. Böylece $\mathcal{T} \subseteq (\mathcal{T}^G)^G$ dir. Ayrıca $BG(\mathfrak{X})$ pH olduğundan (b)'den $(\mathcal{T}^G)^G \subseteq \mathcal{T}$ ve böylece $(\mathcal{T}^G)^G = \mathcal{T}$ elde edilir.

Teorem 4.2.5. **(a)** Her skew kompakt uzay, simetrikleşmesi tam ve tamamen sınırlı olan (mecburen T_0) bir süreklilik uzayından elde edilir.

(b) Bir T_0 topolojik uzay simetrikleşmesi tam ve tamamen sınırlı olan bir süreklilik uzayından (ya da quasi düzgünlükten) elde edilmişse, bu uzay üzerindeki her de Groot dönüşümü quasi düzgün süreklidir.

Kanıt: (**a**) $(X, \mathcal{T})$ uzayı skew kompakt olsun. Bu durumda Önerme 4.2.4 (a)'dan $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ ikili topolojik uzayı ortak kompakttır ve böylece Önerme 4.1.10'den bir süreklilik uzayından elde edilebilir. Ayrıca, kompakt Hausdorff olan $(X, \mathcal{T}^{SG})$ uzayı, bu süreklilik uzayın simetrikleşmesinden elde edilir ve Önerme 2.3.28'den bu uzay tam ve tamamen sınırlıdır.
(**b**) $(X, \mathcal{T})$ simetrikleşmesi tam ve tamamen sınırlı olan bir süreklilik uzayından elde edilmiş bir T_0 topolojik uzay ve f bu uzay üzerinde bir de Groot dönüşümü olsun. Önerme 2.5.15'den, bu süreklilik uzaydan elde edilen $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ikili topolojik uzayı ikişer tamamen regülerdir. Şimdi, $\mathcal{X}$'in ortak kompakt bir uzay olduğunu gösterelim:

Öncelikle, Önerme 2.3.28'den $\mathcal{X}^s$ kompakt ve böylece Önerme 4.1.7'dan $\mathcal{X}$ ikişer kompakt ve ikişer dengelidir. Teorem 3.2.21 (a)'dan $\mathcal{X}$ ikişer zs ve böylece Önerme 3.2.8'den ikişer T_0'dır. Yine Önerme 3.2.8'den $\mathcal{X}$ ikişer pH olduğundan, $\mathcal{X}$'in ikişer T_2 olduğu söylenebilir. Öyleyse $\mathcal{X}$ ortak kompakt bir uzaydır. Bu durumda, Önerme 4.2.4 (a)'dan $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^G$ elde edilir. O halde, Önerme 4.2.4 (c)'den $f : BG(\mathfrak{X}) \longrightarrow BG(\mathfrak{X})$ ikişer sürekli ve böylelikle Teorem 4.1.11'den f dönüşümü quasi düzgün süreklidir. ■

Tanım 4.2.6. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun.

(a) $A \subseteq X$ kapalı kümesi, iki kapalı özalt kümesinin birleşimi olarak yazılamıyorsa, A kümesi *indirgenemezdir* denir.

(b) $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 ve bu uzayda her indirgenemez $A \subseteq X$ kümesi için $A = kap^{\mathcal{T}}(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, X uzayına *sober* denir.

(c) $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 ve bu uzayda her ultrasüzgecin limit noktalarının kümesi bir noktanın kapanışı ise, X uzayına *kuvvetli sober* denir.

NOT 4.2.7. Genelde "sober" ve "kuvvetli sober" tanımlarında T_0 koşulu açık olarak yazılmaz. Bunun yerine ilgili noktanın tek olduğu söylenir. Gerçekten, uzay T_0 ise

$\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $kap^{\mathcal{T}}(x) \neq kap^{\mathcal{T}}(y)$'dir [1]. Böylelikle, sözü edilen küme birbirinden farklı iki noktanın kapanışına eşit olamaz. Tersine ilgili nokta tek ise, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $kap^{\mathcal{T}}(x) \neq kap^{\mathcal{T}}(y)$ olacağı için uzay T_0 olur.

Tanım 4.2.8. [8] $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X uzayı sober, kompakt, yerel kompakt ve bu uzayda herhangi iki kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümenin arakesiti kompakt ise, bu uzaya *dengeli yerel kompakt* denir.

Yardımcı Teorem 4.2.9. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{V}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$'nin limit noktaları kümesi, $\mathcal{V}$'nin tüm $\mathcal{T}$-kapalı elemanlarının arakesitine eşittir.

Kanıt: $\mathcal{V}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç ve $\mathcal{F}$ bu süzgeçin tüm kapalı elemanlarının ailesi olsun.

$z \in \bigcap \mathcal{F}$ ancak z, $\mathcal{V}$'nin bir limit noktası olmasın. Bu durumda $z \in G$ ve $G \notin \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda, $\mathcal{V}$ bir ultrasüzgeç olduğundan $X - G \in \mathcal{V}$ ve $X - G$ kapalı olduğundan $X - G \in \mathcal{F}$ olacaktır. Öyleyse $z \in \bigcap \mathcal{F}$ olduğundan $z \in X - G$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde z, $\mathcal{V}$'nin bir limit noktası olmalıdır.

Ters kapsama için, z, $\mathcal{V}$'nin bir limit noktası ve aksine $z \notin \bigcap \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $z \notin F$ olacak şekilde kapalı bir $F \subseteq X$ kümesi vardır. $z \in X - F \in \mathcal{T}$ ve z bir limit noktası olduğundan $X - F \in \mathcal{V}$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $z \in \bigcap \mathcal{F}$ olmalıdır. ■

Teorem 4.2.10. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı T_0 olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı skew kompakttır.

(b) $(X, \mathcal{T})$ yerel kompakttır. Ayrıca,

$$\mathcal{S} = \{K \subseteq X : K \text{ kümesi kapalı ya da kompakt, } \leq_{\mathcal{T}} \text{-doymuştur}\}$$

ve $\bigcap \mathcal{S} = \emptyset$ olmak üzere $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ alt ailesi vardır.

(c) $(X, \mathcal{T})$ kuvvetli sober ve yerel kompakttır.

(d) $(X, \mathcal{T})$ uzayı, simetrikleşmesi tam ve tamamen sınırlı olan bir süreklilik uzaydan elde edilir.

Kanıt: **(a)** ⇒ **(b)** Önerme 4.2.4 (a)'dan açıktır.

(b) $\Rightarrow$ **(a)** $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakt ise Önerme 4.2.4'deki (1) koşulunun sağlanacağını gösterilirse, aynı önermeden $(X, \mathcal{T})$ uzayının skew kompakt olduğu söylenebilir.

Bunun için, $x \notin kap^{\mathcal{T}}(y)$ olsun. Bu durumda $x \in G$, $y \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ vardır. Ayrıca X yerel kompakt olduğundan $x \in T \subseteq K \subseteq G$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve K kompakt kümeleri bulunabilir. Ayrıca, Sonuç 3.3.10'dan $x \in T \subseteq \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K] \subseteq G$ olduğundan, $y \notin \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K]$'dir. Böylece, $K \cap \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) = K \cap kap^{\mathcal{T}}(y) = \emptyset$ elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** (b) koşulu sağlansın. Bu durumda (a) koşulu da sağlanacaktır. O halde $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ ortak kompakttır. Böylece $(X, \mathcal{T}^{SG})$ uzayı Hausdorff ve Önerme 4.1.7 (b)'den kompakttır. Şimdi $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. $(X, \mathcal{T}^{SG})$ kompakt Hausdorff olduğundan Teorem 2.1.10 ve Teorem 2.1.9'dan $\mathcal{F}$'nin bu uzayda limiti vardır ve tektir. Bu limite x diyelim. Her $C \in \mathcal{F}$ kapalı kümesi için, C aynı zamanda $\mathcal{T}^{SG}$-kapalı olduğundan Yardımcı Teorem 4.2.9'dan $x \in C$ olduğu söylenebilir. Şimdi eğer $\mathcal{F}$'nin $\mathcal{T}$ topolojisine göre limit noktaları kümesinin x noktasının kapanışına eşit olduğu gösterilirse, ispat tamamlanmış olur.

$y \in kap^{\mathcal{T}}(x)$ ve $y \in G \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $x \in G$ olmalıdır. $x \notin X - G$ olduğundan ve $\mathcal{F}$'nin tüm kapalı elemanları x'i içerdiğinden $X - G \notin \mathcal{F}$'dir. O halde $\mathcal{F}$ bir ultrasüzgeç olduğundan $G \in \mathcal{F}$ ve böylece y, $\mathcal{F}$'nin bir limit noktasıdır.

Ters yönü için $y \notin kap(x)$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ uzayı pH olduğundan $y \in T$, $x \in T^G$, $T \cap T^G = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^G \in \mathcal{T}^G$ kümeleri vardır. x noktası $\mathcal{F}$'nin bir $\mathcal{T}^{SG}$-limiti ve $T^G \in \mathcal{T}^{SG}$ olduğundan $T^G \in \mathcal{F}$'dir. O halde $T \notin \mathcal{F}$ ve böylece y, $\mathcal{F}$'nin bir limit noktası değildir.

(c) $\Rightarrow$ **(b)** X uzayı kuvvetli sober,

$$\mathcal{S} = \{K \subseteq X : K \text{ kümesi kapalı ya da kompakt, } \leq_{\mathcal{T}} -\text{doymuştur}\}$$

ve $\mathcal{S}$ ailesinin her sonlu alt ailesinin arakesiti boştan farklı olmak üzere, $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim:

$\mathcal{S}$ ailesinin her sonlu alt ailesinin arakesiti boştan farklı olduğundan,

$$\mathcal{H} = \{F \subseteq X \mid \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq F \text{ olacak şekilde } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ sonlu alt ailesi vardır}\}$$

ailesi $\mathcal{S}$'yi kapsayan bir süzgeçtir ve Teorem 2.1.5'den $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$ olacak şekilde bir $\mathcal{V}$ ultrasüzgeci vardır. $\mathcal{V}$ süzgecinin tüm kapalı kümelerinin ailesini $\mathcal{G}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{S}$ ailesi,

- Sadece kapalı kümelerden oluşuyorsa, $\mathcal{G} \neq \emptyset$'dir.

• Kapalı ve kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümelerden oluşuyorsa, $\mathcal{G} \neq \emptyset$'dir.

• Sadece kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümelerden oluşuyorsa, $\mathcal{G} \neq \emptyset$'dir. Gerçekten, $K \in \mathcal{S}$ kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş bir küme olmak üzere $K \subseteq kap^{\mathcal{T}}(K)$ olduğundan $kap^{\mathcal{T}}(K) \in \mathcal{V}$'dir. Öyleyse $kap^{\mathcal{T}}(K)$ kümesi kapalı olduğundan $kap^{\mathcal{T}}(K) \in \mathcal{G}$ elde edilir.

X kuvvetli sober olduğundan Yardımcı teorem 4.2.9'dan $\bigcap \mathcal{G} = kap^{\mathcal{T}}(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

$K \in \mathcal{S}$ ve K kümesi kapalı ise, $K \in \mathcal{G}$ olduğundan $x \in K$ olur.

$K \in \mathcal{S}$ ve K kümesi kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş ise, sonlu bir $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi için $\mathcal{V}$ bir süzgeç olduğundan $K \cap \left(\bigcap \mathcal{F}'\right) \neq \emptyset$'dir. Öyleyse K kompakt olduğundan $K \cap \left(\bigcap \mathcal{G}\right) \neq \emptyset$ olmalıdır. O halde $y \in K \cap \left(\bigcap \mathcal{G}\right) = K \cap kap^{\mathcal{T}}(x)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ ve K kümesi $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş olduğundan $x \in K$'dir.

O halde, $x \in \bigcap \mathcal{S}$ ve böylece $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$'dir.

(**a**) $\Rightarrow$ (**d**) Teorem 4.2.5 (a)'dan açıktır.

(**d**) $\Rightarrow$ (**a**) $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 olsun ve simetrikleşmesi tam ve tamamen sınırlı olan bir süreklilik uzayından elde edilsin. Önerme 4.2.5(b)'de $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ uzayının ortak kompakt olduğu gösterilmiştir. Böylece Önerme 4.2.4 (a)'dan $(X, \mathcal{T})$ uzayı skew kompakttır. ■

Önerme 4.2.11. $(X, \mathcal{T})$ uzayının skew kompakt olması için gerek ve yeter koşul dengeli yerel kompakt olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $(X, \mathcal{T})$ skew kompakt ise, Önerme 4.2.4 ve Teorem 4.2.10'dan bu uzay kompakt, yerel kompakt ve kuvvetli sober ve kuvvetli sober uzaylar sober olduklarından [2] soberdir. Ayrıca, kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümeler $\mathcal{T}^G$-kapalı olduklarından, bu kümelerin keyfi arakesitleri de $\mathcal{T}^G$-kapalı ve böylece Önerme 4.1.7 (d)'den kompakt $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş kümelerdir. Öyleyse $(X, \mathcal{T})$ uzayı dengeli yerel kompakttır.

($\Leftarrow$) $(X, \mathcal{T})$ uzayı dengeli yerel kompakt olsun. Eğer X'in kuvvetli sober olduğu gösterilirse, Teorem 4.2.10'dan bu uzayın skew kompakt olduğu söylenebilir.

Bunun için, $\mathcal{V}$ bir ultrasüzgeç ve A kümesi $\mathcal{V}$ süzgecinin limit kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$'nin tüm kapalı elemanlarının ailesi olmak üzere Önerme 4.2.9'dan $A = \bigcap \mathcal{F}$'dir.

• $A \neq \emptyset$'dir: $\mathcal{V}$ bir süzgeç olduğundan, $\mathcal{V}$'nin sonlu alt ailelerinin arakesiti boştan farklıdır. O halde, X uzayı kompakt olduğundan $\bigcap \mathcal{F} = A \neq \emptyset$'dir.

• A kümesi kapalıdır.

• A kümesi indirgenemezdir: Tersine, $A = B \cup C$ olacak şekilde $B, C \subsetneq A$ kapalı kümeler olsun. $x \in B - C$ ve $y \in C - B$ alalım. Bu durumda, X uzayı yerel kompakt olduğundan x ve y noktalarının sırasıyla, $M \subseteq X - C$ ve $N \subseteq X - B$ olacak şekilde kompakt, $\leq_{\mathcal{T}}$-doymuş M ve N komşulukları vardır. $x, y \in A$ olduğundan x ve y noktaları $\mathcal{V}$'nin limit noktalarıdır. O halde $M, N \in \mathcal{V}$ ve buradan $M \cap N \in \mathcal{V}$'dir. X dengeli yerel kompakt olduğundan $M \cap N$ kompakttır ve böylece $\mathcal{V}$'nin bir limit noktasını içerir. Bu durumda, $A \cap M \cap N \neq \emptyset$ olur ki bu, $A \cap (X - C) \cap (X - B) = \emptyset$ olması ile çelişir.

Sonuç olarak, A indirgenemez ve X uzayı sober olduğundan $A = kap^{\mathcal{T}}(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır ve böylece X kuvvetli soberdir. ■

5 TOPOLOJİ VE SIRA

5.1 SIRALI TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu kesimde, sıralı topolojik uzaylar ve onların bazı özelliklerine değinilecek ve bu uzaylardan yararlanılarak skew kompakt uzaylar için bir başka karakterizasyon verilecektir. Burada verilen bilgiler, [6] ve [10] nolu kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 5.1.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\leq$, X üzerinde tanımlı bir kısmi sıralama bağıntısı olmak üzere, $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayına *sıralı topolojik uzay* denir.

Tanım 5.1.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı topolojik uzayı verilsin. Bu durumda;

(a) $G_{\leq} = \{(x, y) : x \leq y\}$ kümesine $\leq$ bağıntısının *grafiği* denir.

(b) Eğer $G_{\leq}$ kümesi $X \times X$ çarpım uzayında kapalıysa, $\leq$ bağıntısı $X \times X$ uzayında *kapalıdır* denir.

Tanım 5.1.3. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı topolojik uzay olsun. Bu durumda;

(a) Q bir topolojik özellik olmak üzere, eğer $(X, \mathcal{T})$ uzayı Q ise, $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayı Q'dur denir.

(b) Eğer $\leq$ bağıntısı $X \times X$ çarpım uzayında kapalı ise, $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayına *sıralı-Hausdorff uzay* denir.

Tanım 5.1.4. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı-Hausdorff uzay olsun. Eğer verilen kapalı ve $\leq$-yukarı C ile kapalı ve $\leq$-aşağı D ayrık kümeleri için $C \subseteq T$, $D \subseteq U$, $T \cap U = \emptyset$ olacak şekilde açık ve $\leq$-yukarı T ile açık ve $\leq$-aşağı U kümeleri bulunabiliyorsa $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayına *sıralı-normal uzay* denir.

Önerme 5.1.5. Her sıralı-Hausdorff uzay Hausdorff'tur.

Kanıt: $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı-Hausdorff uzay ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda, $\leq$ bir kısmi sırama olduğundan $x \nleq y$ ya da $y \nleq x$ olmalıdır. Genelliği bozmadan, $x \nleq y$ olduğunu varsayalım. $(X \times X) - G_{\leq}$ kümesi $X \times X$ çarpım uzayında açık ve $(x, y) \in (X \times X) - G_{\leq}$ olduğundan $(x, y) \in T_x \times T_y \subseteq (X \times X) - G_{\leq}$ olacak şekilde $T_x, T_y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. O halde $x \in T_x$, $y \in T_y$ ve $T_x \cap T_y = \emptyset$ olduğundan, $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayı Hausdorfftur. ■

Önerme 5.1.6. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı topolojik uzay olmak üzere,

$$\mathcal{T}^{\leq} = \{T \subseteq X : T \text{ açık ve} \leq \text{-yukarıdır}\}$$

ve

$$\mathcal{T}^{\geq} = \{T \subseteq X : T \text{ açık ve} \geq \text{-yukarıdır}\}$$

aileleri, X üzerinde birer topolojidir.

Kanıt: Önerme 3.3.8 (a)'dan kolayca görülebilir. ■

Sonuç 5.1.7. **(a)** $(X, \mathcal{T}^{\leq})$ ve $(X, \mathcal{T}^{\geq})$ uzaylarında kapalı kümeler sırasıyla kapalı, $\leq$-aşağı ve kapalı, $\geq$-aşağı kümelerdir.

(b) $\mathcal{T}^{\leq} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}^{\geq} \subseteq \mathcal{T}$'dir.

Önerme 5.1.8. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

(a) $\leq \subseteq \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ ve $\geq \subseteq \leq_{\mathcal{T}^{\geq}}$'dir.

(b) $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\downarrow_{\leq} (x)$ kümesinin $^{\leq}$-kapalı olmasıdır.

(c) $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\uparrow^{\leq} (x)$ kümesinin $^{\geq}$-kapalı olmasıdır.

Kanıt:
(a) $x \leq y$ ve $x \in G \in \mathcal{T}^{\leq}$ olsun. Buradan, $y \in \uparrow^{\leq} (x)$ ve G $\leq$-yukarı bir küme olduğundan $y \in \uparrow^{\leq} (x) \subseteq \uparrow^{\leq} [G] = G$ elde edilir. O halde $x \in kap^{\mathcal{T}^{\leq}}(y)$ ve böylece $x \leq_{\mathcal{T}^{\leq}} y$'dir. Diğer kapsama da benzer şekilde gösterilebilir.
(b) ($\Rightarrow$) $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ olsun. $\downarrow_{\leq} (x)$ kümesinin $^{\leq}$-kapalı olduğunu göstermek için, $X - \downarrow_{\leq} (x)$ kümesinin $^{\leq}$-açık olduğunu gösterelim:

$y \in X - \downarrow_{\leq} (x)$ olsun. Bu durumda, $y \nleq x$ ve $\leq = \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ olduğundan $y \nleq_{\mathcal{T}^{\leq}} x$'dir. Öyleyse $y \in G$ ve $x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}^{\leq}$ vardır. Şimdi, eğer $y \in G \subseteq X - \downarrow_{\leq} (x)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunu göstermek için, tersine $z \in G$ ve $z \notin X - \downarrow_{\leq} (x)$ olacak şekilde bir $z \in X$ olduğunu varsayalım. Buradan, $z \leq x$ ve G $\leq$-yukarı bir küme olduğundan $x \in G$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Öyleyse $G \subseteq X - \downarrow_{\leq} (x)$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) Her $x \in X$ için $\downarrow_{\leq} (x)$ kümesi ${}^{\leq}$-kapalı ve $x \leq_{\mathcal{T}^{\leq}} y$ olsun. Buradan, $x \in kap^{\mathcal{T}^{\leq}}(y)$'dir. O halde, $\downarrow_{\leq} (y)$ kapalı olduğundan $x \in \downarrow_{\leq} (y)$ ve böylece $x \leq y$'dir.
(**c**) (b) ile benzer şekilde gösterilebilir. ■

NOT 5.1.9. $\downarrow_{\leq} (x)$ kümesi $\leq$-aşağı ve $\uparrow^{\leq} (x) = \downarrow_{\geq} (x)$ kümesi $\geq$-aşağı birer küme olduklarından Sonuç 5.1.7 (a)'dan, yukarıdaki önermenin (b) şıkkında $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ olması için, $\downarrow_{\leq} (x)$ kümesinin, (c) şıkkında ise $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olması için, $\uparrow^{\leq} (x)$ kümesinin kapalı olduğunu söylemek yeterli olacaktır.

Lawson [8], her $x \in X$ için $\downarrow_{\leq} (x)$ ve $\uparrow^{\leq} (x)$ kümelerinin kapalı olduğu kısmi sıralamaya *yarıkapalı* demiştir.

Önerme 5.1.10. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ bir sıralı-Hausdorff uzay ise, $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ ve $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olur.

Kanıt: $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorff uzay olmak üzere, $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ olduğunu göstermek için her $x \in X$ için $\downarrow_{\leq} (x)$'in kapalı olduğunu gösterilsin. Bunun için $y \in X - \downarrow_{\leq} (x)$ alınsın. Bu durumda, $y \nleq x$'dir ve sıralı-Hausdorffluk gereği $(X \times X) - G_{\leq}$ kümesi $X \times X$ çarpım uzayında açık olduğundan, $(y, x) \in T_y \times T_x \subseteq (X \times X) - G_{\leq}$ olacak şekilde $T_x, T_y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Buradan, $T_y \times \{x\} \subseteq (X \times X) - G_{\leq}$ olduğundan $y \in T_y \subseteq X - \downarrow_{\leq} (x)$'dir. Bu durumda $X - \downarrow_{\leq} (x)$ açık ve böylece $\downarrow_{\leq} (x)$ kapalıdır. Öyleyse Önerme 5.1.8 (b)'den $\leq = \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$'dir.

$\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 5.1.11. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorff uzay ise, $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ ikili topolojik uzayı ikişer T_1'dir.

Kanıt: $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorff olduğundan Önerme 5.1.10 gereği $\leq = \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ ve $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ dir. Öyleyse,

$$x \in kap^{\mathcal{T}^{\geq}}(y) \Leftrightarrow x \leq_{\mathcal{T}^{\geq}} y \Leftrightarrow x \geq y \Leftrightarrow y \leq x \Leftrightarrow y \leq_{\mathcal{T}^{\leq}} x \Leftrightarrow y \in kap^{\mathcal{T}^{\leq}}(x)$$

olduğundan $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ ikişer zs'dir. Ayrıca, $\leq$ bir kısmi sıralama bağıntısı olduğundan Önerme 3.1.9 (a) ve Önerme 3.2.8 (c)'den $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayı T_0'dır. Böylece bu uzay ikişer T_1'dir. ■

Önerme 5.1.12. $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ ikili topolojik uzayı pH ve $\leq = \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ ise, $(X, \mathcal{T}, \leq)$ uzayı sıralı-Hausdorfftur.

Kanıt: $(x,y) \in (X \times X) - G_{\leq}$ olsun. Bu durumda, $\leq = \leq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ olduğundan $x \not\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} y$ ve böylece $x \notin kap^{\mathcal{T}^{\leq}} y$'dir. Öyleyse $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ pH olduğundan $x \in T_x$, $y \in T_y$, $T_x \cap T_y = \emptyset$ olacak şekilde $T_x \in \mathcal{T}^{\leq}$ ve $T_y \in \mathcal{T}^{\geq}$ kümeleri vardır. Ayrıca, Sonuç 5.1.7 (b)'den $T_x, T_y \in \mathcal{T}$ dir. Buradan, $(x,y) \in T_x \times T_y \subseteq (X \times X) - G_{\leq}$ olduğundan $\leq$ bağıntısı $X \times X$ uzayında kapalı ve böylece $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorfftur. ■

Önerme 5.1.13. $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı topolojik uzay olsun. Bu durumda, $(X, \mathcal{T}, \leq)$'nin sıralı-normal olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayının normal, $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ ve $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-normal olsun ve $C \subseteq T$ biçimindeki ${}^{\geq}$-kapalı C, ${}^{\leq}$-açık T kümeleri verilsin. Önerme 3.3.8 (c) ve Sonuç 5.1.7 (a)'dan C kapalı ve $\leq$-yukarı, $X - T$ kapalı ve $\leq$-aşağı ve de $C \cap (X - T) = \emptyset$'dir. Öyleyse $C \subseteq U$, $X - T \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde açık ve $\leq$-yukarı U ile açık ve $\leq$-aşağı V kümeleri vardır. Buradan, $C \subseteq U \subseteq X - V \subseteq T$ olacak şekilde ${}^{\leq}$-açık U ve ${}^{\geq}$-kapalı $X - V$ kümeleri elde edildiğinden $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayı normaldir. Ayrıca $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorff olduğundan Önerme 5.1.10'dan $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ ve $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ dir.

$(\Leftarrow)$ $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayı normal, $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ ve $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq$ olsun. $\leq_{\mathcal{T}^{\geq}} = \geq = \geq_{\mathcal{T}^{\leq}}$ olduğundan Önerme 3.2.8(a)'dan $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayı zs ve normal, zs bir uzay olarak Teorem 3.2.21(a)'dan pH'dir. $(X, \mathcal{T}^{\leq}, \mathcal{T}^{\geq})$ uzayı pH ve $\leq_{\mathcal{T}^{\leq}} = \leq$ olduğundan, Önerme 5.1.12'den $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-Hausdorfftur. Şimdi, C kapalı ve $\leq$-yukarı, D kapalı ve $\leq$-aşağı ve de $C \cap D = \emptyset$ biçimindeki kümeler verilsin. Bu durumda C ${}^{\geq}$-kapalı, $X - D$ ${}^{\leq}$-açık ve $C \subseteq X - D$ olduğundan $C \subseteq U \subseteq V \subseteq X - D$ olacak şekilde U ${}^{\leq}$-açık ve V ${}^{\geq}$-kapalı kümeleri vardır. Buradan, $C \subseteq U$, $D \subseteq X - V$, $U \cap (X - V) = \emptyset$, açık ve $\leq$-yukarı U ile açık ve $\leq$-aşağı $X - V$ kümeleri var olduğundan $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sıralı-normaldir. ■

Teorem 5.1.14. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a) $(X, \mathcal{T})$ skew kompakttır.

(b) $(X, \mathcal{T}^{SG})$ uzayı kompakt Hausdorfftur.

(c) X üzerinde, $(X, \mathcal{T}^S, \leq)$ sıralı-Hausdorff ve $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^S)^{\leq}$ olacak şekilde kompakt Hausdorff $\mathcal{T}^S$ topolojisi ve $\leq$ kısmi sıralaması vardır. (Bu topoloji ve kısmi sıralama $\mathcal{T}$ tarafından teklikle belirlidir: $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^G$, $\mathcal{T}^s = \mathcal{T} \vee \mathcal{T}^G$ ve $\leq = \leq_{\mathcal{T}}$'dir.)

Kanıt:

(**a**) $\Rightarrow$ (**b**) Önerme 4.2.4 (a) ve Önerme 4.1.7 (b)'den açıktır.

(**b**) $\Rightarrow$ (**c**) Öncelikle, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^G)$ uzayı T_0 ve Önerme 3.3.26'den ikişer zs olduğundan, Önerme 3.2.8'den $(X, \mathcal{T})$ uzayı T_0 ve böylece $\leq_{\mathcal{T}}$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Şimdi, $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T}^{SG})$ kompakt Hausdorff uzayı ve $\leq_{\mathcal{T}}$ kısmi sıralaması için, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^{SG})^{\leq_{\mathcal{T}}}$ eşitliğinin sağlandığını ve $(X, \mathcal{T}^{SG}, \leq_{\mathcal{T}})$ uzayının sıralı-Hausdorff olduğunu gösterelim:

$G \in \mathcal{T}$ ise, Sonuç 3.3.10'dan G kümesi $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarıdır. Ayrıca $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{SG}$ olduğundan $G \in \mathcal{T}^{SG}$ ve böylece $G \in (\mathcal{T}^{SG})^{\leq_{\mathcal{T}}}$'dir. Ters kapsamayı göstermek için $T^s \in (\mathcal{T}^{SG})^{\leq_{\mathcal{T}}}$ alalım. $T^s \in \mathcal{T}^{SG}$ ve T^s $\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı bir kümedir. Bu durumda, $x \in T \cap T^G \subseteq T^s$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $T^G \in \mathcal{T}^G$ kümeleri vardır. O halde $x \in T^G$ olduğundan $x \in X - K \subseteq T^G$ olacak şekilde kompakt ve doymuş ($\leq_{\mathcal{T}}$-yukarı) bir K kümesi vardır. Bu durumda her $y \in K$ için $x \neq y$ ve $\mathcal{T}^{SG}$ Hausdorff olduğundan $x \in {U_y}^s$, $y \in {V_y}^s$ ve ${U_y}^s \cap {V_y}^s = \emptyset$ olacak şekilde ${U_y}^s, {V_y}^s \in \mathcal{T}^{SG}$ kümeleri vardır. Böylece,
$(y \in {V_y}^s \;\Rightarrow\; y \in V_y \cap {V_y}^G \subseteq {V_y}^s)$ olacak şekilde $V_y \in \mathcal{T}$, ${V_y}^G \in \mathcal{T}$ kümeleri ve $(x \in {U_y}^s \;\Rightarrow\; x \in U_y \cap {U_y}^G \subseteq {U_y}^s)$ olacak şekilde $U_y \in \mathcal{T}$, ${U_y}^G \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_y$ ve K kompakt olduğundan $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = V \in \mathcal{T}$ olacak şekilde $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n} \in \mathcal{T}$ kümeleri ve paralelinde $U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_n} \in \mathcal{T}$ kümeleri bulunur. Yani, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} = U \in \mathcal{T}$ ve $K \subseteq V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \in \mathcal{T}$ kümeleri için $U \cap V = \emptyset$ olup $x \in U \subseteq X - V \subseteq X - K$ elde edilir. Dolayısıyla,
$x \in T \cap U \subseteq T \cap (X - K) \subseteq T \cap T^G \subseteq T^s$ ve $x \in T \cap U \in \mathcal{T}$ olduğundan $T^s \in \mathcal{T}$ elde edilmiş olur ki, bu $(\mathcal{T}^{SG})^{\leq_{\mathcal{T}}} \subseteq \mathcal{T}$ olması demektir.

$x \nleq y$ ise, $x \notin kap^{\mathcal{T}}(y) = \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y)$'dir ve ayrıca $kap^{\mathcal{T}}(y)$ kümesi $\mathcal{T}^{SG}$-kapalıdır. Şimdi, $x \in \text{iç}^{\mathcal{T}^{SG}}(K)$ ve $K \cap \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) = \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{T}^{SG}$-kompakt bir K kümesinin var olduğunu gösterelim:

$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T}^{SG})$ uzayı kompakt Hausdorff olduğundan Önerme 3.3.27 (a)'dan $\mathcal{T}^{SG}$'nin de Groot duali kendisidir. Buradan, $BG(\mathfrak{X}) = (X, \mathcal{T}^{SG}, \mathcal{T}^{SG})$ ve $\mathfrak{X}$ Hausdorff olduğundan $BG(\mathfrak{X})$ pH'dir. O halde Önerme 4.2.4 (a)'dan $x \in T \subseteq K$, $K \cap kap^{\mathcal{T}}(y) = \emptyset$ olacak şekilde $T \in \mathcal{T}^{SG}$ ve $\mathcal{T}^{SG}$-kompakt K kümeleri vardır. Öyleyse $K \cap \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) = K \cap kap^{\mathcal{T}}(y) = \emptyset$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Elde edilen K kümesi $\mathcal{T}^{SG}$-kompakt olduğundan $\mathcal{T}$-kompakttır. O halde $\uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K]$ kümesi $\mathcal{T}^G$-kapalı ve böylece $\mathcal{T}^{SG}$-kapalıdır. Ayrıca, $K \cap \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) = \emptyset$ olduğundan $\uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K] \cap \downarrow_{\leq_{\mathcal{T}}} (y) = \emptyset$'dir. Böylece, $(x, y) \in (\text{iç}^{\mathcal{T}^{SG}} \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K]) \times (X - \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K])$

$\subseteq (X \times X) - G_{\leq}$ ve (iç$^{\mathcal{T}^{SG}} \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K]) \times (X - \uparrow^{\leq_{\mathcal{T}}} [K])$ kümesi $\mathcal{T}^{SG} \times \mathcal{T}^{SG}$-açık olduğundan $(X, \mathcal{T}^{SG}, \leq_{\mathcal{T}})$ uzayı sıralı-Hausdorfftur.

(**c**) $\Rightarrow$ (**a**) Kompakt Hausdorff uzaylar normaldir [1] ve böylece $(X, \mathcal{T}^S, \leq)$ sıralı-normaldir [10]. O halde, Önerme 5.1.11 ve 5.1.13'den $(X, (\mathcal{T}^s)^{\leq}, (\mathcal{T}^s)^{\geq})$ özellendirmesi $\leq$ olan, ikişer pH bir uzaydır. Şimdi, $\mathcal{T}^s = (\mathcal{T}^s)^{\leq} \vee (\mathcal{T}^s)^{\geq}$ olduğunu gösterelim:

$(\mathcal{T}^s)^{\leq} \vee (\mathcal{T}^s)^{\geq} \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğu açıktır. Ters kapsama için, $x \in T \in \mathcal{T}^s$ olsun. Bu durumda, $y \in X - T$ için $y \neq x$ ve $\leq$ bir kısmi sıralama olduğundan $x \nleq y$ ya da $y \nleq x$'dir. Genelliği bozmadan, $x \nleq y$ olduğunu kabul edelim. $\downarrow_{\leq} (y) \cap \uparrow^{\leq} (x) = \emptyset$, $\uparrow^{\leq} (x)$ kapalı, $\leq$-yukarı ve $\downarrow_{\leq} (y)$ kapalı, $\leq$-aşağı kümeler ve $(X, \mathcal{T}^S, \leq)$ sıralı-normal olduğundan $\uparrow^{\leq} (x) \subseteq U_y \in (\mathcal{T}^s)^{\leq}$, $\downarrow_{\leq} (y) \in V_y \in (\mathcal{T}^s)^{\geq}$ olacak şekilde ayrık U_y, V_y kümeleri vardır. Ayrıca, $\{V_y : y \in X - T\}$ ailesi $X - T$'nin bir açık örtüsü ve $X - T$ kompakt olduğundan $X - T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ olacak şekilde $i = 1, 2, \ldots, n$ vardır. O halde $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \subseteq T$ ve $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \in (\mathcal{T}^s)^{\leq} \vee (\mathcal{T}^s)^{\geq}$ olduğundan $T \in (\mathcal{T}^s)^{\leq} \vee (\mathcal{T}^s)^{\geq}$'dir.

O halde, Önerme 4.1.7 (b)'den $(X, \mathcal{T}, (\mathcal{T}^s)^{\geq}) = (X, (\mathcal{T}^s)^{\leq}, (\mathcal{T}^s)^{\geq})$ ortak kompakt ve böylece $(X, \mathcal{T})$ skew kompakttır.

Son olarak, $(X, \mathcal{T}, (\mathcal{T}^s)^{\geq})$ uzayının, simetrikleşmesi $\mathcal{T}^s$ ve özellendirmesi $\leq$ olan tek ortak kompakt uzay olduğunu gösterelim:

Bunun için, $(X, \mathcal{T}', \mathcal{T}'^*)$ bu özelliğe sahip diğer bir uzay olmak üzere, $\mathcal{T}' = (\mathcal{T}^s)^{\leq}$ olduğunu göstermeliyiz. C kümesi $(\mathcal{T}^s)^{\leq}$-kapalı ise, $\mathcal{T}^s$-kapalı ve $\leq$-aşağı bir kümedir. Buradan, C $\mathcal{T}^s$-kompakt ve $\geq$-yukarı bir kümedir. $\mathcal{T}^s$ topolojisi kompakt ve $\mathcal{T}'^* \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan C kümesi $\mathcal{T}'^*$-kompakttır. Ayrıca, $\mathcal{T}'^*$'nin özellendirmesi $\geq$ olduğundan C $\mathcal{T}'^*$ topolojisine göre yukarı bir kümedir. Öyleyse Teorem 4.1.1'den C $\mathcal{T}'$-kapalıdır.

Ters kapsama için, C $\mathcal{T}'$-kapalı olsun. $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}^s$ olduğundan C kümesi $\mathcal{T}^s$ kapalıdır. Ayrıca, $\mathcal{T}'$'nin özellendirmesi $\leq$ olduğundan C $\leq$-aşağı bir kümedir. O halde C kümesi $(\mathcal{T}^s)^{\leq}$-kapalıdır. ■

Kaynaklar

[1] Bülbül, A., Genel Topoloji, Hacettepe Üniversitesi Yayınları (2004)

[2] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M., and Scott, D.S., A Compendium of Continuous Lattices, Springer (1980)

[3] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Veit, Leipzig (1914)

[4] Henriksen, M. and Kopperman, R., A General Theory of Structure Spaces with Applications to Spaces of Prime Ideals, Algebra Universalis, 28 (1991), 349-376

[5] Irkad, A., Bitopological Spaces Generated by Generalized Metrics, Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering, 24 (1995), 69-78

[6] Kopperman, R., Asymmetry and Duality in Topology, Topology and its Applications, 66 (1995), 1-39

[7] Kopperman, R., All topologies come from generalized metrics, American Mathematical Monthly, 95 (1988), 89-97

[8] Lawson, J.D., Order and Strongly Sober Compactifications, Topology and Category Theory in Computer Science, Oxford University Press (1991), 179-205

[9] Metzger, J.M., Quasi-proximities and quasi-uniformities, Kyungpook Math. J. (1971), 123-138

[10] Nachbin, L., Topology and Order, Van Nostrand Reinhold (1965)

[11] Nachbin, L., Sur les espaces topologiques ordonnés, C.R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 381-382

[12] Naimpally, S.A. and Warrack, B.D., Proximity Spaces, Cambridge University Press (1970)

[13] Patty, C.W., Foundations of Topology, Jones and Bartlett Publishers (2008)

[14] Sieber, J.L. and Pervin, W.J., Completeness in Quasi-Uniform Spaces, Mathematische Annalen, 158 (1965), 79-81

[15] Willard, S., General Topology, Addison-Wesley Publ. Co., (1970)

[16] Wilson, W.A., On Quasi-Metric Spaces, American Journal of Mathematics, 53 (1931), 675-684

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra KARATAŞ

Doğum Yeri : Sinop

Doğum Tarihi : 28.07.1987

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 2001-2005 Sinop Anadolu Lisesi

Lisans : 2005-2006 Hacettepe Üniversitesi,
Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık
2006-2010 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce, İtalyanca

İş Tecrübesi :

2012- Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü