BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION-REACTION EQUATIONS

EYLEM ÖZTÜRK

PROF. DR. KAMAL SOLTANOV
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2014

Eylem ÖZTÜRK'ün hazırladığı "Bir sınıf doğrusal olmayan difüzyon-reaksiyon denklemlerinin incelenmesi" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Uğurhan Muğan
Başkan ....

Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Danışman ....

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
Üye ....

Prof. Dr. Emil NOVRUZOV
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Uğur GÜL
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

10.01.2014

EYLEM ÖZTÜRK

ÖZET

BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Eylem ÖZTÜRK
Doktora, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Ocak 2014, 77 sayfa

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan yapısı keyfi mertebeden polinom büyüme hızına sahip reaksiyon difüzyon denleminin Robin sınır koşulu altında, çözülebilirliği ve çözümünün uzun zaman davranışı araştırılmıştır. Tezimizin birinci bölümünde inceleyeceğimiz problem tanıtılmıştır. Ayrıca reaksiyon difüzyon denklemlerinden ve özellikle Robin sınır koşulu altında incelenmiş lineer olmayan parabolik denklemler ile ilgili yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir.

Tezimizin ikinci bölümünde, çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı temel kavramlar, teoremler, lemmalar ve eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, problem başlangıç koşulu sıfır iken, lineer olmayan yapısına bağlı olarak alt lineer, lineer ve üst lineer durumlarda incelenmiştir. Ayrıca üst lineer durum, sıfırdan farklı başlangıç koşulu altında gözönüne alınmıştır. Problem'in genelleşmiş çözümünün varlığı ve tekliği için katsayı fonksiyonları üzerine yeterli koşullar bulunmuştur. Bu koşullar altında [29]'daki genel bir teorem kullanılarak genelleşmiş çözümün varlığı ve bazı durumlarda tekliği ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, çözümün $L_2(\Omega)$'da yutan kümeye sahip olduğu ispatlanmıştır. Dahası h ve φ (problemin sağ tarafındaki fonksiyonlar) fonksiyonları yalnızca x'e bağlı olduğunda $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da yutan kümenin varlığı ispatlanmıştır. Ayrıca h ve φ fonksiyonlarının yanı sıra katsayı fonksiyonlarının da yalnızca x'e bağlı olduğu durumda çözümlerin asimptotik düzenliliği ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da yerel olmayan çekicicnin varlığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Reaksiyon-Difüzyon denklemi, Robin sınır koşulu, Yutan küme, Asimptotik kompaktlık, Yerel olmayan çekici, Varlık ve teklik.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION-REACTION EQUATIONS

Eylem ÖZTÜRK

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

January 2014, 77 pages

In this dissertation, the study of long-time behavior and solvability of the reaction-diffusion equation, which has a polynomial growth nonlinearity of arbitrary order, with Robin boundary condition on the bounded domain have been investigated. The dissertation is organized as follows. In the first part (Chapter 1), we introduce the problem to be studied. Additionally, the works which are related to the reaction-diffusion equations and especially with Robin boundary condition have been outlined.

In the second chapter of dissertation, we give the definitions of some basic notions, theorems, lemmas and inequalities.

In the third chapter, We investigate the problem in sublinear, linear and super linear cases, by depending on nonlinear part when the initial condition is zero. Additionally we investigate with nonzero initial condition in super linear case. For the existence and uniqueness of the generalized solution of problem , we obtain sufficient conditions for coefficient functions and under these conditions we show the existence of generalized solution of problem and the uniqueness of the solution in corresponding spaces, by applying a general existence theorem from [29].

In the fourth chapter, firstly we prove that the solution has an absorbing set in $L_2(\Omega)$. Secondly assuming that functions h and φ(in the right side of the problem) do not depend on the variable t, we prove the existence of absorbing set in $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$. Also when the coefficients functions depend only on x as well as h and φ, we prove some asymptotic regularity and the existence of global attractor in $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$.

Keywords: Reaction-Diffusion equation, Robin boundary condition, Absorbing set, Asymptotic compactness, Global attractor, Existence and uniqueness.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca bana zaman ayıran ve sabırla yol gösterip destek olan kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Kamal Soltanov'a çok teşekkür ederim.

Bu süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan ve desteklerini hiç esirgemeyen çalışma arkadaşlarım Arş. Gör. Kerime Korkmaz ve Arş. Gör. Gamze Düzgün'e teşekkür ederim.

Her an sıkıntı ve sevinçlerimi paylaşan aileme destekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2012 ve 2013 yıllarında aramıza katılan ve varlıklarıyla büyük mutluluklar yaşatarak beni motive eden sevgili yeğenlerim İpek Öztürk ve Kayra Hepcoşkun'a teşekkür ederim.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Difüzyon-Reaksiyon iki veya daha fazla kimyasal maddenin bir yüzey üzerinde dağılması ve bu maddelerin birbirleri ile tepkimeye girmesi sürecidir.

Difüzyon-Reaksiyon denklemlerinin biyoloji, fizik, kimya ve ekoloji gibi alanlarda fiziksel olayların modellenmesindeki önemi birçok bilim adamı tarafından kanıtlanmıştır. 1960 yılından bu yana, bu tip denklemler üzerine yapılan çalışmalar matematiksel ve fiziksel anlamda ilginç sonuçların ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bu tezin esas amacı bir sınıf difüzyon-reaksiyon denklemi için konulmuş Robin sınır değer probleminin çözümünün varlığını, tekliğini araştırmak ve yarı akış aracılığıyla çözümün uzun zaman davranışını incelemektir. Bu tezde aşağıdaki problemi gözönüne alacağız:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u = h(x,t),\ (x,t) \in Q_T & (1) \\ (\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u)|_{\partial\Omega} = \varphi(x',t),\ (x',t) \in \Sigma_T & (2) \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega & (3) \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, olmak üzere sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bölgedir; $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$ ve $\Sigma_T = \partial\Omega \times [0,T]$'dir.
- $\rho, \nu > -1$ olarak verilen sayılardır;
- $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ olmak üzere n boyutlu Laplace operatörü;
- $a : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $b : Q_T \to \mathbb{R}^1$ ve $k : \Sigma_T \to \mathbb{R}^1$ verilen fonksiyonlardır;
- h ve φ verilen genelleşmiş fonksiyonlardır;

Uzaysal-zamansal olguları açıklamak için kullanılan difüzyon-reaksiyon denkleminin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$u_t - d\Delta u = f(x,t,u)$$

Burada $u(x,t)$ sıcaklığı, popülasyon yoğunluğunu, ya da genel olarak bir madde miktarını temsil edebilir; $d > 0$ difüzyon katsayısıdır; Δu, u'nun x değişkenine göre

Laplace'dır; $f(x, u)$ ise heterojen ortama bağlı reaksiyon terimidir. Bu tipteki denklemlerin teorisi ve uygulamaları Fife (1979), Smoller (1983), Britton (1986), Murray (1993) ve Volpert (1994) yayınlarında kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Literatüre baktığımızda, genel olarak difüzyon-reaksiyon denklemlerinin Drichlet ($u(x) = 0; \partial\Omega$) veya Neumann ($\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \partial\Omega$) sınır koşulları altında incelendiğini ve Robin sınır koşuluna çok az yer verildiğini görmekteyiz. Bu nedenle bu tipteki denklemlerin Robin sınır koşulu altında incelenmesi son derece önemlidir.

Bu tezde, problem (1)-(3)'ün genelleşmiş çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdikten sonra çözümün uzun zaman davranışını inceleyeceğiz. Yani bu problemin çözümü ile belirli sürekli yarı akışın yerel olmayan çekicisinin varlığını araştıracağız.

Difüzyon-reaksiyon denklemlerinin yerel olmayan çekicilerinin varlığı Drichlet sınır koşulu altında 1980'li yıllardan bu yana birçok bilim adamı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Bu tip denklemler Robin sınır koşulu altında ilk olarak 1987 yılında Hale ve Rocha ([11]) tarafından incelenmiştir. Hale ve Rocha

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(u) \\ D\frac{\partial u}{d\eta} + \beta E(x)u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \leq 3)$, sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölge, $D > 0$ bir sabit, $E : \partial\Omega \to R^n$ sürekli ve pozitif bir fonksiyon, $\beta \geq 0$ bir sabit, f'in türevi Lipschitz sürekli olmak üzere, kompakt çekicinin varlığını göstermişlerdir.

1991 yılında Peter Hess ([12]) periyodik difüzyon reaksiyon denklemini Robin sınır koşulu ile incelemiştir:

$$\begin{cases} u_t - k(t)\Delta u = m(x,t)h(u) \\ \frac{\partial u}{d\eta} + \beta(x)u = 0 \end{cases}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$, sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve $k(t)$ pozitif, Hölder sürekli, T-periyotlu ($T > 0$) bir fonksiyon, m Hölder sürekli ve T-periyotlu ($T > 0$) bir fonksiyon, $h \in C^2(R, R)$'dir. Bu çalışmada $t \to \infty$ iken çözümün davranış incelenmiştir. Her çözümün $t \to \infty$ olduğunda T-periyotlu çözüme yaklaştığı gösterilmiştir.

2008 yılında Payne ve Schaefer ([22]) aşağıdaki problemi incelemiştir:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) \\ \frac{\partial u}{d\eta} + \beta u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$, sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölgedir. Bu çalışmada birinci mertebeden difirensiyel eşitsizlikler kullanılarak çözümün sonlu zamanda patlması için f ve u_0 üzerine yeterli koşullar bulunmuştur.

2008 yılında Abdalaziz Saleem ([1]) doktora tezinde aşağıdaki problemi gözönüne almıştır:

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u + g(u) = 0 \\ \frac{\partial u}{d\eta} + \beta u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \leq 3)$, sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve $g \in C^1(R,R)$ ve β pozitif bir sabittir. $\alpha, p \in R$ olmak üzere

$|g(u)| \leq \alpha |u|^p + C$

koşulunu sağlamaktadır. Tezinde, $A = -\Delta + I$ operatörünü Robin sınır koşulu ile gözönüne almış ve $L_2(\Omega)$ uzayı için bu operatörün öz fonksiyonlarını içeren ortanormal bir baz olduğunu, $W_2^1(\Omega)$ için ise ortogonal bir baz oldğunu ispatlamıştır. Ayrıca Faedo-Galerkin yöntemi ile zayıf çözümün varlık ve tekliğini ispatlamıştır.

2011 yılında Jean-François Rault ([24]) makalesinde aşağıdaki problemi gözönüne almışır:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \\ \frac{\partial u}{d\eta} + k(x',t)u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases}$$

burada $\Omega \subset R^n$ exterior bölge, $p > 1$, k negatif olmayan sürekli bir fonksiyon, $u_0 \in C(\Omega)$'dır.

$0 < \|u_0\|_\infty < \infty$, $\lim\limits_{\|x\|_2 \to \infty} u_0(x) = 0$ koşulları sağlandığında:

• $p \in (1, 1 + \frac{2}{n})$ için aşikar olmayan tüm pozitif çözümlerin sonlu zamanda patladığını göstermiştir. Dahası eğer $n \geq 3$ ise $p = 1 + \frac{2}{n}$ için de bunun doğru olduğunu göstermiştir.

• $p > 1 + \frac{2}{n}$ olduğunda u_0'ın yeterince küçük değerleri için aşikar olmayan global pozitif çözümün varlığını göstermiştir.

• k fonksiyonu için ek olarak $k \geq c$ koşulu sağlandığında, u_0'ın yeterince küçük değerleri için global pozitif çözümün varlığını göstermiştir.

2012 yılında Lu Yang ([35]), $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 3)$, sınırı $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve $f, g \in C^1(R, R)$ olmak üzere aşağıdaki problemi incelemiştir:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = h(x,t) \\ \frac{\partial u}{d\eta} + g(u) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \; x \in \Omega \end{cases}$$

Bu makalede, $p > 1$ ve $q > 1$ olmak üzere $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{f(s)s}{|s|^{p+1}} = C_f$ ve $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{g(s)s}{|s|^{q+1}} = C_g$, $p + 1 \geq 2q$ ve $C_f > 0, C_g < 0$ olduğunda problem otonom iken çözümün asimptotik düzenliliği, problem otonom olmadığında ise $W_2^1(\Omega)$ uzayında global çekicinin varlığı ispatlanmıştır.

Bu tezde problem(1)-(3)'ün başlangıç koşulu sıfır olduğunda genelleşmiş çözümünün varlığını ispatladık. Ayrıca başlangıç koşulu sıfırdan farklı olduğunda genelleşmiş çözümün varlığı ve tekliği ispatlandıktan sonra yarı akışlar aracılığı ile çözümün uzun zaman davranışını inceledik. İlk olarak, h ve φ fonksiyonları t'ye bağlı olmadığında $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında yutan kümenin varlığı gösterilmiştir. Dahası h ve φ fonksiyonlarının yanı sıra katsayı fonksiyonları da t'ye bağlı olmadığında çözümün asimptotik düzenliliği araştırılmış ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında yerel olmayan çekicinin varlığı gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

LİNEER UZAYLAR

X, bir reel lineer uzay olsun.

Tanım 2.1 *([7])* $\|.\| : X \to [0, \infty)$ *aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun:*
(i) $\|x\| = 0$ *ancak ve ancak* $x = 0$*'dır.*
(ii) $\forall x \in X$ *ve* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *için* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$*'dir.*
(iii) $\forall x, y \in X$ *için* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*'dir.*
Bu durumda X*'e normlu lineer uzay,* $\|.\|$ *dönüşümüne norm denir.*

Tanım 2.2 *([7])* X *normlu lineer uzay* $\{x_n\} \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun. Eğer* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ *ise o zaman* x_n *dizisi* x*'e yakınsıyor denir ve* $x_n \to x$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.3 *([7])*X *normlu lineer uzay* $\{x_n\} \subset X$ *olsun. Eğer* $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$$

olacak şekilde bir $N > 0$ *varsa* $\{x_n\}$ *dizisine Cauchy dizisi denir.*

Tanım 2.4 *([7])*X *normlu lineer uzay olsun.* X*'den alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir elemana yakınsak ise* X*'e tam uzay denir.*

Tanım 2.5 *([7])Tam, normlu bir lineer uzaya* ***Banach*** *uzayı denir.*

Tanım 2.6 *([2])* X *normlu lineer uzayı sayılabilir yoğun alt kümeye sahipse* X *uzayına* ***ayrılabilir*** *uzay denir.*

Tanım 2.7 *([2])* X *reel lineer uzay olsun.* X *üzerindeki iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzayı ise* X*'e* ***Hilbert*** *uzayı denir.*

Tanım 2.8 *([9])* X *normlu lineer uzay olsun.* X *üzerindeki tüm doğrusal ve sınırlı fonksiyoneller uzayına* X *uzayının duali denir ve* X^* *ile gösterilir.* $x' \in X^*$ *olmak üzere* X^* *üzerindeki norm:*

$$\|x'\|_{X^*} = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\langle x',\ x\rangle}{\|x\|_X}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.9 *([7]) X Banach uzayı olsun. Eğer $(X^*)^* \equiv X$ ise X' e* ***yansımalı*** *uzay denir. Daha açık olarak her $u^{**} \in (X^*)^*$ için*

$$\langle u^{**},\ u^* \rangle = \langle u^*,\ u \rangle\ ,\ \forall u^* \in X^*$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ varsa X ***yansımalı*** *uzaydır denir.*

Tanım 2.10 *([8]) X Banach uzayı ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. Eğer her $f \in X^*$ için $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \underset{X}{\rightharpoonup} x$ biçiminde gösterilir.*

Tanım 2.11 *([8]) X, Y normlu lineer uzaylar ve $X \subset Y$ olsun. Her $u \in X$ için*

$$\|u\|_{\ Y} \leq c \quad \|u\|_{\ X}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir.

Tanım 2.12 *([8]) X Banach uzayı olmak üzere $X \subset Y$ olsun. Eğer X uzayında $u_0 \in X$' e zayıf yakınsayan keyfi $\{u_n\} \subset X$ dizisi Y uzayında u_0' a güçlü yakınsıyorsa X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.*

Ayrıca X yansımalı Banach uzayı ve Y keyfi Banach uzayı ise X' in Y' ye kompakt gömülmesi aşağıdaki koşulların sağlanmasına denktir.

(a) $X \subset Y$

(b) X'den alınan keyfi sınırlı bir alt küme Y'de kompakt bir alt küme tarafından kapsanır.

Teorem 2.13 *([8]) Banach uzayında zayıf yakınsak bir dizi sınırlıdır.*

Teorem 2.14 *([36]) X yansımalı Banach uzayı ve $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. O zaman bu diziden öyle bir alt dizi seçebiliriz ki bu uzayda zayıf yakınsar.*

Teorem 2.15 *([19]) X ve Y normlu lineer uzaylar ve $A : X \rightarrow Y$ lineer operatör ise A operatörünün sınırlılığı ve sürekliliği denktir.*

Teorem 2.16 *([19]) X ve Y Banach uzaylar ve $A : X \rightarrow Y$ lineer sürekli operatör olsun. O zaman $A : X \rightarrow Y$ zayıf süreklidir.*

ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

Tanım 2.17 *([14])* (Ω, Σ, μ) *ölçü uzayı,* $\{f_n\}$ *ve* f Ω *üzerinde tanımlı, gerçel değerli* Σ- *ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere;*

$\forall \varepsilon > 0$ *için* $\forall n \geq N$ *için*

$$\mu \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N > 0$ *sayısı bulunabiliyorsa* $\{f_n\}$ *dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor denir ve*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

olarak gösterilir.

Önerme 2.18 *([14])* (Ω, Σ, μ) *ölçü uzayı,* $\mu(\Omega) < \infty$, $\{f_n\}$ *ve* f *gerçel değerli ölçülebilir fonksiyonlar,* f_n f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor olsun. O zaman* $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ *alt dizisi vardır ki* $f_{n_k} \xrightarrow{hhy} f$ *sağlanır.*

LEBESGUE UZAYLARI

Tanım 2.19 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge ve* $p \geq 1$ *pozitif bir gerçel sayı olmak üzere* Ω *üzerinde tanımlanmış*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u *fonksiyonlar sınıfına,* $L_p(\Omega)$ *uzayı denir. Bu lineer uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.20 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölgesinde hemen hemen heryerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına* $L_\infty(\Omega)$ *uzayı denir. Üzerindeki norm:*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklindedir.

Teorem 2.21 *([2]) Eğer* $1 \leq p \leq \infty$ *ise* $L_p(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.22 *([2]) Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ise* $L_p(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.23 *([2])* $1 < p < \infty \Leftrightarrow L_p(\Omega)$ *yansımalı uzaydır.*

Tanım 2.24 *([7])X bir Banach uzayı* $1 \leq p < \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere*

$$\int_a^b \|u(t)\|_X dt < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u : (a,b) \to X$ *fonksiyonlardan oluşan uzaya* $L_p(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L_p(a,b;X)$ *bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = (\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.25 *([7]) X bir Banach uzayı* $p = \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı* $u : (a,b) \to X$ *fonksiyonlardan oluşan uzaya* $L_\infty(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L_\infty(a,b;X)$ *bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \underset{t\in(a,b)}{sup} \|u(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 2.26 *([14])* $\{f_n\}$, $L_p(\Omega)$*' da fonksiyonlar dizisi olsun ve* $f_n \underset{L_p(\Omega)}{\rightarrow} f$ *olsun. O zaman* $\{f_n\}$ *fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna ölçüme göre yakınsar.* .

Teorem 2.27 *([7]) X ve Y Banach uzayları olsunlar.* $L_p(a,b;X)$ *aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $p \in [1,\infty]$ *için* $L_p(a,b;X)$ *bir Banach uzayıdır.*

(ii) $p \in [1,\infty)$ *için* $L_p(a,b;X)$ *ayrılabilir uzaydır ancak ve ancak X ayrılabilir uzaydır.*

(iii) $p \in (1,\infty)$ *için X yansımalı uzay ise* $L_p(a,b;X)$ *bir yansımalı uzaydır.*

(iv) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *ve* $X \subset Y$ *sürekli gömülmesi varsa* $L_q(a,b;X) \subset L_p(a,b;Y)$ *sürekli gömülmesi vardır.*

Teorem 2.28 *([18])* B_0, B, B_1 *aşağıdaki koşulları sağlayan Banach uzayları olsunlar:*

(i) $B_0 \subset B \subset B_1$, *$B_0$ ve B_1 yansımalı uzaylar olsunlar.*

(ii) $B_0 \hookrightarrow B$ *kompakt gömülsün.*

Bu durumda $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1$ *olmak üzere*

$$\{v : v \in L_{p_0}(0,T;B_0), \frac{dv}{dt} \in L_{p_1}(0,T;B_1)\} \hookrightarrow L_{p_0}(0,T;B)$$

kompakt gömülmesi vardır.

Lemma 2.29 *([16])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ *sınırlı bölge* $p > 1$, $q > 1$ *olmak üzere*

$$f : L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$$

sınırlı bir dönüşüm ve

$$f(t,.) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $\{u_m\} \subset L_p(\Omega)$ *ve* $u_0 \in L_p(\Omega)$ *için*

$$u_m \underset{L_p(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

ve

$$u_m \underset{\Omega}{\overset{hhy}{\to}} u_0$$

olsun. O zaman $\exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ *vardır ki*

$$f(x, u_{m_k}) \underset{L_q(\Omega)}{\rightharpoonup} f(x, u_0)$$

sağlanır.

SOBOLEV UZAYLARI

Tanım 2.30 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge,* $m > 0$ *bir tamsayı ve* $1 \leq p \leq \infty$ *olsun.*

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Burada

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

ve

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} .... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu doğrusal uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq \ |\alpha| \leq m} \| \ D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{0 \leq \ |\alpha| \leq m} \| \ D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. $m = 0$ *için* $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ *dır.*

$p = 2$ *ise* $W_2^m(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım*

$$\langle u, v \rangle_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) \ \ D^\alpha v(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.31 *([2])* $W_p^m(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.32 *([2]) Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ise* $W_p^m(\Omega)$ *ayrılabilir uzayıdır*

Teorem 2.33 *([2]) Eğer* $1 < p < \infty$ *ise* $W_p^m(\Omega)$ *yansımalı uzaydır.*

Teorem 2.34 *([13])* $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ *ya da* C^1 *sınıfına ait açık sınırlı küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler süreklidir.*

(i) *Eğer* $1 \leq p < n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$

(ii) *Eğer* $p = n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$

(iii) *Eğer* $p > n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$

Teorem 2.35 *([2])* Ω $\mathbb{R}^n$*' de uniform* C^m*-regularity özelliğine sahip olsun. Eğer* $mp < n$ *ve* $p \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-pm}$ *ise*

$$W_p^m(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Eğer $mp = n$ *ise* $p \leq q < \infty$ *için bu gömülme vardır.*

(Uniform C^m-regularity özelliği: Eğer $\partial\Omega$ sınırının yerel bir sonlu açık örtüsü $\{U_j\}$ ve ona karşılık gelen birebir, m-smooth dönüşümlerin bir ailesi $\{\Phi_j\}$ varsa öyle ki Φ_j, U_j'yi $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ kümesine götürüyor ve şu özellikler sağlanıyor:

(i) Bazı $\delta > 0$ için, $\cup_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}) \supset \Omega_\delta$, $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.

(ii) Bazı sonlu R için, U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş arakesite sahiptir.

(iii) Her j için, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) $(\Phi_{j,1}, .., \Phi_{j,n})$ ve $(\Psi_{j,1}, .., \Psi_{j,n})$, Φ_j ve Ψ_j'nin bileşenlerini temsil etmek üzere, öyle bir sonlu M sayısı vardır ki, her α için $|\alpha| \leq m$, her i için $1 \leq i \leq n$ ve her j için, $|D^\alpha \Phi_{j,i}(x)| \leq M$, $x \in U_j$ ve $|D^\alpha \Psi_{j,i}(y)| \leq M$, $y \in B$'dir.

o zaman Ω, uniform C^m-regularity özelliğine sahiptir.)

Teorem 2.36 *([13]) Ω C^1 sınıfına ait açık, sınırlı bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler kompakttır:*

(i) *Eğer $p < n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$*

(ii) *Eğer $p = n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $p = n$, $q \in [1, \infty)$*

(iii) *Eğer $p > n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*

Teorem 2.37 *([7]) Ω sınırı C^1' e ait sınırlı bölge olsun. Öyle bir doğrusal sınırlı*

$$T : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L_p(\partial\Omega)$$

operatörü vardır ki aşağıdakiler sağlanır.

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}, u \in W_p^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

(ii) $\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \forall u \in W_p^1(\Omega), c = c(p, \Omega)$

Teorem 2.38 *([2]) Eğer $u \in W_p^m(\Omega)$ ise $v = u|_{\partial\Omega}$ $W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ uzayına aittir ve*

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$$

sağlanır ve tersine eğer $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ise o zaman $\exists\, u \in W_p^m(\Omega)$ vardır ki $v = u|_{\partial\Omega}$ ve

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq K_2 \|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}$$

sağlanır.

Tanım 2.39 *([7]) X bir Banach uzayı* $1 \leq p < \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere*

$$W_p^1(a,b;X) = \{u \in L_p(a,b;X) : u' \in L_p(a,b;X)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya $W_p^1(a,b;X)$ *uzayı denir. Bu uzay bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm*

$$\|f\|_{W_p^1(a,b;X)} = \begin{cases} (\int\limits_a^b \|u(t)\|_X^p dt + \|u'(t)\|_X^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ ess \ \underset{t\in(a,b)}{sup} \ (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X), & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.40 *([8])**(Coercive Operatör)** X Banach uzayı,* X^* *onun dual uzayı olmak üzere* $f : X \to X^*$ *operatörü* $u \in X$ *için*

$$\|u\|_X \to \infty \quad iken \quad \frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_X} \to \infty$$

ise f operatörüne coercive dir denir.

Teorem 2.41 ***(Varlık Teoremi, [29])*** *X ve Y Banach uzayları,* X^* *ve* Y^**'da sırasıyla dual uzayları olsun,* $\mathcal{M}_0 \subseteq X$ *zayıf tam"reflexive "pn-uzay ,* $X_0 \subseteq \mathcal{M}_0 \cap Y$ *ayrılabilir topolojik vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(I) $f : P_0 \to L_q(0,T;Y)$ *zayıf sürekli bir dönüşümdür, burada*

$$P_0 \equiv L_p(0,T;\mathcal{M}_0) \cap W_q^1(0,T;Y) \cap \{x(t) \mid x(0) = 0\}$$

$1 < \max\{q,q'\} \leq p < \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$*;*

(II) $s \geq 0$, $m \geq 1$ *olmak üzere* $A : W_m^s(0,T;X_0) \to W_m^s(0,T;Y^*)$ *lineer sürekli operatörü vardır ki, A* $\frac{\partial}{\partial t}$ *ile değişmelidir ve* $ker(A^*) = \{0\}$*'dır;*

(III) f ve A operatörleri, genelleşmiş anlamda, $L_p(0,T;X_0)$ *uzayı üzerinde coercive ikili oluşturur, yani öyle bir* $r > 0$ *sayısı ve* $\Psi : R_+^1 \to R_+^1$ *fonksiyonu vardır ki* $\tau \to \infty$ *iken* $\Psi(\tau)/\tau \to \infty$ *ve her* $x \in L_p(0,T;X_0)$ *için* $[x]_{L_p(\mathcal{M}_0)} \geq r$ *koşulu altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int\limits_0^T \langle f(t,x(t)), Ax(t)\rangle dt \geq \Psi\left([x]_{L_p(\mathcal{M}_0)}\right)$$

(IV) öyle $C_0 > 0$, $C_1, C_2 \geq 0$, $\nu > 1$ sabitleri vardır ki her $x \in W_p^1(0,T;X_0)$ ve $\xi \in L_p(0,T;X_0)$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\int_0^T \langle \xi(t), A\xi(t) \rangle dt \geq C_0 \|\xi\|_{L_q(0,T;Y)}^{\nu} - C_2,$$

$$\int_0^t \langle \frac{dx}{d\tau}, Ax(\tau) \rangle d\tau \geq C_1 \|x\|_Y^{\nu}(t) - C_2, \quad a.e.\ t \in [0,T]$$

(I) - (IV) koşulları sağlansın. Bu taktirde aşağıdaki eşitlik her $y \in M \subset L_q(0,T;Y)$ için P_0'da çözülebilirdir,

$$\int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt} + f(t, x(t)), y^*(t) \right\rangle dt = \int_0^T \langle y(t), y^*(t) \rangle dt, \quad \forall y^* \in L_{q'}(0,T;Y^*),$$

burada $M = \left\{ y \in L_q(0,T;Y) : \sup \left\{ \frac{1}{[x]_{L_p(0,T;\mathcal{M}_0)}} \int_0^T \langle y(t), Ax(t) \rangle \, dt \mid x \in L_p(0,T;X_0) \right\} < \infty \right\}$ *biçiminde tanımlanmıştır.*

Lemma 2.42 *([7])**(Gronwall Lemma)***

$\eta(.)$, $[0,T]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli, negatif olmayan fonksiyon olsun ve ϕ, ψ fonksiyonları $[0,T]$ üzerinde negatif olmayan toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere hemen hemen her t için aşağıdaki diferensiyel eşitsizlik sağlansın:

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

O zaman her $0 \leq t \leq T$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds]$$

Düzgün Gronwall Lemma:

g, h ve y (t_0, ∞) üzerinde yerel olarak integrallenebilir pozitif fonksiyonlar olsunlar öyle ki $\frac{dy}{dt}$ (t_0, ∞) üzerinde yerel olarak integrallenebilir olsun ve $a_1, a_2, a_3 > 0$, $r > 0$ olmak üzere $\forall t \geq t_0$ aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$\frac{dy}{dt} \leq g(t)y(t) + h(t), \quad \int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3$$

O zaman $\forall t \geq t_0$ için

$$y(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.43 *([7]) **(Kısmi İntegrasyon Formülü)*** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık bir alt küme ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun,* η^i *sınırın birim normal vektörünün* ($\eta = (\eta^1,\ \eta^2,$ *...,*η^n)) *i. bileşeni olmak üzere* $u,\ v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *olsun o zaman;*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

dir ($i = 1...n$).

Teorem 2.44 *([7]) **(Green Formülü)*** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık bir alt küme olsun, ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun.* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, ν $\partial\Omega$*'nın dış birim normal vektörü olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.*

(i) $\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$

(ii) $\int\limits_{\Omega} Dv.Du dx = -\int\limits_{\Omega} u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS$

(iii) $\int\limits_{\Omega} \left(u\Delta v - v\Delta u\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS$

Tanım 2.45 *([31])**(Test Fonksiyonu)*** φ*, kompakt support'a sahip gerçel değerli ve her mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ise* ($\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$) φ*'ye test fonksiyonu denir.*

Bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile test fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır (bu uzayı D ile göstereceğiz).

Tanım 2.46 *([31])**(Genelleştirilmiş Fonksiyon)***f*,* D *üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan* f*'e genelleştirilmiş fonksiyon denir:*

(a) Her α_1 *ve* α_2 *gerçel (veya kompleks) sayıları ve her* $\varphi_1,\ \varphi_2 \in D$ *için*

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$$

(b) Her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\} \subseteq D$ *dizisi için* $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ *dizisi sıfıra yakınsar.*

Yukarıdaki tanımdan çıkar ki, integrallenebilir bir f fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş fonksiyondur. Gerçekten, her $\varphi \in D$ için

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden yukarıdaki tanımın koşulları sağlanır.

Tanım 2.47 *([7])(**Zayıf Türev**)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *açık bir bölge ve* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}|$ *her* $V \subset\subset \Omega$ *için* $u \in L^1(V)\}$), α *multiindex olmak üzere eğer her test fonksiyonu* φ *için*

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v\varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa v*'ye* u*'nun* $|\alpha|$. *zayıf kısmi türevi denir* ($D^{\alpha}u = v$).

Lemma 2.48 *([7])(**Hölder Eşitsizliği**)* $1 \le p_1, ..., p_m \le \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ *olsun.* $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$ *ise*

$$\int_{\Omega} |u_1...u_m|\, dx \le \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L_{p_k}(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.49 *([7])(**Young Eşitsizliği**)* $1 < p,\ q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ *olsun. Bu durumda*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \ (a,\ b > 0)$$

veya

$$ab \le \varepsilon a^p + C(\varepsilon)\, b^q,\ \ (\varepsilon > 0)$$

olur.

Lemma 2.50 *([33])(**İnterpolasyon Eşitsizliği**)* $\Omega \subset R^n$ *sınırlı bir bölge olmak üzere,* $p, r \in [1, \infty]$ *ve* $p \le r$ *olsun* $\lambda \in [0, 1]$ *olmak üzere* $q \in [p, r]$ *aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$$

Eğer $f \in L_p(\Omega) \cap L_r(\Omega)$ *ise* $f \in L_q(\Omega)$*'dır ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.*

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \le \|f\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)} \|f\|^{1-\lambda}_{L_r(\Omega)}$$

Lemma 2.51 *([2]) Eğer* $1 \le p < \infty$ *ve* $a \ge 0$, $b \ge 0$ *ise o zaman*

$$(a + b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.52 *([32]) Her $u \in W_2^1(\Omega)$ için en az bir $c = c(\Omega)$ sabiti vardır öyle ki,*

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq c(\int_{\Omega} |Du|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, dx')$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.53 *Her $u \in W_2^1(\Omega)$ için en az bir $\widetilde{c} = \widetilde{c}(c(\Omega))$ sabiti vardır öyle ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \widetilde{c}(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}) \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2.54 *Her $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ için en az bir $c = c(\Omega)$ sabiti vardır öyle ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + c' \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ normuna aşağıdaki şekilde Young Eşitsizliği'ni uygularsak,

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq \frac{2}{\alpha+1} \int_{\Omega} |u|^{2\frac{\alpha+1}{2}} \, dx + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \int_{\Omega} dx$$

yani,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + mes(\Omega)$$

eşitsizliğini alırız $(\frac{2}{\alpha+1}, \frac{\alpha-1}{\alpha+1} < 1)$. Bu eşitsizlikte her iki tarafa $\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}$ terimini eklersek,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + mes(\Omega)$$

eşitsizliğini dolayısıyla,

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + c'$$

eşitsizliğini elde ederiz ($c' = mes(\Omega)$; $mes(\Omega)$, Ω'nın ölçümüdür). ■

Sonuç 2.55 *Her $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ için*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq 2(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}) + c'$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.56 *([35]) Her $u \in W_2^1(\Omega)$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir C_ε pozitif sabiti vardır ki aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dx' \leq \varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int\limits_{\Omega} u^2 dx \tag{2.4}$$

YARI AKIŞ TEORİSİ

Bu bölümde yer alan tüm tanım ve sonuçlar Temam ([33])'ten alınmıştır.

X bir Banach uzayı olmak üzere, $\mathcal{B}$ X'in tüm sınırlı alt kümelerinin ailesini göstersin:

Tanım 2.57 *$\{S(t)\}_{t\geq 0}$, X üzerinde tanımlı operatörler ailesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:*

i) $S(0) = I$,

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\, t, s \in R_+$

iii)$S(t) : X \to X$ dönüşümü $\forall t \geq 0$ için süreklidir.

*O zaman $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ailesine sürekli **yarı akış** denir.*

Tanım 2.58 ***(Değişmez küme)*** *$S(t) : X \longrightarrow X, \quad t \in R_+$ bir yarı akış olmak üzere $B \subset X$ olsun. Eğer $\forall\, t \in R_+$ için*

$$S(t)B = B$$

oluyorsa B kümesine değişmez küme denir.

Tanım 2.59 *$S(t) : X \to X, \quad t \in R_+$ bir yarı akış ve $B_0 \subset X$ olsun. $\forall\, B \in \mathcal{B}$ için*

$$S(t)B \subset B_0, \ \forall t \geq T_1(B)$$

*olacak şekilde $\exists\, T_1(B) > 0$ sayısı varsa B_0 kümesine **yutan küme** denir.*

Tanım 2.60 *$S(t) : X \to X, \quad t \in R_+$ bir yarı akış olmak üzere $A \subset X$, $B \in \mathcal{B}$ için*

$$t \to \infty \ \ iken \ \ dist_X(S(t)B, A) \to 0$$

*koşulunu sağlıyor ise A kümesi B kümesini **çeker** denir.*

Tanım 2.61 ***(Yerel olmayan çekici)*** *$S(t) : X \longrightarrow X \quad t \in R_+$ yarı akış olsun. $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) $\mathcal{A}$ kompakttır.

(ii)$\mathcal{A}$ kümesi $\forall B \in \mathcal{B}$' yi çeker.

(iii) $\mathcal{A}$ değişmez bir kümedir.

Bu durumda $\mathcal{A}$ kümesine $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışının yerel olmayan çekicisi denir.

Tanım 2.62 ***(Asimptotik Kompaktlık)*** *$S(t) : X \to X, \quad t \in R_+$ bir yarı akış ve $\forall$ $B \in \mathcal{B}$ için $\varphi_k \in B$ olmak üzere $t_k \to \infty$ iken $\{S(t_k)(\varphi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi relatif kompakt oluyorsa $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışına asimptotik kompakt yarı akış denir.*

Teorem 2.63 *$S(t) : X \to X, \quad t \in R_+$ sürekli yarı akış olsun. Eğer $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışı yutan kümeye sahip ve asimptotik kompakt ise bu yarı akış yerel olmayan çekiciye sahiptir.*

Çalışmamızda kullanacağımız diğer sabitler aşağıdaki eşitsizliklerden gelmektedir:

Teorem 2.34'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_1 > 0$ ve $\exists c_2 > 0$ sabitleri vardır ki

$$\|u\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.5}$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.6}$$

Teorem 2.35'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_3 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_3 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.7}$$

Teorem 2.35'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_4 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)} \leq c_4 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.8}$$

Teorem 2.38'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_5 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_5 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.9}$$

Teorem 2.38'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_6 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_6 \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{2.10}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

3 BİR SINIF DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMİ İÇİN ROBİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

3.1 Problem (1)-(3)'ün Formülüze Edilmesi ve Ana Koşullar

Bu bölümde 2. Bölümde yer alan Varlık Teoremini (Teorem 2.41) kullanarak problem (1)-(3)'ün genelleşmiş çözümünün varlığını ispatlayacağız:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u = h(x,t), \ (x,t) \in Q_T & (1) \\ (\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u)|_{\partial\Omega} = \varphi(x',t), \ (x',t) \in \Sigma_T & (2) \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega & (3) \end{cases}$$

Problem (1)-(3) için $T > 0$ olmak üzere $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$ ve $\varphi \in L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ olduğunu kabul edelim.

Aşağıdaki koşullar sağlansın;

(*i*) a ve b negatif olmayan fonksiyonlardır öyle ki $a \in L_{p_1}(0,T;L_{p_2}(\Omega))$, $b \in L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))$(burada $p_1,\ r_1,\ p_2,\ r_2 > 1$ olmak üzere bu sayılar ρ ve ν parametrelerine bağlı olarak ileride tanımlanacaktır).

(*ii*) $k \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$'dır.

P_0 uzayı aşağıda olduğu gibi tanımlansın;

$\mathbf{P_0} :\equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0(x)\}$

Tanım 3.1 Aşağıdaki eşitliği keyfi $v \in W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ için sağlayan $u \in P_0$ fonksiyonuna problem (1)-(3)'ün genelleşmiş çözümü denir:

$$-\int_0^T\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial t}dxdt + \int_\Omega u(x,T)v(x,T)dx - \int_\Omega u(x,0)v(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega Du.Dvdxdt +$$

$$\int_0^T\int_\Omega a(x,t)\,|u|^\rho\,uvdxdt - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)\,|u|^\nu\,uvdxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x',t)uvdx'dt =$$

$$\int_0^T\int_\Omega hvdxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi vdx'dt$$

Şimdi P_0 uzayını karakterize edelim. (1) denklemine baktığımızda açıktır ki doğrusal olmayan terimler arasında $a(x,t)|u|^\rho u$ terimi diğer terimlere göre daha güçlü bir doğrusal olmayan yapıya sahiptir. Bu yüzden P_0'ın karakterizasyonu ρ terimine göre yapılmıştır. P_0'ın tanımında geçen ilk iki uzay arasındaki bağlantılara bakalım:

• $-1 < \rho \leq 0$ ise

$\rho + 2 \leq 2$ olduğundan $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\rho+2}(Q_T)$ olacaktır. Dolayısıyla burada $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ olacaktır.

Buradan açıktır ki problem (1)-(3)'ü aşağıdaki üç alt bölümde incelemeliyiz:

(1) Üst Lineer Durum ($\rho > 0$)

(2) Alt Lineer Durum ($-1 < \rho \leq 0$)

(3) Lineer Durum ($\rho = \nu = 0$)

ν paremetresi ise ρ'ya bağlı olarak alınanacaktır. Bu üç alt bölümde başlangıç koşulu sıfır ($u_0(x) = 0$) olduğunda genelleşmiş çözümün varlığını ispatlayacağız. Bu durumların dışında dördüncü alt bölümde ise başlangıç koşulu sıfırdan farklı ($u_0(x) \neq 0$) olduğunda, üst lineer durumda, yani $\rho, \nu > 0$ iken genelleşmiş çözümün varlığını ve tekliğini ispatlayacağız.

3.2 Üst Lineer Durumda Problem(1)-(3)'ün Çözülebilirliği

Bu bölümde problemimiz $\rho > 0, -1 < \nu \leq \rho$ olduğunda incelenecektir. Burada tanım 3.1'de verilen P_0 uzayı aşağıdaki gibi alınacaktır;

$P_0 = L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$.

3.1 alt bölümünde yer alan ***(i)*** koşulundaki p_1, p_2, r_1, r_2 sabitleri aşağıdaki gibi alınacaktır:

$$p_1 = p_2 := \infty$$

$$r_1 = r_2 := \begin{cases} \frac{\rho+2}{\rho-\nu}, & \text{eğer } \nu < \rho \\ \infty, & \text{eğer } \nu = \rho \end{cases}$$

Üst lineer durumda genelleşmiş çözümün varlık teoremini ifade edebiliriz,

Teorem 3.2 ***(i)*** *ve* ***(ii)*** *koşulları sağlansın. Ayrıca $\rho > 0$, $-1 < \nu \leq \rho$ olsun. Ek olarak aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:*

(iii) • *Eğer* $-1 < \nu < \rho$ *ise öyle bir* $a_0 > 0$ *sayısı vardır ki hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *için* $a(x,t) \geq a_0$*'dır .*

• *Eğer* $\nu = \rho$ *ise öyle bir* $b_0 > 0$ *sayısı vardır ki hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *için* $a(x,t) - b(x,t) \geq b_0$*'dır.*

(iv) *Öyle bir* $k_0 > 0$ *sayısı vardır ki hemen hemen her* $(x',t) \in \Sigma_T$ *için* $k(x',t) \geq -k_0$ *eşitsizliği sağlanır, burada*

$$k_0 < \begin{cases} \frac{min\{a',1\}}{c_3^2}, & \text{eğer } -1 < \nu < \rho \\ \\ \frac{min\{b',1\}}{c_3^2}, & \text{eğer } \nu = \rho \end{cases}$$

O zaman $\forall (h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *için problem (1)-(3)'ün* P_0*'da genelleşmiş çözümü vardır. (burada* a', b' *sayıları* $a' < a_0$ *ve* $b' < b_0$ *olacak şekilde pozitif sayılardır.)*

Teorem 3.2'nin ispatı için Teorem 2.41'i kullanacağız. Bunun için problem (1)-(3)'ün yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \to [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

$$f_1(u) := -\Delta u + a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u$$

$$f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u$$

$$A := Id : P_0 \to P_0$$

Gerekli uzayları ve dönüşümleri belirledik. Şimdi bu dönüşümlerin Teorem 2.41'in koşullarını sağladığını görmek için bu dönüşümler üzerine gerekli lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.3 *Teorem 3.2'nin koşulları sağlansın. O zaman* f *dönüşümü* P_0 *uzayından* $[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *uzayına sınırlı bir dönüşümdür.*

İspat. Bu dönüşümün sınırlı olduğunu görmek için f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda sınırlı olduğunu tek tek gösterelim. Önce

$$f_1 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T) \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$$

dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim:

$u, v \in P_0$ olmak üzere;

$$\|f_1(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}=1} |\langle f_1(u), v\rangle| \quad (3.1)$$

şeklindedir.

$$|\langle f_1(u), v\rangle| = |\int_0^T\int_\Omega -\Delta uvdxdt + \int_0^T\int_\Omega a(x,t)|u|^\rho uvdxdt - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)|u|^\nu uvdxdt|$$

Bu eşitliğin sağ kısmını üstten değerlendirelim. Bu eşitliğin 1. terimine sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygular ve değerlendirirsek;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \le \int_0^T\int_\Omega |Du|\,|Dv|\,dxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}v\right| dx'dt + \int_0^T\int_\Omega a(x,t)\,|u|^{\rho+1}\,|v|\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega b(x,t)\,|u|^{\nu+1}\,|v|\,dxdt \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin birinci terimine Hölder eşitsizliği uygularsak;

$$\int_0^T\int_\Omega |Du|\,|Dv|\,dxdt \le \int_0^T \|Du\|_{L_2(\Omega)}\|Dv\|_{L_2(\Omega)}\,dt \le \int_0^T \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}\,dt \le$$

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\|v\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))} \quad (3.3)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.2) eşitsizliğinin 2. terimi için $\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}v\right| \le |Du|\,|v|$ olduğunu gözönüne alır ve $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dual uzayındaki norm tanımından yararlanırsak;

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{du}{d\eta}v\right| dx'dt \le \int_0^T\int_{\partial\Omega}|Du|\,|v|\,dx'dt \le \int_0^T \|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\,dt$$

olur. Bu eşitsizlikte keyfi $u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $\|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ olduğunu ve (2.9) eşitsizliğini gözönüne alıp Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$\le c_5^2\,\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\,\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \quad (3.4)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.2) eşitsizliğinin 3. terimi için $a(x,t) \in L_\infty(Q_T)$ olduğunu gözönüne alıp Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_0^T \int_\Omega a(x,t)\,|u|^{\rho+1}\,|v|\,dxdt \le \|a\|_{L_\infty(Q_T)} \int_0^T \|u\|^{\rho+1}_{L_{\rho+2}(\Omega)} \|v\|_{L_{\rho+2}(\Omega)} dt \le$$

$$\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\, \|u\|^{\rho+1}_{L_{\rho+2}(Q_T)} \|v\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} \qquad (3.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.2) eşitsizliğinin 4. terimine r_1, $\frac{\rho+2}{\nu+1}$ ve $\rho+2$ sabitleri ile Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_0^T \int_\Omega b(x,t)|u|^{\nu+1}|v|dxdt \le \|b(x,t)\|_{L_{r_1}(Q_T)}\, \|u\|^{\nu+1}_{L_{\rho+2}(Q_T)}\, \|v\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} \qquad (3.6)$$

olur.

(3.3), (3.4), (3.5), (3.6) eşitsizliklerinde $\forall u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ için $\|u\|_{L_{\rho+2}(Q_T)}$, $\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \le \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}$ olduğunu gözönüne alır ve bu eşitsizlikleri (3.2)'de kullanırsak;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \le \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} (2c_5^2 \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} +$$

$$\|a\|_{L_\infty(Q_T}\|u\|^{\rho+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} + \|b\|_{L_{r_1}(Q_T)}\|u\|^{\nu+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)})$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki parantezli kısmı $\gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)})$ ile gösterelim. O zaman

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \le \gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}) \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik keyfi $u, v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ için var olduğundan $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} = 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.1)' e göre

$$\|f_1(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)} \le \gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)})$$

γ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ için

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} \le r$$

iken

$$\gamma\left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}\right) \le \gamma(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_1(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)} \le \gamma(r)$$

bulunur.

$P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ olduğundan f_1 dönüşümünün P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+$ $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$'ye sınırlı dönüşüm olduğunu ispatladık.

Şimdi $f_2 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim. $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayına ait fonksiyonların sınır değeri $L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına ait olduğundan f_2 dönüşümünün sınırlılığını $L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$'dan $L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$'ya gösterelim. Bunun için $L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$' daki norm tanımını kullanacağız.

$u, v \in P_0$ olmak üzere

$$\|f_2(u)\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}=1} |\langle f_2(u), v\rangle| \tag{3.7}$$

şeklindedir.

$$|\langle f_2(u), v\rangle| = \int_0^T \left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dx' dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x') uv dx' dt \right|$$

Bu eşitliğin sağ kısmını üstten değerlendirelim:

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \leq \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} v \right| dx' + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |k(x') uv| dx' \tag{3.8}$$

(3.8) eşitsizliğinin 1. terimi için $\left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| \leq |Du| |v|$ olduğunu gözönüne alır ve $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dual uzayındaki norm tanımından yararlanırsak;

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} v \right| dx' dt \leq \int_0^T \int_{\partial\Omega} |Du| |v| dx' dt \leq \int_0^T \|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} dt$$

Bu eşitsizlikte keyfi $u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $\|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} v \right| dx' dt \leq \int_0^T \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} dt \tag{3.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.8) eşitsizliğinin 2. terimine Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} |k(x',t) uv| dx' dt \leq \int_0^T \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} dt$$

Burada (2.8) ve (2.10) eşitsizliklerini kullanırsak;

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} |k(x',t) uv| dx' dt \leq c_4^2 c_6^2 \int_0^T \|k\|_{Ln-1(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} dt$$

elde edilir.

Burada $k \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$ olduğunu gözönüne alıp Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} |k(x',t)\,uv|\,dx'dt \le c_4^2 c_6^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;Ln-1(\partial\Omega))} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \tag{3.10}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.9), (3.10) eşitsizliklerini (3.8) eşitsizliğinde gözönüne alırsak;

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \le \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} + c_4^2 c_6^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;Ln-1(\partial\Omega))} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Son eşitsizlikte

$$\gamma_1(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}) := (\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} + c_4^2 c_6^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;Ln-1(\partial\Omega))} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))})$$

ile gösterirsek;

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \le \gamma_1(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}) \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olur.

Son eşitsizlik keyfi $u, v \in L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için var olduğundan $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.7)' ye göre

$$\|f_2(u)\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \le \gamma_1 \left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \right)$$

olur.

γ_1 monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \le r$$

iken

$$\gamma_1 \left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right) \le \gamma_1(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_2(u)\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \le \gamma_1(r)$$

bulunur.

Böylece f_2 dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$' ya sınırlı dönüşüm olduğunu ispatladık. ■

Lemma 3.4 *f dönüşümü Teorem 3.2'nin koşulları altında P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+$ $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. $f \equiv \{f_1, f_2\}$ olduğundan f_1 ve f_2 dönüşümlerinin zayıf sürekliliğine ayrı ayrı bakacağız. Önce

$$f_1 : P_0 \longrightarrow L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$$

dönüşümünün zayıf sürekli dönüşüm olduğunu görelim. Bu dönüşümün doğrusal kısmının ve doğrusal olmayan kısmının zayıf sürekliliğini sırasıyla göstereceğiz.

$$\widetilde{f_1} : P_0 \longrightarrow L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$$

olmak üzere;

$$\widetilde{f_1}(u) := -\Delta u$$

olsun. Lemma 3.3'den bu dönüşümün sınırlı olduğu elde edilir. Dönüşüm doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir. Dolayısıyla dönüşüm zayıf sürekli olur.

Şimdi doğrusal olmayan kısmın zayıf sürekliliğini gösterelim. Bunun için

$$\phi_1 : P_0 \subset L_{\rho+2}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$$

$$\phi_1(x,u,t) := a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u$$

dönüşümünün zayıf sürekli olduğunu göstereceğiz. Burada zayıf süreklilik tanımını kullanacağız.

$u_0 \in P_0$'a bu uzayda zayıf yakınsayan keyfi $\{u_m\} \subset P_0$ dizisi ($u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$) için

$$\phi_1(x,u_{m_k},t) \underset{L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)}{\rightharpoonup} \phi_1(x,u_0,t)$$

olacak şekilde $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ bulmak yeterlidir. Burada Lemma 2.29'u kullanacağız. Şimdi ϕ_1 dönüşümünün Lemma 2.29'un koşullarını sağladığını sırasıyla görelim:
Bu dönüşümün $L_{\rho+2}(Q_T)$'den $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$'ye sınırlı olduğunu görelim:

$\forall u \in L_{\rho+2}(Q_T)$ için aşağıdaki integrali değerlendirelim.

$$\int_0^T\int_\Omega |\phi_1(x,u,t)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dxdt = \int_0^T\int_\Omega (a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dxdt$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı için (2.1) eşitsizliğini gözönüne alırsak:

$$\leq 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\int_0^T\int_\Omega ((a(x,t))^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}|u(x,t)|^{\rho+2} + (b(x,t))^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}|u(x,t)|^{\frac{(\rho+2)(\nu+1)}{\rho+1}})dxdt$$

olur. İlk terim için $a(x,t) \in L_\infty(Q_T)$ olduğunu gözönüne alıp ikinci terim için aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsizliğini uygularsak:

$$d_1 := \begin{cases} \frac{\rho+1}{\rho-\nu} & \text{eğer } -1 < \nu < \rho \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{\rho+1}{\nu+1} & \text{eğer } -1 < \nu < \rho \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$\int_0^T \int_\Omega |\phi_1(x,u,t)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dxdt \leq 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|a\|_{L_\infty(Q_T)}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|u\|_{L_{\rho+2}(Q_T)}^{\rho+2} + 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|b\|_{L_{r_1}(Q_T)}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|u\|_{L_{\rho+2}(Q_T)}^{\frac{(\rho+2)(\nu+1)}{\rho+1}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten ϕ_1 dönüşümünün $L_{\rho+2}(Q_T)$'den $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$'ye sınırlı dönüşüm olduğu açıktır.

$\{u_m\} \subset P_0$ ve $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$ olsun. $P_0 \subset L_{\rho+2}(Q_T)$ olduğundan $u_m \underset{L_{\rho+2}(Q_T)}{\rightharpoonup} u_0$ olur.

$$P_0 \subset L_2(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T; (W_2^1(\Omega))^*) \hookrightarrow L_2(Q_T)$$

kompakt gömülmesini gözönüne alırsak $\exists\ \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow u_0$'dır

$\Phi_1(x,t,\cdot) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$ sürekli bir fonksiyondur.

Böylece Lemma 2.29'un tüm koşullarının sağlandığını kanıtladık. O zaman Lemma 2.29'u uygularsak $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ vardır ki

$$\phi_1(x, u_{m_k}, t) \underset{L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)}{\rightharpoonup} \phi_1(x, u_0, t)$$

olur.

$$L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T) \subset L_2(0,T; (W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$$

olduğundan

$$\Phi_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)}{\rightharpoonup} \Phi_1(x,t,u_0)$$

zayıf yakınsamasını elde ederiz.

O zaman Φ_1 dönüşümü P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$'ye zayıf sürekli olur.

Böylece $f_1 : P_0 \longrightarrow L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğu ispatlanmış oldu.

Şimdi $f_2 : L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğunu ispatlayalım:

Bu dönüşümün sınırlı olduğunu Lemma 3.3'de ispatlamıştık. Ayrıca doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir. Buradan zayıf sürekliliği elde edilir. ■

Lemma 3.5 *f ve A dönüşümleri Teorem 3.2' nin koşulları altında $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. A dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından *coercive* ikilik bize f dönüşümünün $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$'da adi coercive olmasını verir. Şimdi $\langle\, f\,(u)\,, u\,\rangle_{Q_T}$ dual formuna bakalım.

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} = \int_0^T\int_\Omega(-\Delta u)u\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega a(x,t)|u|^{\rho+2}dxdt - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)\,|u|^{\nu+2}\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}u\,dx'dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt$$

Bu eşitliğin 1.terimine sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygular ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak;

$$\int_0^T\langle f(u),u\rangle_\Omega dt = \int_0^T\int_\Omega(Du)^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega a(x,t)|u|^{\rho+2}dxdt - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt \tag{3.11}$$

elde edilir.

Buradan sonra Lemma'nın ispatını (i) $-1<\nu<\rho$ olduğunda, (ii) $\rho=\nu$ olduğunda ayrı ayrı göstereceğiz.

(i) $-1<\nu<\rho$ olduğunda;

(3.11) eşitsizliğinde $a(x,t)\geq a_0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int_0^T\langle f(u),u\rangle_\Omega dt \geq \int_0^T\int_\Omega(Du)^2dxdt + a_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt$$

Bu eşitsizliğin 3. terimine $\frac{\rho+2}{\rho-\nu}$, $\frac{\rho+2}{\nu+2}$ sabitleri ile Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \int_0^T \int_\Omega (Du)^2 dxdt + a_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - \|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} \|u\|^{\nu+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x',t) u^2 dx'dt$$

Bu eşitsizliğin 3. terimine aynı üslerle Young Eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + a_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} - \varepsilon \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x',t) u^2 dx'dt$$

elde edilir. Son eşitsizlikten;

$$\geq \min\{1, a_0 - \varepsilon\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x',t) u^2 dx'dt \tag{3.12}$$

olur.

$k(x',t)$ fonksiyonu için (iv) koşulunu gözönüne alırsak:

$$\geq \min\{1, a_0 - \varepsilon\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} - k_0 \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))}$$

Burada (2.7) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \min\{1, a_0 - \varepsilon\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} - k_0 c_3^2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

Burada son terim için (2.3) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \min\{1, a_0 - \varepsilon\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}$$

$$-k_0 c_3^2 (\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} + c'T)$$

$$= (\min\{1, a_0 - \varepsilon\} - k_0 c_3^2)(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} - k_0 c_3^2 c'T$$

İlk terim için (2.3) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \frac{1}{2}(\min\{1, a_0 - \varepsilon\} - k_0 c_3^2)(\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - c'T) - c(\varepsilon) \|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} - k_0 c_3^2 c'T$$

$$\geq \frac{1}{2}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)}-1-c'T)-c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}-k_0c_3^2c'T$$

$$= \frac{1}{2}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)})-c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}$$

$$-\frac{1}{2}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(1+c'T)-k_0c_3^2c'T$$

İlk terim için (2.1) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \frac{1}{4}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\|u\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^2-c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}$$

$$-\frac{1}{2}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(1+c'T)-k_0c_3^2c'T$$

olur. Arakesit normunu kullanırsak;

$$\langle f(u),u\rangle \geq \frac{1}{4}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}-c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}$$

$$-\frac{1}{2}(\min\{1,a_0-\varepsilon\}-k_0c_3^2)(1+c'T)-k_0c_3^2c'T \qquad (3.13)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(ii) $\nu=\rho$ olduğunda;

$$\int_0^T\langle f(u),u\rangle_\Omega dt \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)}+\int_0^T\int_\Omega(a(x,t)-b(x,t))|u|^{\rho+2}dxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt$$

Teoremin koşulunu gözönüne alırsak;

$$\geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)}+b_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt$$

$$\geq min\{1,b_0\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}+\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)})+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'dt$$

Benzer işlemleri yaptığımızda aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\geq \frac{1}{4}(min\{1,b_0\}-k_0c_3^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}-k_0c_3^2c'T-\frac{1}{2}(min\{1,b_0\}-k_0c_3^2)(c'T+1) \qquad (3.14)$$

olur.

Teorem 3.2'nin koşullarını da gözönüne alırsak (3.13), (3.14) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)} \nearrow \infty$$

olduğunda

$$\frac{1}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}} \int_0^T \langle f(u), u\rangle_\Omega dt \nearrow \infty$$

olur.

Böylece f dönüşümünün Teorem 3.2'nin koşulları altında $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)$'da *coercive* olduğunu ispatladık. ■

Teorem 3.2'nin İspatı. A birim dönüşüm olarak alındığından Teorem 2.41'in (ii) koşulunu sağlamaktadır. Ayrıca, keyfi $u \in W_2^1(Q_T)$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır;

$$\int_0^T \langle u, u\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \geq c_7 \|u\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)}$$

h.h.h. $t \in [0,T]$ için

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2} c_8 \|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

($c_7, c_8 > 0$ Sobolev gömülme eşitsizliklerinden gelmektedir.) Lemma 3.3, Lemma 3.4, Lemma 3.5 ten görülmektedir ki tanımladığımız f ve A dönüşümleri Teorem 2.41'in tüm koşullarını sağlar. Böylece Teorem 2.41'i problem (1)-(3)'e uygulayabiliriz.

O halde problem(1)-(3) aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+ L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0'da çözülebilirdir.

$$\sup\left\{\frac{1}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}} \int_0^T \langle h, u\rangle_\Omega + \langle \varphi, u\rangle_{\partial\Omega} \, dt : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)\right\} < \infty$$

Burada $[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayından alınan (h,φ) genelleşmiş fonksiyonlarının aşağıdaki norm tanımlarını gözönüne alalım;

$$\|h\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)} = \sup\{\frac{\langle h, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)}} : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\rho+2}(Q_T)\}$$

$$\|\varphi\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = \sup\{\frac{\langle \varphi, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))\}$$

O zaman her $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1)-(3) P_0'da çözülebilirdir. $\blacksquare$

3.3 Alt Lineer Durumda Problem (1)-(3)'ün Çözülebilirliği

Bu bölümde problem(1)-(3)'ü $-1 < \rho \leq 0$, $-1 < \nu < 0$ veya $-1 < \rho < 0$, $-1 < \nu \leq 0$ olduğunda inceleceyiz.

Burada $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\rho+2}(Q_T)$ olduğundan Tanım 3.1'deki P_0 uzayı aşağıda tanımlandığı gibi alınacaktır;

$P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$.

Bölüm 3.1'deki ***(i)*** koşulunda yer alan p_1, r_1, p_2, r_2 sayıları aşağıdaki gibi alınacaktır;

$$p_1 := \begin{cases} \frac{2}{|\rho|}, & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \\ \infty, & \text{eğer } \rho = 0 \end{cases} \qquad p_2 := \begin{cases} \frac{2n}{\rho(2-n)+4}, & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \\ \frac{n}{2}, & \text{eğer } \rho = 0 \end{cases}$$

$$r_1 := \begin{cases} \frac{2}{|\nu|}, & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \\ \infty, & \text{eğer } \nu = 0 \end{cases} \qquad r_2 := \begin{cases} \frac{2n}{\nu(2-n)+4}, & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \\ \frac{n}{2}, & \text{eğer } \nu = 0 \end{cases}$$

Alt lineer durum için varlık teoremini ifade edebiliriz:

Teorem 3.6 ***(i)***, ***(ii)*** *koşulları sağlansın. Ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın;*

(iii) *Öyle bir $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $k(x',t) \geq k_0$ eşitsizliği sağlanır.*

(iv) *Eğer $\nu = 0$ ise $\|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))} < \frac{1}{\tilde{c}c_1^2} min\{1, k_0\}$ eşitsizliği sağlanır.*

Bu taktirde keyfi $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem(1)-(3) P_0'da çözülebilirdir.

Teorem 3.6'nın ispatı için Teorem 2.41'i kullanacağız. Bunun için problem (1)-(3)'ün yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^* \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

$$f_1(u) := -\Delta u + a(x,t)|u|^\rho u - b(x,t)|u|^\nu u$$

$$f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u$$

$$A := Id : P_0 \to P_0$$

Gerekli uzayları ve dönüşümleri belirledik. Şimdi bu dönüşümlerin Teorem 2.41'in koşullarını sağladığını görmek için bu dönüşümler üzerine gerekli lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.7 *f dönüşümü Teorem 3.6' nın koşulları altında P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına sınırlı bir dönüşümdür.*

İspat. Bu dönüşümün sınırlı olduğunu görmek için f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda sınırlı olduğunu tek tek gösterelim. Önce

$$f_1 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim:

$u, v \in P_0$ olmak üzere;

$$\|f_1(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}=1} |\langle f_1(u), v\rangle| \tag{3.15}$$

şeklindedir. Üst lineer durumda aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştik;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \int_0^T \int_\Omega |Du|\,|Dv|\,dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| dx'dt + \int_0^T \int_\Omega a(x,t)\,|u|^{\rho+1}\,|v|\,dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega b(x,t)\,|u|^{\nu+1}\,|v|\,dxdt \tag{3.16}$$

Bu eşitsizliğin ilk iki terimi için üst lineer durumda aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmiştik;

$$\int_0^T \int_\Omega |Du|\,|Dv|\,dxdt \leq \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.17}$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{du}{d\eta} v\right| dx'dt \leq c_1^2\,\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\,\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.18}$$

(3.16) eşitsizliğinin 3. terimine aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$d_1 := p_2$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2n}{(n-2)(\rho+1)} & \text{eğer} \quad -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \frac{2n}{n-2} & \text{eğer} \quad \rho = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \frac{2n}{n-2}$$

$$\int_0^T \int_\Omega a(x,t)\,|u|^{\rho+1}\,|v|\,dxdt \leq \int_0^T \|a\|_{L_{p_2}(\Omega)}\,\|u\|^{\rho+1}_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|v\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} dt$$

olur. Burada $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\leq c_1^{\rho+2} \int\limits_0^T \|a\|_{L_{p_2}(\Omega)} \|u\|^{\rho+1}_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} dt$$

olur, aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsizliğini tekrar uygularsak;

$$d_1 := p_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2}{\rho+1} & \text{eğer} \quad -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ 2 & \text{eğer} \quad \rho = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := 2$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega a(x,t)\, |u|^{\rho+1}\, |v|\, dxdt \leq c_1^{\rho+2} \|a\|_{L_{p_1}(0,T;L_{p_2}(\Omega))} \|u\|^{\rho+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

olur.

(3.16) eşitsizliğinin 4. terimine aşağıdaki sabitlerle Hölder eşitsizliğini uygulayalım;

$$d_1 := r_2$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2n}{(n-2)(\nu+1)} & \text{eğer} \quad -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{2n}{n-2} & \text{eğer} \quad \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \frac{2n}{n-2}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega b(x,t)|u|^{\nu+1}|v| dxdt \leq \int\limits_0^T \|b(x,t)\|_{L_{r_2}(\Omega)} \|u\|^{\nu+1}_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|v\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} dt$$

olur. Burada $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\leq c_1^{\nu+2} \int\limits_0^T \|b\|_{L_{r_2}(\Omega)} \|u\|^{\nu+1}_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} dt$$

olur, aşağıdaki terimlerle Hölder Eşitsizliğini tekrar uygularsak;

$$d_1 := r_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2}{\nu+1} & \text{eğer} \quad -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ 2 & \text{eğer} \quad \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := 2$$

$$\leq \|b(x,t)\|_{L_{r_1}\left(0,T;L_{r_2}(\Omega)\right)} \|u\|^{\nu+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.17), (3.18), (3.19), (3.20) eşitsizliklerini (3.16) eşitsizliğinde gözönüne alırsak;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq ((1+c_1^2)\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + c_1^{\rho+2}\|a\|_{L_{p_1(0,T;L_{p_2}(\Omega))}}\|u\|^{\rho+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+$$

$$\|b\|_{L_{r_1}\left(0,T;L_{r_2}(\Omega)\right)} \|u\|^{\nu+1}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki parantezli kısmı $\gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})$ ile gösterelim. O zaman

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik keyfi $u, v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ için var olduğundan $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} = 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.15)' ye göre

$$\|f_1(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} \leq \gamma(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})$$

γ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan $\forall u \in B\,(0,r) \subset L_2(0,T;W_2^1\,(\Omega))$ için

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq r$$

iken

$$\gamma\left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\right) \leq \ \gamma\,(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_1\,(u)\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} \leq \ \gamma\,(r)$$

bulunur.

$P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ olduğundan f_1 dönüşümünün P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1\,(\Omega))^*)$'ye sınırlı dönüşüm olduğunu ispatladık.
f_2 dönşümünün $L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$'dan $L_2(0,T;W_2^{\frac{-1}{2}}(\partial\Omega))$'ya sınırlı bir dönüşüm olduğunu Lemma 3.3'de ispatlamıştık. ■

Lemma 3.8 *f dönüşümü Teorem 3.6'nın koşulları altında, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1\,(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli bir dönüşümdür.*

İspat. f dönüşümünün doğrusal kısımlarının sınırlı olduğunu lemma 3.7'den biliyoruz, o zaman doğrusal sürekli olur. Dolayısıyla da zayıf sürekli olur. f dönüşümünün doğrusal olmayan kısımının zayıf sürekliliğinin gösterelim. Bunun için aşağıdaki $\widetilde{f}$ dönüşümünü tanımlayalım.

$$\widetilde{f}(x,t,u) := a(x,t)\,|u|^{\rho}\,u - b(x,t)\,|u|^{\nu}\,u$$

$\{u_m\} \subset P_0$ dizisi bu uzayda $u_0 \in P_o$'a zayıf yakınsasın ($u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$). O zaman

$$\widetilde{f}(x,u_{m_k},t) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega)))^*}{\rightharpoonup} \widetilde{f}(x,u_0,t)$$

olacak şekilde $\exists\,\{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ bulmak yeterlidir.
$\widetilde{f}$ dönüşümünün $P_0 \subset L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))$'dan $L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))$'ya sınırlı olduğunu görelim:

$\forall u \in L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))$ için aşağıdaki normu değerlendirelim.

$$\|\widetilde{f}(x,u)\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} = \|a(x,t)|u|^{\rho}u - b(x,t)|u|^{\nu}u\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))}$$

$$\leq \|a(x,t)|u|^{\rho+1}\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} + \|b(x,t)|u|^{\nu+1}\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} \tag{3.21}$$

$$= (\int_0^T (\int_\Omega (a(x,t)|u|^{\rho+1})^{\frac{2n}{n+2}}dx)^{\frac{n+2}{n}}dt)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (\int_\Omega (b(x,t)|u|^{\nu+1})^{\frac{2n}{n+2}}dx)^{\frac{n+2}{n}}dt)^{\frac{1}{2}}$$

Bu eşitsizliğin 1.terimine

$$d_1 := \begin{cases} \frac{n+2}{\rho(2-n)+4} & \text{eğer } -1<\rho<0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho=0 \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$d_2 := \begin{cases} \frac{n+2}{(n-2)(\rho+1)} & \text{eğer } -1<\rho<0 \text{ ise;} \\ \frac{n+2}{n-2} & \text{eğer } \rho=0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olacak şekilde Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$(\int_0^T (\int_\Omega (a(x,t)|u|^{\rho+1})^{\frac{2n}{n+2}}dx)^{\frac{n+2}{n}}dt)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_0^T \|a\|^2_{L_{p_2(\Omega)}}\|u\|^{2(\rho+1)}_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}dt)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir, sağ taraf için aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$s_1 := \begin{cases} \frac{1}{|\rho|} & \text{eğer } -1<\rho<0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho=0 \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$s_2 := \begin{cases} \frac{1}{\rho+1} & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \rho = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$\|a(x,t)|u|^{\rho+1}\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} \leq \|a\|_{L_{p_1}(0,T;L_{p_2}(\Omega))}\|u\|^{(\rho+1)}_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))} \tag{3.22}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.21) eşitsizliğinin 2.terimine aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsiliğini uygulayalım:

$$d_1 := \begin{cases} \frac{n+2}{\nu(2-n)+4} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{n+2}{4} & \text{eğer } \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$d_2 := \begin{cases} \frac{n+2}{(n-2)(\nu+1)} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{n+2}{n-2} & \text{eğer } \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$(\int_0^T(\int_\Omega(b(x,t)|u|^{\nu+1})^{\frac{2n}{n+2}}dx)^{\frac{n+2}{n}}dt)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_0^T \|b\|^2_{L_{r_2}(\Omega)}\|u\|^{2(\nu+1)}_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}dt)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir, sağ taraf için aşağıdaki sabitlerle Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$s_1 := \begin{cases} \frac{1}{|\nu|} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$s_2 := \begin{cases} \frac{1}{\nu+1} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \nu = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$\|b(x,t)|u|^{\rho+1}\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} \leq \|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))}\|u\|^{(\nu+1)}_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))} \tag{3.23}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.22),(3.23) eşitsizliklerini(3.21) eşitsizliğinde gözönüne alırsak $\widetilde{f}$ için aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz:

$$\|\widetilde{f}(x,u)\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))} \leq \|a\|_{L_{p_1}(0,T;L_{p_2}(\Omega))}\|u\|^{(\rho+1)}_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))} + \|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))}\|u\|^{(\nu+1)}_{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))}$$

Böylece, $P_0 \subset L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))$ olduğundan $\widetilde{f}$ dönüşümünün P_0'dan $L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))$'ya sınırlı bir dönüşüm olduğunu elde ederiz.

$\{u_m\} \subset P_0$ ve $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$ olduğunu biliyoruz, $P_0 \subset L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))$ olduğundan $u_m \underset{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))}{\rightharpoonup} u_0$ olur.

$$L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \hookrightarrow L_2(Q_T)$$

kompakt gömülmesini gözönüne alırsak $\exists\,\{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow u_0$'dır

$\widetilde{f}(x,t,\boldsymbol{.}) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$ sürekli bir fonksiyondur.

Böylece Lemma 2.29'un tüm koşullarının sağlandığını kanıtladık. O zaman Lemma 2.29'a göre $\exists\,\{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ vardır ki

$$\widetilde{f}(x,u_{m_k},t) \underset{L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega))}{\rightharpoonup} \widetilde{f}(x,u_0,t)$$

olur.

$$L_2(0,T;L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

olduğundan

$$\widetilde{f}(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} \widetilde{f}(x,t,u_0)$$

zayıf yakınsamasını elde ederiz. O zaman $\widetilde{f}$ dönüşümü P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*))$'a zayıf sürekli olur. ■

Lemma 3.9 *f ve A dönüşümleri Teorem 3.6'nın koşulları altında $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. A dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından *coercive* ikilik bize f dönüşümünün $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$'da adi coercive olmasını verir.

$\langle f(u),u\rangle_{Q_T}$ dual formunun aşağıdaki gibi olduğunu üst lineer durumda elde etmiştik.

$$\int_0^T \langle f(u),u\rangle_\Omega dt = \int_0^T\int_\Omega (Du)^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega a(x,t)|u|^{\rho+2}dxdt - \int_0^T\int_\Omega b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x',t)u^2dx'dt$$

Burada $a(x,t)\geq 0$ ve $k(x',t)\geq k_0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int_0^T \langle f(u),u\rangle_\Omega dt \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))} - \int_0^T b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt$$

$$\geq\ min\{1,k_0\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))}) - \int_0^T b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt$$

İlk terim için (2.2) eşitsizliğini gözönüne alırsak:

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T b(x,t)|u|^{\nu+2}dxdt \tag{3.24}$$

olur. Buradan sonra ispatın devamını $-1 < \nu < 0$ ve $\nu = 0$ olduğunda ayrı ayrı yapacağız.

(i) $-1 < \nu < 0$ olduğunda;

(3.24) eşitsizliğinin 2.terimine $\frac{2n}{\nu(2-n)+4}$ ve $\frac{2n}{(n-2)(\nu+2)}$ sabitleri ile Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|b\|_{L_{r_2}(\Omega)}\|u\|^{\nu+2}_{L_{\frac{n}{n-2}}(\Omega)}dt$$

olur. Son terimde (2.5) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c_1^{\nu+2}\int_0^T \|b\|_{L_{r_2}(\Omega)}\|u\|^{\nu+2}_{W_2^1(\Omega)}dt$$

olur. Son terime $\frac{2}{\nu}$ ve $\frac{2}{\nu+2}$ sabitleri ile Hölder eşitsizliğini uygularsak:

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c_1^{\nu+2}\|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))}\|u\|^{\nu+2}_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

olur. Son terime $\frac{2}{|\nu|}$ ve $\frac{2}{\nu+2}$ üsleri ile Young eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon)(c_1^{\nu+2}\|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))})^{\frac{2}{|\nu|}}$$

$$= (\frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\} - \varepsilon)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon)(c_1^{\nu+2}\|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))})^{\frac{2}{|\nu|}}$$

olur. Burada $0 < \varepsilon < \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}$ olacak şekilde seçelim. O halde elde ettiğimiz son eşitsizlikten görülmektedir ki

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \nearrow \infty \quad iken \quad \frac{f(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} \nearrow \infty$$

olur.

(ii) $\nu = 0$ olduğunda;

(3.24) eşitsizliğinin 2.terimine $\frac{n}{2}$ ve $\frac{n}{n-2}$ sabitleri ile Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \frac{1}{\underset{c}{\sim}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|b\|_{L_{r_2}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}dt$$

olur. Son terimde (2.5) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c_1^2 \int_0^T \|b\|_{L_{r_2}(\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} dt$$

olur. Son terime Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\, min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c_1^2 \|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

olur. Burada $\|b\|_{L_{r_1}(0,T;L_{r_2}(\Omega))} < \frac{1}{\tilde{c} c_1^2}\, min\{1, k_0\}$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \nearrow \infty \quad iken \quad \frac{\langle f(u), u\rangle_{Q_T}}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} \nearrow \infty$$

olduğunu elde ederiz.

■ **Teorem 3.6'nın İspatı.**

A birim dönüşüm olarak alındığından Teorem 2.41'in (II) koşulunu sağlamaktadır. Ayrıca, keyfi $u \in W_2^1(Q_T)$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır;

$$\int_0^T \langle u, u\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_7 \|u\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}$$

$h.h.h. \quad t \in [0, T]$ için

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2} c_7 \|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

($c_7 > 0$ Sobolev gömülme eşitsizliğinden gelmektedir.) Lemma 3.7, Lemma 3.8, Lemma 3.9'dan görülmektedir ki f ve A dönüşümleri Teorem 2.41'in tüm koşullarını sağlar. O halde problem(1)-(3) aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h, \varphi) \in L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0, T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0'da çözülebilirdir.

$$\sup \left\{ \frac{1}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} \int_0^T \langle h, u\rangle_\Omega + \langle \varphi, u\rangle_{\partial\Omega} \, dt : u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \right\} < \infty$$

Burada $L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0, T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayından alınan (h, φ) genelleşmiş fonksiyonlarının aşağıdaki norm tanımlarını gözönüne alırsak;

$$\|h\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} = \sup\{\frac{\langle h, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))\}$$

$$\|\varphi\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = \sup\{\frac{\langle \varphi, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}} : u \in L_2(0, T; W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))\}$$

her $(h, \varphi) \in L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0, T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1)-(3) P_0'da çözülebilir olduğu elde edilir. ■

3.4 Lineer Durumda Problem (1)-(3)'ün Çözülebilirliği ve Çözümün Tekliği

Bu bölümde $\rho = \nu = 0$ olduğunda problemi inceleyeceğiz. Burada $P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$ olarak alınacaktır.
2. Bölümde yer alan ***(i)*** koşulunda bulunan p_1, r_1, p_2, r_2 terimleri aşağıda olduğu gibi alınacaktır:

$$p_1 = r_1 = \infty \quad and \quad p_2 = r_2 = \frac{n}{2}$$

Teorem 3.10 *(i) ve (ii) sağlansın. $\rho = \nu = 0$ olsun. Ek olarak aşağıdaki koşullardan biri sağlansın;*

(iii) Öyle $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $k(x',t) \geq k_0$'dır. Bu durumda aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

(a_1) Öyle $b_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $(a(x,t) - b(x,t)) \geq -b_0$ ve $b_0 < \frac{min\{k_0,1\}}{\tilde{c}c_2^2}$ sağlanır.

(b_1) $\|a-b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} < \frac{min\{k_0,1\}}{\tilde{c}c_1^2}$

(c_1) $\|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} < \frac{min\{k_0,1\}}{\tilde{c}c_1^2}$

(iv) Öyle $d_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $(a(x,t)-b(x,t)) \geq d_0$ eşitsizliği sağlanır.
Bu durumda k fonksiyonu aşağıdaki koşullardan birini sağlasın:

(a_2) Öyle $k_1 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $k(x',t) \geq -k_1$ sağlanır ve $k_1 < \frac{min\{d_0,1\}}{c_3^2}$'dir.

(b_2) $\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} < \frac{min\{d_0,1\}}{c_4^2}$

Bu taktirde keyfi $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem(1)-(3)'ün P_0'da tek çözümü vardır.

Teorem 2.41'i kullanacağız. Bunun için problem (1)-(3)'ün yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım:

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

$$f_1(u) := -\Delta u + a(x,t)u - b(x,t)u$$

$$f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u$$
$$A := Id : P_0 \to P_0$$

Teorem 3.10'un İspatı. Alt lineer durumda, Lemma 3.8'in ispatında $\rho = 0$, $\nu = 0$ alındığında, f dönüşümünün Teorem 3.10'un koşulları altında P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına sınırlı bir dönüşüm olduğu açıktır. Ayrıca f lineer sınırlı olduğundan lineer sürekliliği dolayısıyla da zayıf sürekliliği elde edilir.

Şimdi f dönüşümünün $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ üzerinde coercive olduğunu göserelim:

$$\int_0^T \langle f(u),u\rangle dt = \int_0^T\int_\Omega (Du)^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega (a(x,t)-b(x,t))|u|^2dxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x',t)u^2dx'dt$$

Teorem (3.10)'un (iii) koşulu sağlansın:

$$\geq \int_0^T\int_\Omega (Du)^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega (a(x,t)-b(x,t))|u|^2dxdt + k_0\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))} \qquad (3.25)$$

$$\geq \ min\{1,k_0\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))}) - \int_0^T (a(x,t)-b(x,t))|u|^2dxdt$$

Yukarıdaki ifadenin ilk teriminde (2.2) eşitsizliğini gözönüne alırsak:

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1,k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \int_0^T\int_\Omega (a(x,t)-b(x,t))|u|^2dxdt$$

olur.

Şimdi (iii)-a_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1,k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - b_0\int_0^T |u|^2dxdt$$

olur,

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1,k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - b_0c_2^2\int_0^T \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}dt = (\frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1,k_0\} - b_0c_2^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \qquad (3.26)$$

elde edilir. Şimdi (iii)-b_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

(3.25) eşitsizliğinin 2. terimine Hölder Eşitsizliğini uygulayalım,

$$\int_0^T \langle f(u), u\rangle dt = \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|a-b\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}} dt$$

olur,

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|a-b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2 \int_0^T \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} dt$$

$$= (\frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\} - \|a-b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \qquad (3.27)$$

elde edilir.

Şimdi (iii)-c_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

(3.25) eşitsizliğinde $a \geq 0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int_0^T \langle f(u), u\rangle dt \geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|b\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}} dt$$

olur,

$$\geq \frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2 \int_0^T \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} dt$$

$$= (\frac{1}{\tilde{c}}\ min\{1, k_0\} - \|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \qquad (3.28)$$

Teorem (3.10)'un (iv) koşulu sağlansın:

$$\geq \int_0^T \int_\Omega (Du)^2 dxdt + d_0\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x', t)|u|^2 dx'dt$$

$$\geq min\{1, d_0\}(\|Du\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x', t)|u|^2 dx'dt \qquad (3.29)$$

elde edilir.

Şimdi (iv)-a_2 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$\geq min\{1, d_0\}(\|Du\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}) - k_1\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))}$$

$$\geq min\{1, d_0\}(\|Du\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}) - k_1 c_3^2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$= (min\{1, d_0\} - k_1 c_3^2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}) \tag{3.30}$$

elde edilir.

Şimdi (iv)-b_2 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$\geq min\{1, d_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \int_0^T \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega))} dt$$

$$\geq min\{1, d_0\}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} c_4^2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$= (min\{1, d_0\} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} c_4^2) \int_0^T \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} dt \tag{3.31}$$

elde edilir.

Teorem koşullarını ve (3.26), (3.27), (3.28), (3.30), (3.31) eşitsizliklerini birlikte gözönüne alırsak açıktır ki:

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \nearrow \infty \quad iken \quad \frac{\langle f(u), u\rangle_{Q_T}}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} \nearrow \infty$$

olur. Böylece *coercivelik* elde edilir. İlk iki alt bölüme benzer şekilde görülmektedir ki, f dönüşümü ile A dönüşümü Teorem 2.41'in tüm koşullarını sağlar. O halde keyfi $(h, \varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1)-(3) P_0'da çözülebilirdir.

Şimdi çözümün tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki u ve v problem (1)-(3)'ün P_0 uzayından iki farklı çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (a(x,t) - b(x,t))u = \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (a(x,t) - b(x,t))v$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x',t)u = \frac{\partial v}{\partial \eta} + k(x',t)v$$

$w := u - v$ ile gösterirsek aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + (a(x,t) - b(x,t))w = 0$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + k(x',t)w\right)\right|_{\Sigma_T} = 0$$

$$w(x,0) = 0$$

$w(x,t)$ aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\langle \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + (a(x,t) - b(x,t))w, w \rangle_{Q_T} = 0$$

Kısmi integrasyon uygulayıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w dx dt + \int_0^T \int_\Omega |Dw|^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega (a(x,t) - b(x,t)) w^2 dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x', t) w^2 dx' dt$$

eşitliğini elde ederiz. $\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w dx dt = \frac{1}{2} \|w\|^2_{L_2(\Omega)}(T) > 0$ olduğunu yukarıda gözönüne alırsak:

$$0 > \int_0^T \int_\Omega |Dw|^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega (a(x,t) - b(x,t)) w^2 dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x', t) w^2 dx' dt$$

olur. Son eşitsizlikte sırasıyla Teoremin koşullarını gözönüne alalım.

Teoremin (iii) ve (iii)-a_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$0 > (\frac{1}{\underset{\sim}{c}} \, min\{1, k_0\} - b_0 c_2^2) \|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir.

Şimdi Teoremin (iii) ve (iii)-b_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$0 > (\frac{1}{\underset{\sim}{c}} \, min\{1, k_0\} - \|a - b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2) \|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir.

Şimdi (iii) ve (iii)-c_1 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$0 > (\frac{1}{\underset{\sim}{c}} \, min\{1, k_0\} - \|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} c_1^2) \|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

Teorem'in (vi) ve (iv)-a_2 koşulu sağlansın:

$$0 > (min\{1, d_0\} - k_1 c_3^2) \|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir.

Şimdi (iv)-b_2 koşulunun sağlandığını kabul edelim:

$$0 > (min\{1, d_0\} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} c_4^2) \int_0^T \|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} dt$$

elde edilir.

Teorem koşulları ve yukarıda elde ettiğimiz eşitsizliklerin sağ taraflarını birlikte gözönüne alırsak açıktır ki bu ifadelerin her biri pozitifdir. Sonuç olarak $0 > 0$ çelişkisini elde etmiş oluruz. Buradan $w = 0$ dolayısıyla da $u = v$ olur. ■

3.5 Başlangıç Koşulu Sıfırdan farklı Olduğunda, Problem (1)-(3)'ün Çözülebilirliği ve Çözümün tekliği

Bu bölümde problem (1)-(3)'ü sıfırdan farklı bir başlangıç koşulu ($u(x,0) = u_0(x)$) altında, üst lineer durumda inceleyeceğiz. Problem için aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $a \in L_\infty(Q_T)$, $\nu < \rho$ iken $b \in L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)$ ve $\nu = \rho$ iken $b \in L_\infty(Q_T)$'dır.

(ii) $k \in L_\infty(0,T; L_{n-1}(\partial\Omega))$'dır.

(iii) $\rho, \nu > 0$ olarak verilen sayılardır ve $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'dır.

P_0 uzayı aşağıda olduğu gibi tanımlansın;
$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T) \cap [W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + W^1_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T; L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))] \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$

Teorem 3.11 *Problem (1)-(3) için* **(i)-(iii)** *koşulları sağlansın ve $\nu \le \rho$ olsun. Ek olarak aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:*

(iv) • *$0 < \nu < \rho$ olduğunda öyle bir $a_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $a(x,t) \ge a_0$ dır,*

• *$\nu = \rho$ olduğunda öyle bir $b_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $a(x,t) - b(x,t) \ge b_0$ dır.*

(v) *Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $k(x',t) \ge -k_0$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ sayısı vardır, burada*

$$k_0 < \begin{cases} \frac{min\{a',\theta_1\}}{c_3^2}, & eğer\ 0\nu < \rho \\ \\ \frac{min\{b',\theta_1\}}{c_3^2}, & eğer\ \nu = \rho \end{cases}$$

Bu koşullar sağlandığı takdirde $\forall (h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1)-(3)'ün P_0'da genelleşmiş çözümü vardır(burada θ_1, a' ve b' pozitif sabitlerdir öyle ki $a' < a_0$, $b' < b_0$, $\theta_1 < 1$).

İspat. Bu Teoremin ispatında ilk bölümde olduğu gibi, aynı genel teoremi kullanacağız. Bu yüzden başlangıç koşulunu sıfır yapacak şekilde bir öteleme yapmalıyız.
$\widetilde{u}(x,t) := u(x,t) - u_0(x)$ olsun. Ozaman $\widetilde{u}(x,0) := 0$ olur. Buradan $u(x,t) := \widetilde{u} + u_0(x)$ olur. Bunu problemde yazarsak aşağıdaki yeni problemi elde ederiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\widetilde{u}+u_0)}{\partial t} - \Delta(\widetilde{u}+u_0) + a(x,t)\left|(\widetilde{u}+u_0)\right|^{\rho}(\widetilde{u}+u_0) - b(x,t)\left|(\widetilde{u}+u_0)\right|^{\nu}(\widetilde{u}+u_0) = h(x,t) \\ (\dfrac{\partial(\widetilde{u}+u_0)}{\partial \eta} + k(x',t)(\widetilde{u}+u_0))|_{\Sigma_T} = \varphi(x',t) \\ \widetilde{u}(x,0) = 0 \end{cases}$$

bu problemin çözümünün varlığı için genel teoremi kullanabiliriz. Problemin yarattığı dönüşümleri belirleyelim:

$$f := \{f_1, f_2\}$$

$$f_1(\widetilde{u}) := -\Delta(\widetilde{u}+u_0) + a(x,t)|(\widetilde{u}+u_0)|^{\rho}(\widetilde{u}+u_0) - b(x,t)|(\widetilde{u}+u_0)|^{\nu}(\widetilde{u}+u_0)$$

$$f_2(\widetilde{u}) := \frac{\partial(\widetilde{u}+u_0)}{\partial \eta} + k(x',t)(\widetilde{u}+u_0)$$

$$A(\widetilde{u}) := \widetilde{u}$$

Bu dönüşümler için ilk bölümde üst lineer durumda u yerine $(\widetilde{u}+u_0)$ aldığımızda sınırlılık ve zayıf süreklilik hemen elde edilir. f ve A dönüşümlerinin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+2}(Q_T)$ üzerinde coercive ikili oluşturduğunu gösterelim:

$$\int_0^T \langle f(\widetilde{u}), \widetilde{u}\rangle_{\Omega} dt = \int_0^T \int_{\Omega} D(\widetilde{u}+u_0) D\widetilde{u} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} a(x,t)|\widetilde{u}+u_0|^{\rho}(\widetilde{u}+u_0)\widetilde{u} dx dt -$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} b(x,t)|\widetilde{u}+u_0|^{\nu}(\widetilde{u}+u_0)\widetilde{u} dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x',t)(\widetilde{u}+u_0)\widetilde{u} dx' dt,$$

$$\int_0^T \langle f(\widetilde{u}), (\widetilde{u})\rangle_{\Omega} dt \geq (1-\varepsilon_1) \int_0^T \|D(\widetilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(\Omega)} dt - c(\varepsilon_1) \int_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)} dt + a_0 \|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}$$

$$-\|a\|_{L_\infty(Q_T)} \|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+1}_{L_{\rho+2}(Q_T)} \|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} - \|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)} \|\widetilde{u}+u_0\|^{\nu+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - \|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}$$

$$\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} \|\widetilde{u}+u_0\|^{\nu+1}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - k_0 \int_0^T \|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)} dt -$$

$$\int_0^T \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \|\widetilde{u}+u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} dt$$

son eşitsizliğin sağtarafının 4, 5 ve 6. terimlerine Young eşitsizliğini uygularsak:

$$\geq (1-\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|D(\widetilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(\Omega)}dt + (a_0-3\varepsilon)\|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - c(\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$

$$-c(\varepsilon)(\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\rho+2} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu+1}} -$$

$$c(\varepsilon_2)(c_4^2\|k\|_{L_\infty(R^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2 - \varepsilon_2\|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - k_0\int\limits_0^T \|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}dt$$

olur, burada gerekli düzenlemeleri yaptığımızda sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\geq min\{1-\varepsilon_1, a_0-3\varepsilon\}(\|D(\widetilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$

$$-c(\varepsilon)(\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\rho+2} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu+1}} -$$

$$c(\varepsilon_2)(c_4^2\|k\|_{L_\infty(R^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2 - (k_0c_3^2+\varepsilon_2)\|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$\geq (min\{1-\varepsilon_1, a_0-3\varepsilon\} - k_0c_3^2 - \varepsilon_2)(\|D(\widetilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - c(\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$

$$-c(\varepsilon)(\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\rho+2} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu+1}} -$$

$$(k_0c_3^2+\varepsilon_2)c'T - c(\varepsilon_2)(c_4^2\|k\|_{L_\infty(R^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2$$

$$\geq \frac{1}{2}(min\{1-\varepsilon_1, a_0-3\varepsilon\} - k_0c_3^2 - \varepsilon_2)(\|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - c'T) -$$

$$c(\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)}dt - c(\varepsilon)(\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\rho+2} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}} -$$

$$c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu+1}} - (k_0c_3^2+\varepsilon_2)c'T - c(\varepsilon_2)(c_4^2\|k\|_{L_\infty(R^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2$$

burada $\varepsilon_1 < 1$, $\varepsilon < \frac{a_0}{3}$ ve c' (2.3) eşitsizliğinden gelmektedir, o halde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int\limits_0^T \langle f(\widetilde{u}), (\widetilde{u})\rangle_\Omega dt \geq K_1\|\widetilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + K_1\|\widetilde{u}+u_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_T)} - K$$

burada $K_1 = \frac{1}{2}(min\{1-\varepsilon_1, a_0 - 3\varepsilon\} - k_0c_3^2 - \varepsilon_2)$,
$K = -c(\varepsilon_1)\int\limits_0^T \|Du_0\|^2_{L_2(\Omega)}dt - c(\varepsilon)(\|a\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\rho+2} - c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}$
$-c(\varepsilon)(\|b\|_{L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu+1}} - c(\varepsilon_2)(c_4^2\|k\|_{L_\infty(R^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2$
$-\frac{1}{2}(min\{1-\varepsilon_1, a_0-3\varepsilon\} - k_0c_3^2 - \varepsilon_2)c'T - (k_0c_3^2+\varepsilon_2)c'T$
buradan

$$\geq K_1(\|\widetilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})^2 + K_1(\|\widetilde{u}\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} - \|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^2 - K_1 - K$$

$$\geq K_1(\|\widetilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - 2\|\widetilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))})+$$

$$K_1(\|\widetilde{u}\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - 2\|\widetilde{u}\|_{L_{\rho+2}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\rho+2}(Q_T)} + \|u_0\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)}) - K_1 - K$$

$$\geq K_1\|\widetilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - 2K_1\varepsilon_3\|\widetilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - 2K_1c(\varepsilon_3)\|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + K_1\|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$+K_1\|\widetilde{u}\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - 2K_1\varepsilon_3\|\widetilde{u}\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - 2K_1c(\varepsilon_3)\|u_0\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} + K_1\|u_0\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - K_1 - K$$

olur. Burada $\varepsilon_3 < \frac{1}{2}$ olarak alınmıştır. Son olarak elde ettiğimiz eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$$\int\limits_0^T \langle f(\widetilde{u}), (\widetilde{u})\rangle_\Omega dt \geq K_1\|\widetilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + K_1\|\widetilde{u}\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - K_2$$

burada

$$K_2 = K_1\|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - 2K_1c(\varepsilon_3)\|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + K_1\|u_0\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)}$$

$$-2K_1c(\varepsilon_3)\|u_0\|^2_{L_{\rho+2}(Q_T)} - K_1 - K$$

buradan

$$\int\limits_0^T \langle f(\widetilde{u}), (\widetilde{u})\rangle_\Omega dt \geq \frac{1}{2}K_1(\|\widetilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\widetilde{u}\|_{L_{\rho+2}(Q_T)})^2 - K_2$$

olur. Son eşitsizlikten *ceorcive*lik elde edilir. $\nu = \rho$ olduğunda $a(x,t)$ fonksiyonunu içeren terim üzerine yapılan benzer işlemler $a(x,t) - b(x,t)$'li terime uygulanarak sonuç elde edilir. O halde genel teoremin tüm koşulları sağlanır.
Her $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problemin $\widetilde{u} \in P_0$ çözümü vardır. Problem (1)-(3)'ün çözümü ise $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + u_0(x)$ olacaktır. ■

Teorem 3.12 *Teorem 3.11'in koşulları sağlansın.* $0 < \nu < \rho$ *olduğunda, hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *için* $b(x,t) \leq b_1$ *olacak şekilde bir* $b_1 < a_0$ *pozitif sayısı varsa çözüm tektir.*

Eğer u ve v problem (1)-(3)'ün başlangıç koşulları u_0 ve v_0 olan çözümleri ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|u(x,t) - v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u_0 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} e^{2(b_1(\rho+1)+1)t}, \quad \nu < \rho \ \ ise \tag{3.32}$$

$$\|u(x,t) - v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u_0 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} e^{2t}, \quad \nu = \rho \ \ ise \tag{3.33}$$

İspat. Kabul edelim ki u ve v problem (1)-(3)'ün P_0 uzayından iki farklı çözümü olsun. O halde $w := u - v$ ve $f(x,t,u) = a(x,t)\,|u|^\rho\, u - b(x,t)\,|u|^\nu\, u$ ile gösterirsek aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + (f(x,t,u) - f(x,t,v)) = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + k(x',t)w\right)\Bigg|_{\Sigma_T} = 0$$

$$w(x,0) = 0$$

İlk denklemi w ile çarpıp Ω üzerinde integral alıp kısmi integrasyon yaparsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)w^2 dx' + \int\limits_{\Omega} (f(x,t,u) - f(x,t,v))w dx = 0 \tag{3.34}$$

İspatı $\nu < \rho$ ve $\nu = \rho$ olduğunda ayrı ayrı yapalım:

$\nu < \rho$ olsun;

$$\frac{\partial f(x,t,u)}{\partial u} := (\rho+1)a(x,t)\,|u|^\rho - (\nu+1)b(x,t)\,|u|^\nu$$

teoremin koşullarından aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{\partial f(x,t,u)}{\partial u} \geq (\rho+1)a_0\,|u|^\rho - (\nu+1)b_1\,|u|^\nu \geq (\rho+1)(a_0 - b_1)\,|u|^\rho - (\rho+1)b_1$$

o zaman

$$(f(x,t,u) - f(x,t,v))w \geq -b_1(\rho+1)w^2 \tag{3.35}$$

olur. Eğer (3.35) eşitsizliğini (3.34)'de kullanırsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} - b_1(\rho+1)\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)w^2 dx' \leq 0$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - k_0 c_3^2)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (b_1(\rho+1)+1)\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 0$$

$k_0 < \frac{1}{c_3^2}$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} - (b_1(\rho+1)+1)\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğe Gronwall Lemma'yı uygularsak (3.32) eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $\nu = \rho$ ise,

$$\frac{\partial f(x,t,u)}{\partial u} = (\rho+1)(a(x,t)-b(x,t))\,|u|^\rho \geq (\rho+1)b_0\,|u|^\rho$$

olduğundan $(f(x,t,u) - f(x,t,v))w \geq 0$ olur. Son eşitsizliği (3.34)'de kullanırsak $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|w\|^2_{L_2(\Omega)}$ olur, benzer şekilde Grobwall lemma'yı kullanarak (3.33) eşitsizliğini elde ederiz. Eğer $u_0 = v_0$ alırsak (3.32) ve (3.33) eşitsizliklinden $u = v$ elde edilir. ■

(3.32) ve (3.33) eşitsizliklerinden aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 3.13 *Teorem 3.12'nin koşulları altında Problem (1)-(3) başlangıç verilerine sürekli bağlıdır.*

4 ÇÖZÜMÜN UZUN ZAMAN DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Bu bölümde başlangıç koşulu sıfırdan farklı alındığında çözümün uzun zaman davranışını inceleyeceğiz. Bu bölüm boyunca Teorem 3.12'nin koşullarının sağlandığını kabul edeceğiz. Problem (1)-(3) bize aşağıdaki dinamik sistemi tanımlamaktadır:

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,t,u) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Burada L lineer operatördür. Bu dinamik sistemin her $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ ve her $T > 0$ için tek $u \in P_0$ çözümü vardır. O halde $u_0 \mapsto u(t)$ dönüşümü vardır. Sonuç 3.13'den açıktır ki bu dönüşüm $L_2(\Omega)$'da sürekli bir dönüşümdür. Bu dönüşümü $S(t)$ ile gösterelim. $S(t)$ dönüşümü $f(x,t,u) = f(x,u)$ alındığında yarı akış koşullarını sağlamaktadır.

O zaman otonom durumda, problem (1)-(3)'ün $S(t)u_0 = u(t)$ ile belirli çözüm operatörü, $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ üzerinde sürekli bir $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akış ailesi üretir. Bu yarı akış ailesi aracılığıyla çözümün uzun zaman davranışını inceleyeceğiz.

Buradan sonra problemi üç alt bölümde inceleyeceğiz. İlk olarak $S(t)$ dönüşümünün $L_2(\Omega)$'da yutan kümeye sahip olduğunu göstereceğiz. İkinci alt bölümde, problemi h ve φ'nin yalnızca x'e bağlı olduğu durumda gözönüne alacağız. Üçüncü alt bölümde ise h ve φ'nin yanı sıra katsayı fonksiyonlarının da t'ye bağlı almadığımızda bu durumun çözümün davranışını nasıl etkilediğini göstereceğiz.

Bu bölüm boyunca $a(x,t) \in L_\infty(\mathbb{R}^+; L_\infty(\Omega))$,

$b(x,t) \in \begin{cases} L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(\mathbb{R}^+; L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(\Omega)), & \nu < \rho \quad \text{iken} \\ L_\infty(\mathbb{R}^+; L_\infty(\Omega)), & \nu = \rho \quad \text{iken} \end{cases}$, $k(x',t) \in L_\infty(\mathbb{R}^+; L_{n-1}(\partial\Omega))$ olduğu kabul edilecektir.

4.1 Yutan Kümenin Varlığı

İlk olarak $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dönüşümü için $L_2(\Omega)$'da yutan kümenin varlığını gösterelim:

Teorem 4.1 *Kabul edelim ki Teorem 3.12'nin koşulları sağlansın. O halde* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *dönüşümü her* $(h,\varphi) \in [L_2(\mathbb{R}^+; (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))] \times L_2(\mathbb{R}^+; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *için* $L_2(\Omega)$*'da* *yutan kümeye sahiptir, yani öyle bir sınırlı $B_{r_0} \subset L_2(\Omega)$ kümesi vardır ki;*

$$B_{r_0} := \{u \in L_2(\Omega) : \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq (r_0)^{\frac{1}{2}}, r_0 = r_0(\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^+;(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))}, \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^+;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))},$$
$$b_1, b_0, a_0, mes(\Omega), k_0, \rho, \nu)\}$$

her sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ kümesi ve her $\delta \in (0, \infty)$ sayısı için $T_0^\delta = T_0(B, \delta) > 0$ sayısı bulabiliriz ki her $t \geq T_0^\delta$ için

$$S(t)B \subset B_{r_0+\delta}$$

kapsaması sağlanır.

İspat. $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ sınırlı kümesi için $u_0 \in B$ olsun. (1) denklemini u ile çarpıp Ω üzerinde integral alır ve kısmi integrasyon yaparsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} k(x', t)|u|^2 dx' + \int_\Omega a(x, t)|u|^{\rho+2} dx - \int_\Omega b(x, t)|u|^{\nu+2} dx$$
$$= \int_\Omega hu dx + \int_{\partial\Omega} \varphi u dx' \tag{4.1}$$

olur.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = -\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} k(x', t)|u|^2 dx' - \int_\Omega a(x, t)|u|^{\rho+2} dx + \int_\Omega b(x, t)|u|^{\nu+2} dx +$$
$$\int_\Omega hu dx + \int_{\partial\Omega} \varphi u dx' \leq -\int_\Omega |\nabla u|^2 + k_0 \int_{\partial\Omega} |u|^2 dx' - a_0 \int_\Omega |u|^{\rho+2} dx + b_1 \int_\Omega |u|^{\nu+2} dx +$$
$$\int_\Omega hu dx + \int_{\partial\Omega} \varphi u dx'$$

son 3 terime Hölder ve Young eşitsizliklerini uygularsak: [1]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (k_0 c_3^2 + 2\varepsilon_1)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (a_0 - 2\varepsilon_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2} dx +$$
$$(c(\varepsilon_1) + c(\varepsilon_2))\|h\|^2 + c(\varepsilon_2) mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}} + c_5^2 c(\varepsilon_1)\|\varphi\|^2 + \varepsilon_2$$

burada $\varepsilon_1 := \frac{1}{4}(min\{1, a'\} - k_0 c_3^2)$, $\varepsilon_2 := \frac{a_0 - a'}{2}$ olacak şekilde seçersek:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(min\{1, a'\} + k_0 c_3^2)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - a' \int_\Omega |u|^{\rho+2} dx +$$

---

[1] $\|h\| = \|h\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}(t)$, $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}(t)$

$$(c(a',k_0)+c(a_0,a'))\|h\|^2+c(a_0,a')mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}+c_5^2c(a',k_0)\|\varphi\|^2+\frac{a_0-a'}{2}$$

olur. Son eşitsizlikte (2.3) eşitsizliğini kullanırsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leq\frac{1}{2}(-\min\{1,a'\}+k_0c_3^2)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+$$

$$(c(a',k_0)+c(a_0,a'))\|h\|^2+c(a_0,a')mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}+c_5^2c(a',k_0))\|\varphi\|^2+\frac{a_0-a'}{2}+\min\{1,a'\}c'$$

olur. $K_1:=\frac{1}{c_2^2}(-\min\{1,a'\}+k_0c_3^2)$ dersek

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}-K_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leq 2((c(a',k_0)+c(a_0,a'))\|h\|^2(t)+c(a_0,a')mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}+$$

$$c_5^2c(a',k_0)\|\varphi\|^2(t)+\frac{a_0-a'}{2})+2min\{1,a'\}c'$$

olur. Burada Gronwall Lemma'sını kullanırsak:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leq\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}e^{K_1t}+2(c(a',k_0)+c(a_0,a'))\int\limits_0^t\|h\|^2e^{-K_1(\tau-t)}d\tau+$$

$$2c_5^2c(a',k_0)\int\limits_0^t\|\varphi\|^2e^{-K_1(\tau-t)}d\tau+\int\limits_0^t 2(c(a_0,a')mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}+\frac{a_0-a'}{2}+$$

$$\min\{1,a'\}c')e^{-K_1(\tau-t)}d\tau$$

olur. Ayrıca

$$\int\limits_0^t\|h\|^2e^{-K_1(\tau-t)}d\tau\leq\|h\|^2_{L_2(R^+;(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))},\quad\int\limits_0^t\|\varphi\|^2e^{-K_1(\tau-t)}d\tau\leq\|\varphi\|^2_{L_2(R^+;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leq\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}e^{K_1t}+\frac{2(c(a_0,a')mes(\Omega)(b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}+\frac{a_0-a'}{2}+\min\{1,a'\}c')}{-K_1}+$$

$$2(c(a',k_0)+c(a_0,a'))\|h\|^2_{L_2(R^+;(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))}+2c_5^2c(a',k_0)\|\varphi\|^2_{L_2(R^+;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

olur, ilk terim dışında kalan tüm terimleri r_0 ile gösterelim:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\leq\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}e^{K_1t}+r_0$$

olur. Burada r_0 sayısı Teoremde belirtilen sayıdır. O halde her $\delta>0$ için öyle bir T_0^δ sayısı vardır ki:

$$T_0^\delta:=\frac{1}{-K_1}\ln(\frac{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta})$$

her $t \geq T_0^\delta$ için $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq r_0 + \delta$ olur. Bu eşitsizlik t'ye bağlı düzgündür. Bu eşitsizlikten

$$B_{r_0+\delta} = \{u : u \in L_2(\Omega), \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq (r_0+\delta)^{\frac{1}{2}}\}$$

kümesinin teoremde verilen küme olduğu çıkmaktadır. $\nu = \rho$ olduğunda benzer işlemler yapılarak yutan küme elde edilir. ■

Buradan sonra tezimiz boyunca, $\delta = 1$ alındığında $T_0^\delta = T_0$ ve $r_0 + 1 = r_1$ diyeceğiz.

4.2 $h(x,t) = h(x)$, $\varphi(x',t) = \varphi(x')$ Durumu

Bu bölümde aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $h(x,t) = h(x)$ ve $\varphi(x',t) = \varphi(x')$.

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}a(x,t) \in L_\infty(\mathbb{R}^+; L_\infty(\Omega))$,

$\frac{\partial}{\partial t}b(x,t) \in \begin{cases} L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(\mathbb{R}^+; L_{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}(\Omega)), & \text{eğer } \nu < \rho \\ L_\infty(\mathbb{R}^+; L_\infty(\Omega)), & \text{eğer } \nu = \rho \end{cases}$, $\frac{\partial}{\partial t}k(x',t) \in L_\infty(\mathbb{R}^+; L_{n-1}(\partial\Omega))$ olsun.

Konulan bu ek koşullar altında çözümün t'ye bağlı türevinin daha düzgün bir sınıfta olduğunu bekleyerek, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dönüşümünün $W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da yutan kümeye sahip olduğunu göstereceğiz:

Teorem 4.2 *Teorem 3.12'nin koşulları ve yukarıdaki (i), (ii) koşulları sağlansın. Ayrıca hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$, $(x',t) \in \sum_T$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:*

• *$\nu < \rho$ ise*

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}b(x,t) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}k(x',t) \leq 0$$

ve öyle $a_1 > 0$ sayısı vardır ki $a(x,t) \leq a_1$'dir.

• *$\nu = \rho$ ise*

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(x,t) - b(x,t)) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}k(x',t) \leq 0$$

Bu durumda problem (1)-(3)'ün ürettiği $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dönüşümü $\forall(h,\varphi) \in [(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)] \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahiptir.

İspat. (1) denklemini $\frac{d}{dt}u(t)$ ile çarpıp Ω üzerinde integral alır ve kısmi integrasyon yaparsak:

$$\|\frac{d}{dt}u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \left(\frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,t)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\right)dx + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)u^2dx'$$

$$= \int\limits_{\Omega} h u_t dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi u_t dx' + \frac{1}{\rho+2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} a(x,t)|u|^{\rho+2} - \frac{1}{\nu+2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} b(x,t)|u|^{\nu+2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial t} k(x',t)u^2 dx'$$

olur. Burada teoremin koşulunu kullanırsak

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,t)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\Big)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)u^2 dx'$$

$$-\int\limits_{\Omega} h u dx - \int\limits_{\partial\Omega} \varphi u dx'\Big\} \leq 0$$

olur. O zaman

$$\frac{d}{dt}\Big\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} 2\Big(\frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,t)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\Big)dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)u^2 dx'$$

$$-\int\limits_{\Omega} 2hudx - \int\limits_{\partial\Omega} 2\varphi u dx'\Big\} \leq 0 \tag{4.2}$$

elde edilir.

$M = M(r_1, a_1, \|k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}) > 0$ olmak üzere öyle bir $T_1 > 0$ vardır ki her $t \geq T_1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int\limits_t^{t+1} \Big\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} 2\Big(\frac{a(x,\tau)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,\tau)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\Big)dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x',\tau)u^2 dx' - \int\limits_{\Omega} 2hudx -$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} 2\varphi u dx'\Big\} d\tau \leq M \tag{4.3}$$

Bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim:

Teorem koşullarını gözönüne alırsak:

$$(a_0 - b_1)|u|^{\rho+2} - b_1 \leq a(x,t)|u|^{\rho+2} - b(x,t)|u|^{\nu+2}$$

elde ederiz. Bunu (4.1) eşitliğinde kullanırsak:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\Big\{\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (a_0 - b_1)\int\limits_{\Omega} |u|^{\rho+2} dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)|u|^2 dx' - \int\limits_{\partial\Omega} \varphi u dx' - \int\limits_{\Omega} hudx\Big\}$$

$$\leq 2b_1 mes(\Omega) \tag{4.4}$$

olur. $0 < A < 1$ olmak üzere son üç terim için aşağıdaki işlemleri yapalım:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+2\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+A\int\limits_{\partial\Omega}k(x',t)|u|^2dx'+2(a_0-b_1)\int\limits_{\Omega}|u|^{\rho+2}dx-2A\int\limits_{\Omega}hudx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi udx'+$$

$$\leq 2b_1mes(\Omega)+2(1-A)\int\limits_{\Omega}hudx+2(1-A)\int\limits_{\partial\Omega}\varphi udx'+(A-2)\int\limits_{\partial\Omega}k(x',t)|u|^2dx'$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son üç terime Hölder ve Young eşitizliklerini uygularsak:

$$\leq 2b_1mes(\Omega)+4c(\varepsilon_2)(1-A)^2c_5^2\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+$$

$$c(\varepsilon_1)c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}+(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\leq 2b_1mes(\Omega)+4c(\varepsilon_2)(1-A)^2c_5^2\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+$$

$$c(\varepsilon_1)c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+2\varepsilon_1(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)})+(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\leq 2b_1mes(\Omega)+4c(\varepsilon_2)(1-A)^2c_5^2\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+$$

$$c(\varepsilon_1)c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+2\varepsilon_1\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}+2\varepsilon_1$$

$$=2b_1mes(\Omega)+4c(\varepsilon_2)(1-A)^2c_5^2\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+$$

$$c(\varepsilon_1)c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+2\varepsilon_1\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}+2\varepsilon_1$$

Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizliği elde ettik:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+(2-3\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+A\int\limits_{\partial\Omega}k(x',t)|u|^2dx'+2(a_0-b_1-\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega}|u|^{\rho+2}dx-$$

$$2A\int\limits_{\Omega}hu-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi u\leq 2b_1mes(\Omega)+4c(\varepsilon_2)(1-A)^2c_5^2\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+$$

$$4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+$$

$$c(\varepsilon_1)c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+2\varepsilon_1+(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Bu eşitsizliği $t \geq T_0+1$ olmak üzere, t'den $t+1$'e integre eder ve Teorem 4.1'i kullanırsak:

$$\int_t^{t+1} \{(2-3\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2(a_0-b_1-\varepsilon_1)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx + A\int_{\partial\Omega} k(x',\tau)|u|^2 dx' -$$

$$2A\int_{\partial\Omega} \varphi u dx' - 2A\int_{\partial\Omega} hu dx\} d\tau \leq c_4^2(A-2)^2\|k\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}^+;L_{n-1}(\partial\Omega))} c(\varepsilon_1) + 4c(\varepsilon_2)(1-A)^2 c_5^2 \|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} +$$

$$4c(\varepsilon_1)(1-A)^2\|h\|^2_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} + 2\varepsilon_1 + (3\varepsilon_1+\varepsilon_2+1)r_1 + 2b_1 mes(\Omega)$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafını M_1 ile gösterelim ve $\frac{a(x,t)}{a_1(\rho+2)} \leq 1$ olmasını kullanalım:

$$\int_t^{t+1} \{(2-3\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int_\Omega |\nabla u|^2 + A\int_{\partial\Omega} k(x',t)|u|^2 dx' + 2(\frac{a_0-b_1-\varepsilon_1}{a_1})\int_\Omega \frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} dx -$$

$$2A\int_\Omega hu dx - 2A\int_{\partial\Omega} \varphi u dx'\} \leq M_1$$

olur. Buradan aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı açıktır:

$$\int_t^{t+1} \{(2-3\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int_\Omega |\nabla u|^2 + A\int_{\partial\Omega} k(x',t)|u|^2 dx' + 2(\frac{a_0-b_1-\varepsilon_1}{a_1})\int_\Omega (\frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,t)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}) dx -$$

$$2A\int_\Omega hu dx - 2A\int_{\partial\Omega} \varphi u dx'\} \leq M_1$$

Burada $A := \frac{a_0-b_1-\varepsilon_1}{a_1}$ ve $\varepsilon_1 < \min\{a_0-b_1, \frac{1}{3}\}$ olduğunda, öyle bir $\varepsilon_2 > 0$ seçebiliriz ki $A < 2-3\varepsilon_1-\varepsilon_2$ eşitsizliği sağlanır. O halde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\int_t^{t+1} \{A\int_\Omega |\nabla u|^2 + A\int_{\partial\Omega} k(x',\tau)|u|^2 dx' + 2A\int_\Omega (\frac{a(x,\tau)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,\tau)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}) dx -$$

$$2A\int_\Omega hu dx - 2A\int_{\partial\Omega} \varphi u dx'\} d\tau \leq M_1$$

Buradan

$$\int_t^{t+1} \{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} k(x',\tau)|u|^2 dx' + 2\int_\Omega (\frac{a(x,\tau)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,\tau)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}) dx - 2\int_\Omega hu - 2\int_{\partial\Omega} \varphi u\} d\tau \leq \frac{M_1}{A}$$

olur.

$$y = \{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\int_\Omega (\frac{a(x,\tau)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x,\tau)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}) dx + \int_{\partial\Omega} k(x',\tau)|u|^2 dx' - 2\int_{\partial\Omega} \varphi u dx - 2\int_\Omega hu dx\}$$

ile gösterelim, (4.2), (4.3) eşitsizliklerinden her $t \geq T_0+1$ için aşağıdakilerin sağlandığı açıktır:

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq 0 \ \ ve \ \int\limits_{t}^{t+1} y(s)ds \leq M$$

burada, $T_0+1 \leq t < s \leq t+1$ alırsak $\frac{d}{ds}y(s) \leq 0$ olur. Bu eşitsizliği $[z; t+1]$ $(z : t < z < t+1)$ üzerinde s'ye göre integre edersek $y(t+1) \leq y(z)$ olur. Son aldığımız eşitsizliği de $[t; t+1]$ üzerinde z 'ye göre integre ettiğimizde aşağıdakini elde ederiz:

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+2\int\limits_{\Omega}(\frac{a(x,t)|u|^{\rho+2}}{\rho+2}-\frac{b(x,t)|u|^{\nu+2}}{\nu+2})dx+\int\limits_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'-2\int\limits_{\partial\Omega}\varphi u dx'-2\int\limits_{\Omega}hudx \leq M \tag{4.5}$$

Burada teoremin koşullarını kullanırsak,

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{2}{\rho+2}a_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}-\frac{2b_1}{\nu+2}\int\limits_{\Omega}|u|^{\nu+2}dx-k_0\int\limits_{\partial\Omega}u^2dx'-2\int\limits_{\partial\Omega}\varphi u dx'-2\int\limits_{\Omega}hudx \leq M \tag{4.6}$$

olur, burada sol taraftaki son iki terime Hölder ve Young eşitsizliklerini uygularsak:

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{2}{\rho+2}a_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}-\frac{2b_1}{\nu+2}\int\limits_{\Omega}|u|^{\nu+2}dx-k_0\int\limits_{\partial\Omega}u^2dx' \leq$$

$$M+4c(\varepsilon_1)\|h\|^2+2\varepsilon_1(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)})+4c_5^2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2+\varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur, gerekli düzenlemeleri yaptığımızda:

$$(1-k_0c_3^2)\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+(\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}-c(\varepsilon)(2b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}mes(\Omega) \leq$$

$$M+4c(\varepsilon_1)\|h\|^2+2\varepsilon_1(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)})+4c_5^2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2+\varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+k_0c_3^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olur, bu eşitsizlikte (2.3)'ü kullandığımızda:

$$\frac{1}{2}(min\{1-k_0c_3^2,\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon\})(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)})-c(\varepsilon)(2b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}mes(\Omega) \leq$$

$$M+4c(\varepsilon_1)\|h\|^2+2\varepsilon_1(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)})+4c_5^2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2+\varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+k_0c_3^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2}min\{1-k_0c_3^2,\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon\}c'$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$(\frac{1}{2}(min\{1-k_0c_3^2,\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon\})-2\varepsilon_1-\varepsilon_2)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+(\frac{1}{2}(min\{1-k_0c_3^2,\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon\})-2\varepsilon_1)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}\leq$$

$$M+4c(\varepsilon_1)\|h\|^2+4c_5^2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2+k_0c_3^2r_1$$

$$+c(\varepsilon)(2b_1)^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}mes(\Omega)+\frac{1}{2}min\{1-k_0c_3^2,\frac{2a_0}{\rho+2}-\varepsilon\}c'+2\varepsilon_1$$

Bu son eşitsizlikten, aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayacak şekilde bir M_2 sayısının var oldğu açıktır,

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}(t)\leq M_2,\quad \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)}(t)\leq M_2$$

Elde edilen bu eşitsizlikler t'ye bağlı düzgündür.
O halde $M_3=M_3(\|h\|,\|\varphi\|,b_1,mes(\Omega),r_1,a_0,k_0,\nu,\rho)>0$ sabiti vardır ki ,
$B_0=\{u\in W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega):\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}\leq M_3\}$ olmak üzere, $\forall t\geq T_0+1$ için ve her sınırlı $B\subset W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için $S(t)B\subset B_0$ olur.

■

4.3 Otonom Durum

Bu bölümde problem tamamıyla t'ye bağlı olmadığında eliptik kısmın yardımı ile çözümün asimptotik düzenliliğini ve $W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da yerel olmayan çekicinin varlığını göstereceğiz.

Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $h(x,t)=h(x)$ ve $\varphi(x',t)=\varphi(x')$.

(ii) Katsayı fonksiyonları yalnızca x ve x''ye bağlıdır: $a(x,t)=a(x)$, $b(x,t)=b(x)$, $k(x',t)=k(x')$.

Aşağıdaki eliptik problemi gözönüne alalım:

$$-\Delta u+a(x)\left|u\right|^{\rho}u-b(x)\left|u\right|^{\nu}u=h(x)\tag{4}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+k(x')u\right)\right|_{\partial\Omega}=\varphi(x')\tag{5}$$

Teorem 3.12'nin koşulları altında keyfi $(h,\varphi)\in((W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için bu problemin $W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında tek bir $\psi(x)$ çözümüne sahip olduğunu biliyoruz (Bakınız [21]). O halde $u(x,t)$ problem (1)-(3)'ün çözümü olmak üzere $w(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$u(x,t) = \psi(x) + w(x,t)$$

O halde $w(x,t)$ aşağıdaki problemin çözümü olacaktır:

$$w_t - \Delta w + a(x)\,|u|^{\rho}\,u - b(x)\,|u|^{\nu}\,u - a(x)\,|\psi|^{\rho}\,\psi + b(x)\,|\psi|^{\nu}\,\psi = 0,\ x \in \Omega \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + k(x')w(x,t)\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = 0,\ x' \in \partial\Omega \tag{7}$$

$$w(x,0) = u_0(x) - \psi(x),\ x \in cl(\Omega) \tag{8}$$

Teorem 4.3 *Teorem 3.12'nin koşulları ve (i), (ii) koşulları sağlansın.* $\nu < \rho$ *ise öyle* $a_1 > 0$ *sayısı vardır ki hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *için* $a(x,t) \leq a_1$*'dir.*
$\forall B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ *sınırlı kümesi için ve* $\forall \delta \geq 0$ *için öyle bir* $T = T(B,\delta) > 0$ *sayısı ve öyle bir sınırlı* B_δ

$$B_\delta := \{u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2+\delta}(\Omega) : \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2+\delta}(\Omega)} \leq A < \infty\}$$

kümesi vardır ki

$$S(t)B \subset B_\delta + \psi(x) \quad \forall t \geq T$$

sağlanır, burada $\{S(t)\}$*, problem(1)-(3) tarafından üretilen yarı akıştır,* $w(x,t)$ *ve* $\psi(x,t)$ *problem (6)-(8) ve problem (4)-(5)'in çözümleridir,* $A = A(r_1, a_1, \|k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+;L_{n-1}(\partial\Omega))},$ $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}, n, \delta)$ *pozitif bir sabittir.*

Bu teoremin ispatı için problem (4)-(6)'nın çözümü olan $w(x,t)$ üzerine aşağıdaki değerlendirmeleri ispatlayacağız:

Lemma 4.4 *Teorem 4.3'ün koşulları sağlansın. Her sınırlı* $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ *kümesi için ve* $\forall k = 0,1,2...$ *için öyle* N_k*,* N_k' *ve* T_k *pozitif sayıları vardır ki her* $t \geq T_k$ *için problem(4)-(6)'nın çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:*

$$\int_\Omega |w(t)|^{2(\frac{n-1}{n-2})^k} dx \leq N_k \tag{E_k}$$

$$\int_t^{t+1} \Big(\int_\Omega |w(s)|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}} dx\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \leq N_k' \tag{F_k}$$

Burada N_k*,* N_k' *sabitleri* r_1 *ve* $\psi(x)$*'e bağlı fakat* B*'ye bağlı değildir.*

İspat. Tümevarım yöntemini kullanarak eşitsizliklerin doğru olduğunu göstereceğiz.
$(k = 0)$ için doğru olduğunu gösterelim:
$w(x,t) = u(x,t) - \psi(x)$ ve burada $\psi(x)$'nin eliptik problemin belirli bir çözümü olduğunu biliyoruz. O zaman Teorem 4.1'i gözönüne alırsak (E_0) eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır. (F_0)'ın doğru olduğunu gösterelim, bunun için (6) denklemini w ile çarpar Ω üzerinde integral alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int\limits_{\Omega} [(a(x)|u|^{\rho}u - b(x)|u|^{\nu}u) - (a(x)|\psi|^{\rho}\psi - b(x)|\psi|^{\nu}\psi)]w dx +$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} k(x',t)|w|^2 dx' = 0$$

Teorem 3.12'nin koşullarını kullanırsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - b_1(\rho+1)\int\limits_{\Omega} w^2 dx - k_0\int\limits_{\partial\Omega} |w|^2 dx' \leq 0$$

olur, buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w^2 dx + (1 - k_0 c_3^2)\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} \leq (b_1(\rho+1) + k_0 c_3^2)\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olur. Bu eşitsizliği $t \geq T_0 + 1$ olacak şekilde t'den $t+1$'e integre eder ve (E_0) eşitsizliğini kullanırsak:

$$\int\limits_{t}^{t+1}\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx ds \leq \frac{N_0}{1 - k_0 c_3^2}(b_1(\rho+1) + k_0 c_3^2 + \frac{1}{2})$$

olur. Elde ettiğimiz son eşitsizlikte $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\Omega)$ Sobolev gömülmesini kullanırsak:

$$\int\limits_{t}^{t+1}(\int\limits_{\Omega} |w|^{\frac{2n-2}{n-2}} dx)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \leq c_1'^2(\int\limits_{t}^{t+1}\int\limits_{\Omega} w^2 dx ds + \int\limits_{t}^{t+1}\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx ds) \leq$$

$$c_1'^2(N_0 + \frac{N_0}{1 - k_0 c_3^2}(b_1(\rho+1) + k_0 c_3^2 + \frac{1}{2}))$$

olur. Böylece (F_0)'ın doğru olduğunu ispatladık.
$\forall k \geq 1$ için (E_k) ve (F_k)'nın doğru olduğunu kabul edelim. (E_{k+1}) ve (F_{k+1})'in doğru olduğunu gösterelim:
(6) denklemini $|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-2}w$ ile çarpıp Ω üzerinde integral alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} |w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}} dx + (2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1} - 1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}\int\limits_{\Omega} |\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2 dx +$$

$$\int_{\Omega}[(a(x)|u|^{\rho}udx-b(x)|u|^{\nu}u)-(a(x)|\psi|^{\rho}\psi-b(x)|\psi|^{\nu}\psi)]|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-2}wdx+$$

$$\int_{\partial\Omega}k(x',t)|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx'=0$$

Teorem 3.12'nin koşullarını gözönüne alırsak:

$$\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx+(2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}\int_{\Omega}|\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2dx\leq$$

$$b_1(\rho+1)\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx+k_0\int_{\partial\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx'$$

olur, son terim için (2.4) gömülme eşitsizliğini kullanırsak:

$$\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx+(2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}(1-k_0c_3^2)\int_{\Omega}|\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2dx$$

$$\leq\widetilde{C}\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx \qquad (4.7)$$

eşitsizliğini elde ederiz, burada $\widetilde{C}=\widetilde{C}(k_0,n,c_3,b_1,\rho)$ pozitif bir sabittir. Elde edilen son eşitsizliği, (F_k) eşitsizliğini ve Düzgün Gronwall Lemma'sını gözönüne alırsak (E_{k+1}) elde edilir.

(F_{k+1}) için (4.7) eşitsizliğini $t\geq T_0+1$ olacak şekilde $[t,t+1]$ üzerinde integre edelim:

$$(2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}(1-k_0c_3^2)\int_t^{t+1}\int_{\Omega}|\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2dxds\leq\widetilde{C}\int_t^{t+1}\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dxds+$$

$$\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1}\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}dx$$

ve (E_{k+1})'i kullanalım:

$$\int_t^{t+1}\int_{\Omega}|\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2dxds\leq\frac{(\widetilde{C}+\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1})N_{k+1}}{(2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}(1-k_0c_3^2)} \qquad (4.8)$$

olur. $W_2^1(\Omega)\subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesinden aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\int_t^{t+1}(\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+2}}dx)^{\frac{n-2}{n-1}}ds\leq c_1'^2(\int_t^{t+1}\int_{\Omega}(w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}})^2dxds+\int_t^{t+1}\int_{\Omega}|\nabla w^{(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}}|^2dxds)$$

son eşitsizlikte (4.8)'i kullanırsak:

$$\int_t^{t+1}(\int_{\Omega}|w|^{2(\frac{n-1}{n-2})^{k+2}}dx)^{\frac{n-2}{n-1}}ds\leq c_1'^2(1+\frac{(\widetilde{C}+\frac{1}{2}(\frac{n-2}{n-1})^{k+1})}{(2(\frac{n-1}{n-2})^{k+1}-1)(\frac{n-2}{n-1})^{2(k+1)}(1-k_0c_3^2)})N_{k+1}$$

olur. Böylece (F_{k+1})'in de doğru olduğunu ispatladık. ■

Teorem 4.3'ün İspatı. Lemma 4.4'de elde ettiğimiz (E_k) eşitsizliğinden yola çıkacağız. $n \geq 3$ olduğundan $\frac{n-1}{n-2} > 1$ olur. O zaman

$$k \to \infty \quad iken \quad (\frac{n-1}{n-2})^k \to \infty$$

olur. Dolayısıyla $\forall \delta \in [0, \infty)$ için öyle bir $k_1 \geq \log_{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\rho+2+\delta}{2}$ vardır ki $\rho+2+\delta \leq 2(\frac{n-1}{n-2})^{k_1}$ sağlanır. O halde

$$\|w\|_{L_{\rho+2+\delta}(\Omega)} \leq C\|w\|_{L_{2(\frac{n-1}{n-2})^{k_1}}(\Omega)} \leq CN_{k_1}$$

bulunur. Ayrıca $w = u - \psi(x)$ olduğundan $\|w\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi(x)\|_{W_2^1(\Omega)}$ olur, burada Teorem 4.2'yi gözönüne alırsak her $t \geq T_0 + 1$ için;

$$\|w\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2+\delta}(\Omega)} \leq \|w\|_{W_2^1(\Omega)} + C\|w\|_{L_{2(\frac{n-1}{n-2})^{k_1}}(\Omega)} \leq M_2 + CN_{k_1}$$

olur. Böylece $u \in \psi(x) + B_\delta$ bulunur. ■

Teorem 4.5 *Teorem 4.3'ün koşulları sağlansın. Problem (1)-(3)'ün ürettiği* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *yarı akışı* $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ *uzayında yerel olmayan çekiciye sahiptir.*

İspat. Teorem 4.2'den açıktır ki yarı akış $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahiptir. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışının $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da asimptotik kompakt olduğunu göstermeliyiz. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışının sırasıyla $L_{\rho+2}(\Omega)$ ve $W_2^1(\Omega)$ uzaylarında asimptotik kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için, $\{v_n^0\}$ dizisi $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$' da sınırlı ise $t_n \to \infty$ iken $\{S(t_n)v_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$' da relative kompakt olduğunu görmeliyiz.

$B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ sınırlı küme olmak üzere $v_n^0 \in B$ alalım. $S(t_n)v_n^0 = v_n$ olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $L_{\rho+2}(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Yarı akışın $L_2(\Omega)$'da asimptotik kompakt olduğunu biliyoruz. Genelliği bozmadan $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $L_2(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $L_{\rho+2}(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu gösterelim:

İnterpolasyon eşitsizliğini ve Teorem 4.3'ü kullanarak $\rho + 2 \leq r$ ve $\lambda \in (0, 1)$ sayıları bulabiliriz ki:

$$\|v_n - v_m\|_{L_{\rho+2}(\Omega)} \leq \|v_n - v_m\|_{L_2(\Omega)}^{\lambda} \|v_n - v_m\|_{L_r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

olur. Bu eşitsizlikte $L_2(\Omega)$'daki asimptotik kompaktlığı ve Teorem 4.3'ü kullanırsak $L_{\rho+2}(\Omega)$'daki asimptotik kompaktlığı elde ederiz.

Şimdi $W_2^1(\Omega)$'daki asimptotik kompaktlığı gösterelim. Önce her sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ kümesi için:

$s \geq T_1$ ve $u_0 \in B$ olduğunda

$$\int_\Omega u_t^2 dx \leq R \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $T_1 = T_1(B) > 0$, ve $R = R(r_1, a_1, \|k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+;L_{n-1}(\partial\Omega))}) > 0$ sayılarının varlığını gösterelim:

$u_t = v$ ile gösterelim ve (1),(2) denklemlerinin t'ye göre türevlerini alalım:

$$v_t - \Delta v + va(x)(\rho+1)|u|^\rho - vb(x)(\nu+1)|u|^\nu = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + k(x')v = 0$$

İlk denklemi v ile çarpıp Ω üzerinde integral alırsak:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v^2 a(x)|u|^\rho(\rho+1)dx - \int_\Omega v^2 b(x)|u|^\nu(\nu+1)dx + \int_{\partial\Omega} k(x')v^2 dx' = 0$$

olur, burada teorem 3.12'nin koşullarını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - k_0\int_{\partial\Omega} v^2 dx' + (\rho+1)(a_0 - b_1)\int_\Omega v^2|u|^\rho dx - b_1(\rho+1)\int_\Omega v^2 dx \leq 0$$

Buradan

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx \leq 2(b_1(\rho+1) + k_0 c_3^2)\int_\Omega v^2 dx \tag{4.10}$$

olur. Eğer $\forall t \geq T_1$ için

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega v^2 dx \leq M_4 \tag{4.11}$$

olacak şekilde bir $T_1 > 0$ ve $M_4 > 0$ sayılarının varlığını gösterirsek düzgün Gronwall lemmadan sonucu söyleyebiliriz. (1) denklemini u_t ile skaler çarptığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega \Big(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\Big)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} k(x',t)u^2 dx'\Big\}$$

$$= \int_\Omega h(x)u_t dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x')u_t dx'$$

Bu eşitliği $t \geq T_0 + 1$ olmak üzere t'den $t+1$'e integrallersek:

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} ds + \int_t^{t+1} \frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega \Big(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2}\Big)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} k(x',t)u^2 dx'$$

$$-\int_{\Omega} h(x)udx - \int_{\partial\Omega} \varphi(x')udx'\}ds = 0$$

olur. Buradan

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}ds+\{\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+\int_{\Omega}(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2}-\frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2})dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'\}(t+1) =$$

$$\{\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_{\Omega}(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2})dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx'\}(t)$$

$$+\{\int_{\Omega} h(x)udx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x')udx'ds\}(t+1) - \{\int_{\Omega} h(x)udx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x')udx'ds\}(t)$$

elde edilir, burada (4.5) eşitsizliğini kullanırsak, $\forall t \geq T_0 + 1$ için:

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}ds+(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}+\int_{\Omega}(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2}-\frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2})dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}k(x',t)u^2dx')(t+1) \leq$$

$$\frac{M}{2} + (\int_{\Omega} h(x)udx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x')udx'ds)(t+1)$$

olur. Buradan,

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}ds + (\int_{\Omega}(\frac{a(x)|u|^{\rho+2}}{\rho+2} - \frac{b(x)|u|^{\nu+2}}{\nu+2})dx)(t+1) \leq \frac{M}{2}+$$

$$\frac{k_0c_3^2}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t+1) + (\int_{\Omega} h(x)udx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x')udx')(t+1)$$

olur. Hölder eşitsizliğini, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2' yi kullanırsak, $\forall t \geq T_0 + 1$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}ds \leq \frac{M}{2}+\frac{k_0c_3^2}{2}r_1+M_3\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}+M_3c_5\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\frac{b_1mes(\Omega)}{\nu+2}+\frac{M_3^{\rho+2}b_1}{\nu+2}$$

Böylece (4.11) eşitsizliğini elde ettik. (4.10), (4.11) eşitsizliklerini ve düzgün Gronwall lemmasını kullanırsak aradığımız eşitsizliği elde ederiz.

Şimdi yarı akışın $W_2^1(\Omega)$ uzayında asimptotik kompakt olduğunu gösterelim:

$B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ sınırlı küme olmak üzere $v_n^0 \in B$ alalım. $S(t_n)v_n^0 = v_n$ olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $W_2^1(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Yarı akışın $L_2(\Omega)$'da asimptotik kompakt olduğunu biliyoruz. Genelliği bozmadan $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$

dizisinin $L_2(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $W_2^1(\Omega)$'da Cauchy dizisi olduğunu gösterelim:

$$\|v_n - v_m\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \|v_n - v_m\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.12}$$

ikinci terim için aşağıdaki değerlendirmelere bakalım:

$$\|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (\nabla v_n - \nabla v_m)(\nabla v_n - \nabla v_m)dx$$

Burada kısmi integrasyon yaparsak:

$$\|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{L_2(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega} (\Delta v_n - \Delta v_m)(v_n - v_m)dx - \int\limits_{\partial\Omega} k(x')(v_n - v_m)^2 dx'$$

olur. $\{v_n\}$ problemin çözümü olduğundan

$$= -\int\limits_{\Omega} (v_n - v_m)\Big\{\frac{d}{dt}v_n - \frac{d}{dt}v_m + a(x)|v_n|^{\rho}v_n - b(x)|v_n|^{\nu}v_n - a(x)|v_m|^{\rho}v_m + b(x)|v_m|^{\nu}v_m\Big\}dx -$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} k(x')(v_n - v_m)^2 dx'$$

olur. Burada Teorem 3.12'nin koşularını kullanırsak:

$$(1 - k_0c_3^2)\|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{L_2(\Omega)} \le -\int\limits_{\Omega} (v_n - v_m)(\frac{d}{dt}v_n - \frac{d}{dt}v_m) + (b_1(\rho+1) + k_0c_3^2)(v_n - v_m)^2 dx$$

olur, burada Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$(1 - k_0c_3^2)\|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|v_n - v_m\|_{L_2(\Omega)}\|\frac{d}{dt}v_n - \frac{d}{dt}v_m\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$(b_1(\rho + 1) + k_0c_3^2)\|v_n - v_m\|^2_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği (4.12) eşitliğinde kullanırsak:

$$\|v_n - v_m\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{1}{1 - k_0c_3^2}(\|v_n - v_m\|_{L_2(\Omega)}\|\frac{d}{dt}(v_n - v_m)\|_{L_2(\Omega)})$$

$$+(\frac{b_1(\rho + 1) + k_0c_3^2}{1 - k_0c_3^2} + 1)\|v_n - v_m\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olur. Burada (4.9) eşitsizliğini ve yarı akışın $L_2(\Omega)$'da asimptotik kompakt olmasını kullanırsak, onun $W_2^1(\Omega)$'da asimptotik kompaktlığını elde ederiz. Sonuçta problem (1)-(3)'ün ürettiği yarı akışın $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da asimptotik kompaktlığını elde ederiz. Teorem 2.63'e göre $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ yarı akışı $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayında yerel olmayan çekiciye sahiptir. ∎

KAYNAKLAR

[1] S. Abdalaziz, *Analysis of complex nonlinear reaction-diffusion equations*, Durham theses, Durham University, **2008**.

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, **1975**.

[3] Babin A.V., Vishik M.I., Regular attractors of semigroups and evolution equations. *J. Math. Pures Appl.* (9) 62 no. 4 441-491, **1983**.

[4] Babin, M.I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, **1992**.

[5] N. F. Britton, *Reaction-Diffusion Equations and their Applications to Biology*, Academic Press, London, **1986**.

[6] V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **2002**.

[7] L. C. Evans ; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, **1998**.

[8] S. Fucik, A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, New York, **1980**.

[9] D. Gilbarg,N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, **1983**.

[10] P. C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Lecture Notes in Biomath, 28, Springer-Verlag, Berlin, New York, **1979**.

[11] Hale, J., Rocha, C, Interaction of diffusion and boundary conditions, *Nonlinear Anal.* 11(5), 633-649, **1987**.

[12] P. Hess Asymptotics in Semilinear Periodic Diffusion Equations with Dirichlet or Robin Boundary Conditions, *Arch. Rational Mech. Anal.* 116, 91-99, **1991**.

[13] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis And Applications*, John Wiley and Sons, India,**1989**.

[14] Ladyzhenskaya O.A., On the determination of minimal global attractors for the Navier-Stokes equations and other partial differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk* 42 (6) 25-60, Russian Math. Surveys 42 (6) 27-73 (English Transl.), **1987**.

[15] O.A. Ladyzhenskaya, Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Leizioni Lincei, *Cambridge University Press*, Cambridge, New York, **1991**.

[16] J. L. Lions, *Quelques méthodes de resolution des problémes aux Limities non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris **1969**.

[17] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, New York, **1993**.

[18] Lions J.L., Magenes E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, vol. *I*, Springer-Verlag, Berlin, **1972**.

[19] L. A. Lusternik and V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, **1961**.

[20] S.S. Lu, Attractors for nonautonomous reaction-diffusion systems with symbols without strong translation compactness, *Asymptot. Anal.* 54 197-210, **2007**.

[21] M. Marion, Attractors for reactions-diffusion equations: existence and estimate of their dimension, *Appl. Anal.* 25 101U147, **1987**.

[22] E. Ozturk , K. N. Soltanov; *On Some Yamabe Type Equations*, *AIP Conference Proceedings,* Volume: 1168 Pages: 377-380, **2009**.

[23] L.E. Payne, P.W. Schaefer, Blow-up in parabolic problems under Robin boundary conditions, *Applicable Analysis* Vol. 87, No. 6, **2008**.

[24] M. M. Rao ; Measure Theory And Integration, *John Wiley and Sons*, New York, **1984**.

[25] J. F. Rault, The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions, *C. R. Sci. Paris, Ser.* I 349, 1059-1061, **2011**.

[26] J.C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, A. Vidal-Lopez, Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems, *J. Differential Equations* 238, 289-337, **2007**.

[27] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, **2001**.

[28] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Systems*, SpringerVerlag, New York, **1983**.

[29] K. N. Soltanov; *On some modification on Navier-Stokes equations*, *Nonlinear Analysis- Theory Methods and Applications*, Volume: 52 Issue: 3 Pages: 769-793, **2003**.

[30] H.T. Song, S. Ma, C.K. Zhong, Attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations, *Nonlinearity* 22, 667-681, **2009**.

[31] G. E. Shilov, I. M. Gel'fand, ; *Generalized Functions*, vol I, Academic Press, **1964**.

[32] M. Truwe *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian*, **1990**.

[33] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag,* New York, **1997**.

[34] A. I. Volpert, Vi. A. Volpert, and Vl. A. Volpert, Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems, *American Mathematical Society*, Providence, Rhode Island, **1994**.

[35] L. Yang, Asymptotic regularity and attractors of the reaction-diffusion equation with nonlinear boundary condition, Nonlinear Analysis: *Real World Applications* 13, 1069-1079, **2012**.

[36] K. Yosida ; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, **1980**.

[37] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its applications II/A*, Springer-Verlag, New York, **1990**.

[38] C.K. Zhong, M.H. Yang, C.Y. Sun, The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the non-linear reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations* 223, 367-399, **2006**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Eylem ÖZTÜRK

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : eozturk@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Univ. Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise : 1997-2000 Aydınlıkevler İnönü Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2005-2008 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Doktora : 2008-2014 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce (İleri Düzey)

İş Deneyimi

2005 Aralık- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

Üniversite

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

TÜBİTAK destekli 110T558 numaralı "Matematiksel Fiziğin Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerinin Çözülebilirliği, Tam İntegrallenebilirliği ve Çözüm Manifoldlarının Analitik Özellikleri"isimli Türkiye-Ukrayna ikili iş birliği projesi, Bütçe: 155.541TL(proje henüz sonuçlanmamıştır).

Tezden Üretilmiş Yayınlar

"Robin and Initial Value Problem for a Yamabe Type Parabolic Equation", Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation, 2011 Volume 2 (Kamal N. Soltanov ile birlikte)

Tezden Üretilmiş Tebliğ veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1. 5th International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Bulgaristan, 2010.

2. 8th International Congress for the International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC), Moskova, Rusya, 2011.

3. International Conference on Non-Linear PDE, Oxford, İngiltere, 2012.

4. 12. Matematik Sempozyumu, Hacettepe Üniv., Ankara, 2013.