MORFİZMALAR YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI HALKA VE MODÜL YAPILARI

SOME RING AND MODULE STRUCTURES DEFINED BY MORPHISMS

MELTEM ALTUN

Prof. Dr. AYŞE ÇİĞDEM ÖZCAN

Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2013

MELTEM ALTUN'un hazırladığı "**Morfizmalar Yardımıyla Tanımlanan Bazı Halka ve Modül Yapıları**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr., Sait HALICIOĞLU)

Danışman

(Prof. Dr., Ayşe Çiğdem ÖZCAN)

Üye

(Prof. Dr., Adnan TERCAN)

Üye

(Prof. Dr., Derya KESKİN TÜTÜNCÜ)

Üye

(Doç. Dr., Mustafa ALKAN)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/06/2013

Meltem ALTUN

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından, "2210 Yurt İçi Yüksek Lisans Burs" programı ile desteklenmiştir.

ÖZET

MORFİZMALAR YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI HALKA VE MODÜL YAPILARI

MELTEM ALTUN

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Haziran 2013, 87 sayfa

M ve N, bir R halkası üzerinde iki modül olsun. Son yıllarda yapılan çalışmalar halka ve modül teorideki bazı yapıların M'den N'ye morfizmaların toplamsal abel grubu olan $\mathrm{Hom}_R(M,N)$'ye taşınabileceğini göstermiştir. Bu tezin amacı, morfizmalar yardımıyla tanımlanan bazı halka ve modül yapılarını araştırmaktır. Giriş bölümü, tez konusunun tarihsel gelişimi ve önemi ile ilgili bilgilerden oluşmaktadır. İkinci bölüm tez için gerekli olan temel bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$'nin total,radikal, tekil ideal ve eş-tekil ideal altyapıları incelenmiş ve bu altyapılar $\mathrm{Hom}_R(R,M) \cong M$ izomorfizması yardımıyla modül kategorisine taşınmıştır. Daha sonra, yerel injektif ve yerel projektif modüller tanımlanmış ve bu modüller tekil, eş-tekil idealler ve total yardımı ile karakterize edilmiştir. Son bölümde, halka ve modül için var olan düzenli eleman tanımı modül homomorfizmalarına genelleştirilmiş ve $\mathrm{Hom}_R(M,N)$'nin tek en geniş düzenli alt-bimodülü $\mathrm{Reg}[M,N]$'ye sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ için yarıdüzenlilik ve yarıgüçlülük tanımlanarak aralarındaki bağlantılar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, total, Jacobson radikali, tekil ideal, eş-tekil ideal, yerel injektif modül, yerel projektif modül, düzenli homomorfizma, yarıdüzenli homomorfizma.

ABSTRACT

SOME RING AND MODULE STRUCTURES DEFINED BY MORPHISMS

MELTEM ALTUN

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

June 2013, 87 pages

Let M ve N be two modules over the ring R. Recent works have shown that some structures of the ring and module theory can be carried out in the context of $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, the abelian group of all morphisms of M into N. The aim of this thesis is to investigate some ring and module structures defined by morphisms. The introductory chapter consists of informations about the importance and the historical improvement of the thesis subject. The second chapter contains introductory information needed for the thesis. In the third chapter of the thesis, substructures of $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ such as the total, the radical, the singular ideal and the co-singular ideal are examined and these substructures are carried out to the category of modules with the help of the isomorphism $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$. Then locally injective and locally projective modules are introduced and these modules are characterized by the singular ideal, the co-singular ideal and the total. In the last chapter, the definition of a regular element for a ring and a module is generalized to module homomorphisms and it is shown that $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ has a unique largest regular sub-bimodule $\mathrm{Reg}[M, N]$. Also, the semiregularity and semipotentness of $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ are defined and the connections between these definitions are investigated.

Keywords: $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, total, Jacobson radical, singular ideal, co-singular ideal, locally injective module, locally projective module, regular homomorphism, semiregular homomorphism.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında çok büyük katkı sağlayan, değerli bilgi ve deneyimleriyle bana sabırla yol gösteren çok değerli hocam
Prof. Dr. A. Çiğdem ÖZCAN'a;

bilgi ve önerilerini benden esirgemeyen sayın hocalarım
Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya ve Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na;

bana her zaman güvenen, attığım her adımda yanımda olan ve beni destekleyen canım babama, anneme ve aileme;

sevinçlerimi paylaşan ve zorlu günlerimde beni hiç yalnız bırakmayan arkadaşım
Oğuzhan ÖZARSLAN'a

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	R birimli halka
M_R	M birimsel sağ R–modül
Mod-R	birimsel sağ R–modüllerin kategorisi
$\oplus M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
ΠM_i	M_i modüllerinin dik çarpımı
$M^{(\Lambda)}$	$\oplus M_i$, $M_i = M$
M^{Λ}	ΠM_i, $M_i = M$
$ann_r(m)$	$\{r \in R \mid mr = 0\}$, sağ sıfırlayıcı
$I \lhd R$	I R'nin ideali
$A \leq M$	A M'nin altmodülü
$A \leq_e M$	A M'nin geniş altmodülü
$A \leq_d M$	A M'nin dik toplananı
$A \leq_c M$	A M'nin kapalı altmodülü
$A \ll M$	A M'nin dar altmodülü
$\mathrm{Rad}(M)$	M modülünün Jacobson Radikali
$J = J(R)$	R halkasının Jacobson Radikali
$Soc(M)$	$\cap\{N \mid N \leq_e M\} = \oplus\{L \mid L$ M'nin basit altmodülü$\}$
S_r, S_l	$Soc(R_R)$, $Soc(_RR)$
$Z(M)$	$\{m \in M \mid ann_r(m) \leq_e R\}$
Z_r, Z_l	$Z(R_R)$, $Z(_RR)$
$\mathrm{Hom}_R(M, N) = [M, N]$	M'den N'ye R–modül homomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{End}_R(M) = E_M$	M'nin R–modül endomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{Oto}(M)$	M'nin R–modül otomorfizmalarının kümesi
Çek(f)	f homomorfizmasının çekirdeği
Gör(f)	f homomorfizmasının görüntüsü
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	Prüfer p–grup

1 GİRİŞ

Eilenberg ve Mac Lane [7] 1945 senesinde homolojik cebirin temelini oluşturan kategori ve funktor kavramlarını tanımlamışlardır. Bu kavramlar daha sonra Cartan ve Eilenberg tarafından geliştirilmiş ve 1956 senesinde "Homological Algebra" kitabında yayınlanmıştır. Halka ve modül teorisine homolojik ve kategorik yaklaşım halkanın birimli olmasını gerektirmektedir.

R değişmeli olması gerekmeyen birimli bir halka ve Mod–R birimsel sağ R–modüllerin kategorisi olsun. Mod–R'deki morfizmalar sağ R–modül homomorfizmalarıdır. M'nin endomorfizmalarının halkası $\mathrm{End}_R(M)$ ile gösterilmektedir.

R halkasını sağ R–modül olarak düşündüğümüzde, $R \cong \mathrm{End}_R(R)$'dir, dolayısıyla R halkasının yapısı $\mathrm{End}(R)$ halkasına taşınabilmektedir. Ayrıca, M sağ R–modülü için $M_R \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$, R'den M'ye tüm sağ R–modül homomorfizmaları olduğu bilinmektedir. Ancak, herhangi bir M modülü için $\mathrm{End}_R(M)$ halkası farklı yapıya sahip olabilmektedir. Örneğin, V bir F cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı ise $\mathrm{End}_F(V) \cong M_n(F)$, F cismi üzerindeki $n \times n$ matrisler halkasıdır.

Endomorfizmalar yerine genel modül homomorfizmalarını düşündüğümüzde, M ve N sağ R–modüller, $E_M = \mathrm{End}_R(M)$, $E_N = \mathrm{End}_R(N)$ olmak üzere $\mathrm{Hom}_R(M, N)$'nin E_N-E_M–bimodül yapısı mevcuttur. Ayrıca, Ω R–modül homomorfizmalarının bir sınıfı olmak üzere $\Omega(M, N) = \Omega \cap \mathrm{Hom}_R(M, N)$ olsun. Eğer keyfi $A, B, C, D \in$ Mod–R için $\Omega(B, C) \neq \emptyset$ ve $\mathrm{Hom}_R(C, D)\ \Omega(B, C)\ \mathrm{Hom}_R(A, B) \subseteq \Omega(A, D)$ ise Ω sınıfına Mod–R'de bir yarı-ideal denilmektedir. Eğer Ω sınıfı Mod–R'de bir yarı-ideal ve keyfi $M, N \in$ Mod–R için $\Omega(M, N)$, $Hom_R(M, N)$ grubunun bir altgrubu ise Ω sınıfına Mod–R'de bir ideal denilmektedir. Bundan sonra $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ yerine kısaca $[M, N]$ gösterimi kullanılacaktır.

Tezin ikinci bölümü tezde kullanılan kavramlarla ilgili açıklayıcı bilgiler içermektedir. Burada belirtilmeyen tanım ve özellikler için ikinci bölümden yararlanılabilinir.

Kasch 1982 senesinde Münih'deki bir seminerinde halkadaki kısmi tersinir eleman kavramını tanıtmış, elde edilen sonuçlar W. Schneider'in 1987'deki doktora tezinde yayınlanmıştır. R bir halka olmak üzere

- $e := sr = e^2 \neq 0$ olacak şekilde $s \in R$ vardır.

- $d := rt = d^2 \neq 0$ olacak şekilde $t \in R$ vardır.

- $uru = u \neq 0$ olacak şekilde $u \in R$ vardır.

- $\varphi : A \to B$, $\varphi(a) = ra$ dönüşümünü izomorfizma yapan $0 \neq A \subseteq_d R_R, B \subseteq_d R_R$ sağ idealleri vardır.

denk koşullarından birini sağlayan $r \in R$ elemanına kısmi tersinir eleman denir. Açıktır ki tersinir elemanlar kısmi tersinirdir. Kasch ve Mader kısmi tersinir eleman için halkanın en iyi ikinci elemanı demişlerdir. Kısmi tersinir olmayan elemanların kümesi total olarak adlandırılmış, $\mathrm{Tot}(R)$ ile gösterilmiştir. Diğer bir deyişle, $r \in \mathrm{Tot}(R)$'dir ancak ve ancak rR sağ ideali sıfırdan farklı eşkare kapsamaz. Bir halkanın totali ilk olarak $1948 - 1950$ senelerinde Azumaya tarafından çalışılmış, kırk sene sonra Kasch daha modern dilde bu yapıyı ele almıştır. Azumaya radikalinin var olması ile $\mathrm{Tot}(R)$'nin toplamaya göre kapalı olmasının denk olduğu gözlenmiştir. Beidar, Weigand, Zöllner, Lee, Zhou, Nicholson, Mader ve Ke bu alanda çalışan yazarların başlıcalarıdır.

Kısmi tersinir eleman ve total kavramları halkalarla sınırlı kalmamış, Kasch tarafından M ve N sağ R–modüller olmak üzere $[M, N]$'ye taşınmıştır.

- $e := gf = e^2 \neq 0$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ vardır.

- $d := fh = d^2 \neq 0$ olacak şekilde $h \in [N, M]$ vardır.

- $kfk = k \neq 0$ olacak şekilde $k \in [N, M]$ vardır.

- $f|_A : A \to B$ izomorfizma olacak şekilde $0 \neq A \leq_d M$, $B \leq_d N$ altmodülleri vardır.

denk koşullarından birini sağlayan $f \in [M, N]$ kısmi tersinir homomorfizma olarak adlandırılır ve $[M, N]$'nin totali

$$\mathrm{Tot}[M, N] = \{f \in [M, N] \mid f \text{ kısmi tersinir değildir.}\}$$

kümesi olarak tanımlanır. $\mathrm{Tot}[M, N]$ bir yarı-idealdir.

Halkadaki ideallerden biri Jacobson radikalidir. R'deki maksimal sağ ideallerin arakesiti veya denk olarak maksimal sol ideallerin arakesiti olarak tanımlanır ve $J(R)$ veya J ile gösterilir. Jacobson radikali pek çok araştırma alanında önemli yer tutmaktadır. Bir M modülünün Jacobson radikali de benzer şekilde tüm maksimal altmodüllerin arakesiti olarak tanımlanır, ve $\mathrm{Rad}(M)$ ile gösterilir. Kasch ve Mader bu yapıyı da modül homomorfizmalarına taşımışlardır. M ve N modüller olmak üzere, $[M, N]$'nin radikali

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}[M,N] &:= \{f \in [M,N] \mid \text{ her } g \in [N,M] \text{ için } gf \in J(E_M)\text{'dir.}\} \\ &= \{f \in [M,N] \mid \text{ her } g \in [N,M] \text{ için } fg \in J(E_N)\text{'dir.}\} \\ &= \{f \in [M,N] \mid \text{ her } g \in [N,M] \text{ için } 1_{E_M} - gf \text{ tersinirdir.}\} \\ &= \{f \in [M,N] \mid \text{ her } g \in [N,M] \text{ için } 1_{E_N} - fg \text{ tersinirdir.}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathrm{Rad}[M, N]$ bir idealdir. $[M, N]$'nin sol E_N–modül ve sağ E_M–modül yapısı nedeniyle sahip olduğu radikaller $\mathrm{Rad}({}_{E_N}[M, N])$ ve $\mathrm{Rad}([M, N]_{E_M})$, $\mathrm{Rad}[M, N]$ tarafından kapsanmaktadır. Ayrıca, R halkası $[R_R, R_R]$ ile belirlenebilir olduğundan $\mathrm{Rad}[R_R, R_R] = J(R)$'dir.

M ve N modüller olmak üzere $[M, N]$'nin total ve radikal dışında önemli altyapıları mevcuttur.

$$\Delta[M, N] := \{f \in [M, N] \mid \text{Çek}(f) \leq_e M\}$$

$[M, N]$'nin tekil altmodülü

$$\nabla[M, N] := \{f \in [M, N] \mid \text{Gör}(f) \ll N\}$$

$[M, N]$'nin eş-tekil altmodülü olarak adlandırılır. Δ ve ∇ Mod–R'de bir idealdir.

Tezin üçüncü bölümünde tanımlanan total, radikal, tekil ideal ve eş-tekil ideal altyapılarının yine bu bölümde çeşitli özellikleri incelenmiş, aralarındaki bağlantılar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Bu bağlantılardan en önemlisi Rad, Δ, $\nabla \subseteq$ Tot şeklinde verilebilir.

Üçüncü bölümde daha sonra, özel olarak $[R, M]$ durumu göz önüne alınmış, $[R, M] \cong M$ izomorfizması yardımıyla bir modülün totali, tekil ve eş-tekil altmodülleri tanımlanmıştır. M modülünün totalini tanımlamak için kısmi tersinir eleman tanımına ihtiyaç vardır. $m \in M$ için $0 \neq \varphi(m)$ eşkare olacak şekilde bir $\varphi \in M^* = [M, R]$ var ise m kısmi tersinir eleman olarak adlandırılır. Böylece, M modülünün totali aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathrm{Tot}(M) := \{m \in M \mid m \text{ kısmi tersinir değildir.}\}$$

$\rho : [R, M] \to M$ izomorfizması olmak üzere M modülü için $\Delta(M)$ ve $\nabla(M)$ altyapıları

$$\Delta(M) := \rho(\Delta[R, M]) \text{ ve } \nabla(M) := \rho(\nabla[R, M])$$

şeklinde tanımlanır. M modülü için bu altyapıların tanımlanmasıyla birlikte

- $\Delta(M) = Z(M)$
- $\nabla(M) = \mathrm{Rad}(M)$
- $\mathrm{Tot}(M) = \rho(\mathrm{Tot}[R, M])$
- $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ olduğu ispatlanmıştır.

2002 senesinde Kasch [12] yerel injektif ve yerel projektif modülleri tanımlamıştır. M modülünün her $A \subseteq M$ geniş olmayan altmodülü için $A \cap Q = 0$ olacak şekilde $0 \neq Q \leq M$ injektif altmodülü var ise M yerel injektif modül ve N modülünün her $B \subseteq N$ dar olmayan altmodülü için $P \subseteq B$ olacak şekilde $0 \neq P \leq_d N$ projektif altmodülü var ise N yerel projektif modül olarak adlandırılır. Yerel injektif ve yerel projektif modüller Kasch tarafından total, tekil ideal ve eş-tekil ideal altyapıları kullanılarak aşağıdaki şekilde karakterize edilmiştir.

M yerel injektif modüldür $\Leftrightarrow$ her $N \in \text{Mod–}R$ için $\Delta[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.
N yerel projektif modüldür $\Leftrightarrow$ her $M \in \text{Mod–}R$ için $\nabla[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.

Yerel injektif modüller injektif modüllerin; yerel projektif modüller ise projektif, yarıtam modüllerin bir genellemesidir. İnjektif modüllerin keyfi dik toplamının her zaman injektif olmadığı bilinmektedir. Fakat, injektif modüllerin keyfi dik toplamı yerel injektiftir.

Üçüncü bölümde son olarak, sağ Noether halkaların önemli bir karakterizasyonuna değinilmiştir.

"R sağ Noether halkadır $\Leftrightarrow$ injektif sağ R-modüllerin keyfi dik toplamı injektiftir. "

sonucu iyi bilinmektedir. Buradan yola çıkarak Beidar ve Kasch [3]

- R sağ Noether halkadır
- İnjektif sağ R-modüllerin keyfi dik toplamının geniş genişlemesi injektif sağ R-modüllerin dik toplamıdır.

koşullarının denk olduğu önsavını ortaya atmışlardır. Pek çok halka sınıfının (örneğin değişmeli halkalar, sağ V-halkalar ve yarıyerel (semilocal) halkalar) bu denkliği sağladığını ispatlamışlardır. Ancak, Beidar ve Ke [4] 2002 senesinde bu denkliğin her halka sınıfı için doğru olduğunu göstermiş ve modül kategorisine genellemiştir. Bu tezde sadece halkalar için olan denkliğin ispatı verilecektir.

Tezin dördüncü bölümünde ise literatürde halka ve modül teorisinde iyi bilinen von Neumann düzenlilik, yarıdüzenlilik ve yarıgüçlülük kavramları $[M, N]$ yapısına taşınarak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Daha detaylı değinmek gerekirse;

Eğer her $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde $b \in R$ varsa R'ye (von Neumann) düzenli halka denir. Bu tanım 1930'ların ortalarında John von Neumann tarafından operatör cebirlerin projeksiyon latislerinin cebirsel yapılarının çalışılması sırasında ortaya atılmış ve projektif geometride kullanılmıştır. Bir projektif geometri klasik anlamda bir vektör uzayın alt modüllerinin latisi veya denk olarak bir cisim üzerindeki matris halkalarının bir latisi olarak görülebilir.

Düzenli halkalar Zelmanowitz [27] tarafından modül kategorisine taşınmıştır.

Kasch ve Mader [13] halka ve modül için (von Neumann) düzenli eleman tanımını genelleştirerek modül homomorfizmalarına taşımıştır. M ve N modüller olsun. Eğer $f \in [M, N]$ için $fgf = f$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ var ise, f homomorfizmasına düzenli homomorfizma denir. Bir $f \in [M, N]$ homomorfizmasının düzenli olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}(f) \leq_d M$ ve $\text{Gör}(f) \leq_d N$ olmasıdır. Eğer $[M, N]$'deki tüm homomorfizmalar düzenli ise $[M, N]$'ye düzenli denir. $[M, N]$'nin düzenliliği 2006 senesinde Nicholson ve Zhou [20] tarafından farklı özelliklerle karakterize edilmiştir.

1950'de Brown ve McCoy [5] herhangi bir R halkasının tek maksimal düzenli ideal $M(R)$'ye sahip olduğunu göstermişlerdir. $X \subseteq [M, N]$ olmak üzere eğer X'in her elemanı düzenli ise X altkümesine düzenlidir denir. Kasch [13], Brown ve McCoy'un sonucu ve düzenli altküme tanımı ile birlikte, $[M, N]$'nin yeni bir altyapısı olan $\text{Reg}[M, N]$'yi tanımlamıştır. $E_N f E_M$, $[M, N]$'nin f tarafından üretilen E_N-E_M-altmodülü olmak üzere,

$$\text{Reg}[M, N] = \{f \in [M, N] \mid E_N f E_M \text{ düzenlidir.}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\text{Reg}[M, N]$, $[M, N]$'nin tek en geniş düzenli E_N-E_M-altmodülüdür.

Düzenli halkalar yarı düzenlidir, yani, her $a \in R$ için $(1-e)a \in J(R)$ olacak şekilde $e^2 = e \in aR$ vardır. Yarıdüzenli halkalar düzenli halkaların yanı sıra yarıtam halkaların, özel olarak da Artin ve yerel halkaların genellmesidir. U. Oberst ve H.J. Schneider [23] tarafından 1971 senesinde tanımlanmıştır.

Yarıdüzenli halkalar ise Nicholson [22] tarafından modül kategorisine taşınmıştır.

Düzenliliğin bir genellemesi olan yarıdüzenlilik Nicholson ve Zhou tarafından $[M,N]$' ye taşınmıştır. Eğer $f \in [M,N]$ için $g = gfg$ ve $f - fgf \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde $g \in [N,M]$ var ise, f yarıdüzenli (semiregular) morfizma olarak adlandırılır. Her $f \in [M,N]$ yarıdüzenli ise $[M,N]$ yarıdüzenli olarak tanımlanır. Bu tanımlardan hareketle dördüncü bölümde daha sonra, yarıdüzenli homomorfizmanın karakterizasyonu, $[M,N]$ için düzenlilik ile yarıdüzenlilik arasındaki ilişki ve $[M,N]$'nin yarıdüzenliliği ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Yarıdüzenli halkaların bir genellemesi de yarıgüçlü halkalardır. Eğer J içinde kapsanmayan her sağ (sol) ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman kapsıyor ise halkaya yarıgüçlü halka denmektedir. Yarıgüçlü halkalar yarıtam halkaların karakterizasyonunda önemli rol oynamaktadır.

$[M,N]$'nin altyapılarının çalışılmaya başlanmasıyla birlikte totalin ne zaman toplamaya kapalı olacağı sorulmuştur. Bu soru totalin, $[M,N]$'nin diğer altyapıları radikal, tekil ve eş-tekil idealler ile eşitliği incelenerek kısmen cevaplanmıştır. Total ve radikalin eşit olması durumu göz önünde tutularak, bir endomorfizma halkası için yarıgüçlülük tanımından faydalanılarak, $[M,N]$ için yarıgüçlülük Zhou [28] tarafından tanımlanmıştır. Zhou, M ve N modülleri için

- Eğer $\alpha \in [M,N] \backslash \mathrm{Rad}[M,N]$ ise $0 \neq \alpha\beta = (\alpha\beta)^2 \in E_N$ olacak şekilde $\beta \in [N,M]$ vardır.
- Eğer $\alpha \in [M,N] \backslash \mathrm{Rad}[M,N]$ ise $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta \in [N,M]$ vardır.
- Eğer $\alpha \in [M,N] \backslash \mathrm{Rad}[M,N]$ ise $\gamma\alpha\gamma = \gamma \notin \mathrm{Rad}[N,M]$ olacak şekilde $\gamma \in [N,M]$ vardır.

denk koşullardan biri sağlanır ise $[M,N]$'yi yarıgüçlü (semipotent) olarak adlandırmıştır. Bu tanımla birlikte,

$$[M,N] \text{ yarıgüçlüdür} \Leftrightarrow \mathrm{Tot}[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N]$$

denkliği kolayca görülmektedir. Dördüncü bölümde son olarak, $[M,N]$'nin yarıgüçlülüğü tanıtılmış ve yarıdüzenlilik ile yarıgüçlülük arasındaki bağlantılar ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu tezde halkalar birimli, modüller aksi belirtilmedikçe birimsel sağ modüller olacaktır.

2.1 Geniş ve Dar Altmodüller

Tanım 2.1.1 [8] A, M modülünün bir altmodülü olsun. M'nin sıfırdan farklı her altmodülü ile A'nın arakesiti sıfırdan farklı ise A'ya M'nin *geniş (essential) altmodülü* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. Ayrıca, M'ye de A'nın *geniş genişlemesi (essential extension)* denir. Sıfırdan farklı her altmodülü geniş olan modüle *düzgün (uniform)* denir.

Örnekler 2.1.2 [8]

1. $M \leq_e M$ olduğundan M'nin en az bir geniş genişlemesi vardır.

2. $0 \leq_e M$ ise $M = 0$'dır.

3. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Prüfer p–grubu düzgündür.

Tanım 2.1.3 [8] N, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin herhangi bir N' altmodülü, $N \cap N' = 0$ özelliğine göre maksimal ise, N''ye *N'nin M'deki tamlayanı (complement)* denir. Eğer N' M'nin herhangi bir altmodülünün tamlayanı ise N''ye *M'nin kapalı (closed) altmodülü* denir ve $N' \leq_c M$ ile gösterilir.

Zorn Önteoremi'nden her $N \leq M$ altmodülünün M'de bir tamlayanı vardır.

Önerme 2.1.4 [8] *$N \leq M$ olsun. N', N'nin M'deki tamlayanı ise $N \oplus N' \leq_e M$'dir.*

Önerme 2.1.5 [8] *C M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *C M'de kapalıdır.*

2. *C'nin öz geniş genişlemesi yoktur; yani $C \leq_e N \leq M$ ise $C = N$'dir.*

3. *$C \leq N \leq_e M$ ise $N/C \leq_e M/C$'dir.*

4. *D C'nin M'de tamlayanı ise C D'nin M'de tamlayanıdır.*

Yukarıdaki önermeyle birlikte geniş kapanış tanımı hatırlatılmalıdır. $K \lneqq M$ olsun. Zorn Önteorem'inden $K \leq_e C \leq M$ özelliğine göre maksimal bir C modülü vardır. K altmodülünün bu maksimal geniş genişlemesi Önerme 2.1.5 gereğince kapalıdır ve K altmodülünün M'deki *geniş kapanışı* olarak adlandırılır.

Geniş altmodülün duali olarak dar altmodül tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1.6 [1] N bir M modülünün altmodülü olsun. Eğer $L \leq M$ için $M = N + L$ iken $M = L$ ise N'ye M'nin *dar (small) altmodülü* denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Her öz altmodülü dar olan modüllere *hollow* denir.

Örnekler 2.1.7 [1]

1. 0, M'nin dar altmodülüdür.

2. $\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$'dir: $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} + L$ iken $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = L$'dir, çünkü $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$'nin üreteç kümesinden sonlu sayıda eleman çıkarıldığında kalan küme yine $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$'yi üretir.

3. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Prüfer p–grubu hollow $\mathbb{Z}$–modüldür.

4. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının 0'dan başka dar altmodülü yoktur.

Tanım 2.1.8 [1] Bir $0 \neq M$ modülünün aşikar olmayan hiçbir altmodülü yoksa M'ye *basit modül (simple module)* denir.

Tanım 2.1.9 [1] $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, M modülünün basit altmodüllerinin ailesi olsun. Eğer $M = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ yazılımı varsa M'ye *yarıbasit modül (semisimple module)* denir.

Bu tanımdan her basit modülün yarıbasit modül olduğu açıktır.

Tanım 2.1.10 [1] M modülünün *sokulu* M'nin tüm basit altmodüllerin toplamı, aynı zamanda tüm geniş altmodüllerinin arakesitidir ve $\mathrm{Soc}(M)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.11 [1] *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \leq_e M$ ise* $\mathrm{Soc}(N) = \mathrm{Soc}(M)$ 'dir.

Tanım 2.1.12 [1] Bir M sağ R–modülünün *Jacobson radikali* M'nin tüm maksimal altmodüllerinin kesişimi, aynı zamanda tüm dar altmodüllerinin toplamıdır ve $\mathrm{Rad}(M)$ ile gösterilir.

Sonuç 2.1.13 [1] *R halkasının Jacobson radikali $J(R)$ veya J ile gösterilir ve* $\mathrm{Rad}({}_RR) = J(R) = \mathrm{Rad}(R_R)$*'dir.*

Tanım 2.1.14 M bir sağ R–modül olsun. $m \in M$ için $\{r \in R \mid mr = 0\}$ kümesine m'nin *sıfırlayıcısı (annihilator)* denir ve $\mathrm{ann}_r(m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15 [17] M bir sağ R–modül olsun. Eğer $m \in M$ için $ann_r(m) \leq_e R_R$ ise m'ye *tekil (singular) eleman* denir. M'nin tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir ve M'nin *tekil altmodülü (singular submodule)* olarak adlandırılır.

Bu tanıma denk olarak, Goodearl [8] tekil altmodülü

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0 \text{ olacak şekilde } I \leq_e R_R \text{ vardır}\}$$

şeklinde ifade etmiştir.

Tanım 2.1.16 [8] $Z(M) = M$ ise M'ye *tekil (singular) modül*, $Z(M) = 0$ ise M'ye *tekil olmayan (non-singular) modül* denir. Ayrıca, R bir halka olmak üzere, $Z(R_R)$ idealine R'nin *sağ tekil ideali* denir ve Z_r ile gösterilir. Benzer şekilde $Z({}_RR)$ idealine R'nin *sol tekil ideali* denir ve Z_l ile gösterilir.

Tanım 2.1.17 [1] R bir halka olmak üzere $e^2 = e$ olacak şekildeki $e \in R$ elemanına *eşkare (idempotent) eleman* denir. Bir halkada 0 ve 1 her zaman eşkaredir.

Tanım 2.1.18 [1] $M \neq 0$ bir modül olsun. M modülünün 0 ve M'den farklı dik toplananı yok ise M'ye *ayrıştırılamaz modül (indecomposable module)* denir.

Önerme 2.1.19 [1] $0 \neq M$ *modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M ayrıştırılamaz modüldür.*

2. $\mathrm{End}(M)$ *halkasının eşkareleri sadece* 0 *ve* 1*'dir.*

Önerme 2.1.20 [21] *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R/J bölümlü halkadır.*

2. *$R\backslash J$ tersinir elemanlardan oluşur.*

3. *Her $a \in R$ için a ya da $1 - a$ tersinirdir.*

4. R tek maksimal sağ ideale sahiptir.

5. J maksimal sağ idealdir.

Tanım 2.1.21 [21] Önerme 2.1.20'deki denk koşulları sağlayan R halkasına *yerel (local) halka* denir.

Tanım 2.1.22 [1] I, R halkasının bir tek yönlü ideali olsun. $a \in R$ için $a^2 - a \in I$ iken $e - a \in I$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa *eşkareler I'ya göre yükselir (idempotents lift modulo I)* denir.

Tanım 2.1.23 [1] I, bir R halkasının (sağ) ideali olmak üzere her $x \in I$ için $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa I'ya *nil (sağ) ideal* denir. Eğer $I^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa I'ya *üstel sıfır (nilpotent) (sağ) ideal* denir.

Tanım 2.1.24 [1] I, bir R halkasının altkümesi olmak üzere I'daki herbir $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_n.a_{n-1} \ldots a_2.a_1 = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı bulunabiliyorsa , I'ya *sağ* T*–üstel sıfır (right* T*–nilpotent)* denir. Eğer I'daki herbir $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_1.a_2 \ldots a_{n-1}.a_n = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı bulunabiliyorsa , I'ya *sol* T*–üstel sıfır* denir. Bu tanımdan her üstel sıfır idealin sağ ve sol T–üstel sıfır olduğu açıktır. Ayrıca yine tanımdan her sağ veya sol T–üstel sıfır idealin bir nil ideal olduğu açıktır.

Önteorem 2.1.25 [1] *I, R'nin bir sağ ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. I sağ T*–üstel sıfırdır.*

2. Her $0 \neq M$ sağ R–modülü için $MI \neq M$'dir.

3. Her $0 \neq M$ sağ R–modülü için $MI \ll M$'dir.

4. $F = R^{\mathbb{N}}$ sayılabilir üreteçli serbest sağ R–modülü için $FI \ll F$'dir.

2.2 İnjektif Modüller ve İnjektif Zarf

Tanım 2.2.1 [1] M ve U, R–modüller olsun. Eğer her $f : K \longrightarrow U$ monomorfizması ve her $\gamma : K \to M$ R–homomorfizması için $hf = \gamma$ olacak şekilde $h : U \longrightarrow M$ R–homomorfizması varsa M'ye *U–injektif (U–injective)* denir. Eğer M her U modülü için U–injektif ise M'ye *injektif modül (injective module)* denir.

Önerme 2.2.2 [1] *İnjektif modüllerin dik çarpımları ve dik toplananları injektiftir.*

Önteorem 2.2.3 [1] (Baer Kriteri) *M sağ R-modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M injektif modüldür.*

2. *M R–injektif modüldür.*

3. *Her sağ ideal $I \leq R_R$ ve her R–homomorfizma $h : I \longrightarrow M$ için $h(a) = xa$ $(a \in I)$ olacak şekilde $x \in M$ vardır.*

Tanım 2.2.4 [1] M bir sağ R–modül olsun. Eğer her $m \in M$ ve sıfır bölen olmayan her $r \in R$ için $m = m'r$ koşulunu sağlayan bir $m' \in M$ elemanı varsa M'ye *bölünebilir modül (divisible module)* denir. Diğer bir deyişle;

M bölünebilirdir $\Longleftrightarrow$ sıfır bölen olmayan her $r \in R$ elemanı için $M = Mr$'dir.

Önerme 2.2.5 [25] *Her injektif modül bölünebilirdir.*

Önerme 2.2.6 [1] *Her sağ R–modül, bir injektif sağ R–modül içine gömülebilir.*

Sonuç 2.2.7 [1] *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R yarıbasit halkadır.*

2. *Her sağ R–modül injektifir.*

Tanım 2.2.8 [1] M bir modül olsun. Eğer E injektif modülü ve $g : M \longrightarrow E$ monomorfizması $\text{Gör}(g) \leq_e E$ olacak şekilde bulunabilirse, (E, g) ikilisine (ya da g monomorfizmasına)M'nin *injektif zarfı* denir ve $\mathrm{E}(M)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.9 [1] *Her modül bir injektif zarfa sahiptir. Bu injektif zarf izomorfizma farkıyla tektir.*

Önerme 2.2.10 [1] *M modülü için aşağıdakiler sağlanır.*

1. *M injektiftir ancak ve ancak $M = \mathrm{E}(M)$'dir.*

2. *$M \leq_e N$ ise $\mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(N)$'dir.*

3. *Q injektif ve $M \leq_e Q$ ise $Q = \mathrm{E}(M) \oplus Q'$'dir.*

Önerme 2.2.11 [1] *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *İnjektif sağ R–modüllerin keyfi dik toplamı injektiftir.*

2. *$\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sağ R–modüllerin bir ailesi olmak üzere $\mathrm{E}(\oplus_{\alpha\in A}M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A}\mathrm{E}(M_\alpha)$'dir.*

3. *R sağ Noether halkadır.*

Önerme 2.2.12 [1] *M_R injektif modül ve $S = \mathrm{End}(M_R)$ M modülünün endomorfizma halkası olsun. Bu durumda $f \in S$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *$f \in J(S)$'dir.*

2. *Çek$(f) \leq_e M$'dir.*

2.3 Projektif Modüller ve Projektif Örtü

Tanım 2.3.1 [1] M ve U R–modüller olsun. Eğer her $f : M \to N$ R–homomorfizması ve her $\gamma : U \to N$ epimorfizması için $\gamma h = f$ olacak şekilde $h : M \to U$ R–homomorfizması varsa M'ye *U–projektif (U–projective)* denir. Eğer M her U modülü için U–projektif ise M'ye *projektif (projective)* denir. M modülü, M–projektif ise M'ye *yarı-projektif (quasi-projective)* denir.

Teorem 2.3.2 [1] *$\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$'nın U–projektif olması için gerek ve yeter koşul, her $\alpha \in \Lambda$ için M_α'nın U–projektif olmasıdır.*

Sonuç 2.3.3 [1] *$\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ projektiftir ancak ve ancak her $\alpha \in \Lambda$ için M_α projektiftir.*

Önerme 2.3.4 [1] *Projektif modülün dik toplananı da projektiftir.*

Tanım 2.3.5 [15] Bir F R–modülü için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) F bir tabana sahiptir.

(ii) $F = \oplus_{i\in I}A_i$ ve $\forall i \in I$ için $A_i \cong R_R$

Bu koşullardan birini sağlayan F modülüne *serbest modül (free module)* denir.

Teorem 2.3.6 [15] *Her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsüdür. Ayrıca her sonlu üretilmiş modül, sonlu tabanlı bir serbest modülün epimorfik görüntüsüdür.*

Önerme 2.3.7 [1] *R bir halka olsun.* R_R *projektiftir.*

Sonuç 2.3.8 [1] *Her serbest modül projektiftir.*

Tanım 2.3.9 [1] M sağ R–modül, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ M'de ve $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ $\mathrm{Hom}_R(M,R)$'de olmak üzere, eğer her $x \in M$ için

(i) hemen hemen her $\alpha \in I$ için $f_\alpha(x) = 0$, ve

(ii) $x = \sum\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(x)x_\alpha$

koşulları sağlanıyorsa $((x_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ çiftine M'nin *dual tabanı (dual basis)* denir.

Önteorem 2.3.10 [1] (Dual Taban Önteoremi)

M projektif sağ R–modüldür ancak ve ancak M dual tabana sahiptir.

Tanım 2.3.11 [1] M sağ R–modül olsun. Eğer P projektif sağ R–modül, $f : P \to M$ epimorfizma ve $Çek f \ll P$ ise (P,f) çiftine veya f'ye M'nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir.

M projektif modül ise projektif örtüsü kendisidir. Her modülün projektif örtüsünün olması gerekmez. Örneğin $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$–modülü projektif örtüye sahip değildir.

Önteorem 2.3.12 [1] *M modülü $f : P \to M$ projektif örtüsüne sahip olsun. Eğer Q projektif ve $g : Q \to M$ epimorfizma ise o zaman aşağıdaki özellikleri sağlayan $Q = P' \oplus P''$ ayrışımı vardır.*

i) $P' \cong P$

ii) $P'' \leq Çek g$

iii) $g|_{P'} : P' \to M$ *M'nin projektif örtüsüdür.*

Ayrıca eğer $k : M_1 \to M_2$ izomorfizma ve $p_1 : P_1 \to M_1$, $p_2 : P_2 \to M_2$ projektif örtüler ise $p_2\overline{k} = kp_1$ olacak şekilde $\overline{k} : P_1 \to P_2$ homomorfizması vardır.

Teorem 2.3.13 [15] *P_R projektif bir modül ve $S := \mathrm{End}(P_R)$ olsun. Bu takdirde, $\alpha \in S$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *$\alpha S \ll S_S$'dir.*

2. *$\alpha \in J(S)$'dir.*

3. *$Gör(\alpha) \ll P_R$'dir.*

2.4 Sürekli ve Ayrık Modüller

M bir R–modül olsun. (C_1), (C_2) ve (C_3) koşulları aşağıdaki gibi tanımlanır.

(C_1) M'nin her altmodülü M'nin bir dik toplananında geniştir.

(C_2) M'nin dik toplananına izomorf olan altmodül de dik toplanandır.

(C_3) $M_1 \leq_d M$, $M_2 \leq_d M$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ iken $M_1 \oplus M_2 \leq_d M$'dir.

Tanım 2.4.1 [19] Eğer bir M modülü (C_1) ve (C_2) koşullarını sağlarsa *sürekli (continuous) modül*, (C_1) ve (C_3) koşullarını sağlarsa *yarı-sürekli (quasi-continuous) modül* ve (C_1) koşulunu sağlarsa *CS-modül (extending modül)* olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.2 [19] M modülü M–injektif ise süreklidir.

Önteorem 2.4.3 [19] *M modülü (C_2) koşulunu sağlasın. O zaman M (C_3)'ü sağlar.*

Yukarıdaki koşullara dual olarak (D_1), (D_2) ve (D_3) koşulları aşağıdaki gibi tanımlanır.

(D_1) M'nin her A altmodülü için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ koşullarını sağlayan $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır.

(D_2) $A \leq M$ ve M/A M'nin bir dik toplananına izomorf olduğunda A da M'de dik toplanandır.

(D_3) $M_1 \leq_d M$, $M_2 \leq_d M$ ve $M_1 + M_2 = M$ iken $M_1 \cap M_2 \leq_d M$'dir.

Tanım 2.4.4 [19] Eğer bir M modülü (D_1) ve (D_2) koşullarını sağlarsa *ayrık (discrete) modül*, (D_1) ve (D_3) koşullarını sağlarsa *yarı-ayrık (quasi-discrete) modül* ve (D_1) koşulunu sağlarsa *lifting modül* olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.5 [19] M modülü M–projektif ise (D_2) koşulunu sağlar.

Önteorem 2.4.6 [19] *M modülü (D_2) koşulunu sağlasın. O zaman M (D_3)'ü sağlar.*

2.5 Yarıdüzenli Halka ve Modüller

Bu bölümdeki bilgiler Nicholson ve Yousif'in Quasi–Frobenius Rings [21] adlı kitabından alınmıştır.

Önteorem 2.5.1 *R bir halka olsun. $a \in R$ için aşağıdakiler denktir.*

1) $aba = a$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

2) $R = aR \oplus T$ olacak şekilde $T \subseteq R$ sağ ideali vardır.

3) $R = Ra \oplus L$ olacak şekilde $L \subseteq R$ sol ideali vardır.

4) Her sonlu üretilmiş sağ (sol) ideal dik toplanandır.

Tanım 2.5.2 Önteorem 2.5.1'deki denk koşulları sağlayan $a \in R$ elemanına *düzenli (regular) eleman* denir. Bir R halkasının bütün elemanları düzenli ise R'ye *(von Neumann) düzenli halka (regular ring)* denir.

Önteorem 2.5.3 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1) Her $a \in R$ için R/aR projektif örtüye sahiptir.

2) Her $a \in R$ için R/Ra projektif örtüye sahiptir.

3) Her $a \in R$ için $(1 - e)a \in J$ olacak şekilde $e^2 = e \in aR$ vardır.

4) Her $a \in R$ için $a(1 - e) \in J$ olacak şekilde $e^2 = e \in Ra$ vardır.

5) Her $a \in R$ için $a - b \in J$ olacak şekilde $b \in R$ düzenli elemanı vardır.

6) R/J düzenli ve eşkareler J'ye göre yükselir.

7) Her sonlu üretilmiş $T \subseteq R$ sağ (sol) ideali için R/T projektif örtüye sahiptir.

Tanım 2.5.4 Önteorem 2.5.3'teki denk koşulları sağlayan bir R halkasına *yarıdüzenli halka (semiregular ring)* denir. Önteorem 2.5.3'teki (3) veya (4) koşulunu sağlayan bir a elemanına da *yarıdüzenli eleman* denir.

Teorem 2.5.5 (Utumi) *R halkası sağ sürekli ise yarıdüzenli, $Z_r = J$ ve R/J sağ süreklidir.*

Örnekler 2.5.6 1) Düzenli halkalar (özel olarak yarıbasit halkalar) yarıdüzenlidir.

2) Utumi'nin teoreminden sürekli halkalar (özel olarak yarı-injektif halkalar) yarıdüzenlidir.

Önteorem 2.5.7 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1) J içinde kapsanmayan her sağ ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman kapsar.

2) J içinde kapsanmayan her sol ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman kapsar.

Tanım 2.5.8 Önteorem 2.5.7'deki denk koşulları sağlayan R halkasına *yarıgüçlü (semipotent) halka* denir.

Sonuç 2.5.9 *R halkası yarıdüzenli ise yarıgüçlü halkadır.*

Tanım 2.5.10 M bir R–modül ve $q \in M$ olsun. Eger $q\lambda(q) = q$ olacak şekilde $\lambda \in M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ var ise $q \in M$ elemanına *düzenli eleman* denir. Her elemanı düzenli olan M modülüne de *düzenli modül* denir.

Önteorem 2.5.11 *M bir sağ R–modül olsun. $m \in M$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *$P \subseteq mR$ projektif ve $mR \cap K \ll K$ olmak üzere $M = P \oplus K$'dır.*
2. *$\lambda(m) = e = e^2$ ve $m - me \in \mathrm{Rad}(M)$ olacak şekilde $\lambda \in M^*$ vardır.*
3. *$m - q \in \mathrm{Rad}(M)$ olacak şekilde $q \in M$ düzenli elemanı vardır.*
4. *$\gamma(M) \subseteq mR$, $\gamma(M)$ projektif ve $m - \gamma(m) \in \mathrm{Rad}(M)$ olacak şekilde $\gamma \in \mathrm{End}(M)$ vardır.*

Tanım 2.5.12 Önteorem 2.5.11'deki denk koşulları sağlayan $m \in M$ elemanına *yarıdüzenli eleman* denir. Bir M modülünün bütün elemanları yarıdüzenli ise M'ye *yarıdüzenli modül (semiregular module)* denir.

Sonuç 2.5.13 *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M modülü düzenlidir.*
2. *M yarıdüzenlidir ve $\mathrm{Rad}(M) = 0$'dır.*

Sonuç 2.5.14 *$m \in M_R$ olsun. Eğer $m_1 \in M$ yarıdüzenli olmak üzere $m - m_1 \in \mathrm{Rad}(M)$ ise m yarıdüzenlidir.*

Teorem 2.5.15 *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M yarıdüzenlidir.*
2. *Her sonlu üretilmiş $N \subseteq M$ altmodülü için $\gamma^2 = \gamma$, $\gamma(M)$ projektif ve $(1-\gamma)(N) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olacak şekilde $\gamma : M \to N$ dönüşümü vardır.*

3. *Her sonlu üretilmiş $N \subseteq M$ altmodülü için P projektif, $P \subseteq N$ ve $N \cap K \ll K$ olacak şekilde $M = P \oplus K$ ayrışımı vardır.*

Teorem 2.5.16 *$M = \oplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1. *M yarıdüzenlidir.*

2. *Her $i \in I$ için M_i yarıdüzenlidir.*

2.6 Yarıtam Halka ve Modüller

Bu bölümdeki bilgiler Nicholson ve Yousif'in Quasi–Frobenius Rings [21] adlı kitabından alınmıştır.

R bir halka ve e ve f eşkareler olsun. "$e \leq f$'dir ancak ve ancak $eRe \subseteq fRf$'dir" bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.6.1 Yukarıda tanımlanan kısmi sıralama bağıntısına göre (varsa) sıfırdan farklı minimal elemana *ilkel eşkare (primitive idempotent)* denir.

Önteorem 2.6.2 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R dik eşkarelerin sonsuz kümelerini kapsamaz.*

2. *R'nin dik toplanan sağ (sol) idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağlanır.*

3. *R'nin dik toplanan sağ (sol) idealleri üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

4. *R'nin eşkareleri üzerinde artan zincir koşulu sağlanır.*

5. *R'nin eşkareleri üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

Tanım 2.6.3 Önteorem 2.6.2'deki denk koşulları sağlayan R halkasına I–*sonlu (*I–*finite)* denir.

Örnek 2.6.4 *Her sağ (sol) Noether halka, özel olarak her sağ (sol) Artin halka* I–*sonludur.*

Tanım 2.6.5 M bir modül, S ve K M'nin altmodülleri olsun. $M = K + S$ ve S bu özelliğe göre minimal ise S'ye K'nın M'deki *tümleyeni (supplement)* denir.

Teorem 2.6.6 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R/J yarıbasit ve eşkareler J'ye göre yükselir.*
2. *R/J yarıbasit ve R yarıgüçlü halkadır.*
3. *R I–sonlu ve yarıgüçlü halkadır.*
4. *R I–sonlu ve R'de ilkel eşkareler yereldir.*
5. *$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m$ olacak şekilde e_i yerel dik eşkareler vardır.*
6. *Her sonlu üretilmiş sağ (sol) R–modül projektif örtüye sahiptir.*
7. *Her devirli sağ (sol) R–modül projektif örtüye sahiptir.*
8. *Her basit sağ (sol) R–modül projektif örtüye sahiptir.*
9. *R'nin her sağ (sol) ideali R'de tümleyene sahiptir.*
10. *R'nin her maksimal sağ (sol) ideali R'de tümleyene sahiptir.*

Tanım 2.6.7 Teorem 2.6.6'daki denk koşulları sağlayan R halkasına *yarıtam halka (semiperfect ring)* denir.

Sonuç 2.6.8 *R yarıtam halka olsun. O zaman*

1. *Her $e^2 = e \in R$ için eRe yarıtamdır.*
2. *R'nin A ideali için R/A yarıtamdır.*

Örnekler 2.6.9 1. Yerel halkalar yarıtamdır.

2. R/J yarıbasit ve J üstel sıfır (nilpotent) olan R halkasına *yarıasıl (semiprimary) halka* denir. Yarıasıl halkalar yarıtamdır.

   Artin halkalar ve $\begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ halkası yarıasıl olduğundan yarıtam halkalardır.

3. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası Artin halka olduğundan yarıtamdır.

Uyarı 2.6.10 Yarıtam halkalar yarıdüzenlidir. Fakat, yarıdüzenli olduğu halde yarıtam olmayan halkalar vardır. Örneğin, $F_i = F$ cisim olmak üzere, $R = \prod_{i \in I} F_i$ halkasını göz önüne alalım. R düzenli bir halkadır ve $J = 0$'dır. $Soc(R) = \oplus_{i \in I} F_i$ olduğundan R ve dolayısıyla R/J yarıbasit değildir.

Tanım 2.6.11 R bir halka ve M bir sağ R–modül olsun. M projektif ve M'nin her epimorfik görüntüsü projektif örtüye sahipse M'ye *yarıtam modül (semiperfect module)* denir. Özel olarak, R_R (denk olarak ${}_RR$) yarıtam modül ise R yarıtam halkadır.

Tanım 2.6.12 M bir modül olmak üzere M modülünün her sıfırdan farklı faktör modülü sıfırdan farklı sokula sahip ise M modülüne *yarıartin modül (semiartinian module)* denir. Eğer R_R yarıartin modül ise R halkasına *sağ yarıartin halka (*right *semiartinian ring)* denir.

Bass [2] makalesinde eğer R yarıtam halka ve J sağ T–üstel sıfır ise R halkasını *sağ tam halka (right perfect ring)* olarak adlandırmıştır. Şimdi sağ tam halkaların önemli karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 2.6.13 *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R sağ tam halkadır.*
2. *R/J yarıbasit ve J sağ T–üstel sıfırdır.*
3. *R I–sonlu ve sol yarıartindir.*
4. *R/J yarıbasit ve her sıfırdan farklı sağ R–modül maksimal altmodüle sahiptir.*
5. *Her sağ R–modül projektif örtüye sahiptir.*
6. *Her yarıbasit sağ R–modül projektif örtüye sahiptir.*
7. *R'nin temel sol idealleri üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*
8. *R'nin sonlu üretilmiş sol idealleri üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

2.7 Noether Halka ve Modüller

Tanımlar 2.7.1 [15] Bir M modülünün altmodüllerinin her boştan farklı kümesi bir maksimal (minimal) elemana sahipse M modülüne *Noether (Artin) modül* denir. R bir halka olsun. R_R Noether (Artin) modül ise R'ye *sağ Noether (Artin) halka* denir. Sol Noether (Artin) halka benzer şekilde tanımlanır. Hem sağ hem de sol Artin (Noether) olan R halkasına *Artin (Noether) halka* denir.

Tanım 2.7.2 [1] M bir modül olsun. M'nin $\cap_{i\in I} M_i = 0$ olan her $\{M_i\}_{i\in I}$ altmodüller ailesi için $\cap_{i\in I_0} M_i = 0$ olacak şekilde I'nın bir I_0 sonlu altkümesi varsa M'ye *sonlu eş-üretilmiş modül (finitely co-generated module) denir.*

Teorem 2.7.3 [15] *M bir modül ve $A \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M Noether'dir.*
2. *A ve M/A Noether'dir.*
3. *M'nin altmodüllerinin her artan dizisi $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ durur.*
4. *M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.*

Teorem 2.7.4 [15] *M bir modül ve $A \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M Artin'dir.*
2. *A ve M/A Artin'dir.*
3. *M'nin altmodüllerinin her azalan dizisi $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ durur.*
4. *M'nin her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiştir.*

Sonuç 2.7.5 [1] *M sıfırdan farklı bir modül olsun.*

1. *Eğer M Noether modül ise M maksimal altmodüle sahiptir ve* $\mathrm{Rad}(M) \ll M$*'dir.*
2. *Eğer M Artin modül ise M basit altmodüle sahiptir ve* $\mathrm{Soc}(M) \leq_e M$*'dir.*

Teorem 2.7.6 [1] *Yarıbasit bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M Artin'dir.*

2. M Noether'dir.

3. M sonlu üretilmiştir.

4. M sonlu eş-üretilmiştir.

Teorem 2.7.7 [1] (Noether Teoremi) *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. R sağ Noether halkadır.

2. İnjektif sağ R–modüllerin keyfi dik toplamı injektiftir.

3. R sonlu üretilmiş sağ idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.

4. Basit sağ R–modüllerin injektif zarflarının her sayılabilir dik toplamı injektiftir.

2.8 Geniş Kısıtlanmış ve Dar Kısıtlanmış Modüller

Kasch, Hom(M, N)'nin önemli altyapılarından 3. Bölümde incelenecek Tot$[M, N]$'nin özelliklerinin M veya N modülü üzerindeki hangi koşullara bağlı olarak değiştiği sorusuna cevap aramıştır. Bu bağlamda, ilk olarak geniş kısıtlanmış (large restricted) ve dar kısıtlanmış (small restricted) modülleri tanımlamıştır. Bu bölümde bu modüller tanıtılacaktır.

Tanımlar 2.8.1 [11, s.39, Tanım 1.1] M, N sağ R–modüller olsun.

1. Eğer Gör$(f) \leq_e M$ olan her $f : M \to M$ monomorfizması bir otomorfizma ise M modülüne *geniş kısıtlanmış modül (large restricted module)* denir.

2. Eğer Çek$(f) \ll N$ olan her $f : N \to N$ epimorfizması bir otomorfizma ise N modülüne *dar kısıtlanmış modül (small restricted module)* denir.

Hopfian ve eş-Hopfian (co-Hopfian) gruplar, halkalar ve modüller 1960'lardan bu yana birçok yazar tarafından çalışılmıştır. M bir modül olmak üzere M'nin her birebir (örten) endomorfizması bir izomorfizma ise M modülüne eş-Hopfian (Hopfian) modül denilmektedir. Bu modülleri örneklemek gerekirse Artin modüller co-Hopfian ve Noether modüller Hopfian'dır. 2004 senesinde Wang bu modüllerin genelleştirmelerini yaparak *genelleştirilmiş eş-Hopfian* ve *zayıf Hopfian* modülleri tanımlamıştır. Genelleştirilmiş eş-Hopfian modüller Kasch'ın tanımladığı geniş kısıtlanmış modüllerle ve zayıf Hopfian modüller dar kısıtlanmış modüller ile çakışmaktadır.

Örnekler 2.8.2 M, N sağ R–modüller olsun.

1. Eğer M injektif bir modül ise M geniş kısıtlanmış modüldür.
2. Eğer N projektif bir modül ise N dar kısıtlanmış modüldür.
3. Yarıbasit modüller geniş kısıtlanmıştır.
4. V, bir F cismi üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı olsun. V dar kısıtlanmış modüldür.

Önerme 2.8.3 [26, Önerme 2.2, 3.3] *Geniş kısıtlanmış (dar kısıtlanmış) modüllerin dik toplananları da geniş kısıtlanmış (dar kısıtlanmış)tır.*

Teorem 2.8.4 [26, Teorem 2.4] *M modülü geniş altmodülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlasın. Bu durumda, M geniş kısıtlanmış modüldür.*

Teorem 2.8.5 [26, Teorem 2.4] *M modülü dar altmodülleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlasın. Bu durumda, M dar kısıtlanmış modüldür.*

Önteorem 2.8.6 [26, Önteorem 2.5] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *Yarı-sürekli M modülü süreklidir.*
2. *M geniş kısıtlanmış modüldür.*

Önteorem 2.8.7 [26, Önteorem 3.6] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *Yarı-ayrık M modülü ayrıktır.*
2. *M dar kısıtlanmış modüldür.*

3 $\mathbf{Hom}_R(M,N)$'nin ALTYAPILARI

M ve N sağ R–modüller olsun. $E_N := \mathrm{End}_R(N)$, $E_M := \mathrm{End}_R(M)$ olmak üzere $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ bir E_N–E_M–bimodüldür. Bu bölümde $\mathrm{Hom}_R(M,N)$'nin altyapıları tanımlanacak ve bu altyapıların sahip olduğu özellikler belirtilecektir. Bu altyapıları daha iyi anlayabilmek için ilk olarak Mod–R'de yarı-ideal ve ideal tanımları hatırlatılacaktır. Ω R–modül homomorfizmalarının bir sınıfı olmak üzere $\Omega(M,N) = \Omega \cap \mathrm{Hom}_R(M,N)$ olsun. Eğer keyfi $A,B,C,D \in$ Mod–R için $\Omega(B,C) \neq \emptyset$ ve $\mathrm{Hom}_R(C,D)\ \Omega(B,C)\ \mathrm{Hom}_R(A,B) \subseteq \Omega(A,D)$ ise Ω sınıfına Mod–R'de bir *yarı-ideal* denir. Eğer Ω sınıfı Mod–R'de bir yarı-ideal ve keyfi $M,N \in$ Mod–R için $\Omega(M,N)$, $Hom_R(M,N)$ grubunun bir altgrubu ise Ω sınıfına Mod–R'de bir *ideal* denir.
Bu bölüm ve sonraki bölümlerde $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ için $[M,N]$ gösterimi kullanılacaktır.

3.1 Kısmi Tersinir Homomorfizmalar ve Total

Önteorem 3.1.1 [3] *$f \in [M,N]$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *$e := gf = e^2 \neq 0$ olacak şekilde $g \in [N,M]$ vardır.*
2. *$d := fh = d^2 \neq 0$ olacak şekilde $h \in [N,M]$ vardır.*
3. *$kfk = k \neq 0$ olacak şekilde $k \in [N,M]$ vardır.*
4. *$f|_A : A \to B$ izomorfizma olacak şekilde $0 \neq A \leq_d M$, $B \leq_d N$ altmodülleri vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $e := gf = e^2 \neq 0$ olsun. O zaman, e bir eşkare eleman olduğundan $e = egf$ elde edilir. $d = feg$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $e = egf$ olduğundan $(feg)(feg) = f(egf)eg = fe^2g = feg$, yani $d^2 = d$ elde edilir. Ek olarak $gdf = gfegf = e^3 = e \neq 0$ olduğundan $d \neq 0$'dır. $h = eg$ alınırsa (2) elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $d := fh = d^2 \neq 0$ olsun. O zaman, d bir eşkare eleman olduğundan $d = dfh$ elde edilir. $e = hdf$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $d = dfh$ olduğundan $(hdf)(hdf) = h(dfh)df = hd^2f = hdf$, yani $e^2 = e$ elde edilir. Ek olarak $feh = fhdfh = d^3 = d \neq 0$ olduğundan $e \neq 0$'dır. $g = hd$ alınırsa (1) elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $kfk = k \neq 0$ olsun. O zaman, $(kf)(kf) = kf$ ve $kf \neq 0$'dır. $e := kf$ alınırsa istenen elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (4) $0 \neq e^2 = e = gf$ ve $d = feg$ olsun. O zaman, $fe = fegf = df$ elde edilir. Şimdi, $A := e(M)$ ve $B := d(N)$ için

$$\varphi : e(M) \ni e(m) \mapsto fe(m) \in d(N)$$

homomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu gösterilecektir:

• φ iyi tanımlıdır: $e(m_1) = e(m_2)$ olsun. f iyi tanımlı olduğundan $fe(m_1) = fe(m_2)$ ve dolayısıyla $\varphi e(m_1) = \varphi e(m_2)$'dir. Ayrıca, $e(m) \in e(M)$ için $\varphi(e(m)) = fe(m) = df(m) \in d(N)$ elde edilir.

• φ homomorfizmadır: e ve f R–modül homomorfizması olduğundan φ bir homomorfizmadır.

• φ birebirdir: $\varphi(e(m)) = fe(m) = 0$ olsun. O zaman $0 = gfe(m) = e^2(m) = e(m)$ elde edilir.

• φ örtendir: $n \in N$ ve $g(n) \in M$ için $\varphi(e(g(n))) = fe(g(n)) = d(n) \in \varphi(e(M))$ olduğundan istenen elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (2) $0 \neq A \leq_d M, B \leq_d N$ ve $\varphi = f|_A : A \to B$ bir izomorfizma olsun. İspat için bazı gösterimlere ihtiyaç vardır, ilk olarak

$$M = A \oplus A', \qquad N = B \oplus N'$$

$\imath_A : A \to M, \imath_B : B \to N$ içerim dönüşümleri ve $\pi_B : N \to B$ izdüşüm dönüşümü olsun. Buradan, $\varphi = \pi_B f \imath_A$'dır. $h := \imath_A \varphi^{-1} \pi_B$ şeklinde tanımlansın. Böylece,

$$\begin{aligned} (fh)^2 &= f\imath_A\varphi^{-1}\pi_B f\imath_A\varphi^{-1}\pi_B = f\imath_A\varphi^{-1}(\pi_B f\imath_A)\varphi^{-1}\pi_B \\ &= f\imath_A\varphi^{-1}\varphi\varphi^{-1}\pi_B = f\imath_A\varphi^{-1}\pi_B = fh \end{aligned}$$

olup $d := fh$ bir eşkaredir. d'nin tanımından

$$\pi_B d = \pi_B fh = \pi_B f\imath_A\varphi^{-1}\pi_B = (\pi_B f\imath_A)\varphi^{-1}\pi_B = \varphi\varphi^{-1}\pi_B = \pi_B$$

elde edilir. Ayrıca $A \neq 0$ olduğundan $B \neq 0$'dır ve böylece $\pi_B \neq 0$ olur. Buradan, $d \neq 0$ elde edilir. Bu ise (2)'yi ispatlar. □

Tanımlar 3.1.2 [3] Önteorem 3.1.1'deki denk koşulların sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda,

1. f *kısmi tersinir homomorfizma (partially invertible homomorphism)* olarak adlandırılır.

2. g'ye f'nin *sol kısmi tersi* ve f'ye g'nin *sağ kısmi tersi* denir.

Tanım 3.1.3 [3] M ve N sağ R–modüller olsun. Bu durumda, $[M, N]$'nin *totali*

$$\text{Tot}[M, N] = \{f \in [M, N] \mid f \text{ kısmi tersinir değildir.}\}$$

kümesidir. Bu tanıma denk olarak,

$$\begin{aligned} \text{Tot}[M, N] &= \{f \in [M, N] \mid f[N, M] \text{ sıfırdan farklı eşkare kapsamaz.}\} \\ &= \{f \in [M, N] \mid [N, M]f \text{ sıfırdan farklı eşkare kapsamaz.}\} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Total tanımı göz önüne alındığında, keyfi $M, N \in \text{Mod}–R$ için $0 \in \text{Tot}[M, N]$'dir. Dolayısıyla, $\text{Tot}[M, N] \neq \emptyset$'dir.

Tanım 3.1.4 [13] Eğer $f \in [M, N]$ için $fgf = f$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ var ise, f homomorfizmasına *düzenli homomorfizma* denir.

Önteorem 3.1.5 [13] *$f \in [M, N]$ olsun.*

1. $0 \neq f$ düzenli ise, f kısmi tersinirdir.

2. $g \in [N, M]$, f kısmi tersinir ve $gf = e = e^2 \neq 0$ ise, fe ve eg sıfırdan farklı düzenli homomorfizmalardır.

İspat: (1) $0 \neq f$ düzenli ve bir $g \in [N, M]$ için $fgf = f$ olsun. Bu durumda, $f(gfg) = (fgf)g = fg$ ve $(fg)(fg) = (fgf)g = fg \neq 0$ olup, f kısmi tersinirdir.

(2) $gf = e = e^2 \neq 0$ olduğundan $e = egfe$'dir. Böylece, $(fe)g(fe) = f(egfe) = fe$ ve $(eg)f(eg) = (egfe)g = eg$ elde edilir. □

$R \cong \text{End}_R(R)$ olduğundan kısmi tersinir homomorfizma ve total kavramları, R halkasının her $r \in R$ elemanına

$$\alpha_r : R_R \to R_R,\ \alpha_r(x) = rx$$

endomorfizması karşılık getirilerek, R halkası için verilebilir. Dolayısıyla, Önteorem 3.1.1 bir R halkası için aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

Önteorem 3.1.6 [11] *R bir halka olsun. $r \in R$ için aşağıdakiler denktir.*

1. $e := sr = e^2 \neq 0$ *olacak şekilde* $s \in R$ *vardır.*

2. $d := rt = d^2 \neq 0$ *olacak şekilde* $t \in R$ *vardır.*

3. $uru = u \neq 0$ *olacak şekilde* $u \in R$ *vardır.*

4. $\varphi : A \to B$, $\varphi(a) = ra$ *dönüşümünü izomorfizma yapan* $0 \neq A \subseteq_d R_R, B \subseteq_d R_R$ *sağ idealleri vardır.*

Tanımlar 3.1.7 [11] Önteorem 3.1.6'daki denk koşulların sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda,

1. $r \in R$ elemanı *kısmi tersinir (partially invertible)* olarak adlandırılır.

2. s'ye r'nin *sol kısmi tersi* ve r'ye s'nin *sağ kısmi tersi* denir.

Tanım 3.1.8 [11] R halka olmak üzere, R halkasının *totali*

$$\mathrm{Tot}(R) = \{r \in R \mid r \text{ kısmi tersinir değildir. }\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önteorem 3.1.9 [11] M ayrıştırılamaz (indecomposable) modül ise $\mathrm{Tot}(\mathrm{End}(M)) = \mathrm{End}(M)\backslash \mathrm{Oto}(M)$'dir.

İspat: M ayrıştırılamaz modül olduğundan $\mathrm{End}(M)$ halkasının eşkare elemanları sadece 0 ve 1'dir. Eğer $f \in \mathrm{End}(M)$ kısmi tersinir ise sıfırdan farklı tek eşkare 1 olduğundan $gf = 1$ ve $fh = 1$ olacak şekilde $g, h \in \mathrm{End}(M)$ vardır. Buradan, f otomorfizmadır. Dolayısıyla, $\mathrm{End}(M) \setminus \mathrm{Oto}(M) \subseteq \mathrm{Tot}(\mathrm{End}(M))$ sağlanır. Şimdi ters kapsama için, f otomorfizma olsun. $gf = 1$ olacak şekilde $g \in \mathrm{End}(M)$ olduğundan f kısmi tersinir olur. Dolayısıyla, $\mathrm{Tot}(\mathrm{End}(M)) \subseteq \mathrm{End}(M)\backslash Oto(M)$ elde edilir. □

Böylece, R sağ R–modül olarak ayrıştırılamaz (indecomposable) olan bir halka ve $U(R) = \{r \in R \mid r \text{ tersinir }\}$ olmak üzere, $\mathrm{Tot}(R) = R\backslash U(R)$'dir. Özel olarak, R yerel halka ise $\mathrm{Tot}(R) = R\backslash U(R) = J(R)$'dir.

Sonuç 3.1.10 [11] *Eğer R düzenli halka ise,* $\mathrm{Tot}(R) = 0$*'dır.*

İspat: Önteorem 3.1.5(1) gereğince açıktır. □

Aşağıdaki örnek Sonuç 3.1.10'nın karşıtının her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.11 [11] $\mathrm{Tot}(R) = 0$ olacak şekilde düzenli olmayan R halkası vardır.

İspat: $R = \{(q_i) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid$ her $i \geq n$ için $q_i \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\}$ şeklinde tanımlansın. R, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ halkasının bir althalkasıdır. Ayrıca, her $i \in \mathbb{N}$ için $q_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, (q_i) elemanları R halkasının eşkare elemanlarıdır. Eşkare elemanlar göz önüne alındığında R'nin sıfırdan farklı her elemanı kısmi tersinir olur. O zaman, $\mathrm{Tot}(R) = 0$ elde edilir. Fakat, $(2, 2, 2, \ldots) \in R$ düzenli olmadığından R düzenli değildir. $\square$

Önteorem 3.1.12 [11] M ve N izomorf olmayan ayrıştırılamaz R–modüller olsun. Bu durumda, $\mathrm{Tot}[M, N] = [M, N]$'dir.

İspat: $\mathrm{Tot}[M, N] \subseteq [M, N]$ olduğu açıktır. Kabulden M'nin sıfırdan farklı tek dik toplananı M ve N'nin sıfırdan farklı tek dik toplananı N'dir. Dolayısıyla, $f \in [M, N]$ kısmi tersinir ise Önteorem 3.1.1(4)'ten $f : M \to N$'ye bir izomorfizma olur ki bu bir çelişkidir. O zaman, $f \in [M, N]$ kısmi tersinir değildir. Böylece, $[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ elde edilir. Sonuç olarak, $\mathrm{Tot}[M, N] = [M, N]$'dir. $\square$

Örnek 3.1.13 $\mathbb{Z}$ ve Prüfer p–grup $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ izomorf olmayan, ayrıştırılamaz $\mathbb{Z}$–modüller olduğundan $\mathrm{Tot}[\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^\infty}] = [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^\infty}] \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$'dur.

Önerme 3.1.14 [11] $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ halka dik çarpımı olsun. O zaman, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathrm{Tot}(R)$ olması için gerek ve yeter koşul, her $i = 1, \ldots, n$ için $r_i \in \mathrm{Tot}(R_i)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathrm{Tot}(R)$ ve en az bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $r_i \notin \mathrm{Tot}(R_i)$ olsun. Bu durumda, $0 \neq e_i = r_i s_i$ olacak şekilde $s_i \in R_i$ vardır. Şimdi, $s = (0, \ldots, s_i, \ldots, 0) \in R$ şeklinde tanımlanırsa $0 \neq rs = (0, \ldots, e_i, \ldots, 0) = e = e^2$ olur. Bu ise $r \in \mathrm{Tot}(R)$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, her $i = 1, \ldots, n$ için $r_i \in \mathrm{Tot}(R_i)$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ Her $i = 1, \ldots, n$ için $r_i \in \mathrm{Tot}(R_i)$ ve $r = (r_1, \ldots, r_n) \notin \mathrm{Tot}(R)$ olsun. Bu durumda, $0 \neq rs = e = e^2$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Buradan, her $i = 1, \ldots, n$ için $r_i s_i = e_i = (e_i)^2$'dir. $e \neq 0$ olduğundan bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $e_i \neq 0$'dır. Bu ise bir r_i'nin kısmi tersinir olması çelişkisini verir. Dolayısıyla, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathrm{Tot}(R)$ olmalıdır. $\square$

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi bir halkanın totali genel olarak Mod–R'de bir ideal değildir.

Örnek 3.1.15 [11] $\text{Tot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\backslash\{1, -1\}$ ve $\text{Tot}(\mathbb{Z})$ bir ideal değildir.

İspat: $\mathbb{Z}$ sağ $\mathbb{Z}$–modül olarak ayrıştırılamazdır. O zaman, Önteorem 3.1.9'dan $\text{Tot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\backslash\{1, -1\}$ elde edilir. Ayrıca, $3, -2 \in \text{Tot}(\mathbb{Z})$ olmasına rağmen $3 + (-2) = 1 \notin \text{Tot}(\mathbb{Z})$ olduğundan $\text{Tot}(\mathbb{Z})$ toplamaya göre kapalı değildir. Dolayısıyla, $\text{Tot}(\mathbb{Z})$ bir ideal değildir. $\square$

Fakat, $\text{Tot}[M, N]$ dolayısıyla $\text{Tot}(R)$, Mod–R de bir yarı–idealdir. Bu aşağıdaki önteoremin bir sonucu olarak elde edilebilir.

Önteorem 3.1.16 [11] *Mod–R'de homomorfizmaların bileşkesi kısmi tersinir ise bileşenlerden her biri kısmi tersinirdir.*

İspat: Bileşen sayısı n olmak üzere, n üzerinden tümevarım uygulanacaktır. $n = 2$ için $f_1 f_2$ kısmi tersinir olsun. Bu durumda,

$$0 \neq e = e^2 = g(f_1 f_2) = (g f_1) f_2 \text{ ve } 0 \neq d = d^2 = (f_1 f_2) h = f_1 (f_2 h)$$

olacak şekilde g, h var olduğundan Önteorem 3.1.1(1)'den f_1 ve Önteorem 3.1.1(2)'den f_2 kısmi tersinirdir.

$n \geq 2$ için iddia doğru ve $f_1 f_2 ... f_n f_{n+1}$ kısmi tersinir olsun. O halde, $n = 2$ durumundan, $f_1 f_2 ... f_n$ ve f_{n+1} kısmi tersinirdir. Buradan, tümevarım kabulünden $f_1, f_2, ..., f_n$ kısmi tersinirdir. Böylece, $f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1}$ kısmi tersinir elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.17 [11] *$M, N, X, Y \in$ Mod–R olmak üzere, her $f \in [N, Y]$ ve her $h \in [X, M]$ için*

$$f \text{Tot}[M, N] h \subseteq \text{Tot}[X, Y] \text{ 'dir.}$$

İspat: $f \in [N, Y]$, $h \in [X, M]$ ve $g \in \text{Tot}[M, N]$ verilsin. Eğer fgh kısmi tersinir olsaydı, Önteorem 3.1.16'ten g kısmi tersinir olurdu. Bu ise $g \in \text{Tot}[M, N]$ olması ile çelişir. O halde, fgh kısmi tersinir değil ve $fgh \in \text{Tot}[X, Y]$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.18 [11] M ve N yarıbasit R–modüller olsun. Bu durumda, $\text{Tot}[M, N] = 0$'dır. Eğer R yarıbasit ise her $M, N \in$ Mod–R için $\text{Tot}[M, N] = 0$ idealidir.

İspat: M ve N yarıbasit olduğundan M'nin ve N'nin her altmodülü dik toplanandır. $0 \neq f \in [M, N]$ verilsin. O zaman, $M = A \oplus \text{Çek}(f)$ ve $N = \text{Gör}(f) \oplus B$ olacak şekilde $0 \neq A \leq M$, $B \leq N$ altmodülleri vardır. Buradan, $f|_A : A \to \text{Gör}(f)$ bir izomorfizma olur ve Önteorem 3.1.1(4)'ten her $0 \neq f \in [M, N]$ kısmi tersinirdir. Dolayısıyla, $\text{Tot}[M, N] = 0$ elde edilir.

R yarıbasit halka olsun. O zaman, tüm R–modüller yarıbasit modül olacağından, her $M, N \in \text{Mod}–R$ için $\text{Tot}[M, N] = 0$'dır. □

Şimdi, total kavramının daha iyi anlaşılması amacıyla $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ halkasının totali incelenecektir. Bunun için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasındaki kısmi tersinir elemanlar araştırılacaktır.

$2 \leq n \in \mathbb{N}$, $i = 1, ..., m$ ve $m < n$ için p_i'ler farklı asallar ve k_i'ler pozitif tamsayılar olmak üzere $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$ şeklinde asal çarpanlara ayrılışa sahip olsun. $\bar{z} = z + n\mathbb{Z}$ şeklinde gösterilsin.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının kısmi tersinir elemanlarını belirlemek için eşkare elemanlarına ihtiyaç vardır. Bunun için,

$$a_i = np_i^{-k_i},\ i = 1, ..., m;$$

şeklinde tanımlansın. $(a_1, a_2, ..., a_m) = 1$ olduğu açıktır. Buradan,

$$1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_m b_m$$

olacak şekilde $b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}$ vardır. $e_i := a_i b_i$, $i = 1, ..., m$ şeklinde tanımlanırsa,

$$1 = e_1 + e_2 + ... + e_m$$
$$\overline{1} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + ... + \overline{e_m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.19 [11] $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_m}\}$ *ailesi* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*'de sıfırdan farklı eşkarelerin dik bir kümesidir.*

İspat: a_i elemanlarının tanımından $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i \neq j$ için $n \mid a_i a_j$ olduğu açıktır. Bu durumda, $i \neq j$ için $n \mid e_i e_j$ ve $\overline{e_i e_j} = \overline{0}$ elde edilir. Ayrıca, $\overline{1} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + ... + \overline{e_m}$ ve $i \neq j$ için $\overline{e_i e_j} = \overline{0}$ olması nedeniyle $i \in \{1, ..., m\}$ için $\overline{e_i} = \overline{e_i}^2$ elde edilir. Son olarak, a_i elemanlarının tanımından $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i \neq j$ için $p_i \mid a_j$ ve $p_i \mid e_j$ olur. Fakat, $1 = e_1 + e_2 + ... + e_m$ olduğundan $p_i \nmid e_i$'dir. Dolayısıyla, $n \nmid e_i$ ve $\overline{e_i} \neq \overline{0}$ elde edilir. □

Önerme 3.1.20 [11] *$z \in \mathbb{Z}$ ve $\overline{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1. *$\overline{z}$ kısmi tersinirdir.*

2. *$p_i \nmid z$ olacak şekilde bir $i \in \{1, ..., m\}$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\overline{z}$ kısmi tersinir ve her $i = 1, ..., m$ için $p_i \mid z$ kabul edilsin. $\overline{z}$ kısmi tersinir olduğundan $\overline{z}\,\overline{x} = \overline{d} = \overline{d}^2 \neq \overline{0}$ olacak şekilde $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca, her $i = 1, ..., m$ için $p_i \mid z$ olduğundan $p_1 p_2 ... p_m \mid z$'dir. $k := maks\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$n \mid (p_1 p_2 ... p_m)^k \mid (zx)^k$$

olur ve buradan $\overline{0} = (\overline{z}\,\overline{x})^k = \overline{d}^k = \overline{d} \neq \overline{0}$ çelişkisi elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Bir $i \in \{1, ..., m\}$ için $p_i \nmid z$ kabul edilsin. $(p_i, z) = 1$ olduğundan $({p_i}^{k_i}, z) = 1$ olur ve buradan $zx + {p_i}^{k_i} y = 1$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. $e_i = a_i b_i$ için $n \mid {p_i}^{k_i} e_i$ olduğundan $\overline{{p_i}^{k_i}}\,\overline{e_i} = \overline{0}$ elde edilir. Ayrıca,

$$zx + {p_i}^{k_i} y = 1 \Rightarrow \overline{z}\,\overline{x} + \overline{{p_i}^{k_i}}\,\overline{y} = \overline{1} \Rightarrow \overline{z}\,\overline{x}\,\overline{e_i} + \overline{{p_i}^{k_i}}\,\overline{y}\,\overline{e_i} = \overline{e_i}$$

gerektirmeleri göz önüne alındığında

$$\overline{z}\,\overline{x}\,\overline{e_i} = \overline{e_i}$$

olur ve sonuç olarak, $\overline{z}$ kısmi tersinir elde edilir. □

Yukarıdaki önermeyle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının kısmi tersinir elemanları karakterize edildiğinden, $\mathrm{Tot}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ kolayca belirlenebilir. $\overline{z}$ kısmi tersinir olmayacak şekilde z elemanlarını bulmak bunun için yeterlidir. Bu ise her $i = 1, ..., m$ için $p_i \mid z$ olması ile sağlanır. Sonuç olarak;

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \overline{(p_1 p_2 ... p_m)}\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \overline{(p_1 p_2 ... p_m)}\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olduğu bilinmektedir(Bkz. [15, s.217 Örnek 3]). Dolayısıyla, radikali totaline eşit bir halka örneği elde edilmiş olur.

Ayrıca, $\mathrm{Tot}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \overline{(p_1 p_2 ... p_m)}\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eşitliğinden aşağıdaki denklik elde edilir: $\mathrm{Tot}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul n'nin karesiz olmasıdır.

3.2 Radikal

M ve N sağ R–modüller olsun. $[M,N]$'nin bir E_N-E_M–bimodül olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $[M,N]$ için iki radikalden bahsedilebilir. İlki $[M,N]$ bir sol E_N–modül olduğundan $\mathrm{Rad}({}_{E_N}[M,N])$ ve ikincisi $[M,N]$ bir sağ E_M–modül olduğundan $\mathrm{Rad}([M,N]_{E_M})$'dir. Bu kısımda $[M,N]$'nin diğer bir altyapısı olan, üçüncü bir radikal $\mathrm{Rad}[M,N]$ tanımlanacaktır.

Önteorem 3.2.1 [11] *M, N modüller ve R bir halka olsun.*

1. *A, R'nin elemanları ile sağ(sol) çarpıma göre kapalı olan, R'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman, $A \subseteq J(R)$ olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in A$ için $1 - a$ elemanının R'de tersinir olmasıdır.*

2. *$f \in [M,N]$ ve $g \in [N,M]$ olsun. O zaman, $1_{E_N} - fg$'nin E_N'de tersinir olması için gerek ve yeter koşul, $1_{E_M} - gf$'in E_M'de tersinir olmasıdır.*

3. *$\{f \in [M,N] \mid$ her $g \in [N,M]$ için $gf \in J(E_M)$'dir. $\}$*
   $= \{f \in [M,N] \mid$ her $g \in [N,M]$ için $fg \in J(E_N)$'dir. $\}$

İspat: (1) ($\Rightarrow$) $A \subseteq J(R)$ olsun. Bu durumda, her $a \in A$ için $aR \ll R_R$ olur. $(1-a)R + aR = R$ olduğundan $(1-a)R = R$ elde edilir. Buradan, $(1-a)s = 1$ ya da $1 + as = s$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. $a(-s) \in A$ olduğundan benzer işlemler $a(-s)$ için yapılırsa $(1+as)t = st = 1$ olacak şekilde $t \in R$ bulunur. Buradan, $1 - a = (1-a)st = ((1-a)s)t = t$ ve $1 = st = s(1-a)$ elde edilir. Dolayısıyla s, $1-a$'nın tersidir.

($\Leftarrow$) Her $a \in A$ için $1-a$ R'de tersinir olsun. R'de A tarafından üretilen sağ ideal AR ile gösterilsin. $AR \subseteq J(R)$ olduğunu göstermek için $AR \ll R$ olduğu gösterilmelidir. $B \leq R_R$ olmak üzere $R = B + AR$ olsun. O zaman, $b \in B$, $a_i \in A$ olmak üzere $1 = b + a_1 + \cdots + a_m$'dir. Eğer $1 = b \in B$ ise $B = R$ olur ve ispat biter. O halde, $m \geq 1$ kabul edilebilir. Kabulden $1 - a_m = b + a_1 + ... + a_{m-1}$ tersinir olup, $1 = (b + a_1 + \cdots a_{m-1})(1-a_m)^{-1}$'dir. $b(1-a_m)^{-1} \in B$ ve $i = 1, ..., m-1$ için $a_i(1-a_m)^{-1} \in A$ olduğundan $1 = b' + a_1{}' + \cdots + a_{m-1}{}'$ şeklinde bir yazılım elde edilir. Burada A'dan $m-1$ toplanan gelir ya da $m = 1$ için hiç toplanan gelmez. Dolayısıyla, tümevarımla $1 \in B$, $B = R$ ve $AR \subseteq J(R)$'dir.

(2) ($\Rightarrow$) $1_{E_N} - fg$ E_N'de tersinir ve $(1_{E_N} - fg)^{-1} = h$ olsun. Buradan, $(1_{E_N} - fg)h = h - fgh = 1_{E_N}$ ve $h(1_{E_N} - fg) = h - hfg = 1_{E_N}$ olduğundan $h - 1_{E_N} = fgh = hfg$'dir. Bu eşitlikten,

$$\begin{aligned}(1_{E_M} - gf)(1_{E_M} + ghf) &= 1_{E_M} + ghf - gf - gfghf \\ &= 1_{E_M} + g(h - 1_{E_N})f - g(h - 1_{E_N})f = 1_{E_M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1_{E_M} + ghf)(1_{E_M} - gf) &= 1_{E_M} - gf + ghf - ghfgf \\ &= 1_{E_M} + g(h - 1_{E_N})f - g(h - 1_{E_N})f = 1_{E_M}\end{aligned}$$

olup $(1_{E_M} - gf)^{-1} = 1_{E_M} + g(1_{E_N} - fg)^{-1}f$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde eğer $1_{E_M} - gf$ E_M'de tersinir ise

$$(1_{E_N} - fg)^{-1} = 1_{E_N} + f(1_{E_M} - gf)^{-1}g$$

olduğu gösterilebilir.

(3) $f \in [M, N]$ ve her $g \in [N, M]$ için $gf \in J(E_M)$ olsun. Her $\gamma \in E_M$, $\varphi \in E_N$, $g \in [N, M]$ için $\gamma g \varphi \in [N, M]$ olduğundan $\gamma g \varphi f \in J(E_M)$'dir. O halde, $E_M g \varphi f \subseteq J(E_M)$ olur ve Önteorem 3.2.1(1)'den her $\gamma \in E_M$ için $1_{E_M} - \gamma g \varphi f$ E_M'de tersinirdir. O zaman, Önteorem 3.2.1(2)'den her $\varphi \in E_N$ için $1_{E_N} - f\gamma g \varphi$ E_N'de tersinirdir. Yine Önteorem 3.2.1(1) gereğince $f\gamma g E_N \subseteq J(E_N)$ olur. Dolayısıyla, $f \in \{f \in [M, N] \mid$ her $g \in [N, M]$ için $fg \in J(E_N)$'dir. $\}$ elde edilir.

Ters kapsama için $f \in [M, N]$ ve her $g \in [N, M]$ için $fg \in J(E_N)$ olsun. Her $\alpha \in E_N$, $\beta \in E_M$, $g \in [N, M]$ için $\beta g \alpha \in [N, M]$ olduğundan $f\beta g\alpha \in J(E_N)$'dir. O halde, $f\beta g E_N \subseteq J(E_N)$ olur ve Önteorem 3.2.1(1)'den her $\alpha \in E_N$ için $1_{E_N} - f\beta g\alpha$ E_N'de tersinirdir. O zaman, Önteorem 3.2.1(2)'den her $\beta \in E_M$ için $1_{E_M} - \beta g \alpha f$ E_M'de tersinirdir. Yine Önteorem 3.2.1(1) gereğince $E_M g \alpha f \subseteq J(E_M)$ olur. Dolayısıyla, $f \in \{f \in [M, N] \mid$ her $g \in [N, M]$ için $gf \in J(E_M)$'dir. $\}$ elde edilir. □

Şimdi, Önteorem 3.2.1 kullanılarak $\mathrm{Rad}[M, N]$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2 [11] M ve N modüller olmak üzere, $[M, N]$'nin *radikali*

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}[M, N] &:= \{f \in [M, N] \mid \text{ her } g \in [N, M] \text{ için } gf \in J(E_M)\text{'dir.}\} \\ &= \{f \in [M, N] \mid \text{ her } g \in [N, M] \text{ için } fg \in J(E_N)\text{'dir.}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Rad$[M, N]$, Önteorem 3.2.1 gereğince denk olarak

$$\begin{aligned} \text{Rad}[M, N] &:= \{f \in [M, N] \mid \text{ her } g \in [N, M] \text{ için } 1_{E_M} - gf \text{ tersinirdir.}\} \\ &= \{f \in [M, N] \mid \text{ her } g \in [N, M] \text{ için } 1_{E_N} - fg \text{ tersinirdir.}\} \end{aligned}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Uyarı 3.2.3 Tanım 3.2.2 ile birlikte bir R halkasının End(R) halkası ile belirlenebilir olması göz önünde tutulursa Rad$[R, R] = J(R)$ elde edilir.

Uyarı 3.2.4 [11] Rad$({}_{E_N}[M, N]) \cup$ Rad$([M, N]_{E_M}) \subseteq$ Rad$[M, N]$'dir.

İspat: $f \in$ Rad$({}_{E_N}[M, N])$ olsun. O zaman, $E_N f \ll {}_{E_N}[M, N]$'dir. Keyfi $g \in [N, M]$ alınsın. $\tilde{g}(h) = hg$ şeklinde tanımlanan $\tilde{g} : {}_{E_N}[M, N] \to {}_{E_N}E_N$ bir E_N-homomorfizmadır ve dar altmodülleri dar altmodüllere resmeder. O zaman, $\tilde{g}(E_N f) = E_N fg \ll {}_{E_N}E_N$ ve böylece, $fg \in J(E_N)$ olur. Dolayısıyla, $f \in$ Rad$[M, N]$ ve Rad$({}_{E_N}[M, N]) \subseteq$ Rad$[M, N]$ elde edilir. Rad$([M, N]_{E_M}) \subseteq$ Rad$[M, N]$ kapsaması da benzer şekilde elde edilir. □

Teorem 3.2.5 [11] *M ve N sağ R–modüller olmak üzere,*

$$\text{Rad}[M, N] + \text{Tot}[M, N] = \text{Tot}[M, N]\text{'dir.}$$

İspat: $f \in$ Rad$[M, N]$, $g \in$ Tot$[M, N]$ olmak üzere, $f + g$ kısmi tersinir olsun. O zaman,

$$e := (f + g)h = e^2 \neq 0, e \in E_N$$

olacak şekilde $h \in [N, M]$ vardır. Buradan, $fh \in J(E_N)$ olmak üzere, $e = fh + gh$ elde edilir. $fhE_N \ll E_N$ ve

$$E_N = eE_N \oplus (1 - e)E_N = fhE_N + ghE_N + (1 - e)E_N = ghE_N + (1 - e)E_N$$

olduğundan $eE_N = eghE_N$ elde edilir. O zaman, $e = eghs$ olacak şekilde $s \in E_N$ vardır. e bir eşkare olduğundan kısmi tersinirdir. Dolayısıyla, Önteorem 3.1.16'den g kısmi tersinirdir. Bu ise $g \in$ Tot$[M, N]$ oluşu ile çelişir. O halde, $f + g$ kısmi tersinir değildir ve $f + g \in$ Tot$[M, N]$ elde edilir. □

Uyarı 3.2.6 $0 \in$ Tot$[M, N]$ olduğundan Teorem 3.2.5 gereğince Rad$[M, N] \subseteq$ Tot$[M, N]$ elde edilir.

Önteorem 3.2.7 [20] *M ve N modülleri için aşağıdakiler sağlanır.*

1. $\mathrm{Rad}[M,N]$, ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$ *bimodülünün alt-bimodülüdür.*
2. *Keyfi A,B modülleri için* $[N,B]\ \mathrm{Rad}[M,N]\ [A,M] \subseteq \mathrm{Rad}[A,B]$*'dir.*
3. $Q \subseteq N$ *ise* $\mathrm{Rad}[M,Q] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N]$*'dir.*
4. $M = P \oplus P'$ *ve* $\alpha \in \mathrm{Rad}[P,N]$ *olsun. Eğer* $\overline{\alpha} \in [M,N]$, $\overline{\alpha}(P') = 0$ *olacak şekilde* α *dönüşümünün genişlemesi ise* $\overline{\alpha} \in \mathrm{Rad}[M,N]$*'dir.*

İspat: (1) Tanım 3.2.2 gereğince $\mathrm{Rad}[M,N]$'nin toplama altında kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Rad}[M,N]$ ve $\beta \in [N,M]$ olsun. $(\alpha_1+\alpha_2)\beta = \alpha_1\beta+\alpha_2\beta$, $\alpha_1\beta \in J(E_N)$ ve $\alpha_2\beta \in J(E_N)$ olduğundan $(\alpha_1+\alpha_2)\beta \in J(E_N)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha_1+\alpha_2 \in \mathrm{Rad}[M,N]$'dir.

(2) $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olsun. Eğer $\lambda \in [A,M]$ ve $\mu \in [N,B]$ ise $\mu\alpha\lambda \in \mathrm{Rad}[A,B]$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için her $\psi \in [B,A]$ için $1_{E_A} - \psi(\mu\alpha\lambda)$'nın tersinir olduğu gösterilmelidir. $1_{E_A} - \psi(\mu\alpha\lambda) = 1_{E_A} - (\psi\mu\alpha)\lambda$ olduğundan Önteorem 3.2.1'den $1_{E_M} - \lambda(\psi\mu\alpha) = 1_{E_M} - (\lambda\psi\mu)\alpha$'nın tersinir olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat, $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$ ve $\lambda\psi\mu \in [N,M]$ olduğundan $(\lambda\psi\mu)\alpha \in J(E_M)$'dir. Dolayısıyla, $1_{E_M} - (\lambda\psi\mu)\alpha$ tersinir olur.

(3) $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,Q]$ ve $\beta \in [N,M]$ olsun. O zaman $\beta|_Q \in [Q,M]$ olduğundan $\beta|_Q\alpha \in J(E_M)$'dir. Fakat, $\beta|_Q\alpha = \beta\alpha$ olduğundan $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$ elde edilir.

(4) $M = P \oplus P'$ ve $\alpha \in \mathrm{Rad}[P,N]$ olsun. Ayrıca, $\overline{\alpha} \in [M,N]$, $\overline{\alpha}(P') = 0$ olacak şekilde α dönüşümünün genişlemesi olsun. $\beta \in [N,M]$ alınsın. $\pi : M \to P$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\pi\beta \in [N,P]$'dir. Hipotezden $\alpha\pi\beta \in J(E_N)$ elde edilir. Ayrıca, $\alpha\pi\beta = \overline{\alpha}\beta$ olduğundan $\overline{\alpha}\beta \in J(E_N)$ olur, dolayısıyla $\overline{\alpha} \in \mathrm{Rad}[M,N]$'dir. □

Uyarı 3.2.8 Önteorem 3.2.7 (1) ve (2) göz önüne alındığında, keyfi $M,N \in$ Mod–R için $\mathrm{Rad}[M,N]$'nin Mod–R'de bir ideal olduğu görülmektedir.

Uyarı 3.2.9 [20] $M = \bigoplus_{i=1}^{s} M_i$ ve $N = \bigoplus_{i=1}^{t} N_j$ modülleri için içerim ve izdüşüm dönüşümleri yardımıyla $[M,N]$'nin,

$$[\mathbf{M},\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} [M_1,N_1] & [M_2,N_1] & \dots & [M_s,N_1] \\ [M_1,N_2] & [M_2,N_2] & \dots & [M_s,N_2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [M_1,N_t] & [M_2,N_t] & \dots & [M_s,N_t] \end{bmatrix} = [[\mathbf{M_i},\mathbf{N_j}]]$$

matris temsili elde edilir. Burada M ve N'nin elemanları sütunlar olarak yazılır ve $[[M_i, N_j]]$ matrisi sol matris çarpımı olarak etki eder.

Teorem 3.2.10 [20] *$M = \bigoplus_{i=1}^{s} M_i$ ve $N = \bigoplus_{i=1}^{t} N_j$ ise* $\mathrm{Rad}[M,N] = [\mathrm{Rad}[M_i, N_j]]$*'dir.*

İspat: $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$ olmak üzere $\alpha = [\alpha_{ij}] \in \mathrm{Rad}[M,N] = \mathrm{Rad}[[M_i, N_j]]$ olsun. $1 \le k \le s$, $1 \le l \le t$ olmak üzere $\alpha_{kl} \in \mathrm{Rad}[M_k, N_l]$ olduğu gösterilecektir. Yani her $\eta \in [N_l, M_k]$ için $\eta\alpha_{kl} \in J(E_{M_k})$ ya da denk olarak $1_{M_k} - \eta\alpha_{kl} \in \mathrm{Oto}(E_{M_k})$ olduğu gösterilecektir. $E_{kl}(\eta)$ ile (k,l)-bileşeni η ve diğer tüm bileşenleri 0 olan $s \times t$'lik matris gösterilsin. $\tilde{\eta} : N \to M$, $E_{kl}(\eta)$ ile temsil edilen dönüşüm olmak üzere, $1_M - \tilde{\eta}\alpha$, $s \times s$'lik blok üçgensel matris

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\text{-}\eta\alpha_{1l} & \text{-}\eta\alpha_{2l} & \cdots & \text{-}\eta\alpha_{(k-1)l} & 1\text{-}\eta\alpha_{kl} & \text{-}\eta\alpha_{(k+1)l} & \cdots & \text{-}\eta\alpha_{sl} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

ile temsil edilir. $1_M - \tilde{\eta}\alpha$ tersinir olduğundan $1_{M_k} - \eta\alpha_{kl}$ homomorfizması tersinirdir. Buradan, $\alpha_{kl} \in \mathrm{Rad}[M_k, N_l]$ ve $\alpha = [\alpha_{ij}] \in [\mathrm{Rad}[M_i, N_j]]$ elde edilir.

Tersine, $\alpha = [\alpha_{ij}] \in [\mathrm{Rad}[M_i, N_j]]$ alınsın. $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için α'nın sıfırdan farklı tek bileşeninin $1 \le k \le s$, $1 \le l \le t$ olmak üzere α_{kl} olduğunu kabul edilebilir. Eğer $\beta = [\beta_{ij}] \in [N, M]$ ise A, köşegen üzerinde birim dönüşümler olan üçgen matris, B, $B_{kk} = 1_{M_k} - \beta_{lk}\alpha_{kl}$ ve diğer köşegen üzerindeki tüm bileşenleri birim dönüşümler olan üçgen matris olmak üzere, $1_M - \beta\alpha$, $\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$ ile temsil edilir. $1_{M_k} - \beta_{lk}\alpha_{kl}$ tersinir olduğundan $1_M - \beta\alpha$ homomorfizması da tersinirdir. Böylece, $\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$'dir. $\square$

3.3 Tekil ve Eş-tekil İdealler

Tanım 3.3.1 [11] M ve N modüller olmak üzere,

$$\Delta[M,N] := \{f \in [M,N] \mid \text{Çek}(f) \le_e M\}$$

$[M, N]$'nin alt-bimodülüdür ve $[M, N]$'nin *tekil altmodülü* denir.

Tanım 3.3.2 [11] M ve N modüller olmak üzere,

$$\nabla[M, N] := \{f \in [M, N] \mid \text{Gör}(f) \ll N\}$$

$[M, N]$'nin alt-bimodülüdür ve $[M, N]$'nin *eş-tekil altmodülü* denir.

Önteorem 3.3.3 [11] *M ve N modülleri için aşağıdakiler sağlanır.*

1. $\Delta[M, N] \subseteq \text{Tot}[M, N]$

2. $\nabla[M, N] \subseteq \text{Tot}[M, N]$

İspat: (1) $f \in \Delta[M, N]$ alınsın ve tersine f kısmi tersinir olsun. Bu durumda, $e := gf = e^2 \neq 0$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ vardır. $\text{Çek}(f) \subseteq \text{Çek}(gf)$ olduğundan $\text{Çek}(gf) = \text{Çek}(e) \leq_e M$ olur. $\text{Çek}(e) = (1 - e)(M)$ ve $(1 - e)(M) \leq_d M$ olduğundan $(1 - e)(M) = M$ elde edilir. Buradan, $e(M) = 0$ ve dolayısıyla $e = 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

(2) $f \in \nabla[M, N]$ alınsın ve tersine f kısmi tersinir olsun. Bu durumda, $d := fh = d^2 \neq 0$ olacak şekilde $h \in [N, M]$ vardır. $\text{Gör}(d) \subseteq \text{Gör}(f)$ olduğundan $\text{Gör}(d) \ll N$ olur. $\text{Gör}(d) = d(N)$ ve $d(N) \leq_d N$ olduğundan $(1 - d)(N) = N$ elde edilir. Buradan, $d(N) = 0$ ve dolayısıyla $d = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. □

Aşağıdaki teorem verilmeden bu bağlamda daha önce yapılmış çalışmalara değinmek amacıyla epimorfizmalar ve monomorfizmalar için parçalanma tanımı hatırlatılacaktır.

M, N modüller ve $f : M \to N$ bir epimorfizma olsun. $fg = 1_N$ olacak şekilde $g : N \to M$ homomorfizması varsa f epimorfizması parçalanır denir. Benzer şekilde $g' : N \to M$ bir monomorfizma olsun. $f'g' = 1_N$ olacak şekilde $f' : M \to N$ homomorfizması varsa g' monomorfizması parçalanır denir.

M (C_2)'yi sağlar $\Rightarrow$ $M \to M$ her monomorfizma parçalanır $\Rightarrow$ M geniş kısıtlanmıştır.
N (D_2)'yi sağlar $\Rightarrow$ $N \to N$ her epimorfizma parçalanır $\Rightarrow$ N dar kısıtlanmıştır.

gerektirmeleri kolayca görülebilir.

Beidar ve Kasch [3, Theorem 2.3(a)]'de M'den M'ye her monomorfizmanın parçalanması durumunda her $N \in \text{Mod}\text{–}R$ için $\Delta[M, N] \subseteq \text{Rad}[M, N]$ olduğunu ispatlamışlardır. Fakat Kasch bu teoremi geniş kısıtlanmış modülller için ispatlayarak genellemiştir. Yine

[3, Teorem 2.3(b)]'de N'den N'ye her epimorfizmanın parçalanması durumunda her $M \in$ Mod–R için $\nabla[M,N] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğu ispatlanmıştır. Kasch bu teoremi de dar kısıtlanmış modüller için ispatlayarak genellemiştir.

Teorem 3.3.4 [11]

1. *M_R geniş kısıtlanmış bir modül ise her $N \in$ Mod–R için $\Delta[M,N] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N]$'dir.*

2. *N_R dar kısıtlanmış bir modül ise her $M \in$ Mod–R için $\nabla[M,N] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N]$'dir.*

İspat: (1) M geniş kısıtlanmış bir modül olsun. $f \in \Delta[M,N]$ alınsın. Her $g \in [N,M]$ için $\mathrm{Çek}(f) \subseteq \mathrm{Çek}(gf) \subseteq M$ ve $\mathrm{Çek}(f) \leq_e M$ olduğundan $\mathrm{Çek}(gf) \leq_e M$'dir. Buradan, $\mathrm{Çek}(gf) \leq \mathrm{Gör}(1_M - gf) \leq_e M$ olur. $\mathrm{Çek}(gf) \cap \mathrm{Çek}(1_M - gf) = 0$ ve $\mathrm{Çek}(gf) \leq_e M$ olduğu için $\mathrm{Çek}(1_M - gf) = 0$'dır. Buradan, $1_M - gf : M \to M$, $\mathrm{Gör}(1_M - gf) \leq_e M$ olan bir monomorfizmadır. M geniş kısıtlanmış bir modül olduğundan, $1_M - gf$ bir otomorfizmadır. Önteorem 3.2.1 gereğince $f \in \mathrm{Rad}[M,N]$ elde edilir.

(2) N dar kısıtlanmış bir modül olsun. $f \in \nabla[M,N]$ alınsın. Her $g \in [N,M]$ için $\mathrm{Gör}(fg) \subseteq \mathrm{Gör}(f) \subseteq N$ ve $\mathrm{Gör}(f) \ll N$ olduğundan $\mathrm{Gör}(fg) \ll N$'dir. Ayrıca, $\mathrm{Çek}(1_N - fg) \subseteq \mathrm{Gör}(fg)$ ve $\mathrm{Gör}(fg) \ll N$ olduğundan $\mathrm{Çek}(1_N - fg) \ll N$ elde edilir. $\mathrm{Gör}(fg) + \mathrm{Gör}(1_N - fg) = N$ ve $\mathrm{Gör}(fg) \ll N$ olduğundan $\mathrm{Gör}(1_N - fg) = N$'dir. Buradan, $1_M - fg : N \to N$, $\mathrm{Çek}(1_N - fg) \ll N$ olan bir epimorfizmadır. N dar kısıtlanmış bir modül olduğundan, $1_N - fg$ bir otomorfizmadır. Önteorem 3.2.1'den $f \in \mathrm{Rad}[M,N]$ elde edilir. □

3.4 $[R,M]$ Durumu

Bu bölüme kadar M, N sağ R–modüller olmak üzere [M,N] için önemli altyapılar tanımlandı ve bunların önemli özellikleri incelendi. Bu bölümde $[R,M] \cong M$ izomorfizması yardımıyla M modülü için benzer altyapılar nasıl tanımlanır sorusu cevaplandırılacaktır. Ayrıca, M modülü için bu altyapılar ile ilgili önemli özellikler ve örnekler incelenecektir.

M sağ R–modülü için $M^* = [M,R]$, M'nin dual modülü olsun. $[R,M]$'nin M modülü ile belirlenebilir olması,

$$[R,M] \ni \beta \mapsto \beta(1) \in M$$

şeklinde tanımlı $\rho : [R, M] \to M$ izomorfizması ile sağlanır. İlk olarak $\beta \in [R, M]$ kısmi tersinir homomorfizmasının ρ izomorfizması altındaki görüntüsü incelenecektir. β kısmi tersinir olsun. Bu durumda,

$$\varphi\beta = e = e^2 \neq 0, \qquad e \in \mathrm{End}(R_R)$$

olacak şekilde $\varphi \in M^*$ vardır. Buradan,

$$\varphi\beta(1) = e(1) = e = e^2 \neq 0,$$

olur ki burada $e \in \mathrm{End}(R_R)$, $e(1) = e \in R$ elemanı ile soldan çarpma ile belirlidir. Öte yandan eğer

$$\varphi(m) = e = e^2 \neq 0$$

olacak şekilde $m \in M$, $\varphi \in M^*$ var ise ve eğer $\beta \in [R, M]$, $\beta(x) = mx$, $x \in R$ şeklinde tanımlı ise,

$$\varphi\beta(x) = \varphi(mx) = \varphi(m)x = ex$$

olur ve dolayısıyla

$$\varphi\beta = e, \quad \beta(1) = m$$

elde edilir.

Şimdi, M modülü için kısmi tersinir eleman tanımı yapılabilir.

Tanım 3.4.1 [11] M bir modül olsun.

1. $0 \neq \varphi(m)$ eşkare olacak şekilde bir $\varphi \in M^*$ var ise $m \in M$ *kısmi tersinirdir* denir.
2. $\mathrm{Tot}(M) := \{m \in M \mid m \text{ kısmi tersinir değildir.}\}$

Keyfi M, N sağ R–modülleri için $\mathrm{Rad}[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ olduğu bilinmektedir. Bu kapsama modül durumu için de sağlanmaktadır: eğer $m \in \mathrm{Rad}(M)$ ise keyfi $\varphi \in M^*$ için $\varphi(m) \in \mathrm{Rad}(R)$'dir ve bu durumda $\varphi(m)$ sıfırdan farklı bir eşkare olamaz, dolayısıyla $m \in \mathrm{Tot}(M)$ elde edilir. Şimdi radikal ve total için eşitlik durumu incelenecektir.

Önerme 3.4.2 [11] *$M \in Mod$–R projektif olsun. Bu durumda,*

1. $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Tot}(R)$ *ise* $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$*'dir.*

2. $\mathrm{Rad}(E_M) = \mathrm{Tot}(E_M)$ *ise* $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$*'dir.*

3. M *sonlu üretilmiş bir modül ve* $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ *ise* $\mathrm{Rad}(E_M) = \mathrm{Tot}(E_M)$*'dir.*

İspat: (1) $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Tot}(R)$ olsun. $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \mathrm{Tot}(M)$ her zaman sağlandığından, sadece $\mathrm{Tot}(M) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olduğu gösterilecektir. $x \in \mathrm{Tot}(M)$ alınsın. M projektif bir modül olduğundan Önteorem 2.3.10 gereğince M dual tabana sahiptir. $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ M'de ve $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ $M^* = [M,R]$'da olmak üzere $((y_\alpha)_{\alpha\in I}, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I})$ M'nin dual tabanı olsun. Dual taban tanımı gereği, $x = \sum_{sonlu} y_\alpha\varphi_\alpha(x)$ şeklinde yazılabilir. Eğer bir $\varphi_\alpha \in M^*$ için $\varphi_\alpha(x) \notin \mathrm{Tot}(R)$ ise bu $\varphi_\alpha(x)$ kısmi tersinir olur. Yani $0 \neq e = s\varphi_\alpha(x) = e^2$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Bu durumda, $\psi : M \to R$, $\psi(m) = s\varphi_\alpha(m)$ şeklinde tanımlı sağ R–modül homomorfizması için $\psi(x) = s\varphi_\alpha(x) = e = e^2 \neq 0$ olup x kısmi tersinir elde edilir. Bu ise $x \in \mathrm{Tot}(M)$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $\varphi_\alpha(x) \in \mathrm{Tot}(R) = \mathrm{Rad}(R)$ olur. Ayrıca, $M\mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olduğundan $y_\alpha\varphi_\alpha(x) \in \mathrm{Rad}(M)$'dir. O halde, $x \in \mathrm{Rad}(M)$ ve $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ elde edilir.

(2) $\mathrm{Rad}(E_M) = \mathrm{Tot}(E_M)$ olsun. Sadece $\mathrm{Tot}(M) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olduğu gösterilmelidir. $m \in \mathrm{Tot}(M)$ alınsın ve U M'nin $M = mR + U$ olacak şekilde bir altmodülü olsun. Eğer $\{u_i \mid i \in I\}$ U'nun üreteçlerinin bir ailesi ise $\{m, u_i \mid i \in I\}$ M'nin üreteçlerinin bir ailesi olur. Bu durumda, $\{m, u_i \mid i \in I\}$, $\{\varphi, \varphi_i \mid i \in I\}$ dual taban olacak şekilde $\{\varphi, \varphi_i \mid i \in I\}$, $\varphi,\varphi_i \in M^*$ ailesi vardır. Ayrıca, $\rho : [R,M] \to M$ izomorfizması göz önüne alındığında $\rho(f_m) = f_m(1) = m$ olacak şekilde $f_m \in [R,M]$ vardır ve $m \in \mathrm{Tot}(M)$ olduğundan $f_m \in \mathrm{Tot}[R,M]$'dir. Buradan, $f_m\varphi \in \mathrm{Tot}(E_M) = \mathrm{Rad}(E_M)$ olur. M projektif ve $f_m\varphi \in \mathrm{Rad}(E_M)$ olduğundan Teorem 2.3.13 gereğince $\mathrm{Gör}(f_m\varphi) = f_m(\varphi(M)) = f_m(1)\varphi(M) = m\varphi(M) \ll M$ elde edilir. Bu durumda,

$$M = m\varphi(M) + \textstyle\sum_{i\in I} u_i\varphi_i(M) = \sum_{i\in I} u_i\varphi_i(M) \subseteq U$$

ve $U = M$ olur. O zaman, $mR \ll M$ ve böylelikle $m \in \mathrm{Rad}(M)$ elde edilir . Sonuç olarak, $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$'dir.

(3) M sonlu üretilmiş bir modül ve $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ olsun. Sadece $\mathrm{Tot}(E_M) \subseteq \mathrm{Rad}(E_M)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $t \in \mathrm{Tot}(E_M)$ alınsın. Herhangi bir $m \in M$ için $t(m)$'nin kısmi tersinir olması t'nin kısmi tersinir olmasını gerektirdiğinden ve bu bir çelişki oluşturacağından $t(M) \subseteq \mathrm{Tot}(M)$'dir. Kabulden $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ olduğundan $t(M) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olur. Ayrıca, yine kabulden M sonlu üretilmiş olduğundan $\mathrm{Rad}(M) \ll M$'dir ve böylece $t(M) \ll M$ olur. M projektif ve $t(M) \ll M$ olduğundan

Teorem 2.3.13 gereğince $t \in \text{Rad}(E_M)$'dir. Sonuç olarak, $\text{Rad}(E_M) = \text{Tot}(E_M)$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.4.3 [11] $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ halkası ve A, R'nin 3 ve $1 + \sqrt{-5}$ tarafından üretilen (sağ) ideali olsun. A sağ R–modülü için $A = \text{Tot}(A)$ ve $0 = \text{Rad}(A) \neq Tot(A)$ sağlanır.

İspat: $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ halkası $\mathbb{C}$ cisminin bir althalkası olduğundan tamlık bölgesidir. İlk olarak, $A = \text{Tot}(A)$ eşitliği gösterilecektir. $\text{Tot}(A) \subseteq A$ olduğundan $A \subseteq \text{Tot}(A)$ kapsamasını göstermek yeterlidir. $0 \neq a \in A$ alınsın ve a kısmi tersinir olsun. O zaman, $\varphi(a) \neq 0$ eşkare olacak şekilde $\varphi \in [A, R]$ vardır. R halkasının eşkare elemanları, $\mathbb{Z}$ halkasının eşkare elemanları olduğundan $\varphi(a) = 1$ elde edilir. Buradan, $\varphi(1)a = a\varphi(1) = 1$ olur. Ayrıca, R halkasının tersinir elemanları, $\mathbb{Z}$ halkasının tersinir elemanları olduğundan $a = 1$ veya $a = -1$ olur ki, her iki durum da $A = R$ çelişkisini doğurur. Böylece, $0 \neq a \in A$ kısmi tersinir değildir ve dolayısıyla, $A \subseteq \text{Tot}(A)$ elde edilir.

Şimdi, $0 \neq r \in \text{Rad}(R)$ alınsın. O zaman, $1 - r$ tersinirdir. R'nin tersinir elemanları 1 ve -1 olduğundan $r = 2$ elde edilir. $\text{Rad}(R)$ ideal olduğundan $0 \neq 2r \in \text{Rad}(R)$ olur. Dolayısıyla, $1 - 2r$ tersinir olmak zorundadır ve bu ise $r = 1$ çelişkisini doğurur. Sonuç olarak, $\text{Rad}(R) = 0$ elde edilir. $\iota : A \to R$ içerim dönüşümü olmak üzere $\iota(\text{Rad}(A)) \subseteq \text{Rad}(R) = 0$ olduğundan $\text{Rad}(A) = 0$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.4.4 [9] M sağ R–modülü için $\Delta(M)$ ve $\nabla(M)$ altyapıları da iyi tanımlıdır ve

$$\Delta(M) := \rho(\Delta[R, M]) \text{ ve } \nabla(M) := \rho(\nabla[R, M])$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.4.5 [9] *M sağ R–modülü için aşağıdakiler sağlanır.*

1. $\Delta(M) = Z(M)$

2. $\nabla(M) = \text{Rad}(M)$

3. $\text{Tot}(M) = \rho(\text{Tot}[R, M])$

4. $\text{Rad}(M) \subseteq \rho(\text{Rad}[R, M])$

İspat: (1) $m \in \Delta(M)$ alınsın. O halde, $m = \rho(f) = f(1)$ olacak şekilde $f \in \Delta[R, M]$ vardır ve Çek$(f) \leq_e R_R$'dir. Ayrıca, mÇek$(f) = 0$ ve Çek$(f) \leq_e R_R$ olduğundan $m \in Z(M)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\Delta(M) \subseteq Z(M)$ olur. Ters kapsama için, $m \in Z(M)$ alınsın. $ann_r(m) \leq_e R_R$'dir. $f : R \to M$ sağ R-homomorfizması $f(1) = m$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, Çek$(f) = ann_r(m)$ ve $ann_r(m) \leq_e R_R$ olduğundan Çek$(f) \leq_e R_R$'dir. Buradan, $m = \rho(f) = f(1)$ ve $f \in \Delta[R, M]$ olduğundan $m \in \Delta(M)$ elde edilir. O halde, $Z(M) \subseteq \Delta(M)$ olur ve sonuç olarak $Z(M) = \Delta(M)$ elde edilir.

(2) $m \in \nabla(M)$ alınsın. O halde, $m = \rho(f) = f(1)$ olacak şekilde $f \in \nabla[R, M]$ vardır ve Gör$(f) \ll M$'dir. Ayrıca, Gör$(f) = f(1)R \ll M$ olduğundan $f(1) = m \in \mathrm{Rad}(M)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla(M) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ olur. Ters kapsama için, $m \in \mathrm{Rad}(M)$ alınsın. $\rho : [R, M] \to M$ bir izomorfizma olduğundan $\rho(f) = m$ olacak şekilde $f \in [R, M]$ vardır. $m = f(1) \in \mathrm{Rad}(M)$ olduğundan $f(1)R =$ Gör$(f) \ll M$'dir ve buradan $f \in \nabla[R, M]$ elde edilir. Dolayısıyla, $m = \rho(f)$ ve $f \in \nabla[R, M]$ olduğundan $m \in \nabla(M)$ olur. O halde, $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \nabla(M)$ olur ve $\mathrm{Rad}(M) = \nabla(M)$ elde edilir.

(3) $f \in \mathrm{Tot}[R, M]$ olmak üzere $\rho(f) = f(1) = m \in \rho(\mathrm{Tot}[R, M])$ alınsın ve aksine $m \notin \mathrm{Tot}(M)$ kabul edilsin. Bu durumda, m kısmi tersinirdir ve $e = \varphi(m) = e^2 \neq 0$ olacak şekilde $\varphi \in [M, R]$ vardır. Şimdi,

$$(\varphi f)^2(1) = (\varphi f)((\varphi f)(1)) = (\varphi f)(1)(\varphi f)(1) = \varphi(m)\varphi(m) = \varphi(m) = (\varphi f)(1)$$

olduğundan $(\varphi f)^2 = \varphi f \neq 0$ elde edilir ve bu durum $f \in \mathrm{Tot}[R, M]$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $m \in \mathrm{Tot}(M)$ ve $\rho(\mathrm{Tot}[R, M]) \subseteq \mathrm{Tot}(M)$ elde edilir. Ters kapsama için, $m \in \mathrm{Tot}(M)$ alınsın. $\rho : [R, M] \to M$ bir izomorfizma olduğundan $\rho(f) = f(1) = m$ olacak şekilde $f \in [R, M]$ vardır. Aksine $f \notin \mathrm{Tot}[R, M]$ kabul edilsin. Bu durumda, f kısmi tersinirdir ve $(\varphi f)^2 = \varphi f \neq 0$ olacak şekilde $\varphi \in [M, R]$ vardır. Şimdi,

$$\varphi(m)\varphi(m) = (\varphi f)(1)(\varphi f)(1) = (\varphi f)((\varphi f)(1)) = (\varphi f)^2(1) = (\varphi f)(1) = \varphi(m)$$

olduğundan $e = \varphi(m) = e^2 \neq 0$ elde edilir ve bu durum $m \in \mathrm{Tot}(M)$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $f \in \mathrm{Tot}[R, M]$ ve $\mathrm{Tot}(M) \subseteq \rho(\mathrm{Tot}[R, M])$ elde edilir.

(4) $\mathrm{Rad}[R, M]$'nin tanımından $f \in \mathrm{Rad}[R, M]$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in M^* = [M, R]$ için $\varphi f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(R))$ olmasıdır. Ayrıca, $\mathrm{End}(R) \cong R$ olduğu bilinmektedir, dolayısıyla $\varphi f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(R))$ ile $(\varphi f)(1) \in \mathrm{Rad}(R)$ oluşu denktir. Bu iki ifadeden,

$$f \in \mathrm{Rad}[R, M]\text{'dir.} \Leftrightarrow \text{her } \varphi \in M^* = [M, R] \text{ için } (\varphi f)(1) \in \mathrm{Rad}(R)\text{'dir.}$$

denkliği elde edilir. Bu denklik yardımıyla,

$$\rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = \{m \in M \mid \forall\varphi \in M^*, \varphi(m) \in \mathrm{Rad}(R)\}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, $m \in \mathrm{Rad}(M)$ alınsın. Herhangi bir $\varphi \in M^*$ homomorfizması için $\varphi(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(R)$ olduğundan $m \in \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ elde edilir. Sonuç olarak, $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ olur. □

Önerme 3.4.5(4) ile birlikte $\mathrm{Rad}(M) = \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığı sorusu sorulabilir. Bu soru ilk olarak Kasch ve Mader tarafından [9]'da sorulmuştur. Lee ve Zhou [18] bu eşitliğin her zaman sağlanmadığını aşağıdaki örnekle göstermişlerdir.

Örnek 3.4.6 [18] $R = \mathbb{Z}_4$ ve $M = 2R$ olsun. Bu durumda,

1. $f \in [R, M]$, $f(\overline{1}) = \overline{2}$ olmak üzere $\mathrm{Rad}[R, M] = \{0, f\}$'dir.

2. $\rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = M$ fakat $\mathrm{Rad}(M) = 0$'dır.

İspat: (1) $[R, M] = \{0, f\}$ ve $g(\overline{2}) = \overline{2}$ olmak üzere $[M, R] = \{0, g\}$ olduğu kolayca görülebilir. $(1_R - 0f)(\overline{1}) = \overline{1}$ ve $(1_R - gf)(\overline{1}) = \overline{1} - \overline{2} = \overline{3}$ olduğundan $1_R - 0f$ ve $1_R - gf$ $\mathrm{End}(R)$'nin tersinir elemanlarındandır. Bu durumda, $f \in \mathrm{Rad}[R, M]$ ve $\mathrm{Rad}[R, M] = \{0, f\}$'dir.

(2) $\rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = \{0(\overline{1}), f(\overline{1})\} = \{\overline{0}, \overline{2}\} = M$'dir. Fakat, M basit bir R–modül olduğundan $\mathrm{Rad}(M) = 0$'dır. Dolayısıyla, $\mathrm{Rad}(M) \neq \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ elde edilir. □

3.5 Yerel İnjektif ve Yerel Projektif Modüller

Yerel injektif ve yerel projektif modüller F.Kasch tarafından 2002 senesinde tanımlanmıştır. Yerel injektif modüller injektif modüllerin; yerel projektif modüller ise projektif yarıtam modüllerin bir genellemesi olduğundan, bu genellemelerle ilgili ters örnekler incelenecektir. Daha sonra, bu modüllerin $[M, N]$'nin radikal, tekil, eş-tekil idealleri ve total yarı-ideali ile ilgileri verilecektir. Bu kısımda son olarak, sağ Noether halkaların bir karakterizasyonu elde edilecektir.

Tanımlar 3.5.1 [12]

1. Bir M modülünün her $A \subseteq M$ geniş olmayan altmodülü için $A \cap Q = 0$ olacak şekilde $0 \neq Q \leq M$ injektif altmodülü var ise M *yerel injektif modül* olarak adlandırılır.

2. Bir M modülünün her $B \subseteq M$ dar olmayan altmodülü için $P \subseteq B$ olacak şekilde $0 \neq P \leq_d M$ projektif altmodülü var ise M *yerel projektif modül* olarak adlandırılır.

Örnekler 3.5.2 [12]

1. İnjektif modüller yerel injektiftir.

2. Projektif, yarıtam modüller yerel projektiftir.

İspat: (1) V injektif bir modül olsun. A V'nin geniş olmayan bir altmodülü olsun. Bu durumda, $A \cap C = 0$ olacak şekilde $0 \neq C \leq V$ vardır. Buradan, $0 \neq C \leq_e E(C)$ olacak şekilde $E(C) \subseteq V$ olan, C'nin bir injektif zarfı vardır. Ayrıca, $A \cap C = 0$ ve $0 \neq C \leq_e E(C)$ olduğundan $A \cap E(C) = 0$ ve $E(C) \neq 0$'dır. Sonuç olarak Tanım 3.5.1(1) gereğince V yerel injektiftir.

(2) P projektif, yarıtam bir modül olsun. B, P'nin dar olmayan bir altmodülü olsun. $v : P \to P/B$ dönüşümünü göz önüne alalım. P yarıtam olduğundan kabulden $v_1 = v|_{P_1}$ dönüşümü P/B'nin projektif örtüsü olacak şekilde $P = P_1 \oplus P_2$ ayrışımı vardır. Yani; $\text{Çek}(v_1) \ll P_1$ ve $P_2 \subseteq \text{Çek}(v) = B$'dir. Eğer $P_2 = 0$ ise o zaman, $P_1 = P$ ve $\text{Çek}(v_1) = \text{Çek}(v) = B \ll P$ olur ki bu bir çelişkidir. Buradan, $P_2 \neq 0$, B tarafından kapsanan P'nin istenen projektif dik toplananıdır. Sonuç olarak, Tanım 3.5.1(2) gereğince P yerel projektiftir. $\square$

Örnekler 3.5.3 [18]

1. Yerel projektif olup projektif olmayan bir modül vardır.

2. Yerel injektif olup injektif olmayan bir modül vardır.

İspat: (1) Her $i = 1, 2, \ldots$ için $F_i = \mathbb{Z}_2$ olmak üzere $Q = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ olsun. R ile $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ ve 1_Q tarafından üretilen Q'nun althalkası gösterilsin. O zaman, [6, Önteorem 17] gereğince her R–modülün sokulu sıfırdan farklıdır ve [17, s.97, Sonuç 3.73] gereğince her basit R–modül sıfırdan farklı bir injektif altmodül kapsar. Dolayısıyla, her $i =$

$1, 2, \ldots$ için F_i basit R–modül olduğundan F_i injektif R–modüldür. Ayrıca, $F_i \leq_d R_R$ olduğundan F_i projektif R–modüldür. R I-sonlu bir halka olmadığından, Teorem 2.6.13 gereğince R sağ tam bir halka değildir. Şimdi, R sağ tam bir halka olmadığından [8, s.144, Teorem 5.14] göz önüne alındığında $P := (R^X)_R$ modülü projektif olmayacak şekilde X indis kümesi vardır. Şimdi, P'nin sıfırdan farklı her devirli altmodülünün bir projektif ve bir injektif altmodül kapsadığı gösterilecektir. $0 \neq a_x \in R$, $x \in X$ olmak üzere $0 \neq \alpha = (\ldots, a_x, \ldots) \in P$ ise $a_x \neq 0$ olduğundan $ra_x \neq 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in F_i \subseteq R$ ve i vardır. Ayrıca, $R(r\alpha) \cong R(ra_x) = F_i$ olduğundan $R(r\alpha)$, $R\alpha$'nın projektif ve injektif altmodülü olarak elde edilir.

P yerel projektiftir: $\tilde{P}$ P'nin dar olmayan bir altmodülü olsun. $\tilde{P} \neq 0$'dır. $0 \neq \alpha \in \tilde{P}$ alınsın. $r\alpha \neq 0$ olmak üzere $R(r\alpha) \leq R\alpha \leq \tilde{P}$ ve $R(r\alpha)$ projektif olacak şekilde $0 \neq r \in F_i \subseteq R$ vardır. Ayrıca, $R(r\alpha) \leq P$ injektif olduğundan $R(r\alpha) \leq_d P$'dir. Dolayısıyla, Tanım 3.5.1(2) gereğince P yerel projektiftir.

(2) R halkası (1)'in ispatında tanımlanan halka olsun. İlk olarak, R_R modülünün yerel injektif olduğu gösterilecektir. $A \subset R_R$ geniş olmayan bir altmodül olsun. Bu durumda, $A \cap X = 0$ olacak şekilde $0 \neq X \leq R_R$ vardır. (1) kısmının ispatından, her R–modülün sıfırdan farklı bir injektif altmodül kapsadığı bilinmektedir. Dolayısıyla, $A \cap Q = 0$ olacak şekilde $0 \neq Q \leq X \leq R_R$ injektif altmodülü vardır. Tanım 3.5.1(1) gereğince R_R yerel injektiftir. Fakat, R_R injektif bir modül değildir. $R_R \leq (\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2)_R$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\mathbb{Z}_2$ modülü injektif olduğundan $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ injektif R–modüldür. Fakat $E(R_R) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \neq R$ olduğundan R_R injektif değildir. □

Teorem 3.5.4 [12]

1. *M modülü için aşağıdakiler denktir.*
   - *(i) M yerel injektif modüldür.*
   - *(ii) Her $N \in \mathrm{Mod}\text{–}R$ için $\Delta[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.*
2. *N modülü için aşağıdakiler denktir.*
   - *(i) N yerel projektif modüldür.*
   - *(ii) Her $M \in \mathrm{Mod}\text{–}R$ için $\nabla[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.*

İspat: (1) $(i) \Rightarrow (ii)$ Önteorem 3.3.3 gereğince her $N \in \text{Mod}–R$ için $\Delta[M,N] \subseteq \text{Tot}[M,N]$'dir. Dolayısıyla, sadece $\text{Tot}[M,N] \subseteq \Delta[M,N]$ kapsaması gösterilmelidir. Bunun için Çek(f) M'de geniş olmayacak şekilde $f \in [M,N]$ alınsın. Çek(f) M'de geniş olmadığından, Çek$(f) \cap Q = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı injektif $Q \subseteq M$ vardır. Buradan, aşağıdaki homomorfizma

$$Q \ni x \mapsto f(x) \in f(Q)$$

bir izomorfizmadır. Buradan, Q injektif olduğundan $f(Q)$ injektiftir. Ayrıca Q, $f(Q)$ injektif olduğundan $Q \leq_d M$ ve $f(Q) \leq_d N$'dir. Dolayısıyla, Önteorem 3.1.1(4) gereğince f kısmi tersinirdir. Sonuç olarak, $\text{Tot}[M,N] \subseteq \Delta[M,N]$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $A \subseteq M$ geniş olmayan bir altmodül olsun ve $\nu : M \to M/A$ ile Çek$(\nu) = A$ olan doğal epimorfizma gösterilsin. I injektif bir modül olmak üzere $g : M/A \to I$ bir monomorfizma olsun (örneğin I, M/A'nın injektif zarfı olabilir). Çek$(g\nu) = A$ ve A M'de geniş olmadığından kabulden $g\nu$ kısmi tersinirdir. Bu durumda, aşağıdaki homomorfizmayı

$$h\colon Q \ni x \mapsto g\nu(x) \in C$$

bir izomorfizma yapan $0 \neq Q \leq_d M$ ve $C \leq_d I$ vardır. I injektif olduğundan C ve Q injektiftir. Ayrıca, h bir izomorfizma ve Çek$(g\nu) = A$ olduğundan $A \cap Q = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, M yerel injektiftir.

(2) $(i) \Rightarrow (ii)$ Önteorem 3.3.3 gereğince her $M \in \text{Mod}–R$ için $\nabla[M,N] \subseteq \text{Tot}[M,N]$'dir. Dolayısıyla, sadece $\text{Tot}[M,N] \subseteq \nabla[M,N]$ kapsaması gösterilmelidir. Bunun için Gör(f) N'de dar olmayacak şekilde $f \in [M,N]$ alınsın. Kabulden P projektif ve $P \subseteq$ Gör(f) olacak şeklide $0 \neq P \leq_d N$ vardır. $P \leq_d N$ olduğundan $\pi : N \to P$ izdüşümü vardır. Ayrıca, $P \subseteq$ Gör(f) olduğundan πf dönüşümü bir epimorfizmadır. P projektif olduğundan πf epimorfizması parçalanır:

$$M = M_1 \oplus \text{Çek}(\pi f) \text{ ve } \pi f|_{M_1} : M_1 \ni x \mapsto \pi f(x) \in P$$

bir izomorfizmadır. Dolayısıyla, Önteorem 3.1.1(4)'den πf ve Önteorem 3.1.16'dan f kısmi tersinirdir. Sonuç olarak, $\text{Tot}[M,N] \subseteq \nabla[M,N]$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $B \subseteq N$ dar olmayan bir altmodül olsun ve $\iota : B \to N$ ile içerim dönüşümü gösterilsin. W projektif bir modül olmak üzere $g : W \to B$ bir epimorfizma olsun (örneğin W, serbest bir modül olabilir). Gör$(\iota g) = B$ ve B N'de dar olmadığından kabulden ιg kısmi tersinirdir. Bu durumda, aşağıdaki homomorfizmayı

$$h\colon K \ni x \mapsto \iota g(x) \in P$$

bir izomorfizma yapan $0 \neq K \leq_d W$ ve $P \leq_d N$ vardır. W projektif olduğundan K ve P projektiftir. Ayrıca, $\text{Gör}(\iota g) = B$ olduğundan $\iota g(K) = P \subseteq B$ elde edilir. Sonuç olarak, N yerel projektiftir. □

Şimdi Teorem 3.5.4'te elde edilen sonuçlar $[R, M]$ ve ρ yardımıyla M modülü için verilecektir.

Sonuç 3.5.5 [9] *R bir halka olsun. Bu durumda,*

1. *R_R sağ R–modülünün yerel injektif olması için gerek ve yeter koşul her $M \in \text{Mod–}R$ için $\Delta(M) = \text{Tot}(M)$ olmasıdır.*

2. *R_R yerel injektif ve M_R yerel projektif ise $\Delta(M) = \text{Rad}(M) = \text{Tot}(M)$'dir.*

Teorem 3.5.6 [11] *M yerel projektif modül olsun. Bu durumda,*

1. *$\text{Rad}(M) \ll M$'dir.*

2. *$\text{Rad}(M) = \text{Tot}(M)$'dir.*

İspat: (1) M yerel projektif modül olsun ve aksine $\text{Rad}(M)$, M'de dar olmasın. Yerel projektif modül tanımından, $P \subseteq \text{Rad}(M)$ olacak şekilde $0 \neq P \leq_d M$ projektif altmodülü vardır. $M = P \oplus A$ yazılsın. O zaman, $\text{Rad}(M) = P \oplus (A \cap \text{Rad}(M))$ ve $\text{Rad}(M) = \text{Rad}(P) \oplus \text{Rad}(A)$ olur. $P \subseteq \text{Rad}(M)$, $\text{Rad}(P) \subseteq P$ ve $\text{Rad}(A) \subseteq A$ olduğundan modüler kuralı gereğince,

$$P = \text{Rad}(P) \oplus (P \cap \text{Rad}(A)) = \text{Rad}(P)$$

elde edilir. Fakat, sıfırdan farklı projektif modül radikalinden farklı olduğu için bu bir çelişkidir.

(2) Teorem 3.5.4(1) gereğince açıktır. □

Teorem 3.5.7 [11] *M projektif modülü için $\text{Rad}(M) \ll M$ ve $\text{Rad}(M) = \text{Tot}(M)$ ise M yerel projektiftir.*

İspat: M projektif modülü için $\mathrm{Rad}(M) \ll M$, $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ ve $B \subseteq M$ dar olmayan bir altmodül olsun. Kabulden $B \nsubseteq \mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$'dir. Bu durumda, B kısmi tersinir bir b elemanı kapsar. O zaman, $0 \neq d := b\varphi = d^2 \in E_M$ olacak şekilde $\varphi \in [M, R]$ vardır. Şimdi, $0 \neq d(M) = b\varphi(M) \leq_d M$ olduğu için $d(M)$ projektiftir. Ayrıca, $d(M) = b\varphi(M) \subseteq bR \subseteq B$ olduğundan M yerel projektif elde edilir. □

Sonuç 3.5.8 [11] *R halkası için $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Tot}(R)$ ise R_R ve ${}_RR$ yerel projektiftir.*

İspat: R_R, ${}_RR$ projektif ve sonlu üretilmiş $R = 1R = R1$ için $\mathrm{Rad}(R) \ll R_R$ ve $\mathrm{Rad}(R) \ll_R R$'dir. Dolayısıyla, Teorem 3.5.7 gereğince R_R ve ${}_RR$ yerel projektiftir. □

Sonuç 3.5.9 [11]

1. *M yerel injektif ise her $N \in \mathrm{Mod}$–R için $\nabla[M, N] \subseteq \Delta[M, N]$'dir.*
2. *N yerel projektif ise her $M \in \mathrm{Mod}$–R için $\Delta[M, N] \subseteq \nabla[M, N]$'dir.*

İspat: (1) M yerel injektif olsun. Her $N \in \mathrm{Mod}$–R için $\nabla[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ olduğu bilinmektedir. Kabulden, Teorem 3.5.4(1) gereğince $\nabla[M, N] \subseteq \Delta[M, N]$ elde edilir.

(2) N yerel projektif olsun. Her $M \in \mathrm{Mod}$–R için $\Delta[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ olduğu bilinmektedir. Kabulden, Teorem 3.5.4(2) gereğince $\Delta[M, N] \subseteq \nabla[M, N]$ elde edilir. □

Sonuç 3.5.10 [11]

1. *M yerel injektif ve geniş kısıtlanmış bir modül ise her $N \in \mathrm{Mod}$–R için $\Delta[M, N] = \mathrm{Rad}[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.*
2. *N yerel projektif ve dar kısıtlanmış bir modül ise her $M \in \mathrm{Mod}$–R için $\nabla[M, N] = \mathrm{Rad}[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$'dir.*

İspat: (1) M yerel injektif ve geniş kısıtlanmış olsun. $N \in \mathrm{Mod}$–R alınsın. Teorem 3.3.4(1) gereğince $\Delta[M, N] \subseteq \mathrm{Rad}[M, N]$'dir. Ayrıca, $\mathrm{Rad}[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ olduğu bilinmektedir. M yerel injektif olduğundan

$$\Delta[M, N] \subseteq \mathrm{Rad}[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N] = \Delta[M, N]$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\Delta[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N] = \mathrm{Tot}[M,N]$'dir.

(2) M yerel projektif ve dar kısıtlanmış olsun. $M \in$ Mod–R alınsın. Teorem 3.3.4(2) gereğince $\nabla[M,N] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N]$'dir. Ayrıca, $\mathrm{Rad}[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ olduğu bilinmektedir. M yerel projektif olduğundan

$$\nabla[M,N] \subseteq \mathrm{Rad}[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N] = \nabla[M,N]$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N] = \mathrm{Tot}[M,N]$'dir. □

Önerme 3.5.11 [11]

1. *İnjektif modüllerin keyfi dik toplamı yerel injektiftir.*

2. *Eğer V yerel injektif ve $V \leq_e M$ ise M yerel injektiftir.*

İspat: (1) Her $i \in I$ için Q_i injektif olmak üzere $V := \bigoplus_{i\in I} Q_i$ olsun. A, V'nin geniş olmayan bir altmodülü olsun. Bu durumda, $A \cap C = 0$ olacak şekilde $0 \neq C \leq V$ vardır. C_0 sonlu üretilmiş olmak üzere $0 \neq C_0 \leq C$ seçilsin. Bu durumda, $A \cap C_0 = 0$'dır. C_0 sonlu üretilmiş olduğundan $C_0 \subseteq Q := \bigoplus_{i\in I_0} Q_i$ olacak şekilde $I_0 \subseteq I$ sonlu kümesi vardır. Buradan, Q injektif olduğundan $0 \neq C_0 \leq_e Q_0$ olacak şekilde $Q_0 \subseteq Q$ olan, C_0'ın bir injektif zarfı vardır. Ayrıca, $A \cap C_0 = 0$ ve $0 \neq C_0 \leq_e Q_0$ olduğundan $A \cap Q_0 = 0$ ve $Q_0 \neq 0$'dır. Sonuç olarak, Tanım 3.5.1(1) gereğince V yerel injektiftir.

(2) A, M'nin geniş olmayan bir altmodülü olsun. Bu durumda, $A \cap C = 0$ olacak şekilde $0 \neq C \leq M$ vardır. $V \leq_e M$ olduğundan $V \cap C \neq 0$'dır. Ayrıca, $(A \cap V) \cap (V \cap C) \subseteq A \cap C = 0$ olduğundan $A \cap V$ V'de geniş değildir. Kabulden $(A \cap V) \cap Q = 0$ olacak şekilde $0 \neq Q \subseteq V$ injektif altmodülü vardır. $A \cap Q = 0$ olduğu gösterilirse M yerel injektif elde edilir. Tersine $A \cap Q \neq 0$ olsun. Bu durumda, $V \leq_e M$ olduğundan $V \cap (A \cap Q) \neq 0$ elde edilir ki bu $(A \cap V) \cap Q = 0$ ile çelişir. Dolayısıyla, $A \cap Q = 0$ elde edilir. □

Teorem 3.5.12 [12] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M yerel injektiftir.*

2. *$\bigoplus_{i\in I} Q_i \leq_e M$ olacak şekilde injektif $Q_i \subseteq M$ modüllerinin bağımsız $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesi vardır.*

İspat: (1) ⇒ (2) İnjektif $Q_i \subseteq M$ modüllerinin bağımsız $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailelerinin artan zincirinin birleşimi yine bu türden bir aile olduğundan Zorn Önteoremi uygulanabilir. Dolayısıyla, genelliği bozmadan $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesini maksimal olarak kabul edebiliriz. Şimdi, $\bigoplus_{i \in I} Q_i \leq_e M$ olduğu gösterilecektir. Tersine, $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ M'de geniş olmasın. Kabulden $(\bigoplus_{i \in I} Q_i) \cap Q = 0$ olacak şekilde $Q \subseteq M$ injektif altmodülü vardır. Bu ise $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesinin maksimal oluşu ile çelişir. Sonuç olarak, $\bigoplus_{i \in I} Q_i \leq_e M$ elde edilir.

(2) ⇒ (1) Kabulden $\bigoplus_{i \in I} Q_i \leq_e M$ olacak şekilde injektif $Q_i \subseteq M$ modüllerinin bağımsız $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesi vardır. Önerme 3.5.11(1) gereğince $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ yerel injektiftir. Buradan, $\bigoplus_{i \in I} Q_i \leq_e M$ olduğundan Önerme 3.5.11(2) göz önüne alındığında M yerel injektif elde edilir. □

Aşağıdaki teorem yardımıyla sağ Noether halkaların yerel injektif modüllerle de karakterize edilebileceği gösterilecektir. Bu teorem Beidar ve Kasch [3] tarafından bazı özel halka sınıfları için gösterilmiş fakat, Beidar ve Ke tarafından her halka sınıfı için doğru olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 3.5.13 [4] *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R sağ Noether halkadır.*
2. *İnjektif sağ R–modüllerin dik toplamlarının geniş genişlemesi, injektif sağ R–modüllerin dik toplamıdır.*
3. *$\{S_i \mid i = 1, 2, ...\}$ basit sağ R–modüllerin bir ailesi olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$'nin geniş genişlemesi, injektif sağ R–modüllerin dik toplamıdır.*
4. *$\{S_i \mid i = 1, 2, ...\}$ basit sağ R–modüllerin bir ailesi olmak üzere $\bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ injektif olacak şekilde $\mathbb{N}$'nin bir sonsuz I altkümesi vardır.*

İspat: (1) ⇒ (2) Teorem 2.7.7 gereğince açıktır.

(2) ⇒ (3) Kabulden açıktır.

(3) ⇒ (4) $\{S_i \mid i = 1, 2, ...\}$ basit sağ R–modüllerin bir ailesi ve her $i \in \mathbb{N}$ için $E_i = E(S_i)$ olsun.

$$G := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i \text{ ve } E := E(G)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $G = E$ ise ispat biter. $G \neq E$ olsun ve $x \in E \backslash G$ alınsın. Zorn Lemma'dan E'nin $G \subseteq P$ ve $x \notin P$ özelliğine göre maksimal olan bir P altmodülü vardır. $E \neq P$ olduğundan $E/P \neq 0$'dır. Ayrıca, E/P modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin arakesitinin sıfırdan farklı olduğu ve bu arakesitin $x + P$ tarafından üretildiği kolayca gösterilebilir. $\bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} E_i = G \leq_e E$ ve $G \subseteq P$ olduğundan $G \leq_e P$ olup kabulden P injektif modüllerin dik toplamıdır. Yani $0 \neq U_k$ injektif modüller olmak üzere $P = \bigoplus\limits_{k \in K} U_k$'dır. $x \notin P$ ve $P \leq_e E$ olduğundan P injektif değildir ve böylece $|K| = \infty$ olur. $|K_1| = |K_2| = \infty$ ve $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ olmak üzere $K = K_1 \cup K_2$ olarak yazılsın. $V = \bigoplus\limits_{k \in K_1} U_k$ ve $W = \bigoplus\limits_{k \in K_2} U_k$ olsun. Bu durumda, $P = V \oplus W$ olur. V' V'nin ve W' W'nin E içindeki geniş kapanışları olsun. E injektif olduğundan V' ve W' injektif olur ve buradan $V' \oplus W'$ injektif elde edilir. $G \leq_e E$ ve $G \subseteq P = V \oplus W \subseteq V' \oplus W'$ olduğundan $V' \oplus W' \leq_e E$ olur ve $E = V' \oplus W'$ elde edilir. Böylece,

$$E/P = (V' \oplus W')/V \oplus W \cong (V'/V) \oplus (W'/W)$$

olur. E/P'nin sıfırdan farklı altmodüllerinin arakesiti sıfırdan farklı olduğundan $V' = V$ veya $W' = W$'dir. $V' = V$, yani V injektif olsun. $G := \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} E(S_i)$ ve $\mathrm{Soc}(S_i) = \mathrm{Soc}(E(S_i)) = S_i$ olduğundan $\mathrm{Soc}(G) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Soc}(E(S_i)) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} S_i$ elde edilir. Ayrıca, $\mathrm{Soc}(G) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} S_i \leq_e G \leq_e P$ olduğundan her $k \in K$ için $\mathrm{Soc}(U_k) = \mathrm{Soc}(P) \cap U_k \leq_e U_k$ olur. Özel olarak her $k \in K$ için $\mathrm{Soc}(U_k) \neq 0$'dır. Buradan, her $k \in K$ için $T_k \subseteq U_k$ olacak şekilde T_k basit altmodüllerini ve her $k \in K_1$ için $T_k \cong S_{ik}$ olacak şekilde farklı elemanlardan oluşan $I = \{i_k \mid k \in K_1\} \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi seçilebilir. E'_k, T_k'nın U_k içinde bir geniş kapanışı olsun ve her $k \in K_1$ için $U_k = E'_k \oplus U'_k$ olarak yazılsın. O zaman, $V = [\bigoplus\limits_{k \in K_1} E'_k] \bigoplus [\bigoplus\limits_{k \in K_1} U'_k]$ olur. Böylece, $\bigoplus\limits_{k \in K_1} E'_k$ bir injektif modüldür. Her $k \in K$ için $E'_k \cong E(S_{ik})$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, $\bigoplus\limits_{i \in I} E(S_i) \cong \bigoplus\limits_{k \in K_1} E'_k$ olduğundan $\bigoplus\limits_{i \in I} E(S_i)$ injektif olacak şekilde $\mathbb{N}$'nin bir sonsuz I altkümesi elde edilmiş olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) Tersine R halkasının sağ Noether olmadığı kabul edilsin. Dolayısıyla, R yerel olarak Noether de değildir. Bu durumda, R'nin sonlu üretilmişbir L sağ ideali vardır ki bu ideal sonlu üretilmiş ideallerin $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \ldots$ artan dizisine sahiptir. $K_0 = 0$ ve $K = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$ şeklinde tanımlansın. $K_{i-1} \subset K_i$ olduğundan Zorn Lemma'dan her K_i, $K_{i-1} \subset L_i$ olacak şekilde L_i maksimal sağ idealini kapsar. $S_i := K_i/L_i$ ve $E_i = E(S_i)$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca, α_i dönüşümleri

$$\alpha_i : K \to E_i, \quad K_i \xrightarrow{\pi_i} S_i \xrightarrow{\iota_i} E_i$$

dönüşümlerinin bileşkelerinin genişlemeleri olsun. Yani $i, j \in \mathbb{N}, j > i$ olmak üzere $\alpha_i(K_i) = S_i$ ve $\alpha_j(K_i) = 0$ olsun. Kabulden $E = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i$ injektif olacak şekilde $I \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz altkümesi vardır.

$$\alpha : K \to \prod_{i \in I} E_i \text{ dönüşümü } \alpha(x) = (\alpha_j(x))_{j \in I} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$x \in K$ alınsın. O zaman, $x \in K_i$ olacak şekilde $i \in I$ vardır. Bu durumda, her $j > i$ olan $j \in I$ için $\alpha_j(x) = 0$'dır. Böylece, her $x \in K$ için $\alpha(x) \in E = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i \subseteq \prod\limits_{i \in I} E_i$ olduğundan $\alpha(K) \subseteq E$ elde edilir. E injektif olduğundan α dönüşümü $\tilde{\alpha} : L \to E$ olmak üzere L'ye genişler. L sonlu üretilmiş olduğundan $\alpha(L) \subseteq \bigoplus\limits_{j \in F} E_j$ olacak şekilde sonlu $F \subseteq I$ vardır. Buradan, $\alpha(K) \subseteq \bigoplus\limits_{j \in F} E_j \subseteq \bigoplus\limits_{i \in I} E_i$ olur. Öte yandan, her $j \in J$ için $j < i$ olan $i \in I$ alınsın. $E_i \cap (\bigoplus\limits_{j \in F} E_j) = 0$ olduğundan $S_i \nsubseteq \bigoplus\limits_{j \in F} E_j$'dir. Fakat $S_i = \alpha(K_i) \subseteq \alpha(K)$ ve $\alpha(K) \subseteq \bigoplus\limits_{j \in F} E_j$ olduğundan $S_i \subseteq \bigoplus\limits_{j \in F} E_j$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, R sağ Noether halkadır. □

Sonuç 3.5.14 *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R sağ Noether halkadır.*
2. *Her yerel injektif sağ R–modül injektiftir.*
3. *Her yerel injektif sağ R–modül injektif sağ R–modüllerin dik toplamıdır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M yerel injektif sağ R–modül olsun. Teorem 3.5.12 gereğince $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i \leq_e M$ olacak şekilde injektif $Q_i \subseteq M$ modüllerinin bağımsız $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesi vardır. R sağ Noether halka olduğundan Teorem 2.7.7 gereğince $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i$ injektiftir. Buradan, $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i \leq_d M$ olacağından $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i = M$ ve M injektif olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) I bir indis kümesi olmak üzere $\{E_i \mid i \in I\}$ injektif R–modüllerin bir ailesi ve $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i \leq_e E$ olsun. İnjektif modüllerin keyfi dik toplamı yerel injektif olduğundan $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i$ yerel injektiftir. Kabulden $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i$ injektif olur. Dolayısıyla, $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i \leq_d E$ elde edilir. Aynı zamanda, $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i \leq_e E$ olduğundan $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i = E$ olur. Sonuç olarak, Teorem 3.5.13(2) gerçeklendiğinden R sağ Noether halka elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (3) M yerel injektif sağ R–modül olsun. Teorem 3.5.12 gereğince $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i \leq_e M$ olacak şekilde injektif $Q_i \subseteq M$ modüllerinin bağımsız $\{Q_i \mid i \in I\}$ ailesi vardır. R sağ Noether halka olduğundan Teorem 2.7.7 gereğince $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i$ injektiftir. Buradan, $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i \leq_d M$ olacağından $\bigoplus\limits_{i \in I} Q_i = M$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) I bir indis kümesi olmak üzere $\{E_i \mid i \in I\}$ injektif R–modüllerin bir ailesi ve $\bigoplus_{i \in I} E_i \leq_e E$ olsun. İnjektif modüllerin keyfi dik toplamı yerel injektif olduğundan $\bigoplus_{i \in I} E_i$ yerel injektiftir. Ayrıca, Önerme 3.5.11(2) gereğince E yerel injektiftir. Kabulden E injektif sağ R–modüllerin dik toplamı olur. Sonuç olarak, Teorem 3.5.13(2) gereğince R sağ Noether halka elde edilir. □

4 DÜZENLİLİK VE $\mathbf{Hom}_R(M, N)$'nin ALTYAPILARI

M ve N sağ R–modüller olsun. $[M, N]$'nin bir E_N-E_M–bimodül olduğu önceki bölümde belirtilmişti. Bu bölümde düzenli homomorfizmalar incelenecek ve düzenli altküme tanımı ile birlikte $[M, N]$'nin tek en büyük düzenli alt-bimodülü $\text{Reg}[M, N]$'ye sahip olduğu gösterilecektir. Ayrıca düzenliliğin genellemesi olan yarıdüzenlilik araştırılacaktır. Son olarak, yarıgüçlülük, yarıdüzenlilik, $\text{Reg}[M, N]$ ve $[M, N]$'nin diğer altyapıları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.1 Düzenlilik

M ve N modüller olsun. Tanım 3.1.4'te eğer $f \in [M, N]$ için $fgf = f$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ var ise, f homomorfizmasına düzenli homomorfizma denilmişti.

Tanım 4.1.1 [13] M ve N modüller olsun.

1. $X \subseteq [M, N]$ olsun. Eğer X'in her elemanı düzenli ise X altkümesine *düzenlidir* denir.

2. Eğer $[M, N]$'nin her elemanı düzenli ise $[M, N]$'ye *düzenlidir* denir.

İzomorfizmalar yardımıyla düzenli homomorfizma tanımının modül ve halka için verilen düzenli eleman tanımıyla çakıştığı gösterilebilir. $\rho : [R, N] \to N$, $\rho(f) = f(1)$ şeklinde tanımlı izomorfizma ile N modülü için düzenli eleman tanımına ulaşılır. Benzer durum $\text{End}(R_R) = [R, R] \cong R$ izomorfizması ile R halkası için geçerlidir.

Önteorem 4.1.2 [10] $f \in [R, N]$ ve $n := f(1) \in N$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f düzenlidir.

2. n düzenlidir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) f düzenli olduğundan $fgf = f$ olacak şekilde $g \in [N, R]$ vardır. Buradan $n = f(1) = (fgf)(1) = f(1.g(f(1))) = f(1)g(n) = ng(n)$ olduğundan n düzenlidir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $n = f(1)$ düzenli ve $r \in R$ olsun. O zaman $n = ng(n)$ olacak şekilde $g \in [N, R]$ vardır. Şimdi,

$$\begin{aligned} f(r) &= f(1)r = nr = (ng(n))r \\ &= f(1)g(f(1))r = f(1)g(f(r)) = (fgf)(r) \end{aligned}$$

olduğundan $f = fgf$ ve f düzenli elde edilir. □

Teorem 4.1.3 [9] *M ve N modüller olsun. Eğer $f \in [M, N]$ düzenli ve $g \in [N, M]$ için $fgf = f$ ise aşağıdakiler sağlanır.*

$$M = \text{Çek}(f) \oplus \text{Gör}(gf)$$
$$N = \text{Gör}(f) \oplus \text{Çek}(fg)$$

İspat: f düzenli ve $fgf = f$ olsun. $e := fg$ ve $d := gf$ şeklinde tanımlasın. $e = e^2$ ve $d = d^2$ olduğu açıktır. Böylece, $M = d(M) \oplus (1 - d)(M)$ ve $N = e(N) \oplus (1 - e)(N)$ ayrışımları elde edilir. $f(1 - d) = f - fgf = 0$ olduğundan $f(1 - d)(M) = 0$'dır. Dolayısıyla, $(1 - d)(M) \subseteq \text{Çek}(f)$ olur. Şimdi, $m \in \text{Çek}(f)$ alınsın. $(1 - d)(m) = m - gf(m) = m$ olduğundan $\text{Çek}(f) \subseteq (1 - d)(M)$ elde edilir. Her iki kapsama ile $(1 - d)(M) = \text{Çek}(f)$ ve $M = \text{Çek}(f) \oplus \text{Gör}(gf)$'dir.

Ayrıca, $\text{Gör}(f) = f(M) = fgf(M) = ef(M) \subseteq e(N) = fg(N) \subseteq f(M)$ olduğundan $\text{Gör}(f) = \text{Gör}(fg)$ ve $N = \text{Gör}(f) \oplus \text{Çek}(fg)$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.4 [10] *M ve N modüller olsun. $f \in [M, N]$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *f düzenlidir.*

2. *$\text{Çek}(f) \leq_d M$ ve $\text{Gör}(f) \leq_d N$'dir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) f düzenli olsun. O zaman, $fgf = f$ olacak şekilde $g \in [N, M]$ vardır. Teorem 4.1.3 gereğince istenen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $M = \text{Çek}(f) \oplus M_0$ ve $N = \text{Gör}(f) \oplus N_0$ olsun. Ayrıca, $\pi : N \to \text{Gör}(f)$ izdüşüm dönüşümü ve $\iota : M_0 \to M$ içerim dönüşümü olsun.

$$f|_{M_0} := f_0 : M_0 \to \text{Gör}(f)$$

olarak tanımlansın. $f_0 = f|_{M_0}$ olduğundan f_0 bir izomorfizmadır. Şimdi, $g = \iota {f_0}^{-1}\pi$ şeklinde tanımlasın. $m \in M$ alınsın. $M = \text{Çek}(f) \oplus M_0$ olduğundan $m = x + \hat{m}$ olacak şekilde $x \in \text{Çek}(f)$ ve $\hat{m} \in M_0$ vardır. Buradan $f(m) = f(\hat{m})$ ve $fgf(m) = fgf(\hat{m}) = f\iota {f_0}^{-1}\pi f(\hat{m}) = f(\hat{m}) = f(m)$ olur. Sonuç olarak, $fgf = f$ ve f düzenli elde edilir. □

Sonuç 4.1.5 [10] *M, $N \in$ Mod–R olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ düzenli homomorfizma kapsar.*

2. *$M_1 \cong N_1$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ve $N = N_1 \oplus N_2$ ayrışımları vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $f \in [M, N]$ düzenli olsun. $\text{Çek}(f) \leq_d M$ ve $\text{Gör}(f) \leq_d N$'dir. $M_2 = \text{Çek}(f)$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde $M_1 \leq M$ vardır. Benzer şekilde $N_1 = \text{Gör}(f)$ olmak üzere $N = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $N_2 \leq N$ vardır. Bu durumda, $N_1 = \text{Gör}(f) \cong M/\text{Çek}(f) = M/M_2 \cong M_1$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $M = M_1 \oplus M_2$, $N = N_1 \oplus N_2$ ve $f_1 : M_1 \to N_1$ bir izomorfizma olsun. $f : M \to N$, $f|_{M_1} = f_1$ ve $f(M_2) = 0$ olan homomorfizma olarak tanımlanırsa Teorem 4.1.4 gereğince f düzenlidir. □

Sonuç 4.1.6 [9] *N sağ R–modül olsun. Eğer $n \in N$ düzenli ve $\varphi \in [N, R]$ için $n = n\varphi(n)$ ise aşağıdakiler sağlanır.*

$$R = ann_r(n) \oplus \varphi(n)R$$
$$N = nR \oplus \{x \in N \mid \varphi(x) \in ann_r(n)\}$$

İspat: $\rho : [R, N] \to N$, $\rho(f) = f(1)$ bir izomorfizma olduğundan $n = \rho(f) = f(1)$ olacak şekilde $f \in [R, N]$ vardır. $\text{Çek}(f) = \{\, r \in R \mid f(r) = nr = 0\} = ann_r(n)$, $\text{Gör}(f) = f(R) = f(1)R = nR$, $\text{Gör}(\varphi f) = \varphi(f(R)) = \varphi(nR) = \varphi(n)R$ ve $\text{Çek}(f\varphi) = \{x \in N \mid \varphi(x) \in ann_r(n)\}$ eşitlikleri Teorem 4.1.3'te yerine konulursa R ve N için istenen ayrışımlar elde edilir. □

Sonuç 4.1.7 [9] *N sağ R–modül olsun. $n \in N$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *$n \in N$ düzenlidir.*

2. *$ann_r(n) \leq_d R$ ve $nR \leq_d N$'dir.*

3. nR projektif R–modül ve $nR \leq_d N$'dir.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Önteorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.4 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) R projektif, $ann_r(n) \leq_d R$ ve $R/ann_r(n) \cong nR$ olduğundan nR projektif R–modüldür.

(3) $\Rightarrow$ (2) $nR \leq_d N$ projektif R–modül olsun. $\alpha : R \to nR$, $\alpha(1) = n$ şeklinde tanımlı homomorfizma bir epimorfizmadır ve nR projektif olduğundan parçalanır. Dolayısıyla, Çek$(\alpha) = ann_r(n) \leq_d R$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.8 [9] *$N \in Mod$–R olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. N düzenli eleman kapsar.

2. $R_1 \cong N_1$ olacak şekilde $R_R = R_1 \oplus R_2$ ve $N = N_1 \oplus N_2$ ayrışımları vardır.

İspat: Sonuç 4.1.5'de $M = R$ alınırsa istenen elde edilir. □

Nicholson [22], M_R'nin dik toplananına izomorf olan altmodül de dik toplanan ise M'yi direkt injektif modül (direct injective module) ve $A \leq M_R$ ve M/A M'nin dik toplananına izomorf olduğunda A da M'de dik toplanan ise M'yi direkt projektif modül (direct projective module) olarak tanımlamıştır. Bu modüller Mohamed ve Müller [19] tarafından sırasıyla (C_2) ve (D_2) koşulunu sağlayan modüller olarak adlandırılıp çalışılmıştır. Nicholson ve Zhou [20] bu kavramları aşağıda verilecek tanımlar ile genelleştirmiş ve $[M, N]$'nin düzenliliği ile ilgili denklikleri elde etmişlerdir.

Tanım 4.1.9 [20] M ve N modüller olsun.

1. $K \leq N$ ve $K \cong P \leq_d M$ olduğunda $K \leq_d N$ ise M *direkt N-injektif modül (direct N-injective module)* olarak adlandırılır.

2. $K \leq N$ ve $N/K \cong P \leq_d M$ olduğunda $K \leq_d N$ ise M *direkt N-projektif modül (direct N-projective module)* olarak adlandırılır.

Uyarı 4.1.10 Yukarıdaki tanım ile birlikte aşağıdaki denklikler kolayca görülmektedir.

M (C_2)'ye sahip (direkt injektif)'tir $\Leftrightarrow$ M direkt M-injektiftir.

M (D_2)'ye sahip (direkt projektif)'tir $\Leftrightarrow$ M direkt M-projektiftir.

Önteorem 4.1.11 [20] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M injektif modüldür.*

2. *Her N modülü için M direkt N-injektif modüldür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M injektif, N bir modül, $K \leq N$ ve $K \cong P \leq_d M$ olsun. $P \leq_d M$ ve M injektif olduğundan P injektif ve dolayısıyla K injektiftir. Buradan, $K \leq_d N$ ve M direkt N-injektif modül olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) M her N modülü için direkt N-injektif modül olsun. Dolayısıyla, M direkt $E(M)$-injektif modül olur. O zaman, $M \leq E(M)$ ve $M \cong M \leq_d M$ olduğundan $M \leq_d E(M)$'dir. Aynı zamanda $M \leq_e E(M)$ olduğundan $M = E(M)$ elde edilir. Sonuç olarak, M injektif modüldür. $\square$

Önteorem 4.1.12 [20] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *M projektif modüldür.*

2. *Her N modülü için M direkt N-projektif modüldür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M projektif modül, N bir modül, $K \leq N$ ve $N/K \cong P \leq_d M$ olsun. M projektif olduğundan P projektif ve dolayısıyla N/K projektiftir. Buradan, $K \leq_d N$ ve M direkt N-projektif modül olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) N bir modül ve $f : N \to M$ bir epimorfizma olsun. O zaman, $N/\text{Çek}(f) \cong M \leq_d M$ ve M direkt N-projektif olduğundan $\text{Çek}(f) \leq_d N$'dir. Buradan, f parçalanır. Böylece, M projektif modüldür. $\square$

Önteorem 4.1.13 [20] *M ve N modülleri için aşağıdakiler denktir.*

1. *M direkt N-injektif modüldür.*

2. *Eğer $P \leq_d M$ ve $Q \leq_d N$ ise her $P \xrightarrow{\alpha} Q$ monomorfizması parçalanır.*

3. *Eğer $P \leq_d M$ ise her $P \xrightarrow{\alpha} N$ monomorfizması parçalanır.*

4. *Eğer $P \xrightarrow{\alpha} N$ monomorfizma, $P \leq_d M$ ve $P \xrightarrow{\mu} M$ ise $\beta\alpha = \mu$ olacak şekilde $\beta : N \to M$ vardır.*

5. *Eğer $P \xrightarrow{\alpha} N$ monomorfizma, $P \leq_d M$ ve $P \xrightarrow{\iota} M$ içerim dönüşümü ise $\beta\alpha = \iota$ olacak şekilde $\beta : N \to M$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $P \leq_d M$, $Q \leq_d N$ ve $P \xrightarrow{\alpha} Q$ bir monomorfizma olsun. $\alpha(P) \subseteq Q \subseteq N$, $\alpha(P) \cong P \leq_d M$ ve M direkt N-injektif modül olduğundan $\alpha(P) \leq_d N$'dır. Dolayısıyla, α parçalanır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabulden açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) $P \xrightarrow{\alpha} N$ monomorfizma, $P \leq_d M$ ve $P \xrightarrow{\mu} M$ olsun. (3)'ten $P \xrightarrow{\alpha} N$ parçalanır. Dolayısıyla, $\psi\alpha = 1_P$ olacak şekilde $\psi : N \to P$ vardır. Eğer $\beta := \mu\psi$ şeklinde tanımlanırsa $\beta\alpha = \mu\psi\alpha = \mu 1_P = \mu$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) Kabulden açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (1) $\sigma : P \to K \leq N$ izomorfizma ve $P \leq_d M$ olsun. O zaman, $P \xrightarrow{\sigma' = \iota_K \sigma} N$ bir monomorfizma olur ve (5)'ten $\iota : P \to M$ içerim dönüşümü olmak üzere $\beta\sigma' = \iota$ olacak şekilde $\beta : N \to M$ vardır. $\pi : M \to P$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\psi := \pi\beta : N \to P$ şeklinde tanımlansın. O zaman, $\psi\sigma' = \pi\beta\sigma' = \pi\iota = 1_P$ olur ve buradan $\sigma' : P \to N$ parçalanır. Dolayısıyla, $\sigma'(P) = K \leq_d N$ ve M direkt N-injektif modül olur. $\square$

Önteorem 4.1.14 [20] *M ve N modülleri için aşağıdakiler denktir.*

1. *M direkt N-projektif modüldür.*

2. *Eğer $P \leq_d M$ ve $Q \leq_d N$ ise $Q \xrightarrow{\alpha} P$ her epimorfizma parçalanır.*

3. *Eğer $P \leq_d M$ ise $N \xrightarrow{\alpha} P$ her epimorfizma parçalanır.*

4. *Eğer $N \xrightarrow{\alpha} P$ epimorfizma, $P \leq_d M$ ve $M \xrightarrow{\lambda} P$ ise $\alpha\beta = \lambda$ olacak şekilde $\beta : M \to N$ vardır.*

5. *Eğer $N \xrightarrow{\alpha} P$ epimorfizma, $P \leq_d M$ ve $M \xrightarrow{\pi} P$ izdüşüm dönüşümü ise $\alpha\beta = \pi$ olacak şekilde $\beta : M \to N$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $P \leq_d M$, $Q \leq_d N$ ve $Q \xrightarrow{\alpha} P$ bir epimorfizma olsun. $N = Q \oplus Q'$ olduğundan $N/(\text{Çek}(\alpha) \oplus Q') \cong Q/\text{Çek}(\alpha) \cong P$ olur. M direkt N-projektif modül olduğundan $\text{Çek}(\alpha) \oplus Q' \leq_d N$ elde edilir. Sonuç olarak, $\text{Çek}(\alpha) \leq_d N$ ve $Q \xrightarrow{\alpha} P$ parçalanır elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabulden açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) $N \overset{\alpha}{\to} P$ epimorfizma, $P \leq_d M$ ve $M \overset{\lambda}{\to} P$ olsun. (3)'ten $N \overset{\alpha}{\to} P$ parçalanır. Dolayısıyla, $\alpha\psi = 1_P$ olacak şekilde $\psi : P \to N$ vardır. Eğer $\beta := \psi\lambda$ şeklinde tanımlanırsa $\alpha\beta = \alpha\psi\lambda = 1_P\lambda = \lambda$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) Kabulden açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (1) ϕ doğal epimorfizma, σ izomorfizma olmak üzere $N \overset{\phi}{\to} N/K \overset{\sigma}{\to} P$ dönüşümleri verilsin ve $P \leq_d M$ olsun. O zaman, $N \xrightarrow{\sigma\phi = \sigma'} P$ bir epimorfizma olur ve (5)'ten $\pi : M \to P$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\sigma'\beta = \pi$ olacak şekilde $\beta : M \to N$ vardır. $\sigma'\beta = \pi$ olduğundan $\sigma'\beta|_P = 1_P$ elde edilir ve dolayısıyla $N \xrightarrow{\sigma\phi = \sigma'} P$ epimorfizması parçalanır. Sonuç olarak, Çek(ϕ) = Çek$(\sigma\phi) = K \leq_d N$ ve M direkt N-projektif modül elde edilir. □

Teorem 4.1.15 [20] *M ve N modülleri için aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ düzenlidir.*
2. *Her $\alpha \in [M, N]$ için Gör$(\alpha) \leq_d N$ ve N direkt M-projektiftir.*
3. *Herhangi sonlu $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subseteq [M, N]$ kümesi için $\sum_{i=1}^{k}$ Gör$(\alpha_i) \leq_d N$ ve N direkt M-projektiftir.*
4. *Her $\alpha \in [M, N]$ için Çek$(\alpha) \leq_d M$ ve M direkt N-injektiftir.*
5. *Herhangi sonlu $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subseteq [M, N]$ kümesi için $\bigcap_{i=1}^{k}$ Çek$(\alpha_i) \leq_d M$ ve M direkt N-injektiftir.*
6. *Her $\alpha \in [M, N]$ için Çek$(\alpha) \leq_d M$ ve Gör$(\alpha) \leq_d N$'dir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Eğer $\alpha \in [M, N]$ ise Önteorem 4.1.4 gereğince Gör$(\alpha) \leq_d N$'dir. Şimdi N'nin direkt M-projektif olduğunu göstermek için Önteorem 4.1.14(5) gerçeklenecektir. Dolayısıyla $M \overset{\alpha}{\to} P$ epimorfizma, $P \leq_d N$ ve $N \overset{\pi}{\to} P$ izdüşüm dönüşümü olsun. $M \xrightarrow{\alpha' = \iota_P\alpha} N$ ise (1)'den $\alpha' = \alpha'\gamma\alpha'$ olacak şekilde $\gamma \in [N, M]$ vardır. Eğer $e := \alpha'\gamma$ şeklinde tanımlanırsa Önteorem 4.1.3 ispatından $e^2 = e \in E_N$ ve Gör(α') = Gör$(\alpha) = e(N)$ elde edilir. Buradan, $e(N) = P = \pi(N)$ ve dolayısıyla $e\pi = \pi$ olur. $\beta := \gamma|_P\pi \in [N, M]$ şeklinde tanımlanırsa $\alpha\beta = \alpha\gamma|_P\pi = e\pi = \pi$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) k üzerinden tümevarım uygulanacaktır. $k = 1$ (2)'den sağlanır. $k > 1$ ve $\sum_{i=1}^{k-1} \text{Gör}(\alpha_i) \leq_d N$ olsun. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^{k-1} \text{Gör}(\alpha_i) = e(N)$ olacak şekilde $e^2 = e \in E_N$ vardır. $(1_N - e)\alpha_k : M \to N$ olduğundan (2)'den $(1_N - e)\alpha_k(M) = f(N)$ olacak şekilde $f^2 = f \in E_N$ vardır. O zaman, $ef = 0$ ve böylece $g := e + f - fe$ için $g^2 = g \in E_N$'dir. Buradan, $\sum_{i=1}^{k} \text{Gör}(\alpha_i) = e(N) + \alpha_k(M) = e(N) + (1_N - e)\alpha_k(M) = e(N) + f(N) = g(N) \leq_d N$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $\alpha \in [M, N]$ alınsın. Kabulden $M/\text{Çek}(\alpha) \cong \text{Gör}(\alpha) \leq_d N$'dir. Buradan, N direkt M-projektif olduğundan $\text{Çek}(\alpha) \leq_d M$'dir. M direkt N-injektif olduğunu göstermek için $K \leq N$ ve $K \cong P \leq_d M$ alınsın. $\pi : M \to P$ izdüşüm, $\sigma : P \to K$ izomorfizma ve $\iota : K \to N$ içerim dönüşümü olmak üzere $M \xrightarrow{\iota\sigma\pi} N$ homomorfizması için (3)'ten $\text{Gör}(\iota\sigma\pi) = K \leq_d N$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) k üzerinden tümevarım uygulanacaktır. $k = 1$ (2)'den sağlanır. $k > 1$, $X = \bigcap_{i=1}^{k-1} \text{Çek}(\alpha_i) \leq_d M$ ve $M = X \oplus X'$ olsun. $\pi : M \to X$ izdüşüm ve $\iota : X \to M$ içerim dönüşümü olmak üzere $\alpha_k\iota\pi : M \to N$ ve $\text{Çek}(\alpha_k\iota\pi) = (X \cap \text{Çek}(\alpha_k)) \oplus X'$ olur. (4)'ten $\text{Çek}(\alpha_k\iota\pi) \leq_d M$ olduğundan $X \cap \text{Çek}(\alpha_k) = \bigcap_{i=1}^{k} \text{Çek}(\alpha_i) \leq_d M$ elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (6) $\alpha \in [M, N]$ alınsın. Kabulden $\text{Çek}(\alpha) \leq_d M$'dir. Eğer $M = \text{Çek}(\alpha) \oplus P$ ise $\text{Gör}(\alpha) \cong P \leq_d M$ ve M direkt N-injektif olduğundan $\text{Gör}(\alpha) \leq_d N$ elde edilir.

(6) $\Rightarrow$ (1) Sonuç 4.1.4 gereğince açıktır. $\square$

Teorem 4.1.15'de $N = M$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.16 [20] *M modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *E_M düzenli halkadır.*

2. *Her $\alpha \in E_M$ için $\text{Gör}(\alpha) \leq_d M$ ve M direkt projektiftir.*

3. *Herhangi sonlu $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subseteq E_M$ kümesi için $\sum_{i=1}^{k} \text{Gör}(\alpha_i) \leq_d M$ ve M direkt projektiftir.*

4. *Her $\alpha \in E_M$ için $\text{Çek}(\alpha) \leq_d M$ ve M direkt injektiftir.*

5. *Herhangi sonlu $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subseteq E_M$ kümesi için $\bigcap_{i=1}^{k} \text{Çek}(\alpha_i) \leq_d M$ ve M direkt injektiftir.*

6. *Her $\alpha \in E_M$ için $\text{Çek}(\alpha) \leq_d M$ ve $\text{Gör}(\alpha) \leq_d N$'dir.*

Teorem 4.1.15'de $M = R$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.17 [20] *N modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *N düzenli modüldür.*

2. *Her $x \in N$ için $xR \leq_d N$ ve N direkt R_R-projektiftir.*

3. *Herhangi sonlu $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq N$ kümesi için $\sum_{i=1}^{k} x_i R \leq_d N$ ve N direkt R_R-projektiftir.*

4. *Her $x \in N$ için $ann_r(x) \leq_d R_R$ ve R_R direkt N-injektiftir.*

5. *Herhangi sonlu $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq N$ kümesi için $\bigcap_{i=1}^{k} ann_r(x_i) \leq_d R_R$ ve N direkt R_R-injektiftir.*

6. *Her $x \in N$ için $xR \leq_d N$ ve $ann_r(x) \leq_d R_R$'dir.*

7. *Her $x \in N$ için $xR \leq_d N$ ve xR projektif R–modüldür.*

Sonuç 4.1.18 [20] *M ve N modülleri için aşağıdakiler sağlanır.*

1. *M ve N yarıbasit ise $[M, N]$ düzenlidir.*

2. *M'nin yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul M'nin her N bölüm modülü için $[M, N]$'nin düzenli olmasıdır.*

3. *N'nin yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul N'nin her M altmodülü için $[M, N]$'nin düzenli olmasıdır.*

4. *M'nin injektif ve yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul her N modülü için $[M, N]$'nin düzenli olmasıdır.*

5. *N'nin projektif ve yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul her M modülü için $[M, N]$'nin düzenli olmasıdır.*

İspat: (1) Teorem 4.1.15(6)'dan açıktır.

(2) ($\Rightarrow$) M yarıbasit, $K \leq M$ ve $N = M/K$ olsun. Her bir $f : M \to N$ için Çek$(f) \leq_d M$'dir. Ayrıca, $S \leq M$ olmak üzere Gör$(f) = S/K \leq M/K$ şeklindedir. $K \leq S \leq_d M$ olduğundan $S/K \leq_d M/K$'dır. Dolayısıyla, Teorem 4.1.15(6) gereğince $[M, N]$ düzenlidir.

($\Leftarrow$) M'nin her N bölüm modülü için $[M,N]$ düzenli ve $K \leq M$ olsun. $[M,M/K]$ düzenli olduğundan $\pi : M \to M/K$ doğal epimorfizması düzenli ve Çek$(\pi) = K \leq_d M$'dir. Sonuç olarak, M'nin her altmodülü dik toplanan olduğundan M yarıbasittir.

(3) ($\Rightarrow$) N yarıbasit ve $M \leq N$ olsun. Her bir $f : M \to N$ için Çek$(f) \leq_d N$ ve Gör$(f) \leq_d N$'dir. Dolayısıyla, Teorem 4.1.15(6) gereğince $[M,N]$ düzenlidir.

($\Leftarrow$) N'nin her M altmodülü için $[M,N]$ düzenli ve $K \leq N$ olsun. $[K,N]$ düzenli olduğundan $\iota : K \to N$ içerim dönüşümü düzenli ve Gör$(\iota) = K \leq_d N$'dir. Sonuç olarak, N'nin her altmodülü dik toplanan olduğundan N yarıbasittir.

(4) ($\Rightarrow$) M injektif ve yarıbasit olsun. Önteorem 4.1.11 gereğince her N modülü için M direkt N-injektiftir. Teorem 4.1.15(4)'ten her N modülü için $[M,N]$ düzenlidir.

($\Leftarrow$) Her N modülü için $[M,N]$ düzenli olsun. Her N modülü için M direkt N-injektif olduğundan Önteorem 4.1.11'den M injektiftir. Ayrıca, (2)'den M yarıbasittir.

(5) ($\Rightarrow$) N projektif ve yarıbasit olsun. Önteorem 4.1.12 gereğince her M modülü için N direkt M-projektiftir. Teorem 4.1.15(2)'den her M modülü için $[M,N]$ düzenlidir.

($\Leftarrow$) Her M modülü için $[M,N]$ düzenli olsun. Her M modülü için N direkt M-projektif olduğundan Önteorem 4.1.11 gereğince N projektiftir. Sonuç olarak, (3)'den N yarıbasittir. $\square$

Aşağıdaki örnek Sonuç 4.1.18(1)'in karşıtının her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.19 [10] $[\mathbb{Q}_\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ olmasına rağmen $\mathbb{Q}$ yarıbasit olmayan $\mathbb{Z}$–modüldür.

İspat: $\mathbb{Z}_\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ yarıbasit olmadığından $\mathbb{Q}$ yarıbasit $\mathbb{Z}$–modül değildir. Şimdi $0 \neq f \in [\mathbb{Q}_\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_\mathbb{Z}]$ alınsın. $[\mathbb{Q}_\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ olduğundan $f = f_t : \mathbb{Q}_\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$ için $f_t(q) = tq$, olacak şekilde $0 \neq t \in \mathbb{Q}$ vardır. Buradan, Çek$(f_t) = 0 \leq_d \mathbb{Q}$ ve Gör$(f_t) = \mathbb{Q} \leq_d \mathbb{Q}$ olduğundan Sonuç 4.1.15 gereğince $[\mathbb{Q}_\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_\mathbb{Z}]$ düzenlidir. $\square$

Sonuç 4.1.20 [9] *$N \in$ Mod–R olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1. *R yarıbasit ise N düzenlidir.*

2. *N injektif ve yarıbasit ise $N^* = [N,R]$ düzenlidir.*

3. *N projektif ve yarıbasit ise N düzenlidir.*

İspat: Sonuç 4.1.18 (1), (4) ve (5) şıklarında $M = R$ alınırsa istenen elde edilir. $\square$

4.2 Reg$[M, N]$'nin Varlığı ve Özellikleri

1950'de Brown ve McCoy [5] herhangi bir R halkasının tek maksimal düzenli ideal $M(R)$'ye sahip olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuç Kasch [13] tarafından genelleştirilerek, M ve N modülleri için $[M, N]$'nin yeni bir altyapısı olan Reg$[M, N]$'nin tanımlanmasına olanak sağlamıştır.

Önteorem 4.2.1 [10] *M ve N modüller, $f \in [M, N]$ ve $g \in [N, M]$ olsun. Eğer $f - fgf$ düzenli ise f düzenlidir.*

İspat: $f - fgf$ düzenli olsun. Bu durumda, $(f - fgf)h(f - fgf) = f - fgf$ olacak şekilde $h \in [N, M]$ vardır. $k := h - hfg - gfh + gfhfg + g \in [N, M]$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} fkf &= f(h - hfg - gfh + gfhfg + g)f = fhf - fhfgf - fgfhf + fgfhfgf + fgf \\ &= (f - fgf)h(f - fgf) + fgf = f - fgf + fgf = f \end{aligned}$$

olduğundan f düzenlidir. □

Tanım 4.2.2 [10] M ve N modüller olsun. $E_N f E_M$ $[M, N]$'nin f tarafından üretilen E_N-E_M-altmodülü olmak üzere,

$$\text{Reg}[M, N] = \{f \in [M, N] \mid E_N f E_M \text{ düzenlidir.}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2.3 [10] *M ve N modüller olsun. Reg$[M, N]$, $[M, N]$'nin tek en geniş düzenli E_N-E_M-altmodülüdür.*

İspat: İspat 4 adımda yapılacaktır.

(a) $f \in [M, N]$ ve $E_N f E_M$ düzenli olsun. Eğer $\varphi \in E_N f E_M$ ise $E_N \varphi E_M \subseteq E_N f E_M$'dir. O zaman, $E_N \varphi E_M$ düzenli olur. Dolayısıyla, $\varphi \in$ Reg$[M, N]$ ve $E_N f E_M \subseteq$ Reg$[M, N]$ elde edilir.

(b) $f \in$ Reg$[M, N]$ olsun. $g \in E_N$ ve $h \in E_M$ için (a) şıkkından $gfh \in E_N f E_M \subseteq$ Reg$[M, N]$ olur. Dolayısıyla, Reg$[M, N]$, E_N'nin elemanları ile soldan ve E_M'nin elemanları ile sağdan çarpıma göre kapalıdır.

(c) Şimdi, Reg$[M, N]$'nin toplamaya göre kapalı olduğu gösterilecektir. Bunun için $f_1, f_2 \in$ Reg$[M, N]$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $g_i \in E_N$ ve $h_i \in E_M$ olmak üzere $E_N(f_1 + f_2)E_M$ altmodülünün herhangi bir elemanı

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(f_1 + f_2)h_i = \sum_{i=1}^{n} g_i f_1 h_i + \sum_{i=1}^{n} g_i f_2 h_i$$

şeklindedir. $\varphi_1 := \sum_{i=1}^{n} g_i f_1 h_i \in E_N f_1 E_M$ ve $\varphi_2 := \sum_{i=1}^{n} g_i f_2 h_i \in E_N f_2 E_M$ olarak tanımlansın. Şimdi, $\varphi_1 \in E_N f_1 E_M$ düzenli olduğundan, $\varphi_1 \alpha \varphi_1 = \varphi_1$ olacak şekilde $\alpha \in [N, M]$ vardır. Buradan, $\varphi_1 \alpha \varphi_1 - \varphi_1 = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2)\alpha(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \alpha \varphi_2 - \varphi_2 \alpha \varphi_1 - \varphi_2 \alpha \varphi_2 \qquad (*)$$

$\varphi_1 \alpha \in E_N$ ve $\alpha \varphi_1, \alpha \varphi_2 \in E_M$ olduğundan $(*)$ eşitliğindeki eleman $E_N \varphi_2 E_M$'nin bir elemanıdır. $\varphi_2 \in E_N f_2 E_M$ ve $E_N f_2 E_M$ düzenli olduğundan $E_N \varphi_2 E_M$ düzenlidir. $(*)$ eşitliğindeki eleman düzenli olduğundan Önteorem 4.2.1 gereğince $\varphi_1 + \varphi_2$ düzenlidir. Sonuç olarak, $E_N(f_1 + f_2)E_M$ düzenli ve Reg$[M, N]$ toplamaya göre kapalıdır.

(d) Son olarak $Reg[M, N]$'nin en geniş düzenli E_N-E_M-altmodül olduğu gösterilecektir. Λ, $[M, N]$'nin düzenli bir E_N-E_M-altmodülü olsun ve $f \in \Lambda$ alınsın. Λ E_N-E_M-altmodül olduğundan $E_N f E_M \subseteq \Lambda$'dır. Ayrıca, Λ düzenli olduğundan $E_N f E_M$ de düzenlidir. Reg$[M, N]$'nin tanımından $f \in$ Reg$[M, N]$ elde edilir. Dolayısıyla, $\Lambda \subseteq$ Reg$[M, N]$ olur. Böylece, $Reg[M, N]$, $[M, N]$'nin en geniş düzenli E_N-E_M-altmodülü elde edilir.

□

$[M, N]$'nin en geniş düzenli altmodülü Reg$[M, N]$, modüllere taşınabilir. $\rho : [R, N] \to N$, $\rho(f) = f(1)$ izomorfizması bu yapıya uygulandığında N_R bir E_N-R–bimodül olarak tek en geniş düzenli E_N-R–altmodüle sahiptir ve bu altmodül $\rho(\text{Reg}[R, N]) = \text{Reg}(N)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.4 [9] N_R bir modül olsun. $E_N nR$ N'nin n tarafından üretilen E_N-R–altmodülü olmak üzere,

$$\text{Reg}(N) := \{n \in N \mid E_N nR \text{ düzenlidir.}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde, $\mathrm{End}(R_R) \cong R$ izomorfizması ile Brown ve McCoy [5] tarafından elde edilen en geniş düzenli ideal $M(R)$'ye ulaşılır, yani $M(R) = \mathrm{Reg}(R)$'dir.

4. bölümün 1. kısmında halka ve modül için verilen düzenlilik özellikleri $\mathrm{Reg}(N)$ ve $\mathrm{Reg}(R)$ kullanılarak tekrar ifade edilebilir.

M, $N \in$ Mod–R için daha önce $\mathrm{Rad}[M,N]$, $\Delta[M,N]$ ve $\nabla[M,N]$'nin $\mathrm{Tot}[M,N]$ tarafından kapsandığı gösterilmişti. Şimdi, $\mathrm{Reg}[M,N]$ ve $\mathrm{Tot}[M,N]$ arasındaki ilişki incelenecektir.

Önteorem 4.2.5 [10] *Her M, $N \in$ Mod–R için* $\mathrm{Reg}[M,N] \cap \mathrm{Tot}[M,N] = 0$*'dır.*

İspat: M, $N \in$ Mod–R ve $0 \neq f \in \mathrm{Reg}[M,N] \cap \mathrm{Tot}[M,N]$ olsun. Önteorem 3.1.5 (1) gereğince f kısmi tersinirdir. Bu durum $f \in \mathrm{Tot}[M,N]$ oluşu ile çelişir. Sonuç olarak, $\mathrm{Reg}[M,N] \cap \mathrm{Tot}[M,N] = 0$'dır. □

M, $N \in$ Mod–R için $\mathrm{Reg}[M,N] \cap \mathrm{Tot}[M,N] = 0$ olduğundan, eğer $[M,N] = \mathrm{Reg}[M,N]$ ise $[M,N] = \mathrm{Reg}[M,N] \oplus \mathrm{Tot}[M,N]$ sağlanır. Bu bağlamda, Kasch ve Mader [10], $0 \neq \mathrm{Reg}[M,N] \neq [M,N]$ ve $[M,N] = \mathrm{Reg}[M,N] \oplus \mathrm{Tot}[M,N]$ olacak şekilde M_R ve N_R modüllerine örnek bulunup bulunamayacağını sormuşlardır. Zhou [28] bu soruyu aşağıdaki örnekle cevaplamıştır. Bu örnek için ilk olarak ideal genişlemesi tanımı hatırlatılacaktır.

Tanım 4.2.6 [28] R birimli bir halka, V birimsiz bir halka olmak üzere V bir R-R-bimodül olsun. Yani her $v, w \in V$ ve her $r \in R$ için $(vw)r = v(wr)$, $(vr)w = v(rw)$ ve $(rv)w = r(vw)$ sağlansın. Bu durumda, $R \oplus V$ abel grubu her $r, s \in R$ ve her $v, w \in V$ için $(r,v)(s,w) = (rs, rw + vs + vw)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birimli bir halkadır. Bu halka, *ideal genişlemesi (Dorroh genişlemesi)* olarak adlandırılır ve $\mathbb{I}(R;V)$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.7 [28] $\mathbb{Z}_2$ halkası ve $V = \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}_2$-bimodülü alınsın. $R = \mathbb{I}(\mathbb{Z}_2;V)$ ideal genişlemesi olsun. $V \cong (0) \oplus V$, R'nin bir idealidir. $[R,V]$, V ile belirlenebilir olduğundan aşağıdakiler sağlanır.

1. $\mathrm{Reg}[R,V] \cong \mathbb{Z}_2 \oplus (0)$

2. $\mathrm{Tot}[R,V] \cong (0) \oplus 2\mathbb{Z}_4$

3. $[R, V] = \mathrm{Reg}[R, V] \oplus \mathrm{Tot}[R, V]$

İspat: $x = (\bar{1}, \bar{0})$, $y = (\bar{0}, \bar{2}) \in V$ olsun. Eğer $\varphi \in V^* = [V, R]$ içerim dönüşümü ise $x\varphi(x) = x$ olduğundan x düzenlidir. Öte yandan, $V^*y \subseteq R$ sıfırdan farklı eşkare kapsamaz. Gerçekten, eğer $\psi \in V^*$ için $0 \neq e = \psi(y) = e^2 \in R$ ise o zaman $e \in \{1_R, x, 1_R + x\}$ olur. $ey = \psi(y)y = \psi(y^2) = \psi(0) = 0$, $1_R y \neq 0$ ve $(1_R + x)y \neq 0$ olduğundan $e = x$ olur. Fakat, buradan $e = \psi(y)e = \psi(y)x = \psi(yx) = \psi(0) = 0$ çelişkisi elde edilir. Şimdi, $\mathbb{Z}_2 \oplus (0)$ ve $(0) \oplus 2\mathbb{Z}_4$ V $\mathrm{E_V}$-$\mathrm{E_R}$-bimodülünün altmodülleri olduğundan $\mathrm{Reg}[R, V] \cong \mathrm{Reg}(V) = \mathbb{Z}_2 \oplus (0)$, $\mathrm{Tot}[R, V] \cong \mathrm{Tot}(V) = (0) \oplus 2\mathbb{Z}_4$ ve $V \cong [R, V] = \mathrm{Reg}[R, V] \oplus \mathrm{Tot}[R, V]$ elde edilir. □

4.3 Yarıdüzenlilik

Bu kısımda, M ve N sağ R–modülleri için $[M, N]$'nin yarıdüzenlilik tanımı verilecek ve halka teorisinde ki sonuçlar genişletilecektir. Nicholson [22] her $a \in R$ için $bab = b$ ve $a - aba \in J(R)$ olacak şekilde $b \in R$ var ise R halkasını yarıdüzenli halka olarak adlandırmıştır. Buna göre, yarıdüzenli morfizma ve $[M, N]$ için yarıdüzenlilik aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.3.1 [20] M ve N modüller olsun. Eğer $\alpha \in [M, N]$ için $\beta = \beta\alpha\beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ var ise, α *yarıdüzenli (semiregular) morfizma* olarak adlandırılır. Eğer her $\alpha \in [M, N]$ yarıdüzenli ise $[M, N]$ *yarıdüzenli* olarak tanımlanır.

Bu tanımla birlikte, E_M yarıdüzenli halkadır $\Leftrightarrow$ $[M, M]$ yarıdüzenlidir, denkliği kolayca görülebilir.

Nicholson [22], Tanım 2.5.12'de hatırlatıldığı gibi, her $n \in N$ için $\beta(n) = e = e^2$ ve $n - ne \in \mathrm{Rad}(N)$ olacak şekilde $\beta \in N^* = [N, R]$ var ise N'yi yarıdüzenli modül olarak tanımlamıştı. Nicholson [20]'de düzenlilik durumunda olduğu gibi bir N sağ R modülü için N ve $[R, N]$'nin yarıdüzenliliğinin denk olduğunu ifade etmiştir. Fakat, bu denkliğin her zaman sağlanmadığına dair aşağıdaki örnek elde edilmiştir.

Örnek 4.3.2 *$R = \mathbb{Z}_4$ ve $M = 2R$ olsun. $[R, M]$ yarıdüzenli olmasına rağmen M_R yarıdüzenli modül değildir.*

İspat: $f(\overline{1}) = \overline{2}$ olmak üzere $[R, M] = \{0, f\}$ ve $g(\overline{2}) = \overline{2}$ olmak üzere $[M, R] = \{0, g\}$ olduğu kolayca görülebilir. Örnek 3.4.6 gereğince $\mathrm{Rad}[R, M] = \{0, f\}$ olduğundan $[R, M]$ yarıdüzenlidir. Fakat, $[M, R] = \{0, g\}$ ve $\mathrm{Rad}(M) = 0$ olduğundan $\overline{2} \in M$ için $\beta(\overline{2}) = e = e^2$ ve $\overline{2} - \overline{2}e \in \mathrm{Rad}(M)$ olacak şekilde $\beta \in M^* = [M, R]$ yoktur. Dolayısıyla, M_R yarıdüzenli modül değildir. □

Önteorem 4.3.3 [20] *$\alpha \in [M, N]$ için aşağıdakiler denktir.*

1. *α yarıdüzenlidir.*

2. *$(\beta\alpha)^2 = \beta\alpha \in E_M$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır.*

3. *$\alpha - \gamma \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde düzenli $\gamma \in [M, N]$ vardır.*

4. *$\alpha - \alpha\gamma \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\gamma^2 = \gamma \in [N, M]\alpha \subseteq E_M$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) α yarıdüzenli olsun. O zaman, $\beta = \beta\alpha\beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır. Buradan, $\beta\alpha = \beta\alpha\beta\alpha = (\beta\alpha)^2$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\beta \in [N, M]$ olmak üzere $(\beta\alpha)^2 = \beta\alpha \in E_M$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ sağlansın. Şimdi, $\gamma := \alpha\beta\alpha \in [M, N]$ olarak tanımlansın. Buradan, $\alpha - \gamma \in \mathrm{Rad}[M, N]$ ve $\gamma\beta\gamma = \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha = \gamma$ düzenli elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $\alpha - \delta \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde düzenli $\delta \in [M, N]$ olsun. δ düzenli olduğundan $\delta\beta\delta = \delta$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır. O zaman, $\varepsilon := \beta\delta$ ise $\varepsilon^2 = \varepsilon \in E_M$ ve $\delta\varepsilon = \delta$ elde edilir.

<u>İddia:</u> $\alpha - \alpha\varepsilon \in \mathrm{Rad}[M, N]$ ve $\alpha\varepsilon$ düzenlidir:

$\delta\varepsilon = \delta$ olduğundan $\alpha - \alpha\varepsilon = (\alpha - \delta)(1_M - \varepsilon)$ olur. Ayrıca, $\alpha - \delta \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan $\alpha - \alpha\varepsilon \in \mathrm{Rad}[M, N]$ elde edilir. Benzer şekilde, $\varepsilon - \beta\alpha = \beta(\delta - \alpha) \in \mathrm{Rad}[M, M] = J(E_M)$'dir. O zaman, $\phi(1_M - \varepsilon + \beta\alpha) = 1_M$ olacak şekilde $\phi \in E_M$ vardır. Buradan, $\phi\beta\alpha\varepsilon = \varepsilon$'dur.Dolayısıyla, $(\alpha\varepsilon)(\phi\beta)(\alpha\varepsilon) = \alpha\varepsilon$ ve $\alpha\varepsilon$ düzenli elde edilir.

$\eta = \alpha\varepsilon$ olsun ve $\mu \in [N, M]$, $\eta = \eta\mu\eta$ ve $\mu\eta\mu = \mu$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, $\gamma := \varepsilon\mu\alpha$ olsun. O zaman, $\gamma^2 = \gamma \in [N, M]\alpha$ ve iddiadan $\alpha - \alpha\gamma = \alpha - \eta\mu\alpha = (1_N - \eta\mu)(\alpha - \eta) \in \mathrm{Rad}[M, N]$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (1) $\gamma^2 = \gamma \in [N, M]\alpha \subseteq E_M$ olmak üzere $\alpha - \alpha\gamma \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. $\gamma \in [N, M]\alpha$ olduğundan $\gamma = \rho\alpha$ olacak şekilde $\rho \in [N, M]$ vardır. $\beta = \gamma\rho \in [N, M]$ olsun. O zaman, $\alpha - \alpha\beta\alpha = \alpha - \alpha\gamma \in \mathrm{Rad}[M, N]$ ve $\beta\alpha\beta = \gamma\rho = \beta$ elde edilir. □

Sonuç 4.3.4 [20] *M ve N modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M,N]$ düzenlidir.*

2. *$[M,N]$ yarıdüzenlidir ve* $\mathrm{Rad}[M,N]=0$*'dır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $[M,N]$ düzenli olsun. Her $\alpha \in [M,N]$ için α düzenli ve $\alpha-\alpha = 0 \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğundan Önteorem 4.3.3(3) gereğince $[M,N]$ yarıdüzenlidir. Şimdi, $\varphi \in \mathrm{Rad}[M,N]$ alınsın. φ düzenli olduğundan $\varphi\psi\varphi=\varphi$ olacak şekilde $\psi \in [N,M]$ vardır. $\varphi\psi\varphi-\varphi=\varphi(1_M-\psi\varphi)=0$ ve $\mathrm{Rad}[M,N]$'nin tanımından $1_M-\psi\varphi$ tersinir olduğundan $\varphi=0$ elde edilir. Sonuç olarak, $[M,N]$ yarıdüzenli ve $\mathrm{Rad}[M,N]=0$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $[M,N]$ yarıdüzenli ve $\mathrm{Rad}[M,N]=0$ olsun. $\alpha \in [M,N]$ alınsın. α yarıdüzenli olduğundan $\alpha-\gamma \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde düzenli $\gamma \in [M,N]$ vardır. $\mathrm{Rad}[M,N]=0$ olduğundan $\alpha=\gamma$ düzenli olur. Sonuç olarak, $[M,N]$ düzenli elde edilir. $\square$

Sonuç 4.3.5 [20] *M ve N modüller olsun. α, $\beta \in [M,N]$ için $\alpha-\beta \in$* $\mathrm{Rad}[M,N]$ *olsun. Eğer α veya β'dan biri yarıdüzenli ise diğeri de yarıdüzenlidir.*

İspat: Eğer β yarıdüzenli ise Önteorem 4.3.3 gereğince $\beta-\gamma \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde düzenli $\gamma \in [M,N]$ vardır. Buradan, $\alpha-\gamma=(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma) \in \mathrm{Rad}[M,N]$ ve böylece, α yarıdüzenli elde edilir. Eğer α yarıdüzenli ise Önteorem 4.3.3 gereğince $\alpha-\xi \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde düzenli $\xi \in [M,N]$ vardır. Buradan, $\beta-\xi=(\beta-\alpha)+(\alpha-\xi) \in \mathrm{Rad}[M,N]$ ve böylece, β yarıdüzenli elde edilir. $\square$

Sonuç 4.3.6 [20] *M,N modüller ve $\alpha \in [M,N]$ yarıdüzenli olsun. Bu durumda, $\sigma \in$* $\mathrm{Oto}(M)$ *ve $\tau \in$* $\mathrm{Oto}(N)$ *için $\alpha\sigma$ ve $\tau\alpha$ da yarıdüzenlidir.*

İspat: $\alpha \in [M,N]$ yarıdüzenli olsun. O zaman, $\beta=\beta\alpha\beta$ ve $\alpha-\alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde $\beta \in [N,M]$ vardır. $\xi=\sigma^{-1}\beta \in [N,M]$ için $\xi=\xi\alpha\sigma\xi$ ve $\alpha\sigma-\alpha\sigma\xi\alpha\sigma = \alpha\sigma-\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\alpha\sigma=(\alpha-\alpha\beta\alpha)\sigma \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğundan $\alpha\sigma$ yarıdüzenlidir. Benzer şekilde, $\zeta=\beta\tau^{-1} \in [N,M]$ için $\zeta=\zeta\tau\alpha\zeta$ ve $\tau\alpha-\tau\alpha\zeta\tau\alpha=\tau\alpha-\tau\alpha\beta\tau^{-1}\tau\alpha = \tau(\alpha-\alpha\beta\alpha) \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğundan $\tau\alpha$ yarıdüzenlidir. $\square$

Önteorem 4.3.7 [20] *M, N modülleri için $A \leq_d M$ ve $B \leq_d N$ olsun. Eğer $[M,N]$ yarıdüzenli ise $[A,B]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: $M \xrightarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\iota_1} M$ ve $N \xrightarrow{\pi_2} B \xrightarrow{\iota_2} N$ kanonik izdüşüm ve içerim dönüşümleri olsunlar. Eğer $\alpha \in [A,B]$ ise $\tilde{\alpha} = \iota_2\alpha\pi_1 \in [M,N]$ olur ve yarıdüzenlidir. Böylece, $\beta = \beta\tilde{\alpha}\beta$ ve $\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}\beta\tilde{\alpha} \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olacak şekilde $\beta \in [N,M]$ vardır. $\tilde{\beta} = \pi_1\beta\iota_2 \in [B,A]$ şeklinde tanımlansın. O zaman, $\tilde{\beta}\alpha\tilde{\beta} = \pi_1\beta\iota_2\alpha\pi_1\beta\iota_2 = \pi_1\beta\tilde{\alpha}\beta\iota_2 = \pi_1\beta\iota_2 = \tilde{\beta}$ ve $\alpha - \alpha\tilde{\beta}\alpha = \pi_2\iota_2\alpha\pi_1\iota_1 - (\pi_2\iota_2\alpha)(\pi_1\beta\iota_2)(\alpha\pi_1\iota_1) = \pi_2(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}\beta\tilde{\alpha})\iota_1$ olur. $\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}\beta\tilde{\alpha} \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğundan Önteorem 3.2.7 gereğince $\alpha - \alpha\tilde{\beta}\alpha \in \mathrm{Rad}[A,B]$ elde edilir. Böylece, α yarıdüzenlidir. □

Önteorem 4.3.8 [20] *M, N modüller ve $N = N_1 \oplus N_2$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M,N]$ yarıdüzenlidir.*
2. *$i = 1,2$ için $[M,N_i]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.3.7 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $i = 1,2$ için $[M,N_i]$ yarıdüzenli ve $\alpha \in [M,N]$ olsun. $i = 1,2$ için $N \xrightarrow{\pi_i} N_i \xrightarrow{\iota_i} N$ kanonik dönüşümler ve $\alpha_i = \pi_i\alpha \in [M,N_i]$ olsun. O zaman, $\alpha = \iota_1\alpha_1 + \iota_2\alpha_2$'dir. α_1 yarıdüzenli olduğundan Önteorem 4.3.3 gereğince $\alpha_1 - \alpha_1\phi \in \mathrm{Rad}[M,N_1]$ olacak şekilde $\phi^2 = \phi \in [N_1,M]\alpha_1 \subseteq E_M$ vardır. Benzer şekilde, $\alpha_2 - \alpha_2\phi \in [M,N_2]$ yarıdüzenli olduğundan $(\alpha_2 - \alpha_2\phi) - (\alpha_2 - \alpha_2\phi)\gamma \in \mathrm{Rad}[M,N_2]$ olacak şekilde $\gamma^2 = \gamma \in [N_2,M](\alpha_2 - \alpha_2\phi) \subseteq E_M$ vardır. $\eta = \phi + \gamma - \phi\gamma \in E_M$ şeklinde tanımlanırsa $(\alpha_2 - \alpha_2\phi) - (\alpha_2 - \alpha_2\phi)\gamma \in \mathrm{Rad}[M,N_2]$ olduğundan $\alpha_2(1_M - \eta) \in \mathrm{Rad}[M,N_2]$ elde edilir. $\gamma\phi = 0$ olduğundan $\eta^2 = \eta$'dır. Böylece, Önteorem 4.3.3 gereğince $\eta \in [N,M]\alpha$ ve $\alpha(1_M - \eta) \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $1_M - \eta = (1_M - \phi)(1_M - \gamma)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\alpha(1_M - \eta) &= (\iota_1\alpha_1 + \iota_2\alpha_2)(1_M - \eta) \\
&= \iota_1\alpha_1(1_M - \phi)(1_M - \gamma) + \iota_2\alpha_2(1_M - \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha_1(1_M - \phi) \in \mathrm{Rad}[M,N_1]$ ve $\alpha_2(1_M - \eta) \in \mathrm{Rad}[M,N_2]$ olduğundan Önteorem 3.2.7 gereğince $\alpha(1_M - \eta) \in \mathrm{Rad}[M,N]$ olduğunu gösterir. $\phi \in [N_1,M]\alpha_1$ ve $\gamma \in [N_2,M](\alpha_2 - \alpha_2\phi)$ olduğundan $i = 1,2$ için $\beta_i \in [N_i,M]$ olmak üzere $\phi = \beta_1\alpha_1$ ve

$\gamma = \beta_2(\alpha_2 - \alpha_2\phi)$ olsun. $i = 1, 2$ için $\beta_i\alpha_i = \beta_i(\pi_i\alpha) = (\beta_i\pi_i)\alpha \in [N, M]\alpha$ olduğundan ϕ, $\gamma \in [N, M]\alpha$ olur. Dolayısıyla, $\eta \in [N, M]\alpha$ ve α yarıdüzenli elde edilir. □

Önteorem 4.3.9 [20] *M,N modüller ve $\alpha \in [M, N]$ olsun. $\gamma^2 = \gamma \in [N, M]\alpha \subseteq E_M$ olmak üzere $\alpha - \alpha\gamma$ yarıdüzenli ise o zaman α yarıdüzenlidir.*

İspat: $\alpha - \alpha\gamma$ yarıdüzenli olsun. Önteorem 4.3.3 gereğince $(\alpha - \alpha\gamma) - (\alpha - \alpha\gamma)\phi \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\phi^2 = \phi \in [N, M](\alpha - \alpha\gamma) \subseteq E_M$ vardır. $\phi\gamma = 0$ ve $\gamma \in [N, M]\alpha$ olduğundan $\eta := \gamma + \phi - \gamma\phi$ için $\eta^2 = \eta \in [N, M]\alpha$ elde edilir. Üstelik, $\alpha - \alpha\eta = \alpha - \alpha(\gamma + \phi - \gamma\phi) = (\alpha - \alpha\gamma) - (\alpha - \alpha\gamma)\phi \in \mathrm{Rad}[M, N]$'dir. Sonuç olarak, α yarıdüzenlidir. □

Önteorem 4.3.10 [20] *M, N modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıdüzenlidir.*
2. *$i = 1, 2$ için $[M_i, N]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.3.7 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $i = 1, 2$ için $[M_i, N]$ yarıdüzenli ve $\alpha \in [M, N]$ olsun. $i = 1, 2$ için $M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{\iota_i} M$ kanonik dönüşümler ve $\alpha_i = \alpha\iota_i \in [M_i, N]$ olsun. O zaman, $\alpha = \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2$'dir. α_1 yarıdüzenli olduğundan $\beta_1 = \beta_1\alpha_1\beta_1$ ve $\alpha_1 - \alpha_1\beta_1\alpha_1 \in \mathrm{Rad}[M_1, N]$ olacak şekilde $\beta_1 \in [N, M_1]$ vardır. $\eta = \iota_1\beta_1\alpha$ olarak tanımlasın. O zaman, $\eta^2 = \eta \in [N, M]\alpha \subseteq E_M$'dir. Önteorem 4.3.9 gereğince α'nın yarıdüzenli olduğunu göstermek için $\alpha - \alpha\eta$'nın yarıdüzenli olduğunu göstermek yeterlidir. $\phi = \iota_1\beta_1\alpha_1\pi_1 \in E_M$ ve $\gamma = \iota_1\beta_1\alpha_2\pi_2 \in E_M$ olsun. Buradan, $\phi + \gamma = \iota_1\beta_1\alpha = \eta$ elde edilir. $\pi_2\gamma = 0$ ve $\pi_2\phi = 0$ eşitliklerinden,

$$\alpha - \alpha\eta = (\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2) - (\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2)(\phi + \gamma) = (\alpha_1\pi_1 - \alpha_1\pi_1\phi) + (\alpha_2\pi_2 - \alpha_1\pi_1\gamma) \ (*)$$

elde edilir. $\alpha_1 - \alpha_1\beta_1\alpha_1 \in \mathrm{Rad}[M_1, N]$ olduğundan Önteorem 3.2.7 gereğince $(*)$'daki ilk terim $\alpha_1\pi_1 - \alpha_1\pi_1\phi \in \mathrm{Rad}[M, N]$ elde edilir. Çünkü,

$$\alpha_1\pi_1 - \alpha_1\pi_1\phi = \alpha_1\pi_1 - \alpha_1\pi_1(\iota_1\beta_1\alpha_1\pi_1) = (\alpha_1 - \alpha_1\beta_1\alpha_1)\pi_1 \in \mathrm{Rad}[M, N]$$

olur. O halde, $\alpha - \alpha\eta$'nın yarıdüzenli olduğunu göstermek için Önteorem 4.3.5 gereğince $(*)$'daki ikinci terim $\lambda = \alpha_2\pi_2 - \alpha_1\pi_1\gamma$'nın yarıdüzenli olduğunu göstermek yeterlidir. $\lambda \in [M, N]$'dir. Şimdi, $\lambda\iota_2 \in [M_2, N]$ yarıdüzenli olduğundan $\upsilon = \upsilon(\lambda\iota_2)\upsilon$ ve $(\lambda\iota_2) - (\lambda\iota_2)\upsilon(\lambda\iota_2) \in \mathrm{Rad}[M_2, N]$ olacak şekilde $\upsilon \in [N, M_2]$ vardır. $\omega := \iota_2\upsilon \in [N, M]$ şeklinde tanımlansın. O zaman, $\omega = \omega\lambda\omega$ olur. $\gamma = \gamma\iota_2\pi_2$, $\lambda = \lambda\iota_2\pi_2$ ve $(\lambda\iota_2) - (\lambda\iota_2)\upsilon(\lambda\iota_2) \in \mathrm{Rad}[M_2, N]$ olduğundan Önteorem 3.2.7 gereğince

$$\lambda - \lambda\omega\lambda = \lambda\iota_2\pi_2 - \lambda(\iota_2\upsilon)(\lambda\iota_2\pi_2) = (\lambda\iota_2) - (\lambda\iota_2)\upsilon(\lambda\iota_2)\pi_2 \in \mathrm{Rad}[M, N]$$

elde edilir. Buradan, λ yarıdüzenli, dolayısıyla $\alpha - \alpha\eta$ yarıdüzenli ve sonuç olarak α yarıdüzenlidir. □

Bu kısımın ana sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 4.3.11 [20] *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ve $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıdüzenlidir.*
2. *$1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $[M_i, N_j]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.3.7 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önteorem 4.3.8 ve Önteorem 4.3.10 göz önüne alındığında tümevarımdan elde edilir. □

Teorem 4.3.11'de $N = M$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.12 [20] *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$E_M = [M, M]$ yarıdüzenli halkadır.*
2. *$1 \leq i, j \leq n$ için $[M_i, M_j]$ yarıdüzenlidir.*

Örnek 4.3.13 [20] $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için E_{M_i} halkasının yarıdüzenli olması E_M halkasının her zaman yarıdüzenli olmasını gerektirmez.

İspat: K bir cisim ve $I = \mathbb{N}$ olsun. Her $i \in I$ için $K_i = K$ ve $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$ olsun. R düzenli bir halkadır. Şimdi, $P = R$ ve $Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} K_i = R$ şeklinde tanımlansın. O zaman, P, Q düzenli sağ R–modüllerdir ve $[P, P] \cong R \cong [Q, Q]$ olduğundan düzenli endomorfizma halkasına sahiptirler. $M = P \oplus Q$ (dış dik toplam) olsun. O halde, M düzenli modüldür. $f \in E_M$, her $(p, q) \in M$ için $f((p, q)) = (q, 0)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\text{Gör}(f) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i \oplus 0 = Q \oplus 0 \leq P \oplus Q = R_R \oplus Q$$

olur. $\bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$ R_R'nin bir dik toplananı olmadığından $M = P \oplus Q$ modülünün de bir dik toplananı olamaz. Dolayısıyla, $E_M = [M, M]$ düzenli bir halka değildir.

Ayrıca, R düzenli halka olduğundan $J(R) = 0$ ve M projektif R–modül olduğundan $\text{Rad}(M) = MJ(R) = 0$ olur. Şimdi, $\text{Rad}(M) = 0$ olduğundan Teorem 2.3.13 gereğince $J(\text{End}(M)) = 0$ elde edilir. Böylece, düzenli olmayan $\text{End}(M)$ halkası için $J(\text{End}(M))$ $= 0$ olduğundan Sonuç 4.3.4 gereğince $\text{End}(M)$ yarıdüzenli halka değildir. □

Örnek 4.3.14 [20] Eğer verilen toplam sonsuz ise Sonuç 4.3.12 genel olarak sağlanmaz.

İspat: $I = \mathbb{N}$, her $i \in I$ için $K_i = \mathbb{Z}_2$ ve $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$ halkaların dik çarpımı olsun. Şimdi, yukarıdaki gibi $P = R$, $Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq R$ ve $M = P \oplus Q$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca, her $i \in I$ için Q_i, $Q_i \cong K_i$ olan R'nin i. bileşeni olsun. O zaman, her Q_i basit R–modül, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i \cong Q$ ve $M = P \oplus Q \cong P \oplus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i)$ olur. Örnek 4.3.13 gereğince E_M yarıdüzenli halka değildir. Fakat, M_1, $M_2 \in \{Q_i \mid i \in I\} \cup \{P\}$ olmak üzere $[M_1, M_2]$ yarıdüzenlidir:

1_i ile Q_i'nin sıfırdan farklı birim elemanı gösterilsin.

1. $E_P \cong R$ düzenli dolayısıyla yarıdüzenlidir.

2. Her $i \in I$ için Q_i basit R–modül olduğundan E_{Q_i} yarıdüzenli halkadır.

3. $i \neq j$ olmak üzere her $i, j \in I$ için $[Q_i, Q_j] = 0$ olduğundan $[Q_i, Q_j]$ yarıdüzenlidir.

4. Her $0 \neq \alpha \in [P, Q_i]$ için $\alpha(1) = 1_i$ olmalıdır. Eğer $\beta \in [Q_i, P]$, $\beta(1_i) = 1$ şeklinde tanımlanırsa $\beta\alpha\beta = \beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha = 0 \in \text{Rad}[P, Q_i]$ olduğundan α yarıdüzenli ve dolayısıyla $[P, Q_i]$ yarıdüzenlidir.

5. Her $0 \neq \alpha \in [Q_i, P]$ için $\alpha(1_i) = 1$ olmalıdır. Eğer $\beta \in [P, Q_i]$, $\beta(1) = 1_i$ şeklinde tanımlanırsa $\beta\alpha\beta = \beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha = 0 \in \text{Rad}[Q_i, P]$ olduğundan α yarıdüzenli ve dolayısıyla $[Q_i, P]$ yarıdüzenlidir.

□

Sonuç 4.3.15 [20] *e_1,...,e_n R halkasının dik eşkareleri olmak üzere $1 = e_1 + ... + e_n$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *R yarıdüzenli halkadır.*

2. *$1 \leq i, j \leq n$ ve her $a \in e_jRe_i$ için $bab = b$ ve $a - aba \in J(e_jRe_i) = e_jJ(R)e_i$ olacak şekilde $b \in e_iRe_j$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a \in e_jRe_i$ olsun. R yarıdüzenli olduğundan $cac = c$ ve $a - aca \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Eğer $b := e_ice_j \in e_iRe_j$ şeklinde tanımlanırsa istenen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) e_1,...,e_n R halkasının dik eşkareleri olmak üzere $1 = e_1 + ... + e_n$ olduğundan $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$'dir. Ayrıca, $[e_iR, e_jR] \cong e_jRe_i$, $J(e_jRe_i) = e_jJ(R)e_i$ ve $[R, R] \cong R$ olduğundan Teorem 4.3.11 gereğince R yarıdüzenli elde edilir. $\square$

Sonuç 4.3.16 [20] *M sonlu üretilmiş modül ve $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıdüzenlidir.*

2. *Her $i \in I$ için $[M, N_i]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.3.7 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $i \in I$ için $[M, N_i]$ yarıdüzenli ve $\alpha \in [M, N]$ olsun. M sonlu üretilmiş modül olduğundan $F \subseteq I$ sonlu olmak üzere $\alpha(M) \subseteq \bigoplus_{i \in F} N_i = P$'dir. Ayrıca, $\alpha \in [M, P]$ ve Teorem 4.3.11 gereğince $[M, P]$ yarıdüzenli olduğundan $\gamma\alpha\gamma = \gamma$ ve $\alpha - \alpha\gamma\alpha \in \text{Rad}[M, P]$ olacak şekilde $\gamma \in [P, M]$ vardır. $\beta \in [N, M]$, $\beta|_P = \gamma$ ve $\beta(\bigoplus_{i \in I \setminus F} N_i) = 0$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman, $\beta\alpha\beta = \beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha = \alpha - \alpha\gamma\alpha \in \text{Rad}[M, P]$ olur. Bununla birlikte, $P \subseteq N$ olduğundan Önteorem 3.2.7(3) gereğince $\text{Rad}[M, P] \subseteq \text{Rad}[M, N]$'dir. Sonuç olarak, α yarıdüzenlidir. $\square$

Teorem 4.3.17 [20] *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ve $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ düzenlidir.*

2. *Her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $[M_i, N_j]$ düzenlidir.*

İspat: Önteorem 4.3.7 ve Sonuç 4.3.4 gereğince açıktır. $\square$

Sonuç 4.3.18 [20] *M ve N modüller olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1. *Eğer $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ise o zaman E_M halkasının düzenli olması için gerek ve yeter koşul, her $1 \leq i, j \leq n$ için $[M_i, M_j]$'nin düzenli olmasıdır.*

2. *Eğer M sonlu üretilmiş modül ve $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ise o zaman $[M, N]$'nin düzenli olması için gerek ve yeter koşul, her $i \in I$ için $[M, N_i]$'nin düzenli olmasıdır.*

4.4 Yarıgüçlülük

Total altyapısının çalışılmaya başlanması ile birlikte total ve radikalin ne zaman eşit olacağı sorulan önemli sorulardan biri olmuştur. Bu soru yardımıyla, bir endomorfizma halkası için yarıgüçlülük tanımından faydalanılarak, M, $N \in \text{Mod}–R$ olmak üzere $[M, N]$ için yarıgüçlülük Zhou [28] tarafından tanımlanmıştır. Yarıdüzenli halkalar yarıgüçlüdür. Bu kısımda, $[M, N]$ için yarıgüçlülük tanımlanacak ve incelenecektir.

Önteorem 4.4.1 [28] *M ve N modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *Eğer $\alpha \in [M, N] \backslash \text{Rad}[M, N]$ ise $0 \neq \alpha\beta = (\alpha\beta)^2 \in E_N$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır.*

2. *Eğer $\alpha \in [M, N] \backslash \text{Rad}[M, N]$ ise $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır.*

3. *Eğer $\alpha \in [M, N] \backslash \text{Rad}[M, N]$ ise $\gamma\alpha\gamma = \gamma \notin \text{Rad}[N, M]$ olacak şekilde $\gamma \in [N, M]$ vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) $\alpha \in [M, N] \setminus \text{Rad}[M, N]$ için $0 \neq \alpha\beta = (\alpha\beta)^2 \in E_N$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ olsun. $\gamma = \beta\alpha\beta \in [N, M]$ şeklinde tanımlanırsa $\gamma\alpha\gamma = \gamma \neq 0$ elde edilir. Ayrıca, $\gamma \in \text{Rad}[N, M]$ olsaydı, $(\alpha\gamma)^2 = \alpha\gamma \in \text{Rad}(E_N)$ olacağından $\alpha\beta = \alpha\gamma = 0$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla, $\gamma\alpha\gamma = \gamma \notin \text{Rad}[N, M]$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\alpha \in [M, N] \setminus \text{Rad}[M, N]$ için $\gamma\alpha\gamma = \gamma \notin \text{Rad}[N, M]$ olacak şekilde $\gamma \in [N, M]$ olsun. Bu durumda, $\gamma \in [N, M]$ için $0 \neq (\alpha\gamma)^2 = \alpha\gamma \in E_N$ olduğudan (1) sağlanır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Benzer şekilde gösterilebilir.

□

Tanım 4.4.2 [28] M ve N modüller olsun. Önteorem 4.4.1'deki denk koşullar sağlanır ise $[M, N]$ *yarıgüçlü (semipotent)* olarak tanımlanır.

Teorem 4.4.3 [28] *M ve N modüller olsun.* $\mathrm{Tot}[M, N] = \mathrm{Rad}[M, N]$ *olması için gerek ve yeter koşul, $[M, N]$'nin yarıgüçlü olmasıdır. Özel olarak,* $\mathrm{Tot}(E_M) = \mathrm{Rad}(E_M)$ *olması için gerek ve yeter koşul, E_M'nin yarıgüçlü halka olmasıdır ve* $\mathrm{Tot}(R) = \mathrm{Rad}(R)$ *olması için gerek ve yeter koşul, R'nin yarıgüçlü halka olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) $\mathrm{Tot}[M, N] = \mathrm{Rad}[M, N]$ ve $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. O zaman, $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M, N]$ olur. $\mathrm{Tot}[M, N]$'nin tanımından $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır. Dolayısıyla, $[M, N]$ yarıgüçlüdür.

($\Leftarrow$) $\mathrm{Tot}[M, N] \neq \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. $\mathrm{Rad}[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$ olduğundan $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{Tot}[M, N]$ vardır. O zaman, her $\beta \in [N, M]$ için ya $\beta\alpha = 0$ ya da $\beta\alpha \neq (\beta\alpha)^2$'dir. Dolayısıyla, $[M, N]$ yarıgüçlü değildir. $\square$

Önteorem 4.4.4 [28] *M, N modülleri için $M_1 \leq_d M$ ve $N_1 \leq_d N$ olsun. Eğer $[M, N]$ yarıgüçlü ise $[M_1, N_1]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: $M \xrightarrow{\pi_1} M_1 \xrightarrow{\iota_1} M$ ve $N \xrightarrow{\pi_1'} N_1 \xrightarrow{\iota_1'} N$ kanonik izdüşüm ve içerim dönüşümleri ve $\tilde{\alpha} \in [M_1, N_1] \setminus \mathrm{Rad}[M_1, N_1]$ olsun. $\alpha = \iota_1'\tilde{\alpha}\pi_1 \in [M, N]$ şeklinde tanımlansın. $\tilde{\alpha} = \pi_1'\alpha\iota_1$ olduğundan Önteorem 3.2.7(2) gereğince $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$'dir. O zaman, $[M, N]$ yarıgüçlü olduğundan $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır. Şimdi, $\tilde{\beta} := \pi_1\beta\iota_1' \in [N_1, M_1]$ olsun. $0 \neq (\beta\alpha)^2 = \beta\iota_1'\tilde{\alpha}\pi_1\beta\iota_1'\tilde{\alpha}\pi_1 = \beta\iota_1'\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\pi_1$ olduğundan $\tilde{\beta}\tilde{\alpha} \neq 0$'dır. Ayrıca, $\pi_1(\beta\alpha)^2\iota_1 = \pi_1(\beta\alpha)\iota_1$ olduğundan $(\tilde{\beta}\tilde{\alpha})^2 = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$ olur. Dolayısıyla, $[M_1, N_1]$ yarıgüçlüdür. $\square$

Önteorem 4.4.5 [28] *M, N modüller ve $N = N_1 \oplus N_2$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

2. *$i = 1, 2$ için $[M, N_i]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.4.4 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $i = 1, 2$ için $[M, N_i]$ yarıgüçlü ve $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. $i = 1, 2$ için $N \xrightarrow{\pi_i'} N_i \xrightarrow{\iota_i'} N$ kanonik dönüşümler ve $\alpha_i = \pi_i'\alpha \in [M, N_i]$ olsun. O

zaman, $\alpha = \iota_1{}'\alpha_1 + \iota_2{}'\alpha_2$'dir. $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan Teorem 3.2.10 gereğince ya $\alpha_1 \notin \mathrm{Rad}[M, N_1]$ ya da $\alpha_2 \notin \mathrm{Rad}[M, N_2]$'dir. Genelliği bozmadan $\alpha_1 \notin \mathrm{Rad}[M, N_1]$ kabul edilsin. Bu durumda, $0 \neq \beta_1\alpha_1 = (\beta_1\alpha_1)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta_1 \in [N_1, M]$ vardır. $\beta := \beta_1\pi_1{}' \in [N, M]$ olsun. O zaman, $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olur ve $[M, N]$ yarıgüçlü elde edilir. $\square$

Önteorem 4.4.6 [28] *M, N modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

2. *$i = 1, 2$ için $[M_i, N]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.4.4 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $i = 1, 2$ için $[M_i, N]$ yarıgüçlü ve $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. $i = 1$, 2 için $M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{\iota_i} M$ kanonik dönüşümler ve $\alpha_i = \alpha\iota_i \in [M_i, N]$ olsun. O zaman, $\alpha = \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2$'dir. $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan Teorem 3.2.10 gereğince ya $\alpha_1 \notin \mathrm{Rad}[M_1, N]$ ya da $\alpha_2 \notin \mathrm{Rad}[M_2, N]$'dir. Genelliği bozmadan $\alpha_1 \notin \mathrm{Rad}[M_1, N]$ kabul edilsin. Bu durumda, $0 \neq \alpha_1\beta_1 = (\alpha_1\beta_1)^2 \in E_N$ olacak şekilde $\beta_1 \in [N, M_1]$ vardır. $\beta := \iota_1\beta_1 \in [N, M]$ olsun. O zaman, $0 \neq \alpha\beta = (\alpha\beta)^2 \in E_N$ olur ve $[M, N]$ yarıgüçlü elde edilir. $\square$

Teorem 4.4.7 [28] *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ve $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

2. *$1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $[M_i, N_j]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.4.4 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önteorem 4.4.5 ve Önteorem 4.4.6 gereğince tümevarımdan açıktır. $\square$

Sonuç 4.4.8 [28] *M sonlu üretilmiş modül ve $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

2. *Her $i \in I$ için $[M, N_i]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 4.4.4 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Her $i \in I$ için $[M, N_i]$ yarıgüçlü ve $\alpha \in [M, N] \backslash \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. M sonlu üretilmiş modül olduğundan $F \subseteq I$ sonlu olmak üzere $\alpha(M) \subseteq \bigoplus_{i \in F} N_i = P$ ve dolayısıyla $\alpha \in [M, P]$ olur. Ayrıca, $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan Önteorem 3.2.7(3) gereğince $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, P]$'dir. Şimdi, Teorem 4.4.7 gereğince $[M, P]$ yarıgüçlü olduğundan $0 \neq \beta_1\alpha = (\beta_1\alpha)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta_1 \in [P, M]$ vardır. $N \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{\iota} N$ kanonik dönüşümler olmak üzere $\beta = \beta_1\pi \in [N, M]$ şeklinde tanımlansın. O zaman, $\iota\alpha = \alpha$ olduğundan $\beta\alpha = \beta_1\pi\iota\alpha = \beta_1 1_P \alpha = \beta_1\alpha$'dır. Buradan, $\beta \in [N, M]$ için $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olur. Böylece, $[M, N]$ yarıgüçlüdür. $\square$

Önteorem 4.4.9 [28] *M ve N modüller olsun. Eğer $[M, N]$ yarıdüzenli ise $[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

İspat: $[M, N]$ yarıdüzenli ve $\alpha \in [M, N] \backslash \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. α yarıdüzenli olduğundan $(\beta\alpha)^2 = \beta\alpha \in E_M$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ vardır. $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan $\beta\alpha \neq 0$'dır. Dolayısıyla, $[M, N]$ yarıgüçlüdür. $\square$

Önteorem 4.4.10 [28] *M ve N ayrıştırılamaz modüller olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*
2. *$[M, N]$ yarıdüzenlidir.*
3. *Her $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ bir izomorfizmadır.*

Bu durumda, $\mathrm{Rad}[M, N] = \{\alpha \in [M, N] \mid \alpha$ *bir izomorfizma değildir.*$\}$ *olur.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) $[M, N]$ yarıgüçlü ve $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ olsun. O zaman, $0 \neq \beta\alpha = (\beta\alpha)^2 \in E_M$ olacak şekilde $\beta \in [N, M]$ ve $0 \neq \alpha\gamma = (\alpha\gamma)^2 \in E_N$ olacak şekilde $\gamma \in [N, M]$ vardır. Buradan, $M = (\beta\alpha)(M) \oplus (1_M - \beta\alpha)(M)$ ve $N = (\alpha\gamma)(N) \oplus (1_N - \alpha\gamma)(N)$ elde edilir. M ve N ayrıştırılamaz modüller olduğundan $(1_M - \beta\alpha)(M) = 0$ ve $(1_N - \alpha\gamma)(N) = 0$ olur. Buradan, $\beta\alpha = 1_M$ ve $\alpha\gamma = 1_N$ elde edilir. Dolayısıyla, α bir izomorfizmadır.

(3) $\Rightarrow$ (2) Eğer $\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ ise α'nın yarıdüzenli olduğu açıktır. Eğer $\alpha \in [M, N] \setminus \mathrm{Rad}[M, N]$ ise kabulden α bir izomorfizmadır. $\beta = \alpha^{-1}$ için $\beta = \beta\alpha\beta$ ve $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$ olduğundan α yarıdüzenlidir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önteorem 4.4.9 gereğince açıktır.

Son iddianın ispatı için yukarıda ki denk koşullardan birinin sağlandığı kabul edilsin. (3) gereğince eğer $\alpha \in [M, N]$ bir izomorfizma değilse $\alpha \in \mathrm{Rad}[M, N]$'dir. Tersine, eğer $\alpha \in [M, N]$ bir izomorfizma ise $1_M = \alpha^{-1}\alpha \in E_M$'dir. $1_M \notin \mathrm{Rad}(E_M)$ olduğundan Önteorem 3.2.7(2) gereğince $\alpha \notin \mathrm{Rad}[M, N]$'dir. □

Sonuç 4.4.11 [28] *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ve $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ modüllerin ayrıştırılamaz ayrışımı olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *$[M, N]$ yarıgüçlüdür.*

2. *$[M, N]$ yarıdüzenlidir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $[M, N]$ yarıgüçlü olsun. Önteorem 4.4.7 gereğince her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $[M_i, N_j]$ yarıgüçlüdür. Ayrıca, her M_i ve N_j ayrıştırılamaz olduğundan Önteorem 4.4.10 gereğince $[M_i, N_j]$ yarıdüzenlidir. Son olarak, Teorem 4.3.11 gereğince $[M, N]$ yarıdüzenlidir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önteorem 4.4.9 gereğince açıktır. □

Teorem 4.4.12 [18] *V modülü için aşağıdakiler denktir.*

1. *E_V yarıgüçlü halkadır.*

2. $\mathrm{Tot}(E_V) = \mathrm{Rad}(E_V)$*'dir.*

3. *Her $M \in$ Mod–R için* $\mathrm{Tot}[M, V] = \mathrm{Rad}[M, V]$*'dir.*

4. *Her $N \in$ Mod–R için* $\mathrm{Tot}[V, N] = \mathrm{Rad}[V, N]$*'dir.*

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Teorem 4.4.3 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathrm{Tot}(E_V) = \mathrm{Rad}(E_V)$, $M \in \mathrm{Mod}\text{–}R$ ve $\alpha \in [M, V] \setminus \mathrm{Rad}[M, V]$ olsun. O zaman, $1_V - \alpha\beta \in E_V \setminus U(E_V)$ olacak şekilde $\beta \in [V, M]$ vardır. Buradan, $\alpha\beta \notin \mathrm{Rad}(E_V)$'dir. $\mathrm{Tot}(E_V) = \mathrm{Rad}(E_V)$ olduğu için $\alpha\beta \notin \mathrm{Tot}(E_V)$'dir. Dolayısıyla, $((\alpha\beta)\gamma)^2 = (\alpha\beta)\gamma \neq 0$ olacak şekilde $\gamma \in E_V$ vardır. Buradan, $\beta\gamma \in [V, M]$ için $(\alpha(\beta\gamma))^2 = \alpha(\beta\gamma) \neq 0$ olur. Böylece, $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M, V]$ olup $\mathrm{Tot}[M, V] \subseteq \mathrm{Rad}[M, V]$'dir. $\mathrm{Rad}[M, V] \subseteq \mathrm{Tot}[M, V]$ kapsaması her zaman sağlandığından $\mathrm{Tot}[M, V] = \mathrm{Rad}[M, V]$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (2) $M = V$ alınırsa istenen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (4) $\mathrm{Tot}(E_V) = \mathrm{Rad}(E_V)$, $N \in$ Mod–R ve $\alpha \in [V,N] \setminus \mathrm{Rad}[V,N]$ olsun. O zaman, $1_V - \beta\alpha \in E_V \setminus U(E_V)$ olacak şekilde $\beta \in [N,V]$ vardır. Buradan, $\beta\alpha \notin \mathrm{Rad}(E_V)$'dir. $\mathrm{Tot}(E_V) = \mathrm{Rad}(E_V)$ olduğu için $\beta\alpha \notin \mathrm{Tot}(E_V)$'dir. Dolayısıyla, $(\gamma(\beta\alpha))^2 = \gamma(\beta\alpha) \neq 0$ olacak şekilde $\gamma \in E_V$ vardır. Buradan, $\gamma\beta \in [N,V]$ için $((\gamma\beta)\alpha)^2 = (\gamma\beta)\alpha \neq 0$ olur. Böylece, $\alpha \notin \mathrm{Tot}[V,N]$ olup $\mathrm{Tot}[V,N] \subseteq \mathrm{Rad}[V,N]$'dir. $\mathrm{Rad}[V,N] \subseteq \mathrm{Tot}[V,N]$ kapsaması her zaman sağlandığından $\mathrm{Tot}[V,N] = \mathrm{Rad}[V,N]$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (2) $N = V$ alınırsa istenen elde edilir. $\square$

Sonuç 4.4.13 [18] *Eğer N yarıbasit modül ise her $M \in$ Mod–R için* $\mathrm{Tot}[M,N] = \Delta[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N]$*'dir.*

İspat: M sağ R–modül olsun. N yarıbasit modül olduğu için E_N düzenlidir ve Önteorem 4.4.9 gereğince yarıgüçlüdür. Dolayısıyla, Teorem 4.4.12 gereğince $\mathrm{Tot}[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N]$'dir. Şimdi, $f \notin \Delta[M,N]$ olsun. $\text{Çek}(f)$ M'de geniş altmodül olmadığından $\text{Çek}(f) \cap Q = 0$ olacak şekilde $0 \neq Q \leq M$ vardır. Ayrıca, N yarıbasit olduğundan $\text{Gör}(f) \leq_d N$'dir. $X \leq N$ olmak üzere $N = f(Q) \oplus X$ yazılsın. $\pi : N \to f(Q)$ izdüşüm dönüşümü ve $f^{-1} : f(Q) \to Q$, $f|_Q$ tersi olmak üzere $h = f^{-1}\pi \in [N,M]$ olsun. $w = f(q) + x \in N$ için $(fh)(w) = f((f^{-1}\pi)(w)) = f(q)$ olduğundan $(fh)^2(w) = (fh)(fh(w)) = (fh)(f(q)) = f(q) = (fh)(w)$ olur. Böylece, $0 \neq fh = (fh)^2 \in E_N$ olduğundan $f \notin \mathrm{Tot}[M,N]$ ve $\mathrm{Tot}[M,N] \subseteq \Delta[M,N]$ elde edilir. $\Delta[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ kapsaması her zaman sağlandığından $\Delta[M,N] = \mathrm{Tot}[M,N] = \mathrm{Rad}[M,N]$ olur. $\square$

Teorem 4.4.14 [9] *R halkası için aşağıdakiler denktir.*

1. *R yarıbasit halkadır.*

2. *Her $M \in$ Mod–R için* $\Delta(M) = \mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$*'dir.*

3. *Her $M \in$ Mod–R için* $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$*'dir.*

4. *Her $M \in$ Mod–R için* $\rho(\mathrm{Rad}[R,M]) = \mathrm{Rad}(M)$*'dir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $M \in$ Mod–R olsun. R yarıbasit olduğundan M tekil olmayan ve yarıbasit modüldür. Sonuç 4.4.13'ten $\mathrm{Tot}[R, M] = \Delta[R, M] = \mathrm{Rad}[R, M]$'dir. Böylece, Önerme 3.4.5 gereğince $Z(M) = \Delta(M) = \mathrm{Tot}(M) = \rho(\mathrm{Rad}[R, M]) \supseteq \mathrm{Rad}(M)$'dir. Fakat, $Z(M) = 0$ olduğu için $\Delta(M) = \mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabulden açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Her M modülü için $\mathrm{Rad}[R, M] \subseteq \mathrm{Tot}[R, M]$ sağlanır. Böylece, $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = \rho(\mathrm{Tot}[R, M]) = \mathrm{Tot}(M)$ olur. Kabulden $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Tot}(M)$ olduğundan $\rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = \mathrm{Rad}(M)$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (1) Eğer M basit sağ R–modül ise Sonuç 4.4.13 gereğince $\Delta[R, M] = \mathrm{Rad}[R, M]$ 'dir. Buradan, $Z(M) = \Delta(M) = \rho(\Delta[R, M]) = \rho(\mathrm{Rad}[R, M])$ olur. M basit olduğundan $\mathrm{Rad}(M) = 0$'dır. Kabulden $\rho(\mathrm{Rad}[R, M]) = \mathrm{Rad}(M)$ olduğundan $Z(M) = 0$ olur. Böylece, M tekil olmayan modüldür. Yani, her basit sağ R–modül tekil olmayan modüldür. Her basit sağ R–modül tekil olmayan modül ise R yarıbasit halkadır. (A.Koehler [16, s. 657] bu sonucun G. Azumaya'nın basılmamış bir sonucu olduğu bilgisini vermektedir. İspat için [24]'e bakılabilir.) $\square$

Kaynaklar

[1] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., Rings and Categories of Modules, second ed., Springer-Verlag, New York, **1992**.

[2] Bass, H., Finitistic dimension and a homological dimension for semiprimary rings, Trans. Am. Math. Soc., 95, 466-488, **1960**.

[3] Beidar, K.I. and Kasch, F., Good conditions for the total, Proc. of International Symposium on Ring Theory (Kyongju, 1999), Trends Math., Birkhäuser, Boston, MA, 43-65, **2001**.

[4] Beidar, K.I. and Ke, W.-F., On essential extensions of direct sums of injective modules, Arch. Math., 78, 120-123, **2002**.

[5] Brown, B. and McCoy, N.H., The maximal regular ideal of a ring, Proc. Amer. Math. Soc., 1, 165-171, **1950**.

[6] Dung, N.V. and Smith, P.F., On semi-artinian V-modules, Journal of Pure and Applied Algebra, 82, 27-37, **1992**.

[7] Eilenberg, S. and Mac Lane, S., General Theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc., 58, 231-294, **1945**.

[8] Goodearl, K.R., Ring Theory, Marcel Dekker, New York, **1976**.

[9] Kasch, F. and Mader, A., Regularity and substructures of Hom., Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, **2009**.

[10] Kasch, F. and Mader, A., Regularity and substructures of Hom., Comm. Algebra, 34, 1459-1478, **2006**.

[11] Kasch, F. and Mader, A., Rings, modules, and the total, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, **2004**.

[12] Kasch, F., Locally injective modules and locally projective modules, Proceedings of the Second Honolulu Conference on Abelian Groups and Modules (Honolulu, HI, 2001), Rocky Mountain J. Math., 32(4), 1493-1504, **2002**.

[13] Kasch, F., Regularity in Hom., Algebra Berichte(Algebra Reports), Verlag Reinhard Fischer, Munich, 75, **1996**.

[14] Kasch, F., The total in the category of modules, General Algebra 1988 (Krems, 1988), North-Holland, Amsterdam, 129-137, **1990**.

[15] Kasch, F., Modules and Rings, Academic Press Inc., London, **1981**.

[16] Koehler, A., Quasi-projective covers and direct sums, Proc. Amer. Math. Soc., 24(4), 655-658, **1970**.

[17] Lam, T.Y., Lectures on Modules and Rings, Springer-Verlag, **1999**.

[18] Lee, T.K. and Zhou, Y., Substructures of Hom, Journal of Algebra and Its Applications 10(1), 119-127, **2011**.

[19] Mohamed, S.H. and Müller, B.J., Continuous and Discrete Modules, Cambridge Univ. Press, **1990**.

[20] Nicholson, W.K. and Zhou, Y., Semiregular morphisms, Comm. Algebra, 34, 219-233, **2006**.

[21] Nicholson, W.K. and Yousif, M.F., Quasi–Frobenius Rings, Cambridge University Press, **2003**.

[22] Nicholson, W.K., Semiregular modules and rings, Can. J. Math., 28, 1105-1120, **1976**.

[23] Oberst, U. and Schneider, H.-J., Die Struktur von projektiven Moduln, Inventiones Math., 13, 295-304, **1971**.

[24] Satyanarayana, M., Semisimple rings, Amer. Math. Monthly, 74(9), 1086, **1967**.

[25] Sharpe, D.W. and V*á*mos, P., Injective Modules, Cambridge University Press, **1972**.

[26] Wang, Y., Generalizations of Hopfian and co-Hopfian Modules, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 9, 1455-1460, **2005**.

[27] Zelmanowitz, J., Regular Modules, Trans. Amer. Math. Soc., 163, 341-355, **1972**.

[28] Zhou, Y., On (semi)regularity and the total of rings and modules, Journal of Algebra, 322, 562-578, **2009**.

Dizin

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Meltem ALTUN
Doğum Yeri	:	BOLU
Medeni Hali	:	Bekar
E-posta	:	meltemaltun@hacettepe.edu.tr

Eğitim

Lise	:	2001-2005 Bolu İzzet Baysal Anadolu Lisesi
Lisans	:	2005-2006 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık 2006-2010 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Çok iyi

İş Deneyimi

2011- Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–