BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION EQUATIONS

FATMA GAMZE DÜZGÜN

PROF. DR. KAMAL SOLTANOV
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2014

Fatma Gamze DÜZGÜN'ün hazırladığı "Bir Sınıf Doğrusal Olmayan Difüzyon Denklemlerinin İncelenmesi" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU
Başkan ....

Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Danışman ....

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
Üye ....

Prof. Dr. Emil NOVRUZOV
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Uğur GÜL
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

10.03.2014

FATMA GAMZE DÜZGÜN

ÖZET

BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Fatma Gamze DÜZGÜN
Doktora, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Mart 2014, 80 sayfa

Bu çalışmada, lineer olmayan difüzyon tipli denklem için konulmuş 3. sınıf başlangıç-sınır değer probleminin genelleşmiş çözümünün varlığı, tekliği gösterilmiş ve çözümün davranışı üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Birinci bölümde, incelediğimiz problem tanıtılmış ve göz önüne alınan denklem tipinin tarihsel gelişiminin yanı sıra, ele aldığımız probleme benzer problemler için daha önce yapılan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak genel bilgiler ve yapılan çalışmaya gerek olacak bazı özel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, göz önüne alınan problem incelenmiştir. Bu bölüm, problemin başlangıç değeri sıfır ve sıfırdan farklı olmak üzere iki alt bölümden oluşmaktadır. Her bir alt bölüm ise problemin lineer olmayan kısmına bağlı olarak üç ayrı durumda incelenmiştir. Uygun uzaylarda problemin genelleşmiş çözümünün varlığı ve tekliği için yeterli koşullar elde edililerek ve bu koşullar altında çözümün varlığı ve tekliği kanıtlanmıştır. Dördüncü bölümde ise, çözümün davranışı üzerine sonuçlar alınmıştır.

Anahtar Kelimeler : Lineer olmayan difüzyon denklemleri, Robin koşullu başlangıç-sınır değer problemi, Alt lineer durum, Lineer durum, Süper lineer durum, Varlık ve teklik teoremleri, Çözümün davranışı, Yutan Küme

ABSTRACT

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION EQUATIONS

Fatma Gamze DÜZGÜN

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

March 2014, 80 pages

This work is devoted to the existence and uniqueness of the solution of 3. type initial-boundary value problem for nonlinear diffusion type equation and also devoted to the behavior of solution. In the first chapter, our problem is defined and not only the historical development of the type of this equation but also some studies done on the type of our problem are mentioned. In the second, general and special informations are given for this work. In the third, the problem which is taken into account is analysed. This chapter consists of two sub chapters related to the initial value of the problem. These sub chapters are investigated in three different cases as depending on nonlinear part of the problem. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of generalized solution of the problem are obtained and under these conditions the existence and uniqueness of generalized solution of the problem is proved. In the forth, behavior of the solution is investigated.

Keywords: Nonlinear diffusion equations, Initial-Boundary value problem with Robin boundary condition, Sub linear case, Linear case, Super linear case, Existence and uniqueness theorems, Behavior of solution, Absorbing set

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora programım boyunca, engin bilgi ve büyük tecrübeleriyle bana yol gösteren ve bu çalışmanın oluşmasında büyük emeği geçen değerli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Kamal Soltanov'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca beni yönlendiren tüm hocalarıma ve çalışanlara teşekkür ederim.

Gerektiğinde yardımlarını esirgemeyen çok sevgili arkadaşlarım Kerime Kallı ve Eylem Öztürk'e teşekkür ederim.

Tüm eğitim sürecim boyunca destekleriyle her zaman yanımda olan sevgili aileme ve verdiği mutluluk ve motivasyondan dolayı ailemizin en küçük bireyi sevgili yeğenim Can Düzgün'e çok teşekkür ederim.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Bu çalışmada, aşağıdaki ikinci mertebeden yarı lineer parabolik denklem için konulmuş 3. sınıf başlangıç-sınır değer problemi göz önüne alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(x,t,u) + e(x,t) \left\| u \right\|_{L_2(\Omega)}(t) = h(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T) \quad (1.1)$$

$$u(x,0) = u_0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3 \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x',t)u \right)\bigg|_{\Sigma_T} = \varphi(x',t), \qquad (x',t) \in \ \Sigma_T \equiv \partial\Omega \times [0,T], T > 0 \quad (1.3)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bölgedir. Δ, n boyutlu Laplace Operatörü, yani $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ile tanımlı ikinci dereceden diferensiyel bir operatördür. $g : Q_T \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $e : Q_T \longrightarrow \mathbb{R}^1$ ve $a : \Sigma_T \longrightarrow \mathbb{R}^1$ verilen fonksiyonlardır. h ve φ ise verilen genelleştirilmiş fonksiyonlardır ve u bilinmeyen fonksiyondur. Bu problem, genel olarak $q > 1$ olmak üzere, $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_q(Q_T)$, $\varphi \in L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ olduğu durumda incelenecektir.

(1.1) denklemi yarı lineer difüzyon tipli denklem olarak adlandırılır. Isı, gaz, momentum, popülasyon vs. gibi pek çok niceliğin yayılımı, difüzyon denklemleri ile ifade edilebilir.

Difüzyon denklemi ilk olarak 1800'lü yıllarda Fourier tarafından incelenen ve lineer bir denklem olan, ısı denklemi ($u_t = \Delta u$) olarak ortaya çıkmıştır ve daha sonralarda difüze olan birçok olay, matematiksel olarak daha iyi ve genel bir biçimde ifade edilerek incelenmiştir.

Difüzyon tipli denklemler için konulmuş problemler son yüz yılı aşkın süredir ve daha karmaşık bir model olan lineer olmayan difüzyon tipli denklemler ise yaklaşık son elli yıldır yoğun olarak ele alınmakta ve incelenmektedir.

(1.1) tipindeki difüzyon denklemleri, nükleer enerji, mekanik, popülasyon dinamiği ve biyoloji gibi pek çok alandan doğmaktadır.

Örneğin denklemde yer alan $g(x,t,u)$ terimi özel bir durumda ısı artışını temsil ederken, lineer olmayan $e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi ise toplam kütleyi koruma amaçlı, sisteme giren soğurucu katalitik maddeyi temsil edebilir. Yine başka bir örnekte (popülasyon dinamiğinde), $g(x,t,u)$ terimi hücre büyümesindeki artışı gösterirken, $e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi toplam kütlenin korunmasını sağlayan etkiyi gösterebilir. Bu nedenle $e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi genellikle, modellenen fiziksel olay veya kimyasal reaksiyonda sisteme girerek, sistemdeki niceliğin miktarını etkileyen materyali temsil etmektedir. Yine bu tip denklemler, özel durumda tümörün büyümesi ya da yer altı sularının akışı gibi modellere de denk gelmektedir.

(1.1)-(1.3)'e benzer problemler için son yıllarda yapılan çalışmalara gözatalım:

A. Dall'Aglio, D. Giachetti, I. Peral, S. S. Leon [4] 2008 yılındaki çalışmalarında μ sonlu Radon ölçümü olmak üzere $g(x,t,u) := f(u) - \mu$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denklemini $\Omega \times (0,\infty)$ bölgesinde, başlangıç ve homojen Dirichlet sınır koşulu ile göz önüne almışlar ve bu problemin global çözümünün varlığını göstermişlerdir.

L. E. Payne, L. A. Philippin, S. V. Piro [22] 2010 yılındaki çalışmalarında, $g(x,t,u) := f(u)$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denklemini başlangıç koşulu ve homojen olmayan Neumann koşulu ile birlikte incelemiş ve problemin global çözümünün varlığı için yeterli koşullar ortaya koymuşlardır.

L. Ma [19] 2010 yılındaki çalışmasında, $g(x,t,u) := -\left|u\right|^{p-1}u$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denkleminin homojen Dirichlet koşullu başlagıç-sınır değer problemini göz önüne almıştır. p' nin özel durumlarına göre bu problemin, global pozitif çözümünün varlığını incelemiştir.

P. J. Martinez-Aparicio ile F. Petita [20] 2011 yılındaki çalışmalarında, $g(x,t,u) := \frac{u}{1-u}$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denkleminin, homojen Dirichlet koşullu başlangıç-sınır problemini göz önüne almışlardır. Bu problemin pozitif çözümlerinin varlığını göstermişler ve çözümlerin t sonsuza giderken asimptotik davranışını incelemişlerdir.

C. Bandle, M. A. Pazio, A. Tesei [3] 2011 yılındaki çalışmalarında $g(x,t,u) := -\left|u\right|^{p-1}u$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denklemi için Cauchy problemini $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ bölgesinde ele almışlardır. Bu problemin çözümünün varlık ve yokluğu için yeterli koşullar elde etmişlerdir.

J. Rault [25] 2011 yılındaki çalışmasında $\Omega \times (0,\infty)$ bölgesinde, $g(x,t,u) := -u^p$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denklemini, başlangıç koşulu ve $a(x',t)$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon iken homojen (1.3) sınır koşulu ile göz önüne alarak, yeterli koşullar altında global çözümün varlığını göstermiştir.

M. Lazzo, P. G. Schmidt [14] 2005 yılındaki çalışmasında, $\Omega \times (0,\infty)$ bölgesinde $g(x,t,u) := -|u|^{p-1} u$ ve $e(x,t) = 0$ alarak homojen (1.1) denkleminin, homojen Dirichlet koşullu başlagıç-sınır değer problemini göz önüne almışlardır. Bu problemin çözümünün davranışı üzerine çalışma yaparak 0 ve ∞ stabil çekici kümelerini incelemişlerdir.

A. L. Pereira ile M. C. Pereira [23] 2007 yılındaki çalışmalarında, a pozitif bir sayı olmak üzere $g(x,t,u) := f(u) + au$ ve $e(x,t) = 0$ alarak $\Omega \times (0,\infty)$ bölgesi üzerinde homojen (1.1) denklemini, homojen olmayan Neumann koşulu ile incelemişler ve bu problemin çözümü için global kompakt çekicilerin, problemdeki parametrelere bağlı olarak surekli bir şekilde değiştiğini göstermişlerdir.

M. Jazar ile R. Kiwan [11] 2008 yılındaki çalışmasında $g(u) := -|u|^p$ ve $e(x,t)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi yerine $\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega |u|^p dx$ alarak, W.Gao ile Y.Han [9] 2011 yılındaki çalışmasında, $g(u) := -|u|^{p-1}u$ ve $e(x,t)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi yerine $\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega |u|^{p-1}u dx$ alarak ve C.P. Niculescu ile I. Roventa [21] 2011 yılındaki çalışmasında $g(u) : -f(|u|)$ ve $e(x,t)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi yerine $\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega f(|u|)dx$ alarak homojen (1.1) denklemini, başlangıç koşulu ve homojen Neumann sınır koşulu ile incelemişlerdir. Görüldüğü gibi bu çalışmalarda g dönüşümü haricindeki lineer olmayan terimde yine g dönüşümünün etkisi kullanılmış bu terim ortalama değerde ele alınmıştır. Bu çalışmalarda çözümün davranışı incelenmiş ve yeterli koşullar altında çözümlerin sonlu zamanda patlama (blow-up) yaptığı gösterilmiştir.

X. Runzhang [26] 2009 yılındaki çalışmasında, $g(x,t,u) := f(u)$ ve $e(x,t) = 0$ alarak (1.1) denkleminin homojen Dirichlet sınır koşullu başlangıç-sınır değer problemini göz önüne almış ve çözümün t sonsuza giderken azalarak sıfıra gitmesi için ve sonlu zamanda patlama yapması için yeterli koşullar elde etmiştir.

X. Li ile S. Ruan [15] 2011 yılındaki çalışmasında, $g(x,t,u) := f(x,u)$ ve $e(x,t) = 0$ alarak (1.1) denkleminin homojen Dirichlet sınır koşullu başlangıç-sınır değer problemini göz önüne almış ve uygun uzaylarda düzgün çekicilerin varlığını göstermiştir.

L. Yang [32] 2012 yılındaki çalışmasında, $g(x,t,u) := f(u)$ ve $e(x,t) = 0$ alarak (1.1) denklemini homojen ve lineer olmayan sınır koşulu ile incelemiş ve çözümlerin asimptotik düzgünlüğünü kanıtlamıştır.

Daha önce yapılan çalışmalardan görülüyor ki, çoğunlukla homojen formda alınan (1.1) denklemi genellikle homojen Dirichlet ya da Neumann sınır koşulu ile ele alınmış ve lineer olmayan g dönüşümü özel durumlarda incelenmiştir. Farklı olarak bu çalışmada ise homojen olmayan (1.1) denklemi, homojen olmayan 3. sınıf sınır değeri (Robin sınır koşulu) ile göz önüne alınmıştır. Ayrıca denklemin genellikle lineer olmayan kısmını temsil eden g dönüşümü, genel formda ele alınmıştır ve yine farklı olarak $e(x,t)\left\Vert u\right\Vert_{L_2(\Omega)}(t)$ terimi de yerel olmayan (global) anlamda denklemin lineer olmayan kısmını temsil etmektedir.

Bu çalışmanın 3. bölümünde, (1.1)-(1.3) probleminin uygun uzaylarda çözümünün varlığı (daha önceki çalışmalarda yerel olarak incelenmesinin aksine, global olarak tüm uzay üzerinde incelenerek) ve tekliği için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. 4. bölümde ise, özel durumlarda problemin çözümünün davranışı üzerine sonuçlar alınmıştır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar, teoremler, gösterimler, eşitsizlikler ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1 [7] *Tam lineer normlu X uzayına **Banach** uzayı denir.*

Tanım 2.2 [1] *X normlu uzayı sayılabilir yoğun alt kümeye sahipse X'e **ayrılabilir** uzay denir.*

Tanım 2.3 [1] *X uzayı, üzerindeki iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzayı ise X'e **Hilbert** uzayı denir.*

Tanım 2.4 [12] *X bir lineer normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm lineer sınırlı fonksiyoneller uzayına X uzayının duali denir ve X^* ile gösterilir. X^* üzerindeki norm, $x' \in X^*$ olmak üzere*

$$\|x'\|_{X^*} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\langle x', x \rangle}{\|x\|_X}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 [7] *X bir Banach uzayı olsun. Eğer $(X^*)^* = X$ ise X'e **refleksif** uzay denir.*

Tanım 2.6 [1] *Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve $p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere, Ω üzerinde*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty, \ x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan u fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı denir.

Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.7 [1] *Ω üzerinde hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayına $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir ve bu uzay üzerindeki norm,*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklindedir.

Teorem 2.8 [1] *Eğer* $1 \leq p \leq \infty$ *ise* $L_p(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.9 [1] *Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ise* $L_p(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.10 [1] $1 < p < \infty \Longleftrightarrow L_p(\Omega)$ *refleksif uzaydır.*

Tanım 2.11 [7] *X bir Banach uzayı,* $1 \leq p < \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere*

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u : (a,b) \to X$ *fonksiyonlardan oluşan uzaya* $L_p(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L_p(a,b;X)$ *bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = (\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.12 [7] *X bir Banach uzayı,* $p = \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı* $u : (a,b) \to X$ *fonksiyonlardan oluşan uzaya* $L_\infty(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L_\infty(a,b;X)$ *bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \sup_{t\in(a,b)} \|u(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 2.13 [7] *X ve Y Banach uzayları olsunlar.* $L_p(a,b;X)$ *aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $p \in [1,\infty]$ *için* $L_p(a,b;X)$ *bir Banach uzayıdır.*

(ii) $p \in [1,\infty)$ *için* $L_p(a,b;X)$ *ayrılabilir uzaydır ancak ve ancak* X *ayrılabilir uzaydır.*

(iii) $p \in (1,\infty)$ *için* X *refleksif uzay ise* $L_p(a,b;X)$ *refleksif uzaydır.*

(iv) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *ve* $X \subset Y$ *sürekli gömülmesi varsa* $L_q(a,b;X) \subset L_p(a,b;Y)$ *sürekli gömülmesi vardır.*

Teorem 2.14 B_0, B, B_1 *aşağıdaki koşulları sağlayan Banach uzayları olsunlar:*

(i) $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 *ve* B_1 *yansımalı uzaylar olsunlar.*

(ii) $B_0 \hookrightarrow B$ *kompakt gömülsün.*

Bu durumda $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1$ *olmak üzere*

$$\{v : v \in L_{p_0}(0,T;B_0), \frac{dv}{dt} \in L_{p_1}(0,T;B_1)\} \hookrightarrow L_{p_0}(0,T;B)$$

kompakt gömülmesi vardır.

Tanım 2.15 [8] X *bir Banach uzayı ve* X^* *onun dual uzayı olmak üzere* $f : X \longrightarrow X^*$ *operatörü*

$$\|u\|_X \nearrow \infty \text{ iken } \frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_X} \nearrow \infty$$

*sağlarsa, f'e **coercive**'dir denir.*

Tanım 2.16 [8] Ω, $\mathbb{R}^n$*'de bir bölge olmak üzere,* $h = h(x,\xi)$ *fonksiyonu, hemen hemen her* $x \in \Omega$ *ve her* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *için tanımlı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa, h fonksiyonu Caratheodory özelliğine sahiptir denir:*

1. *her* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *için* $h_\xi(x) = h(x,\xi)$ Ω'*da ölçülebilirdir.*

2. *hemen hemen her* $x \in \Omega$ *için* $h_x(\xi) = h(x,\xi)$ $\mathbb{R}^m$*'de süreklidir.*

Tanım 2.17 [8] X *bir Banach uzayı olmak üzere* $\{x_n\} \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun. Eğer her* $f \in X^*$ *için*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle f, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$$

ise $\{x_n\}$ *dizisi x' e zayıf yakınsaktır denir ve*

$$x_n \rightharpoonup x$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.18 [8] *Banach uzaylarında zayıf yakınsak dizi sınırlıdır.*

Teorem 2.19 [8] X *refleksif bir Banach uzayı ve* $\{x_n\}$ *bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. O zaman bu diziden öyle bir alt dizi seçebiliriz ki bu uzayda zayıf yakınsar.*

Tanım 2.20 [24] $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ *ölçüm uzayı,* $\mu(\Omega) < \infty$, $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve* f *ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,* $\forall\varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

ise $\{f_n\}$ *dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor denir ve* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *olarak gösterilir.*

Lemma 2.21 [24] $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ *ölçüm uzayı olsun.* $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsarsa, öyle* $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ *altdizisi vardır ki* $f_{n_k} \xrightarrow[hhy]{\Omega} f$ *sağlanır.*

Lemma 2.22 [24] $\{f_n\}$, $L_p(\Omega)$*'da fonksiyonlar dizisi ve* $f_n \underset{L_p(\Omega)}{\longrightarrow} f$ *olsun. O zaman* $\{f_n\}$ *dizisi* f*'e ölçüme göre yakınsar.*

Teorem 2.23 [33] X, Y *lineer normlu uzaylar ve* $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ *lineer operatör olsun. O zaman,* T *operatörü süreklidir ancak ve ancak öyle bir pozitif sabit* β *vardır ki,*

$$\|T(x)\| \leq \beta \|x\|, \forall x \in D(T)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.24 [18] X, Y *lineer normlu uzaylar ve* $A : X \longrightarrow Y$ *lineer sınırlı operatör olsun. Eğer* $\{x_n\} \subset X$ *dizisi için* $x_n \underset{X}{\rightharpoonup} x_0$ *ise* $Ax_n \underset{Y}{\rightharpoonup} Ax_0$*'dır. Yani, her sınırlı lineer operatör sadece sürekli değil aynı zamanda zayıf süreklidir.*

Tanım 2.25 $p > 1$ *sayısı için,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *eşitliğini sağlayan* $q > 1$ *sayısına* p*'nin duali denir.*

Teorem 2.26 ***(Genel Hölder Eşitsizliği)*** [7] $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ *olsun.* $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$ *ise*

$$\int\limits_{\Omega} |u_1 ... u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L_{p_k}(\Omega)}$$

sağlanır.

Lemma 2.27 ***(Young Eşitsizliği)*** [7] $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun. Bu durumda*

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

veya

$$a.b \leq \varepsilon a^p + c\left(\varepsilon\right) b^q \quad (\varepsilon > 0)$$

sağlanır.

Lemma 2.28 ***(İnterpolasyon Eşitsizliği)*** $\Omega \subset R^n$ *sınırlı bir bölge olmak üzere,* $\lambda = \lambda(p, q, r) \in [0, 1]$ *ve* $1 \leq p \leq q \leq r$ *olsun. O zaman* $\forall f \in L_r(\Omega)$ *için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \leq \|f\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)} \|f\|^{1-\lambda}_{L_r(\Omega)}$$

Lemma 2.29 ***(Kısmi İntegrasyon Formülü)*** [7] Ω, $\mathbb{R}^n$*'de sınırlı, açık bir bölge ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun. O zaman,* $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *için* $i = 1, ..., n$ *olmak üzere,*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

sağlanır. Burada η^i, $\partial\Omega$ *sınırının dış yönlü normal vektörü* $(\eta = (\eta^1, .., \eta^n))$*' nün i.bileşenidir.*

Lemma 2.30 ***(Green Formülü)*** [7] Ω, $\mathbb{R}^n$*'de sınırlı, açık bir bölge ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olmak üzere,* $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *için* u*'nun (dış) normal türevi*
$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \eta \centerdot Du$ $(Du := (u_{x_1}, .., u_{x_n}))$*olsun. O zaman* $u,\ v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *için aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$

(ii) $\int\limits_{\Omega} Dv \centerdot Du dx = -\int\limits_{\Omega} u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS$

(iii) $\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}) dS$

Lemma 2.31 [1] *Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ve* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *ise o zaman*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.32 [16] *$\Omega, \mathbb{R}^n (n \geq 1)$'de sınırlı bölge olmak üzere, $p, q > 1$ sayıları için, $f(x,\tau)$ fonksiyonu aşağıdakileri sağlasın:*

(i)

$$f : L_p(\Omega) \longrightarrow L_q(\Omega)$$

sınırlı bir dönüşüm

(ii)

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

sürekli bir fonksiyon olsun.

Ayrıca $\{u_m\}$ $L_p(\Omega)'$da bir dizi ve $u \in L_p(\Omega)$ olmak üzere

$$u_m \underset{L_p(\Omega)}{\rightharpoonup} u \text{ ve } u_m \xrightarrow[hhy]{\Omega} u$$

olsun.

O zaman öyle $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi vardır ki

$$f(x, u_{m_k}) \underset{L_q(\Omega)}{\rightharpoonup} f(x,u)$$

sağlanır.

Tanım 2.33 [12] *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$'de bir bölge, $m > 0$ bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun.*

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Burada

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

ve

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} .... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu lineer uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ için;

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için;

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. Sobolev uzayları Banach uzaylardır. $m = 0$ *için* $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ *dır.* $p = 2$ *ise* $W_2^m(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım*

$$\langle u, v\rangle_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha u(x)\ \ D^\alpha v(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.34 ***(Trace)*** [7] Ω*, sınırı* C^1 *sınıfına ait sınırlı bir bölge olsun. Öyle bir lineer sınırlı*

$$T : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L_p(\partial\Omega)$$

operatörü vardır ki aşağıdakiler sağlanır:

1. $Tu = u\,|_{\partial\Omega},\ u \in W_p^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$
2. $\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$, $\forall u \in W_p^1(\Omega)$, $c = c(p, \Omega)$

Teorem 2.35 [1] *Eğer* $u \in W_p^m(\Omega)$ *ise* $v = u\,\underset{\partial\Omega}{|}$ *(u'nun sınırdaki değeri),* $W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ *uzayına aittir ve*

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \le K_1\,\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \tag{i}$$

sağlanır ve tersine eğer $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ *ise o zaman* $\exists\ u \in W_p^m(\Omega)$ *vardır ki,* $v = u\,\underset{\partial\Omega}{|}$ *ve*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \le K_2\,\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \tag{ii}$$

sağlanır.

Teorem 2.36 [8] *Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa,* X *Banach uzayı* Y *Banach uzayına kompakt gömülür denir:*

1. $X \subset Y$
2. X *Banach uzayında* $u_0 \in X$*' e zayıf yakınsayan keyfi* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* ($u_n \underset{X}{\rightharpoonup} u_0$), Y *uzayında* u_0*'a güçlü yakınsar* ($u_n \underset{Y}{\longrightarrow} u_0$).

Tanım 2.37 [7] X *bir Banach uzayı,* $1 \le p < \infty$ *ve* $-\infty \le a < b \le \infty$ *olmak üzere*

$$W_p^1(a, b; X) = \{u \in L_p(a, b; X) : \quad u' \in L_p(a, b; X)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya $W_p^1(a,b;X)$ *uzayı denir. Bu uzay bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm*

$$\|f\|_{W_p^1(a,b;X)} = \begin{cases} (\int\limits_a^b \|u(t)\|_X^p dt + \|u'(t)\|_X^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\ sup}\ (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X), & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

Sonuç 2.38 [8] X *refleksif bir Banach uzayı ve* Y *keyfi bir Banach uzay olmak üzere* X*' in* Y*' ye kompakt gömülmesi aşağıdaki iki koşulun sağlanmasına denktir:*

1. $X \subset Y$

2. X*'teki keyfi sınırlı bir alt küme,* Y*'deki kompakt bir alt küme tarafından kapsanır.*

Tanım 2.39 [1] X*,* Y *lineer normlu uzaylar ve* $X \subset Y$ *olsun. Her* $u \in X$ *için*

$$\|u\|_Y \leq c\,\|u\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ *sayısı varsa,* X *uzayı* Y *uzayına sürekli gömülür denir.*

Teorem 2.40 [12] $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ *ya da* C^1 *sınıfına ait açık sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler süreklidir.*

(i) *Eğer* $1 \leq p < n$ *ise,* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$

(ii) *Eğer* $p = n$ *ise,* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [n, \infty)$

(iii) *Eğer* $p > n$ *ise,* $W_p^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$.

Teorem 2.41 [12] Ω*,* C^1 *sınıfına ait açık sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler kompakttır.*

(i) *Eğer* $p < n$ *ise,* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$

(ii) *Eğer* $p = n$ *ise,*$W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$

(iii) *Eğer* $p > n$ *ise,* $W_p^1(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Teorem 2.42 [1] *Ω $\mathbb{R}^n$'de uniform C^m-regularity özelliğine sahip olsun. Eğer $mp < n$ ve $p \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-pm}$ ise*

$$W_p^m(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Eğer $mp = n$ ise $p \leq q < \infty$ için bu gömülme vardır. (Uniform C^m-regularity özelliği: Eğer $\partial\Omega$ sınırının yerel bir sonlu açık örtüsü $\{U_j\}$ ve ona karşılık gelen birebir, m-smooth dönüşümlerin bir dizisi $\{\Phi_j\}$ varsa öyle ki Φ_j, U_j'yi $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ kümesine götürüyor ve şu özellikler sağlanıyor:

(i) Bazı $\delta > 0$ için, $\cup_{j=1}^{\infty}\Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}) \supset \Omega_\delta$, $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.

(ii) Bazı sonlu R için, U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş arakesite sahiptir.

(iii) Her j için, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) $(\Phi_{j,1}, .., \Phi_{j,n})$ ve $(\Psi_{j,1}, .., \Psi_{j,n})$, Φ_j ve Ψ_j'nin bileşenlerini temsil etmek üzere, öyle bir sonlu M sayısı vardır ki, her α için $|\alpha| \leq m$, her i için $1 \leq i \leq n$ ve her j için, $|D^\alpha\Phi_{j,i}(x)| \leq M$, $x \in U_j$ ve $|D^\alpha\Psi_{j,i}(y)| \leq M$, $y \in B$'dir.

o zaman Ω, uniform C^m-regularity özelliğine sahiptir.)

Teorem 2.43 [1] *Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $W_p^m(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.44 [1] *Eğer $1 < p < \infty$ ise $W_p^m(\Omega)$ refleksif uzaydır.*

Teorem 2.45 [30] *Her $u \in W_2^1(\Omega)$ için öyle bir $c = c(\Omega)$ sabiti vardır ki,*

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \leq c(\int_\Omega |Du|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2\,dx')$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.46 [30] *Her $u \in W_2^1(\Omega)$ için öyle bir $\widetilde{c} = \widetilde{c}(c(\Omega))$ sabiti vardır ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \widetilde{c}(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)})$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2.47 *Her* $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ *(*$\alpha > 1$*) için öyle bir* $c = c(\Omega)$ *sabiti vardır ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + c$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ normuna aşağıdaki şekilde Young Eşitsizliği'ni uygularsak,

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \le \frac{2}{\alpha+1} \int_\Omega |u|^{2\frac{\alpha+1}{2}} \, dx + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \int_\Omega dx$$

yani,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + mes(\Omega)$$

eşitsizliğini alırız ($\frac{2}{\alpha+1}$, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} < 1$). Bu eşitsizlikte her iki tarafa $\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}$ terimini eklersek,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + mes(\Omega)$$

eşitsizliğini dolayısıyla,

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + c$$

eşitsizliğini elde ederiz ($c = mes(\Omega)$; $mes(\Omega)$, Ω'nın ölçümüdür). ∎

Sonuç 2.48 *Her* $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ *(*$\alpha > 1$*) için öyle bir* $c = c(\Omega)$ *ve* $\bar{c} = cT$ *sabitleri vardır ki,*

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \le \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \bar{c}$$

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \le 2(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}) + c$$

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} \le 2(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}) + \bar{c}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 2.49 [10] *φ, kompakt support'a sahip gerçel değerli ve her mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ise (*$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*) φ'ye test fonksiyonu denir.*

Bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile test fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır (Bu uzayı D ile göstereceğiz).

Tanım 2.50 [10] *f, D üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f'e genelleştirilmiş fonksiyon denir:*

(a) Her α_1 ve α_2 gerçel (veya kompleks) sayıları ve her φ_1, $\varphi_2 \in D$ için

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$$

(b) Her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\} \subset D$ dizisi için $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ dizisi sıfıra yakınsar.

Yukarıdaki tanımdan çıkar ki, f integrallenebilir fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş fonksiyondur. Gerçekten, her $\varphi \in D$ için

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden yukarıdaki tanımın koşulları sağlanır.

Tanım 2.51 ***(Zayıf Türev)*** [7] *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} |$ her $V \subset\subset \Omega$ için $v \in L^1(V)\}$) ve α multiindex olmak üzere eğer her test fonksiyonu φ için*

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v\varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, v'ye u'nun $|\alpha|$. zayıf kısmi türevi denir ($D^{\alpha}u = v$).

Teorem 2.52 ***(Varlık Teoremi)*** [28] *X ve Y Banach uzayları, X^* ve Y^*'da sırasıyla dual uzayları olsun, $\mathcal{M}_0 \subseteq X$ zayıf tam "reflexive" pn-uzay , $X_0 \subseteq \mathcal{M}_0 \cap Y$ ayrılabilir topolojik vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(I) $f : P_0 \to L_q(0, T; Y)$ zayıf sürekli bir dönüşümdür, burada

$$P_0 \equiv L_p(0, T; \mathcal{M}_0) \cap W^1_q(0, T; Y) \cap \{x(t) \mid x(0) = 0\}$$

$1 < \max\{q, q'\} \leq p < \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$;

(II) $s \geq 0$, $m \geq 1$ olmak üzere $A : W^s_m(0, T; X_0) \to W^s_m(0, T; Y^*)$ lineer sürekli operatörü vardır ki, bu operatör $\frac{\partial}{\partial t}$ ile değişmelidir ve $ker(A^*) = \{0\}$' dır;

(III) f and A genelleşmiş anlamda turevlenebilir operatörleri, $L_p(0,T;X_0)$ uzayı üzerinde coercive ikili oluşturur, yani öyle bir $r>0$ sayısı ve $\Psi : R^1_+ \to R^1_+$ fonksiyonu vardır ki, $\tau \nearrow \infty$ iken $\Psi(\tau)/\tau \nearrow \infty$ ve her $x \in L_p(0,T;X_0)$ için $[x]_{L_p(\mathcal{M}_0)} \geq r$ koşulu altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^T \langle f(t,x(t)), Ax(t)\rangle dt \geq \Psi\left([x]_{L_p(\mathcal{M}_0)}\right)$$

(IV) Öyle $C_0>0$, $C_1, C_2 \geq 0$, $\nu>1$ sabitleri vardır ki her $x \in W^1_p(0,T;X_0)$ ve $\xi \in L_p(0,T;X_0)$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \xi(t), A\xi(t)\rangle dt &\geq C_0 \|\xi\|^{\nu}_{L_q(0,T;Y)} - C_2,\\ \int_0^t \langle \frac{dx}{d\tau}, Ax(\tau)\rangle d\tau &\geq C_1 \|x\|^{\nu}_{Y}(t) - C_2, \quad h.h.h\ t \in [0,T].\end{aligned}$$

(I) - (IV) koşulları sağlansın. O zaman

$$\frac{dx}{dt} + f(t,x(t)) = y(t), \quad y \in L_q(0,T;Y); \quad x(0)=0$$

Cauchy problemi, P_0 uzayında aşağıdaki anlamda çözülebilirdir:

$$\sup\left\{\frac{1}{[x]_{L_p(0,T;\mathcal{M}_0)}}\int_0^T \langle y(t), Ax(t)\rangle\ dt \ \middle|\ x \in L_p(0,T;X_0)\right\} < \infty.$$

eşitsizliğini sağlayan her $y \in L_q(0,T;Y)$ için

$$\int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt} + f(t,x(t)), y^*(t)\right\rangle dt = \int_0^T \langle y(t), y^*(t)\rangle\, dt, \quad \forall y^* \in L_{q'}(0,T;Y^*)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.53 ***(Yarı Grup)*** [2] *H bir metrik uzay olsun. $S(t): H \to H$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ operatör ailesine yarı grup denir:*

(i) $S(t+s) = S(t).S(s), \quad \forall s,t \geq 0$

(ii) $S(0)=I$ *(H'de birim operatör).*

Tanım 2.54 ***(Yutan Küme)*** [31] *H bir metrik uzay, B ise H'nin herhangi bir alt kümesi ve $\mathcal{U}$, B'yi içeren açık küme olsun. Aşağıdaki özelliği sağlayan B kümesine $\mathcal{U}$'da yutan küme denir:*

Her $B_0 \subset \mathcal{U}$ sınırlı kümesi için $\exists t_0(B_0)$ vardır ki, her $t \geq t_0$ için $S(t)B_0 \subset B$ sağlanır.

Lemma 2.55 ***(Düzgün Gronwall)*** [31] *$f_j,\ \ j = 1, 2, 3$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve T, c_j pozitif sabitleri için*

$$\int_t^{t+T} f_j(s)ds \leq c_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \forall t \geq 0$$

sağlasın. Ayrıca f_1 türevlenebilir olsun ve aşağıdaki eşitsizliği sağlasın:

$$\frac{d}{dt} f_1 \leq f_1 f_2 + f_3, \quad \forall t \geq 0$$

.

O zaman,

$$f_1(t + T) \leq (\frac{c_1}{T} + c_3) \exp\{c_2\}, \quad \forall t \geq 0$$

sağlanır.

3. ve 4. Bölümlerde kullanacağımız sabit sayılar aşağıdaki eşitsizliklerinden gelmektedir:

1.

$$\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq \tilde{c}_3 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.1}$$

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} \leq c_3 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{2.2}$$

Burada $c_3 = c_3(\Omega)$ ve $\tilde{c}_3 = \tilde{c}_3(c_3)$ sabitleri, $p_0 = \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olmak üzere $W_2^1(\Omega) \subset L_{p_0}(\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelen sabitlerdir.

2.

$$c_2 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq (\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}); \tag{2.3}$$

$$c_2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq (\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^2_{L_2(\Sigma_T)}) \tag{2.4}$$

Burada $c_2 = c_2(\Omega)$ sabiti, Sonuç 2.46'dan gelmektedir.

3.

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_4 \|u\|^2_{W^1_2(\Omega)} \tag{2.5}$$

$$\|u\|^2_{L_2(\Sigma_T)} \leq c_4 \|u\|^2_{L_2(0,T;W^1_2(\Omega))} \tag{2.6}$$

Burada $c_4 = c_4(\Omega)$ sabiti, $W^1_2(\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelmektedir.

4.

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))} \leq c_5 \|u\|^2_{L_2(0,T;W^1_2(\Omega))} \tag{2.7}$$

Burada $c_5 = c_5(\Omega)$, $W^1_2(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelen sabittir.

5.

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c_6 \|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} \tag{2.8}$$

Burada $c_6 = c_6(\Omega)$ sabiti, $L_{p_0}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelmektedir.

6.

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c_7 \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \tag{2.9}$$

Burada $c_7 = c_7(\Omega)$ sabiti, $L_{\alpha+1}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelen sabittir.

7.

$$\|u\|^2_{L_2(0,T)} \leq c_8 \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(0,T)} \tag{2.10}$$

Burada $c_8 = c_8(T)$ sabiti, $L_{\alpha+1}(0,T) \subset L_2(0,T)$ sürekli gömülmesinden gelmektedir.

8.

$$\|u\|_{L_{(\alpha-1)\frac{2p_0}{p_0-2}}(\Omega)} \leq c_9 \|u\|_{W^1_2(\Omega)} \tag{2.11}$$

Burada $c_9 = c_9(\Omega)$ sabiti, $p_0 = \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ ve $\alpha > 1$ olmak üzere $W^1_2(\Omega) \subset L_{(\alpha-1)\frac{2p_0}{p_0-2}}(\Omega)$ sürekli gömülmesinden gelmektedir.

9.

$$c_{10} \|u\|^2_{(W^1_2(\Omega))^*} \leq \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2.12}$$

Burada $c_{10} = c_{10}(\Omega)$ sabiti, $L_2(\Omega) \subset (W^1_2(\Omega))^*$ sürekli gömülmesinden gelmektedir.

10.

$$c_{11}\left\|u\right\|^2_{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \leq \left\|u\right\|^2_{L_2(Q_T)} \tag{2.13}$$

Burada $c_{11} = c_{11}(Q_T)$ sabiti, $L_2(Q_T) \subset L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ sürekli gömülmesinden, gelmektedir.

3 BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMLERİ İÇİN 3. SINIF BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Bu bölümde, (1.1)-(1.3) probleminin uygun uzaylarda genelleşmiş anlamda çözümünün varlığı incelenecektir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(x,t,u) + e(x,t)\left\| u \right\|_{L_2(\Omega)}(t) = h(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T) \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3 \tag{1.2}$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x',t)u \right) \right|_{\Sigma_T} = \varphi(x',t), \qquad (x',t) \in \ \Sigma_T \equiv \partial\Omega \times [0,T], T > 0 \tag{1.3}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bölgedir. Bu problem, genel olarak $q > 1$ olmak üzere, $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_q(Q_T)$, $\varphi \in L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ olduğu durumda incelenecektir.

Aşağıdaki koşulları kabul edelim:

(1) $g(x,t,\xi)$, $(Q_T \times \mathbb{R}^1)$'de Caratheodory fonksiyonu olmak üzere, öyle $\alpha \geq 0$ sayısı ve $c_1 \in L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))$, $c_0 \in L_{s_2}(0,T;L_{r_2}(\Omega))$ fonksiyonları vardır ki, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ ve her $\xi \in \mathbb{R}^1$ için

$$|g(x,t,\xi)| \leq c_1(x,t)\,|\xi|^{\alpha} + c_0(x,t)$$

eşitsizliği sağlanır. (r_1, r_2, s_1, $s_2 > 1$ sayıları α sayısına bağlı olarak daha sonra tanımlanacaktır).

(2) $a \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$

(3) e fonksiyonu aşağıdaki uzaya aittir:

$$e \in L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega)), \quad \tilde{q} := \begin{cases} q_0, & \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha+1}{\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Burada, $p_0 := \frac{2n}{n-2}$ olmak üzere $q_0 := (p_0)'$'dır ve α sayısı **(1)** koşulundan gelmektedir.

Gözönüne alınan problemin çözümü aşağıdaki şekilde anlaşılacaktır:
$P_0 := L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$ olsun.

Tanım 3.1 *Keyfi $v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ için,*

$$-\int_0^T\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial t}dxdt + \int_\Omega u(x,T)v(x,T)dx - \int_\Omega u(x,0)v(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega Du.Dvdxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)vdxdt + \int_0^T\int_\Omega e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}vdxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} a(x',t)uvdx'dt$$

$$= \int_0^T\int_\Omega hvdxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi vdx'dt$$

eşitliğini sağlayan $u \in P_0$ fonksiyonuna (1.1)-(1.3) probleminin genelleşmiş çözümü denir.

Bu bölümde (1.1)-(1.3) problemini, u_0 başlangıç koşulu sıfır ve sıfırdan farklı iken olmak üzere iki alt bölümde inceleyeceğiz. Göz önüne alınan problemin çözümünün varlığı araştırıldığında, (1.1) denkleminin lineer olmayan kısmına bağlı olarak farklı koşullar elde edildiğinden, her iki alt bölüm de üç ayrı durumda incelenecektir:

(i) $\alpha < 1$ Durumu,

(ii) $\alpha = 1$ Durumu,

(iii) $\alpha > 1$ Durumu.

$L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ ile $L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayları arasında α sayısına bağlı olarak ilişki var olduğundan, alt bölümlerde P_0 uzayı buna göre tanımlanacaktır.

3.1 Başlangıç Koşulu Sıfır İken (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu bölümde (1.1)-(1.3) problemi, $u_0 = 0$ başlangıç koşulu ile incelenecektir. İlk üç alt bölümde çözümün varlığı, son alt bölümde ise özel durumda çözümün tekliği gösterilecektir.

3.1.1 $\alpha < 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre alt lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha < 1$ için sağlandığından, Sobolev'in Gömülme Teoremi'nden $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$'dir. Bu nedenle $P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)′ $s_1 := \frac{2}{1-\alpha}$, $r_1 := \frac{p_0 q_0}{p_0 - \alpha q_0}$, $s_2 := 2$, $r_2 := q_0$ sayıları ve $\alpha < 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın ($p_0 := \frac{2n}{n-2}$ ve $q_0 := (p_0)'$).

(4) Hemen hemen her $(x', t) \in \Sigma_T$ için $a(x', t) \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır.

(5) $\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} < \frac{\theta_0 c_2}{c_6 c_3}$, $\quad \theta_0 := min\{1, a_0\}$'dır.
(c_2, c_3 ve c_6 sırasıyla, (2.4), (2.2), (2.8)'deki sabitlerdir.)

Teorem 3.2 ***(1)′**, **(2)**, **(3)**, **(4)** ve **(5)** koşulları sağlansın. O zaman, keyfi $(h, \varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için genel bir varlık teoremi olan Teorem 2.52'den yararlanacağız. Bunun için önce (1.1)-(1.3) probleminin yarattığı dönüşümleri tanımlayalım:

$$f = \{f_1, f_2\} : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

öyle ki

$$f_1(u) := -\Delta u + g(x,t,u) + e(x,t) \|u\|_{L_2(\Omega)}(t), \tag{3.1}$$

$$f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x',t)u; \tag{3.2}$$

$$A : P_0 \to P_0$$

$$A \equiv Id \tag{3.3}$$

Şimdi Teorem 3.2'nin ispatı için gerekli lemmaları verelim:

Lemma 3.3 *f ve A dönüşümleri,* $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ *uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından burada coercive ikililik, f dönüşümünün adi anlamda coercive'liğine denk gelir. f 'nin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$'da coercive olduğunu görmek için önce $\langle f(u),u\rangle_{Q_T}$ dual formunu alttan değerlendireceğiz.

(3.1) ve (3.2)'yi kullanarak kısmi integrasyon yaparsak,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} = \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt$$

$$+\int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)}\int_\Omega e(x,t)udxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} a(x',t)u^2dx'dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi **(1)**$'$, **(3)** ve **(4)** koşullarını göz önüne alarak Hölder eşitsizliğini uygulayalım:

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + a_0\|u\|^2_{L_2(\Sigma_T)} - \int_0^T\int_\Omega c_1(x,t)\,|u|^\alpha\, udxdt - \int_0^T\int_\Omega c_0(x,t)udxdt$$

$$-\int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_{q_0}(\Omega)}\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)}\,dt$$

$\theta_0 := min\{1,a_0\}$ dersek, (2.4), (2.8) ve Hölder, Young eşitsizlikleri ile,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \theta_0 c_2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|c_1\|_{L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{p_0}(\Omega)}\,dt$$

$$-\varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_1)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime de Young eşitsizliği uygularsak,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \theta_0 c_2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_2\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)\|c_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega))}$$

$$-\varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_1)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

elde ederiz.

Burada (2.2)'yi kullanırsak,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \theta_0 c_2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_2 c_3\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_2)\|c_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega))}$$

$$-\varepsilon_1 c_3 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_1)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

değerlendirmesini alırız.

$Z_1 := c(\varepsilon_1)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)\|c_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{p_0 q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega))}$ dersek son eşitsizliği,

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \left(\theta_0 c_2 - \varepsilon c_3 - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - Z_1$$

olarak yazabiliriz.

(5) koşulundan ve ε pozitif sayısı yeterince küçük seçilebileceğinden, son eşitsizlikteki $\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$ normunun katsayısı pozitif olarak alınır. O halde f dönüşümü, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive'dir.

■

Lemma 3.4 *f dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f dönüşümünün lineer kısımları sınırlı olduğundan zayıf süreklidir. Bu durumda lineer olmayan kısımların zayıf sürekliliğini incelemek yeterlidir.

$g_1(x,t,u) = e(x,t)\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, g ve g_1 dönüşümlerini ayrı ayrı inceleyebiliriz. Önce g dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim.

$\{u_m\}\subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u}\in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\ \{u_{m_j}\}\subset\{u_m\}$ alt dizisi için $g(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u})$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için önce $g: P_0\subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ sınırlı dönüşüm olduğunu görelim:

(1)$'$ koşulu ve Hölder eşitsizliği ile,

$$\int_0^T \Big[\int_\Omega |g(x,t,u)|^{q_0}\, dx\Big]^{\frac{2}{q_0}} dt \leq 4\int_0^T \left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{q_0}\, |u|^{\alpha q_0}\, dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{q_0}\, dx\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4\int_0^T \left[\|c_1\|^{q_0}_{L_{r_1}(\Omega)}\|u\|^{\alpha q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)}\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4^{1+\frac{1}{q_0}}\int_0^T \left[\|c_1\|^2_{L_{r_1}(\Omega)}\|u\|^{2\alpha}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^2_{L_{q_0}(\Omega)}\right] dt.$$

eşitsizliğini alırız.

Buradan,

$$\gamma_0(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$
$$:= 2^{1+\frac{1}{q_0}} \left[\|c_1\|^2_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1(\Omega)})} \|u\|^{2\alpha}_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} + \|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,u)\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \gamma_0(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_0(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$$

sınırlı dönüşümdür.

Şimdi Lemma 2.32'den yararlanmak için gerekli diğer özellikleri aşağıda sıralayalım:

1. $P_0 \subset L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ olduğundan $u_m \underset{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} \bar{u}$ 'dır.
2. $L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \cap W^1_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T)$ kompakt gömülmesi var olduğundan, Lemma 2.21 ve Lemma 2.22'den öyle bir $\exists \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow \bar{u}$'dir.
3. $\mathbf{(1)}'$ koşuluna göre g Caratheodory fonksiyonu olduğundan, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için,

$$g(x,t,\boldsymbol{.}) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$$

sürekli fonksiyondur.

Yukarıdaki özelliklerden, Lemma 2.32'ye göre $\exists \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u})$' dır. $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)$ olduğundan, $g(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u})$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz.

O halde g dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.

Şimdi g_1 dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim:

$\{u_m\} \subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u} \in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. Yine Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi için $g_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$ olduğunu göstereceğiz.

Yukarıda g dönüşümü için sıraladığımız 1. ve 2. özellikler, g_1 dönüşümü için de geçerli olduğundan ve $g_1(x,t,\centerdot) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$ sürekli fonksiyon olduğundan, bu dönüşümün $P_0 \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ uzayından $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ uzayına sınırlı dönüşüm olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

(2.6) ile Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$\int_0^T [\int_\Omega |g_1(x,t,u)|^{q_0}\ dx]^{\frac{2}{q_0}} dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |e(x,t)|^{q_0}\ \|u\|^{q_0}_{L_2(\Omega)}\ dx \right)^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$= \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \left(\int_\Omega |e(x,t)|^{q_0}\ dx \right)^{\frac{2}{q_0}} dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\ \|e\|^2_{L_{q_0}(\Omega)}\ dt$$

$$\leq \|u\|^2_{L_2(Q_T)}\ \|e\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq c_6 \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}\ \|e\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$

yazabiliriz.

$\gamma_1(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}) := c_6^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$ dersek,

$$\|g_1\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \gamma_1(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

elde ederiz. $\gamma_1(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g_1 : L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$$

sınırlı dönüşümdür.

O halde Lemma 2.32'ye göre $\exists \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$' dır. $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ olduğundan, $g_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz. Yani, g_1 dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.

■

İspat. (Teorem 3.2) A birim dönüşüm olduğundan, Teorem 2.52'nin (II) koşulu sağlanır. Ayrıca (2.12) sayesinde, keyfi $u \in W_2^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ için (2.12) ve (2.13) ile aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle u,u\rangle_\Omega\, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_{10}\|u\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $t \in [0,T]$.

Lemma 3.3, Lemma 3.4 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup \left\{ \frac{\int_0^T \langle h,u\rangle_\Omega + \langle \varphi,u\rangle_{\partial\Omega}\, dt}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (1.1)-(1.3) probleminin keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz.

■

3.1.2 $\alpha = 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha = 1$ için sağlandığından, Sobolev'in Gömülme Teoremi'nden $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$'dir. Bu nedenle $P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)″ $s_1 := \infty$, $r_1 := \frac{n}{2}$, $s_2 := 2$, $r_2 := q_0$ sayıları ve $\alpha = 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın.

(6) Aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

I. Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır ve

$$c_6 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} + \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} < \frac{\theta_1 c_2}{c_3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\theta_1 := min\{1,a_0\}$'dır.

II. Öyle $k_0 > 0, k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ ve her $\xi \in \mathbb{R}$ için,

$$g(x,t,\xi)\xi \geq k_0|\xi|^2 - k_1$$

eşitsizliği ve

$$c_5 \left\|a\right\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} + c_3 c_6 \left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} < \theta_2$$

eşisizliği sağlanır. Burada $\theta_2 := min\{1, k_0\}$'dır.

(c_2, c_3, c_5 ve c_6 sırasıyla,(2.4), (2.2), (2.7) ve (2.8)'deki sabitlerdir.)

Teorem 3.5 ***(1)***$''$*, **(2)**, **(3)** ve **(6)** koşulları sağlansın. O zaman, keyfi* $(h, \varphi) \in L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0, T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *için (1.1)-(1.3) probleminin* P_0 *uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için de Teorem 2.52'den yararlanacağız. O halde (3.1)-(3.3) dönüşümlerini gözönüne alarak, Teorem 3.5'in ispatında gerekli olacak lemmaları verelim:

Lemma 3.6 *f ve A dönüşümleri,* $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ *uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından, f 'nin $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$'da coercive olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\langle f(u), u\rangle_{Q_T} &= \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega g(x,t,u)u\,dxdt \\ &+ \int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)u\,dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)u^2 dx'dt \end{aligned} \tag{3.4}$$

Burada ilk olarak **(6)-I.** koşulunu gözönüne alalım: **(1)**$''$ ve **(3)** koşulu ile Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + a_0 \|u\|^2_{L_2(\Sigma_T)} - \int_0^T \int_\Omega c_1(x,t)u^2 dxdt - \int_0^T \int_\Omega c_0(x,t)|u|dxdt \\ - \int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_{q_0}(\Omega)} \|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} dt\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\theta_1 := min\{1, a_0\}$ diyelim. (2.4) ve (2.8) ile Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \theta_1 c_2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \int_0^T \|c_1\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L_{p_0}(\Omega)} dt$$

$$-\varepsilon_1 \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_1) \|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_6 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

yazabiliriz. Buradan, (2.2)'yi kullanarak aşağıdaki değerlendirmeleri alırız:

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \theta_1 c_2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$-\varepsilon_1 \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_1) \|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \left(\theta_1 c_2 - c_3 \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - c_3 \varepsilon_1\right) \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_1) \|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$

(6)-I. koşulu kullanılarak ve ε_1 pozitif sayısı yeterince küçük seçilerek, son eşitsizlikteki $\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$ normunun katsayısı pozitif alınır ve buradan coercive'lik elde edilir.

Bu kez (3.4) eşitliğinde $\mathbf{(1)''}$ koşulunu göz önüne alalım: **(2)** ve **(3)** koşulu ile Hölder eşitsizliğini de kullanırsak,

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0 \|u\|^2_{L_2(Q_T)} - \int_0^T \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{\frac{2n-2}{n-2}(\partial\Omega)} dt$$

$$-\int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_{q_0}(\Omega)} \|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} dt - k_1 T mes\Omega$$

yazabiliriz.

$\theta_2 := min\{1, k_0\}$ dersek, (2.8) ile

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \theta_2 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;\frac{2n-2}{n-2}(\partial\Omega))}$$

$$-c_6 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - k_1 T mes\Omega$$

elde ederiz. (2.2) ve (2.7)'yi kullanarak, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \left(\theta_2 - c_5 \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right) \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-k_1 T mes\Omega$$

Son eşitsizlikten coercive'lik elde edilir.

■

Lemma 3.7 *f dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat.

Bu ispat Lemma 3.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır. Farklı olarak $\alpha = 1$ durumunda g dönüşümünün $P_0 \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ uzayından $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ uzayına sınırlı dönüşüm olduğunu görelim:

(1)″ koşulunu ve Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\int_0^T [\int_\Omega |g(x,t,u)|^{q_0} \; dx]^{\frac{2}{q_0}} dt \leq 4 \int_0^T \left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{q_0} \; |u|^{q_0} \; dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{q_0} \; dx \right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4 \int_0^T \left[\|c_1\|^{q_0}_{L_{r_1}(\Omega)} \|u\|^{q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)} \right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4^{1+\frac{1}{q_0}} \int_0^T \left[\|c_1\|^{2}_{L_{r_1}(\Omega)} \|u\|^{2}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^{2}_{L_{q_0}(\Omega)} \right] dt.$$

eşitsizliğini alırız.

Buradan,

$$\gamma_2(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$
$$:= 2^{1+\frac{1}{q_0}} \left[\|c_1\|^2_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))} \|u\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} + \|c_0\ \|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,u)\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \gamma_2(\|u\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_2(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$$

sınırlı dönüşümdür.

■

İspat. (Teorem 3.5) 3.1.1 durumuna benzer şekilde, A birim dönüşüm olduğundan Terorem 2.52'nin (II) koşulu sağlanır. Ayrıca, keyfi $u \in W^1_2(0,T;W^1_2(\Omega))$ için (2.12) ve (2.13) ile aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle u,u\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_{10} \|u\|^2_{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $t \in [0,T]$

Lemma 3.6, Lemma 3.7 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup \left\{ \frac{\int_0^T \langle h,u\rangle_\Omega + \langle \varphi,u\rangle_{\partial\Omega}\, dt}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (1.1)-(1.3) problemini keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz. ■

3.1.3 $\alpha > 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre süper lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha > 1$ için sağlandığından,

$P_0 := L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)''' $s_1 := \infty$, $r_1 := \infty$, $s_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $r_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$ sayıları ve $\alpha > 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın.

(7) Öyle $k_0 > 0, k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ ve her $\xi \in \mathbb{R}$ için,

$$g(x,t,\xi)\xi \geq k_0|\xi|^{\alpha+1} - k_1$$

eşitsizliği sağlanır.

(8) Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq -a_0$ olacak şekilde bir $0 < a_0 < \frac{\theta_2}{c_4}$ sayısı vardır. Burada $\tilde{k_0} < k_0$ olmak üzere $\theta_2 := min\{1, \tilde{k_0}\}$'dır.
(c_4, (2.6)'daki sabittir.)

Teorem 3.8 *(1)''', (2), (3) , (7) ve (8) koşulları sağlansın. O zaman, keyfi $(h,\varphi) \in \left[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için de Teorem 2.52'den yararlanacağız.

$$f = \{f_1, f_2\} : P_0 \to \Big[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\Big] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)); \;\; A : P_0 \to P_0$$

olmak üzere (3.1)-(3.3) dönüşümlerini gözönüne alalım ve ispat için gerekli olacak lemmaları verelim:

Lemma 3.9 *f ve A dönüşümleri, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından, f'nin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında coercive olduğunu göstereceğiz.

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} = \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega g(x,t,u)u\,dxdt$$

$$+ \int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)u\,dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)u^2 dx'dt$$

(3), **(7)**, **(8)** koşulları ile Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0 \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - a_0 \|u\|^2_{L_2(\Sigma_T)} dt$$

$$- \int_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} dt - k_1 T mes\Omega$$

yazabiliriz.

(2.6), (2.9) ve (2.10)'dan aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0 \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - a_0 c_4 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$- \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))} c_7 \int_0^T \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} dt - k_1 T mes\Omega$$

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0 \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - a_0 c_4 \|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$- c_7 c_8 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))} \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - k_1 T mes\Omega$$

Burada Young eşitsizliğini kullanarak,

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} \geq \|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + (k_0 - \varepsilon) \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - c(\varepsilon)(c_7 c_8 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))})^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

$$-a_0c_4\left\|u\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-k_1Tmes\Omega$$

değerlendirmesini alırız.

$0<\varepsilon<k_0$ seçerek $\theta_3:=min\{1,k_0-\varepsilon\}$ dersek ve Sonuç 2.48'i kullanırsak,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T}\geq(\theta_3-a_0c_4)\left[\left\|Du\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right]-Z_1$$

yazabiliriz. Burada $Z_1:=c(\varepsilon)(c_7c_8\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))})^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+k_1Tmes\Omega+a_0c_4\bar{c}$'dir. Yine Sonuç 2.48'den,

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T}\geq\frac{1}{2}(\theta_3-a_0c_4)\left[\left\|u\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right]-Z_2$$

Burada $Z_2:=Z_1+\frac{\bar{c}}{2}(\theta_3-a_0c_4)$'dır. Son eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T}\geq\frac{1}{2}(\theta_3-a_0c_4)\left[\left\|u\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|u\right\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right]-Z_3$$

$Z_3:=Z_2+\frac{1}{2}(\theta_3-a_0c_4)$'dır. O halde,

$$\begin{aligned}\langle f(u),u\rangle_{Q_T}&\geq\frac{1}{4}(\theta_3-a_0c_4)\left[\left\|u\right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|u\right\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right]^2-Z_3\\&=\frac{1}{4}(\theta_3-a_0c_4)\left\|u\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}-Z_3\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan f dönüşümünün $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında coercive olduğu görünür.

■

Lemma 3.10 *f dönüşümü, P_0 uzayından $\left[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right]\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. Daha önce de belirttiğimiz gibi, f dönüşümünün lineer kısımları sınırlı olduğundan zayıf süreklidir. Bu nedenle lineer olmayan kısımların zayıf sürekliliğini incelemek yeterlidir.

$g_1(x,t,u)=e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, g ve g_1 dönüşümlerinin zayıf sürekliliğini ayrı ayrı inceleyelim. Önce g dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim:

$\{u_m\}\subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u}\in P_0$ için $u_m\underset{P_0}{\rightharpoonup}\bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\,\{u_{m_j}\}\subset\{u_m\}$ alt dizisi için $g(x,t,u_{m_j})\underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup}g(x,t,\bar{u})$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için önce $g : P_0 \subset L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ sınırlı dönüşüm olduğunu görelim:

(1)$'''$ koşulu ve Hölder eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\int_0^T \int_\Omega |g(x,t,u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\, dxdt$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \int_0^T \left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\, |u|^{\alpha+1}\, dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\, dx \right] dt$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)} \int_0^T \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}\, dt \right]$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)} \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \right]$$

eşitsizliğini alırız. Buradan,

$$\gamma_3(\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)})$$

$$:= 2 \left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)} \|\tilde{u} + u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,u)\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \leq \gamma_3(\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_3(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

sınırlı dönüşümdür.

Şimdi Lemma 2.32'den yararlanabilmek için gerekli diğer özellikleri aşağıda sıralayalım:

1. $P_0 \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$ olduğundan $u_m \underset{L_{\alpha+1}(Q_T)}{\rightharpoonup} \bar{u}$ 'dır.
2. $L_2(0,T; W^1_2(\Omega)) \cap W^1_2(0,T; (W^1_2(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T)$ kompakt gömülmesi var olduğundan, öyle bir $\exists\ \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow \bar{u}$'dir.

3. $\mathbf{(1)}'''$ koşuluna göre g Caratheodory fonksiyonu olduğundan, hemen hemen her $(x,t)\in Q_T$ için,

$$g(x,t,\centerdot):\mathbb{R}_1\longrightarrow\mathbb{R}_1$$

sürekli fonksiyondur.

Yukarıdaki özelliklerden, Lemma 2.32'ye göre $\exists\ \{u_{m_j}\}\subset\{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g(x,t,u_{m_j})\underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u})$' dır. $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ olduğundan, $g(x,t,u_{m_j})\underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u})$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz.

O halde g dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir.

Şimdi g_1 dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim:

$\{u_m\}\subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u}\in P_0$ için $u_m\underset{P_0}{\rightharpoonup}\bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\ \{u_{m_j}\}\subset\{u_m\}$ alt dizisi için $g_1(x,t,u_{m_j})\underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$ olduğunu göstereceğiz.

Yukarıda g dönüşümü için sıraladığımız 1. ve 2. özellikler, g_1 dönüşümü için de geçerli olduğundan ve $g_1(x,t,\centerdot):\mathbb{R}_1\longrightarrow\mathbb{R}_1$ sürekli fonksiyon olduğundan, bu dönüşümün $P_0\subset L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayından $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına sınırlı dönüşüm olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathbf{(3)}$ koşulu, (2.9) ve Young eşitsizliğinden faydalanırsak,

$$\int_0^T[\int_\Omega |g_1(x,t,u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dx]dt=\int_0^T\left(\int_\Omega |e(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dx\right)dt$$

$$=\int_0^T\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left(\int_\Omega |e(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dx\right)dt=\int_0^T\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\ \|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dt$$

$$\le c_7\,\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\int_0^T\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dt\le c_7\,\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left(\varepsilon\,\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}^{\alpha+1}+Tc(\varepsilon)\right)$$

yazabiliriz.

$\gamma_4(\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}):=c_7^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))}\left(\varepsilon\,\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}^{\alpha+1}+Tc(\varepsilon)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ dersek,

$$\|g_1\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\le\gamma_4(\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)})$$

elde ederiz. $\gamma_4(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g_1 : L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

sınırlı dönüşümdür.

O halde Lemma 2.32'ye göre $\exists \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$' dır. $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T) \subset L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ olduğundan, $g_1(x,t,u_{m_j}) \underset{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u})$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz. Yani, g_1 dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir.

■

İspat. (Teorem 3.8)

A birim dönüşüm olduğundan, Terorem 2.52'nın (II) koşulu sağlanır. Ayrıca, keyfi $u \in W^1_2(0,T;W^1_2(\Omega))$ için (2.12) ve (2.13) ile aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle u,u\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_{11}\|u\|^2_{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u\right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|u\|^2_{(W^1_2(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $\quad t \in [0,T]$

Lemma 3.9, Lemma 3.10 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in \left[L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup \left\{ \frac{\int_0^T \langle h,u\rangle_\Omega + \langle \varphi,u\rangle_{\partial\Omega}\, dt}{\|u\|_{L_2(0,T;W^1_2(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}} : u \in L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (1.1)-(1.3) probleminin keyfi $(h,\varphi) \in \left[L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right]$ $\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz. ■

3.1.4 Özel Durumda (1.1)-(1.3) Probleminin Çözümünün Tekliği

Bu bölümde, (1.1)-(1.3) probleminin çözümünün tekliği özel durumda ispatlanmıştır. Genel durumda çözümün tekliği ise, başlangıç koşulu sıfırdan farklı iken 3.2.4 Bölümü'nde gösterilmiştir.

Şimdi (1.1)-(1.3) probleminde $\nu > 0$ olmak üzere, $g(x,t,u) := d(x,t)|u|^{\nu-1}u + b(x,t)u$ olsun. Buna göre bu problemi aşağıdaki şekilde yeniden yazarak, teklik teoremini verelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + d(x,t)|u|^{\nu-1}u + b(x,t)u + e(x,t)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}(t) = h(x,t) \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x',t)u\right)\Big|_{\Sigma_T} = \varphi(x',t) \tag{3.7}$$

Teorem 3.11 *Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(T_1) *Hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $d(x,t) \geq 0$ olmak üzere,*

$$d \in \begin{cases} L_\infty(Q_T), & \nu > 1 \\ L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega)), & \nu = 1 \\ L_{\frac{2}{1-\nu}}(0,T;L_{\frac{p_0}{p_0-\nu-1}}(\Omega)), & \nu < 1 \end{cases}$$

olsun.

(T_2) $a \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$,$b \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$ *ve* $e \in L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ *olmak üzere aşağıdaki, koşullardan biri sağlansın:*

(i) *Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq a_0$ olacak şekilde a_0 pozitif sayısı var ise,*

$$c_6\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} + \left\|b\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} < \frac{\theta_4 c_2}{c_3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\theta_4 := min\{1,a_0\}$'dır.

(ii) *Hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $b(x,t) \geq b_0$ olacak şekilde b_0 pozitif sayısı var ise,*

$$c_5\left\|a\right\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} + c_3c_6\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} < \theta_5$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\theta_5 := min\{1,b_0\}$'dır.

(c_2, c_3, c_5 ve c_6 sırasıyla, (2.4), (2.2), (2.7), (2.8)'deki sabitlerdir.)

O zaman (4.1)-(4.3) probleminin $P_1 := L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\nu+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$ uzayında çözümü varsa tektir.

İspat. $u_1, u_2 \in P_1$, (3.5)-(3.7) probleminin iki farklı çözümü olsun. $\omega := u_1 - u_2$ dersek, bu problemden aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + d(x,t)[|u_1|^{\nu-1}u_1 - |u_2|^{\nu-1}u_2] + b(x,t)\omega + e(x,t)(\|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)})(t) = 0 \tag{3.8}$$

$$w(x,0) = 0 \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + a(x',t)w\right)\bigg|_{\Sigma_T} = 0 \tag{3.10}$$

(3.8) denklemini w ile çarparak Q_T üzerinden integraline geçelim.

$$0 = \frac{1}{2}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(T) + \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega d(x,t)[|u_1|^{\nu-1}u_1 - |u_2|^{\nu-1}u_2](u_1 - u_2)dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega b(x,t)w^2 dxdt + \int_0^T (\|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)}) \int_\Omega e(x,t)w dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx'dt$$

$\Phi(\tau) := |\tau|^{\nu-1}\tau$ fonksiyonu artan ve (T_1) koşuluna göre $d(x,t) \geq 0$ olduğundan,

$$0 \geq \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega b(x,t)w^2 dxdt - \int_0^T \left| \|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)} \right| \int_\Omega |e(x,t)||w| dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx'dt$$

yazabiliriz. Buradan Hölder eşitsizliği ile,

$$0 \geq \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega b(x,t)w^2 dxdt - \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_{q_0}(\Omega)} \|w\|_{L_{p_0}(\Omega)} dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx'dt$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (2.8)'den,

$$0 \geq \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega b(x,t)w^2 dxdt - c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|w\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx'dt \tag{3.11}$$

elde ederiz.

(3.11) eşitsizliğinde (T_2)-(i) koşulunu göz önüne alırsak,

$$0 \geq \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} - \|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|w\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|w\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$+a_0\|w\|^2_{L_2(\Sigma_T)}$$

yazabiliriz. $\theta_4 := min\{1, a_0\}$ dersek,

$$0 \geq \left[\theta_4 c_2 - c_3\|b\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - c_3 c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right]\|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} > 0$$

elde ederiz ki bu da $0 > 0$ çelişkisidir.

Bu kez (3.11) eşitsizliğinde $(T_2) - (ii)$ koşulunu göz önüne alırsak,

$$0 \geq \|Dw\|^2_{L_2(Q_T)} + b_0\|w\|^2_{L_2(Q_T)} - c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|w\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$-\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|w\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

yazabiliriz. $\theta_5 := min\{1, b_0\}$ dersek, (2.7)'den

$$0 \geq \left[\theta_5 - c_5\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - c_3 c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right]\|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} > 0$$

elde ederiz ki bu da $0 > 0$ çelişkisidir.

O halde (3.5)-(3.7) probleminin çözümü varsa tektir.

■

3.2 Başlangıç Koşulu Sıfırdan Farklı İken (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu bölümde, (1.1)-(1.3) problemi için başlangıç koşulu sıfırdan farklı kabul edilecektir. İlk üç alt bölümde çözümün varlığı, son alt bölümde ise çözümün tekliği gösterilecektir.

3.2.1 $\alpha < 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre alt lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha < 1$ için sağlandığından, Sobolev'in Gömülme Teoremi'nden $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$'dir. Bu nedenle $P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)′ $s_1 := \frac{2}{1-\alpha}$, $r_1 := \frac{p_0 q_0}{p_0 - \alpha q_0}$, $s_2 := 2$, $r_2 := q_0$ sayıları ve $\alpha < 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın ($p_0 := \frac{2n}{n-2}$ ve $q_0 := (p_0)'$).

(4) Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır.

(5) $\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \frac{\theta_6 c_2}{c_3 c_6}$, burada $\tilde{b_0} < 1$ olmak üzere $\theta_6 < min\{\tilde{b_0}, a_0\}$'dır. ($c_2, c_3$ ve c_6 sırasıyla, (2.4), (2.2) ve (2.8)'deki sabitlerdir.)

Teorem 3.12 *(1)′, (2), (3), (4) ve (5) koşulları sağlansın. O zaman, keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için de önceki alt bölümlerde kullandığımız yöntem kullanılacaktır. Bu nedenle, Teorem 2.52'nin göz önüne aldığımız probleme uygulanabilmesi için başlangıç değerinin sıfır olması gerekmektedir. Bu nedenle $\tilde{u}(x,t) := u(x,t) - u_0(x)$ fonksiyonunu tanımlayarak (1.1)-(1.3) problemini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$\frac{\partial(\tilde{u}+u_0)}{\partial t} - \Delta(\tilde{u}+u_0) + g(x,t,\tilde{u}+u_0) + e(x,t)\,\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) = h(x,t) \quad (3.12)$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0 \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial(\tilde{u}+u_0)}{\partial\eta}+a(x',t)(\tilde{u}+u_0)\right)\Big|_{\Sigma_T}=\varphi(x',t) \tag{3.14}$$

Teorem 2.52'yi (3.12)-(3.14) problemine uygulayabilmek için önce bu probleminin yarattığı dönüşümleri tanımlayalım:

$$f=\{f_1,f_2\}:P_0\to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

öyle ki

$$f_1(\tilde{u}):=-\Delta(\tilde{u}+u_0)+g(x,t,\tilde{u}+u_0)+e(x,t)\left\|\tilde{u}+u_0\right\|_{L_2(\Omega)}(t), \tag{3.15}$$

$$f_2(\tilde{u}):=\frac{\partial(\tilde{u}+u_0)}{\partial\eta}+a(x',t)(\tilde{u}+u_0); \tag{3.16}$$

$$A:P_0\to P_0$$

$$A\equiv Id \tag{3.17}$$

Şimdi Teorem 3.12'nin ispatı için gerekli olacak lemmaları verelim:

Lemma 3.13 *f ve A dönüşümleri, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından burada *coercive* ikililik, f dönüşümünün adi anlamda *coerciveliğine* denk gelir. f 'nin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$'da *coercive* olduğunu görmek için önce $\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}$ dual formunu alttan değerlendireceğiz.

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}=\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}+u_0\rangle_{Q_T}-\langle f(\tilde{u}),u_0\rangle_{Q_T}$$

$$=\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}+\int_0^T\int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)(\tilde{u}+u_0)dxdt$$

$$+\int_0^T\left\|\tilde{u}+u_0\right\|_{L_2(\Omega)}\int_\Omega e(x,t)(\tilde{u}+u_0)dxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}a(x',t)(\tilde{u}+u_0)^2dx'dt$$

$$-\int_0^T\int_\Omega D(\tilde{u}+u_0)Du_0dxdt-\int_0^T\int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)u_0dxdt$$

$$-\int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)u_0dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)(\tilde{u}+u_0)u_0dx'dt.$$

(1)$'$, **(2)**, **(3)**, **(4)** koşulları ile Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq (1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} - c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$-\int_0^T \int_\Omega c_1(x,t)|\tilde{u}+u_0|^\alpha(\tilde{u}+u_0)dxdt - \int_0^T \int_\Omega c_0(x,t)(\tilde{u}+u_0)dxdt$$

$$-\int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_{q_0}(\Omega)}\|\tilde{u}+u_0\|_{L_{p_0}(\Omega)}dt + a_0\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(\Sigma_T)}$$

$$-\int_0^T \int_\Omega c_1(x,t)|\tilde{u}+u_0|^\alpha u_0dxdt - \int_0^T \int_\Omega c_0(x,t)u_0dxdt$$

$$-\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-\int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_{q_0}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{p_0}(\Omega)}dt.$$

elde ederiz. Yine Hölder, Young eşitsizlikleri ve (2.8)'den

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq (1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + a_0\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(\Sigma_T)} - c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$-\int_0^T \|c_1\|_{L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega)}\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{p_0}(\Omega)}dt - \varepsilon_2\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$

$$-c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - \int_0^T \|c_1\|_{L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega)}\|\tilde{u}+u_0\|^\alpha_{L_{p_0}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{p_0}(\Omega)}dt$$

$$-\|c_0\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - \varepsilon_3\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_3)\|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-c_6\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}.$$

yazabiliriz. ε_1 pozitif sayısı 1'den küçük seçilerek $\theta_1 := min\{(1-\varepsilon_1), a_0\}$ dersek, (2.2), (2.4) ve (2.7)'den,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq \theta_1 c_2\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_4 c_3\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_4)\|c_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega))} - \varepsilon_2 c_3\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_2)\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$

$$-c_6c_3\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-\|c_1\|_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{p_0q_0}{p_0-\alpha q_0}}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^\alpha_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$-\|c_0\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}-\varepsilon_3c_5\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_3)\|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}-\varepsilon_5c_3\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_5)c_6^2\|e\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}-c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

elde ederiz. Buradan, $\varepsilon=\varepsilon_4c_3+\varepsilon_2c_3+\varepsilon_3c_5+\varepsilon_5c_3$ dersek

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\Big(\theta_6c_2-c_6c_3\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}-\varepsilon\Big)\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-Z_1,$$

$$Z_1:=Z_1(C(\varepsilon),\|c_0\|_{L_{s_2}(0,T;L_{r_2}(\Omega))},\|c_1\|_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))},\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))},$$

$$\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))},\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))},\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))},\|Du_0\|_{L_2(Q_T)})$$

değerlendirmesini alırız. **(5)** koşulu ve yeterince küçük seçilen ε pozitif sayısı ile $\tilde{C}_0:=\Big(\theta_6c_2-c_6c_3\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}-\varepsilon\Big)$ sayısı pozitif alınır. $1>\tilde{\varepsilon}>0$ olmak üzere $\tilde{C}_1:=(1-\tilde{\varepsilon})\tilde{C}_0$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\tilde{C}_1\|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-Z_2,$$

$$Z_2:=Z_1-(1-c(\tilde{\varepsilon}))\tilde{C}_0\|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. O halde f dönüşümü, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive'dir.

■

Lemma 3.14 *f dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f dönüşümünün lineer kısımları sınırlı olduğundan zayıf süreklidir. Bu durumda lineer olmayan kısımların zayıf sürekliliğini incelemek yeterlidir.

$g_1(x,t,\tilde{u}+u_0)=e(x,t)\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, g ve g_1 dönüşümlerini ayrı ayrı inceleyebiliriz. Önce g dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim.

$\{u_m\}\subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u}\in P_0$ için $u_m\underset{P_0}{\rightharpoonup}\bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\ \{u_{m_j}\}\subset\{u_m\}$ alt dizisi için $g(x,t,u_{m_j}+u_0)\underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup}g(x,t,\bar{u}+$

$u_0)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için önce $g : P_0 \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ sınırlı dönüşüm olduğunu görelim: $(\mathbf{1})'$ koşulu ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_0^T [\int_\Omega |g(x,t,\tilde{u}+u_0)|^{q_0} \ dx]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4\int_0^T \left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{q_0} \ |\tilde{u}+u_0|^{\alpha q_0} \ dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{q_0} \ dx\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4\int_0^T \left[\|c_1\|^{q_0}_{L_{r_1}(\Omega)} \|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)}\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4^{1+\frac{1}{q_0}} \int_0^T \left[\|c_1\|^2_{L_{r_1}(\Omega)} \|\tilde{u}+u_0\|^{2\alpha}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^2_{L_{q_0}(\Omega)}\right] dt.$$

değerlendirmesini alırız. Buradan,

$$\gamma_0(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

$$:= 2^{1+\frac{1}{q_0}} \left[\|c_1\|^2_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))} \|\tilde{u}+u_0\|^{2\alpha}_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} + \|c_0\ \|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,\tilde{u}+u_0)\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \gamma_0(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_0(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$$

sınırlı dönüşümdür.

Şimdi Lemma 2.32'den yararlanabilmek için gerekli diğer özellikleri aşağıda sıralayalım:

1. $P_0 \subset L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ olduğundan $u_m \underset{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} \bar{u}$ 'dır.

2. $$L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \cap W^1_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T) \qquad (3.18)$$

   kompakt gömülmesi var olduğundan, öyle bir $\exists \ \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow \bar{u}$'dir.

3. $\mathbf{(1)'}$ koşuluna göre g Caratheodory fonksiyonu olduğundan, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için,

$$g(x,t,\centerdot) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$$

sürekli fonksiyondur.

Yukarıdaki özelliklerden, Lemma 2.32'ye göre $\exists \; \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$' dır. $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ olduğundan, $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz.

O halde g dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.

Şimdi g_1 dönüşümünün zayıf sürekliliğini inceleyelim. $\{u_m\} \subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u} \in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. (3.18) kompakt gömülmesinden, $\exists \; \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki $u_{m_k} \underset{L_2(Q_T)}{\longrightarrow} \bar{u}$'dır. O zaman hemen hemen her $t \in [0,T]$ için $u_{m_k}(t) \underset{L_2(\Omega)}{\longrightarrow} \bar{u}(t)$ ve buradan da $\|u_{m_k}\|_{L_2(\Omega)}(t) \longrightarrow \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}(t)$ elde ederiz. Buna göre,

$$\int_0^T \left[\int_\Omega |e(x,t)|^{q_0} \left| \|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) - \|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \right|^{q_0} dx \right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq \|e\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \int_0^T \left| \|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) - \|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \right|^2 dt$$

eşitsizliğinde limite geçildiğinde, sağ taraf sıfıra gideceğinden,

$$e(x,t)\|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\longrightarrow} e(x,t)\|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t)$$

yakınsaması vardır. Bu durumda $g_1(x,t,u_{m_k}+u_0) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u}+u_0)$ zayıf yakınsaması da mevcuttur. $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ olduğundan, g_1 dönüşümü P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.

■

İspat. (Teorem 3.12) A birim dönüşüm olduğundan, Terorem 2.52'nin (II) koşulu sağlanır. Ayrıca, keyfi $\tilde{u} \in W_2^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ için (2.12)'den aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle \tilde{u},\tilde{u}\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_{10}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}, \tilde{u} \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|\tilde{u}\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $\quad t \in [0,T]$

Lemma 3.13, Lemma 3.14 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (3.12)-(3.14) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup\left\{\frac{\int_0^T \langle h,\tilde{u}\rangle_\Omega + \langle \varphi,\tilde{u}\rangle_{\partial\Omega}\,dt}{\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : \tilde{u} \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (3.12)-(3.14) probleminin keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz. O halde $\tilde{u}$ fonksiyonunun tanımından, (1.1)-(1.3) probleminin de P_0 uzayında çözümü vardır.

$\blacksquare$

3.2.2 $\alpha = 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha = 1$ için sağlandığından, Sobolev'in Gömülme Teoremi'nden $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$'dir. Bu nedenle $P_0 \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)″ $s_1 := \infty$, $r_1 := \frac{n}{2}$, $s_2 := 2$, $r_2 := q_0$ sayıları ve $\alpha = 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın.

(6) Aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

I. Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır ve

$$c_6\,\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} + \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \leq \frac{\theta_7 c_2}{c_3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\tilde{b_0} < 1$ olmak üzere $\theta_7 < min\{\tilde{b_0}, a_0\}$'dır.

II. Öyle $k_0 > 0, k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ ve her $\xi \in \mathbb{R}$ için,

$$g(x,t,\xi)\xi \geq k_0|\xi|^2 - k_1$$

eşitsizliği ve

$$c_5 \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} + c_3 c_6 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \theta_8$$

eşisizliği sağlanır. Burada $\tilde{b_0} < 1$ olmak üzere $\theta_8 < min\{\tilde{b_0}, k_0\}$'dır.

(c_2, c_3, c_5 ve c_6 sırasıyla, (2.4), (2.2), (2.7) ve (2.8)'deki sabitlerdir.)

Teorem 3.15 *(1)″, (2), (3) ve (6) koşulları sağlansın. O zaman, keyfi $(h, \varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ için (1.1)-(1.3) probleminin P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için de Teorem 2.52'den yararlanacağız. O halde (3.12)-(3.14) problemi için (3.15)-(3.17) dönüşümlerini göz önüne alarak, Teorem 3.15'in ispatı için gerekli olacak lemmaları verelim:

Lemma 3.16 *f ve A dönüşümleri, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından burada coercive ikililik, f dönüşümünün adi anlamda coercive'liğine denk gelir. f 'nin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$'da coercive olduğunu görmek için önce $\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T}$ dual formunu alttan değerlendireceğiz.

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T} = \langle f(\tilde{u}), \tilde{u}+u_0\rangle_{Q_T} - \langle f(\tilde{u}), u_0\rangle_{Q_T}$$

$$= \|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)(\tilde{u}+u_0)dxdt$$

$$+ \int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)(\tilde{u}+u_0)dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)(\tilde{u}+u_0)^2 dx'dt$$

$$- \int_0^T \int_\Omega D(\tilde{u}+u_0)Du_0 dxdt - \int_0^T \int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)u_0 dxdt$$

$$- \int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)u_0 dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)(\tilde{u}+u_0)u_0 dx'dt. \tag{3.19}$$

Önce $\mathbf{(1)''}, \mathbf{(2)}, \mathbf{(3)}$ ve **(6)-I.** koşullarını gözönüne alalım: Hölder ve Young eşitsizlikleri ile,

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq (1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} - c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$-\int_0^T\int_\Omega c_1(x,t)\left|\tilde u+u_0\right|(\tilde u+u_0)dxdt-\int_0^T\int_\Omega c_0(x,t)(\tilde u+u_0)dxdt$$
$$-\int_0^T\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|e\right\|_{L_{q_0}(\Omega)}\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_{p_0}(\Omega)}dt+a_0\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(\Sigma_T)}$$
$$-\int_0^T\int_\Omega c_1(x,t)\left|\tilde u+u_0\right|u_0dxdt-\int_0^T\int_\Omega c_0(x,t)u_0dxdt$$
$$-\left\|a\right\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$
$$-\int_0^T\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|e\right\|_{L_{q_0}(\Omega)}\left\|u_0\right\|_{L_{p_0}(\Omega)}dt.$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada ε_1 pozitif sayısı 1'den küçük seçilerek, (2.2), (2.4), (2.7) ve (2.8) ile $\theta_7 := min\left\{(1-\varepsilon_1),a_0\right\}$ dersek,

$$\left\langle f(\tilde u),\tilde u\right\rangle_{Q_T}\geq\theta_7c_2\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\left\|c_1\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$
$$-\varepsilon_2c_3\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_2)\left\|c_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$
$$-c_6c_3\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\varepsilon_3c_5\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$
$$-c(\varepsilon_3)\left\|a\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$
$$-\left\|c_1\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$
$$-\left\|c_0\right\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$
$$-c_6\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}-c(\varepsilon_1)\left\|Du_0\right\|^2_{L_2(Q_T)}$$

elde ederiz. Yine Young eşitsizliği ve (2.2)'den

$$\left\langle f(\tilde u),\tilde u\right\rangle_{Q_T}\geq\theta_7c_2\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c_3\left\|c_1\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$
$$-\varepsilon_2c_3\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_2)\left\|c_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}$$
$$-c_6c_3\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\varepsilon_3c_5\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$
$$-c(\varepsilon_3)\left\|a\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$
$$-\varepsilon_4c_3\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_4)\left\|c_1\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$
$$-\left\|c_0\right\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}-\varepsilon_5c_3\left\|\tilde u+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$
$$-c(\varepsilon_5)c_6^2\left\|e\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}-c(\varepsilon_1)\left\|Du_0\right\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

yazabiliriz. Buradan $\varepsilon := \varepsilon_2 c_3 + \varepsilon_3 c_5 + \varepsilon_4 c_3 + \varepsilon_5 c_3$ için

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle_{Q_T} \geq \Big(\theta_7 c_2 - c_3 \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - \varepsilon \Big) \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-Z_3, \quad Z_3 := Z_3(C(\varepsilon), \|c_0\|_{L_{s_2}(0,T;L_{r_2}(\Omega))}, \|c_1\|_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))}, \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))},$$

$$\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}, \|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}, \|u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}, \|Du_0\|_{L_2(Q_T)})$$

değerlendirmesini alırız. **(6)-I.** koşulu ve yeterince küçük seçilen ε pozitif sayısı ile $\tilde{C}_2 := \Big(\theta_7 c_2 - c_3 \|c_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - \varepsilon \Big)$ sayısı pozitif alınır. $1 > \tilde{\varepsilon} > 0$ olmak üzere $\tilde{C}_3 := (1 - \tilde{\varepsilon})\tilde{C}_2$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle_{Q_T} \geq \tilde{C}_3 \|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - Z_4,$$

$$Z_4 := Z_3 - (1 - c(\tilde{\varepsilon}))\tilde{C}_2 \|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir. O halde f dönüşümü, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive'dir.

(3.19) eşitliğinde bu kez $\mathbf{(1)''}$, **(2)**, **(3)** ve **(6)-II.** koşullarını gözönüne alırsak, Hölder ve Young eşitsizlikleri ile (2.2), (2.7), (2.8)'den

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle_{Q_T} \geq (1 - \varepsilon_1) \|D(\tilde{u} + u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} - c(\varepsilon_1) \|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0 \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$-k_1 T mes\Omega - c_5 \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_3 c_5 \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_3) \|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-\varepsilon_4 c_3 \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_4) \|c_1\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

$$- \|c_0\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))} - \varepsilon_5 c_3 \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_5) c_6^2 \|e\|^2_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}$$

eşitsizliğini elde ederiz. ε_1 pozitif sayısı 1'den küçük seçilerek, $\theta_8 := min\{(1 - \varepsilon_1), k_0\}$ dersek, $\varepsilon := \varepsilon_3 c_5 + \varepsilon_4 c_3 + \varepsilon_5 c_3$ için

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle_{Q_T} \geq \Big(\theta_8 - c_5 \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - \varepsilon \Big) \|\tilde{u} + u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-Z_5, \quad Z_5 := Z_5(C(\varepsilon), \|c_0\|_{L_{s_2}(0,T;L_{r_2}(\Omega))}, \|c_1\|_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))}, \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))},$$

$$\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}, \|u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}, \|u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}, \|Du_0\|_{L_2(Q_T)}, k_1, T, mes\Omega)$$

değerlendirmesini alırız. **(6)-II.** koşulu ve yeterince küçük seçilen ε pozitif sayısı ile $\tilde{C}_4 := \left(\theta_8 - c_5 \|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - c_6 c_3 \|e\|_{L_\infty(0,T;L_{q_0}(\Omega))} - \varepsilon\right)$ sayısı pozitif alınır ve $1 > \tilde{\varepsilon} > 0$ için $\tilde{C}_5 := (1-\tilde{\varepsilon})\tilde{C}_4$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq \tilde{C}_5 \|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - Z_6,$$

$$Z_6 := Z_5 - (1 - c(\tilde{\varepsilon}))\tilde{C}_4 \|u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir. O halde f dönüşümü, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında coercive'dir.

■

Lemma 3.17 *f dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f dönüşümünün lineer kısımları sınırlı olduğundan zayıf süreklidir. Bu durumda lineer olmayan kısımların zayıf sürekliliğini incelemek yeterlidir.

$g_1(x,t,\tilde{u}+u_0) = e(x,t)\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, bu dönüşümün zayıf sürekliliğinin incelenmesi Lemma 3.14'teki gibidir. Öyleyse g dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim:

$\{u_m\} \subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u} \in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\ \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi için $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için önce $g : P_0 \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$ sınırlı dönüşüm olduğunu görelim: $\mathbf{(1)''}$ koşulu ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_0^T [\int_\Omega |g(x,t,\tilde{u}+u_0)|^{q_0}\ dx]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4\int_0^T \left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{q_0}\ |\tilde{u}+u_0|^{q_0}\ \ dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{q_0}\ \ dx\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4\int_0^T \left[\|c_1\|^{q_0}_{L_{r_1}(\Omega)} \|\tilde{u}+u_0\|^{q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)}\right]^{\frac{2}{q_0}} dt$$

$$\leq 4^{1+\frac{1}{q_0}}\int_0^T \left[\|c_1\|^2_{L_{r_1}(\Omega)} \|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_{p_0}(\Omega)} + \|c_0\|^2_{L_{q_0}(\Omega)}\right] dt.$$

eşitsizliğini alırız. Buradan,

$$\gamma_1(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

$$:= 2^{1+\frac{1}{q_0}}\left[\|c_1\|^2_{L_{s_1}(0,T;L_{r_1}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}+\|c_0\|^2_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,\tilde{u}+u_0)\|_{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))} \leq \gamma_1(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_1(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))$$

sınırlı dönüşümdür.

Şimdi Lemma 2.32'den yararlanabilmek için gerekli diğer özellikleri aşağıda sıralayalım:

1. $P_0 \subset L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \subset L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ olduğundan $u_m \underset{L_2(0,T;L_{p_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} \bar{u}$ 'dır.

2. $L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \cap W^1_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T)$ kompakt gömülmesi var olduğundan, öyle bir $\exists\ \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow \bar{u}$'dir.

3. $\mathbf{(1)''}$ koşuluna göre g Caratheodory fonksiyonu olduğundan, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için,

$$g(x,t,\mathbf{.}) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$$

sürekli fonksiyondur.

Yukarıdaki özelliklerden, Lemma 2.32'ye göre $\exists\ \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega))}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$' dır. $L_2(0,T;L_{q_0}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)$ olduğundan, $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz.

O halde g dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.

■

İspat. (Teorem 3.15) A birim dönüşüm olduğundan, Terorem 2.52'nin (II) koşulu sağlanır. Ayrıca, keyfi $\tilde{u} \in W^1_2(0,T;W^1_2(\Omega))$ için (2.12)'den aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle \tilde{u},\tilde{u}\rangle_\Omega\, dt = \int_0^T \|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)}dt \geq c_{10}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;(W^1_2(\Omega))^*)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}, \tilde{u} \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|\tilde{u}\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $\quad t \in [0,T]$

Lemma 3.16, Lemma 3.17 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (3.12)-(3.14) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup \left\{ \frac{\int_0^T \langle h, \tilde{u}\rangle_\Omega + \langle \varphi, \tilde{u}\rangle_{\partial\Omega}\, dt}{\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : \tilde{u} \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (3.12)-(3.14) probleminin keyfi $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz. O halde $\tilde{u}$ fonksiyonunun tanımından, (1.1)-(1.3) probleminin de P_0 uzayında çözümü vardır. ■

3.2.3 $\alpha > 1$ Durumunda (1.1)-(1.3) Probleminin İncelenmesi

Bu durum g dönüşümüne göre süper lineer durumdur ve **(1)** koşulu $\alpha > 1$ için sağlandığından,

$P_0 := L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$ olur.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1)''' $s_1 := \infty$, $r_1 := \infty$, $s_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $r_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$ sayıları ve $\alpha > 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın.

(7) Öyle $k_0 > 0, k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ ve her $\xi \in \mathbb{R}$ için,

$$g(x,t,\xi)\xi \geq k_0|\xi|^{\alpha+1} - k_1$$

eşitsizliği sağlanır.

(8) Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq -a_0$ olacak şekilde bir $0 < a_0 \leq \frac{\theta_9}{c_4}$ sayısı vardır. Burada $\tilde{b_0} < 1$, $\tilde{k_0} < k_0$ olmak üzere $\theta_9 < min\{\tilde{b_0}, \tilde{k_0}\}$'dır.
(c_4, (2.6)'daki sabittir.)

Teorem 3.18 *(1)''', (2), (3) , (7) ve (8) koşulları sağlansın. O zaman, keyfi* $(h,\varphi) \in$

$\Big[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\Big] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *ve* $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ *için (1.1)-(1.3) probleminin* P_0 *uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

Bu teoremin kanıtı için de Teorem 2.52'den yararlanacağız.

$$f = \{f_1, f_2\} : P_0 \to \Big[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\Big] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)); \;\; A : P_0 \to P_0$$

olmak üzere (3.12)-(3.14) problemi için (3.15)-(3.17) dönüşümlerini gözönüne alalım.

Teorem 3.18'in ispatı için gerekli olacak lemmaları aşağıda verelim:

Lemma 3.19 *f ve A dönüşümleri, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. A birim dönüşüm olarak tanımlandığından burada coercive ikililik, f dönüşümünün adi anlamda coercive'liğine denk gelir. f 'nin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$'da coercive olduğunu görmek için önce $\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T}$ dual formunu alttan değerlendireceğiz.

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T} = \langle f(\tilde{u}), \tilde{u} + u_0\rangle_{Q_T} - \langle f(\tilde{u}), u_0\rangle_{Q_T}$$

$$= \|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \int_0^T \int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)(\tilde{u}+u_0)dxdt$$

$$+ \int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)(\tilde{u}+u_0)dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)(\tilde{u}+u_0)^2 dx'dt$$

$$- \int_0^T \int_\Omega D(\tilde{u}+u_0)Du_0 dxdt - \int_0^T \int_\Omega g(x,t,\tilde{u}+u_0)u_0 dxdt$$

$$- \int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_\Omega e(x,t)u_0 dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} a(x',t)(\tilde{u}+u_0)u_0 dx'dt.$$

(1)$'''$, **(2)**, **(3)**, **(7)**, **(8)** koşullarını göz önüne alarak Hölder ve Young eşitsizliklerini uygularsak,

$$\langle f(\tilde{u}), \tilde{u}\rangle_{Q_T} \geq (1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} - c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)} + k_0\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - k_1 T mes\Omega$$

$$- \int_0^T \|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \|\tilde{u}+u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} dt - a_0\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(\Sigma_T)}$$

$$- \int_0^T \int_\Omega c_1(x,t)\,|\tilde{u}+u_0|^\alpha\, u_0 dxdt - \int_0^T \int_\Omega c_0(x,t)u_0 dxdt$$

$$-\|a\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-\int_0^T\|\tilde{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\,dt.$$

elde ederiz. (2.6), (2.7) ve (2.9)'dan,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq(1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}+k_0\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-k_1Tmes\Omega$$

$$-a_0c_4\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c_7\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\alpha+1}(\Omega))}$$

$$-\varepsilon_2c_5\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_2)\|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$\|c_1\|_{L_\infty(Q_T)}\|\tilde{u}+u_0\|^\alpha_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\|c_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-c_7\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\int_0^T\|\tilde{u}+u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\,dt.$$

yazabiliriz. (2.10)'dan,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq(1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}+k_0\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-k_1Tmes\Omega$$

$$-a_0c_4\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c_7c_8\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-\varepsilon_2c_5\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_2)\|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-\varepsilon_3\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_3)\|c_1\|^{\alpha+1}_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\|c_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-c_7\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\left(\varepsilon_4\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}+Tc(\varepsilon_4)\right).$$

eşitsizliğini alırız. Buradan,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq(1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_1)\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}+k_0\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-k_1Tmes\Omega$$

$$-a_0c_4\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\varepsilon_5\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_5)(c_7c_8\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))})^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

$$-\varepsilon_2c_5\|\tilde{u}+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_2)\|a\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$-\varepsilon_3\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_3)\|c_1\|^{\alpha+1}_{L_\infty(Q_T)}\|u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\|c_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-c_7\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\left(\varepsilon_4\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}+Tc(\varepsilon_4)\right).$$

yazabiliriz. $\varepsilon_6:=\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_4c_7\|e\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$ ve $\varepsilon_7:=\varepsilon_2c_5$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq(1-\varepsilon_1)\|D(\tilde{u}+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}+(k_0-\varepsilon_6)\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-(a_0c_4+\varepsilon_7)\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-Z_6,$$

$$Z_6:=k_1Tmes\Omega+c(\varepsilon_1)\left\|Du_0\right\|^2_{L_2(Q_T)}+c(\varepsilon_2)\left\|a\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega))}$$

$$+c(\varepsilon_5)(c_7c_8\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))})^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+c(\varepsilon_3)\left\|c_1\right\|^{\alpha+1}_{L_\infty(Q_T)}\left\|u_0\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$+\left\|c_0\right\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\left\|u_0\right\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}+Tc(\varepsilon_4)c_7\left\|e\right\|_{L_\infty(0,T;L_{\tilde{q}}(\Omega))}\left\|u_0\right\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

elde ederiz. $0<\varepsilon_1<1$ ve $0<\varepsilon_6<k_0$ seçerek, $\theta_9:=min\{1-\varepsilon_1,k_0-\varepsilon_6\}$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\theta_9\left(\left\|D(\tilde{u}+u_0)\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)$$

$$-(a_0c_4+\varepsilon_7)\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-Z_6.$$

elde ederiz. Sonuç 2.48'den,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq(\theta_9-a_0c_4-\varepsilon_7)\left(\left\|D(\tilde{u}+u_0)\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)-Z_7,$$

$$Z_7:=Z_6+\bar{c}(a_0c_4+\varepsilon_7).$$

eşitsizliğini alırız. Burada **(8)** koşulunu göz önüne alarak, $0<\varepsilon_7<\theta_9-a_0c_4$ seçtiğimizde, $(\theta_9-a_0c_4-\varepsilon_7)$ sayısının pozitif olduğunu görürüz. Yine Sonuç 2.48'den,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\frac{(\theta_9-a_0c_4-\varepsilon_7)}{2}\left(\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)-Z_8,$$

$$Z_8:=Z_7+\frac{\bar{c}(\theta_9-a_0c_4-\varepsilon_7)}{2}.$$

elde ederiz. Son eşitsizliği $\tilde{C}_6:=\frac{1}{2}(\theta_9-a_0c_4-\varepsilon_7)$ olmak üzere,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\tilde{C}_6\left(\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)-Z_9,$$

$$Z_9:=Z_8+\tilde{C}_6$$

olarak yazabiliriz. Buradan,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\frac{\tilde{C}_6}{2}\left\|\tilde{u}+u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}-Z_9,$$

$$Z_9:=Z_8+\tilde{C}_6$$

eşitsizliğini ve $0<\tilde{\varepsilon}<1$ olmak üzere $\tilde{C}_7:=(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\tilde{C}_6}{2}$ ve $Z_{10}:=Z_9-(1-c(\tilde{\varepsilon}))\frac{\tilde{C}_6}{2}\left\|u_0\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$ dersek,

$$\langle f(\tilde{u}),\tilde{u}\rangle_{Q_T}\geq\tilde{C}_7\left\|\tilde{u}\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}-Z_{10}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

O halde f dönüşümü, $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında coercive'dir.

■

Lemma 3.20 *f dönüşümü, P_0 uzayından* $\left[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right]$ $\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f dönüşümünün lineer kısımları sınırlı olduğundan zayıf süreklidir. Bu durumda lineer olmayan kısımların zayıf sürekliliğini incelemek yeterlidir.

$g_1(x,t,\tilde{u}+u_0) = e(x,t)\left\|\tilde{u}+u_0\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, g ve g_1 dönüşümlerinin zayıf sürekliliğini ayrı ayrı inceleyelim. Önce g dönüşümünün P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf sürekli olduğunu görelim:

$\{u_m\} \subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u} \in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. Lemma 2.32'den yararlanarak, $\exists\, \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi için $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için önce $g : P_0 \subset L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ sınırlı dönüşüm olduğunu görelim: **(1)**$'''$ koşulu ve Hölder eşitsizliği ile,

$$\int_0^T\int_\Omega |g(x,t,\tilde{u}+u_0)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dxdt$$

$$\le 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\int_0^T\left[\int_\Omega |c_1(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,|\tilde{u}+u_0|^{\alpha+1}\,dx + \int_\Omega |c_0(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,dx\right]dt$$

$$\le 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)}\int_0^T\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\,dt + \int_0^T\|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}\,dt\right]$$

$$\le 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)}\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\right]$$

değerlendirmesini alırız. Buradan,

$$\gamma_2(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)})$$

$$:= 2\left[\|c_1\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(Q_T)}\|\tilde{u}+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \|c_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

dersek, elde ettiğimiz son eşitsizliği

$$\|g(x,t,\tilde{u}+u_0)\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \le \gamma_2(\|\tilde{u}+u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)})$$

olarak yazabiliriz.

$\gamma_2(.) : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan,

$$g : L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

sınırlı dönüşümdür.

Şimdi Lemma 2.32'den yararlanabilmek için gerekli diğer özellikleri aşağıda sıralayalım:

1. $P_0 \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$ olduğundan $u_m \underset{L_{\alpha+1}(Q_T)}{\rightharpoonup} \bar{u}$ 'dır.

2. $$L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T) \tag{3.20}$$

   kompakt gömülmesi var olduğundan, öyle bir $\exists \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki Q_T'de hemen hemen her yerde $u_{m_l} \longrightarrow \bar{u}$'dir.

3. $\mathbf{(1)}'''$ koşuluna göre g Caratheodory fonksiyonu olduğundan, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için,

   $$g(x,t,\centerdot) : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_1$$

   sürekli fonksiyondur.

Yukarıdaki özelliklerden, Lemma 2.32'ye göre $\exists \{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisi vardır ki $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$' dır. $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ olduğundan, $g(x,t,u_{m_j}+u_0) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,\bar{u}+u_0)$ zayıf yakınsaklığını elde ederiz.

O halde g dönüşümü, P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir.

Şimdi g_1 dönüşümünün zayıf sürekliliğini inceleyelim. $\{u_m\} \subset P_0$ dizisi alalım öyle ki $\bar{u} \in P_0$ için $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ olsun. (3.20) kompakt gömülmesinden, $\exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki $u_{m_k} \underset{L_2(Q_T)}{\longrightarrow} \bar{u}$'dır. O zaman hemen hemen her $t \in [0,T]$ için $u_{m_k}(t) \underset{L_2(\Omega)}{\longrightarrow} \bar{u}(t)$ ve buradan da $\|u_{m_k}\|_{L_2(\Omega)}(t) \longrightarrow \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}(t)$ elde ederiz. Buna göre,

$$\int_0^T \int_\Omega |e(x,t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \left| \|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) - \|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dxdt$$

$$\leq \|e\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega))} \int_0^T \left| \|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) - \|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt$$

eşitsizliğinde limite geçildiğinde, sağ taraf sıfıra gideceğinden,

$$e(x,t)\|u_{m_k}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\longrightarrow} e(x,t)\|\bar{u}+u_0\|_{L_2(\Omega)}(t)$$

yakınsaması vardır. Bu durumda $g_1(x,t,u_{m_k}+u_0) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g_1(x,t,\bar{u}+u_0)$ zayıf yakınsaması da mevcuttur. $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ olduğundan, g_1 dönüşümü P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir. ■

İspat. (Teorem 3.18) A birim dönüşüm olduğundan, Terorem 2.52'nin (II) koşulu sağlanır. Ayrıca, keyfi $\tilde{u} \in W_2^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ için (2.12) ve (2.13)'ten aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\int_0^T \langle \tilde{u},\tilde{u}\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_{11}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}$$

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau},\tilde{u}\right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_{10}\|\tilde{u}\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

h.h.h. $t \in [0,T]$

Lemma 3.19, Lemma 3.20 ve yukarıdaki özelliklerden, Teorem 2.52'nin tüm koşulları sağlanır. O halde, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in \left[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için (3.12)-(3.14) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır:

$$\sup\left\{\frac{\int_0^T \langle h,\tilde{u}\rangle_\Omega + \langle \varphi,\tilde{u}\rangle_{\partial\Omega} \, dt}{\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}} : \tilde{u} \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)\right\} < \infty.$$

Bu eşitsizlikte (h,φ) fonksiyonlarının ait oldukları uzaylardaki normlarını göz önüne alırsak, (3.12)-(3.14) probleminin keyfi $(h,\varphi) \in \left[L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)\right]$ $\times\, L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için P_0 uzayında çözümü olduğunu göstermiş oluruz. O halde $\tilde{u}$ fonksiyonunun tanımından, (1.1)-(1.3) probleminin de P_0 uzayında çözümü vardır. ■

3.2.4 (1.1)-(1.3) Probleminin Çözümünün Tekliği

Teorem 3.21 *(1. Teklik Teoremi)* ***(3)*** *koşulu dışında Teorem 3.12, Teorem 3.15 ve Teorem 3.18'in koşulları sağlansın. Ek olarak aşağıdaki koşulları kabul edelim:*

(3)$'$ $e \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$

(9) $g_\xi \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$ *için öyle bir* g_0 *pozitif sayısı vardır ki, hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *ve her* $\xi \in \mathbb{R}$ *için* $g_\xi(x,t,\xi) \geq -g_0$ *eşitsizliği sağlanır.*

Bu durumda, (1.1)-(1.3) probleminin P_0 *uzayından olan çözümü tektir.*

İspat. u_1 ve u_2, (1.1)-(1.3) probleminin iki farklı çözümü olsun. $w := u_1 - u_2$ dersek, aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + [g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2)] + e(x,t)(\|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)})(t) = 0 \quad (3.21)$$

$$w(x,0) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + a(x',t)w\right)\right|_{\Sigma_T} = 0 \quad (3.23)$$

(3.21) denklemini w ile çarparak Ω üzerinden integraline geçelim.

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega [g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2)]w dx$$
$$+(\|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)})\int_\Omega e(x,t)w dx + \int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx'.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin ilk integrali için **(9)** koşulunu kullanarak ara değer teoreminden yararlanırsak,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} - g_0\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+\int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx' - \left|\|u_1\|_{L_2(\Omega)} - \|u_2\|_{L_2(\Omega)}\right| \int_\Omega |e(x,t)||w| dx.$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte e fonksiyonu için **(3)**$'$ koşulunu göz önüne alarak Hölder eşitsizliğini uygularsak ve $\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$ terimini ekleyip çıkarırsak,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} + \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - g_0\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+\int_{\partial\Omega} a(x',t)w^2 dx' - \|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.24)$$

eşitsizliğini alırız.

O zaman **(8)** koşulundan,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} + \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - g_0\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$-a_0 \|w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} - \|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz (g dönüşümünün alt lineer ve **(6)-I.** koşullu lineer durumunda a fonksiyonu pozitif olduğundan, bu durumlar için (3.24)'ten $\int\limits_{\partial\Omega} a(x', t) w^2 dx'$ terimi atılarak devam edilir). Burada (2.5)'i göz önüne aldığımızda,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0 c_4) \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (1 + g_0) \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - \|e\|_{L_2(\Omega)} \|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde ederiz.

a fonksiyonu üzerine olan koşuldan dolayı $(1 - a_0 c_4)$ katsayısı pozitiftir (Benzer şekilde, (3.24) eşitsizliğinde **(6)-II.** koşullu g dönüşümüne göre lineer durum göz önüne alındığında ise, bu katsayı yerine $(1 - c_5 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)})$ pozitif katsayısı oluşur). O halde,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|w\|^2_{L_2(\Omega)} - (1 + g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}) \|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0 c_4) \|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

yazabiliriz.

$y(t) := \|w\|^2_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, yukarıdaki eşitsizliği

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} \leq [g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + a_0 c_4] y$$

olarak yazabiliriz. O zaman,

$$\frac{dy}{y} \leq 2[g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + a_0 c_4] dt$$

$$\ln y - \ln y(0) \leq 2[g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + a_0 c_4] t$$

$$y \leq y(0) \exp\{2[g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + a_0 c_4] t\}$$

$$\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{2[g_0 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + a_0 c_4] t\} \tag{3.25}$$

elde edilir.

$w(0) = 0$ olduğundan, $w = 0$ elde edilir ki bu da $u_1 = u_2$ demektir. O halde çözüm tektir. (Son eşitsizlik aynı zamanda çözümün başlangıç koşullarına sürekli bağlılığını da göstermektedir.)

■

1.Teklik Teoremi'nde **(9)** koşulundan görüyoruz ki g dönüşümünün türevlenebilir olması gerekmektedir. g dönüşümü türevlenebilir değilse, özel durum için alternatif bir teklik teoremini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Teorem 3.22 *(2. Teklik Teoremi)* ***(3)*** *koşulu dışında Teorem 3.18'in koşulları sağlansın. Ek olarak aşağıdaki koşulları kabul edelim:*

(3)$'$ $e \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$

(9)$'$ *Hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$ *ve her* $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ *için* $g_2 \in L_\infty(Q_T)$ *olmak üzere,*

$$|g(x,t,\xi) - g(x,t,\zeta)| \leq g_2(x,t)(|\xi|^{\alpha-1} + |\zeta|^{\alpha-1})\,|\xi - \zeta|$$

eşitsizliği sağlanır.

O zaman $1 \leq \alpha \leq \frac{n}{n-2}$ *için (1.1)-(1.3) probleminin çözümü,*
$L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$ *sınıfına aitse, tektir.*

İspat. 1.Teklik Teoremi'nin ispatına benzer şekilde yaparak,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$
$$-(1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega [g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2)]w dx$$

yazabiliriz.

(9)$'$ koşulundan,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$-\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}[\int\limits_\Omega |u_1|^{\alpha-1}|w||w|dx + \int\limits_\Omega |u_2|^{\alpha-1}|w||w|dx]$$

elde ederiz. $\alpha \leq \frac{n}{n-2}$ olduğundan $u_1, u_2 \in L_{\frac{2p_0(\alpha-1)}{p_0-2}}(\Omega)$'dır.

O zaman,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$-\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}(\|u_1\|^{\alpha-1}_{L_{\frac{2p_0(\alpha-1)}{p_0-2}}(\Omega)}\|w\|_{L_{p_0}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)} + \|u_2\|^{\alpha-1}_{L_{\frac{2p_0(\alpha-1)}{p_0-2}}(\Omega)}\|w\|_{L_{p_0}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)})$$

eşitsizliğini ve (2.1)'den,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$-\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}\tilde{c}_3(\|u_1\|^{\alpha-1}_{L_{\frac{2p_0(\alpha-1)}{p_0-2}}(\Omega)}\|w\|_{W_2^1(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)} + \|u_2\|^{\alpha-1}_{L_{\frac{2p_0(\alpha-1)}{p_0-2}}(\Omega)}\|w\|_{W_2^1(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)})$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Young eşitsizliği ile,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$-\varepsilon_1\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon_1)[\tilde{c}_3\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_1\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}]^2\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$-\varepsilon_2\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon_2)[\tilde{c}_3\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_2\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}]^2\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde ederiz. $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $C_1 := c(\varepsilon_1)[\tilde{c}_3\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_1\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}]^2$ ve $C_2 := c(\varepsilon_2)[\tilde{c}_3\|g_2\|_{L_\infty(Q_T)}\|u_2\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}]^2$ dersek,

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - a_0c_4 - \varepsilon)\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$-(1 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2)\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

yazabiliriz.

(8) koşulunu göz önüne alarak ε pozitif sayısını $(1-a_0c_4)$ sayısından küçük seçersek, son eşitsizliği

$$0 \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} - (a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2)\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olarak yazabiliriz.

$y(t) := \|w\|^2_{L_2(\Omega)}(t)$ dersek, yukarıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} \leq [a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2]y$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{dy}{y} \leq 2[a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2]dt$$

$$\ln y - \ln y(0) \leq 2[a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2]t$$

$$y \leq y(0)\exp\{2[a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2]t\}$$

$$\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)}\exp\{2[a_0c_4 + \varepsilon + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + C_1 + C_2]t\}$$

eşitsizliğini alırız.

$w(0) = 0$ olduğundan, $w = 0$ elde edilir ki bu da $u_1 = u_2$ demektir. O halde çözüm tektir.

■

4 (1.1)-(1.3) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Bu bölümde (1.1)-(1.3) probleminin çözümünün davranışı üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Problem ilk alt bölümde homojen durumda, ikinci alt bölümde ise homojen olmayan ve otonom durumda ele alınmıştır.

4.1 Homojen Durum ($h(x,t)=0, \varphi(x',t)=0$):

Bu bölümde (1.1)-(1.3) problemi için $h(x,t)=0, \varphi(x',t)=0$ olduğunu kabul edelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(x,t,u) + e(x,t)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}(t) = 0, \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0, \tag{4.2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x',t)u\right)\right|_{\Sigma_T} = 0, \tag{4.3}$$

(4.1)-(4.3) problemi için aşağıdaki koşullar sağlansın:

($\mathbf{d}_1$) $a \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$, $e \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

($\mathbf{d}_2$) $s_1 := \infty$, $r_1 := \infty$, $s_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $r_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$ sayıları ve $\alpha > 1$ olmak üzere **(1)** koşulu sağlansın.

($\mathbf{d}_3$) $k_1 = 0$ olmak üzere Teorem 3.18'in **(7)** koşulu sağlansın.

($\mathbf{d}_4$) Hemen hemen her $(x',t) \in \Sigma_T$ için $a(x',t) \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır.

Teorem 4.1 *(4.1)-(4.3) problemi için **($\mathbf{d}_1$)-($\mathbf{d}_4$)** koşulları sağlansın. O zaman, bu problemin P_0'dan olan çözümü $\forall t \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:*

(a) $$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \frac{2\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\left[2^{\frac{\alpha-1}{2}}\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\} + \frac{K_2}{K_1}\|u_0\|^{\alpha-1}_{L_2(\Omega)}\left(\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}-1\right)\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}, \qquad K_1 \neq 0$$

(b) $\|u\|_{L_2(\Omega)}(t) \leq \frac{\|u_0\|_{L_2(\Omega)}}{\left[2^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\alpha)K_2 t\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha-1}+1\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \qquad K_1 = 0$

Burada $K_1 = K_1(\|e(x,t)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}, c_2, a_0)$ işareti bilinmeyen sabit, $K_2 = K_2(k_0, c_7)$ ise negatif sabit sayıdır (c_2 ve c_7 sırasıyla, (2.3) ve (2.9)'daki sabitlerdir).

İspat. Bu teoremin kanıtı için $E(u(t)) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2 dx$ Lyapunov fonksiyonelinden yararlanacağız. Teoremin koşullarından, (4.1)-(4.3) probleminin P_0 uzayında çözümü vardır. Bu durumda $u(t)$ çözüm ise, $E'(t) = \langle u, u_t\rangle_\Omega$ olduğundan,

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega} u\Delta u dx - \int\limits_{\Omega} g(x,t,u)u dx - \|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_{\Omega} e(x,t)u dx$$

yazabiliriz. Kısmi integrasyon ve teoremin koşullarından,

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\|Du\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int\limits_{\partial\Omega} a(x',t)u^2 dx' - \int\limits_{\Omega} g(x,t,u)u dx + \|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_{\Omega} |e(x,t)||u| dx \\ &\leq -\|Du\|_{L_2(\Omega)}^2 - a_0\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 - k_0\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|e\|_{L_2(\Omega)}(t)\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır.

$\theta_0 := min\{1, a_0\}$ dersek ve $\alpha > 1$ olduğunu göz önüne alırsak, (2.3) ve (2.9)'dan

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\theta_0 c_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - k_0 c_7^{-1}\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha+1} + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq (-\theta_0 c_2 + \|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))})\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 - k_0 c_7^{-1}\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha+1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

O halde,

$$E'(t) \leq 2(\|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} - \theta_0 c_2)E(t) - 2^{\frac{\alpha+1}{2}} k_0 c_7^{-1} E(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

elde ederiz.

$y := E(t)$, $K_1 := 2(\|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} - \theta_0 c_2)$ ve $K_2 := -2^{\frac{\alpha+1}{2}} k_0 c_7^{-1}$ dersek, yukarıdaki son eşitsizlikten aşağıdaki Cauchy problemini oluşturabiliriz:

$$y' - K_1 y \leq K_2 y^{\frac{\alpha+1}{2}} \tag{4.4}$$

$$y(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{4.5}$$

(4.1)-(4.5) problemini $K_1 = 0$ ve $K_1 \neq 0$ olmak üzere iki durumda inceleyeceğiz. Önce $K_1 \neq 0$ kabul ederek ve Bernoulli denkleminin çözüm yönteminden yararlanarak bu problemi çözelim:

$v := y^{\frac{1-\alpha}{2}}$ dönüşümünü kullanırsak, $v' := \frac{1-\alpha}{2} y^{-\frac{\alpha+1}{2}} y'$ olduğundan (4.4),

$$v' + \frac{\alpha - 1}{2} K_1 v \geq \frac{1-\alpha}{2} K_2$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizliği $\exp\{\frac{\alpha-1}{2} K_1 t\}$ integral çarpanıyla çarparsak,

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\{\frac{\alpha-1}{2} K_1 t\} v\right] \geq \frac{1-\alpha}{2} K_2 \exp\{\frac{\alpha-1}{2} K_1 t\}$$

yazabiliriz ki bu eşitsizliği 0'dan t'ye integrallediğimizde,

$$v \geq \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\} v(0) + \frac{K_2}{K_1} \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\} - \frac{K_2}{K_1}$$

elde ederiz. Burada (4.5) başlangıç koşulunu da gözönüne alarak v'nin tanımına dönersek,

$$y^{\frac{1-\alpha}{2}} \geq 2^{\frac{\alpha-1}{2}} \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\} \|u_0\|_{L_2(\Omega\}}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1} \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\} - \frac{K_2}{K_1}$$

elde ederiz. $\alpha > 1$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik,

$$y \leq \frac{1}{\left[2^{\frac{\alpha-1}{2}} \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\} \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} - \frac{K_2}{K_1}\left(1 - \exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\}\right)\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

eşitsizliğine denktir ve bu eşitsizliğin sağ tarafı her $t \geq 0$ için pozitiftir. Burada y'nin tanımına dönersek,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 (t) \leq \frac{2}{\left[\exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}} \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

ya da denk olarak,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 (t) \leq \frac{2\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2}{\left[\exp\{\frac{1-\alpha}{2} K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}} + \frac{K_2}{K_1}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha-1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha-1}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

elde ederiz. Böylece **(a)**'daki eşitsizlik sağlanır.

Şimdi (4.4)-(4.5) problemi için $K_1 = 0$ kabul edersek, $y' \leq K_2 y^{\frac{\alpha+1}{2}}$ eşitsizliğinden

$$\frac{2}{1-\alpha}\left(y^{\frac{1-\alpha}{2}} - y(0)^{\frac{1-\alpha}{2}}\right) \leq K_2 t$$

elde ederiz. y'nin tanımından,

$$\frac{2}{1-\alpha}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}(t) - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}\right] \leq K_2 t$$

yazabiliriz. $\alpha > 1$ olduğundan,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}(t) \geq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + 2^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\alpha) K_2 t$$

eşitsizliğini ve buna denk olan

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\alpha-1}(t) \leq \frac{1}{2^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\alpha)K_2 t + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}}$$

değerlendirmesini elde ederiz. O halde **(b)** sağlanır. ■

Teorem 4.1'deki **(a)** ve **(b)** eşitsizliklerinden aşağıdaki sonuçları görebiliriz:

Sonuç 4.2 *K_1**'in işaretine bağlı olmaksızın**, $u_0 = 0$ ise çözüm sıfırdır. Ayrıca her $t \geq 0$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ sınırlıdır.*

İspat. $u_0 = 0$ iken **(a)** ve **(b)** eşitsizliklerinin sağ tarafı sıfır olacağından, çözüm sıfırdır. Ayrıca bu eşitsizliklerinin sağ tarafında paydayı sıfır yapan t değeri yoktur ve her $t \geq 0$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ normu sabit bir sayıyla sınırlıdır. ■

Sonuç 4.3 *$K_1 > 0$ **ise**, $M_0^2 = 2(-\frac{K_1}{K_2})^{\frac{2}{\alpha-1}}$ olmak üzere $t \longrightarrow \infty$ iken $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq M_0^2$'dır. Ayrıca, $\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_0^2$ iken $\forall t \geq 0$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq M_0^2$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat. **(a)** eşitsizliğinin sağ tarafı $t \longrightarrow \infty$ iken, M_0^2'ye gitmektedir.

Şimdi $\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_0^2$ kabulü altında hangi t değerleri için $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq M_0^2$'ın sağlandığını, **(a)** eşitsizliğinden yararlanarak gösterelim: Bunun için Teorem (4.1)'in ispatında elde ettiğimiz ve **(a)** eşitsizliğine denk olan

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq \frac{2}{\left[\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

eşitsizliğini gözönüne alırsak,

$$\frac{2}{\left[\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}} \leq M_0^2$$

eşitsizliğini sağlayan t değerlerini arayabiliriz.

$M_0^2 = 2(-\frac{K_1}{K_2})^{\frac{2}{\alpha-1}}$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left(-\frac{K_2}{K_1}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}} \leq \left[\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}$$

elde ederiz. Buradaki üslerden kurtulursak,

$$\left|-\frac{K_2}{K_1}\right| \leq \left|\exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha} + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{K_2}{K_1}\right| \tag{4.6}$$

yazabiliriz. K_1 ve K_2'nin işaretlerinden dolayı bu eşitsizlikteki mutlak değerlerin içi pozitiftir. Öyleyse (4.6)'dan,

$$0 \leq \exp\{\frac{1-\alpha}{2}K_1 t\}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}+\frac{K_2}{K_1}\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikteki $\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^{1-\alpha}+\frac{K_2}{K_1}\right)$ ifadesi, $\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_0^2 = 2(-\frac{K_1}{K_2})^{\frac{2}{\alpha-1}}$ kabulünden ötürü negatif olmadığından, son eşitsizlik her $t \geq 0$ için sağlanır. O halde $\forall t \geq 0$ için $\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_0^2$ iken $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq M_0^2$'dır.

■

Sonuç 4.4 *$K_1 < 0$ **ise**, her $t \geq 0$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2$ bağıntısı vardır.*

İspat. Teorem 4.1'in ispatında (4.4) eşitsizliği K_2'li terim atılarak (K_2 negatif olduğundan) $y' \leq K_1 y$ olarak çözüldüğünde, $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \exp\{K_1 t\}$ bağıntısı elde edilir. K_1 negatif olduğundan bu bağıntıdan her $t \geq 0$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t) \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2$ elde edilir.

■

Sonuç 4.5 *$K_1 \leq 0$ **ise**, u_0 başlangıç koşuluna bağlı olmaksızın $t \longrightarrow \infty$ iken çözüm sıfıra gider.*

İspat. **(a)** ve **(b)** eşitsizliklerinin sağ tarafı u_0 başlangıç koşuluna bağlı olmaksızın $t \longrightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğinden, çözüm de sıfıra gider. ■

4.2 Homojen Olmayan ve Otonom Durum:

(1.1)-(1.3) problemini, h ve φ fonksiyonları sıfırdan farklı iken ve otonom durumda göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(x,u) + e(x)\|u\|_{L_2(\Omega)}(t) = h(x) \tag{1.1$'$}$$

$$u(x,0) = u_0 \tag{1.2$'$}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(x')u\right)\right|_{\Sigma_T} = \varphi(x'), \tag{1.3$'$}$$

Elde ettiğimiz yeterli koşullar altında, (1.1)-(1.3) probleminin g dönüşümüne göre süper lineer durumda çözümünün var ve tek olduğunu biliyoruz. Bu bölümde göz önüne aldığımız otonom durum olan $(1.1')$-$(1.3')$ problemi için ise bu koşullar aşağıdaki formda olacaktır:

(1_0) $g(x,u)$ dönüşümü için, $c_1 \in L_{r_1}(\Omega)$ ve $c_0 \in L_{r_2}(\Omega)$ olmak üzere $\mathbf{(1)'''}$ koşulu sağlansın.

(2_0) $a \in L_{n-1}(\partial\Omega)$

(3_0) $e \in L_2(\Omega)$

(7_0) Öyle $k_0 > 0, k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki, hemen hemen her $x \in \Omega$ ve her $\xi \in \mathbb{R}$ için,

$$g(x,\xi)\xi \geq k_0|\xi|^{\alpha+1} - k_1$$

eşitsizliği sağlanır.

(8_0) Hemen hemen her $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq -a_0$ olacak şekilde bir $0 < a_0 \leq \frac{\theta_1}{c_4}$ sayısı vardır. Burada $\tilde{b_0} < 1$, $\tilde{k_0} < k_0$ olmak üzere $\theta_1 < min\{\tilde{b_0}, \tilde{k_0}\}$'dır.
(c_4, (2.6)'daki sabittir.)

(9_0) $g_\xi \in L_{\frac{n}{2}}(\Omega)$ için **(9)** koşulu sağlansın.

Yukarıdaki koşullar altında $(1.1')$-$(1.3')$ probleminin g dönüşümüne göre süper lineer durumda çözümü var ve tektir. Ayrıca (3.25) eşitsizliğinden, göz önüne aldığımız otonom durum için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{2[g_0 + \|e\|_{L_2(\Omega)} + a_0 c_4]t\}.$$

O zaman her $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ ve her $T > 0$ için P_0'da var olan tek çözüm ile, $u_0 \to u(t)$ bir sürekli dönüşümün varlığı elde edilir. Bu dönüşümü $S(t)$ ile işaret edersek, göz önüne aldığımız problem $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayı üzerinde $S(t)u_0 = u(t)$ ile tanımlı bir $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akış ailesi tanımlar.

4.2.1 $L_2(\Omega)$ Uzayında Yutan Kümenin Varlığı:

Teorem 4.6 *$(1.1')$-$(1.3')$ problemi için **(1_0)**, **(2_0)**, **(3_0)**, **(7_0)**, **(8_0)** ve **(9_0)** koşulları sağlansın. Ayrıca, $h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$, $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ olsun.*

O zaman bir

$B_0 := \left\{ u \in P_0 : \|u\|_{L_2(\Omega)}(t) \leq M_1^{\frac{1}{2}}, M_1 = M_1(\|h\|, \|\varphi\|, \|e\|, k_1, k_0, a_0, c_4, c_7, c, mes\Omega) \right\}$
kümesi vardır. Ek olarak, her $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ sınırlı kümesi ve keyfi kaydedilmiş $\rho > 0$ sayısı için, $\exists t_0 = t_0(B, \rho) > 0$ vardır ki, $t \geq t_0$ iken $S(t)B \subset B_0^\rho$ olur. Burada,
$B_0^\rho := \left\{ u \in P_0 : \|u\|_{L_2(\Omega)}(t) \leq (M_1+\rho)^{\frac{1}{2}}, M_1 = M_1(\|h\|, \|\varphi\|, \|e\|, k_1, k_0, a_0, c_4, c_7, c, mes\Omega) \right\}$*'dır.*

Yani, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akış ailesi için $L_2(\Omega)$'da yutan küme vardır.
(c sabiti Sonuç 2.47'den, c_4 sabiti (2.5)'ten ve c_7 sabiti ise (2.9)'dan gelmektedir.)

İspat. Bu teoremin ispatı, Teorem 4.1'in ispatına benzer şekilde yapılacaktır. (1.1′)-(1.3′) probleminin $u(t)$ çözümü için $E(u(t)) := \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx$ Lyapunov fonksiyonelini göz önüne alalım. $E'(t) = \langle u, u_t \rangle_\Omega$ eşitliğini kullanırsak,

$$E'(t) = \int\limits_\Omega u\Delta u dx - \int\limits_\Omega g(x,u)u dx - \|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_\Omega e(x)u dx + \int\limits_\Omega h(x)u dx$$

elde ederiz. İlk integrale kısmi integrasyon uygularsak,

$$E'(t) \leq -\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} - \int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' - \int\limits_\Omega g(x,u)u dx + \|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_\Omega |e(x)||u| dx$$
$$+\int\limits_\Omega h(x)u dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x')u dx'$$

yazabiliriz. Hölder, Young eşitsizliklerinden ve teoremin koşullarından,

$$E'(t) \leq -\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + a_0\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} - k_0\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + k_1 mes\Omega$$
$$+\|u\|_{L_2(\Omega)}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \varepsilon_1(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)})^2$$
$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2_{W_2^1(\Omega)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

elde ederiz.

$\tilde{\varepsilon_1} := 2\varepsilon_1$ ve $\tilde{\varepsilon_2} > 0$ olmak üzere, (2.5), (2.9) ve Teorem 2.35'ten aşağıdaki eşitsizlikleri alırız:

$$E'(t) \leq -\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + a_0c_4\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_0\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \varepsilon_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$
$$+c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} + k_1 mes\Omega + \tilde{\varepsilon}_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \tilde{\varepsilon}_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$
$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2_{W_2^1(\Omega)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} + \tilde{\varepsilon}_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

$$E'(t) \leq -\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + a_0c_4\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_0\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \varepsilon_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$+c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}+k_1mes\Omega+\tilde{\varepsilon}_1\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2+\tilde{\varepsilon}_1\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1}+\tilde{\varepsilon}_1$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|_{W_2^1(\Omega)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^2+\tilde{\varepsilon}_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2+c(\varepsilon_2)\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2.$$

ε_3 ve $\tilde{\varepsilon}_1$ pozitif sayıları, $\tilde{k_0}:=k_0-(\varepsilon_3+\tilde{\varepsilon}_1)>0$ olacak şekilde seçilir ve $\varepsilon_4:=\tilde{\varepsilon}_1+\tilde{\varepsilon}_2$ denirse son eşitsizlik,

$$E'(t)\le-\|Du\|_{L_2(\Omega)}^2-\tilde{k_0}\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1}+(a_0c_4+\varepsilon_4)\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2+c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|_{W_2^1(\Omega)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^2+c(\varepsilon_2)\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2+k_1mes\Omega+\tilde{\varepsilon}_1$$

olarak yazılabilir. $\theta_1:=min\{1,\tilde{k_0}\}$ dersek Sonuç 2.47'den,

$$E'(t)\le(-\theta_1+a_0c_4+\varepsilon_4)\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2+c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|_{W_2^1(\Omega)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^2+c(\varepsilon_2)\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2+k_1mes\Omega+\tilde{\varepsilon}_1+\theta_1c$$

elde ederiz. $(\mathbf{8_0})$ koşulundan ε_4 pozitif sayısı, $(-\theta_1+a_0c_4+\varepsilon_4)<0$ olacak şekilde seçilebilir. O halde,

$$E'(t)\le(-\theta_1+a_0c_4+\varepsilon_4)\|u\|_{L_2(\Omega)}^2+c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|_{W_2^1(\Omega)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^2+c(\varepsilon_2)\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2+k_1mes\Omega+\tilde{\varepsilon}_1+\theta_1c$$

elde ederiz. $E(t)$'nin tanımından son eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t)+\tilde{M}_2\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t)\le M_3$$

olarak yazabiliriz. Burada, $\tilde{M}_2:=2(\theta_1-a_0c_4-\varepsilon_4)$ ve $\tilde{M}_3:=2(c(\varepsilon_3)c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\|e\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}+c(\varepsilon_1)\|h\|_{W_2^1(\Omega)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^2+c(\varepsilon_2)\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2+k_1mes\Omega+\tilde{\varepsilon}_1+\theta_1c)$'tir.

Son eşitsizlikte $y:=\|u\|_{L_2(\Omega)}^2(t)$ dersek,
$0<M_2(\theta_1,a_0)\le\tilde{M}_2$ ve $0<\tilde{M}_3\le M_3(\|h\|,\|\varphi\|,\|e\|,k_1,\theta_1,c,c_7,mes\Omega)$ sayıları için

$$\frac{dy}{dt}+M_2y\le M_3 \tag{4.7}$$

$$y(0)=\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{4.8}$$

Cauchy problemini elde ederiz.

(4.7) eşitsizliğini $\exp\{M_2t\}$ integral çarpanı ile çarparsak,

$$\frac{d}{dt}(y\exp\{M_2t\})\le M_3\exp\{M_2t\}$$

elde ederiz. Buradan,

$$y(t) \le y(0)\exp\{-M_2 t\} + M_3 \int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau$$

yazarız ki, bu da M_3'ün tanımından aşağıdaki eşitsizliğe denktir:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\} + 2c(\varepsilon_1)\|h\|^2 \int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau$$

$$+2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2 \int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau + 2c(\varepsilon_3) c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \|e\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau$$

$$+2(k_1 mes\Omega + \tilde{\varepsilon}_1 + \theta_1 c) \int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau.$$

$\int_0^t \exp\{M_2(\tau - t)\} d\tau = \frac{1-\exp\{-M_2 t\}}{M_2} \le \frac{1}{M_2}$ olduğundan, son eşitsizliği

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\}$$

$$+\frac{1}{M_2}\left[2c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + 2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2 + 2c(\varepsilon_3) c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \|e\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} + 2(k_1 mes\Omega + \tilde{\varepsilon}_1 + \theta_1 c)\right]$$

olarak yazabiliriz.

O halde,

$$M_1 := \frac{1}{M_2}\left[2c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + 2c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2 + 2c(\varepsilon_3) c_7^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \|e\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} + 2(k_1 mes\Omega + \tilde{\varepsilon}_1 + \theta_1 c)\right]$$

için aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\} + M_1,$$

$$M_1 := M_1(\|h\|, \|\varphi\|, \|e\|, k_1, \theta_1, c, c_7, mes\Omega, M_2).$$

Buradan $t \to \infty$ iken B_0 kümesi elde edilir.

Şimdi $\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\} \le \rho$ eşitsizliğini sağlayan t değerlerini bulalım:

$$\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\} \le \rho \Rightarrow \exp\{-M_2 t\} \le \frac{\rho}{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}} \Rightarrow t \ge -\frac{1}{M_2} \ln\left(\frac{\rho}{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}\right)$$

O halde, $t_0 := \frac{1}{M_2} \ln\left(\frac{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\rho}\right)$ olmak üzere, $\forall t \ge t_0$ için $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le M_1 + \rho$'dur. Gerçekten de,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t\} + M_1 \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 t_0\} + M_1$$

$$= \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \exp\{-M_2 \left[\frac{1}{M_2} \ln\left(\frac{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\rho}\right)\right]\} + M_1 = \rho + M_1$$

elde ederiz. Yani,

$$\|S(t)u_0\|_{L_2(\Omega)} \leq (\rho + M_1)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Bu durumda,
$B_0^\rho := \left\{u \in P_0 : \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq (M_1 + \rho)^{\frac{1}{2}}\right\}$ kümesi, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ailesi için $L_2(\Omega)$'da yutan kümedir.

■

4.2.2 $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ Uzayında Yutan Kümenin Varlığı:

$(1.1')$-$(1.3')$ problemi için $(\mathbf{1}_0)$, $(\mathbf{2}_0)$, $(\mathbf{3}_0)$, $(\mathbf{7}_0)$ ve $(\mathbf{9}_0)$ koşulları ile aşağıdaki koşulları kabul edelim:

$(\mathbf{A}_1)$ Hemen hemen her $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq a_0 > 0$ olacak şekilde bir a_0 sayısı vardır.

$(\mathbf{A}_2)$ $g(x, 0) = 0$ olmak üzere , $G(x, u) := \int\limits_0^u g(x, \vartheta)d\vartheta$ ve

$$0 < (\alpha + 1)G(x, \tau) \leq g(x, \tau)\tau, \quad \tau \in \mathbb{R} - \{0\}$$

olsun.

Teorem 4.7 *$(1.1')$-$(1.3')$ problemi için $(\mathbf{1}_0)$, $(\mathbf{2}_0)$, $(\mathbf{3}_0)$, $(\mathbf{7}_0)$ ve $(\mathbf{9}_0)$ koşulları ile $(\mathbf{A}_1)$,$(\mathbf{A}_2)$ koşulları sağlansın. Ayrıca, $(h, \varphi) \in L_2(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$ olsun.*

Bu durumda $(1.1')$-$(1.3')$ probleminin ürettiği $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışı, $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$'da yutan kümeye sahiptir: Her $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ sınırlı kümesi ve keyfi kaydedilmiş $\rho > 0$ sonlu sayısı için, $\exists t_0(B, \rho) > 0$ vardır ki, $t \geq t_0$ iken $S(t)B \subset B_1^\rho$ olur. Burada, $B_1^\rho := \left\{u \in P_0 : \|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)}(t) \leq \tilde{M}_1^{\frac{1}{2}}\right\}$ ($k_2 > 0$, $k_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_1(M_1, \rho, k_3, k_2, c_2)$'dır. Ayrıca, c sabiti Sonuç 2.47'den, c_2 sabiti (2.3)'ten, c_4 sabiti (2.5)'ten ve c_7 sabiti (2.9)'dan gelmektedir.)

İspat. Göz önüne aldığımız problemin çözümünün daha iyi sınıftan olduğunu kabul ederek, $(1.1')$ denklemini u_t ile çarpalım ve Ω üzerinde integraline geçelim:

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} - \int\limits_\Omega u_t \Delta u dx + \int\limits_\Omega g(x, u)u_t dx + \|u\|_{L_2(\Omega)}(t) \int\limits_\Omega e(x)u_t dx = \int\limits_\Omega h(x)u_t dx.$$

Kısmi integrasyon yaparsak,

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} Du_t Du dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x')uu_t dx' + \int\limits_{\Omega} g(x,u)u_t dx + \|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_{\Omega} e(x)u_t dx$$
$$= \int\limits_{\Omega} h(x)u_t dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x')u_t dx'$$

elde ederiz. Hölder ve Young eşitsizlikleri ile $(\mathbf{A}_2)$ koşulundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} G(x,u)dx$$
$$\leq c(\varepsilon_1)\|e\|^2_{L_2(\Omega)}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

Şimdi $\varepsilon := \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ diyerek ε pozitif sayısını 1'den küçük seçelim ve Teorem 4.6'daki $\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ normunun değerlendirmesini göz önüne alalım. Buna göre öyle bir $t_0(\rho) > 0$ sayısı vardır ki, $t \geq t_0$ için

$$\frac{d}{dt}\left\{\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' + \int\limits_{\Omega} G(x,u)dx\right\}$$
$$\leq c(\varepsilon_1)\|e\|^2_{L_2(\Omega)}(M_1+\rho) + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$z(t) := \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' + 2\int\limits_{\Omega} G(x,u)dx$$

dersek, $L_1 := c(\varepsilon_1)\|e\|^2_{L_2(\Omega)}(M_1+\rho) + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$ için

$$\frac{d}{dt}z(t) \leq L_1, \qquad t \geq t_0 \tag{4.9}$$

elde ederiz.

Şimdi, $\tilde{M}_0 = \tilde{M}_0(M_1,\rho)$ olmak üzere,

$$\int\limits_{t}^{t+1} z(s)ds \leq \tilde{M}_0, \qquad t \geq t_0 \tag{4.10}$$

olduğunu gösterelim:

$(1.1')$ denklemini u ile çarparak Ω üzerinden integraline geçip kısmi integrasyon uyguladığımızda,

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' + 2\int\limits_{\Omega} g(x,u)udx$$

$$= -2\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_{\Omega} e(x)udx + 2\int\limits_{\Omega} h(x)udx + 2\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x')udx'$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2dx' + 2\int\limits_{\Omega} g(x,u)udx$$

$$\leq 2\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)\int\limits_{\Omega} |e(x)||u|dx + 2\int\limits_{\Omega} h(x)udx + 2\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x')udx'$$

$$\leq (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 2\|e\|^2_{L_2(\Omega)})\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

elde ederiz. $(\mathbf{A}_2)$ koşulundan ve Teorem 4.6'daki $\|u\|_{L_2(\Omega)}(t)$ normunun değerlendirmesinden, $t \geq t_0$ için

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2dx' + 2(\alpha+1)\int\limits_{\Omega} G(x,u)dx$$

$$\leq (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 2\|e\|^2_{L_2(\Omega)})(M_1+\rho) + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

eşitsizliğini alırız. Buradan $t \geq t_0$ için

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2dx' + 2\int\limits_{\Omega} G(x,u)dx$$

$$\leq (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 2\|e\|^2_{L_2(\Omega)})(M_1+\rho) + c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

yazabiliriz.

O zaman,

$$\int\limits_t^{t+1} z(s)ds \leq (2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+2\|e\|^2_{L_2(\Omega)}+1)(M_1+\rho)+c(\varepsilon_2)\|h\|^2_{L_2(\Omega)}+c(\varepsilon_3)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}, \quad t \geq t_0$$

eşitsizliği sağlanır. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki sabiti $\tilde{M}_0(M_1,\rho)$ ile işaret edersek,

$$\int\limits_t^{t+1} z(s)ds \leq \tilde{M}_0(M_1,\rho), \qquad t \geq t_0$$

elde ederiz.

(4.9) ve (4.10)'u göz önüne alarak *Düzgün Gronwall Eşitsizliği*nden (Lemma 2.59) yararlanırsak,

$$z(t) \leq L_1 + \tilde{M}_0(M_1,\rho), \qquad t \geq t_0 + 1 \tag{4.11}$$

elde ederiz.

(4.11)'de $(\mathbf{A}_1)$ koşulunu kullanarak $\theta := min\{1, a_0\}$ dersek, (2.3)'ten

$$\theta c_2 \|u\|^2_{W^1_2(\Omega)}(t) + 2\int_\Omega G(x,u)dx \le L_1 + \tilde{M}_0(M_1, \rho), \qquad t \ge t_0 + 1$$

yazabiliriz. $(\mathbf{A}_2)$ koşulundan, öyle $k_2 > 0, k_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayıları vardır ki $G(x,u) \ge k_2|u|^{\alpha+1} - k_3$ eşitsizliği sağlanır. O halde,

$$\theta c_2 \|u\|^2_{W^1_2(\Omega)}(t) + 2k_2 \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}(t) - 2k_3 mes\Omega$$

$$\le L_1 + \tilde{M}_0(M_1, \rho), \qquad t \ge t_0 + 1$$

eşitsizliğini alırız. Burada $\bar{\theta} := min\{\theta c_2, 2k_2\}$ dersek,

$$\frac{1}{2}\bar{\theta} \|u\|^2_{W^1_2(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}(t) \le L_1 + \tilde{M}_0(M_1, \rho) + 2k_2 + 2k_3 mes\Omega, \qquad t \ge t_0 + 1$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki sabiti $\tilde{M}_1(M_1, \rho, k_3, k_2, c_2)$ ile işaret edersek,

$$\|u\|_{W^1_2(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}(t) \le \tilde{M}_1^{\frac{1}{2}} \qquad t \ge t_0 + 1 \tag{4.12}$$

elde ederiz.

(4.12)'den $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ yarı akışı, $W^1_2(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahiptir.

■

Kaynaklar

[1] R. A. Adams; *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, **1975**

[2] A. V. Babin, M. I. Vishik; *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, **1992**.

[3] C. Bandle, M. A. Pozio, A. Tesei; *The Fujita exponent for the Caucy problem in the hyperbolic space*, Journal of Differential Equations 251 **(2011)**, 2143-2163

[4] A. Dall'Aglio, D. Giachetti, I. Peral, S. S. Leon; *Global existence for some slightly super-linear parabolic equations with meauser data*, J. Math. Anal. Appl. 345 **(2008)**, 892-902

[5] F. G. Düzgün, K. N. Soltanov; *On some Emden-Fowler type equations*, Numerical Analysis and Applied Mathematics, Vols 1 and 2, AIP Conference Proceedings Volume: 1168 **(2009)**, 256-259

[6] F. G. Düzgün, K. N. Soltanov; *Some Mixed Problems For Semilinear Parabolic Type Equation*, Journal of Applied Analysis and Computation (in press)

[7] L. C. Evans; *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS **1998**

[8] S. Fucik, A. Kufner; *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, New York, **1980**

[9] W. Gao, Y. Han; *Blow-up of a nonlocal semilinear parabolic equation with positive initial energy*, Applied Mathematics Letters 24 **(2011)**, 784-788

[10] I.M Gel'fand and G.E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol 1, Academic Press, **1964**

[11] M. Jazar, R. Kiwan; *Blow-up of a non-local semilinear parabolic equation with Neumann boundary conditions*, Ann. I. H. Poincare- AN 25 **(2008)**, 215-218

[12] S. Kesavan; *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, India, **1989**

[13] O. A. Ladyzhenskaya; *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Leizioni Lincei, Cambridge University Press, Cambridge, New York, **1991**.

[14] M. Lazzo, P. G. Schmidt; *Monotone local semiflows with saddle-point dynamics and applications to semilinear diffusion equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement Volume **(2005)**, 566-575

[15] X. Li, S. Ruan; *Attractors for non-autonomous parabolic problems with singular initial data*, Journal of Differential Equations 251 **(2011)**, 728-757

[16] J. L. Lions; *Quelques methodes de resolution des problemes aux Limities non lineaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, **1969**

[17] J. L. Lions, E. Magenes; *Non-Homogeneous boundary value problems and applications*, Volume 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, **1972**

[18] L.A. Lusternik, V.J. Sobolev; *Elements of Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, **1974**

[19] L. Ma; *Boundary value problem for a classical semilinear parabolic equation*, arXiv:1012.5861v1 [math.AP] **(2010)**

[20] P. J. Martinez-Aparicio, F. Petita;*Parabolic equations with nonlinear singularities*, Nonlinear Analysis 74 **(2011)**, 114-131

[21] C. P. Niculescu, I. Roventa; *Large solutions for semilinear parabolic equations involving some special clases of nonlinearities*, Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 491023 **(2010)**

[22] L.E. Payne, G. A. Philippin ans S. Vernier Piro; *Blow-up phenomena for a semilinear heat equation with nonlinear boundary condition, I*, Z. Angew. Math. Phys. 61 **(2010)**, 999-1007

[23] A. L. Pereira, M. C. Pereira; *Continuity of attractors for a reaction-diffusion equations problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain*, Journal of Differential Equations 239 **(2007)**, 343-370

[24] M. M. Rao; *Measure Theory And Integration*, John Wiley and Sons, New York, **1984**

[25] J.- F. Rault; *The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, **(2011)**, 1059-1061

[26] X. Runzhang; *Asymptotic behavior and blow-up of solutions for semilinear parabolic equations at critical energy level*, Mathematics and Computers in Simulation 80 **(2009)**, 808-813

[27] S. Shi, S. Li; *Existence of solutions for a class of semilinear elliptic equations with the Robin boundary value condition*, Nonlinear Analysis 71 **(2009)**, 3292-3298

[28] K. N. Soltanov; *On some modification on Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis- Theory Methods and Applications **(2003)** Volume: 52 Issue: 3 , 769-793

[29] K. N. Soltanov; *Some boundary problem for Emden-Fowler type equations, Function Spaces*, Differential Operators and Nonlinear Analysis, FSDONA 2004 Svratka, Czech Republic, **(2005)**, 311-318

[30] M. Struwe; *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, **1990**

[31] R. Temam; *Infinite-Dimentional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, **1998**

[32] L. Yang; *Asymptotic regularity and attractors of the reaction-diffusion equation with nonlinear boundary condition*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 13 **(2012)**, 1069-1079

[33] K. Yosida ; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, **1980**

[34] E. Zeidler; *Nonlinear Functional Analysis and its applications II/A*, Springer- Verlag, New York, **1990**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Fatma Gamze DÜZGÜN

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : gamzeduz@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üni., Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise : 1997-2001 Cumhuriyet Süper Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2005-2008 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Doktora : 2008-2014 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce (İleri Düzey), İtalyanca (İleri Düzey)

İş Deneyimi

2005 Ekim- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

01.11.2012-01.05.2013 Floransa Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde Prof. Dr. Vincenzo Vespri ile çalışmak üzere Akademik ziyaretçi

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

TÜBİTAK destekli 110T558 numaralı "Matematiksel Fiziğin Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerinin Çözülebilirliği, Tam İntegrallenebilirliği ve Çözüm Manifoldlarının Analitik Özellikleri"isimli Türkiye-Ukrayna ikili iş birliği projesi, Bütçe: 155.541TL (proje henüz sonuçlanmamıştır).

Tezden Üretilmiş Yayınlar

"F. G. Düzgün, K. N. Soltanov, ; *Some Mixed Problems For Semilinear Parabolic Type Equation*, Journal of Applied Analysis and Computation (in press)

Tezden Üretilmiş Tebliğ veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1. 5th International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Bulgaristan, 2010.

2. 8th International Congress for the International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC), Moskova, Rusya, 2011.

3. Seminar of Analysis, Floransa Üniversitesi, İtalya, 2013.