GENEL ETKİLİ HOMOJEN POISSON SÜREÇLERİNE DAYANAN BAĞIMLI BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

DEPENDENT COMPOUND POISSON PROCESSES BASED ON COMMON SHOCK HOMOGENEOUS POISSON PROCESSES

TANYELİ GÜNEYLİGİL

DOÇ. DR. GAMZE ÖZEL KADILAR
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır

2014

TANYELİ GÜNEYLİGİL'in hazırladığı **"Genel Etkili Homojen Poisson Süreçlerine Dayanan Bağımlı Birleşik Poisson Süreçleri"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU ....
Başkan

Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR ....
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Semra TÜRKAN ....
Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak ve kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/12/2014

TANYELİ GÜNEYLİGİL

Tanyeli Güneyligil

ÖZET

GENEL ETKİLİ HOMOJEN POISSON SÜREÇLERİNE DAYANAN BAĞIMLI BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

Tanyeli GÜNEYLİGİL

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

Aralık 2014, 71 sayfa

Poisson süreçleri bir siste giriş zamanları modellemek için sıklıkla kullanılan stokastik süreçlerdendir. Poisson süreci temel olarak bir sayma sürecidir. Örneğin, bir bölgedeki yol kazalarının (ya da yaralanma/ölüm) sayısı ve bir futbol maçındaki gol sayıları Poisson süreçleri ile modellenebilir. Literatürde homojen, homojen olmayan, genel etkili ve birleşik Poisson süreçleri gibi birçok Poisson süreci bulunmaktadır. En çok bilinen Lévy süreçlerinden olan homojen Poisson süreçlerinde olaylar sabit bir hız ile oluşmaktadır. Homojen olmayan Poisson süreçlerinde ise, olaylar değişen bir hız ile meydana gelmektedir. Genel olarak, oran parametresi zaman içinde değiştiğinden bu süreçler homojen olmayan Poisson süreçleri olarak adlandırılmaktadır.

Birleşik Poisson süreci, artmalara sahip sürekli zamanlı bir olasılıksal süreçtir. Bu süreçte meydana gelen rasgele sıçrama zamanları Poisson sürecine uymaktadır ve sıçrama büyüklükleri de belirli bir olasılık dağılımına sahip raslantı değişkenleridir. Çok değişkenli durumda ise, birleşik Poisson süreçleri arasında bağımlılık olabilir.

Genel etkili bir Poisson süreci olayların meydana geliş sıklıklarını modellemek için kullanılmaktadır. Bu süreçte bir etki ya da şok, çok sayıda taşıtı içeren büyük bir trafik kazası, bir bölgede meydana gelen fırtına ya da patlama, bir hastanedeki tıbbi ilaç hatasının sonuçları olarak örneklendirilebilir. Genel etkili Poisson süreçleri olay sıklığındaki bağımlılıkların detaylı ve ayrı ayrı incelenmesine olanak sağlamaktadır. Bununla birlikte, genel etki birleşik Poisson süreçleri arasındaki bağımlılığı modellemek için ayrıntılı olarak kullanılmamıştır.

Bu çalışmada, öncelikle, bağımsız genel etkili birleşik Poisson süreçleri tanımlanmış ve bu süreçlerin bazı özellikleri elde edilmiştir. Bağımsız genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin toplamı incelenmiştir. Daha sonra, bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri önerilmiş ve ortak olasılık fonksiyonu elde edilmiştir. Bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin toplamına da ulaşılmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini göstermek için Türkiye'deki orman yangınları üzerine bir uygulama yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Poisson süreci, birleşik Poisson süreci, genel etki modelleri, bağımlılık, orman yangını.

ABSTRACT

DEPENDENT COMPOUND POISSON PROCESSES BASED ON COMMON SHOCK HOMOGENEOUS POISSON PROCESSES

Tanyeli GÜNEYLİGİL

Masters Degree, Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

December 2014, 71 pages

The Poisson processes are widely used stochastic processes for modeling the times at which arrivals enter a system. The Poisson process is basically a counting process. For example, the number of road crashes (or injuries/fatalities) in an area and goals scored in a soccer match can be well-modelled by the Poisson process. There are many types of Poisson processes in the literature such as homogeneous, nonhomogeneous, common shock and compound Poisson processes. The homogeneous Poisson process counts events that occur at a constant rate; it is one of the most well-known Lévy processes. An inhomogeneous Poisson process counts events that occur at a variable rate. In general, the rate parameter may change over time; such a process is called a non-homogeneous Poisson process or inhomogeneous Poisson process.

A compound Poisson process is a continuous-time (random) stochastic process with jumps. The jumps arrive randomly according to a Poisson process and the size of the jumps is also random, with a specified probability distribution. In a multivariate setting, there may be dependencies between multiple compound Poisson processes.

A common shock Poisson process is used to model dependent event frequencies. In this process, a shock may be a big car accident, a particular hurricane, an explosion, a medical mistake with consequences in a hospital. The common shock Poisson process allows for detailed and separate specification of dependence in frequency. However, common shock has never been used to model dependency between compound Poisson processes in detail.

In this study, firstly, independent compound Poisson processes with common shock are defined and some characteristics of these processes are obtained. The sum of independent compound Poisson processes with common shock is investigated. Then, the dependent compound Poisson processes based on common shock are proposed and their joint probability function is obtained. The sum of dependent compound Poisson processes with common shock models is also derived. Finally, to show the applicability of our findings an application based on the forest fires in Turkey are provided.

Keywords: Poisson process, compound Poisson process, common shock models, dependency, forest fire.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının konusu, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkıları ve yardımlarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR'a,

Tez çalışmamın oluşmasında yardımlarını esirgemeyen H.Ü. İstatistik Bölümü Başkanı Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGI'ya

Tezin değerlendirilmesindeki katkılarından dolayı Sayın Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Semra TÜRKAN'a,

Her zaman yardımlarını ve desteklerini eksik etmeyen AİLEM'e

en içten dileklerimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER

1. GİRİŞ

Poisson süreçleri olasılıksal süreçlerde önemli bir yere sahiptir. Bu süreçler taşıdıkları özelliklere göre, homojen (homogeneous), homojen olmayan, birleşik (compound) ve genel etkili (common shock) Poisson süreci adını alır.

Homojen Poisson süreçlerinde zaman içerisinde olayların sabit bir oranla ortaya çıktığı varsayılmaktadır. Örneğin, olasılıksal sismik tehlike analizi çalışmalarının çoğunluğunda depremlerin zaman içindeki oluşumları homojen Poisson süreci ile modellenmektedir [1]. Homojen Poisson süreçlerinde depremlerin birbirlerinden bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Homojen olmayan Poisson süreçlerinde ortaya çıkan olay sayısı zamanın bir fonksiyonudur. Bir makine parçasının arızalar arası süresinin zamana bağlı olarak değiştiğini kabul eden homojen olmayan Poisson Süreci Uzgören ve Elevli [2] tarafından incelenmiştir. Ayrıca makine parçalarının zamana bağlı olarak bozulma sayısını inceleyen benzer çalışmalar Kumar ve Klefsjö [3], Majumdar [4], Pulcini [5], Rao and Prasad [6] ve Louit [7] tarafından yapılmıştır.

Genel etkili Poisson süreçleri Marshall ve Olkin [8], [9] ve Kocherlakota [10] ve Kocherlakota tarafından tanımlanmıştır. Lindskog ve McNeil [11], Cosette [12] birden fazla farklı poliçeye sahip (kasko sigortası, sağlık sigortası, trafik sigortası vb.) bireylerin araç kazaları üzerine sigorta şirketine bildirilen hasar sayılarının sadece kasko sigortasına ait poliçeyi değil, sağlık sigortası ve trafik sigortasına ait poliçeleri de etkilediğini düşünerek bu durumu genel etkili Poisson süreçlerinden yararlanarak incelemiştir. Benzer olarak, Loisel [13] tarafından farklı ülkeleri de içine alan geniş alanlar üzerinde etkili olan fırtınaların sonucundaki ölüm ve yaralanma sayılarının genel etkili Poisson süreçleri ile incelenmesi gerektiği belirtilmiştir.

Olasılıksal süreçlerde olay sayılarının zaman içerisinde incelenmesinin yanı sıra her bir olaya ait olay büyüklüğü de önem taşımaktadır. Örneğin, sigortacılıkta poliçelerde ortaya çıkabilecek hasar miktarları, trafik kazalarında ölen kişi sayıları, her bir depremin şiddeti de en az olay sayılarının incelenmesi kadar gereklidir. Bu tür durumlarda birleşik Poisson sürecinden yararlanılmaktadır. $\{N_t, t \geq 0\}$ homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci ve Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, ortaya çıkan her olaya bağlanan raslantı değişkenleri olmak üzere,

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanan $\{X_t, t \geq 0\}$ sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir.

$\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ homojen Poisson süreçleri, $Y_j^{(i)}$, kesikli ya da sürekli bağımsız, aynı dağılımlı ve $N_t^{(i)}$'den bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere, bağımlı p tane birleşik Poisson süreci,

$$X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

biçimindeki bağımlı (dependent) birleşik Poisson süreci ile ifade edilmektedir.

Son yıllarda, örneğin sigortacılıkta, bir portföyün hasar sayısı ve hasar miktarının incelenmesi yerine birden fazla portföye ait hasar sayısı ve hasar miktarının bağımlı olarak incelenmesi önem kazanmıştır. Yuen [14], Avanzi [15], Ambagaspitiya [16], Cummins ve Wiltbank [17], Wang [18] yaptıkları çalışmalarda Eşitlik (1.2)'deki bağımlı Poisson süreçlerini incelemiştir.Bağımlı birleşik Poisson süreçleri kapulalar ile de incelenmektedir. Bağımlı birleşik Poisson süreçlerinde $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2$, homojen Poisson süreçlerinin bağımlı, $Y_j^{(i)}$ raslantı değişkenlerinin aynı dağılımlı, bağımsız ve kesikli olduğu durum, Papageorgiou ve

David [19], Vernic [20], Özel [21], [22] tarafından incelenmiştir. Vernic [20] tarafından incelenen bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreci en basit forma sahip süreçtir. Bu çalışmada Vernic [20] ve Cosette [12]'nin çalışmalarından yararlanarak yeni bir bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreci tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, birleşik Poisson süreci ve genel etkili Poisson süreci tanıtılmıştır. Bu süreçlere ait olasılık fonksiyonları, üreten fonksiyonlar, beklenen değer ve varyans gibi bazı önemli momentler ve kovaryans fonksiyonları verilmiştir.

Üçüncü Bölüm'de birden fazla homojen Poisson süreci olması durumunda ortaya çıkan bağımlı Poisson süreçleri açıklanmıştır. Bu süreçlere ait üreten fonksiyonlar ve ortak olasılık fonksiyonları üzerine yapılan önceki çalışmalar üzerinde durulmuştur.

Dördüncü Bölüm'de bağımsız birleşik Poisson süreçleri tanıtılmış ve bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bağımsız birleşik Poisson süreçlerinin toplamının olasılık fonksiyonu ve momentleri elde edilmiştir.

Beşinci Bölüm'de bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri tanımlanmıştır. Bu süreçlere ait ortak olasılık üreten fonksiyon elde edilmiştir. Bu fonksiyon yardımı ile bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin ortak olasılık fonksiyonuna ulaşılmıştır. Ayrıca bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin toplamının olasılık üreten fonksiyonu ve beklenen değeri de elde edilmiştir.

Dünyanın birçok ülkesinde olduğu gibi ülkemizde de orman varlığını tehdit eden faktörlerin başında orman yangınları gelmektedir. Ülkemiz Akdeniz iklim kuşağına yer almaktadır. Orman yangınları bu kuşağın kaçınılmaz olgusudur. Her yıl dünyada ortalama 4 milyon hektar, Akdeniz kuşağında ise ortalama 550 bin hektar orman yanmaktadır. Ülkemizde yangın tehlikesi açısından bölgeler itibariyle bir sıralama yaparsak yangınlar en çok Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgelerinde görülmektedir. Bu nedenle, tez çalışmasının Altıncı Bölümü'nde bu bölgelerde iklim değişliğine bağlı olarak meydana gelen 2000-2013 yılları arasında Haziran-Ekim ayları arasındaki orman yangın sayıları ve yanan alan büyüklükleri bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri ile incelenmiştir.

Yedinci Bölüm'de, Beşinci Bölüm ve Altıncı Bölüm'de elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve tartışılmıştır.

2. POISSON SÜREÇLERİ

Bu bölümde, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, birleşik Poisson süreci ve genel etkili Poisson süreci tanıtılacaktır. Bu amaçla öncelikle varış sayma süreci (arrival counting process) aşağıdaki gibi açıklanmıştır:

$\boldsymbol{\Omega}$, bir örneklem uzayı ve **P** bir olasılık ölçümü olsun. $\boldsymbol{\Omega}$ örneklem uzayında tanımlı $\{N_t, t \geq 0\}$ biçimindeki bir varış sayma sürecinde, her $\omega \in \boldsymbol{\Omega}$ için, $t \to N_t(\omega)$ noktasında azalmayan, sadece sıçrama (jump) ile artan, sağdan sürekli ve $N_0(\omega) = 0$ olarak tanımlı bir olasılıksal süreç konusudur.

2.1. Homojen Poisson Süreci

Homojen Poisson sürecinde olaylar, bazı aksiyomlar altında, bağımsız olarak ortaya çıkarlar ve birim zamanda ortaya çıkması beklenen olay sayısı zaman içinde değişmez.

N_t, $(0, t]$ zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere, $\{N_t, t \geq 0\}$ Poisson süreci aşağıda verilen aksiyomları sağlar [1]:

Aksiyom 1: Herhangi t uzunluğundaki bir zaman aralığında N_t’deki her değişme bir birim büyüklüğündedir;

Aksiyom 2: $t, s \geq 0$ için, $N_{t+s} - N_t$, N_t’den bağımsızdır;

Aksiyom 3: $t, s \geq 0$ için, $N_{t+s} - N_t$’nin dağılımı t’den bağımsızdır, s’ye bağlıdır;

Aksiyom 4: $N_0 = 0$’dır.

Yukarıda verilen aksiyomları sağlayan homojen bir Poisson sürecinde aşağıda verilen özellikler gözlenir:

1) N_t, durum uzayı $S = \{0,1,2,...\}$ olan kesikli bir raslantı değişkenidir. t zamanına dek i tane olayın ortaya çıkması olasılığı aşağıdaki gibidir:

$$P(N_t = i) = p_i(t), \qquad i = 0,1,2,... \text{ için} \tag{2.1}$$

2) $p_i(t)$, t'ye göre türevlenebilir.

3) Sürecin başlangıç koşulları $p_0(0) = 1$ ve $i = 1,2,...$ için $p_i(0) = 0$'dır.

4) Birbirini izleyen ve ortak noktaları olmayan iki zaman aralığının uzunlukları t ve s olsun. $t + s$ uzunluğundaki zaman aralığında i tane olayın ortaya çıkması olasılığı aşağıdaki gibidir:

$$p_i(t+s) = \sum_{k=0}^{i} p_k(t)p_{i-k}(s), \qquad k \le i \text{ için.} \tag{2.2}$$

5) Çok küçük bir Δt için, $(t, t+\Delta t]$ zaman aralığında bir olayın ortaya çıkması olasılığı yaklaşık olarak Δt ile orantılıdır:

$$p_1(\Delta t) \cong \lambda \Delta t,$$

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + 0(\Delta t). \tag{2.3}$$

$(t, t+\Delta t]$ zaman aralığında 0 (sıfır) olayın ortaya çıkması olasılığı,

$p_0(\Delta t) \cong 1 - \lambda\Delta t$,

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (2.4)$$

ve en az iki olayın ortaya çıkması olasılığı $P(N_{\Delta t} \geq 2) = 0(\Delta t)$ olur. Burada $0(\Delta t)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$0(\Delta t) + ... + 0(\Delta t) = 0(\Delta t)$,

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ [23].

6) N_t'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_i(t) = P(N_t = i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \qquad i = 0,1,2,... \text{ için} \qquad (2.5)$$

$$= 0, \qquad \text{ö.d. için}$$

Eşitlik (2.5), Poisson sürecinin olasılık fonksiyonudur. $\{N_t, t \geq 0\}$ olasılıksal sürecine homojen Poisson süreci ya da basit (ordinary) Poisson süreci adı verilir. Poisson dağılımından yararlanarak N_t'nin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(N_t) = \lambda t, \qquad V(N_t) = \lambda t. \qquad (2.6)$$

2.2. Homojen Olmayan Poisson Süreci

Homojen olmayan Poisson sürecinde parametre zamanın sürekli bir fonksiyonudur. N_t, $(0, t]$ zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere, $\{N_t, t \geq 0\}$ ile gösterilen homojen olmayan Poisson süreci aşağıdaki aksiyomları sağlar:

Aksiyom 1: $N_0 = 0$'dir;

Aksiyom 2: Ortalama oran, t'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonudur ve $\lambda(t)$ ile gösterilir;

Aksiyom 3: $N_{t_2} - N_{t1}$, N_{t_1}'den bağımsızdır.

N_t'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
p_i(t) = P(N_t = i) &= e^{-\Lambda_t}\frac{(\Lambda_t)^i}{i!}, && i = 0, 1, 2, \ldots \text{ için} \\
&= 0, && \text{ö.d. için.}
\end{aligned}
$$

Burada $\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u)du$ biçiminde tanımlanır [24], [25].

Homojen olmayan Poisson süreci için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibidir:

$$E(N_t) = \Lambda_t, \quad V(N_t) = \Lambda_t.$$

2.3. Birleşik Poisson Süreci

$\{N_t, t \geq 0\}$, homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci olsun. t zaman doğrusu boyunca ortaya çıkan her olaya $Y_1, Y_2, \ldots$ ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri bağlansın. Bu raslantı değişkenleri $\{N_t, t \geq 0\}$ sürecinden de bağımsız olsunlar. Buna göre,

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanan $\{X_t, t \geq 0\}$ sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir.

$\{X_t, t \geq 0\}$ sürecinin birleşik Poisson süreci olabilmesi için aşağıda verilen aksiyomların sağlanması gerekir [26]:

Aksiyom 1: $t, s \geq 0$ için, $X_{t+s} - X_t$, X_t'den bağımsızdır;

Aksiyom 2: $t, s \geq 0$ için, $X_{t+s} - X_t$'nin dağılımı yalnızca s'ye bağlıdır, t'ye bağlı değildir.

Eşitlik (2.7)'de Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri kesikli ise, X_t raslantı değişkeni kesikli olup kesikli birleşik Poisson süreci; sürekli ise, X_t raslantı değişkeni de sürekli olup sürekli Poisson süreci olarak adlandırılmaktadır.

Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri $0, 1, \ldots, m$ değerlerini alan kesikli raslantı değişkenleri ve Y_j, raslantı değişkeninin k değerini alması olasılığı, $P(Y_j = k) = p_k$,

$\sum_{k=0}^{m} p_k = 1$ ise, Eşitlik (2.7)'de verilen birleşik Poisson süreci aşağıdaki biçimde de tanımlanabilir:

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} X_j(t;\lambda_j) . \tag{2.8}$$

Burada $X_j(t;\lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, bağımsız süreçler ve $X_0(t;\lambda_0) = 0N_t^{(0)} = 0$'dır. $X_j(t;\lambda_j) = jN_t^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ ve $\{N_t^{(j)}, t > 0\}$ süreci $\lambda_j = \lambda p_j$ parametresi ile Poisson sürecidir. Eşitlik (2.8)'de verilen $\{X_t, t \geq 0\}$ süreci, m'inci dereceden birleşik Poisson süreci adını alır.

X_t'nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$F_{X_t}(x) = P(X_t \leq x) = P\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j \leq x\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n} Y_i \leq x / N_t = n\right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} F^{(n)}(x) .$$

Burada $F^{(n)}(x) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \leq x)$' dir [27].

2.3.1. Birleşik Poisson Süreci İçin Üreten Fonksiyonlar

$\{X_t, t \geq 0\}$ biçimindeki birleşik Poisson süreci için olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibidir:

$$g_{X_t}(s) = E(s^{X_t}) = E(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)\ E(s^{\sum_{j=1}^{n} Y_j} / N_t = n)$$

$$= P(N_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t = n) E(s^{\sum_{j=1}^{n} Y_j} / N_t = n) \qquad (2.9)$$

Aynı dağılımlı bağımsız $Y_1, Y_2, ...$ raslantı değişkenlerinin olasılık üreten fonksiyonu $g_Y(s)$ ise,

$$E\left[s^{\sum_{j=1}^{n} Y_j} / N_t = n) \right] = [g_Y(s)]^n$$

biçiminde yazılabilir. Bu beklenen değer Eşitlik (2.9)'daki ifadede yerine yazılır ve düzenlenirse, birleşik Poisson süreci için elde edilen olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi olur:

$$g_{X_t}(s) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [g_Y(s)]^n$$

$$= e^{-\lambda t} \left[1 + \frac{\lambda t g_Y(s)}{1!} + \frac{[\lambda t g_Y(s)]^2}{2!} + ... \right]$$

$$= e^{\lambda t [g_Y(s) - 1]}. \qquad (2.10)$$

$\{X_t, t \geq 0\}$ birleşik Poisson süreci için elde edilen olasılık üreten fonksiyon kullanılarak beklenen değer ve varyans,

$$E(X_t) = \mu\lambda t, \qquad V(X_t) = (\sigma^2 + \mu^2)\lambda t$$

olarak bulunur. Burada μ ve σ^2, $Y_1, Y_2, \ldots$ raslantı değişkenlerinin ortak beklenen değer ve varyansıdır.

Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri kesikli ve $k = 0, 1, \ldots, m$ gibi sonlu değerler alıyorsa ortak olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_Y(s) = \sum_{k=0}^{m} p_k s^k = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_m s^m .$$

Buna göre, $\{X_t, t \geq 0\}$ süreci için olasılık üreten fonksiyon $\lambda_j = \lambda p_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, olmak üzere, Özel tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir [28]:

$$\begin{aligned} g_{X_t}(s) &= e^{\lambda t\left[(p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m) - 1\right]} \\ &= e^{\lambda t p_0 + \lambda t p_1 s + \ldots + \lambda t p_m s^m} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t(1-p_0)} e^{\lambda_1 t s + \lambda_2 t s^2 + \ldots + \lambda_m t s^m} . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Eşitlik (2.11)'in yazılabileceği Eşitlik (2.10)'da verilen olasılık üreten fonksiyondan yararlanarak gösterilebilir. Eşitlik (2.8)'den X_t'nin olasılık üreten fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_{X_t}(s) = E(s^{X_t}) &= E\left(s^{\sum_{j=1}^{m} X_j(t;\lambda_j)}\right) \\ &= E\left(s^{(1N_t^{(1)} + 2N_t^{(2)} + \ldots + mN_t^{(m)})}\right) \\ &= E\left(s^{N_t^{(1)}}\right) E\left(s^{2N_t^{(2)}}\right) \ldots E\left(s^{mN_t^{(m)}}\right) \\ &= e^{\lambda p_1 t(s-1)} e^{\lambda p_2 t(s-1)} \ldots e^{\lambda p_m t(s-1)} \end{aligned}$$

$$= e^{\lambda p_1 ts+\lambda p_2 ts^2+...+\lambda p_m ts^m-(\lambda p_1 t+\lambda p_2 t+...+\lambda p_m t)}$$

$$= e^{\lambda p_1 ts+\lambda p_2 ts^2+...+\lambda p_m ts^m-\lambda t(1-p_0)}$$

$$= e^{\lambda t(p_0+p_1 s+p_2 s^2+...+p_m s^m)-\lambda t}$$

elde edilir. Burada $p_0+p_1+...+p_m=1$ olduğu ve $X_j(t;\lambda_j)$, $j=0,1,...,m$, süreçlerinin bağımsız oldukları dikkate alınmıştır. Y_j, $j=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonu,

$$g_Y(s)=p_0+p_1 s+p_2 s^2+...+p_m s^m$$

olduğundan,

$$g_{X_t}(s)=e^{\lambda t[g_Y(s)-1]}$$

biçiminde de yazılabilir. Bu olasılık üreten fonksiyonun X_t için Eşitlik (2.10)'da verilen olasılık üreten fonksiyona eşit olduğu görülmektedir.

Ayrıca $\{X_t, t\geq 0\}$ birleşik Poisson sürecine ait çarpıklık katsayısı δ_{X_t} Eşitlik (2.10)'dan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta_{X_t}=\frac{E\left[X_t-E\left(X_t\right)\right]^3}{Var(X_t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\frac{E\left(X_t^3\right)}{E\left(X_t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Burada 3. merkezsel moment aşağıdaki gibidir:

$$E\left[X_t - E(X_t)\right]^3 = \lambda t E\left(Y_j^3\right).$$

2.3.2. Birleşik Poisson Sürecinin Olasılık Fonksiyonu

Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri kesikli ise, X_t'nin olasılık fonksiyonu,

$$p_{X_t}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = k / N_t = n\right) P(N_t = n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

$$= 0, \qquad \text{ö.d. için}$$

olur.

Eşitlik (2.12)'den X_t'nin olasılık fonksiyonunun fonksiyonel biçimine ulaşmak çoğu kez güçtür. $P(X_t = x)$'nin kapalı biçimine ulaşılmıştır [27]. Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, kesikli raslantı değişkenlerinin $P\left(Y_j = k\right) = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, olasılıklarını aldıkları düşünülerek, $\lambda_k = \lambda p_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, için X_t'nin $0, 1, 2, \ldots$ değerlerini alması olasılıkları,

$$P(X_t = 0) = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$

$$P(X_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(X_t = 2) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!} \right], \tag{2.13}$$

$$P(X_t = 3) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 4) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2(\lambda_2 t)^1}{2!\,1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_3 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!}\right],$$

biçiminde bulunmuştur.

Eşitlik (2.13)'te verilen $P(X_t = 1)$, $P(X_t = 2)$, $\ldots$ olasılıkları incelendiğinde sağ yandaki terimlerin x'in $1, 2, ..., m$ tamsayıları cinsinden kaç farklı biçimde parçalanabileceğine bağlı olduğu görülmektedir. Örneğin 1, (1) biçiminde; 2, $(1, 1)$, (2) biçiminde; 3, $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$, (3) biçiminde parçalanabilir. Sağ yan terimlerinin paydalarındaki faktöriyeller de bu parçalanmaya uyumludur. Bu sonuca göre, Y_j, $j = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık dağılımının fonksiyonel biçimi ne olursa olsun $p_0 = P(Y_j = 0)$, $p_1 = P(Y_j = 1)$,..., $p_m = P(Y_j = m)$ olasılıkları biliniyorsa, $P(X_t = x)$, $x = 0, 1, 2, ...$, olasılıklarının hesaplanabileceği görülmektedir.

2.4. Genel Etkili Poisson Süreçleri

Genellikle bir sigorta portföyündeki çeşitli hesaplamalarda kolaylık sağlamak ve istenmeyen birçok durumdan kurtulmak amacıyla risklerin bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Ancak gerçek yaşamda bu varsayımın gerçeğe uymadığı durumlarla karşılaşılmaktadır. Örneğin, bir iş yerindeki iş görenlerin bir grup hayat sigortası veya grup sağlık sigortası ele alındığında; iş yerinde herkesi etkileyecek bir kaza, sigortacının portföyü içindeki riskleri kolektif olarak arttıracaktır. Bu durumda bu portföyü oluşturan risklerin bağımsız oldukları varsayımı gerçekle bağdaşmamaktadır [12], [29].

Belirli bir zaman boyunca ortaya çıkan birkaç farklı türdeki kayıplar ve bu kayıpların sayısı araştırılsın. Daha somut olarak, birkaç farklı iş hattı ya da farklı ülkede meydana gelen sigorta kayıpları ile ilgilenilsin ve bu kayıpların birbiri ile ilişkili olduğu düşünülsün. Bu bağımlılığı modellemenin bir yolu tüm kayıpları bağımsız etki (şok) süreçlerinin bir serisi olarak ortaya çıktığını varsaymaktır. Sigortacılıkta bu etki doğal afetler, kredi riski modellemede yerel veya küresel resesyon gibi ekonomik olaylar ve operasyonel risk modellemede çeşitli bilgi teknolojilerindeki başarısızlık olabilir. Bu tür bağımlı olayların incelenmesi için ortaya çıkan genel etki modeli Marshall ve Olkin [8] ve Kocherlakota ve Kocherlakota [10] tarafından tanımlanmıştır. Cosette v.d [12] ise, genel etkili Poisson süreçlerini ve bu süreçlere ait ortak olasılık üreten fonksiyonu elde etmiştir.

$N_t^{(uv)}$, $u,v=1,2,3$ için λ_{uv} parametreli homojen, bağımsız Poisson süreçleri ve $N_t^{(123)}$, λ_{123} parametreli homojen Poisson süreci olsun. Buna göre $N_t^{(i)}$, i=1,2,3, λ_i parametreli genel etkili Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_t^{(1)} = N_t^{(11)} + N_t^{(12)} + N_t^{(13)} + N_t^{(123)},$$

$$N_t^{(2)} = N_t^{(22)} + N_t^{(12)} + N_t^{(23)} + N_t^{(123)},$$

$$N_t^{(3)} = N_t^{(33)} + N_t^{(13)} + N_t^{(23)} + N_t^{(123)} \quad , \tag{2.14}$$

Eşitlik (2.14)’te $N_t^{(1)}$, $N_t^{(2)}$ ve $N_t^{(3)}$ süreçleri arasında bağımlılık yapısı $N_t^{(123)}$ sürecinin $N_t^{(1)}$, $N_t^{(2)}$ ve $N_t^{(3)}$ süreçlerindeki toplam ifadelerinde yer almasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir deyişle, $N_t^{(123)}$ süreci genel etki yaratmaktadır. Burada, λ_i , i=1,2,3, parametreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{123},$$

$$\lambda_2 = \lambda_{22} + \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{123},$$

$$\lambda_3 = \lambda_{33} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{123}.$$

Eşitlik (2.14)'te verilen genel etkili Poisson süreçleri için kovaryans fonksiyonu u≠v olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathrm{Cov}(N_t^{(u)},N_t^{(v)}) = V(N_t^{(uv)}) + V(N_t^{(123)}). \tag{2.15}$$

Buradan, $N_t^{(uv)}$, u,v=1,2,3 için Pearson korelasyon katsayısı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\rho_{N_t^{(u)},N_t^{(v)}} = \frac{\mathrm{Cov}(N_t^{(u)},N_t^{(v)})}{\sqrt{V(N_t^{(u)})V(N_t^{(v)})}} = \frac{\lambda t_{(uv)} + \lambda t_{(123)}}{\sqrt{(\lambda t_{(u)})(\lambda t_{(v)})}} \tag{2.16}$$

Eşitlik (2.16)'da $V\left(N_t^{(u)}\right) = (\lambda t_{(u)})$ ve $V\left(N_t^{(v)}\right) = (\lambda t_{(v)})$ biçimindedir.

Eşitlik (2.14)'teki $N_t^{(1)}$, $N_t^{(2)}$ ve $N_t^{(3)}$ raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}(s_1,s_2,s_3) &= E\left[s_1^{(N_t^{(11)}+N_t^{(12)}+N_t^{(13)}+N_t^{(123)})} \ldots s_3^{(N_t^{(33)}+N_t^{(13)}+N_t^{(23)}+N_t^{(123)})} \right] \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^{3} E\left[s_j^{N_t^{(jj)}} \right] \right\} E\left[(s_1 s_2)^{N_t^{(12)}} \right] E\left[(s_1 s_3)^{N_t^{(13)}} \right] E\left[(s_2 s_3)^{N_t^{(23)}} \right] E\left[(s_1 s_2 s_3)^{N_t^{(123)}} \right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{3} (\lambda_{jj} t s_j - 1) \right] + \exp\left[\sum_{j<k} \lambda_{jk} (s_j s_k - 1) \right] + \exp\left[\lambda_{123}\, t(s_1 s_2 s_3 - 1) \right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

biçimindedir.

Örnek (2.1). Bir sigorta şirketinin üç farklı poliçe türü incelensin. Bir doğal afetin sonucunda bu üç poliçe türüne ait hasar sayıları arasında bağımlılık oluşabileceğinden üç poliçe türünün beraber incelenmesi sigorta şirketi açısından daha doğru olacaktır. Bir deprem sonucunda ortaya çıkabilecek hasar sayılarına ait bağımlı Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

- $N_t^{(1)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen kasko sigorta poliçesine ait hasar sayısı,
- $N_t^{(2)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen konut sigorta poliçesine ait hasar sayısı,
- $N_t^{(3)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sağlık sigorta poliçesine ait hasar sayısı.

Eşitlik (2.14) dikkate alındığında yukarıda tanımlanan bağımlı Poisson süreçlerini oluşturan bağımsız Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

- $N_t^{(11)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece kasko sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(22)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece konut sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(33)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(12)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem kasko hem konut sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(13)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem kasko hem sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(23)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem konut hem de sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı.

$N_t^{(123)}$ ise, her üç poliçeye sahip bireylerin deprem sonucunda sigorta şirketine bildirilen hasarlarının sayısını göstermektedir.

Buna göre $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ ve $\{N_t^{(3)}, t \geq 0\}$ bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin birlikte incelenmesi sigorta şirketi açısından daha doğru olacaktır.

3. BAĞIMLI İKİ DEĞİŞKENLİ BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

Bazı durumlarda birbirine bağımlı olayların ve olay büyüklüklerinin beraber incelenmesi gerekebilir. Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi, sigortacılıkta farklı tür hasar poliçelerinin ve hasar miktarlarının beraber ele alınması daha uygundur. Belirli bir zamanda incelenen olay sayılarının Poisson sürecine uyması durumunda ortaya çıkan birden fazla birleşik Poisson sürecinin birlikte incelenmesi daha uygundur.

$Y_j^{(1)}$, $j=1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri ve $Y_j^{(2)}$, $j=1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri olsun. $\{N_t, t \geq 0\}$, λ parametreli homojen Poisson süreci, $Y_j^{(1)}$, $j=1,2,...,$ ve $Y_j^{(2)}$, $j=1,2,...,$ raslantı değişkenlerinden bağımsız olsun. Bu bölümde Ambagaspitiya [16], Vernic [20] ve Özel [28] tarafından tanımlanan $\{X_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{X_t^{(2)}, t \geq 0\}$ bağımlı birleşik Poisson süreçleri açıklanacaktır. Ayrıca tanımlanan her bağımlı birleşik Poisson süreci için bir örnek verilecektir.

İki değişkenli birleşik Poisson süreci Ambagaspitiya [16] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = \left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{N_t} Y_j^{(2)} \right). \tag{3.1}$$

Örnek (3-1): N_t, t zamanına dek ortaya çıkan deprem sayısı, $Y_j^{(1)}$, $j=1,2,...,$ j. depremden önce ortaya çıkan öncü deprem sayısı, $Y_j^{(2)}$, $j=1,2,...,$ j. depremden sonra ortaya çıkan artçı deprem sayısı olmak üzere, Eşitlik (3.1)'de tanımlanan bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreci, t zamanına dek ortaya çıkan toplam öncü ve toplam artçı deprem sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (3.1)'de $P(Y_j^{(1)}=k)=p_k$, $k=0,1,2,...,m$ ve $P(Y_j^{(2)}=j)=q_j$, $j=0,1,2,...,r$, alınırsa, $X_t^{(1)}$ ve $X_t^{(2)}$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonu,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2)=\sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}P\left(\sum_{j=1}^{N_t}Y_j^{(1)}=k_1,\sum_{j=1}^{N_t}Y_j^{(2)}=k_2\right)s_1^{k_1}s_2^{k_2}$$

$$=P(N_t=0)+P(N_t=1)g_{Y^{(1)}}(s_1)g_{Y^{(2)}}(s_2)+P(N_t=2)\left[g_{Y^{(1)}}(s_1)\right]^2\left[g_{Y^{(2)}}(s_2)\right]^2+... \quad (3.2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g_{Y^{(1)}}(s_1)$, $Y^{(1)}$, $i=1,2,...,N_t$, raslantı değişkenlerinin; $g_{Y^{(2)}}(s_2)$, $Y^{(2)}$, $i=1,2,...,N_t$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonlarıdır. N_t raslantı değişkeninin olasılık üreten fonksiyonunun,

$$g_{N_t}(s)=\sum_{i=0}^{\infty}P(N_t=i)s^i=e^{\lambda t(s-1)} \quad (3.3)$$

olduğu düşünülerek Eşitlik (3.2)'den,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2)=g_{N_t}\left[g_{Y^{(1)}}(s_1)g_{Y^{(2)}}(s_2)\right] \quad (3.4)$$

yazılabilir. Buna göre, Eşitlik (3.3) ve Eşitlik (3.4)'ten, $X_t^{(1)}$ ve $X_t^{(2)}$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2)=e^{\lambda t[g_{Y(1)}(s_1)g_{Y(2)}(s_2)-1]}$$

$$=e^{-\lambda t}e^{\lambda t[g_{Y(1)}(s_1)g_{Y(2)}(s_2)]}$$

$$=e^{-\lambda t}e^{\lambda t(p_0+p_1z_1+...+p_mz_1^m)(q_0+q_1z_2+...+q_rz_2^r)}$$

$$= e^{-\lambda t} e^{\lambda t(p_0 q_0 + p_0 q_1 z_2 + \ldots + p_0 q_r z_2^r + p_1 q_0 z_1 + p_1 q_1 z_1 z_2 + \ldots + p_1 q_r z_1 z_2^r + p_m q_0 z_1^m + \ldots + p_m q_r z_1^m z_2^r)} \tag{3.5}$$

Bağımlı genel etkili en basit birleşik Poisson süreci, Vernic tarafından $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 0,1,2$, λ_i parametresi ile bağımsız homojen Poisson süreçleri $N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$ ve $N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [20]:

$$(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} Y_j^{(1)}, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_j^{(2)} \right). \tag{3.6}$$

Örnek (3-2): $N_t^{(0)}$, t zamanına dek II. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı, $N_t^{(1)}$, t zamanına dek I. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı, $N_t^{(2)}$, t zamanına dek III. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı olsun. $Y_j^{(1)}$, $j = 1,2,\ldots$, II. ve III. derece deprem bölgelerindeki hasarlı bina sayısı, $Y_j^{(2)}$, $j = 1,2,\ldots$, I. ve II. derece deprem bölgelerinde ölen kişi sayısı olmak üzere, Eşitlik (3.6)'daki birleşik Poisson süreci, t zamanına dek ortaya çıkan toplam hasarlı bina ve ölen kişi sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (3.6)'da $P(Y_j^{(1)} = k) = p_k$, $k = 0,1,2,\ldots,m$ ve $P(Y_j^{(2)} = j) = q_j$, $j = 0,1,2,\ldots,r$, alınırsa, $X_t^{(1)}$ ve $X_t^{(2)}$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonu,

$$g_{X_t^{(1)}, X_t^{(2)}}(s_1, s_2) = \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_j^{(2)} = k_2 \right) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n_1} Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{n_2} Y_j^{(2)} = k_2 \right) P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = n_1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = n_2) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}\Big[P(X_t^{(1)} = k_1, X_t^{(2)} = k_2)\,/\,P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0)\Big]$$

$$P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0)s_1^{k_1}s_2^{k_2} + \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}P\left(\sum_{j=1}^{n_1}Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{n_2}Y_j^{(2)} = k_2\right)$$

$$P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = n_1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = n_2)s_1^{k_1}s_2^{k_2}$$

$$\begin{aligned}
&= P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(2)} = 0) \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(1)} = 1)\, g_{Y^{(2)}}(s_2) \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0)\, g_{Y^{(1)}}(s_1) + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 1)\, g_{Y^{(1)}}(s_1)\, g_{Y^{(2)}}(s_2) + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 2, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 2)\, (g_{Y^{(1)}}(s_1))^2\, (g_{Y^{(2)}}(s_2))^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.7}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g_{Y^{(1)}}(s_1)$, $Y^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$, raslantı değişkenlerinin; $g_{Y^{(2)}}(s_2)$, $Y^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonlarıdır.

$N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$ ve $N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
g_{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}(s_1, s_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = k_1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = k_2)s_1^{k_1}s_2^{k_2} \\
&= E(s_1^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} s_2^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}) \\
&= E(s_1^{N_t^{(1)}})E(s_2^{N_t^{(2)}})E((s_1 s_2)^{N_t^{(0)}}) \\
&= e^{\lambda_1 t(s_1-1)+\lambda_2 t(s_2-1)+\lambda_0 t(s_1 s_2-1)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (3.7) ve Eşitlik (3.8)’den,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2)=g_{N_t^{(0)}+N_t^{(1)},N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}(g_{Y^{(1)}}(s_1),g_{Y^{(2)}}(s_2)) \tag{3.9}$$

yazılabilir. Buna göre, Özel [28] tarafından Eşitlik (3.8) ve Eşitlik (3.9)'dan,

$$\begin{aligned} g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2) &= e^{\lambda_1 t(g_{Y^{(1)}}(s_1)-1)+\lambda_2 t(g_{Y^{(2)}}(s_2)-1)+\lambda_0 t(g_{Y^{(1)}}(s_1)g_{Y^{(2)}}(s_2)-1)} \\ &= e^{\lambda_1 t(p_0+p_1s_1+p_2s_1^2+\ldots+p_ms_1^m-1)+\lambda_2 t(q_0+q_1s_2+q_2s_2^2+\ldots+q_rs_2^r-1)+\lambda_0 t((p_0+p_1s_1+p_2s_1^2+\ldots+p_ms_1^m)(q_0+q_1s_2+q_2s_2^2+\ldots+q_rs_2^r)-1)} \\ &= e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{\lambda_1 t(p_0+p_1s_1+\ldots+p_ms_1^m)+\lambda_2 t(q_0+q_1s_2+\ldots+q_rs_2^r)+\lambda_0 t((p_0+p_1s_1+\ldots+p_ms_1^m)(q_0+q_1s_2+\ldots+q_rs_2^r))} \end{aligned} \tag{3.10}$$

biçiminde bulunmuştur.

$\{M_t^{(1)},t\geq 0\}$, μ_1 parametresi ile ve $\{M_t^{(2)},t\geq 0\}$, μ_2 parametresi ile bağımlı homojen Poisson süreçleri olduğu diğer iki değişkenli birleşik Poisson süreci Özel [28] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$(X_t^{(1)},X_t^{(2)})=\left(\sum_{j=1}^{M_t^{(1)}}Y_j^{(1)},\sum_{j=1}^{M_t^{(2)}}Y_j^{(2)}\right). \tag{3.11}$$

Burada ρ, $M_t^{(1)}$ ve $M_t^{(2)}$ raslantı değişkenleri arasındaki bağımlılığı göstermektedir. $\{M_t^{(1)},t\geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)},t\geq 0\}$ süreçleri artan süreçler olduklarından bağımlılık pozitiftir $(0<\rho<1)$.

Örnek (3-3): Bir mağazanın I. katında giyecek satışı, II. katında ev eşyaları satışı yapılmaktadır. $M_t^{(1)}$, t zamanına dek I. kata gelen kişi sayısı; $M_t^{(2)}$, t zamanına dek II. kata gelen kişi sayısı ve $Y_j^{(1)}$, $j=1,2,\ldots$, I. kata gelen j. kişinin satın aldığı ürün sayısı; $Y_j^{(2)}$, $j=1,2,\ldots$, II. kata gelen j. kişinin satın aldığı ürün sayısı olsun. Eşitlik

(3.11)'deki birleşik Poisson süreci, I. ve II. katta satın alınan ürün sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (3.11)'de $P(Y_j^{(1)} = k) = p_k$, $k = 0,1,2,...,m$ ve $P(Y_j^{(2)} = j) = q_j$, $j = 0,1,2,...,r$, alınırsa, $X_t^{(1)}$ ve $X_t^{(2)}$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonu,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2) = \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{M_t^{(1)}} Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{M_t^{(2)}} Y_j^{(2)} = k_2\right) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{m_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{m_2} Y_i = s_2\right) P(M_t^{(1)} = m_1, M_t^{(2)} = m_2) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty} \left[P(X_t^{(1)} = k_1, X_t^{(2)} = k_2)/P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0)\right] P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$+ \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{m_1} Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{m_2} Y_j^{(2)} = k_2\right) P(M_t^{(1)} = m_1, M_t^{(2)} = m_2) s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

$$= P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) + P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 1) g_{Y^{(2)}}(s_2) + P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 0) g_{Y^{(1)}}(s_1)$$

$$+ P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 1) g_{Y^{(1)}}(s_1) g_{Y^{(2)}}(s_2) + P(M_t^{(1)} = 2, M_t^{(2)} = 2)[g_{Y^{(1)}}(s_1)]^2 [g_{Y^{(2)}}(s_2)]^2 + \ldots$$

$$= g_{M_t^{(1)},M_t^{(2)}}(g_{Y^{(1)}}(s_1), g_{Y^{(2)}}(s_2)) \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada $g_{Y^{(1)}}(s_1)$, $Y_j^{(1)}$, $i = 1,2,..., M_t^{(1)}$, raslantı değişkenlerinin; $g_{Y^{(2)}}(s_2)$, $Y_j^{(2)}$, $i = 1,2,..., M_t^{(2)}$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonlarıdır.

$M_t^{(1)}$ ve $M_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonu Cox [30] tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$g_{M_t^{(1)},M_t^{(2)}}(s_1,s_2)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P(M_t^{(1)}=i,M_t^{(2)}=j)s_1^i s_2^j$$

$$=e^{\lambda_1 t(s_1-1)+\lambda_2 t(s_2-1)+\rho t(s_1 s_2-1)}. \tag{3.13}$$

Eşitlik (3.13)'ten, $X_t^{(1)}$ ve $X_t^{(2)}$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}}(s_1,s_2)=e^{\lambda_1 t(g_{Y(1)}(s_1)-1)+\lambda_2 t(g_{Y(2)}(s_2)-1)+\rho t(g_{Y(1)}(s_1)g_{Y(2)}(s_2)-1)}$$

$$=e^{\lambda_1 t(p_0+p_1 s_1+p_2 s_1^2+\ldots+p_m s_1^m-1)+\lambda_2 t(q_0+q_1 s_2+q_2 s_2^2+\ldots+q_r s_2^r-1)+\rho t((p_0+p_1 s_1+p_2 s_1^2+\ldots+p_m s_1^m)(q_0+q_1 s_2+q_2 s_2^2+\ldots+q_r s_2^r)-1)}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{\lambda_1 t(p_0+p_1 s_1+\ldots+p_m s_1^m)+\lambda_2 t(q_0+q_1 s_2+\ldots+q_r s_2^r)+\rho t((p_0+p_1 s_1+\ldots+p_m s_1^m)(q_0+q_1 s_2+\ldots+q_r s_2^r))} \tag{3.14}$$

Eşitlik (3.1),(3.6) ve (3.11)'de verilen bağımlı birleşik Poisson süreçlerine ait birleşik olasılık fonksiyonları Özel [28] tarafından ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu fonksiyonlar için elde edilen olasılıklar Oracle veri tabanında hesaplanmıştır.

4. BAĞIMSIZ BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

$Y_j^{(i)}$ raslantı değişkenleri kesikli olmak üzere, λ_i, $i=1,\ 2,\ ...,n$ parametreli $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, homojen Poisson süreçleri bağımsız olsun. Buna göre bağımsız birleşik Poisson süreçleri,

$$X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)} \ ,\ i=1,\ 2,\ ...,n \qquad (4.1)$$

ve bu süreçlerin toplamını gösteren $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecine ait raslantı değişkeni,

$$W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + ... + X_t^{(n)}, \qquad (4.2)$$

biçiminde tanımlansın.

Eşitlik(4.2)'de sigortacılık alanında t zamanına dek bildirilen sigorta şirketine ait farklı poliçe türlerinin hasar miktarlarının toplamı olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlik (4.2)'de verilen W_t'nin dağılım fonksiyonuna, W_t karakteristik fonksiyonunun tersi elde edilerek Hızlı Fourier dönüşüm yöntemiyle ulaşılabilir. Hızlı Fourier yönteminin aktüerya alanındaki uygulamaları Bühlmann [31], Heckman ve Mayers [32] ve Robertson [33] tarafından verilmiştir. Bu yöntem ile W_t'nin dağılım fonksiyonu yaklaşık olarak elde edilmesine rağmen olasılık fonksiyonuna ulaşılamamıştır. Bu bölümde Eşitlik (4.1) ve Eşitlik (4.2)'de verilen süreçler incelenecektir.

4.1. Bağımsız Birleşik Poisson Süreçlerinin Ortak Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (4.1)'de $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$, …, $\{N_t^{(n)}, t \geq 0\}$ bağımsız homojen Poisson süreçleri, $Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)}$, …, $Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ raslantı değişkenlerinden de bağımsız olsun. Buna göre, bağımsız birleşik Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}) = \left(\sum_{j=1}^{N_t^{(1)}} Y_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{N_t^{(2)}} Y_j^{(2)}, \ldots, \sum_{j=1}^{N_t^{(n)}} Y_j^{(n)} \right). \tag{4.3}$$

Örnek (4-1): $N_t^{(1)}$, t zamanına dek A şehrindeki trafik kaza sayısı, $Y_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ j. trafik kazasında A şehrinde ölen kişi sayısı; $N_t^{(2)}$, t zamanına dek B şehrindeki trafik kaza sayısı, $Y_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ j. trafik kazasında B şehrinde ölen kişi sayısı, …. olmak üzere, Eşitlik (4.3)'te verilen birleşik Poisson süreci t zamanına dek farklı şehirlerde meydana gelen trafik kazalarında toplam ölen kişi sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (4.3)'te $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}$ raslantı değişkenleri bağımsız olduklarından, ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} p_{X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P(X_t^{(1)} = x_1, X_t^{(2)} = x_2, \ldots, X_t^{(n)} = x_n) \\ &= p_{X_t^{(1)}}(x_1) p_{X_t^{(2)}}(x_2) \ldots p_{X_t^{(n)}}(x_n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Burada, $p_{X_t^{(1)}}(x_1)$, $p_{X_t^{(2)}}(x_2)$, …, $p_{X_t^{(n)}}(x_n)$ sırasıyla $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}$ raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar Eşitlik (2.13)'ten kolaylıkla hesaplanabilir.

Eşitlik (4.1)'de tanımlanan bağımsız birleşik Poisson süreçleri için ortak olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},\dots,X_t^{(n)}}(s_1,s_2,\dots,s_n)=\prod_{j=1}^{n} g_{N_t^{(j)}}\left[g_{Y^{(j)}}(s_j)\right]$$

$$=e^{\left[\lambda_1 t(g_{Y^{(1)}}(s_1)-1)\right]}e^{\left[\lambda_2 t(g_{Y^{(2)}}(s_2)-1)\right]}\dots e^{\left[\lambda_n t(g_{Y^{(n)}}(s_n)-1)\right]} \tag{4.5}$$

Özel olarak, $Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)},\dots,Y_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots,$ raslantı değişkenlerinin μ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olması durumunda $g_{Y^{(j)}}(s_j)=e^{\mu(s_j-1)}$ olacağından, Eşitlik (4.5)'te tanımlanan ortak olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},\dots,X_t^{(n)}}(s_1,s_2,\dots,s_n)=e^{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j t\left[e^{\mu(s_j-1)}-1\right]}\ . \tag{4.6}$$

$Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)},\dots,Y_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots,$ raslantı değişkenlerinin k ve p parametreleri ile binom (iki terimli) dağılımına sahip olması durumunda $g_{Y^{(j)}}=(pe^{s_j}+q)^k$ olur. Buna göre, Eşitlik (4.5)'ten ortak olasılık üreten fonksiyon,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},\dots,X_t^{(n)}}(s_1,s_2,\dots,s_n)=e^{\sum\lambda_j t\left[pe^{s_j}+q\right]^k} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir.

4.2. Bağımsız Birleşik Poisson Süreçlerinin Toplamının Ortak Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (4.2)'de $Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}, \ldots, Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ kesikli raslantı değişkenleri olmak üzere, $\{W_t, t \geq 0\}$ $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecine olasılık üreten fonksiyon,

$$g_{W_t}(s) = g_{X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}}(s_1, s_2, \ldots, s_n) \tag{4.8}$$

biçiminde yazılabilir. $Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}, \ldots, Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ kesikli raslantı değişkenlerinin aynı dağılımlı olması durumunda,

$$\begin{aligned} g_{W_t}(s) &= e^{[\lambda t(g_Y(s)-1)]} \\ &= e^{\left[\lambda t(p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m - 1)\right]} \\ &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t\left[p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m\right]} \\ &= e^{\left[\lambda_1 t(g_{Y(1)}(s_1)-1)\right]} e^{\left[\lambda_2 t(g_{Y(2)}(s_2)-1)\right]} \ldots e^{\left[\lambda_n t(g_{Y(n)}(s_n)-1)\right]} \end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ biçiminde tanımlıdır.

Eşitlik (4.9)'da verilen olasılık üreten fonksiyonun türevi alınıp yazıldığında $\{W_t, t \geq 0\}$ $\{W_t, t \geq 0\}$ olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$P(W_t = 0) = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$

$$P(W_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(W_t = 2) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!}\right], \tag{4.10}$$

$$P(W_t = 3) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_2 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!}\right],$$

$$P(W_t = 4) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2(\lambda_2 t)^1}{2!\,1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_3 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!}\right],$$

$$\vdots$$

Burada, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ biçimindedir.

Örnek (4-2). $Y_j^{(i)}$, $j = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenleri aynı θ parametreli geometrik dağılımlı ve λ_i, $i = 1, 2, 3$ parametreli $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, 3$ homojen Poisson süreçleri bağımsız olsun. Buna göre Eşitlik (4.1)'de verilen süreç geometrik-Poisson ya da Pólya–Aeppli süreci olarak adlandırılmaktadır [34]. Geometrik-Poisson süreçlerinin toplamını gösteren $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecinde, $i = 3$ için, W_t raslantı değişkenine ait olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(W_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

$$P(W_t = 1) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(W_t = 2) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!}\right], \tag{4.11}$$

$$P(W_t = 3) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_2 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!}\right],$$

$$P(W_t = 4) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2(\lambda_2 t)^1}{2!\,1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_3 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!}\right],$$

$$\vdots$$

Burada, $\lambda_j = \lambda\theta(1-\theta)^j$, $j = 1,2,3,...$ ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ biçimindedir.

Örnek (4-3). $Y_j^{(i)}$, $j = 1, 2, ...$, raslantı değişkenleri aynı μ parametreli Poisson dağılımlı ve λ_i, $i = 1, 2, 3$ parametreli $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, 3$, homojen Poisson süreçleri bağımsız olsun. Buna göre, Eşitlik (4.1), Poisson-Poisson (Neyman A Tipi) süreci olarak adlandırılmaktadır [35]. Neyman A tipi süreçlerin toplamını gösteren $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecinde, $i = 3$ için, W_t raslantı değişkenine ait olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(W_t = 0) = e^{-\lambda t(1-\mu)},$$

$$P(W_t = 1) = e^{-\lambda t(1-\mu)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(W_t = 2) = e^{-\lambda t(1-\mu)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!} \right], \tag{4.12}$$

$$P(W_t = 3) = e^{-\lambda t(1-\mu)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(W_t = 4) = e^{-\lambda t(1-\mu)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^1}{2!\,1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_3 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!} \right],$$

Burada, $\lambda_j = \lambda e^{-\mu} \mu^j / j!$, $j = 1,2,3,...$ ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ biçimindedir.

4.3. Bağımsız Birleşik Poisson Süreçlerinin Toplamının Moment Üreten ve Ortak Dağılım Fonksiyonları

$\{W_t, t \geq 0\}$ sürecinde $W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + ... + X_t^{(n)}$, ve $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, ..., X_t^{(n)}$, λ_j parametreli bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, ..., X_t^{(n)}$ raslantı değişkenlerinin dağılım fonksiyonları F_j olmak üzere, W_t'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{W_t}(w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(w) \ , \quad \lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad (4.13)$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek (4-4): Bir sigorta şirketinde n tane bağımsız sigorta poliçe türleri olduğunu varsayalım. Her sigorta poliçesi birleşik Poisson sürecine sahip olsun. $W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + ... + X_t^{(n)}$, t zamanına dek her bir sigorta poliçesinden sigorta şirketine bildirilen toplam hasar büyüklüğünü göstersin. Eşitlik (4.13)'ten yararlanılarak W_t'nin λ parametresi ile birleşik Poisson sürecine uyduğu söylenebilir.

Benzer olarak, $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecine ait moment üreten fonksiyon $Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)}$, …, $Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin kesikli ya da sürekli raslantı değişkenleri olması durumunda elde edilebilir. $Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)}, \ldots, Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenleri aynı dağılımlı olmak üzere, Eşitlik (4.1)'de verilen $X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$ için sürecine ait moment üreten fonksiyon,

$$M_{X_t^{(i)}}(z) = e^{\lambda_i t [M_Y(z) - 1]}$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre Eşitlik (4.2)'deki $\{W_t, t \geq 0\}$ sürecinde,

$$W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \ldots + X_t^{(n)},$$

olduğundan, W_t'nin moment üreten fonksiyonu,

$$M_{W_t}(z) = \prod_{j=0}^{n} e^{\lambda_j t\left[M_Y(z)-1\right]} = e^{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j t\left[M_Y(z)-1\right]} = e^{\lambda t\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda}\left[M_Y(z)-1\right]\right]} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Buna göre W_t, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ parametreli ortak Poison sürecine sahiptir.

Eşitlik (4.14) incelendiğinde, üstel ifadenin içerisinde yer alan $\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} M_Y(z)$ toplamı Y'nin moment üreten fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu nedenle, Y'nin dağılım fonksiyonu her bir $Y_j^{(1)}$, $Y_j^{(2)}$, …, $Y_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ raslantı değişkenlerinin ağırlıklı ortalaması olarak düşünebilir.

Örnek (4-5). Bir sigorta şirketinin iki bağımsız sigorta poliçesini tek bir türde birleştirdiğini varsayalım. Her bir portföy ortak Poisson sürecine sahip olsun. Birinci portföyde hasar sayısı λ_1 parametreli Poisson sürecine ve hasar büyüklüğü γ_1 parametreli üstel dağılıma sahip olsun. İkinci portföyde hasar sayısı λ_2 parametreli Poisson sürecine ve hasar büyüklüğü γ_2 parametreli üstel dağılıma sahip olsun. $W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$ şeklindeki poliçe türlerinin toplamının dağılımını inceleyelim.

Poliçe türlerinin toplamını gösteren W_t süreci $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ parametreli birleşik Poisson sürecine sahiptir. Buna göre, hasar büyüklüklerine ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_Y(y) = \frac{\lambda_1}{\lambda}(1 - e^{-\gamma_1 Y}) + \frac{\lambda_2}{\lambda}(1 - e^{-\gamma_2 Y}),$$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda_1}{\lambda}(\gamma_1 e^{-\gamma_1 Y}) + \frac{\lambda_2}{\lambda}(\gamma_2 e^{-\gamma_2 Y}).$$

Bu nedenle W_t'nin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{W_t}(w) &= P(W_t \le w) = P\left(\sum_{j=1}^{N_t} X_j \le w\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n} X_i \le w / N_t = n\right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} F^{(n)}(w) \end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılabilir. Burada $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ve $F^{(n)}(w) = P(X_1 + X_2 + ... + X_n \le w)$ 'dir.

Bu durumda t zamanına dek bu sigorta şirketine bildirilen toplam hasar büyüklüğüne ait beklenen değer ve varyans sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$E(W_t) = E\left(N_t^{(1)}\right)E\left(Y_j^{(1)}\right) + E\left(N_t^{(2)}\right)E\left(Y_j^{(2)}\right) = \frac{\lambda_1 t}{\gamma_1} + \frac{\lambda_2 t}{\gamma_2}, \tag{4.16}$$

$$\mathrm{Var}(W_t) = \frac{2\lambda_1 t}{\gamma_1^2} + \frac{2\lambda_2 t}{\gamma_2^2}. \tag{4.17}$$

t zamanına dek bu sigorta şirketine bildirilen toplam hasar büyüklüğü W_t'ye ait çarpıklık katsayısını W_t'nin kümülant (cumulant) üreten fonksiyonu yardımıyla bulalım. Burada $M_Y(z)$, iki portföy türünde sigorta poliçesinin üstel dağılımlı moment üreten fonksiyonlarının ağırlıklandırılmış değeridir. Buna göre,

$$M_Y(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - z} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - z} \tag{4.18}$$

ve

$$M_{W_t}(z) = e^{\lambda t (M_Y(z) - 1)} = e^{\frac{\lambda_1 tz}{\gamma_1 - z} + \frac{\lambda_2 tz}{\gamma_2 - z}} \tag{4.19}$$

biçimindedir. Burada,

$$\lambda t\left[M_Y(z) - 1\right] = \frac{\lambda_1 tz}{\gamma_1 - z} + \frac{\lambda_2 tz}{\gamma_2 - z} \tag{4.20}$$

olarak tanımlıdır. Kümülant üreten fonksiyon $\psi_{W_t}(z) = \ln M_{W_t}(z)$ biçiminde tanımlı olduğundan, W_t'ye ait kümülant üreten fonksiyonunu Eşitlik (4.19)'dan aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi_{W_t}(z) = \frac{\lambda_1 tz}{\gamma_1 - z} + \frac{\lambda_2 tz}{\gamma_2 - z}. \tag{4.21}$$

Eşitlik (4.21)'den W_t'ye ait çarpıklık katsayısı aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\gamma_{W_t} = \frac{\dfrac{6\lambda_1 t}{\gamma_1^3} + \dfrac{6\lambda_2 t}{\gamma_2^3}}{\left(\dfrac{2\lambda_1 t}{\gamma_1^2} + \dfrac{2\lambda_2 t}{\gamma_2^2}\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Burada $\psi_{W_t}^{(n)}(.)$, W_t'nin kümülant fonksiyonunun n. türevini göstermek üzere,

$$E\left[\left(W_t - E\left(W_t\right)\right)^3\right] = \psi_{W_t}^{(3)}(0) = \frac{6\lambda_1 t}{\gamma_1^3} + \frac{6\lambda_2 t}{\gamma_2^3}$$

olarak bulunmuştur.

5. BAĞIMLI GENEL ETKİLİ BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

$\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, ..., n$ homojen Poisson süreçleri, $Y_j^{(i)}$, kesikli ya da sürekli bağımsız, aynı dağılımlı ve $N_t^{(r)}$'den bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere,

$$X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)}, i = 1, 2, ..., n, \tag{5.1}$$

biçimindeki bağımlı birleşik Poisson süreçleri önem kazanmıştır. Bu bölümde, genel etkili Poisson süreçlerinden yola çıkarak bağımlı ortak genel etkili birleşik Poisson süreçleri tanımlanacak ve bu süreçlerin olasılık fonksiyonu elde edilecektir. Daha sonra bu süreçlerin toplamının olasılık üreten fonksiyonu ve beklenen değeri incelenecektir.

5.1. Bağımlı Genel Etkili Birleşik Poisson Süreci

Bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinde etki ya da şok, çok sayıda taşıtı içeren büyük bir trafik kazası, bir bölgede meydana gelen fırtına ya da patlama, bir hastanedeki tıbbi ilaç hatasının sonuçları gibi örneklendirilebilir.

$\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, ..., n$ homojen Poisson süreçleri, $Y_j^{(i)}$, kesikli ya da sürekli bağımsız, aynı dağılımlı ve $N_t^{(i)}$'den bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere, $i = 1, 2, 3$, için bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)}) = \left(\sum_{j=1}^{N_t^{(1)}} Y_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{N_t^{(2)}} Y_j^{(2)}, \sum_{j=1}^{N_t^{(3)}} Y_j^{(3)} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N_t^{(11)}+N_t^{(12)}+N_t^{(13)}+N_t^{(123)}} Y_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{N_t^{(22)}+N_t^{(12)}+N_t^{(23)}+N_t^{(123)}} Y_j^{(2)}, \sum_{j=1}^{N_t^{(33)}+N_t^{(13)}+N_t^{(23)}+N_t^{(123)}} Y_j^{(3)} \right) \quad (5.2)$$

Burada $N_t^{(uv)}$, $u,v=1,2,3$ için λ_{uv} parametreli homojen, bağımsız Poisson süreçleri ve $N_t^{(123)}$, λ_{123} parametreli homojen Poisson sürecidir. Ayrıca $N_t^{(i)}$, i=1,2,3, λ_i parametreli genel etkili Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_t^{(1)} = N_t^{(11)} + N_t^{(12)} + N_t^{(13)} + N_t^{(123)}, \quad (5.3)$$

$$N_t^{(2)} = N_t^{(22)} + N_t^{(12)} + N_t^{(23)} + N_t^{(123)}, \quad (5.4)$$

$$N_t^{(3)} = N_t^{(33)} + N_t^{(13)} + N_t^{(23)} + N_t^{(123)}. \quad (5.5)$$

Burada, $N_t^{(123)}$ sürecinin $N_t^{(1)}$, $N_t^{(2)}$ ve $N_t^{(3)}$ süreçlerinde yer alması bu üç süreç arasında bağımlılık yapısı oluşmasını sağlamaktadır. Ayrıca, λ_i, i=1,2,3, parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{123}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{22} + \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{123}, \quad (5.7)$$

$$\lambda_3 = \lambda_{33} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{123}. \quad (5.8)$$

Örnek (5-1). Bir sigorta şirketinin üç farklı poliçe türünün hasar sayısı ve büyüklüğünün modellenmesi ele alınsın. Bir doğal afetin sonucunda bu üç poliçe türüne ait hasar sayıları arasında bağımlılık oluşabileceğinden üç poliçe türünün beraber incelenmesi sigorta şirketi açısından daha doğru olacaktır. Bir deprem sonucunda ortaya çıkabilecek hasar sayılarına ait bağımlı Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

- $N_t^{(1)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen kasko sigorta poliçesine ait hasar sayısı,
- $N_t^{(2)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen konut sigorta poliçesine ait hasar sayısı,
- $N_t^{(3)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sağlık sigorta poliçesine ait hasar sayısı.

Eşitlik (5.3), (5.4) ve (5.5) dikkate alındığında, yukarıda tanımlanan bağımlı Poisson süreçlerini oluşturan bağımsız Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

- $N_t^{(11)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece kasko sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(22)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece konut sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(33)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen sadece sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(12)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem kasko hem konut sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(13)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem kasko hem sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı,
- $N_t^{(23)}$, t zamanına dek sigorta şirketine bildirilen hem konut hem de sağlık sigorta poliçesine sahip bireylerin hasar sayısı.

$N_t^{(123)}$ ise, her üç poliçeye sahip bireylerin deprem sonucunda sigorta şirketine t zamanına dek bildirilen hasarlarının sayısını göstermektedir. Ayrıca, sigorta poliçelerinde her j. hasara karşılık gelen hasar büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

- $Y_j^{(1)}$, sigorta şirketine bildirilen kasko sigorta poliçesine ait j. hasar büyüklüğü,
- $Y_j^{(2)}$, sigorta şirketine bildirilen konut sigorta poliçesine ait j. hasar büyüklüğü,
- $Y_j^{(3)}$, sigorta şirketine bildirilen sağlık sigorta poliçesine ait j. hasar büyüklüğü.

Buna göre, Eşitlik (5.2)'de tanımlanan sigorta poliçelerinin t zamanına dek toplam hasar miktarlarını gösteren $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)})$ bağımlı birleşik Poisson süreçleri hasar sayılarından dolayı bağımlıdır; diğer bir deyişle bağımlılık yapısını oluşturan $\left\{N_t^{(123)}, t \geq 0\right\}$ süreci genel etkili homojen Poisson sürecidir.

5.2. Bağımlı Genel Etkili Birleşik Poisson Sürecinin Ortak Olasılık Üreten Fonksiyonu

$Y_j^{(i)}$, i=1,2,3 raslantı değişkenleri kesikli olmak üzere, Eşitlik (5.2)'de verilen bağımlı genel etkili birleşik Poisson sürecinin ortak olasılık üreten fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
g_{X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)}}(s_1, s_2, s_3) &= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty}\sum_{k_3}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j^{(1)} = k_1, \sum_{j=1}^{N_t} Y_j^{(2)} = k_2, \sum_{j=1}^{N_t} Y_j^{(3)} = k_3\right) s_1^{k_1} s_2^{k_2} s_3^{k_3} \\
&= P(N_t = 0) + P(N_t = 1) g_{Y^{(1)}}(s_1) g_{Y^{(2)}}(s_2) g_{Y^{(3)}}(s_3) \\
&\quad + P(N_t = 2)\left[g_{Y^{(1)}}(s_1)\right]^2 \left[g_{Y^{(2)}}(s_2)\right]^2 \left[g_{Y^{(3)}}(s_3)\right]^2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

olarak yazılabilir. N_t raslantı değişkeninin olasılık üreten fonksiyonunun,

$$
g_{N_t}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N_t = i) s^i = e^{\lambda t(s-1)}
\tag{5.10}
$$

olduğu düşünülerek, Eşitlik (5.9)'dan,

$$g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(s_1,s_2,s_3) = g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[g_{Y^{(1)}}(s_1), g_{Y^{(2)}}(s_2), g_{Y^{(3)}}(s_3)\right] \qquad (5.11)$$

$$= e^{(A+B+C)}$$

elde edilir. Burada, A, B ve C gösterim kolaylığı açısından aşağıda verildiği biçimde tanımlanmıştır:

$$A = \sum_{i=1}^{3}(\lambda_{ii}t)\left[g_{Y^{(i)}}(s_i) - 1\right], \qquad (5.12)$$

$$B = \sum_{i<k}(\lambda_{ik}t)\left[g_{Y^{(i)}}(s_i)g_{Y^{(k)}}(s_k) - 1\right], \qquad (5.13)$$

$$C = (\lambda_{123}t)\left[g_{Y^{(1)}}(s_1)g_{Y^{(2)}}(s_2)g_{Y^{(3)}}(s_3) - 1\right]. \qquad (5.14)$$

$Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin aynı μ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olması durumunda özel olarak Eşitlik (5.11)'de verilen ortak olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[g_{Y^{(1)}}(s_1), g_{Y^{(2)}}(s_2), g_{Y^{(3)}}(s_3)\right] = g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[e^{\mu(s_1-1)}, e^{\mu(s_2-1)}, e^{\mu(s_3-1)}\right]$$

$$= e^{\lambda_{11}t(e^{\mu(s_1-1)}-1)+\lambda_{22}t(e^{\mu(s_2-1)}-1)+\lambda_{33}t(e^{\mu(s_3-1)}-1)}$$

$$+e^{\lambda_{12}t\left[(e^{\mu(s_1-1)})(e^{\mu(s_2-1)})-1\right]+\lambda_{13}t\left[(e^{\mu(s_1-1)})(e^{\mu(s_3-1)})-1\right]+\lambda_{23}t\left[(e^{\mu(s_2-1)})(e^{\mu(s_3-1)})-1\right]} + e^{\lambda_{123}t\left[(e^{\mu(s_1-1)}-1)(e^{\mu(s_2-1)}-1)(e^{\mu(s_3-1)}-1)\right]}$$

$Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin aynı p parametresi ile geometrik dağılımına sahip olması durumunda ise, Eşitlik (5.11)'de verilen ortak olasılık üreten fonksiyon,

$$g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[g_{Y^{(1)}}(s_1),g_{Y^{(2)}}(s_2),g_{Y^{(3)}}(s_3)\right]=g_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[\left(\frac{q}{1-ps_1}\right),\left(\frac{q}{1-ps_2}\right),\left(\frac{q}{1-ps_3}\right)\right]$$

$$=e^{\lambda_{11}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_1}\right)-1\right]+\lambda_{22}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_2}\right)-1\right]+\lambda_{33}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_3}\right)-1\right]}$$

$$+e^{\lambda_{12}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_1}\right)\left(\frac{q}{1-ps_2}\right)-1\right]+\lambda_{13}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_1}\right)\left(\frac{q}{1-ps_3}\right)-1\right]+\lambda_{23}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_2}\right)\left(\frac{q}{1-ps_3}\right)-1\right]}+e^{\lambda_{123}t\left[\left(\frac{q}{1-ps_1}\right)\left(\frac{q}{1-ps_2}\right)\left(\frac{q}{1-ps_3}\right)-1\right]}$$

olur.

Ayrıca, $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenleri kesikli ya da sürekli olmak üzere, Eşitlik (5.2)'de verilen bağımlı genel etkili birleşik Poisson sürecinin ortak moment üreten fonksiyonunu,

$$M_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(z_1,z_2,z_3)=M_{N_t^{(1)},N_t^{(2)},N_t^{(3)}}\left[M_{Y^{(1)}}(z_1),M_{Y^{(2)}}(z_2),M_{Y^{(3)}}(z_3)\right] \qquad (5.15)$$

$$=e^{(A+B+C)}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada, A, B ve C aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$A=\sum_{i=1}^{3}(\lambda_{ii}t)\left[M_{Y^{(i)}}(z_i)-1\right],$$

$$B=\sum_{i<k}(\lambda_{ik}t)\left[M_{Y^{(i)}}(z_i)M_{Y^{(k)}}(z_k)-1\right],$$

$$C=(\lambda_{123}t)\left[M_{Y^{(1)}}(z_1)M_{Y^{(2)}}(z_2)M_{Y^{(3)}}(z_3)-1\right].$$

5.3. Bağımlı Genel Etkili Birleşik Poisson Sürecinin Beklenen Değeri

Bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin çok değişkenli momentleri de elde edilebilir. Buna göre, bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerine ait beklenen değer,

$$E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right)=\frac{\partial^3 g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(s_1,s_2,s_3)}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}\bigg|_{s_1=s_2=s_3=1} \tag{5.16}$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eşitlik (5.11), Eşitlik (5.16)'da yerine yazıldığında, $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, bağımsız, aynı dağılımlı ve $N_t^{(i)}$'den bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere,

$$E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right)=\lambda_{123}tE\left(Y_j^{(1)}\right)E\left(Y_j^{(2)}\right)E\left(Y_j^{(3)}\right) \tag{5.17}$$

olarak bulunur. Eşitlik (5.17) incelendiğinde, üç bağımlı genel etkili birleşik Poisson sürecine ait beklenen değerin $\{N_t^{(123)}, t \geq 0\}$ sürecinin parametresi olan λ_{123} ve $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin beklenen değerlerine bağlı olduğu görülmektedir.

$Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin aynı μ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olması durumunda $E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right)$ beklenen değeri Eşitlik (5.17)'den,

$$E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right)=\lambda_{123}t\mu^3$$

olarak yazılabilir. Burada $E\left(Y_j^{(i)}\right)=\mu$'dür.

Benzer olarak, $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin aynı θ parametresi ile üstel dağılımlı olması durumunda bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri için $E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right)$ beklenen değeri Eşitlik (5.17)'den,

$$E\left(X_t^{(1)}X_t^{(2)}X_t^{(3)}\right) = \lambda_{123}t\frac{1}{\theta^3}$$

olur. Burada, $E\left(Y_j^{(i)}\right) = \frac{1}{\theta}$ biçimindedir.

5.4. Bağımlı Genel Etkili Birleşik Poisson Sürecinin Ortak Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (5.2)'de $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri olsun. $P(Y_j^{(1)} = k) = p_k$, $P(Y_j^{(2)} = k) = q_k$, $P(Y_j^{(3)} = k) = \gamma_k$, alınırsa, Eşitlik (5.2)'de verilen bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin ortak olasılık fonksiyonuna ulaşılabilir. $p_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(x_1, x_2, x_3)$ ortak olasılık fonksiyonuna ulaşmak için aşağıda verilen eşitliklerden yararlanılabilir:

$$P(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0, X_t^{(3)} = 0) = g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(0,\ 0,\ 0),$$

$$P(X_t^{(1)} = x_1, X_t^{(2)} = x_2, X_t^{(3)} = x_3) = \frac{\left.\dfrac{\partial^{x_1+x_2+x_3} g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(s_1,s_2,s_3)}{\partial s_1^{x_1}\partial s_2^{x_2}\partial s_3^{x_3}}\right|_{s_1=s_2=s_3=0}}{x_1!\ x_2!x_3!}, \tag{5.18}$$

$$x_1 = 1,\ 2,\ldots,\quad x_2 = 1,\ 2,\ldots\quad x_3 = 1,\ 2,\ldots$$

Buna göre, Eşitlik (5.11) ve Eşitlik (5.18)'den elde edilen bazı olasılıklar aşağıda verilmiştir:

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{11}tp_1+\lambda_{12}t\left(p_1q_0\right)+\lambda_{13}t\left(p_1\gamma_0\right)+\lambda_{123}t\left(p_1q_0\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{22}tq_1+\lambda_{12}t\left(p_0q_1\right)+\lambda_{23}t\left(q_1\gamma_0\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_1\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{33}t\gamma_1+\lambda_{13}t\left(p_0\gamma_1\right)+\lambda_{23}t\left(q_0\gamma_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_0\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{12}t\left(p_1q_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_1q_1\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{13}t\left(p_1\gamma_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_1q_0\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{23}t\left(q_1\gamma_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_1\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{123}t\left(p_1q_1\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=2, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{11}tp_2+\lambda_{12}t\left(p_2q_0\right)+\lambda_{13}t\left(p_2\gamma_0\right)+\lambda_{123}t\left(p_2q_0\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=2, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{22}tq_2+\lambda_{12}t\left(p_0q_2\right)+\lambda_{23}t\left(q_2\gamma_0\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_2\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=2\right)=e^K\left[\lambda_{33}t\gamma_2+\lambda_{13}t\left(p_0\gamma_2\right)+\lambda_{23}t\left(q_0\gamma_2\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_0\gamma_2\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=2, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=0\right)=e^K\left[\lambda_{12}t\left(p_2q_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_2q_1\gamma_0\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=2, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{13}t\left(p_2\gamma_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_2q_0\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=2, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{23}t\left(q_2\gamma_1\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_2\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=0, X_t^{(3)}=2\right)=e^K\left[\lambda_{13}t\left(p_1\gamma_2\right)+\lambda_{123}t\left(p_1q_0\gamma_2\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=0, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=2\right)=e^K\left[\lambda_{23}t\left(q_1\gamma_2\right)+\lambda_{123}t\left(p_0q_1\gamma_2\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=2, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{123}t\left(p_2q_1\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=2, X_t^{(3)}=1\right)=e^K\left[\lambda_{123}t\left(p_1q_2\gamma_1\right)\right],$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1, X_t^{(2)}=1, X_t^{(3)}=2\right)=e^K\left[\lambda_{123}t\left(p_1q_1\gamma_2\right)\right]. \tag{5.19}$$

Burada K,

$$K=\lambda_{11}t(p_0-1)+\lambda_{22}t(q_0-1)+\lambda_{33}t(\gamma_0-1)+\lambda_{12}t(p_0\,q_0-1)+\lambda_{13}t(p_0\gamma_0-1)+\lambda_{23}t(q_0\,\gamma_0-1)$$
$$+\lambda_{123}t(p_0\,q_0\,\gamma_0-1)$$
(5.20)

biçiminde tanımlıdır.

$p_{X_t^{(1)},X_t^{(2)},X_t^{(3)}}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ olasılıkları $x_1,x_2,x_3\geq 3,\ 4,...$ değerleri için de benzer biçimde MAPLE programında combinat [partition] komutu ile hesaplanabilir.

5.5. Bağımlı Genel Etkili Birleşik Poisson Süreçlerinin Toplamının Olasılık Üreten Fonksiyonu ve Beklenen Değeri

Eşitlik (5.2)'de verilen bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin toplamını gösteren $\{W_t,t\geq 0\}W_t$ sürecinde,

$$W_t=X_t^{(1)}+X_t^{(2)}+...+X_t^{(n)}, \tag{5.21}$$

biçiminde tanımlansın.

Buna göre, W_t raslantı değişkenine ait olasılık üreten fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$g_{W_t}(s)=g_{X_t^{(1)},X_t^{(2)}X_t^{(3)}}(s_1,s_2,s_3)=e^{[\lambda t(g_Y(s)-1)]}. \tag{5.22}$$

Burada ortak Y değişkenine ait ortak olasılık üreten fonksiyon,

$$g_Y(s)=\frac{\lambda_{11}}{\lambda}g_{Y^{(1)}}(s)+\frac{\lambda_{22}}{\lambda}g_{Y^{(2)}}(s)+\frac{\lambda_{33}}{\lambda}g_{Y^{(3)}}(s)$$

$$+\frac{\lambda_{12}}{\lambda}g_{Y^{(1)}+Y^{(2)}}(s)+\frac{\lambda_{13}}{\lambda}g_{Y^{(1)}+Y^{(3)}}(s)+\frac{\lambda_{23}}{\lambda}g_{Y^{(2)}+Y^{(3)}}(s)+\frac{\lambda_{123}}{\lambda}g_{Y^{(1)}+Y^{(2)}+Y^{(3)}}(s)$$

olarak elde edilmiştir ve

$$\lambda=\lambda_{11}+\lambda_{22}+\lambda_{33}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{123} \tag{5.23}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Eşitlik (5.22)'deki olasılık üreten fonksiyonun türevi alınarak, W_t'nin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

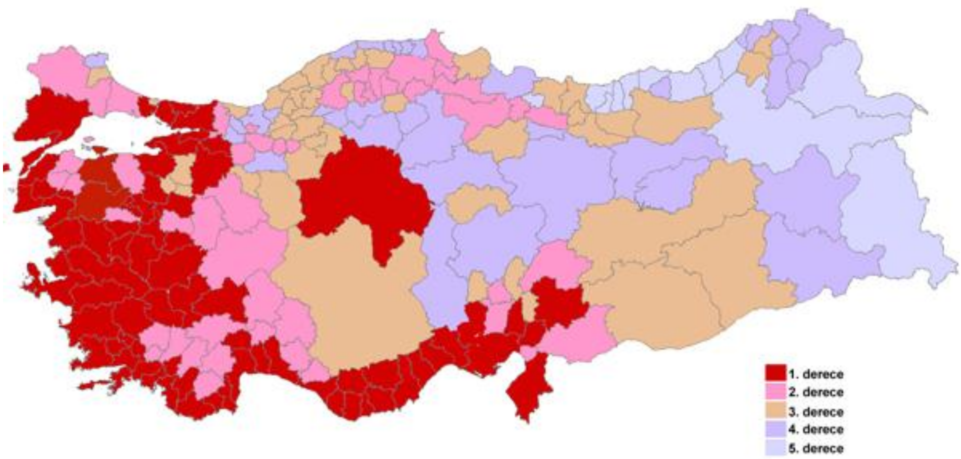
$$E(W_t)=\left[\lambda_{11}tE(Y_j^{(1)})+\lambda_{22}tE(Y_j^{(2)})+\lambda_{33}tE(Y_j^{(3)})+\lambda_{12}tE(Y_j^{(1)})E(Y_j^{(2)})+\lambda_{13}tE(Y_j^{(1)})E(Y_j^{(3)})\right.$$

$$\left.+\lambda_{23}tE(Y_j^{(2)})E(Y_j^{(3)})+\lambda_{123}tE(Y_j^{(1)})E(Y_j^{(2)})E(Y_j^{(3)})\right].$$

6. UYGULAMA

6.1. Türkiye’de Orman Yangınları

Ülkemiz ormanlarının büyük bir bölümü üzerinde bulunduğu coğrafya ve sahip olduğu iklim özellikleri sebebi ile yoğun bir yangın tehdidi altında bulunmakta ve her yıl çeşitli sayıda orman yangını sonucu önemli ölçüde orman varlığı zarar görmektedir. Kahramanmaraş’tan başlayıp Akdeniz ve Ege’yi takiben İstanbul’a kadar uzanan 1700 kilometrelik sahil bandının 160 km derinlikteki bölümü orman yangınları bakımından çok büyük hassasiyet göstermektedir [36]. Ülkemizdeki orman yangınlarının % 90’ı bu bölgede meydana gelmektedir. Şekil 6.1’de Türkiye’nin yangına hassaslık bölgelerine göre dağılım haritası verilmiştir:



Şekil 6.1. Yangına Hassaslık Bölgelerine Göre Dağılım Haritası [37]

Şekil 6.1. incelendiğinde, Türkiye’de en çok yangının Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgelerinde gözlenmiştir.

Büyük yangınların başlama saatlerine bakıldığında gün içerisinde nispi nemin en düşük, sıcaklığın da en yüksek olduğu öğle saatlerinde çıkması bilinen teorileri desteklemektedir. Ülkemizde orman yangınlarının %97’si, yaz kuraklıklarının yaşandığı Haziran-Ekim ayları arasında görülmektedir. Bunların %32’si öğle

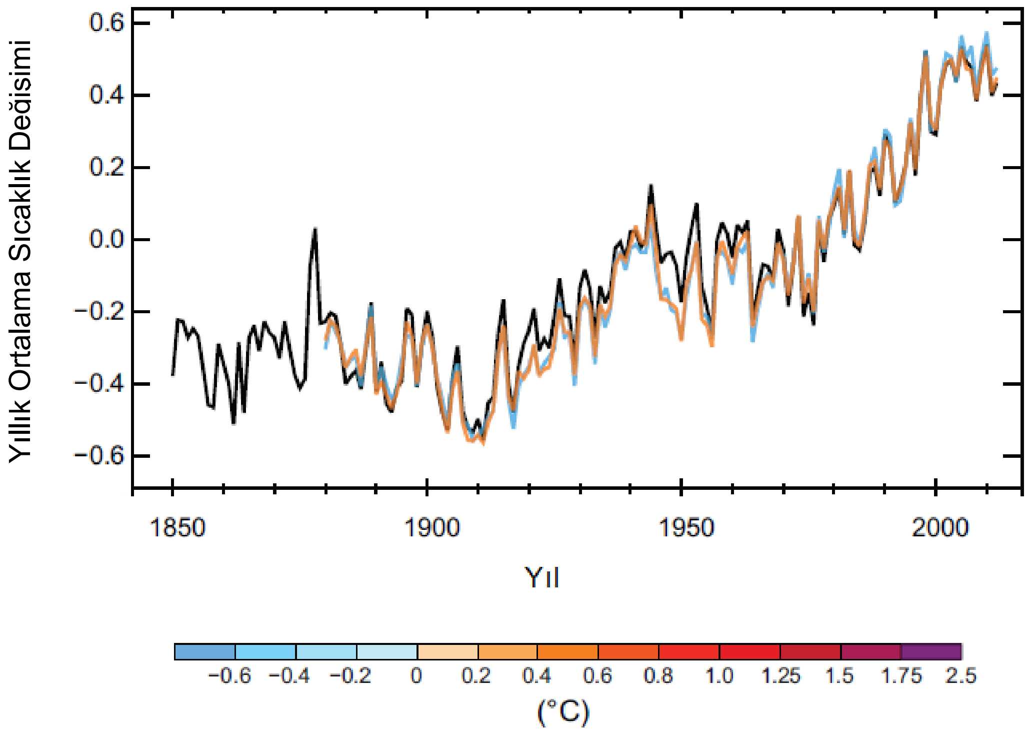
(12.00-15.00) saatleri arasında başlamaktadır. Ülkemizde hava sıcaklığının 25°C üzerine çıktığı, nispi nemin de %40'ın altına düştüğü meteorolojik koşullarda orman yangını çıkma riski çok yüksektir. Bu şartlar altında çıkan yangınlar rüzgârın da etkisiyle çok hızlı bir şekilde yayılmakta ve kontrol altına alınması güçleşmektedir [38]

Rüzgâr hızı ve yönü yangın davranışını etkileyen en önemli faktördür. Yangının yayılma oranı, alanı ve çevre değerlerine ait tahminler için geliştirilen modellerde çoğunlukla rüzgâr hızı esas değişken olarak alınmaktadır. Orman yangınları başlangıçta dairesel bir gelişme göstermelerine rağmen, daha sonra rüzgâr, eğim ve diğer çevresel faktörlerin etkisiyle elips veya başka bir şekil alırlar [39]. Rüzgâr hızının belli bir düzeyin üzerine çıkması durumunda, yanıcı madde özelliklerindeki farklılıkların yangın davranışı üzerine olan etkileri ortadan kalkmakta, rüzgâr hızı özellikle yangın yayılma oranını belirleyen tek faktör durumuna geçebilmektedir [40]. Rüzgâr hızı açısından 3,0 m/sn ile 8,8 m/sn arasında esen rüzgârların büyük orman yangını oluşturabildikleri gözlenmiştir. Türkiye'de tüm yangınların ortalama rüzgâr hızı değeri de 5,7 m/sn'dir.

6.2. Türkiye Ormanlarının İklim Değişikliğine Hassasiyeti

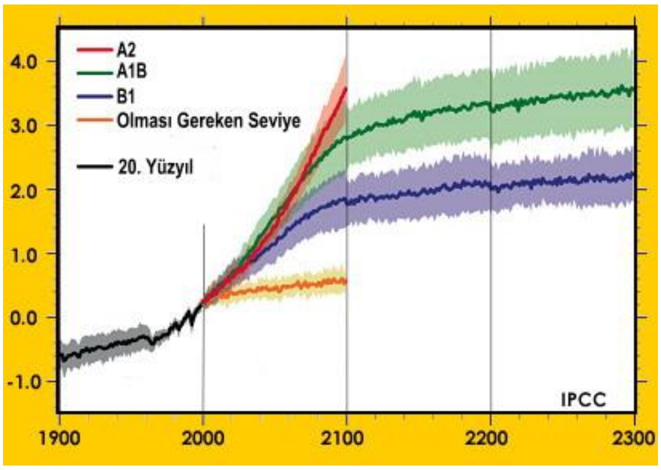
Küresel ısınma, sera gazı emisyonlarındaki artışlara bağlı olarak küresel ortalama yüzey sıcaklıklarında artışları ifade etmektedir. Küresel ısınmanın en önemli sebebi atmosferde sera etkisi yapan Karbondioksit (CO_2), Metan (CH_4), Nitrozoksit (NO_2) gibi sera gazı emisyonlarındaki hızlı artıştır. 1850'li yıllarda sanayileşme ile birlikte başlayan insan etkinlikleri sonucunda sera gazları (karbondioksit (CO2), metan (CH4) vb.) atmosferde birikerek atmosferin kimyasal özelliklerini etkilemekte uzun vadede ise küresel ölçekte ısınmaya ve iklim değişikliğine neden olmaktadır.

İklim değişikliğinin yeryüzünün birçok bölgesinde ormanlar ve bunun sonucunda da orman ürünleri üzerinde gözlenmeye başlanan olumsuz etkilerini arttırması beklenmektedir. Kısa zaman dönemindeki bu kadar hızlı sıcaklık değişiklikleri, ormanları ciddi düzeyde etkileyecektir [41]. İklim değişikliği, muhtemelen orman sağlığı ve verimliliğindeki değişikliklerle birlikte belirli ağaç türlerinin coğrafi dağılımında değişikliklere de neden olmaktadır. IPCC'nin (Hükümetler Arası İklim Değişikliği Paneli) [42] iklim öngörülerine göre, küresel ortalama yüzey sıcaklıkları 2100 yılına kadar 1,4 -5,8 °C arasında yükselebilecektir. Şekil 6.2' de 1850-2012 yılları arasında dünyadaki ortalama sıcaklık değişimi gösterilmiştir:



Şekil 6.2. 1850-2012 yılları arasında Dünyadaki ortalama sıcaklık değişimi

Şekil 6.2 incelendiğinde 2000'li yıllardan itibaren dünyadaki sıcaklık değişiminin artmakta olduğu söylenebilir. Ayrıca, 2000 ve sonrasındaki yıllardaki sıcaklık değişimi IPCC tarafından Şekil 6.3'teki gibi verilmiştir. Buna göre, 2000'li yıllar sonrasında yapılan sıcaklık tahminlerinden de iklim değişikliğine bağlı olarak sıcaklıkların arttığı gözlenmiştir.



Şekil 6.3. 2000 yılı sonrası Dünyadaki yıllık sıcaklık değişim tahmini

Ülkemiz özellikle küresel ısınmaya bağlı olarak görülebilecek orman yangınlarından etkilenecektir. Türkiye, subtropikal kuşakta yer almakta ve Akdeniz iklimi görülmektedir. Üç yanı denizlerle çevrili, ortalama yükseltisi 1100 metre civarında ve çok farklı topografik ve orografik yapıya sahip bir ülkedir [43]. Genel olarak Akdeniz iklim kuşağında yer almakla birlikte, birçok alt iklim tipinin de yaşandığı bir ülkedir. Türkiye, hem Akdeniz iklim bölgesiyle bağlantılı iklim özellikleri, hem de yüksek ve engebeli yeryüzü şekilleri nedeniyle, ormansızlaşmaya karşı çok duyarlıdır. Bu sebeplerden dolayı ve IPCC'nin raporuna göre, Türkiye iklim değişikliğinden en fazla etkilenebilecek ülkelerin başında gelmektedir [43].

6.2.1. Biyolojik Çeşitlilik Zenginliği

Türkiye'de yükselti farkının fazla olması ve değişik iklim tiplerinin mevcudiyeti bitki örtüsünün çeşitlenmesini beraberinde getirmiştir. Avrupa kıtasında bulunan 12.000 bitki türünün yaklaşık olarak 9.000'i ülkemizde bulunmaktadır ve bu bitkilerin de 3.000'i ülkemize has endemik bitkilerdir. İklim değişikliğinin olumsuz etkilerine maruz kalma sonucunda dünya üzerinde sadece ülkemizde bulunan bu endemik türler zarar görebilecektir. Ayrıca orman kaynaklarının içindeki biyolojik çeşitlilik, temiz su kaynakları ve yaban hayatı da zarar görebilecektir. Bu nedenle günümüzde iklim değişikliği etkisi ile çıkan yangın sayısı ve ağaç miktarı önem kazanmıştır [44].

6.2.2. Ormanların Yangına Hassas Alanlarda Bulunması

Ülkemiz orman varlığının yaklaşık olarak %60'ına tekabül eden 12 milyon hektarı yangına hassas Akdeniz iklim kuşağında yer almaktadır. Sıcak ve kurak devrenin uzunluğundaki ve şiddetindeki artışa bağlı olarak, orman yangınlarının sıklığı, etki alanı ve süresi artabileceği öngörüsünden hareketle Akdeniz, Ege ve Marmara bölgelerinde bulunan ve orman yangınlarına birinci derecede duyarlı olan yaklaşık 12 milyon ha orman alanında orman yangınları ile mücadele daha da önem kazanacaktır. Bu bölgelerde ağırlıklı olarak iğne yapraklı kızılçam ormanlarının bulunması; rüzgâr ve diğer faktörlerin etkisiyle yangınların daha geniş alanlara kısa sürede yayılmasına neden olabilecektir [45].

6.3. Türkiye Ormanlarının İstatistiksel Analizi

Ülkemizde orman yangınları ile ilgili düzenli kayıtlar, 1937 yılından itibaren tutulmaya başlanmıştır. Ülkemizde 1937-2013 yılları arasında 98.540 adet orman yangını çıkmış ve bu yangınlarda toplam 2.780.033 hektar orman alanı zarar görmüştür. Bu dönemde yıllık ortalama zarar gören saha miktarı 35.708 hektar olurken yangın başına düşen ortalama yanan alan miktarı ise 23,40 hektar olarak gerçekleşmiştir. 2003-2013 yılları arasında 18.442 adet orman yangını meydana gelmiş ve toplam 92.573 hektar orman alanı zarar görmüştür. Bu bilgiler doğrultusunda Türkiye'de meydana gelen orman yangınlarının incelenmesinin gerekli olduğu söylenebilir.

6.4. Bağımsız ve Bağımlı Genel Etkili Poisson Süreçlerinin Türkiye'deki Orman Yangınlarına Uygulanması

Genelde küresel iklim model simülasyonları kullanılarak hazırlanan IPCC'nin son raporundaki bilgilere göre, ülkemiz bu yüzyılın başlarında (2020-2029) değişik senaryolara göre, 0.5 ile 1.5° C arasında, yüzyılın sonlarında (2090-2099) ise yine değişik senaryolara göre, 2 ile 5°C arasında sıcaklık artışına maruz kalacaktır [46]. Yağışlara bakıldığında ise, en kötümser senaryolardan birine göre yüzyılın sonlarına doğru yaz yağışlarında ise yurt çapında önemli azalmaların olacağı tahmin edilmektedir. Bu nedenle, Türkiye'de meydana gelebilecek orman yangını sayısı ve bu yangınlarda yanan ağaç sayılarının tahmini önemlidir. Şekil 6.3'teki iklim değişikliği nedeniyle meydana gelen sıcaklık artışları dikkate alındığında 2000 yılı ve sonrasındaki yılların incelenmesi önem taşımaktadır. Bu nedenle, çalışmada, 2000-2013 yılları arasında Haziran-Ekim aylarında meydana gelen orman yangınları ve bu yangınlarda yanan ağaç sayıları dikkate alınmıştır. Bu amaçla, T.C. Orman Genel Müdürlüğü, TÜİK ve T.C. Çevre ve Orman Bakanlığı İstatistiklerinden elde edilen 2013 yılı verilerinden yararlanılmıştır.

Buna göre, Eşitlik (4.1) ve Eşitlik (4.2)'deki bağımsız birleşik Poisson süreçlerini kullanabilmek için gerekli Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

- $N_t^{(1)}$, t zamanına dek Akdeniz Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(2)}$, t zamanına dek Ege Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(3)}$, t zamanına dek Marmara Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı.

Ayrıca, bölgelerdeki her j. yangına karşılık gelen yanan ağaç sayısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

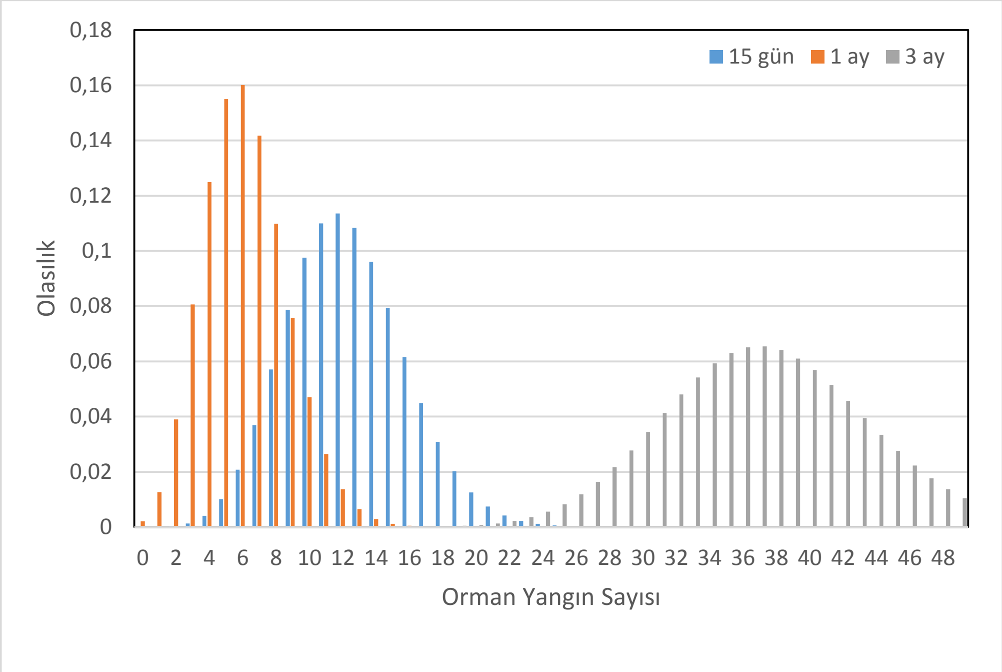
- $Y_j^{(1)}$, Akdeniz Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı,
- $Y_j^{(2)}$, Ege Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı,
- $Y_j^{(3)}$, Marmara Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı.

Eşitlik (4.2)'de tanımlanan t zamanına dek Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'nde toplam yanan ağaç sayılarının toplamı $W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$ ile gösterilebilir. Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'nde orman yangını sayılarının Homojen Poisson sürecine uyumunun incelemek amacıyla $\{N_t^{(u)}, t \geq 0\}$ süreçlerine ait ki-kare (χ^2) uyum iyiliği test sonuçları Çizelge 6.1'de verilmiştir:

Çizelge 6.1. Orman yangını sayılarına ait uyum iyiliği testi sonuçları

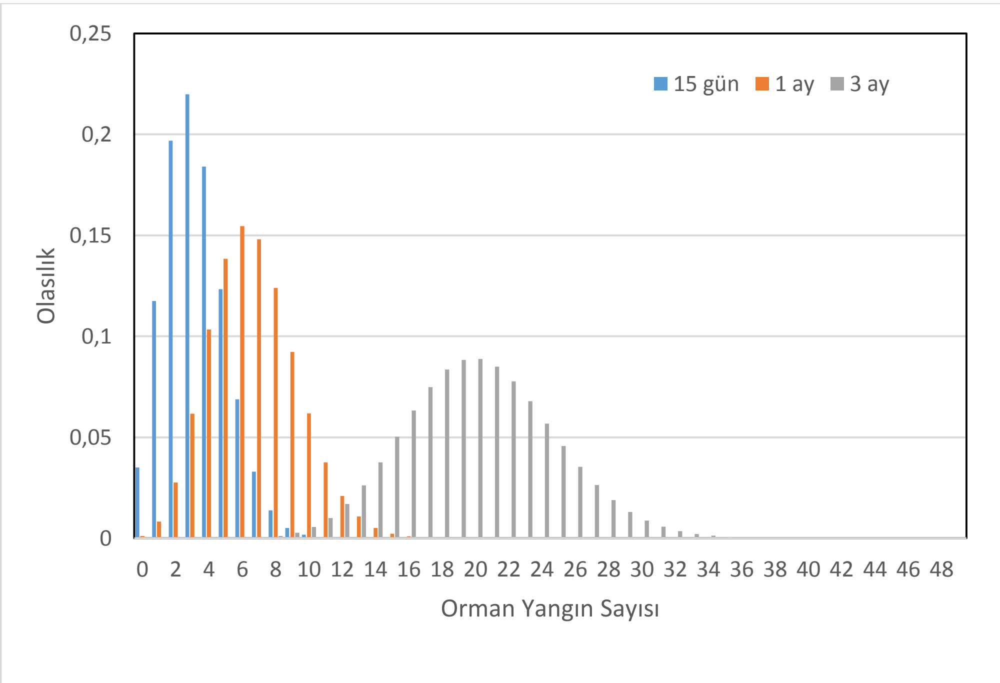
	Parametre	**Test İstatistiği**	**P-değeri**
$N_t^{(1)}$	$\lambda_1 = 12.4$	1.273	0.865
$N_t^{(2)}$	$\lambda_2 = 6.7$	0.411	0.985
$N_t^{(3)}$	$\lambda_3 = 9.3$	4.161	0.384

Bu çalışmada uyum iyiliği testinde yokluk hipotezi "H_0: Poisson dağılımı verilere uygundur." ve alternatif hipotez "H_a: Poisson dağılımı verilere uygun değildir." biçiminde kurulduğu için H_0 yokluk hipotezinin kabul edilmesi incelenen verilerin Poisson dağılımına uyduğu anlamına gelmektedir. Çizelge 6.1'e göre, $\{N_t^{(u)}, t \geq 0\}$ süreçlerinin, diğer bir deyişle, Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'ndeki orman yangını sayılarının homojen Poisson sürecine uyduğu 0.05 yanılma düzeyinde söylenebilir. Şekil 6.4'te Akdeniz Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı gösterilmiştir:



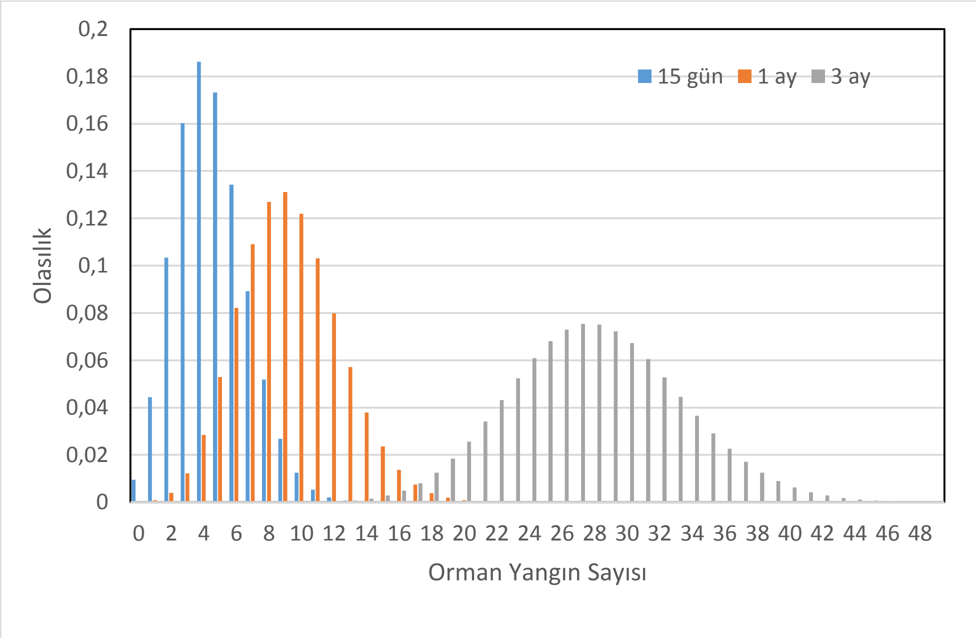
Şekil 6.4. Akdeniz Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı

Şekil 6.5'te ise Ege Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı verilmiştir:



Şekil 6.5. Ege Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı

Marmara Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı Şekil 6.6'da gösterilmiştir:



Şekil 6.6. Marmara Bölgesi'nde 15 gün, 1 ay ve 3 ay içerisinde meydana gelecek orman yangınlarının olasılık dağılımı

Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'ndeki yanan kızılçam ağaç sayılarını gösteren $Y_j^{(i)}$, i=1,2,3, raslantı değişkenlerinin uyduğu dağılımların belirlenmesi için χ^2 uyum iyiliği testi yapılmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 6.2'de verilmiştir:

Çizelge 6.2. Yanan kızılçam ağaç sayılarına ait uyum iyiliği testi sonuçları

	Parametre	**Test İstatistiği**	**P-Değeri**	**Dağılım**
$Y_j^{(1)}$	$\theta_1 = 0.022$	3.574	0.466	Geometrik Dağılım
$Y_j^{(2)}$	$\mu = 13.2$	2.986	0.671	Poisson Dağılımı
$Y_j^{(3)}$	$\theta_2 = 0.0378$	4.636	0.326	Geometrik Dağılım

Çizelge 6.2 için uyum iyiliği testinde yokluk hipotezi “H_0: İncelenen dağılım verilere uygundur.” ve alternatif hipotez “H_a: İncelenen dağılım verilere uygun değildir.” biçiminde kurulduğu için H_0 yokluk hipotezinin kabul edilmesi incelenen verilerin incelenen dağılımlara uyduğu anlamına gelmektedir. Buna göre, $Y_j^{(1)}$ ve $Y_j^{(3)}$ raslantı değişkenlerinin, diğer bir deyişle, Akdeniz ve Marmara Bölgeleri’ndeki yanan kızılçam ağacı sayılarının geometrik dağılıma uyduğu 0.05 yanılma düzeyinde söylenebilir. Benzer olarak, $Y_j^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin, Ege Bölgesi’nde yanan kızılçam ağaç sayılarının, Poisson dağılımına uyduğu 0.05 yanılma düzeyinde söylenebilir.

Eşitlik (4.16)’ya paralel olarak, $W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$’nin beklenen değeri, diğer bir deyişle, t zamanına dek üç bölgede ortalama yanan kızılçam ağaç sayısı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
E(W_t) &= E\left(N_t^{(1)}\right)E\left(Y_j^{(1)}\right) + E\left(N_t^{(2)}\right)E\left(Y_j^{(2)}\right) + E\left(N_t^{(3)}\right)E\left(Y_j^{(3)}\right) \\
&= \lambda_1 t E\left(Y_j^{(1)}\right) + \lambda_2 t E\left(Y_j^{(2)}\right) + \lambda_3 t E\left(Y_j^{(3)}\right) \\
&= \lambda_1 t \frac{1}{\theta_1} + \lambda_2 t \mu + \lambda_3 t \frac{1}{\theta_2} . \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

Eşitlik (6.1)’den elde edilen t zamanına dek üç bölgede ortalama yanan kızılçam ağaç sayıları Çizelge (6.3)’te verilmiştir:

Çizelge 6.3. Zamana bağlı olarak üç bölgede yanan toplam kızılçam ağaç sayılarının ortalaması

T	$E(W_t)$
15 gün	336.8681
1 ay	627.5351
5 ay	4600.906

Çizelge 6.3'e göre Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri beraber düşünüldüğünde, 15 gün içinde 337; 1 ay içinde 628 ve 5 ay içinde 4600 kızılçam ağacının yanması beklenmektedir.

Beşinci Bölüm'de incelenen bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin orman yangınları üzerindeki uygulamasını gösterebilmek için bu çalışmada genel etki ya da şok, Türkiye'deki iklim değişikliği olarak düşünülmüştür. İklim değişikliğine bağlı olarak sıcak ve kurak devrenin uzunluğundaki ve şiddetindeki artışa bağlı olarak, orman yangınlarının sıklığı, etki alanı ve süresi artabileceği öngörüsünden hareketle Akdeniz, Ege ve Marmara bölgelerinin incelenmesine karar verilmiştir. İklim değişikliği nedeniyle bu üç bölgedeki orman yangını sayıları arasında bağımlılık oluşabileceğinden üç bölgenin beraber incelenmesi daha doğru olacaktır.

Eşitlik (5.2)'de verilen bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerini kullanabilmek için gerekli Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

- $N_t^{(1)}$, t zamanına dek Akdeniz Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(2)}$, t zamanına dek Ege Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,

- $N_t^{(3)}$, t zamanına dek Marmara Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı.

Eşitlik (5.3), (5.4) ve (5.5) dikkate alındığında ise, bağımlı Poisson süreçlerini oluşturan bağımsız Poisson süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

- $N_t^{(11)}$, t zamanına dek sadece Akdeniz Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(22)}$, t zamanına dek sadece Ege Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(33)}$, t zamanına dek sadece Marmara Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(12)}$, t zamanına dek aynı anda hem Akdeniz hem de Ege Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(13)}$, t zamanına dek aynı anda hem Akdeniz hem de Marmara Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,
- $N_t^{(23)}$, t zamanına dek aynı anda hem Ege hem de Marmara Bölgesi'nde meydana gelen orman yangını sayısı,

$N_t^{(123)}$ ise, her üç bölgede aynı anda t zamanına dek meydana gelen orman yangını sayısını göstermektedir. Ayrıca, bölgelerdeki her j. yangına karşılık gelen yanan ağaç sayısı, bağımsız birleşik Poisson süreçlerine paralel olarak, aşağıdaki gibi tanımlansın:

- $Y_j^{(1)}$, Akdeniz Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı,
- $Y_j^{(2)}$, Ege Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı,
- $Y_j^{(3)}$, Marmara Bölgesi'ndeki j. yangında yanan kızılçam ağaç sayısı.

Buna göre, Eşitlik (5.1)'de tanımlanan t zamanına dek Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'nde toplam yanan ağaç sayıları $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)})$ bağımlı birleşik Poisson süreçleri ile gösterilebilir. Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'nde orman yangını sayılarının homojen Poisson sürecine uyumunu gösterebilmek için $\{N_t^{(u)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(uv)}, t \geq 0\}$ ve $\{N_t^{(123)}, t \geq 0\}$ süreçlerine ait ki-kare (χ^2) uyum iyiliği test sonuçları Çizelge 6.4'te verilmiştir:

Çizelge 6.4. Orman yangını sayılarına ait uyum iyiliği testi sonuçları

	Parametre	**Test İstatistiği**	**P-değeri**
$N_t^{(1)}$	12.4	1.273	0.865
$N_t^{(2)}$	6.7	0.411	0.985
$N_t^{(3)}$	9.3	4.161	0.384
$N_t^{(11)}$	5.2	5.866	0.209
$N_t^{(22)}$	3.23	2.241	0.860
$N_t^{(33)}$	4.08	5.021	0.217
$N_t^{(12)}$	4.1	2.338	0.673
$N_t^{(13)}$	2.7	1.172	0.882
$N_t^{(23)}$	3.6	1.061	0.900
$N_t^{(123)}$	3.2	1.706	0.746

Çizelge 6.4'te tüm raslantı değişkenleri için yokluk hipotezi "H_0: Poisson dağılımı verilere uygundur." ve alternatif hipotez "H_a: Poisson dağılımı verilere uygun

değildir.” biçiminde kurulmuştur. Çizelge 6.4’e göre, $\left\{N_t^{(u)}, t \geq 0\right\}$, $\left\{N_t^{(uv)}, t \geq 0\right\}$ ve $\left\{N_t^{(123)}, t \geq 0\right\}$ süreçlerinin, diğer bir deyişle, orman yangını sayılarının homojen Poisson sürecine uyduğu 0.05 yanılma düzeyinde söylenebilir. Çizelge 6.2’de Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri’ndeki yanan kızılçam ağacı sayılarının dağılımları, Akdeniz ve Marmara Bölgeleri için geometrik dağılım; Ege Bölgesi için ise, Poisson dağılımı olarak elde edilmişti. Buna göre, Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri’nde yanan toplam kızılçam ağaç sayıları, $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)})$ biçimindeki bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri ile tanımlanabilir.

Buna göre, Eşitlik (5.19) ve Eşitlik (5.20) kullanıldığında, beş ay içinde üç bölgede yanan toplam kızılçam ağaç sayılarına ait bazı olasılık değerleri Çizelge (6.5)’te verilmiştir:

Çizelge 6.5. Beş ay içinde üç bölgede yanan toplam kızılçam ağaç sayılarına ait bazı olasılık değerleri.

x_1	x_2	x_3	$P(X_t^{(1)} = x_1, X_t^{(2)} = x_2, X_t^{(3)} = x_3)$
1	**0**	**0**	0,5497535
0	**1**	**0**	0,0004220
0	**0**	**1**	0,7511517
1	**1**	**0**	0,0000107
1	**0**	**1**	0,0101660
0	**1**	**1**	0,0000163
1	**1**	**1**	0,0000003
2	**0**	**0**	0,5277488
0	**2**	**0**	0,0027854

0	**0**	**2**	0,7228118
2	**1**	**0**	0,0000105
2	**0**	**1**	0,0099503
0	**2**	**1**	0,0001074
1	**0**	**2**	0,0097825
0	**1**	**2**	0,0000157
2	**1**	**1**	0,0000003
1	**2**	**1**	0,0000019
1	**1**	**2**	0,0000003

$W_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$’nin beklenen değeri, diğer bir deyişle, t zamanına dek üç bölgede ortalama yanan kızılçam ağaç sayısı Eşitlik (5.24) ve Eşitlik (5.25)’ten elde edilmiş ve Çizelge 6.6’da verilmiştir:

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Birleşik Poisson süreci, $\{N_t, t \geq 0\}$ homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci ve Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, ortaya çıkan her olaya bağlanan raslantı değişkenleri olmak üzere, $X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$ biçiminde tanımlanmıştı. Bağımlı birleşik Poisson süreçleri ise, $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ homojen Poisson süreçleri, $Y_j^{(i)}$, kesikli ya da sürekli bağımsız, aynı dağılımlı ve $N_t^{(i)}$'den bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere, $X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ile gösterilmişti.

Çalışmanın Dördüncü Bölümü'nde elde edilen sonuçlara göre, bağımsız birleşik Poisson süreçlerinin ortak olasılık fonksiyonunun ve bu süreçlerin toplamının ortak olasılık fonksiyonunun yazılabileceği görüldü. Ayrıca, bağımsız birleşik Poisson süreçlerinin toplamının moment üreten ve ortak dağılım fonksiyonları da elde edilerek, teorik bir örnek ile açıklandı.

Çalışmanın Beşinci Bölümü'nde ise, bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri tanımlandı. Bu süreçlerin ortak olasılık üreten fonksiyonundan yararlanarak ortak olasılık fonksiyonuna ulaşıldı. Ayrıca, bu süreçlerin ortak beklenen değeri de elde edildi. Daha sonra, bağımlı birleşik Poisson süreçlerinin toplamının olasılık üreten fonksiyonu da bulundu.

Dünyada olduğu gibi ülkemizde ormanları tehdit eden en önemli unsurlardan birisi orman yangınlarıdır. Akdeniz coğrafyası ve iklim kuşağında yer alan ülkemiz ormanları, özellikle yaz aylarında yoğun bir yangın tehdidi altında bulunmakta ve her yıl çıkan çeşitli sayıda orman yangını sonucu önemli miktarda orman alanı zarar görmektedir. Ülkemizde yangın tehlikesi açısından en çok orman yangını Akdeniz, Ege ve Marmara Bölgeleri'nde ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, tez çalışmasının Altıncı Bölümü'nde bu bölgelerde iklim değişliğine bağlı olarak meydana gelen 2000-2013 yılları Haziran-Ekim ayları arasındaki orman yangın sayıları ve yanan alan büyüklükleri bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçleri ile incelendi.

Altıncı Bölüm'de elde edilen sonuçlara göre, bağımsız birleşik Poisson süreçleri ile bağımlı genel etkili birleşik Poisson süreçlerinin günlük yaşamdaki verilere uygulanabilir olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] E. Çınlar , Introduction to Stochastic Processes , Prentice-Hall, New Jersey, **1975.**

[2] N. Uzgören ve S. Elevli, Homojen olmayan Poisson süreci: bir maden makinesinin güvenilirlik analizi, *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi,* cilt 25, no. 4, pp. 827-837, **2010.**

[3] U. Kumar ve B. Klefsjö, Reliability analysis of hydraulic systems of lhd machines using the power law process model, *Reliability Engineering and System Safety,* cilt 35, pp. 217-224, **1992.**

[4] S. K. Majumdar, Study on reliability modeling of a hydraulic excavator system, *Quality and Reliability Engineering International,* cilt 11, pp. 49-63, **1995.**

[5] G. Pulcini, Modeling the failure data of a repairable equipment with bathtub type failure ıntensity, *Reliability Engineering and System Safety,* cilt 71, pp. 209-218, **2001.**

[6] K. Rao ve P. Prasad, Graphical methods for reliability of repairable equipment and maintenance planning, *Annual Reliability and Maintainability Symposium,* pp. 123-128, **2001.**

[7] D. Louit, R. Pascual ve A. Jardine, A practical procedure for the selection of timeto-failure models based on the assessment of trends in maintenance data, *Reliability Engineering & System Safety,* cilt 94, no. 10, pp. 1618-1628, **2009.**

[8] A. Marshall ve I. Olkin, A multivariate exponential distribution, Journal of the American Statistical Association, cilt 62, pp. 30-44, **1967.**

[9] A. Marshall ve I. Olkin, Families of multivariate distributions, *Journal of the*

American Statistical Association, cilt 83, pp. 834-841, **1988.**

[10] S. K. K. Kocherlakota, Bivariate Discrete Distributions, *Marcel Dekker*, NewYork, **1992.**

[11] F. Lindskog ve A. J. McNeil, Common Poisson shock models: applications to ınsurance and credit risk modelling, *ASTIN Bulletin,* cilt 33, pp. 209-238, **2001.**

[12] H. Cossette ve E. Marceau, The discrete-time model with correlated classes of business, *Insurance: Mathematics and Economics,* cilt 26, pp. 133-149, **2000.**

[13] Loisel, Finite-time ruin probabilities in the Markov-modulated multivariate compound Poisson model with common shocks, and impact of dependence, *Working paper, Cahiers de recherchede l'ISFA*, **2004.**

[14] K. Yuen, J. Guo ve X. Wu, On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model, *Mathematics And Economics,* cilt 38, no. 2, pp. 298-308, **2006.**

[15] B. Avanzi, L. C. Cassar ve B. Wong, Modelling Dependence in Insurance Claims Processes with Lévy Copulas, *ASTIN Bulletin,* cilt 41, no. 2, pp. 575-609, **2011.**

[16] R. Ambagaspitiya, On the distribution of a sum of correlated aggregate claims, *Insurance: Mathematics and Economics,* cilt 23, pp. 15-19, **1998.**

[17] J. Cummins ve L. Wiltbank, Estimating the total claims distribution using multivariate frequency and severity distributions, *Journal of Risk and Insurance,* pp. 377-403, **1983.**

[18] S. Wang, Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* p. 848–939, **1998.**

[19] H. Papageorgiou ve K. M. David, The structure of compounded trivariate

binomial distributions, *Biometrical Journal,* cilt 37, no. 1, pp. 81-95, **1995.**

[20] R. Vernic, Compound generalized Poisson distribution, *An. S¸t. Univ. Ovidius Constant¸,* cilt 9, no. 2, pp. 181-192, **2001.**

[21] G. Ozel ve C. Inal, On the probability function of the first exit time for generalized Poisson processes, *Pakistan Journal of Statistics,* cilt 28, no. 1, pp. 27-40, **2012.**

[22] G. Özel, A new method for evaluation of bivariate compound Poisson distribution for aggregate claims, *Gazi University Journal of Science,* cilt 24, no. 2, pp. 241-248, **2011.**

[23] C. İnal, Olasılıksal Süreçlere Giriş, Ankara: H. Ü. Yayınları, **1988.**

[24] D. Synder ve M. Miller, Random Point Processes in Time and Space, *Spring-Verlag*, New York, **1991.**

[25] S. Ross., Introduction to Probability Models, New York: Academic Press Inc., **2000.**

[26] R. D. Reiss, A Course on Point Process, New York: Springer-Verlag, **1993.**

[27] G. Özel, *Birleşik Poisson süreci üzerine bir çalışma,*Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, Ankara, **2005.**

[28] G. Özel, *Bağımlı Birleşik Poisson süreçleri üzerine bir çalışma,* Doktora Tezi Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, Ankara, **2009.**

[29] J. Dhaene ve M. Denuit, The safest dependence structure among risks, **1999.**

[30] C. D., Selected statistical papers of Sir David Cox: design of ınvestigations, *Statistical Methods And Applications,* Cilt 1, **2006.**

[31] H. Bühlmann, Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: recurson or fast fourier transform, Scandinavian Actuaria, **1984.**

[32] P. Heckman Ve G. Meyers, The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions, *Proceedings Of The Casualty Actuarial Society*, **1983.**

[33] J. Robertson, The computation of aggregate loss distributions, *Proceedings Of The Casualty Actuarial Society Lxxıx,* Pp. 57-133, **1992.**

[34] G. Nuel, Waiting time distribution for pattern occurrence in a constrained sequence: an embedding markov chain approach, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science,* Cilt 10, No. 3, **2008.**

[35] B. E. A. Saleh Ve M. C. Teich, Statistical properties of a nonstationary Neyman-Scott Cluster process, *IEEE Trans. Inform. Theory It,* Cilt 29, Pp. 939-941, **1983.**

[36] Ç. Elmas Ve Y. Sönmez, Veri birleştirme tabanlı orman yangını önleme ve yönetim sistemi, *Politeknik Dergisi,* Cilt 11, No. 2, Pp. 99-108, **2008.**

[37] Orman Genel Müdürlüğü: http://web.ogm.gov.tr/,**2014.**

[38] A. Bekereci Ve M. A. Erkan, 5 Nisan 2000 Tarihinde ülkemizde meydana gelen orman yangınlarının meteorolojik analizi, *Atg Konferans Dmi Yayın No:2004/03,* **2004.**

[39] M. E. Akkaş, Büyük orman yangınlarının meteorolojik veriler ışığında incelenmesi, *Teknik Bülten No: 36,* **2008.**

[40] E. Bilgili, Ö. Küçük Ve B. Sağlam, Yangın davranışının tahmini ve yangınlarla mücadeledeki önemi, *Kastamonu Orman Fakültesi Dergisi,* Cilt 2, No. 2, **2002.**

[41] K. Öztürk, Küresel iklim değişikliği ve türkiye'ye olası etkileri, *G.Ü. Gazi*

Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 22, No. 1, Pp. 47-65, **2002.**

[42] IPCC 2013, Working Group I Contribution To The Ipcc Fifth Assessment Report, http://www.climatechange2013.org ,**2013.**

[43] Çevre Ve Orman Bakanlığı, http://www.iklim.cevreorman.gov.tr/iklim.htm ,**2014.**

[44] Orman Genel Müdürlüğü, http://www.dsi.gov.tr/docs/iklim-degisikligi/turkiye_ormanlarinin_iklim_degisikligi_baglaminda_ozel_kosullari.pdf?sfvrsn=2 , **2014.**

[45] H. Kaptan, Orman yangınlarının topraktaki ısı iletimi ve nem miktarına etkisi, *Ksü Doğa Bil. Der.,* No. Özel Sayı, Pp. 201-271, **2012.**

[46] IPCC 2013, Working Group I Contribution To The Ipcc Fifth Assessment Report, Climate Change 2013: The Physical Science Basis, Summary For Policymakers. Geneva: Ipcc Secretariat.,http://www.climatechange2013.org ,**2014.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Tanyeli Güneyligil

Doğum Yeri: Gaziantep

Medeni Hali: Bekar

E-posta: tanyeliguneyligil@windowslive.com

Adresi: Emek mah. 24. Sokak 12/1 Çankaya Ankara

Eğitim

Lise: Gaziantep Kolej Vakfı Fen Lisesi

Lisans: Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İnglizce- KPDS 65 puan

İş Deneyimi

Ocak 2013-Mayıs 2014 TUSAŞ –Türk Havacılık ve Uzay Sanayii A.Ş.(TAI-THALES)- Meltem 2 Projesi Supply Chain Ofisi

Ekim 2012 - Aralık 2012 UDA Danışmanlık – İstatistik Uzmanı

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar