

LEGENDRE DÜĞÜMLERİN DEĞİŞMEZLERİ

INVARIANTS OF LEGENDRIAN KNOTS

SAMET SARIOĞLAN

Yrd. Doç. Dr. SİNEM ONARAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2014

SAMET SARIOĞLAN'ın hazırladığı ”**Legendre D g mlerin Değişmezleri**”
adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sinem ONARAN

Danışman

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

 ye

Doç. Dr. Ferihe ATALAN OZAN

 ye

Prof. Dr. Turgut ÖNDER

Başkan

Prof. Dr. Burak  ZBAĞCI

 ye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS
TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08/08/2014

SAMET SARIOĞLAN

ÖZET

LEGENDRE DÜĞÜMLERİN DEĞİŞMEZLERİ

SAMET SARIOĞLAN

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sinem ONARAN

Ağustos 2014, 53 sayfa

Kontakt düzlemlere her yerde teğet olan düğüme Legendre düğümü denir. Aşırı dönen kontakt 3-manifoldlarda gevşek ve gevşek olmayan olmak üzere iki tip Legendre düğümü vardır. Bu tezde aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümleri için Baker-Onaran, [2], tarafından tanımlanan derinlik ve gerginlik değişmezleri çalışılmış, değişmezlerin bir derlenmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Aşırı dönen kontakt yapılar, Legendre düğümleri, düğüm değişmezleri

ABSTRACT

INVARIANTS OF LEGENDRIAN KNOTS

SAMET SARIOĞLAN

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assistant. Prof. Dr. Sinem ONARAN

August 2014, 53 pages

A knot that is everywhere tangent to the contact planes is called a Legendrian knot. There are two types of Legendrian knots in overtwisted contact 3-manifolds: Loose and non-loose Legendrian knots. In this thesis, we study and give a survey on the depth and the tension invariants that are defined by Baker and Onaran, [2], for Legendrian knots in overtwisted contact structures.

Keywords: Overtwisted contact structures, Legendrian knots, Knot invariants

TEŐEKKÖR

Tez alıŐmamn her aŐamasında katkı ve eleŐtirileriyle bana yol gÖsteren, verdiği gÖvenle beni ders çalıŐmaya teŐvik eden danıŐmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinem ONARAN'a, bana her zaman gÖvenerek her zaman yanımda olan aileme, arkadaŐlarıma, dostlarıma ve desteklerinden dolayı TÖrkiye Bilimsel ve Teknolojik AraŐtırma Kurumu (TÖBİTAK)'na içtenlikle teŐekkÖr ederim. Bu tez, TÖBİTAK 3501 Programı tarafından Sinem ONARAN'ın # 112T994 numaralı projesi ile desteklenmiŐtir.

İçindekiler

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL BİLGİLER	5
2.1 Kontakt Yapılar	5
2.2 Legendre Düğümleri	9
2.3 Legendre İzotopi	12
2.4 Legendre Düğümlerinin Klasik Değişmezleri	13
2.5 Stabilizasyon	23
2.6 Legendre Komşuluk Teoremi	25
2.7 Dehn Ameliyatı	26
2.8 Kontakt Dehn Ameliyatı	27
2.9 Aşırı Dönen Kontakt Yapılar İçerisindeki Legendre Düğümleri	30
3 GELİŞME	32
3.1 Legendre Düğümleri için Derinlik ve Gerginlik Değişmezleri	32
4 SONUÇ	39
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

Şekil Listesi

1	\mathbb{R}^3 te eksenlerin standart yönlendirmesi	10
2	Legendre çözüük düğümü, Legendre sağ trefoil düğümü ve Legendre sekiz düğümü	11
3	Topolojik düğümleri Legendre düğümlere dönüştürme	11
4	Topolojik sol trefoil düğümü ve bir Legendre düğümü hali	11
5	Legendre Reidemeister Hareketleri	12
6	Legendre çözüük düğümünün iki ön izdüşümü	13
7	Legendre çözüük düğümünün izotopik ön izdüşümleri	13
8	Yarı çaprazlamaların işaretleri	14
9	L ve L' Legendre düğümleri	15
10	Boynuz türleri	17
11	Legendre sağ trefoil	18
12	Legendre sağ trefoil üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar	18
13	Legendre sol trefoil	19
14	Legendre sol trefoil üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar	19
15	Legendre sekiz düğümü	20
16	Legendre sekiz düğümü üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar	20
17	5_2 düğümünün iki Legendre ön izdüşümü	21
18	Legendre çözüük düğümlerinin listesi	22
19	Stabilizasyon operasyonları	23
20	Legendre çözüük düğümü ve iki stabilizasyonu	24
21	Katı torus üzerinde meridyen (mavi) ve boylam (kırmızı) eğrileri	27
22	Legendre çözüük düğümü üzerinde kontakt ameliyat 1	29
23	Legendre çözüük düğümü üzerinde kontakt ameliyat 2	29
24	(S^3, ξ_{OT}) içerisinde gevşek olmayan bir Legendre düğümü	31
25	L üzerinde zigzaglar	34
26	L Legendre düğümü ve L' Legendre itmesi	34
27	L ve L'' Legendre Düğümleri	34
28	L Legendre sol trefoile (+1)-ameliyat ile elde edilen manifold	37

1 GİRİŞ

Geometri matematiğin uzaklık, açı gibi kavramlarını incelerken topoloji bu kavramları görmezden gelerek uzayları şekilsel açıdan inceler. Matematiğin bu iki alanı her ne kadar birbirinden farklı görünseler de, aralarında bir takım ilişkiler vardır. Kontakt topoloji, topolojinin topoloji ve geometri arasındaki bu ilişkileri inceleyen bir alt dalıdır.

Herhangi bir uzay üzerinde bir kontakt yapı, uzayın her noktasına dağılmış integrallenemeyen düzlem alanlarından oluşur. Bu düzlemler uzayın noktaları üzerinde hareket edildiğinde belirli bir yönde dönerek değişirler. Kontakt yapılar ilk olarak bazı diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak ortaya çıkmışlardır. Başlangıçta her ne kadar geometrik yapılar olarak düşünülse de, bu yapılara topolojik anlamda bakmanın getirdiği önemli avantajlar vardır.

Kontakt topoloji, 19. yüzyılda Huygens, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optik alanındaki çalışmalarından doğmuştur. Sophus Lie, Elie Cartan, Darboux gibi birçok büyük matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Kontakt topolojinin uygulama alanları geometrik optik, holonomik olmayan dinamikler, termodinamik ve hidrodinamik alanlarıdır.

Üzerinde bir kontakt yapı tanımlı olan tek boyutlu bir manifolda kontakt manifold denir. Bu tezde genel olarak kontakt 3-manifoldlar üzerinde çalışılmıştır. 1971 yılında Marinet, [29], her 3-manifold üzerinde kontakt yapı olduğunu göstermiştir. Daha sonra tayt ve aşırı dönen olmak üzere iki tip kontakt yapı olduğu gösterilmiştir, [3], [12]. Herhangi bir M kontakt 3-manifoldu üzerinde birden fazla kontakt yapı tanımlı olabilir. Darboux teoreminin sonucu olarak herhangi bir M kontakt manifoldu yerel olarak \mathbb{R}^3 üzerindeki standart tayt kontakt yapıya benzer.

3-manifoldlar üzerinde aşırı dönen kontakt yapıların sınıflandırması Eliashberg tarafından yapılmıştır, [13]. Eliashberg'e göre kontakt bir 3-manifold üzerinde aşırı dönen kontakt yapıların sınıflandırması, düzlem alanlarının homotopi sınıflarının sınıflandırmasına denktir. Ayrıca her 3-manifold üzerinde aşırı dönen bir kontakt yapı vardır, [13]. Tayt kontakt yapıları anlamak aşırı dönen kontakt yapılar kadar kolay değildir. Bununla birlikte tayt kontakt yapılar her zaman var olmayabilirler. Etnyre ve Honda, hiçbir tayt kontakt yapıyı desteklemeyen kapalı kompakt 3-manifoldların var olduğunu göstermişlerdir, [19]. Ayrıca, Eliashberg ve Thurston, tayt kontakt yapılar ile yapraklanma teorisi arasında bağlantılar kurmuşlardır, [14].

Matematikçiler, kontakt yapıları daha iyi anlayabilmek için bu yapıların içerisindeki düğümlere yönelmişlerdir. En basit anlamda bir topolojik düğüm, 3-boyutlu bir uzayın birim çembere homeomorf olan bir altkümesidir. Düğüm teorisi, matematikte topolojinin bir alt dalıdır. Ancak bu alandaki ilk çalışmalar matematikte değil de kimyada yapılmıştır. 19. yüzyılın sonlarına doğru, atomların düğüm yapısında olduğu ve farklı düğümlerin farklı elementlere karşılık geldiği düşünülmekteydi. Atomların yapısı ile ilgili bu düşünceler her ne kadar yanlış olsalar da, bu zaman diliminde düğüm teorisi matematikçilerin ilgisini çekmeyi başarmıştır. Amerikalı matematikçi Alexander, düğüm teorisinin 3-boyutlu topolojide ne kadar önemli olduğunu göstermiştir. Daha sonra Alman matematikçi Seifert, çalıştığı bu konunun önemini birçok kişinin anlamasını sağlamıştır. 1980'lerde biyokimyacılar DNA moleküllerindeki düğümlenmeyi keşfettiler. Daha sonra sentetik kimyada, düğüm türünün molekülün özelliklerini belirlediği, düğüm halinde moleküllerin üretilebileceği fark edildi. Matematiğin kimyada bir yanlış anlaşılardan doğan bu yeni alanı, kimyada ve biyolojide önemli uygulama alanları bulmayı başardı. Kontakt yapılar ile ilişkili olan düğüm türlerinden biri Legendre düğümleridir.

Bir kontakt yapı içerisindeki kontakt düzlemlere her noktada teğet olan düğümlere *Legendre düğümleri* denir. Legendre düğümleri, içerisinde buldukları kontakt yapı ve bu kontakt yapıyı içeren uzay hakkında önemli bilgiler verirler. Örneğin, Legendre düğümler Kanda, [25], tarafından kontakt yapıların sınıflandırılmasında, Rudolph, [34], tarafından da düğümlerin topolojik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılmıştır.

Legendre Reidemeister hareketlerinin bir dizisi ile birbirlerine dönüşebilen iki Legendre düğüme *Legendre izotopik* denir. Ancak verilen iki Legendre düğümünün Legendre izotopik olup olmadıklarını Reidemeister hareketleri ile tespit etmeye çalışmak oldukça zahmetli bir iştir.

Legendre düğümlerin Legendre izotopik olup olmadıklarını tespit etmek için düğüm değişmezleri tanımlanmıştır. Legendre düğümleri için üç adet klasik değişmez vardır: Düğüm tipi, Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısı. Bu değişmezlerin ön izdüşüm diyagramları kullanılarak hesaplanması kolaydır ve bu değişmezler kullanılarak, Legendre düğümlerin farklı sınıfları kolayca birbirinden ayrılabilir.

Legendre düğümlerin klasik değişmezlerinin, Legendre düğümleri tamamen sınıflandırmak için yeterli olup olmadıkları uzun yıllar boyunca merak konusu olmuştur.

Klasik değişmezleri aynı olup Legendre izotopik olmayan Legendre düğümleri var mıdır? Klasik değişmezler ile tamamen belirli olan topolojik düğüm türlerine *Legendre-basit* denir. Legendre düğümleri içerisinde klasik değişmezleri aynı olup Legendre izotopik olmayan düğümler vardır. Bu tür düğümlere ait ilk örnekler Chekanov'a aittir [4]. Chekanov, Legendre düğümleri için yeni değişmezler tanımlayarak Legendre-basit olmayan düğüm türleri bulmuştur. Son yıllarda Legendre düğümler için Heegard Floer homoloji kullanılarak [28] ve açık kitaplar kullanılarak [33] birçok yeni değişmez tanımlanmıştır. Bu tezde yakın zamanda aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümleri için [2] makalesinde tanımlanan *derinlik* ve *gerginlik* değişmezlerini inceledik. Aşırı dönen kontakt manifoldlarda gevşek ve gevşek olmayan olmak üzere iki tip Legendre düğümü vardır. Aşırı dönen kontakt bir manifold içerisinde verilen bir L Legendre düğümünün tümleyeni yine aşırı dönen bir kontakt manifold ise L düğümüne gevşek, tümleyeni aşırı dönen değil ise L düğümüne gevşek olmayan düğüm denir. Diğer bir deyişle, tümleyeni *tayt* kontakt manifold olan düğümler gevşek olmayan Legendre düğümleridir. İlk gevşek olmayan Legendre düğümü örnekleri Dymara tarafından 2001 yılında verilmiştir, [6]. İlk sınıflandırma örnekleri Eliashberg ve Fraser tarafından 2009 yılında verilmiştir, [10]. Eliashberg ve Fraser, aşırı dönen kontakt S^3 manifoldu içerisindeki gevşek olmayan Legendre çözümlerini kontaktomorfizmaya göre sınıflandırmışlardır. Son yıllarda [17] makalesi ve [2] makalesi aşırı dönen kontakt yapılara ve içlerindeki düğümlere olan ilgiyi iyice arttırmıştır.

Bu tezde Baker ve Onaran tarafından [2] makalesinde Legendre düğümlerinin gevşekliğine engeller bulmak amacı ile tanımlanan *derinlik* ve *gerginlik* değişmezlerini inceledik. Tanımlanan değişmezlerin birbirleri ile olan ilişkilerinin yanı sıra kontakt ameliyatlar ile olan ilişkilerini derledik.

Tezin temel bilgiler bölümünde kontakt yapı kavramı tanıtıldı, \mathbb{R}^3 ve S^3 manifoldları üzerinde kontakt yapı örnekleri verildi. Kontakt 3-manifoldlar *tayt* ve *aşırı dönen* olarak sınıflandırıldı ve bunlara dair örnekler verildi. Legendre düğümleri tanımlandı. Legendre düğümleri için ön izdüşüm kavramı verildi, Legendre izotopiklik ve Legendre Reidemeister hareketlerinden bahsedildi. Legendre düğümleri için klasik değişmezler tanıtıldı ve bu değişmezler örnekler üzerinde hesaplandı. Daha sonra Legendre komşuluk teoremi verildi, Dehn ameliyatı ve kontakt Dehn ameliyatı tanıtıldı. Legendre düğümleri için stabilizasyon operasyonları tanımlandı. Temel bilgiler bölümünün sonunda aşırı

dönen kontakt yapılar içerisindeki Legendre düğümü tipleri incelendi ve örnekler verildi.

Gelişme bölümünde Legendre düğümleri için [2] makalesinde tanımlanan *derinlik* ve *gerginlik* değişmezlerinin tanımları verildi. Değişmezlerin birbiri ile ilgili olan ilişkisi incelenerek bu değişmezler ile ilgili teoremler derlendi.

Son bölümde bu yeni değişmezler ile ilgili açık sorular listelendi.

2 TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde kontakt topoloji ile ilgili temel bilgiler incelenecektir. Bölüm 2.1 de kontakt yapılar tanımlanacak ve çeşitli örnekler verilecektir. Bölüm 2.2 - 2.6 arasında Legendre düğümleri tanımlanacak ve bazı özellikleri üzerinde durulacaktır. Bölüm 2.7 ve Bölüm 2.8 de Dehn ameliyatı ve kontakt Dehn ameliyatı, son bölümde ise aşırı dönen kontakt yapılar içerisindeki Legendre düğümleri incelenecektir. Bu konular ile ilgili daha fazla bilgi için [22] ve [16]'ye bakınız.

2.1 Kontakt Yapılar

Tanım 1. M yönlendirilmiş bir manifold, TM , M manifoldunun teğet demeti, ξ bir düzlem alanı olsun. Eğer bir α 1-formu, $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ ve M üzerinde yerel olarak $\xi = \ker \alpha \subset TM$ koşullarını sağlayacak şekilde var ise, ξ düzlem alanına bir *kontakt yapı*, (M, ξ) ikilisine de bir *kontakt manifold* denir.

Kontakt yapı tanımı yukarıda genel $2n + 1$ boyutlu manifoldlar için verilse de, bu tezde 3 manifoldlar üzerinde çalışılacaktır. \mathbb{R}^3 üzerinde kontakt yapı örnekleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1. Verilen $\alpha = dz - ydx$ 1-formu için

$$\begin{aligned}\alpha \wedge d\alpha &= (dz - ydx) \wedge d(dz - ydx) \\ &= (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0.\end{aligned}$$

olup $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ sağlanır. $\xi = \ker \alpha = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \subset T\mathbb{R}^3$ olup, ξ bir kontakt yapı belirler. Bu kontakt yapıya \mathbb{R}^3 üzerinde *standart kontakt yapı* denir, ξ_{std} ile gösterilir.

Örnek 2.2. $\alpha' = dz + xdy$ 1-formu için

$$\begin{aligned}\alpha' \wedge d\alpha' &= (dz + xdy) \wedge d(dz + xdy) \\ &= (dz + xdy) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0\end{aligned}$$

olup $\alpha' \wedge d\alpha' \neq 0$ sağlanır. $\xi' = \ker \alpha' = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, -x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \subset T\mathbb{R}^3$ olup, ξ' \mathbb{R}^3 üzerinde başka bir kontakt yapı belirler.

Örnek 2.3. \mathbb{R}^3 üzerinde (r, θ, z) silindirik koordinatları ile $\alpha_{ot} = dz + r^2 d\theta$ 1-formu için

$$\alpha_{ot} \wedge d\alpha_{ot} = 2r dr \wedge d\theta \wedge dz \neq 0$$

olup $\alpha_{ot} \wedge d\alpha_{ot} \neq 0$ sağlanır, böylece $\xi_{ot} = \text{çek } \alpha_{ot}$, \mathbb{R}^3 üzerinde bir kontakt yapı olur. Herhangi bir (r, θ, z) noktasında kontakt düzlem $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, r^2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ ile üretilir.

Örnek 2.4. $\alpha_{sym} = dz - ydx + xdy$ 1-formu için

$$\begin{aligned} \alpha_{sym} \wedge d\alpha_{sym} &= (dz - ydx + xdy) \wedge d(dz - ydx + xdy) \\ &= (dz - ydx + xdy) \wedge (-dy \wedge dx + dx \wedge dy) \\ &= 2dx \wedge dy \wedge dz \neq 0 \end{aligned}$$

olup $\alpha_{sym} \wedge d\alpha_{sym} \neq 0$ sağlandığından, α_{sym} , \mathbb{R}^3 üzerinde bir kontakt yapı belirler. Bu kontakt yapıya \mathbb{R}^3 üzerinde *simetrik kontakt yapı* denir. Bir (x, y, z) noktasında $\xi_{sym} = \text{çek } \alpha_{sym}$ kontakt yapısı $y \neq 0$ iken $\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ kümesi ile, $x \neq 0$ iken $\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ kümesi ile, $x = y = 0$ iken $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ kümesi ile üretilir.

Örnek 2.5. (S^3 üzerinde standart kontakt yapı)

$\alpha_{S^3} = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2$ olmak üzere $\xi_{S^3} = \text{çek } \alpha_{S^3}$, S^3 üzerinde bir kontakt yapı belirler. Bu kontakt yapıya S^3 üzerinde *standart kontakt yapı* veya *Hopf kontakt yapısı* denir. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_{S^3} \wedge d\alpha_{S^3} &= (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2) \wedge d(x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2) \\ &= (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dy_1 + 2dx_2 \wedge dy_2) \\ &= 2(x_1 dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 - y_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 + \\ &\quad x_2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2 - y_2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \in \text{çek } (\alpha_{S^3} \wedge d\alpha_{S^3})$ olur. Böylece herhangi bir $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3$ noktasında $\text{çek } (\alpha_{S^3} \wedge d\alpha_{S^3})_{(x_1, y_1, x_2, y_2)}$, teğet uzayının bir boyutlu lineer bir alt uzayı olur. Bu nedenle

$\text{çek } (\alpha_{S^3} \wedge d\alpha_{S^3})_{(x_1, y_1, x_2, y_2)} = \left\langle \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right\rangle = (T_{(x_1, y_1, x_2, y_2)} S^3)^\perp$ olur ve böylece TS^3 üzerinde $\alpha_{S^3} \wedge d\alpha_{S^3} \neq 0$ sağlanır.

Tanım 2. (M, ξ) ve (M', ξ') iki kontakt manifold olsun. Her $m \in M$ için

$d\phi_m(\xi_m) = \xi'_{\phi(m)}$ olacak şekilde bir $\phi : M \rightarrow M'$ difeomorfizmine (M, ξ) den (M', ξ')

ye bir *kontaktomorfizm* denir. Aralarında bir kontaktomorfizm tanımlı olan iki kontakt manifolda *kontaktomorf* denir.

Örnek 2.6. (\mathbb{R}^3, ξ') kontakt yapısı $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısına

$\phi : (\mathbb{R}^3, \xi') \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, $\phi(x, y, z) = (y, x, -z) = (x', y', z')$ kontaktomorfizmi ile kontaktomorftur. Gerçekten de

$$\begin{aligned} d\phi_{(x,y,z)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial y'} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d\phi_{(x,y,z)} \left(-x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\ &= y' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x'} \end{aligned}$$

olup ϕ dönüşümü bir kontaktomorfizmdir.

Örnek 2.7. $(\mathbb{R}^3, \xi_{sym})$ kontakt yapısı $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısına

$\phi : (\mathbb{R}^3, \xi_{sym}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, $\phi(x, y, z) = (x, 2y, xy + z) = (x', y', z')$ kontaktomorfizmi ile kontaktomorftur. Burada

$$\begin{aligned}
d\phi_{(x,y,z)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ 2xy \end{bmatrix} \\
&= x \frac{\partial}{\partial x'} + 2y \frac{\partial}{\partial y'} + 2xy \frac{\partial}{\partial z'} \\
&= x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + x' y' \frac{\partial}{\partial z'} \\
&= y' \frac{\partial}{\partial y'} + x' \left(\frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial z'} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\phi_{(x,y,z)} \left(y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y \end{bmatrix} \\
&= 2y \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x'} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial z'} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
d\phi((\xi_{sym})_{(x,y,z)}) &= \left\langle \left\{ y' \frac{\partial}{\partial y'} + x' \left(y' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right), y' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial y'}, y' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

olup ϕ dönüşümü bir kontaktomorfizmdir.

Tayt ve *aşırı dönen* olmak üzere iki tip kontakt 3-manifold vardır.

Tanım 3. (M, ξ) bir kontakt 3-manifold, $D \subset M$ bir disk olsun. $\forall p \in \partial D$ için $T_p D = \xi_p$ sağlanıyorsa, D diskine *aşırı dönen disk* denir.

Tanım 4. (M, ξ) bir kontakt 3-manifold olsun. Eğer M manifoldu *aşırı dönen* bir disk içeriyorsa M manifolduna *aşırı dönen kontakt 3-manifold*, *aşırı dönen* disk içermiyorsa ise *tayt kontakt 3-manifold* denir.

Örnek 2.8. Yukarıda verilen örneklerden $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ ve $(\mathbb{R}^3, \xi_{sym})$ kontakt 3-manifoldları tayt olup (\mathbb{R}^3, ξ_{ot}) kontakt 3-manifoldu aşırı dönendir. (\mathbb{R}^3, ξ_{ot}) manifoldu içerisindeki $D = \{(r, \theta, z) \mid z = 0, r \leq \pi\}$ diski aşırı dönen bir diskidir.

Teorem 2.9. (Darboux Teoremi) (M, ξ) kontakt 3-manifold, $m \in M$ olsun. m noktasının $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısında 0 noktasının bir komşuluğuna kontaktomorf bir komşuluğu vardır, yani 3-manifoldlar üzerinde tüm kontakt yapılar yerel olarak \mathbb{R}^3 üzerindeki standart kontakt yapıya kontaktomorftur.

2.2 Legendre Dügümleri

Verilen bir (M, ξ) kontakt 3-manifoldun içerisindeki düğümleri inceleyerek, kontakt yapı hakkında çeşitli bilgiler edinebiliriz. Kontakt yapılar hakkında bazı bilgiler veren düğüm çeşitlerinden birisi de Legendre düğümleridir. Örneğin, aşırı dönen bir diskin sınırı çözükle bir Legendre düğümü olduğu için bir kontakt yapının aşırı dönen olup olmadığının belirlenmesinde kullanabiliriz. Legendre düğümleri hakkında daha fazla bilgi için [16] makalesine bakabilirsiniz.

Tanım 5. (M, ξ) bir kontakt manifold, $L \subset (M, \xi)$ bir düğüm olsun. $\forall a \in L$ için $T_a L \subset (\xi)_a$ sağlanıyor ise, yani L düğümü kontakt düzlemlere her yerde teğet ise, L düğümüne bir *Legendre düğümü* denir.

Düğüm diyagramlarına \mathbb{R}^3 te değil de diyagramın \mathbb{R}^2 deki izdüşümlerinde bakmak kolaylık sağlayacaktır. $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ kontakt 3-manifoldu içerisindeki Legendre düğümleri resmetmek için *ön izdüşümleri* kullanılır.

Tanım 6. L , $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ kontakt yapısında bir düğüm, $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y, z) = (x, z)$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. L düğümünün α dönüşümü altındaki $\alpha(L)$ görüntüsüne L düğümünün *ön izdüşümü* denir.

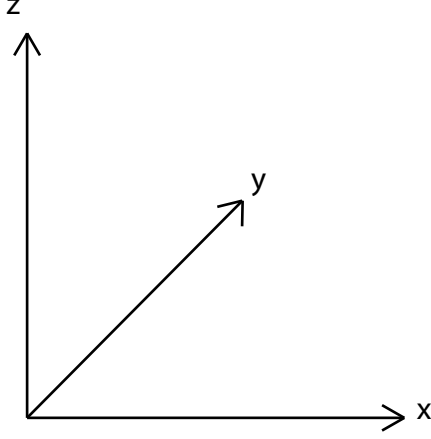
Bu kontakt yapıdaki kontakt düzlemler $\xi_{st} = \text{çek}(dz - ydx)$ ile tanımlı olduklarından L düğümü üzerindeki her $(x, y, z) \in L$ noktası için

$$dz - ydx = 0 \tag{1}$$

sağlanır. Denklem 1 in bir sonucu olarak, düğüm üzerindeki herhangi bir noktanın y koordinatı, dx ve dz ile tamamen belirlidir.

$$y = \frac{dz}{dx}$$

Denklem 1, dx değerinin sıfır olduğu her yerde dz değerinin de sıfır olmasını gerektirir. Bu sebeple bir Legendre düğümünün ön izdüşümünde dikey teğet bulunamaz.

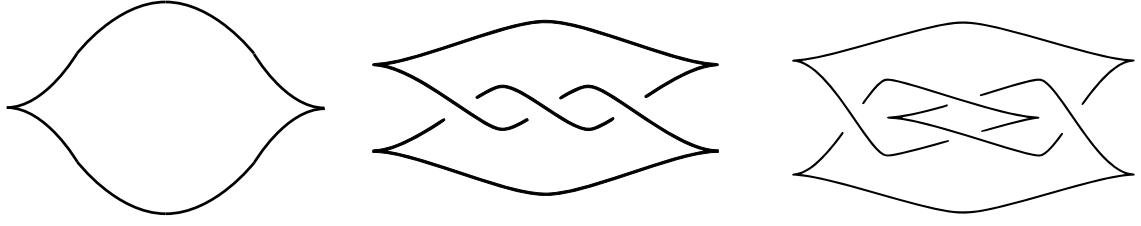


Şekil 1: \mathbb{R}^3 te eksenlerin standart yönlendirmesi

\mathbb{R}^3 te eksenlerin Şekil 1'deki standart yönlendirilmesine bakıldığında, y değerlerinin sayfanın içerisine doğru gidildikçe büyüdüğü görülmektedir. Bununla birlikte denklem 1 den dolayı y değerleri arttıkça $\frac{dz}{dx}$ eğimleri de artacağından, düğüm diyagramının xz -düzleminde izdüşümü alındığında, her bir çaprazlamada üstteki eğim, alttaki eğimden küçük olacaktır. Sonuç olarak bir Legendre düğümünün ön izdüşümündeki her çaprazlamada üstteki eğim alttaki eğimden daha küçüktür.

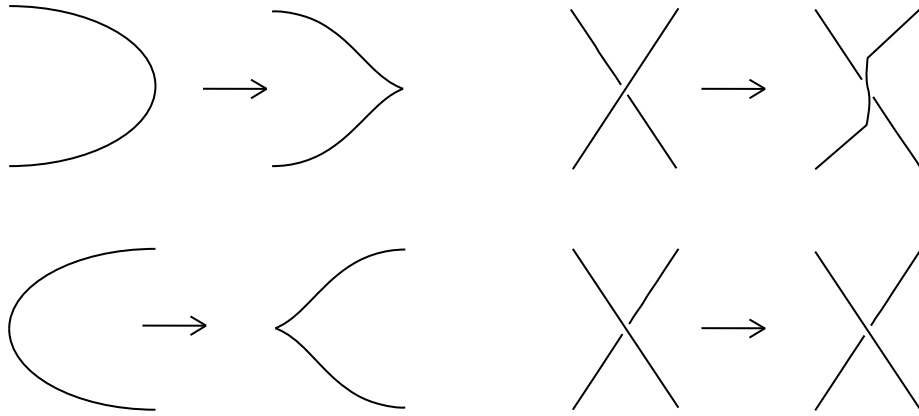
Teorem 2.10. *Her topolojik düğüm türü için, o düğüme karşılık gelen bir Legendre düğümü vardır.*

Şekil 2'de; sırasıyla çözükle düğüm, sağ trefoil düğümü ve sekiz düğümünün Legendre düğümü temsilleri bulunmaktadır.



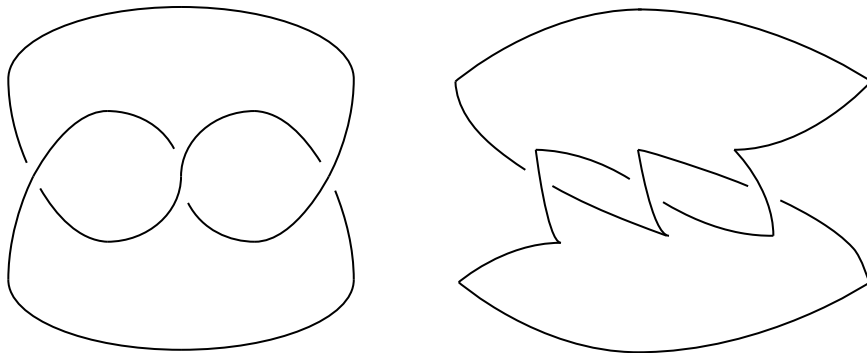
Şekil 2: Legendre çözükle düğümlü, Legendre sağ trefoil düğümlü ve Legendre sekiz düğümlü

Verilen herhangi bir topolojik düğüm, Şekil 3'teki hareketler kullanılarak bir Legendre düğümlüne dönüştürülebilir:



Şekil 3: Topolojik düğümleri Legendre düğümlere dönüştürme

Örnek 2.11. Şekil 4'te bir sol trefoil düğümlü ve bu düğümlünün Legendre düğümlüne dönüştürülmüş hali bulunmaktadır.



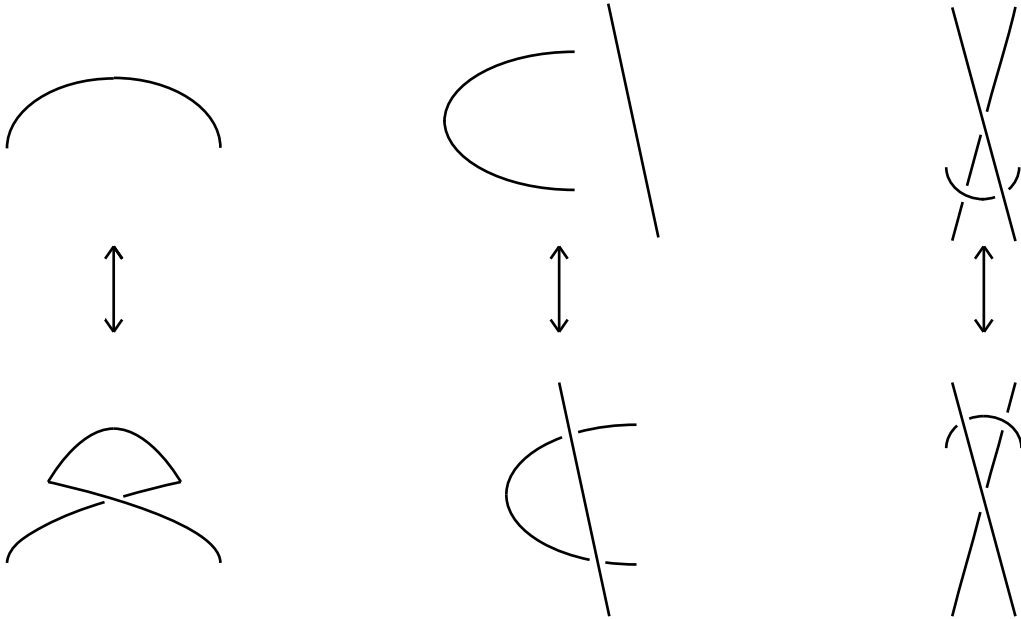
Şekil 4: Topolojik sol trefoil düğümlü ve bir Legendre düğümlü hali

2.3 Legendre İzotopi

Bu bölümde, Legendre düğümleri bazı denklik sınıflarına ayırmak için kullanılan Legendre izotopi kavramı tanıtılacaktır. Verilen herhangi iki Legendre düğümün aynı Legendre izotopi sınıfında olup olmadığını söyleyebilmek oldukça zordur. Legendre düğümlerini farklı Legendre izotopi sınıflarına ayırmak için çeşitli teknikler var olsa da, Legendre düğümlerini izotopi sınıflarına göre sınıflandırmak için kesin bir yöntem bulunmamaktadır.

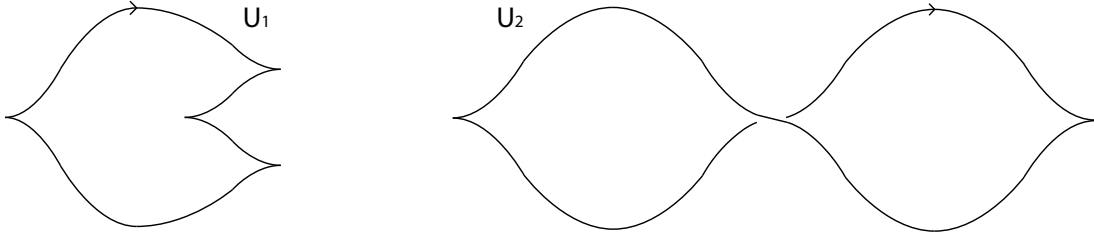
Tanım 7. (M, ξ) bir kontakt manifold, $L_0, L_1 \subset M$ iki Legendre düğümü olsun. Bu durumda M içerisinde Legendre düğümlerin sürekli bir $L_t, t \in [0, 1]$ ailesi L_0 da başlayarak L_1 de bitecek şekilde var ise, L_0 ve L_1 Legendre düğümlerine *Legendre izotopik* denir.

Teorem 2.12. İki ön izdüşümün Legendre izotopik Legendre düğümlerini temsil etmesi için gerek ve yeter koşul Şekil 5'teki hareketlerin bir dizisi ile birbirleriyle ilişkili olmasıdır. Bu hareketlere Legendre Reidemeister Hareketleri denir.



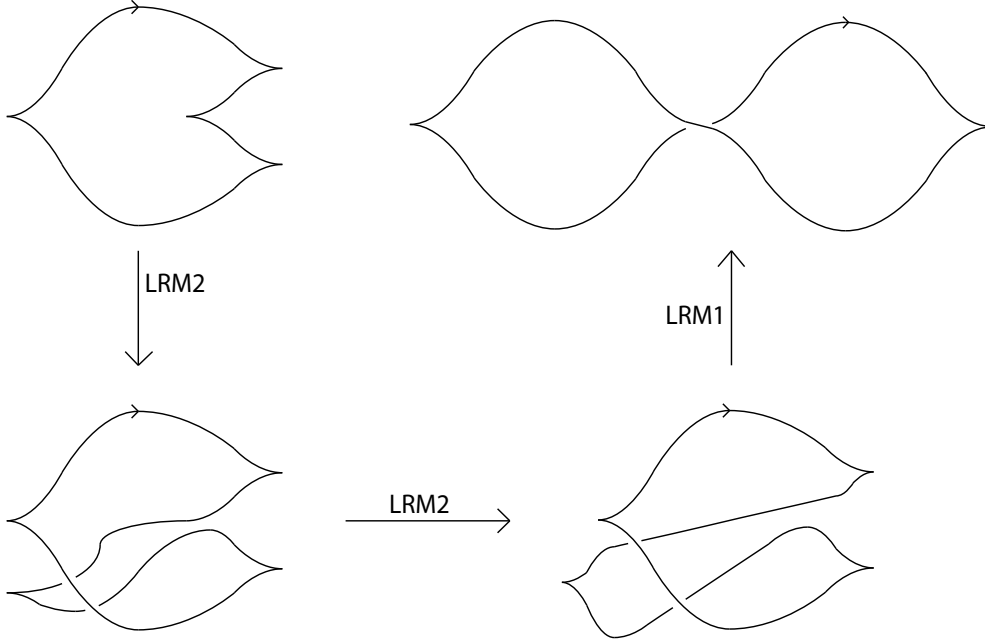
Şekil 5: Legendre Reidemeister Hareketleri

Örnek 2.13. $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ içerisindeki Legendre çözükle düğümünün Şekil 6'da verilen iki ön izdüşümü Legendre izotopiktir.



Şekil 6: Legendre çözük düğümünün iki ön izdüşümü

Legendre çözük düğümünün Şekil 6'da verilen iki ön izdüşümü Legendre Reidemeister hareketlerinin (LRM) Şekil 7'deki dizisi ile Legendre izotopik olurlar.



Şekil 7: Legendre çözük düğümünün izotopik ön izdüşümleri

2.4 Legendre Düğümlerinin Klasik Değişmezleri

Legendre düğümleri için üç adet klasik değişmez vardır: Düğüm tipi, dönme sayısı ve Thurston-Bennequin değişmezi. Bu değişmezlerin tanımları sadece homolojik olarak aşikâr düğümler için verilmiştir. Bir (M, ξ) kontakt manifoldunda bir L düğümünün homolojik olarak aşikâr olması demek, L düğümünün M manifoldu içerisinde temsil ettiği $[L] \in H_1(M)$ homoloji sınıfının sıfır olması demektir. Yani homolojik olarak

aşıkâr bir düğüm, manifold içerisindeki bir yüzeyin sınırı olur. Manifold içerisinde bir düğümü sınır olarak kabul eden bir yüzeye, düğüm için bir *Seifert yüzey* denir.

Düğüm Tipi:

Her topolojik düğüm tipi için, o düğümü temsil eden bir Legendre düğümü vardır. Bir Legendre düğümü için en açık olan değişmez, bu düğümün temsil ettiği topolojik düğüm tipidir, çünkü iki Legendre düğümü arasındaki herhangi bir Legendre izotopi, herşeyden önce bu düğümlerin temsil ettiği topolojik düğümler arasında bir topolojik izotopidir.

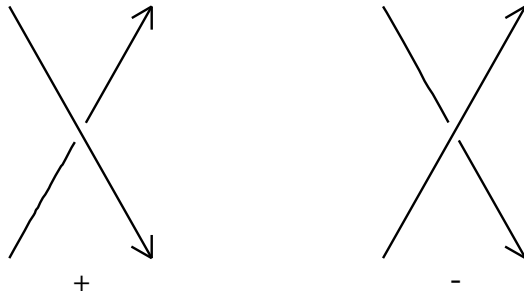
Thurston-Bennequin Değişmezi:

(M, ξ) bir kontakt manifold, $L \subset M$ bir Legendre düğümü, Σ yüzeyi L için bir Seifert yüzeyi, v ise L boyunca kontakt düzlemlere transvers bir vektör alanı olsun. L düğümünün v yönünde bir L' itmesini aldığımızda L düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L)$, L' düğümü ile Σ Seifert yüzeyinin işaretli arakesit sayısıdır.

Thurston-Bennequin değişiminin hesaplanması:

$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısı içerisinde bir L Legendre düğümünü düşünelim. $v = \frac{\partial}{\partial z}$ vektör alanı L boyunca ξ_{std} a transverstir. Böylece $tb(L)$ sayısı L düğümü ile L yi z yönünde itmekle elde edilen L' düğümü arasındaki bağlanma sayısıdır.

Yönlendirilmiş bir düğüm diyagramında çaprazlamaların pozitif ve negatif olarak işaretlenmiş haldeki sayısına, diyagramın "*kıvrılma sayısı*" (*writhe*) denir, $KS(L)$ ile gösterilir. Bağlanma sayısı $lk(L, L')$, L ve L' arasındaki çaprazlamaların işaretli sayısının yarısıdır. Çaprazlamaların işaretleri Şekil 8'deki gibi belirlidir.



Şekil 8: Yarı çaprazlamaların işaretleri

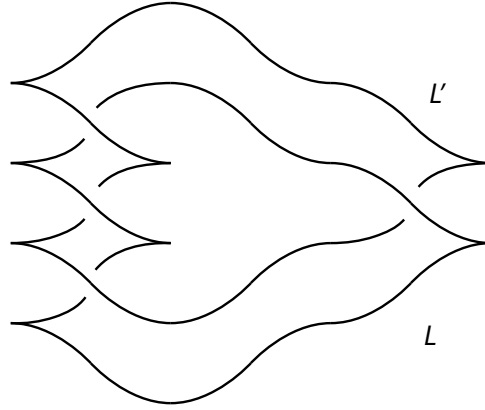
L ve L' arasındaki çaprazlamalar, L üzerindeki çaprazlamalar ve boynuzlardan gelir. L üzerindeki her bir pozitif (negatif) çaprazlama için L ve L' arasında iki pozitif

(negatif) çaprazlama oluşur. L üzerindeki her bir boynuz için L ve L' arasında bir negatif çaprazlama oluşur. Bu durumda

$$tb(L) = lk(L, L') = KS(L) - \frac{1}{2}\#(boynuz(L)) \quad (2)$$

elde edilir.

Örnek 2.14. Şekil 9'da verilen L Legendre düğümü ve L düğümünün L' itmesi arasındaki bağlanma sayısı $lk(L, L') = -2$ dir. Bu nedenle L Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = -2$ dir. Diğer taraftan L Legendre düğümü diyagramının kıvrılma sayısı $KS(L) = 0$, toplam boynuz sayısı da $boynuz(L) = 4$ olduğundan $tb(L) = KS(L) - \frac{1}{2}\#(boynuz(L)) = 0 - \frac{1}{2}(4) = -2$ dir.



Şekil 9: L ve L' Legendre düğümleri

Bir düğüm diyagramının kıvrılma sayısı düğüm için seçilen yönlendirmeden bağımsızdır ve yönlendirme ters dönerse, her bir çaprazlamadaki ipler yön değiştireceğinden çaprazlamamanın işareti yine aynı kalır. Sonuç olarak bir Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi, düğüm üzerindeki yönlendirmeden bağımsızdır.

Teorem 2.15. *Thurston-Bennequin değişmezi, Legendre düğümleri için bir değişmezdir.*

Kanıt: Bir L Legendre düğümünün her ön izdüşümü Legendre Reidemeister hareketleri ile birbirleriyle ilişkilidirler. Kanıt için, yapılan Legendre Reidemeister hareketlerinin diyagramın Thurston-Bennequin değişmezini değiştirmedeğini görmek yeterlidir. Legendre Reidemeister I, düğüme yeni bir pozitif çaprazlama eklerken aynı zamanda iki

yeni boynuz ekler; sonuç olarak diyagramın Thurston-Bennequin değişmezi değişmez. Legendre Reidemeister II, aynı anda bir pozitif bir negatif çaprazlama oluştururken boynuz sayısını korur, diyagramın Thurston-Bennequin değişmezini değiştirmez. Legendre Reidemeister III ise her tür çaprazlama sayısını ve boynuz sayısını korur, Thurston - Bennequin değişmezini etkilemez. Sonuç olarak bir Legendre düğümünün Thurston - Bennequin değişmezi, Legendre düğümü için değişmezdir. \square

(M, ξ) bir tayt kontakt 3-manifold, $K \subset M$ bir topolojik düğüm olsun. Bu durumda K düğümünün tüm Legendre temsilleri içerisinde, maksimum Thurston-Bennequin değişmezi değerine sahip bir Legendre temsili vardır. Bu değere K düğümünün *maksimal Thurston-Bennequin değişmezi* denir ve bu değer $\overline{tb}(K)$ ile gösterilir. Ayrıca topolojik düğümler için maksimal Thurston-Bennequin değeri topolojik bir değişmezdir. Örneğin çözüük düğümün maksimal Thurston-Bennequin değeri -1 , sol trefoil düğümünün maksimal Thurston-Bennequin değeri -6 dır.

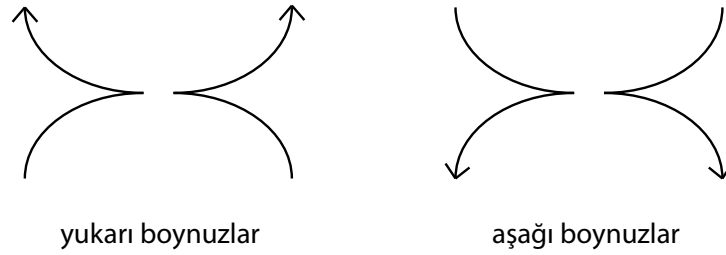
Dönme Sayısı:

Dönme sayısı sadece yönlendirilmiş ve homolojik olarak aşikâr düğümler için tanımlıdır. Bu değişmez, bir L Legendre düğümünün yönünün L için bir Seifert yüzey üzerindeki kontakt düzlemlerin bir aşikarlaması etrafında kaç kere döndüğünü sayar. Daha açık ifade etmek gerekir ise, (M, ξ) bir kontakt manifold, $L \subset M$ yönlü ve homolojik olarak aşikâr bir Legendre düğümü olsun. L düğümü için bir Σ Seifert yüzeyi alalım. Kontakt düzlemlerin Σ yüzeyine kısıtlanmış aşikar bir 2-düzlem demeti oluşturur. Bu durumda $\xi|_{\Sigma}$ aşikarlaması bir $\xi|_L = L \times \mathbb{R}^2$ aşikarlamasını verir. L düğümü yönlü olduğundan L ye teğet ve L nin yönlendirmesi ile aynı yönde olan bir v vektör alanı bulunur. Bu durumda v vektör alanını, \mathbb{R}^2 içerisinde sıfırdan farklı bir vektör alanı olarak düşünebiliriz. v vektör alanının \mathbb{R}^2 içerisindeki sarma sayısına L düğümünün dönme sayısı denir, $rot(L)$ ile gösterilir.

Dönme sayısının hesaplanması:

$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısı içerisinde bir L Legendre düğümünü düşünelim. $w = \frac{\partial}{\partial y}$ olsun. w vektör alanı ξ_{std} kontakt yapısının sıfırdan farklı bir kısmıdır. L düğümünün dönme sayısını hesaplamak için bir $\xi|_L$ aşikarlamasına ihtiyaç vardır. Bu aşikarlamayı L için bir Seifert yüzey yerine w vektör alanını kullanarak oluşturabiliriz. Bu durumda $rot(L)$ değerini hesaplamak için w ile oluşturulan aşikarlama ile \mathbb{R}^2 de bulunan, sıfırdan farklı ve L düğümüne teğet bir v vektör alanının \mathbb{R}^2 nin orijini etrafında

kaç kere döndüğünü hesaplamak yeterlidir. Bu hesaplama, v ve w vektör alanlarının kaç defa aynı yönü gösterdiklerinin işaretli sayısının hesaplanmasına denktir. v ile w vektör alanlarının aynı yönü göstermesine v ile w nin bir arakesiti denir. v vektör alanı w vektör alanını saat yönünün tersi yönde geçiyorsa arakesitin işareti pozitif, saat yönünde geçiyorsa arakesitin işareti negatiftir. Ön izdüşümdeki boynuzlarda v , $\pm w = \pm \frac{\partial}{\partial y}$ yönünde doğrulur. Ön izdüşümde *aşağı boynuz* ve *yukarı boynuz* kavramları Şekil 10'daki gibidir.



Şekil 10: Boynuz türleri

Aşağı boynuzlarda arakesit pozitif, yukarı boynuzlarda arakesit negatiftir. Bu işlem ile v vektör alanının hem w ile hem de $-w$ ile olan arakesitleri sayıldığından, $rot(L)$ değeri için bu işlem ile elde edilen işaretli arakesit sayısının yarısı alınmalıdır. Sonuç olarak verilen bir L Legendre düğümünün dönme sayısı, düğüm üzerindeki aşağı boynuz sayısı A , yukarı boynuz sayısı Y olmak üzere

$$rot(L) = \frac{1}{2} (A - Y) \quad (3)$$

formülü ile hesaplanır.

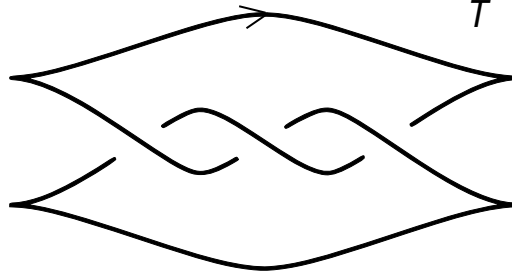
Dönme sayısı, seçilen Seifert yüzeye ve aşıkarmaya bağlı olmayıp düğüm üzerindeki yönlendirmeye bağlıdır. Düğüm üzerindeki yönlendirme değiştirildiğinde ön izdüşümdeki aşağı boynuzlar yukarı boynuz, yukarı boynuzlar aşağı boynuz olacağından dönme sayısı işaret değiştirir.

Teorem 2.16. *Dönme sayısı, yönlendirilmiş Legendre düğümleri için bir değişmezdir.*

Kanıt: Kanıt için, Legendre Reidemeister hareketlerinin dönme sayısını etkilemeyeceğini görmek yeterlidir. Legendre Reidemeister I, biri yukarı biri aşağı olmak üzere bir boynuz çifti oluşturur, böylece dönme sayısı değişmez. Legendre Reidemeister II ve

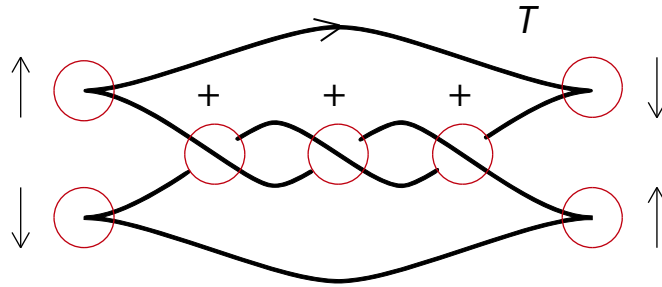
III ise diyagramdaki boynuz sayısını değiştirmez. Sonuç olarak dönme sayısı, Legendre Reidemeister hareketleri altında sabit kalır. \square

rnek 2.17. Şekil 11'deki Legendre sağ trefoil düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısını hesaplayalım.



Şekil 11: Legendre sağ trefoil

zm:



Şekil 12: Legendre sağ trefoil üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar

Örnekteki Legendre sağ trefoil düğümünün çaprazlamalarındaki işaretler ve boynuzlarının durumu Şekil 12'deki gibidir. Buna göre T düğümünün kıvrılma sayısı $KS(T) = 3$ tür. T düğümünde ikisi aşağı ve ikisi yukarı olmak üzere dört adet boynuz bulunmaktadır. Denklem 2 ve denklem 3 kullanılarak

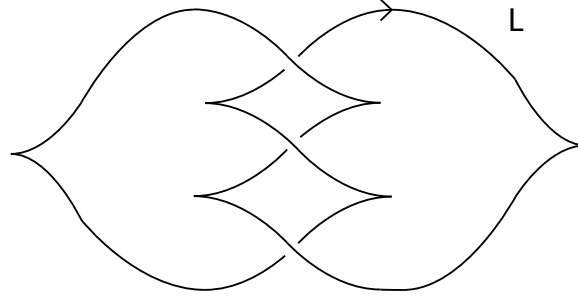
$$tb(T) = KS(T) - \frac{1}{2} \#(\text{boynuz}(T)) = 3 - \frac{1}{2} (4) = 3 - 2 = 1$$

ve

$$rot(T) = \frac{1}{2} (A - Y) = \frac{1}{2} (2 - 2) = 0$$

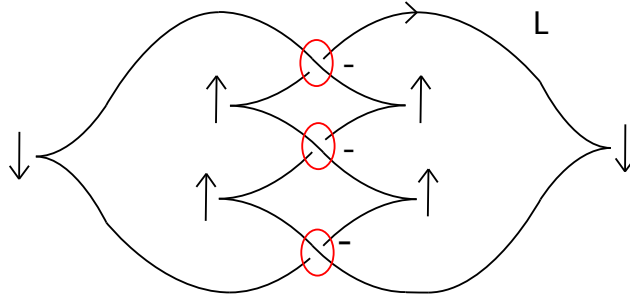
elde edilir.

Örnek 2.18. Şekil 13'te verilen Legendre sol trefoil düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısını hesaplayalım.



Şekil 13: Legendre sol trefoil

Çözüm:



Şekil 14: Legendre sol trefoil üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar

Örnekteki Legendre sol trefoil düğümünün çaprazlamalarındaki işaretler ve boynuzlarının durumu Şekil 14'teki gibidir. Buna göre L düğümünün kıvrılma sayısı $KS(T) = -3$ tür. L düğümünde ikisi aşağı ve dördü yukarı olmak üzere altı adet boynuz bulunmaktadır. Denklem 2 ve denklem 3 kullanılarak

$$tb(T) = KS(T) - \frac{1}{2} \#(\text{boynuz}(L)) = -3 - \frac{1}{2} (6) = -3 - 3 = -6$$

ve

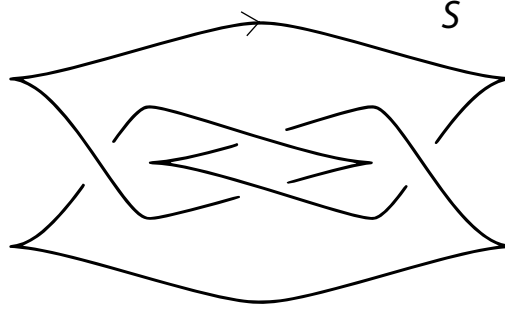
$$rot(L) = \frac{1}{2} (A - Y) = \frac{1}{2} (2 - 4) = -1$$

elde edilir.

Dikkat edilirse Örnek 2.17 ve Örnek 2.18'de verilen Legendre sağ trefoil düğümü ve Legendre sol trefoil düğümünün klasik değişmezleri farklıdır. Bu nedenle Legendre sağ

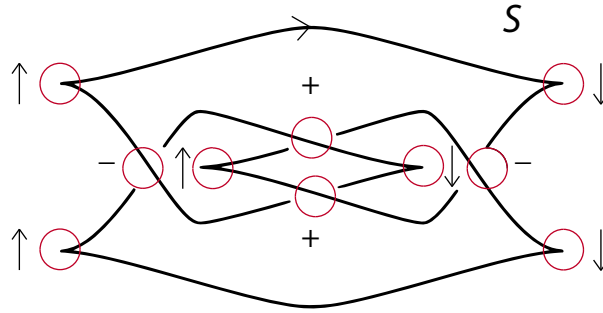
trefoil düğümü ve Legendre sol trefoil düğümü Legendre izotopik değildir.

Örnek 2.19. Şekil 15'teki Legendre sekiz düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısını hesaplayalım.



Şekil 15: Legendre sekiz düğümü

Çözüm:



Şekil 16: Legendre sekiz düğümü üzerinde boynuzlar ve çaprazlamalar

Örnekte verilen S Legendre sekiz düğümünün çaprazlamalarındaki işaretlere göre kıvrılma sayısı $KS(S) = 0$ dir. S düğümünde üçü aşağı ve üçü yukarı olmak üzere altı adet boynuz bulunmaktadır. Buna göre

$$tb(S) = KS(S) - \frac{1}{2}\#(boynuz(S)) = 0 - \frac{1}{2}(6) = 0 - 3 = -3$$

ve

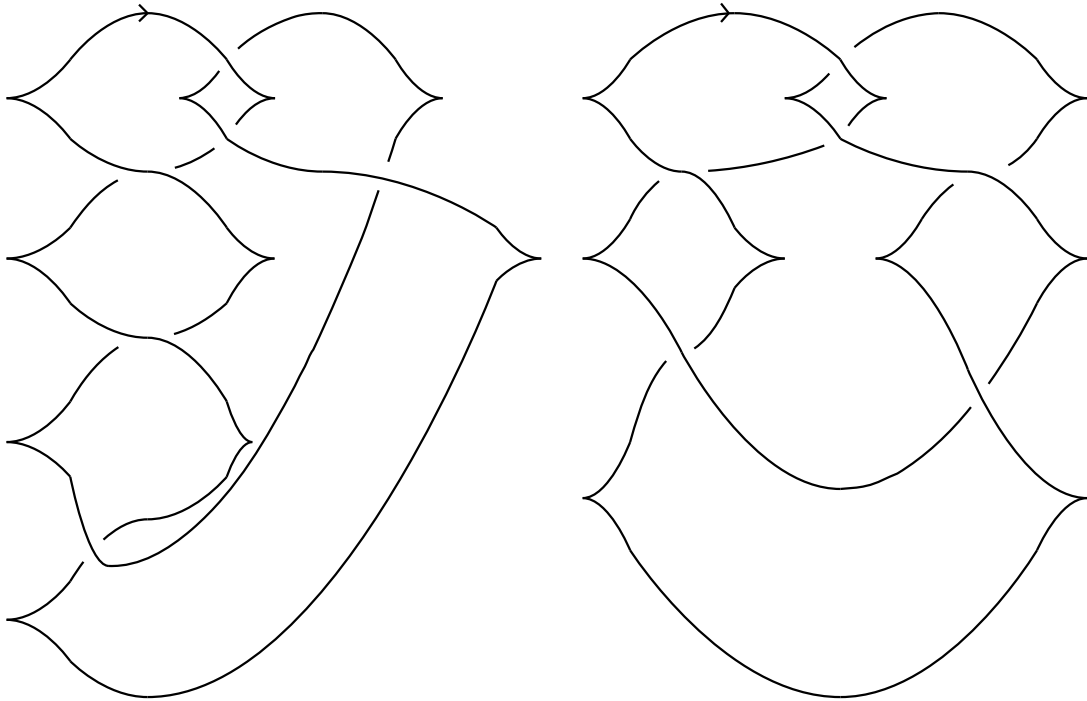
$$rot(S) = \frac{1}{2}(A - Y) = \frac{1}{2}(3 - 3) = 0$$

elde edilir.

Legendre düğümlerinin klasik değişmezleri, Legendre düğümlerinin farklı sınıflarını ayırmak için oldukça kullanışlı araçlar olsalar da, Legendre düğümlerinin kesin bir sınıflandırması için yeterli değildir. Legendre izotopik olan iki Legendre düğümünün klasik değişmezlerinin eşit olduğunu biliyoruz. Ancak klasik değişmezleri eşit olan iki Legendre düğümü Legendre izotopik olmayabilir. Klasik değişmezleri ile tamamen belirli olan düğüm türlerine *Legendre-basit* denir. Çözük düğüm [11], torus düğümleri ve sekiz düğümünün [18] Legendre-basit oldukları kanıtlanmıştır. Chekanov, tanımladığı yeni değişmezler ile 5_2 düğümünün Legendre-basit olmadığını göstermiştir, [5]. Daha sonra Epstein, Fuchs ve Meyer tarafından daha birçok Legendre-basit olmayan düğüm bulunmuştur, [15].

Örnek 2.20’de Legendre-basit olmayan 5_2 düğümünün iki Legendre ön izdüşümü verilmiştir. Örnekteki şekillerde [21] baz alınmıştır.

Örnek 2.20. 5_2 düğümünün Şekil 17’deki iki Legendre ön izdüşümü eşit klasik değişmez değerlerine sahip olmalarına rağmen Legendre izotopik değildir. İki Legendre ön izdüşümünün de Thurston-Bennequin değişmezi 1 ve dönme sayısı 0 dır. Bu iki ön izdüşümün Legendre izotopik olmadıkları Chekanov tarafından kanıtlanmıştır, [5].

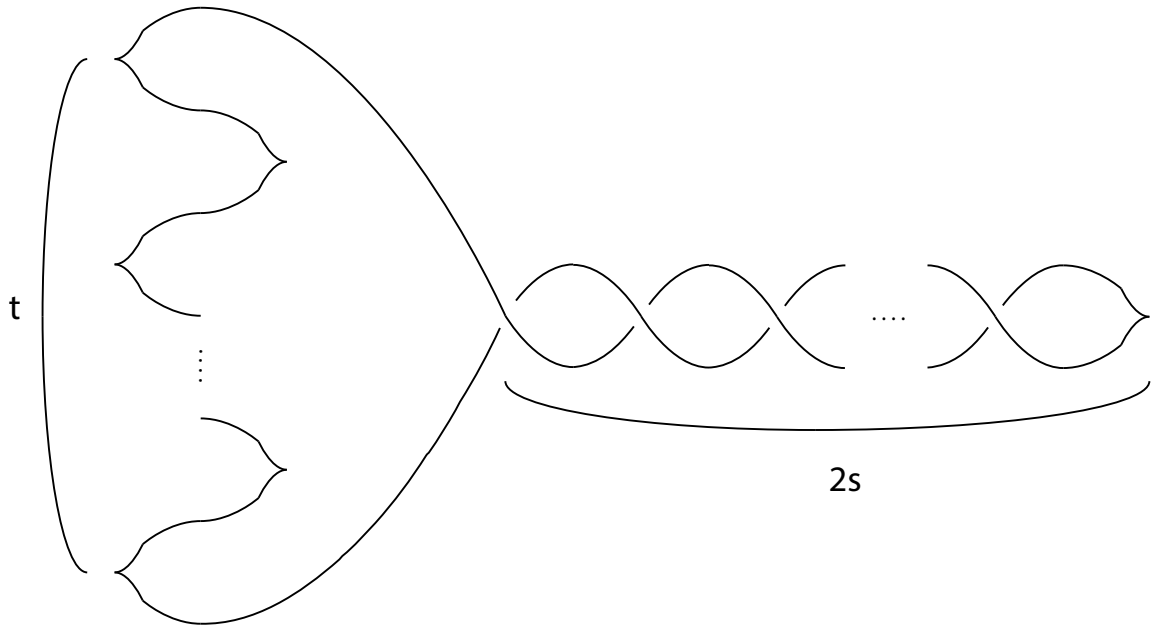


Şekil 17: 5_2 düğümünün iki Legendre ön izdüşümü

Örnek 2.21. $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ içerisindeki Legendre çözükle düğümlerinin sınıflandırılması, Eliashberg ve Frasier tarafından yapılmıştır, [10]. Bu sınıflandırmaya göre Legendre çözükle düğümlerini bir Legendre-basit düğümlerini, yani Legendre çözükle düğümlerini, klasik değışmezleri ile tamamen belirlerdir.

Teorem 2.22. [11] *Tayt bir kontakt manifold içerisinde yönlendirilmiş iki Legendre çözükle düğümlerinin Legendre izotopik olması için gerek ve yeter koşul bu iki Legendre çözükle düğümlerinin aynı klasik değışmez değeriğine sahip olmasıdır.*

Legendre çözükle düğümlerinin tam listesi Şekil 18’de verilmiştir.



Şekil 18: Legendre çözükle düğümlerinin listesi

Buna göre daha önceden Örnek 2.13’te verilen U_1 ve U_2 Legendre çözükle düğümlerinin klasik değışmezleri aynıdır. Gerçekten de Şekil 6’daki U_1 Legendre çözükle düğümlerinde hiç çaprazlama olmayıp üç adet aşağı, bir adet yukarı boynuz bulunmaktadır. O halde

$$tb(U_1) = 0 - \frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

$$rot(U_1) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1$$

elde edilir. Şekil 6’da verilen U_2 Legendre çözükle düğümlerinde ise bir adet negatif

çaprazlama ve iki adet aşağı boynuz bulunmaktadır. O halde

$$tb(U_2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

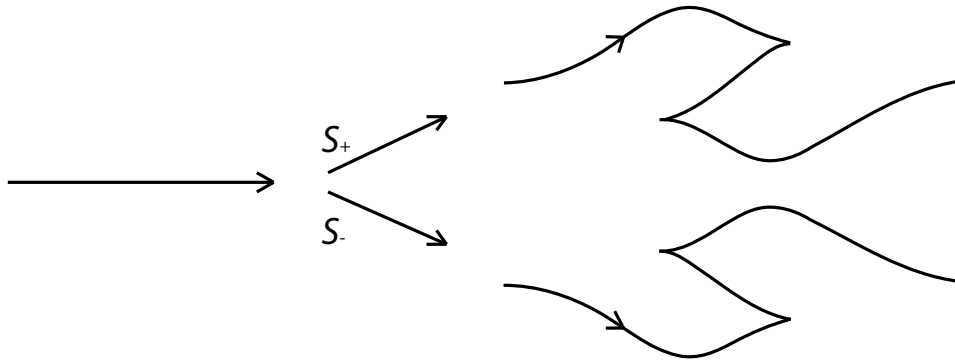
$$rot(U_2) = \frac{1}{2}(2 - 0) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak Şekil 6'da verilen U_1 ve U_2 Legendre çözüük düğümünün Legendre izotopik oldukları, hem Legendre Reidemeister hareketleri ile hem de klasik değişmezler kullanılarak görülebilir.

Şekil 18'de bulunan Legendre çözüük düğümünün sol tarafındaki boynuzların sayısı t , düğüm üzerindeki çaprazlamalardan kaynaklanan boğumların sayısı $2s$ olsun. Bu durumda Legendre çözüük düğümü üzerindeki boynuz sayısı $t + 1$ olur ve düğüm üzerinde $2s$ adet negatif çaprazlama bulunur. O halde Şekil 18'de bulunan Legendre çözüük düğümü için Thurston-Bennequin değişmezi $-s - \left(\frac{t+1}{2}\right)$ ve dönme sayısı düğüm üzerindeki yönlendirmeye bağlı olarak $\pm \left(\frac{t-1}{2}\right)$ olur.

2.5 Stabilizasyon

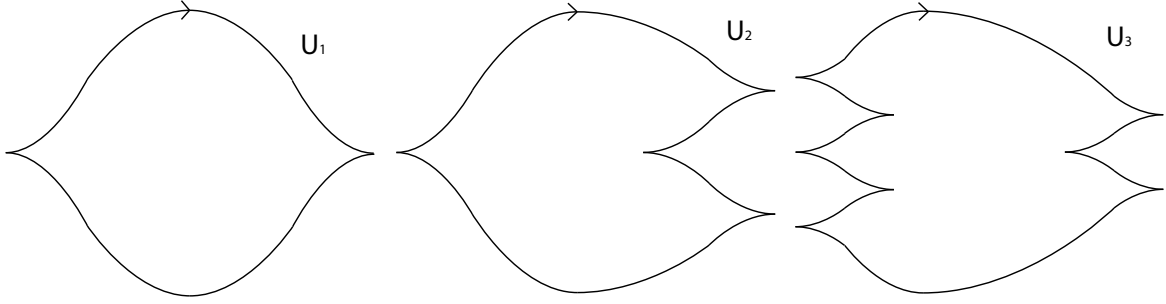
Verilen bir L Legendre düğümü için aynı topolojik düğüm tipinde başka bir Legendre düğümü elde etmenin kolay bir yolu vardır: Stabilizasyon. Stabilizasyon operasyonunu $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ içerisindeki Legendre düğümleri için tanımlayalım. Stabilizasyon operasyonu yerel olarak tanımlandığı için Darboux teoremi kullanılarak her kontakt 3-manifold içerisindeki Legendre düğümlerine genelleştirilebilir. Bir L Legendre düğümü diyagramının bir parçası Şekil 19'un sol tarafındaki gibi ise, L nin stabilizasyonu bu parçanın üzerine zigzag eklemekle elde edilir.



Şekil 19: Stabilizasyon operasyonları

Şekil 19'dan da anlaşılacağı üzere stabilizasyon operasyonu, bir Legendre düğümüne iki adet aşağı veya yukarı boynuz ekler. Düğümüne aşağı boynuzlar ekleyen stabilizasyona pozitif stabilizasyon denir ve $S_+(L)$ ile gösterilir. Düğümüne yukarı boynuzlar ekleyen stabilizasyona negatif stabilizasyon denir ve $S_-(L)$ ile gösterilir.

Örnek 2.23. Şekil 20'de Legendre çözükle düğümü ve iki stabilizasyonu verilmiştir.



Şekil 20: Legendre çözükle düğümü ve iki stabilizasyonu

Şekil 20'deki U_2 Legendre çözükle düğümü, U_1 Legendre çözükle düğümüne bir pozitif stabilizasyon uygulanarak elde edilmiştir. Şekildeki U_3 Legendre çözükle düğümü de U_2 Legendre çözükle düğümüne iki negatif stabilizasyon uygulanarak elde edilmiştir. U_2 Legendre çözükle düğümünün klasik değişmezleri $tb(U_2) = -2$ ve $rot(U_2) = 1$ şeklindedir. U_3 Legendre çözükle düğümünün klasik değişmezleri ise $tb(U_3) = -4$ ve $rot(U_3) = -1$ şeklindedir.

Pozitif stabilizasyon operasyonu düğümüne iki adet aşağı boynuz ekleyerek düğümün Thurston-Bennequin değişmezini bir azaltır, dönme sayısını bir artırır. Negatif stabilizasyon operasyonu düğümüne iki adet yukarı boynuz ekleyerek düğümün Thurston-Bennequin değişmezini ve dönme sayısını bir azaltır. Sonuç olarak stabilizasyon operasyonlarının Legendre düğümlerin klasik değişmezleri üzerindeki etkileri aşağıdaki gibidir:

$$tb(S_+(L)) = tb(L) - 1$$

$$rot(S_{\pm}(L)) = rot(L) \pm 1$$

Thurston Bennequin değişmezi, düğüm üzerinde bir yönlendirmeye ihtiyaç duymazken dönme sayısı düğüm üzerinde bir yönlendirme gerektirir. Buna göre $-L$, L Legendre

düğümünün zıt yönlendirilmiş halini temsil ediyor ise, bu durumda L deki aşağı boynuzlar $-L$ de yukarı boynuz, L deki yukarı boynuzlar $-L$ de aşağı boynuz olup $tb(-L) = tb(L)$ ve $rot(-L) = -rot(L)$ eşitlikleri geçerlidir.

Stabilizasyon operasyonu bir düğüm üzerinde yerel olarak yapılan bir operasyondur. Bir Legendre düğümünün ön izdüşümünde bir stabilizasyonu Legendre Reidemeister hareketleri sayesinde bir boynuzun ya da bir çaprazlamamın üzerinden diyagramın başka bir bölgesine taşıyabiliriz. Bu nedenle stabilizasyon, operasyonun uygulandığı noktadan bağımsız olup stabilizasyon operasyonu iyi tanımlı bir işlemdir. Stabilizasyonlar düğüm üzerinde bir bölgeden başka bir bölgeye taşınabildiklerinden, stabilizasyon operasyonu değişme özelliğine sahiptir; yani $S_+ \circ S_- = S_- \circ S_+$ sağlanır.

Teorem 2.24. [20] L_1 ve L_2 , $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısında topolojik olarak izotopik iki Legendre düğümü olsunlar. Bu durumda bu iki Legendre düğümü belli bir sayıda stabilizasyondan sonra Legendre-izotopik olurlar.

Teorem 2.24'ün kanıtı için, topolojik Reidemesiter hareketlerinin yeterli sayıda stabilizasyondan sonra Legendre Reidemeister hareketleri ile yapılabileceğini görmek yeterlidir.

Stabilizasyonlar kullanılarak bir düğümün Thurston-Bennequin değişmezini istediğimiz kadar küçültebiliriz. Ancak tayıt kontakt 3-manifold içerisinde verilen bir L düğümü için maksimal bir Thurston-Bennequin değişmezi vardır. Bu sayı $\overline{tb}(L)$ ile gösterilir ve düğüm tipi için bir değişmezdir. Stabilizasyon operasyonunun tersi işlemine *destabilizasyon* denir. Herhangi bir Legendre düğümde her zaman pozitif ve negatif stabilizasyon yapılabilirken destabilizasyon her zaman olmaz. Bir L Legendre düğümü için, $L = S_{\pm}(L')$ olacak şekilde bir L' düğümü var ise, L düğümüne *destabilize edilebilir* denir.

2.6 Legendre Komşuluk Teoremi

Darboux teoremine göre bir kontakt 3-manifoldun her noktasının, $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ standart kontakt yapısında sıfırın bir komşuluğuna kontaktomorfik olan bir komşuluğu vardır. Bu teoremi noktaların komşulukları yerine Legendre düğümlerinin komşuluklarına genişletmek için, bir standart Legendre komşuluk kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

$X = \mathbb{R}^2 \times S^1$ uzayı (x, y, z) , $z \in [0, 1)$ noktaları ile parametrize edilsin. $\xi_0 = \cos(2\pi z) dx + \sin(2\pi z) dy$ kontakt yapısını alalım. Bu durumda $L_0 = \{(0, 0, z)\}$,

(X, ξ_0) kontakt manifoldu içerisinde bir Legendre düğümü olur. $N_0 = \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 < 1\}$ olsun. Bu gösterimler ile aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.25. (Legendre Standart Komşuluk Teoremi) (M, ξ) bir kontakt manifold, $L \subset (M, \xi)$ bir Legendre düğümü olsun. Bu durumda L Legendre düğümünü L_0 Legendre düğümüne götüren bir $\phi : N(L) \rightarrow N_0$ kontaktomorfizmi ve bir $N(L)$ komşuluğu vardır.

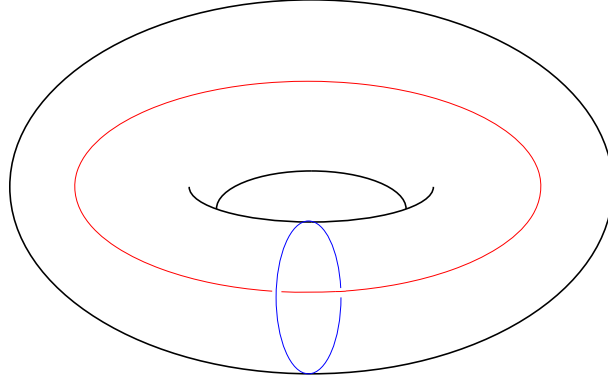
N_0 içerisinde kontakt düzlemler, xz -düzleminin $x > 0$ parçası ile verilen Seifert çatısına göre L_0 Legendre düğümü etrafında bir kere dönerler. Buna rağmen kontaktomorfizm, düzlemleri Legendre düğümü etrafında Seifert çatısına göre keyfi defa döndürebilir. Bu dönmelerin sayısı, Legendre düğümün Thurston-Bennequin değişmezi olarak belirlidir.

2.7 Dehn Ameliyatı

Dehn ameliyatı, 3-manifoldları inşa etmek için kullanılan temel bir yöntemdir. Bu yöntem Alman matematikçi Max Dehn tarafından homoloji kürelerini inşa etmek üzere sunulmuştur. Daha sonra Lickorish ve Wallace, tüm yönlendirilmiş 3-manifoldların bu yöntem ile inşa edilebileceklerini göstermişlerdir, [36], [26].

En basit anlamda Dehn ameliyatı, S^3 içerisinde bir düğümün bir katı torus komşuluğunu $(S^1 \times D^2)$ çıkarıp bu komşuluğu farklı bir şekilde tekrar yapıştırmak olarak düşünülebilir. Daha genel olarak bir M 3-manifoldu içerisinde verilen bir L linki için, linkin her bir bileşeninden katı torus komşuluklarını çıkarıp bu komşulukları farklı bir şekilde tekrar yapıştırebiliriz. Lickorish ve Wallace'a ait olan bir teorem, kapalı ve yönlendirilmiş her 3-manifoldu S^3 içerisindeki linkler üzerinde bu işlemi uygulayarak elde edebileceğimizi söyler. Bu nedenle Dehn ameliyatını iyi bir şekilde anlamak, 3-manifoldların yapısı hakkındaki çalışmalarda oldukça faydalı olacaktır.

K , S^3 veya herhangi bir M 3-manifoldu içerisinde bir düğüm olsun. K düğümünün bir katı torus komşuluğunu $N(K)$ ile gösterelim. Bu durumda $\partial N(K)$ bir torus $(S^1 \times S^1)$ olur. $\partial N(K)$ üzerindeki eğrilerin iki özel homoloji sınıfı vardır: μ meridyen ve λ boylam. Meridyen, $\partial N(K)$ üzerinde $N(K) = S^1 \times D^2$ içerisindeki bir diski sınırlayan basit bir eğri ile temsil edilir. Boylam ise meridyeni tam olarak bir kere transvers kesen ve $S^3 - N(K)$ (ya da $M - N(K)$) da bir yüzey sınırlayan bir eğridir.



Şekil 21: Katı torus üzerinde meridyen (mavi) ve boylam (kırmızı) eğrileri

Bir K düğümünün her $N(K)$ katı torus komşuluğu için $a \in \partial N(K)$ olmak üzere bir $D = \{a\} \times D^2$ meridyensel diski vardır. Dehn ameliyatı yönteminde bahsedilen çıkarılan katı torus komşuluğunu farklı bir şekilde tekrar yapıştırma işlemi için, çıkarılan $N(K)$ katı torusu içerisindeki bir D meridyensel diski, $\partial N(K)$ üzerindeki basit kapalı bir eğriye yapıştırılır. $\partial N(K)$ üzerindeki basit kapalı eğriler $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $(p, q) = 1$ olmak üzere $p\mu + q\lambda$ şeklindedirler. Bu durumda yeniden yapıştırma işlemi bir $h : D \rightarrow \partial N(K), h(\mu) = p\mu + q\lambda$ homeomorfizmi ile yapabiliriz. Daha açık bir ifade ile, D meridyensel diskini $\partial N(K)$ üzerine, p defa meridyen üzerinde ve q defa boylam üzerinde dolanacak şekilde yapıştırabiliriz.

$(p, q) = 1$ ve (p, q) ile belirli ameliyatın $(-p, -q)$ ile belirli ameliyat ile aynı olmasından dolayı, Dehn ameliyatlarını $p/q \in \mathbb{Q} \cup \infty$ ile parametrize edebiliriz. Böyle bir ameliyat, K düğümü üzerinde bir p/q -ameliyat olarak ifade edilir. p/q oranına *ameliyat katsayısı* denir. K düğümünün ameliyat sonrası elde edilen yeni manifold içerisindeki görüntüsüne K düğümünün *ameliyat duali* denir.

2.8 Kontakt Dehn Ameliyatı

(M, ξ) bir kontakt 3-manifold, $L \in M$ bir Legendre düğümü, L Legendre düğümünün bir katı torus komşuluğu $N(L)$ olsun. Bu durumda L Legendre düğümünün bir kontakt çatısı vardır. L Legendre düğümü üzerinde bir kontakt Dehn ameliyatı, $r \in \mathbb{Q} \cup \infty$ ameliyat katsayısı L üzerindeki kontakt çatı ile belirli olan bir Dehn ameliyatıdır. $r \neq 0$ olmak üzere L üzerinde bir r -kontakt ameliyatı sonrası elde edilen $(M - N(L)) \cup (S^1 \times D^2)$ üzerindeki bir kontakt yapı, $M - N(L)$ üzerinde ξ ve $S^1 \times D^2$ üzerindeki

genişlemesi tayt olacak şekilde tanımlanır.

M kontakt 3-manifoldu içerisindeki L Legendre düğümü üzerinde $r = p/q \in \mathbb{Q} \cup \infty$, ($p \neq 0$) katsayılı kontakt ameliyat ile elde edilen M' manifoldu üzerine bir ξ' kontakt yapısı koymak istiyoruz.

$$\forall \delta > 0 \text{ için } N_\delta = \{(\phi, x, y) \in N \mid x^2 + y^2 \leq \delta\} \subset S^1 \times \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha = \cos(2\pi n\phi) dx - \sin(2\pi n\phi) dy,$$

$$C = \{(\phi, x, y) \in N \mid x = y = 0\}$$

olsun. Bu durumda Legendre komşuluk teoreminden dolayı $f(C) = K$ olacak şekilde bir $f : (N_\delta, \varsigma) \rightarrow (M, \xi)$ kontakt gömmesi vardır.

$$N_{2\delta} = \{(\phi, x, y) \in N \mid x^2 + y^2 \leq 2\delta\} \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$$

olsun. Bu durumda $f(N_\delta) \subset M$ yı kesip $N_{2\delta}$ yı, sınırı sınıra ve $N_{2\delta} - \overset{\circ}{N}_\delta \cong T^2 \times I$ üzerinde μ meridyenini $p\mu + q\lambda$ a götüren bir $g : \left(N_{2\delta} - \overset{\circ}{N}_\delta\right) \rightarrow \left(N_{2\delta} - \overset{\circ}{N}_\delta\right)$ difeomorfizmi ile tekrar yapıştırabiliriz. T^2 üzerinde böyle bir dönüşüm açık bir şekilde vardır ve bu dönüşüm aşikâr olarak $N_{2\delta} - \overset{\circ}{N}_\delta$ üzerine genişler. $N_{2\delta} - \overset{\circ}{N}_\delta$ üzerinde $\varsigma_1 = (g_*)^{-1}(\varsigma)$ kontakt yapısını düşünelim.

Teorem 2.26. $p \neq 0$ için $\varsigma_1 = (g_*)^{-1}(\varsigma)$ kontakt yapısı $N_{2\delta}$ üzerinde tayt bir ς' kontakt yapısına genişler.

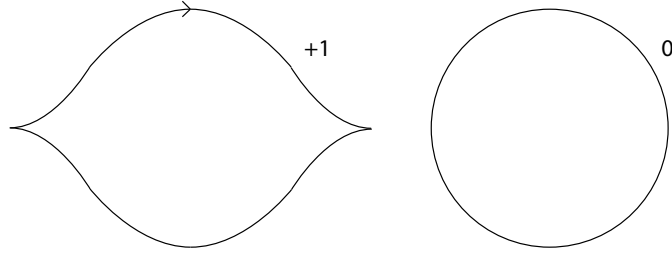
ξ' kontakt yapısı, ς_1 kontakt yapısının $N_{2\delta}$ üzerine genişlemesinin seçimine bağlıdır. Genel olarak bu genişleme tek değildir. Ayrıca ξ tayt olsa bile ξ' aşırı dönen olabilir. İyi tanımlı bir yapı elde etmek için, ξ' kontakt yapısının yukarıda bahsedilen yapıştırma sürecindeki her türlü seçimden bağımsız olması gerekir.

Teorem 2.27. [8] $N_{2\delta}$ üzerinde ς_1 genişlemesi sabit tutulur ise, M' manifoldu üzerinde elde edilen ξ' kontakt yapısı izotopi farkı ile tek türlü belirlidir. Özel olarak, $p = 1$ durumunda M' üzerindeki ξ' kontakt yapısı, L Legendre düğümü ve $q \in \mathbb{Z}$ ile belirlidir.

Teorem 2.28. (Sadeleştirme Teoremi) [7] (M, ξ) bir kontakt 3-manifold, $L \subset (M, \xi)$ bir Legendre düğümü ve L Legendre düğümünün bir kontakt itmesi L' Legendre düğümü olsun. L Legendre düğümü üzerinde (-1) -kontakt ameliyat ve L' Legendre düğümü üzerinde $(+1)$ -kontakt ameliyat uygulanarak elde edilen kontakt 3-manifold (M', ξ') olsun.

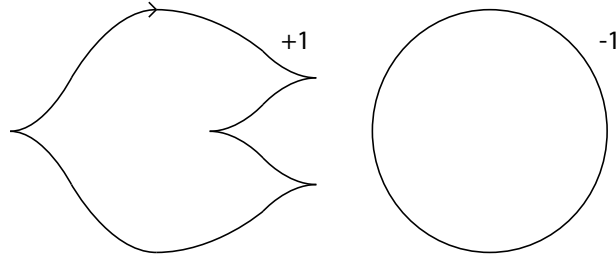
Bu durumda (M, ξ) ve (M', ξ') kontakt 3-manifoldları kontaktomorfiktir. Aradaki kontaktomorfizm, L Legendre düğümünün bir katı torus komşuluğu dışında birim dönüşüm olacak şekilde seçilebilir.

Örnek 2.29. Şekil 22'de verilen $tb(L) = -1$ ve $rot(L) = 0$ klasik değişmezlerine sahip L Legendre çözükle düğümüne (+1)-kontakt ameliyat ile elde edilen manifold, $S^1 \times S^2$ manifoldudur, [9]. L Legendre çözükle düğümüne yapılan (+1)-kontakt ameliyat, topolojik olarak çözükle düğümüne (0)-Dehn ameliyatı yapmaya denktir.



Şekil 22: Legendre çözükle düğümü üzerinde kontakt ameliyat 1

Örnek 2.30. Şekil 23'te verilen $tb(L) = -2$ ve $rot(L) = 1$ klasik değişmezlerine sahip L Legendre çözükle düğümüne (+1)-kontakt ameliyat ile elde edilen manifold, aşırı dönen S^3 manifoldudur, [9], [27], [31]. L Legendre çözükle düğümüne yapılan (+1)-kontakt ameliyat, topolojik olarak çözükle düğümüne (-1)-Dehn ameliyatı yapmaya denktir.



Şekil 23: Legendre çözükle düğümü üzerinde kontakt ameliyat 2

2.9 Aşırı Dönen Kontakt Yapılar İçerisindeki Legendre Dügümleri

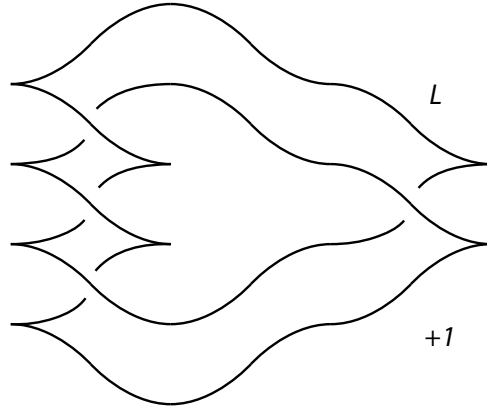
Aşırı dönen kontakt yapılar içerisinde iki tip Legendre düğümü vardır: Gevşek ve gevşek olmayan.

Tanım 8. (M, ξ) aşırı dönen bir kontakt 3-manifold, $L \subset M$ bir Legendre düğümü olsun. Tümleyeni aşırı dönen kontakt manifold olan bir L Legendre düğümüne *gevşek Legendre düğümü* denir. Eğer L Legendre düğümünün tümleyeni tayt manifold ise, L Legendre düğümüne *gevşek olmayan Legendre düğümü* denir. Başka bir deyiş ile, L Legendre düğümü M içerisindeki tüm aşırı dönen diskler ile kesişiyor ise L gevşek olmayan Legendre düğümüdür, aksi halde gevşektir.

Legendre düğümleri için gevşeklik ve gevşek olmama kavramları aşırı dönen kontakt üç manifoldlarda tanımlıdır. Çünkü bir tayt üç manifoldda bir Legendre düğümünün tümleyeni her zaman tayt olur.

Örnek 2.31. Aşırı dönen kontakt manifold içerisinde aşırı dönen bir diskin sınırı gevşek Legendre çözüklü bir düğümdür.

Örnek 2.32. Şekil 24'teki L düğümü aşırı dönen S^3 içerisinde gevşek olmayan Legendre çözüklü bir düğümdür. Gevşek düğümün tümleyenindeki aşırı dönen disk gevşek düğümüne herhangi bir ameliyat yapıldığında varlığını sürdüreceğinden elde edilen yeni manifold her zaman aşırı dönen olur. Şekil 24'te verilen L düğümüne (-1) -kontakt ameliyat yaptığımızda $(+1)$ -kontakt ameliyatı Sadeleştirme teoremi, Teorem 2.28, nedeni ile sadeleşeceğinden tayt kontakt S^3 manifoldu elde ederiz. Bu nedenle şekildeki L düğümü gevşek olmayan bir düğümdür.



Şekil 24: (S^3, ξ_{OT}) içerisinde gevşek olmayan bir Legendre düğümü

3 GELİŞME

Bu bölümde Legendre düğümleri için Baker ve Onaran'ın [2] makalesinde tanımlanan yeni değişmezler incelenecek ve ilgili teoremler çalışılacaktır.

3.1 Legendre Düğümleri için Derinlik ve Gerginlik Değişmezleri

Aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümleri için klasik değişmezlerin yanı sıra *derinlik* ve *gerginlik* adı verilen iki yeni değişmez daha tanımlanmıştır, [2].

Tanım 9. (M, ξ) aşırı dönen bir kontakt 3-manifold; $L \subset M$ bir Legendre düğümü olsun. Legendre L düğümünün derinliği, $d(L)$, M içerisinde L yi transvers kesen tüm D aşırı dönen diskleri arasında $|L \cap D|$ geometrik arakesit sayılarının minimum değeridir.

L gevşek bir Legendre düğümü olsun. Bu durumda $M - L$ aşırı dönendir, yani $M - L$ içerisinde aşırı dönen bir D diski vardır. L nin bu D diski ile arakesit sayısı $|L \cap D| = 0$ olur. Sonuç olarak $d(L) = 0$ dir. Diğer taraftan $d(L) = 0$ ise M içerisinde öyle bir D aşırı dönen diski vardır ki $|L \cap D| = 0$ dir. Böylece $D \subset M - L$ olup $M - L$ aşırı dönendir, L gevşektir. Sonuç olarak L Legendre düğümünün gevşek olması için gerek ve yeter koşul $d(L) = 0$ olmasıdır.

Tanım 10. (M, ξ) aşırı dönen bir kontakt 3-manifold; $L \subset M$ içerisinde bir Legendre düğümü olsun. Legendre L düğümünün gerginliği, $t(L)$, L düğümünü gevşek hale getirmek için gerekli stabilizasyon operasyonları sayısının minimum değeridir.

(M, ξ) aşırı dönen kontakt 3-manifoldu içerisindeki L Legendre düğümünün gevşek olması için gerek ve yeter koşul $t(L) = 0$ olmasıdır.

Aşağıdaki Teorem 3.1, gerginlik değişmezinin iyi tanımlı olduğunu söylemektedir.

Teorem 3.1. [2] *Kapalı ve aşırı dönen bir kontakt manifold içerisinde bir Legendre düğümü, sonlu sayıda stabilizasyon operasyonu ile gevşek hale getirilebilir.*

Teorem 3.1'in kanıtı kısaca şu şekildedir: $L \subset (M, \xi)$ aşırı dönen kontakt manifoldunda bir Legendre düğümü; $D \subset M$, L ile arakesit sayısı minimum olan standart aşırı dönen disk olsun. $|L \cap D| = 0$ ise L düğümü zaten gevşektir. O halde

$|L \cap D| = n > 0$ olsun. L düğümüne bir stabilizasyon operasyonu, n sayısını 1 azaltacak şekilde yapılabilir. Yapılacak n adet stabilizasyon operasyonu sonunda $|L \cap D| = 0$ olup L düğümü ile D diski ayırık olurlar. $D \subset M - L$ olup stabilize edilmiş L düğümü gevşek bir düğümdür.

Derinlik ve gerginlik değişmezlerinin arasındaki ilişki Teorem 3.2’de verilmiştir.

Teorem 3.2. [2] *Kapalı ve aşırı dönen bir kontakt manifold içerisinde bir L Legendre düğümü için $t(L) \leq d(L)$ koşulu sağlanır.*

Kanıt: $d(L) = n > 0$ olsun. Teorem 3.1’in kanıtında olduğu gibi L düğümüne uygulanacak n adet uygun stabilizasyon operasyonu bu düğümü gevşek hale getirebilir. Ancak bu stabilizasyon operasyonlarından bazıları birden fazla arakesit noktasını yok edebileceğinden dolayı L düğümü n den daha az sayıda uygun stabilizasyon operasyonu ile gevşek hale getirilebilir. O halde $t(L) \leq d(L)$ sağlanır. \square

Teorem 3.2 sonucunda derinlik ve gerginlik değişmezlerinin aynı olup olmadığı sorusu aklımıza gelir. Aşağıdaki Teorem 3.3, bu iki değişmezin birbirinden farklı olduğunu sonucunu verir.

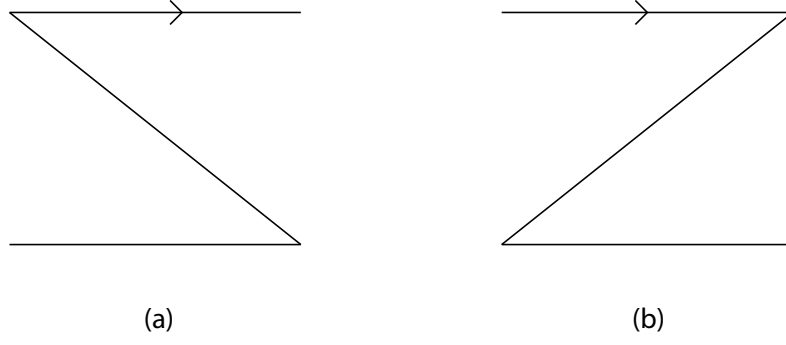
Teorem 3.3. [2] *$1 = t(L) < d(L)$ olacak şekilde gevşek olmayan L Legendre düğümleri vardır.*

Teorem 3.3’ün ispatı için ilk önce aşağıdaki Teorem 3.4 ve Teorem 3.5’i ispatlayacağız.

Teorem 3.4. [2] *L düğümü tümleyeni tayıt olan bir Legendre düğümü olsun. L üzerinde $(+1)$ -kontakt ameliyat aşırı dönen bir manifold versin. L^* düğümü L düğümünün ameliyat duali ise, bu durumda*

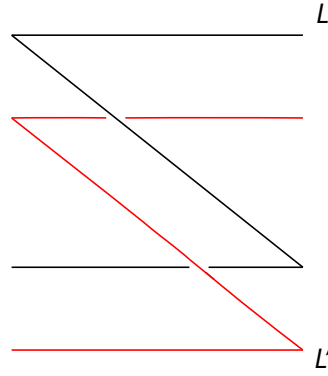
$$d(L^*) = 1 \Leftrightarrow L \text{ düğümü stabilize edilir.}$$

Kanıt: (\Leftarrow) Eğer $L \subset (S^3, \xi_{std})$ düğümü başka bir Legendre düğüme stabilizasyon uygulanarak elde edilmiş ise, L düğümüne $(+1)$ -ameliyat uygulanarak elde edilen (M_+, ξ_+) manifoldu aşırı dönerdir [31], [27]. L stabilize edilmiş bir Legendre düğümü ise L nin bir ön izdüşümü Şekil 25’teki zigzaglardan birini bulundurur.



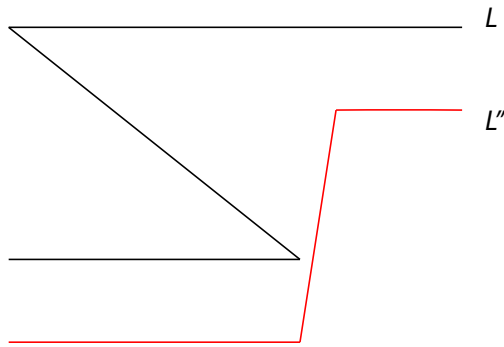
Şekil 25: L üzerinde zigzaglar

Genel durumu bozmadan, L üzerinde Şekil 25 (a)'daki zigzagın bulunduğunu kabul edelim. L düğümünün Şekil 26'daki L' Legendre itmesini düşünelim.



Şekil 26: L Legendre düğümü ve L' Legendre itmesi

L ve L' düğümleri arasında bir halka vardır. Bu halka hem L hem de L' üzerinde $tb(L)$ çatısını verir. L' Legendre itmesinin Şekil 27'deki L'' düzenlemesini düşünelim.



Şekil 27: L ve L'' Legendre Düğümleri

L ve L'' düğümleri arasında hâla bir halka vardır, ancak bu halka burada L ve L'' üzerinde $tb(L'') = tb(L) + 1$ çatısını verir. Bu halkaya A halkası diyelim. L üzerinde $(+1)$ -ameliyat uyguladığımız için, A halkası ameliyat uygulanmış katı torus içerisinde bir D meridyensel diskin genişler ve bu meridyensel disk, L^* ameliyat duali ile bir kez kesişir. $D \cup A$, (M_+, ξ_+) kontakt manifoldunda aşırı dönen disk olup (M_+, ξ_+) manifoldu aşırı dönendir [27]. İnşa edilen $D \cup A$ aşırı dönen disk, L^* ameliyat duali ile bir kez kesişir. L düğümünün tümleyeni tayt olduğundan L^* ameliyat dualinin tümleyeni de tayttır. Sonuç olarak $d(L^*) = 1$ dir.

(\Rightarrow) L^* Legendre düğümü (M_+, ξ_+) aşırı dönen kontakt manifoldunda $d(L^*) = 1$ olacak şekilde bir gevşek olmayan düğüm olsun. Bu durumda L^* ile bir kez kesişen bir D standart aşırı dönen disk vardır. L^* üzerinde (-1) -ameliyat ile elde edilen (M, ξ) kontakt manifoldu içerisinde $D - L^*$ bir A halkasına genişler. A halkasının sınırı, ∂D nin görüntüsü ve L^* düğümünün ameliyat dualidir. A halkasını uç noktaları L de olan, sınıra paralel bir Γ bölüm eğrisi içeren bir konveks yüzey olarak düşünebiliriz. Bu nedenle [16] (Lemma 2.20) dan ötürü L düğümü stabilize edilmiş bir düğümdür. \square

Teorem 3.5. [2] $L \subset (S^3, \xi_{std})$ bir Legendre düğümü olsun. L düğümü üzerinde $(+1)$ -kontakt ameliyat aşırı dönen bir kontakt manifold versin. L^* düğümü L düğümünün ameliyat duali olsun. Bu durumda $tb(L) < -1$, $rot(L) < 0$ ve $tb(L) + rot(L) + 2 < \chi(L)$ ise, $t(L^*) = 1$ dir.

Kanıt: (M, ξ) bir kontakt 3-manifold, $L \subset M$ bir Legendre düğümü olsun. L Legendre düğümünün M manifoldu içerisinde temsil ettiği homoloji sınıfının r ($r \in \mathbb{Z}$) katı sıfır oluyorsa, yani $H_1(M)$ içerisinde $r[L] = 0$ oluyorsa L düğümüne M içerisinde *rasyonel homolojik olarak aşikâr* denir. r tamsayısına L Legendre düğümünün (M, ξ) manifoldu içerisindeki derecesi denir.

L düğümünü üzerinde $(+1)$ -ameliyat ile elde edilen (M_+, ξ_+) aşırı dönen kontakt manifoldu içerisinde L 'nin ameliyat duali L^* düğümü gevşek olmayan bir düğümdür. Ayrıca L^* düğümü (M_+, ξ_+) içerisinde derecesi $r = tb(L) + 1$ olan rasyonel homolojik olarak aşikâr bir düğümdür. Homolojik olarak aşikâr Legendre düğümleri için tanımlanan Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısı değişmezinin tanımları, rasyonel homolojik olarak aşikâr Legendre düğümlere genişletilebilir. Rasyonel Thurston-Bennequin değişmezi $tb_{\mathbb{Q}}(L)$, rasyonel homolojik olarak aşikâr bir L Legendre

düğümünün kontakt çatısının, L nin rasyonel Seifert yüzeyine göre dönmesini ölçer. Yönlendirilmiş, rasyonel homolojik olarak aşikâr ve derecesi r olan bir L Legendre düğümünün rasyonel dönme sayısı $rot_{\mathbb{Q}}(L)$ ise TL nin bir rasyonel Seifert yüzey boyunca aşikârlanması sonrası hesaplanan sarma sayısının r ile bölünmesi ile elde edilir [32].

Bu teoremin ispatı için L^* düğümünün bir stabilizasyonu sonucunda gevşek düğüm elde ettiğimizi göstereceğiz, böylece $t(L^*) = 1$ olur. L^* düğümünün pozitif stabilizasyonu L_+^* düğümü olsun. Derecesi r olan rasyonel homolojik olarak aşikâr ve $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ rasyonel Seifert yüzeyine sahip gevşek olmayan bir L Legendre düğümü

$$-|tb_{\mathbb{Q}}(L)| + |rot_{\mathbb{Q}}(L)| \leq -\frac{1}{r}\chi(\Sigma_{\mathbb{Q}})$$

eşitsizliğini sağlar, [2]. L^* düğümünün pozitif stabilizasyonu olan L_+^* düğümünün bu eşitsizliği sağlamadığını, dolayısıyla gevşek bir düğüm olduğunu söyleyeceğiz.

L_+^* düğümünün rasyonel Thurston-Bennequin değişmezi $tb_{\mathbb{Q}}(L_+^*)$ ve rasyonel dönme sayısı $rot_{\mathbb{Q}}(L_+^*)$ 'yi [22] makalesinde Lemma 2'de verilen aşağıdaki formüller ile hesaplanır. $M = (tb(L) + 1)$ ve $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & tb(L) \\ tb(L) & tb(L) + 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$tb_{\mathbb{Q}}(L_+^*) = tb(L_+) + \frac{\det M_0}{\det M} \quad (4)$$

$$rot_{\mathbb{Q}}(L_+^*) = rot(L_+) - \langle rot(L), M^{-1}(tb(L)) \rangle \quad (5)$$

formülleri ile verilir. L_+^* düğümünün $tb(L_+^*) = tb(L) - 1$ ve $rot(L_+^*) = rot(L) + 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} tb_{\mathbb{Q}}(L_+^*) &= tb(L_+) + \frac{\det M_0}{\det M} \\ &= tb(L) - 1 + \frac{-tb^2(L)}{tb(L)+1} \\ &= \frac{-1}{tb(L)+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} rot_{\mathbb{Q}}(L_+^*) &= rot(L_+) - \langle rot(L), M^{-1}(tb(L)) \rangle \\ &= rot(L) + 1 - \left\langle rot(L), \frac{1}{tb(L)+1} \cdot tb(L) \right\rangle \\ &= rot(L) + 1 - \frac{rot(L) \cdot tb(L)}{tb(L)+1} \\ &= \frac{rot(L) + (tb(L)+1)}{tb(L)+1} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

L^* düğümünün bir L_+^* pozitif stabilizasyonunun gevşek olmadığını varsayalım. Bu durumda L_+^* aşağıdaki eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned}
& -|tb_{\mathbb{Q}}(L_+^*)| + |rot_{\mathbb{Q}}(L_+^*)| \leq -\frac{1}{r}\chi(\Sigma) \\
& \Rightarrow -\left|\frac{-1}{tb(L)+1}\right| + \left|\frac{rot(L)+tb(L)+1}{tb(L)+1}\right| \leq -\frac{1}{|tb(L)+1|}\chi(L) \\
& \Rightarrow \frac{1}{tb(L)+1} + \frac{rot(L)+tb(L)+1}{tb(L)+1} \leq \frac{\chi(L)}{tb(L)+1} \\
& \Rightarrow rot(L) + tb(L) + 2 \geq \chi(L)
\end{aligned}$$

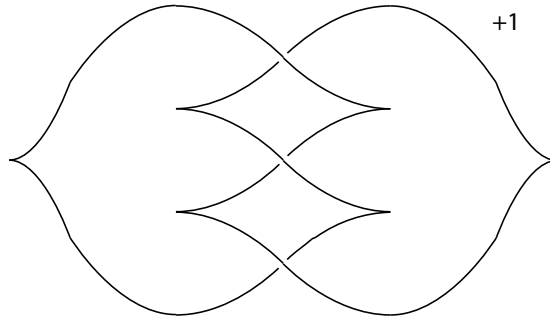
Ancak Teorem 3.5'e göre $tb(L) < -1$, $rot(L) < 0$ ve $tb(L) + rot(L) + 2 < \chi(L)$ olup bu durum

$$-(tb(L) + rot(L) + 2) > -\chi(L)$$

kabulümüz ile çelişir. O halde L_+^* düğümü gevşektir ve $t(L^*) = 1$ dir. \square

Artık Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'i kullanarak Teorem 3.3'ün kanıtını verebiliriz.

Kanıt: (*Teorem 3.3'ün Kanıtı*) Şekil 28'de verilen L Legendre sol trefoile (+1)-kontakt ameliyat ile elde edilen manifold aşırı dönen bir kontakt manifolddur, [27]. Şekil 28'de verilen Legendre sol trefoilin ameliyat duali L^* olsun. L^* düğümü elde edilen aşırı dönen kontakt manifold içerisinde gevşek olmayan bir Legendre düğümdür. Gerçekten de L^* üzerine (-1)-kontakt ameliyat yaptığımızda (+1)-kontakt ameliyatı sadeleştirir ve tayt manifold elde ederiz. Bu nedenle L^* gevşek olmayan bir düğümdür.



Şekil 28: L Legendre sol trefoile (+1)-ameliyat ile elde edilen manifold

(+1)-kontakt ameliyat yaptığımız L Legendre sol trefoil düğümünün standart tayt S^3 içerisindeki Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = -6$ olduğundan maksimal

Thurston-Bennequin değişmezine sahiptir. Bu nedenle L Legendre sol trefoil düğümü stabilize değildir. Bu durumda L düğümü stabilize olmadığından Teorem 3.4'e göre $d(L^*) > 1$ dir. Diğer yandan L düğümünü dönme sayısı $rot(L) = -1$ olacak şekilde yönlendirsek $tb(L) = -6 < -1$, $rot(L) = -1 < 0$ ve $tb(L) + rot(L) + 2 = -6 - 1 + 2 = -5 < \chi(L) = 2 - 2g - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$ olduğundan Teorem 3.5'e göre $t(L^*) = 1$ dir. Sonuç olarak L Legendre sol trefoil düğümünün L^* ameliyat duali için $1 = t(L^*) < d(L^*)$ dir. Daha genel örnekler için [2]'a bakınız. \square

4 SONUÇ

Aşırı dönen kontakt yapıların sınıflandırması Eliashberg,[13], tarafından yapılmış olup bu yapılar düzlem alanının homotopi tipi ile belirlidirler. Eliashberg'in sınıflandırmasından bu yana aşırı dönen kontakt yapılar üzerinde pek fazla çalışılmamıştır. Özellikle aşırı dönen kontakt yapılar içerisindeki Legendre düğümlerine yeterince önem verilmemiştir.

Aşırı dönen bir kontakt manifold içerisinde, tümleyeni aşırı dönen olan Legendre düğümlerine gevşek, tümleyeni tayı olan Legendre düğümlerine gevşek olmayan denir. Aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümlerinin çoğunluğu gevşek olsa da, gevşek olmayan Legendre düğümleri de mevcuttur, [6]. Ayrıca aynı klasik değişmezlere ve tümleyeninde aynı aşırı dönen diske sahip iki gevşek Legendre düğümü Legendre izotopiktir, [6].

Bu tezde aşırı dönen kontakt yapılar içerisindeki Legendre düğümlerinin [2] makalesinde tanımlanan derinlik ve gerginlik değişmezlerini çalıştık. Bunun için öncelikle kontakt yapılar ve Legendre düğümleri ile ilgili temel bilgileri verdik. Legendre düğümlerinin klasik değişmezlerinden bahsettik ve çeşitli örnekler üzerinde hesaplamalar yaptık. Legendre-basit ve Legendre-basit olmayan Legendre düğümü örnekleri verdik. Stabilizasyon operasyonunu tanıttık. Daha sonra verilen bir manifold ile bu manifold içerisindeki bir düğümden yola çıkarak yeni bir manifold elde etmek için kullanılan Dehn ameliyatını inceledik ve Dehn ameliyatını kontakt manifoldlar üzerine uyarlayarak kontakt Dehn ameliyatını tanımladık. Bunlara ek olarak, aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümlerini inceleyerek, bu düğümleri gevşek ve gevşek olmayan olmak üzere ikiye ayırdık. Derinlik ve gerginlik değişmezlerinin tanımlarını verdik, bu değişmezlerin iyi tanımlı olduklarını ve bu iki değişmez arasındaki ilişkileri teoremler ile açıkladık.

Aşırı dönen kontakt yapılar içerisindeki gevşek olmayan Legendre düğümlerinin diğer gevşek olmayan düğümler ile gevşeklik bakımından karşılaştırılması sonucu derinlik ve gerginlik değişmezleri doğal olarak ortaya çıkmıştır. Derinlik ve gerginlik değişmezleri ile ilgili birçok soru sıralayabiliriz.

Teorem 3.3 için inşa ettiğimiz L Legendre sol trefoil düğümünün ameliyat duali L^* , $1 = t(L^*) < d(L^*)$ eşitsizliğini sağlayan gevşek olmayan bir Legendre düğümdür. L^* düğümünün derinlik değişmezi $d(L^*) \geq 2$ dir. Gerçekte $d(L^*)$ değerinin kaçaya eşit

olduğu ilginç bir soru olup önemli bir problemi doğurur.

Problem 1. *Derinlik değişmezi $d(L) = 2$ olan örnekler inşa ediniz.*

Problem 2. *2'den büyük $d(L)$ ve $t(L)$ değerlerine sahip düğümler inşa ediniz.*

Ayrıca verilen bir L Legendre düğümü için derinlik ve gerginlik değişmezi arasındaki farklılığın çalışılması ilginç olacaktır.

Soru 1. *Verilen bir Legendre L düğümü için $d(L)$ ve $t(L)$ en fazla kaç olabilir?*

Soru 2. *$d(L) - t(L)$ için bir üst sınır var mıdır?*

Bir Legendre L düğümünün $sg(L)$ ile gösterdiğimiz L 'yi destekleyen cinsini, kontakt yapıyı destekleyen, L 'yi bir sayfasında içeren ve sayfanın L 'ye verdiği çatı kontakt çatıya eşit olan açık kitapların sayfa cinslerinin en küçüğü olarak [33]'da tanımlandı. Bir (M, ξ) kontakt 3-manifoldunda bir L Legendre düğümü için tanımdaki özellikleri sağlayan bir açık kitap her zaman bulunabilir. (M, ξ) manifoldu için böyle bir açık kitap, Giroux algoritmasının bir uygulaması [24] ya da alternatif olarak Legendre düğümlerin ön izdüşümleri [1] kullanılarak inşa edilebilir. Böylece bir L Legendre düğümünün destekleyen cins değişmezi $sg(L)$ iyi tanımlıdır. Gelecekte Legendre düğümünün destekleyen cinsi $sg(L)$ değişmezinin derinlik ve gerginlik değişmezleri ile ilişkilendirilmesi problemi üzerinde çalışmayı planlıyorum.

Bir L Legendre düğümünün derinlik ve gerginlik değişmezleri arasında Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'te verilen ilişkiler bulunmaktadır. Legendre düğümleri için destekleyen cins değişmezinin bu değişmezler ile ilişkisi olup olmadığı sorusu doğal olarak aşağıdaki soruları doğurmuştur.

Soru 3. *Gevşek olmayan düğümler için destekleyen cins değişmezi ile derinlik ve gerginlik değişmezleri arasındaki ilişki nedir?*

Soru 4. *Destekleyen cins değişmezi 0 olup derinlik değişmezi aşırı büyük olan Legendre düğümü örnekleri var mıdır?*

Soru 5. *Bir L Legendre düğümü için $sg(L)$ değeri $d(L)$ veya $t(L)$ değeri için bir alt sınır belirler mi?*

Öncelikle Teorem 3.3'ün ispatında kullandığımız Şekil 28'de verilen Legendre sol trefoil düğümünün ameliyat duali için bu soruları cevaplandırmayı düşünüyorum.

Bu tez, alanında türkçe olarak hazırlanmış ilk çalışmalardan biridir. Bu nedenle tezin içerisinde geçen bütün terimlerin türkçedeki en uygun karşılıklarını kullanmaya özen gösterdik.

Kaynaklar

- [1] Akbulut S., Ozbagci B., *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, *Geom. Top.* 5, 319–334, **2001**
- [2] Baker K. L., Onaran S., *Non-looseness of non-loose knots*, arXiv:1312.5721, **2013**
- [3] Bennequin D., *Entrelacements et équations de Pfaff*, *Astérisque* 107-108, 87-161, **1983**
- [4] Chekanov Y.V., *Invariants of Legendrian knots*, *Proceedings of the ICM Vol. II*, Higher Ed. Press, Beijing, **2002**
- [5] Chekanov Y.V., *Differential algebra of Legendrian links*, *Invent. Math.*, 150(3):441–483, **2002**
- [6] Dymara K., *Legendrian knots in overtwisted contact structures on S^3* . *Ann. Global Anal. Geom.*, 19(3):293–305, **2001**
- [7] Ding F., Geiges H., *Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles*, *Algebr. Geom. Topol.* 1, 153–172, **2001**
- [8] Ding F., Geiges H., *A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 136, 583–598, **2004**
- [9] Ding F., Geiges H., Stipsicz A. I., *Surgery diagrams for contact 3-manifolds*, *Turkish J. Math.* 28, no. 1, 41–74. MR 2056760 (2005c:57028), **2004**
- [10] Eliashberg Y., Fraser M., *Topologically trivial Legendrian knots*, *J. Symplectic Geom.*, 7(2):77–127, **2009**
- [11] Eliashberg Y., Fraser M., *Classification of topologically trivial Legendrian knots*, In *Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995)*, volume 15 of CRM Proc., Lecture Notes, pages 17–51. Amer. Math. Soc., Providence, RI, **1998**
- [12] Eliashberg Y., *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work*, *Ann. Inst. Fourier* 42, 165–192, **1992**
- [13] Eliashberg Y., *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, *Invent. Math.* 98, 623–637, **1989**

- [14] Eliashberg Y., Thurston W., *Confoliations*, University Lecture Series 13, Amer. Math. Soc., Providence, Proceedings of the fourth Gökova Geometry-Topology Conference, pp 19–35, **1998**
- [15] Epstein J., Fuchs D., Meyer M., *Chekanov Eliashberg invariants and transverse approximations of Legendrian knots*, Pacific J. Math., 201(1):89–106, **2001**
- [16] Etnyre J., *Legendrian and transversal knots*, Handbook of knot theory, **2005**
- [17] Etnyre J., *On knots in overtwisted contact structures*, Quantum Topol. 4, no. 3, 229–264, **2013**
- [18] Etnyre J., Honda K., *Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot.*, J. Symplectic Geom., 1(1):63–120, math.GT/0006112, **2001**
- [19] Etnyre J., Honda K., *On the nonexistence of tight contact structures*, Annals of Math. 153, 749–766, **2001**
- [20] Fuchs D., Tabachnikov S., *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, Topology 36 no. 5, 1025–1053, **1997**
- [21] Gallery of Legendrian Knots, <http://www.math.duke.edu/ng/knotgallery.html>, (Ağustos **2014**)
- [22] Geiges H., Onaran S., *Legendrian rational unknots in lens spaces*, arXiv:1302.3792, **2013**
- [23] Geiges H., *An introduction to contact topology*, Cambridge studies in advanced mathematics Vol.109, **2008**
- [24] Giroux E., *Geometrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proc. of the Int. Cong. of Math. Vol. II, Beijing, Higher Ed. Press, 405–414, **2002**
- [25] Kanda Y., *The classification of tight contact structures on the 3-torus*, Comm. Anal. Geom. 5, no. 3, 413–438, **1997**
- [26] Lickorish, W.B.R., *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. 76, 531–540, **1962**

- [27] Lisca P., Stipsicz A. I., *Notes on the contact Ozsvath-Szabo invariants*, Pacific J. Math. 228, 2, 277–295, **2006**
- [28] Lisca P., Ozsvath P., Andras I. Stipsicz, Zoltan Szabo, *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 11, no. 6, 1307–1363. MR 2557137, **2009**
- [29] Mariné J., *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II Lecture Notes in Mathematics Volume 209, pp 142-163, **1971**
- [30] Ozbagci B., Stipsicz A. I., *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Society Mathematical Studies, **2004**
- [31] Ozbagci B., *A note on contact surgery diagrams*, Internat. Journal of Math., 16 2, 87–99, **2005**
- [32] Onaran S., *Legendrian knots in lens spaces*, arXiv:1012.3047, **2010**
- [33] Onaran S., *Legendrian knots and open book decompositions*, Doktora tezi, ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2009**
- [34] Rudolph L., *An obstruction to sliceness via contact geometry and classical gauge theory*, Inventiones mathematicae, Volume 119, Issue 1, pp 155–163, **1995**
- [35] Thurston W., Winkelnkemper H., *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. 52, 345–347, **1975**
- [36] Wallace A.H., *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. Math. 12, 503–528, **1960**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Samet SARIOĞLAN
Doğum Yeri : GÖKSUN/KAHRAMANMARAŞ
Medeni Hali : Bekar
E-posta : ssarioglan@hacettepe.edu.tr

Eğitim

Lise : 2002-2006 Osmaniye Hasan Aybaba AÖL
Lisans : 2006-2007 Hacettepe Üniversitesi,
Yabancı Diller Yüksek Okulu, Almanca Hazırlık
2007-2012 Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Çok iyi; Almanca, Orta

İş Deneyimi

2011-2012 Geometri Öğretmeni, Final Dergisi Dershaneleri

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–