

**KARESEL OLUMSALLIK TABLOLARINDA SİMETRİK
OLMAYAN MODELLER**

**NON-SYMMETRIC MODELS FOR SQUARE
CONTINGENCY TABLES**

Gökçen Efendioğlu

PROF. DR. Tülay SARAÇBAŞI

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2015

Gökçen EFENDİOĞLU' nun hazırladığı "**Karesel Olumsuzluk Tablolarında Simetrik Olmayan Modeller**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

Başkan

.....

Prof. Dr. Tülay SARAÇBAŞI

Danışman

.....

Doç. Dr. Derya ÖZTUNA

Üye

.....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/01/2015

Gökçen EFENDİOĞLU

ÖZET

KARESEL OLUMSALLIK TABLOLARINDA SİMETRİK OLMAYAN MODELLER

GÖKÇEN EFENDİOĞLU

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. TÜLAY SARAÇBAŞI

OCAK 2015, 62 Sayfa

Kategorik değişkenlerin birleşik dağılımı olumsuzluk tabloları ile özetlenir. Karesel olumsuzluk tabloları satır ve sütun değişkenlerinin düzey sayılarının eşit olduğu tablolardır. Karesel olumsuzluk tablo çözümlenmelerine konu olan veriler genellikle tekrarlı ölçümlerden ya da uzun süreli çalışmalardan elde edilir.

Bu çalışmanın amacı, karesel olumsuzluk tablolarının çözümlenmesinde simetri yapısı bozulduğu durumlarda uygulanabilecek modelleri tanıtmaktır. Çalışmada, simetri yapısında sapma gösteren modeller ve bu sapmaları ifade eden ölçümler tanımlanmıştır. Ayrıca tez çalışmasında simetri yapısı bozulduğu durum için uygulanabilecek yeni bir model önerilmiştir. Bütün bu modeller iki ayrı veri kümesine uygulanarak sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Karesel olumsuzluk tablosu, simetri yapısı, simetri yapısından sapma, marjinal homojenlik, marjinal heterojenlik

ABSTRACT

NON-SYMMETRIC MODELS FOR SQUARE CONTINGENCY TABLES

GÖKÇEN EFENDİOĞLU

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. TÜLAY SARACBASI

January 2015, 62 Pages

Joint distribution of categorical variables is summarized with contingency tables. Square contingency tables represent the equality of level of row and column variables. The data used for analysis of square contingency table is obtained from the repeated measures or longitudinal data surveys.

Purpose of this thesis is to introduce the models which are used in case of structure of symmetry is not hold. In this study, departure from the symmetry models and measurements which represent these departures are introduced. Additionally, we proposed a model which used in case of the structure of symmetry does not hold. All the above models are fitted to two different dataset and results are discussed.

Keywords: Square contingency table, structre of symmetry, departure from structre of symmetry, marginal homogeneity, marginal inhomogeneity

TEŞEKKÜR

Üniversite eğitimin boyunca beni destekleyen, yol gösteren, tez çalışmamın her aşamasıyla titizlikle ilgilenen, beni sabırla dinleyen ve çalışmama ışık tutan danışman hocam Prof. Dr. Tülay SARAÇBAŞI' na

Benim için çok önemli ve özel bir yere sahip olan, fikirleriyle çalışmamı destekleyen değerli hocam Doç. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY' a

Çalışmalarım esnasında göstermiş oldukları anlayış ve yardımları için arkadaşlarım Arş. Gör. Emrah ALTUN ve Arş. Gör. Nurbanu BURSA' ya

Özellikle meslek seçimim konusunda beni destekleyen ve bana her zaman güvenen babam Nusret EFENDİOĞLU' na

Öğrencilik hayatım boyunca ve çalışmam esnasında gösterdiği anlayış ve özveri için, hayatımdaki en büyük desteğim olan annem Suzan EFENDİOĞLU' na

içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	VI
KISALTMALAR.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Karesel Olumsuzluk Tabloları ve Özellikleri	3
2.1.1. Karesel Olumsuzluk Tablosu Çalışmaları	3
2.2. Uyum İyiliği Test İstatistikleri	6
2.3. Akaike Bilgi Kriteri	6
2.4. Odds Oranı	6
2.5. Karesel Olumsuzluk Tablolarında Simetri Yapısını İfade Eden Modeller	7
2.5.1. Tam Simetri Modeli (TS)	8
2.5.2. Yarı Simetri Modeli (YS)	9
2.5.3 Marjinal Homojenlik Modeli (MH)	9
2.5.4 Koşullu Marjinal Homojenlik Modeli (KMH)	10
2.5.5. Simetri Yapısını İfade Eden Modeller Arasındaki İlişki.....	11
3. KARESEL OLUMSALLIK TABLOLARINDA SİMETRİ YAPISINDAN SAPAN MODELLER.....	16
3.1. Asimetri Modelleri.....	16
3.1.1. Üçgen Asimetri Modeli (ÜA).....	16
3.1.2. Köşegen Asimetri Modeli (KA)	17
3.1.3. Sabit Uzaklık Asimetri Modeli (SUA).....	19

3.1.4. Odds Asimetri 1 Modeli (OA1)	20
3.1.5 Odds Asimetri II Modeli (OA2)	22
3.1.6. İki Oran Parametre Asimetri Modeli (2OPA)	23
3.2. Çarpık Simetri Modelleri	26
3.2.1. Tekdüze Çarpık Simetri Modeli (TÇS)	26
3.2.2. Köşegen Parametre Çarpık Simetri Modeli (KPÇS).....	26
3.2.3. Orta Değer Etkili Çarpık Simetri Modeli (OEÇS).....	27
3.3. Marjinal Heterojenlik Modeli (\overline{MH}).....	30
3.4. Koşullu Marjinal Heterojenlik Modeli ($\overline{KM̄H}$)	31
3.5. Marjinal Homojenlik Modelinden Sapma Ölçüleri	33
4. ÖNERİLEN MODEL	42
4.1. Koşullu Nokta Çarpık Simetri Modeli (KNÇS)	42
5. UYGULAMA	45
5.1. Uygulama 1	45
5.2. Uygulama 2	53
5.3 Sonuç ve Tartışma	57
KAYNAKLAR.....	60
ÖZGEÇMİŞ	62

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1. Karesel olumsuzluk tablosu çalışmaları.....	4
Çizelge 2.2. Karesel olumsuzluk tablosunun gösterimi	5
Çizelge 2.3. Simetri yapısının incelenmesi.....	12
Çizelge 2.4. Karesel tablo çözümlemesinde izlenen hipotezler	13
Çizelge 2.5. Asimetri Alt Modelleri.....	13
Çizelge 2.6. Çarpık Simetri Alt Modelleri	14
Çizelge 2.7. Asimetri alt modellerine ait literatür taraması.....	14
Çizelge 2.8. Çarpık simetri alt modellerine ait literatür taraması.....	15
Çizelge 3.1. Asimetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler ..	24
Çizelge 3.2. Asimetri modellerine ait çalışmalar	25
Çizelge 3.3. Çarpık simetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler	28
Çizelge 3.4. Çarpık simetri modellerine ait çalışmalar	29
Çizelge 3.5. 4×4 boyutlu karesel olumsuzluk tablosuna ait üst üçgen marjinal heterojenliği	36
Çizelge 3.6. 4×4 boyutlu karesel olumsuzluk tablosuna ait alt üçgen marjinal heterojenliği	37
Çizelge 4.1. 5×5 karesel olumsuzluk tablosu için KNÇS modelinin gösterimi.....	42
Çizelge 4.2. KNÇS modelinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler..	44
Çizelge 5.1. Eşlerin babaları için mesleki statülere ait veri kümesi.....	46
Çizelge 5.2. Simetri yapısını ifade eden modellerinin sd, G^2 ve p değerleri	47
Çizelge 5.3. Asimetri alt modellerinin sd, G^2 ve p değerleri.....	47
Çizelge 5.4. Çarpık simetri alt modellerinin sd, G^2 ve p değerleri.....	47
Çizelge 5.5. Marjinal heterojenlik modellerinin sd, G^2 ve p değerleri.....	48
Çizelge 5.6. Uygun bulunan modeller için AIC değerleri	48

Çizelge 5.7. KA modeli altında parametre tahminlerine ait eşitlik sonuçları	49
Çizelge 5.8. KA modeli için parametre tahminleri	49
Çizelge 5.9. Koşullu marjinal heterojenlik modeli için beklenen sıklıklar	50
Çizelge 5.10. \overline{KM} H modeli altında odds oranları	50
Çizelge 5.11. Alt ölçü 2.1' e ait eşitlik sonuçları	52
Çizelge 5.12. Alt ölçü 2.2' ye ait eşitlik sonuçları	52
Çizelge 5.13. Anne ve babaların eğitim düzeylerine ait veri kümesi	54
Çizelge 5.14. Simetri yapısını ve simetri yapısından sapmaları ifade eden modeller ile önerilen modelin sd, G^2 ve p değerleri	55
Çizelge 5.15. Uygun bulunan modeller için AIC değerleri	55
Çizelge 5.16. KNÇS modeli altında beklenen sıklıklar	56
Çizelge 5.17. KNÇS model parametreleri	56
Çizelge 5.18. 4x4 karesel olumsuzluk tablosu altında Δ^* parametresi için hesaplama sonuçları	58

KISALTMALAR

x_{ij}	i. satır j. sütuna ait gözlenen sıklık değeri
m_{ij}	i. satır j. sütuna ait beklenen sıklık değeri
p_{ij}	Deneğin i. satır j. sütunda olması olasılığı
G^2	Olabilirlik oran istatistiği
AIC	Akaike bilgi kriteri
sd	Serbestlik derecesi
θ_{ij}	Odds oranı
\hat{m}_{ij}	En çok olabilirlik tahminleri
TS	Tam simetri modeli
YS	Yarı simetri modeli
MH	Marjinal homojenlik modeli
KMH	Koşullu marjinal homojenlik modeli
ÜA	Üçgen asimetri modeli
KA	Köşegen asimetri modeli
SUA	Sabit uzaklık asimetri modeli
OA1	Odds asimetri 1 modeli
OA2	Odds asimetri 2 modeli
2OPA	İki oran parametre asimetri modeli
TÇS	Tekdüze çarpık simetri modeli

KPÇS	Köşegen parametre çarpık simetri modeli
OEÇS	Orta değer etkili çarpık simetri modeli
KS	Koşullu simetri modeli
SA	Satır faktör değişkeni
SÜ	Sütun faktör değişkeni
\overline{MH}	Marjinal heterojenlik modeli
$\overline{KM\overline{H}}$	Koşullu marjinal heterojenlik modeli
KNÇS	Koşullu nokta çarpık simetri modeli
Ψ	Marjinal homojenlik modelinden sapma ölçüsü 1
Υ	Marjinal homojenlik modelinden sapma ölçüsü 2

1. GİRİŞ

Birçok uygulamalı bilim dalında araştırmacılar, değişkenler arasındaki ilişki veya değişken düzeyleri arasındaki farklılığı incelemeyi amaçlar. Düzeyleri sözel olarak ifade edilebilen değişkenler kategorik veri olmakla beraber, düzeyleri sayısal olarak ifade edilebilen değişkenlerin alabileceği değerler sınıflandırılarak kategorik veri haline getirilebilir. Kategorik değişken, her bir gözlemin belirli bir kategoriye, yani sınıfa ait olduğu sınıflanabilen ve sıralanabilen özelliğe sahip değişkenlerdir. Bir örnek üzerinden açıklanacak olunursa, cinsiyet değişkeni kategorik bir değişken olmakla birlikte kategoriler arasında geçiş üstünlüğü olmaması nedeniyle sınıflanabilen kategorik değişken olarak tanımlanır. Eğitim seviyesi ise kategoriler arası geçişler mümkün olduğu için sıralanabilen kategorik değişken olarak tanımlanır.

Verilerin toplanması, düzenlenmesi ve çözümlenerek çeşitli kararların verilmesi ile ilgili bilim olan istatistik, başta sosyal bilimler olmak üzere pek çok bilim dalında geniş uygulama alanına sahiptir. İncelenen bir olayı etkileyen birden çok faktör olduğu düşünöldüğünde güncel yaşamda karşılaşılan problemleri çözümede olayı çok yönlü olarak ele alma zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayesinde veri düzenlemesi daha kolay ve anlaşılır hale gelmiştir.

Kategorik veri analizi ile ilgili yapılan çalışmalar oldukça fazladır. Özellikle tıp, sağlık bilimleri, biyometri, ekonomi, pazarlama ve sosyal bilimler gibi alanlar kategorik verilerin analizine ihtiyaç duyulan bilim dallarıdır.

Kategorik değişkenlerin birleşik dağılımı olumsallık tabloları ile özetlenir. Olumsallık tabloları iki ya da daha fazla kategorik değişkenin ortak sıklık dağılımıdır. Olumsallık tablolarında her değişken belirli sayıda düzeye sahiptir. Satır değişkeni düzey sayısı I , sütun değişkeni düzey sayısı I olmak üzere satır ve sütun değişkenlerinin aynı kriterlere göre sınıflandırıldığı bağımlı örneklem çalışmaları $I \times I$ boyutlu karesel tablo çözümlenmeleri ile yorumlanır. Karesel olumsallık tablo çözümlenmelerine konu olan veriler genellikle tekrarlı ölçümlerden ya da uzun süreli çalışmalardan elde edilir. Bu tür verilere sosyal araştırmalarda daha çok rastlanır.

Karesel olumsuzluk tablolarının çözümlenmesinde tam simetri, yarı simetri, marjinal homojenlik, koşullu simetri, köşegen parametre simetri modelleri gibi özel modeller kullanılmaktadır. Simetri yapısı bozulduğu durumlar için farklı modeller önerilmiştir. Bu modelleri simetrik olmayan modeller olarak tek başlık altında toplamak mümkündür. Araştırmacılar tarafından asimetri, çarpık simetri ve marjinal heterojenlik modelleri olarak adlandırılan model önerilerinde bulunulmuştur.

Tez çalışmasında sıralanabilir ve sınıflanabilir karesel olumsuzluk tablolarında simetrik olmayan modeller teorik yapısıyla birlikte ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu modellerin bilgisayar ortamındaki çözümlenmesi SPSS, SAS ve C++ programları aracılığıyla gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde kategorik veri analizi ve olumsuzluk tablolarından kısaca bahsedilerek çalışmanın amacı vurgulanmıştır. İkinci bölüm genel bilgilerdir. Bu bölümde olumsuzluk tabloları ve bu tabloların yorumlanmasından söz edilmiştir. Ayrıca üçüncü bölüme temel oluşturacak olan simetri yapısını ifade eden modeller tanıtılmış, bu modeller arasındaki ilişki ve daha sonra ifade edilecek olan modellere geçişler çizelgelerle gösterilmiştir. Üçüncü bölümde, karesel olumsuzluk tablolarında simetri yapısından sapan modeller ayrıntılı olarak incelenmiştir. Dördüncü bölümde önerilen yeni model tanıtılmış ve modele ilişkin tanımlamalar ifade edilmiştir. Beşinci bölüm uygulama bölümüdür. İki farklı veri kümesi üzerinde simetri, yarı simetri, marjinal homojenlik modelleri çözümlenerek simetrik olmayan model yapılarına geçiş sağlanmıştır. Araştırma amacına uygun olarak veri kümeleri için farklı yorumlara ulaşılmıştır. Sonuçları beşinci bölümün son kesiminde tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Karesel Olumsuzluk Tabloları ve Özellikleri

Olumsuzluk tabloları iki ya da daha fazla kategorik değişkenin ortak sıklık dağılımıdır. Bir olumsuzluk tablosu iki ya da daha fazla değişkenin düzeylerinin çapraz sınıflandırılması olarak da düşünülebilir. Bu nedenle olumsuzluk tablolarına çapraz tablolar da denilir. Belirtilen her bir çapraz sınıflandırılmış göze içinde gözlenen sıklıkların sayısı yazılır.

Satır ve sütun değişkenlerinin düzeylerinin aynı olduğu tablolar $I \times I$ boyutlu karesel olumsuzluk tablolarıdır. Karesel olumsuzluk tabloları aşağıda verilen durumlar ortaya çıktığında düzenlenir [1];

- ✓ Bir örneklemden bireylerin veya konuların iki benzer kategorik değişkene göre çaprazlanması durumunda düzenlenir. Örneğin, sağ ve sol göz görme dereceleri, sağ ve sol el güç düzeyleri gibi.
- ✓ Baba – oğul, karı – koca gibi eşleştirilmiş değişkenlerin sınıflandırıldığı durumlarda düzenlenir. Örneğin, dini görüş, göç, sosyal hareketlilik gibi.
- ✓ Bir örneklemden bireylerin veya konuların farklı zaman dilimlerinde aynı kritere göre sınıflandırıldığı durumlarda düzenlenir. Örneğin, siyasi parti sadakati, dini görüşe bağlılık gibi.
- ✓ Bir örneklemden yer alan bireylerin veya konuların herhangi bir özelliğe göre iki farklı değerlendirici tarafından birbirinden bağımsız şekilde derecelendirildiği durumlarda düzenlenir. Örneğin, iki farklı doktor tarafından aynı hastaların hastalık derecelerine göre ayrı ayrı değerlendirmesi gibi.

2.1.1. Karesel Olumsuzluk Tablosu Çalışmaları

Karesel olumsuzluk tablosu ile ilgili çalışmalar 1948 yılında başlamıştır ve günümüzde de devam etmektedir. Bu çalışmalardan bazıları kronolojik sıra ile Çizelge 2.1' de ifade edilmiştir.

Çizelge 2.1. Karesel olumsuzluk tablosu çalışmaları

Karesel Olumsuzluk Tablosu Çalışmaları		
1948	Bowker	Simetri modelinin önerilmesi
1955	Stuart	Marjinal homojenlik modelinin önerilmesi
1965	Caussinus	Yarı simetri modelinin bulunması
1969	Ireland Ku Kullback	Simetri ve marjinal homojenlik modellerinin beklenen sıklıklarına ait en çok olabilirlik tahminlerinin bulunması için yöntem önerilmesi
1972	Goodman	Bağımsızlık modelinin karesel tablolar üzerinde uygulanması
1978	McCullagh	Koşullu simetri modelinin bulunması
1979	Goodman	Köşegen parametre simetri modelinin tanımlanması
1983	Agresti	Doğrusal köşegen parametre simetri modelinin önerilmesi
1987	Tomizawa	İki oran parametre asimetri modelinin tanımlanması
1990	Yamagushi	Çarpık simetri modellerinin tanımlanması
2000 2001 2004	Lawal	Önerilen modellerin istatistiksel yazılım programlarında uygulanabilmesi için tasarım matrislerinin elde edilmesi

x_{ij} , i. satır j. sütunda gözlenen sıklık değeri olmak üzere $I \times I$ boyutlu karesel olumsuzluk tablosunun gösterimi Çizelge 2.2' de ifade edildiği gibidir;

Çizelge 2.2. Karesel olumsuzluk tablosunun gösterimi

Satır Değişkeni	Sütun Değişkeni				Toplam
	1	2	I	
1	x_{11}	x_{12}	x_{1I}	$x_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{2I}	$x_{2.}$
.
.
.
I	x_{I1}	x_{I2}	x_{II}	$x_{I.}$
Toplam	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.I}$	$x_{..}$

Çizelge 2.2.'de verilen değişkenlere ait eşitlikler;

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{..}} \quad , \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I p_{ij} = 1 \quad ,$$

$$x_{i.} = \sum_{j=1}^I x_{ij} \quad , \quad x_{.j} = \sum_{i=1}^I x_{ij}$$

(2.1)

$$p_{i.} = \frac{x_{i.}}{x_{..}} \quad , \quad p_{.j} = \frac{x_{.j}}{x_{..}} \quad , \quad \sum_{i=1}^I p_{i.} = \sum_{j=1}^I p_{.j} = 1$$

$$p_{ij/i.} = \frac{x_{ij}}{x_{i.}} \quad , \quad p_{ij/.j} = \frac{x_{ij}}{x_{.j}} \quad , \quad \sum_j p_{ij/i.} = \sum_j p_{ij/.j} = 1$$

şeklinde ifade edilir.

2.2. Uyum İyiliği Test İstatistikleri

I×I karesel olumsuzluk tablolarının modellere uyumu aşağıda verilen Pearson χ^2 ve G^2 test istatistikleri ile araştırılır.

Pearson χ^2 istatistiği;

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \frac{(x_{ij} - \hat{m}_{ij})^2}{\hat{m}_{ij}} \quad (2.2)$$

Olabilirlik oran istatistiği;

$$G^2 = 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I x_{ij} \cdot \log \frac{x_{ij}}{\hat{m}_{ij}} \quad (2.3)$$

2.3. Akaike Bilgi Kriteri

Akaike Bilgi Kriteri incelenen birden çok modele uyum gösteren tablolarda en iyi uyum gösteren modeli belirlemek için geliştirilmiş bir kriterdir. Akaike (1973) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir;

$$AIC = G^2 - 2sd \quad (2.4)$$

$sd =$ incelenen modele ait serbestlik derecesi

Tablo yapısına uyum gösteren modellerin her biri için G^2 ve sd ' ne göre AIC hesaplanır. En küçük AIC değerine sahip model en iyi model olarak kabul edilir [2].

2.4. Odds Oranı

Risk faktörlerinin hesaplanmasında sıkça kullanılan önemli bir parametre olan odds oranı, değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade etmek için olumsuzluk tablolarının 2×2 alt tablolarında hesaplanarak yorumlanır.

Karesel olumsuzluk tablolarında Odds oranının hesaplanması Eşitlik 2.5' de ifade edildiği gibidir;

$$\theta_{ij} = \frac{p_{ij} \times p_{i+1,j+1}}{p_{i,j+1} \times p_{i+1,j}} \quad i, j = 1, 2, \dots, I \quad (2.5)$$

Bağımsızlık eşitliği;

$$p_{ij} = p_{.i} p_{.j} \text{ dir.} \quad (2.6)$$

Eşitlik 2.5 ' de bağımsızlık eşitliği yerine konulursa;

$$\frac{(p_{.i} p_{.j}) \times (p_{i+1} p_{j+1})}{(p_{.i} p_{.j+1}) \times (p_{i+1} p_{.j})} = 1 \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir . İki değişken bağımsız ise odds oranı 1'e eşittir [2;3].

$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{n}$ eşitliğinden yola çıkarak odds oranının gözlenen sıklıklar cinsinden hesaplanması Eşitlik 2.8' de ifade edildiği gibidir;

$$\theta_{ij} = \frac{x_{ij} \times x_{i+1,j+1}}{x_{i,j+1} \times x_{i+1,j}} \quad i, j = 1, 2, \dots, I \quad (2.8)$$

2.5. Karesel Olumsuzluk Tablolarında Simetri Yapısını İfade Eden Modeller

Karesel olumsuzluk tablolarında çeşitli durumlar için simetrik yapıyı ifade eden modeller Tam Simetri Modeli, Yarı Simetri Modeli ve Marjinal Homojenlik Modelidir [4].

2.5.1. Tam Simetri Modeli (TS)

$I \times I$ boyutlu karesel olumsuzluk tablosunun ana köşegenine göre simetrik gözlemlere ait olasılıkların ya da beklenen sıklıkların eşitliğini test eden Tam Simetri Modeli (TS)' ne ait hipotez Eşitlik 2.9' da ifade edildiği gibidir [5].

$$H_{TS} : p_{ij} = p_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, I \quad (2.9)$$

p_{ij} : Herhangi bir deneğin i . satır j . sütunda yer alma olasılığı

Tam simetri modeli altında beklenen sıklıklara ilişkin en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 2.10' da verilmiştir.

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} & i \neq j \\ x_{ii} & i = j \end{cases} \quad (2.10)$$

Tam simetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{TS} = \frac{I(I-1)}{2}$ dir [6].

Tam simetri modeline ilişkin parametrelerin gözlemlere göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. TS gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan TS_{ij} elemanları tüm (i, j) ler için $k = |i - j|$ olmak üzere aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir [7];

$$TS_{ij} = \begin{cases} (k+1) - (i+1)\left(\frac{1}{2}i+1\right) + (I+3)(i+1) - 3 - 2I & i \leq j \\ (k+1) - (j+1)\left(\frac{1}{2}j+1\right) + (I+3)(j+1) - 3 - 2I & i > j \end{cases} \quad (2.11)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için TS matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

2.5.2. Yarı Simetri Modeli (YS)

Yamagushi (1990) tarafında tanımlanan, ana köşegenin bir tarafındaki gözelerden elde edilen odds oranlarının, köşegenin diğer tarafındaki gözelerden elde edilen odds oranlarına eşitliğini test eden Yarı Simetri Modeli (YS)' ne ait hipotez Eşitlik 2.12' de verilmiştir [2].

$$H_{YS} : p_{ij} = \alpha_j p_{ji} \quad i \neq j \quad (2.12)$$

Yarı simetri modeli altında beklenen sıklıklara ilişkin en çok olabilirlik tahminleri aşağıda verilen kısıtları sağlamalıdır:

$$\hat{m}_{i.} = x_{i.}, \quad i=1,2,\dots,I$$

$$\hat{m}_{.i} = x_{.i}, \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.13)$$

$$\hat{m}_{ij} + \hat{m}_{ji} = x_{ij} + x_{ji}, \quad i \neq j$$

Yarı simetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{YS} = \frac{(I-1)(I-2)}{2}$ dir [6].

2.5.3 Marjinal Homojenlik Modeli (MH)

Satır ve sütun değişkenlerinin aynı düzeylerine ait marjinal olasılıklarının birbirine eşitliğini test eden Marjinal Homojenlik Modeli (MH) Stuart (1955) tarafından önerilmiştir. MH' ne ait hipotez Eşitlik 2.14' de ifade edildiği gibidir. MH modeline ait farklı gösterimler Eşitlik 2.15 ve 2.16' da ifade edildiği gibidir [8;9];

p_{ij} : Herhangi bir deneğin i . satır j . sütunda yer alma olasılığı

$$H_{MH} : p_{i.} = p_{.j} \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.14)$$

$$p_{i.} = \sum_{t=1}^I p_{it}$$

$$p_{.j} = \sum_{s=1}^I p_{sj}$$

X : satır değişkeni,

Y : sütun değişkeni

F_i^X ve F_i^Y : birikimli marjinal olasılıklar

$$H_{MH} : \Pr(X = i) = \Pr(Y = i) \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.15)$$

$$H_{MH} : F_i^X = F_i^Y, \quad i=1,2,\dots,I-1 \quad (2.16)$$

$$F_i^X = \Pr(X \leq i) = \sum_{k=1}^i p_{.k} \quad i=1,2,\dots,I-1$$

$$F_i^Y = \Pr(Y \leq i) = \sum_{k=1}^i p_{.k} \quad i=1,2,\dots,I-1$$

Marjinal homojenlik modelinin serbestlik derecesi $(I - 1)$ dir.

2.5.4 Koşullu Marjinal Homojenlik Modeli (KMH)

Koşullu satır ve sütun marjinal dağılımlarının eşitliğini test eden Koşullu Marjinal Homojenlik Modeline (KMH) ait hipotez Eşitlik 2.17' de ifade edildiği gibidir. KMH modeline farklı gösterimler Eşitlik 2.18 ve 2.19' da ifade edilmiştir [9];

p_{ij}^* : ilgili gözlemin i. satır j. sütunda yer alma koşullu olasılığı olmak üzere,

$$H_{KMH} : p_{i.}^* = p_{.i}^* \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.17)$$

$$p_{i.}^* = \frac{p_{i.} - p_{ii}}{\delta}$$

$$p_{.i}^* = \frac{p_{.i} - p_{ii}}{\delta}$$

$$\delta = \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

T_i^X ve T_i^Y : birikimli koşullu marjinal olasılıklar,

$$H_{KMH} : \Pr(X = i | X \neq Y) = \Pr(Y = i | X \neq Y) \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.18)$$

$$H_{KMH} : T_i^X = T_i^Y \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.19)$$

$$T_i^X = \Pr(X \leq i | X \neq Y) = \sum_{k=1}^i p_{k.}^* \quad i=1,2,\dots,I-1$$

$$T_i^Y = \Pr(Y \leq i | X \neq Y) = \sum_{k=1}^i p_{.k}^* \quad i=1,2,\dots,I-1$$

KMH modelinin serbestlik derecesi $(I - 1)$ dir.

2.5.5. Simetri Yapısını İfade Eden Modeller Arasındaki İlişki

MH modeli marjinal toplamların simetrik, tablo yapısının ise simetrik olmadığını varsayar. $\alpha_j=1$ olduğu koşulda $YS=TS$ ve $I=2$ iken $MH=TS$ olduğu için YS ve MH modeli TS modelinin özel durumlarını içerir ve TS modeli diğer iki modeli her koşulda kapsamına rağmen tam tersi durum geçerli değildir [1].

Eğer YS modeli veriye uyumluysa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir;

$$G_{TS}^2 = G_{MH}^2 + G_{YS}^2$$

$$sd_{TS} = sd_{MH} + sd_{YS}$$

Bu eşitliklerin yazılabilmesi için YS modelinin veriye uyumu gerekir.

TS, YS ve MH modelleri karesel olumsuzluk tablolarındaki simetri yapısını çeşitli durumlarda tanımlamaktadır. Simetri yapısına uygunluk TS modeline uyumla sağlanır. Caussinus (1965) 'in tanımına göre veri analizinde TS modeline uyum yoksa, bunun neden kaynaklandığını görmek ya da farklı durumlar için simetri yapısını incelemek için simetrik yapıyı ifade eden diğer iki model MH ve YS modellerine bakılır [10;11]. Simetri yapısının incelenmesi için adımlar Çizelge 2.3' de özetlenmiştir.

Çizelge 2.3. Simetri yapısının incelenmesi

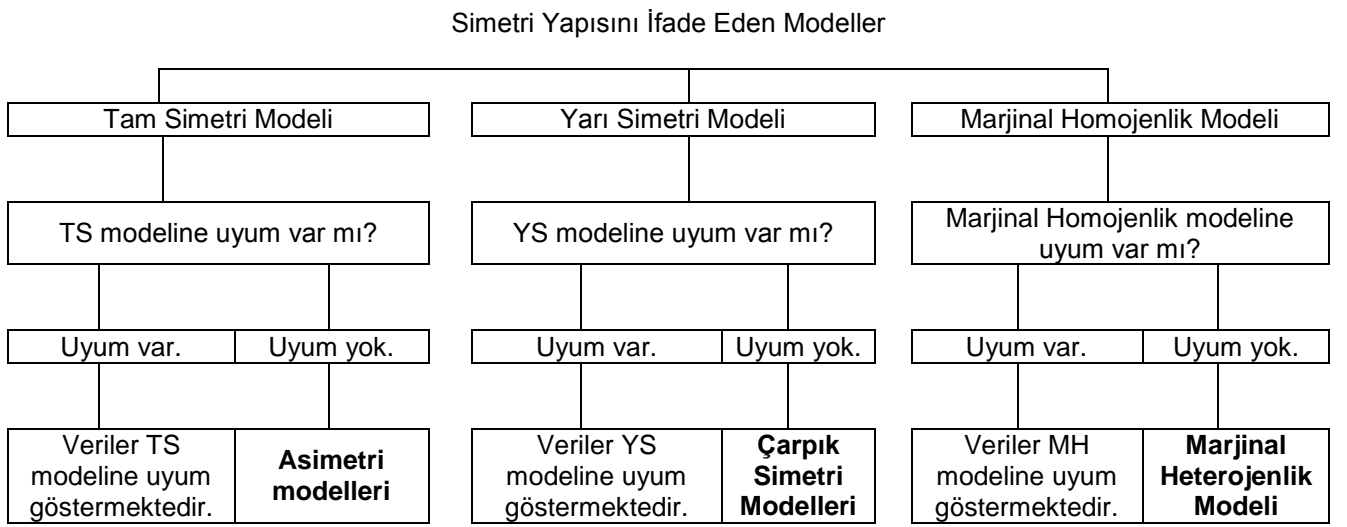
Tam simetri modeline uyum var mı?	Uyum var.		
	Uyum yok.	MH ve YS modellerine uyum araştırılır.	
MH ve YS modellerine uyum var mı ?			
	MH	YS	
1. Durum	Uyum Var	Uyum Yok	TS modeline uyum olmaması YS modeline uyum olmamasından kaynaklıdır
2. Durum	Uyum Yok	Uyum Var	TS modeline uyum olmaması MH modeline uyum olmamasından kaynaklıdır.
3. Durum	Uyum Yok	Uyum Yok	TS modeline uyum olmaması YS ve MH modellerine uyum olmamasından kaynaklıdır.

Tam simetri, yarı simetri ve marjinal homojenlik modelleri sıralanabilir karesel olumsuzluk tablo çözümlerinde kullanılabilmesine rağmen, satır ve sütun düzeylerinde aynı yer değiştirmelerle farklı kombinasyonlar altında sabit oldukları için sınıflanabilir karesel olumsuzluk tablo çözümlerinde kullanılmalarının daha uygun olduğu araştırmacılar tarafından belirtilmiştir.

Simetri yapısını tanımlayan modeller uyumlu olmadığında veya sapmalar meydana geldiğinde ise bu sapmaları tanımlayan ve sapmaların derecelerini belirleyen simetrik olmayan yapıları ifade eden modeller önerilmiştir.

Tam simetri modelinden sapmaları gösteren modeller Asimetri Modelleri, yarı simetri modelinden sapmaları gösteren modeller Çarpık Simetri Modelleri ve marjinal homojenlikten sapmaları ifade eden modeller Marjinal Heterojenlik Modeli olarak belirtilmiştir [12].

Çizelge 2.4. Karesel tablo çözümlemesinde izlenen hipotezler



Karesel tablo çözümlenmeleri Çizelge 2.4 'de verilen iş akış şemasındaki adımlara göre gerçekleştirilmelidir. İş akış şemasında verilen başlıklardaki asimetri modelleri ve çarpık simetri modellerinin alt modelleri Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.6' da özetlenmiştir.

Çizelge 2.5. Asimetri Alt Modelleri

Asimetri Modelleri
Üçgen Asimetri Modeli (ÜA)
Köşegen Asimetri Modeli (KA)
Sabit Uzaklık Asimetri Modeli (SUA)
Odds Asimetri 1 ve Odds Asimetri 2 Modeli (OA1, OA2)
İki Oran Parametre Asimetri Modeli (2OPA)

Çizelge 2.6. Çarpık Simetri Alt Modelleri

Çarpık Simetri Modelleri
Tekdüze Çarpık Simetri Modeli (TÇS)
Köşegen Parametre Çarpık Simetri Modeli (KPÇS)
Ortadeğer Etkili Çarpık Simetri Modeli (OEÇS)

Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.6' da özetlenen modeller bir çok yazar tarafından farklı isimlerle incelenmiştir. Bu modeller model, yazar ve farklı isimli model başlıkları altında kronolojik sıra ile Çizelge 2.7 ve Çizelge 2.8' de özetlenmiştir.

Çizelge 2.7. Asimetri alt modellerine ait literatür taraması

MODEL	YAZAR	FARKLI İSİMLİ MODEL
Üçgen Asimetri (ÜA)	McCullagh (1978)	Koşullu Simetri
	Goodman (1985)	ÜA
Köşegen Asimetri (KA)	Agresti (1983)	Köşegen Parametre Simetri
	Goodman (1985)	KA
Sabit Uzaklık Asimetri (SUA)	Agresti (1983) Tomizawa (1992)	Doğrusal Köşegen Parametre Simetri
	Agresti (1996)	Ordinal Yarı Simetri
Odds Asimetri 1 ve Odds Asimetri 2 (OA1 ve OA2)	Tomizawa (1985)	Odds Simetri 1 ve Odds Simetri 2
İki Oran Parametre Asimetri (2OPA)	Tomizawa (1987)	2OPA
	Lawal (2002)	İki Oran Parametre Simetri

Çizelge 2.8. Çarpık simetri alt modellerine ait literatür taraması

MODEL	YAZAR	FARKLI İSİMLİ MODEL
Tekdüze Çarpık Simetri (TÇS)	Yamagushi (1990)	TÇS
	Yamagushi (1990)	Üçgen Parametre Çarpık Simetri
	Yamagushi (1992)	Yarı Koşullu Simetri
Köşegen Parametre Çarpık Simetri (KPÇS)	Yamagushi(1990)	Yarı Köşegen Parametre Simetri
Ortadeğer Etkili Çarpık Simetri (OEÇS)	Bishop vd. (1975)	Düzeltilmiş Yarı Simetri
	Tomizawa (1985)	Yarı Odds Simetri
	Yamagushi (1990)	OEÇS

Çizelge 2.7 ve 2.8' de model başlığı altında verilen alt modeller ve marjinal heterojenlik modeli 3. Bölümde tanıtılacaktır.

3. KARESEL OLUMSALLIK TABLOLARINDA SİMETRİ YAPISINDAN SAPAN MODELLER

3.1. Asimetri Modelleri

Tam simetri modelinden sapmaları ifade eden model Goodman (1985) tarafından asimetrik model olarak tanımlanmıştır. Asimetrik modeller tam simetri modelini temel aldıkları için tam simetri modeli boş asimetri modeli olarak da adlandırılır [5].

3.1.1. Üçgen Asimetri Modeli (ÜA)

Goodman (1985), ρ_{ij} simetri parametresi τ_1 ve τ_2 koşul parametresi olmak üzere üçgen asimetri modelini ifade etmiştir. ÜA modeli alt ve üst üçgenlere ait beklenen olasılıkların eşitliğini test eder. Modele ait hipotez $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ iken Eşitlik 3.1' de verildiği gibidir [13];

$$H_{\text{ÜA}} : \rho_{ij} = \begin{cases} \rho_{ij}\tau_1 & i > j \\ \rho_{ij}\tau_2 & i < j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, I \quad (3.1)$$

Üçgen asimetri modeli McCullagh (1978) tarafından tanımlanan koşullu simetri modeline (KS) eşittir. Koşullu simetri modeline ait hipotez Eşitlik 3.2' de verildiği gibidir [14];

$$H_{\text{KS}} : \rho_{ij} = \gamma \rho_{ji} \quad i < j \quad (3.2)$$

Üçgen asimetri modeli altında beklenen sıklıklara ait en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 3.3' de verilmiştir [15];

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} (x_{ij} + x_{ji}) & i < j \\ x_{ii} & i = j \\ \frac{1}{1 + \hat{\gamma}} (x_{ij} + x_{ji}) & i > j \end{cases} \quad \hat{\gamma} = \frac{\sum_{i < j} x_{ij}}{\sum_{i > j} x_{ij}} \quad (3.3)$$

Üçgen asimetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{\hat{m}} = \frac{(I+1)(I-2)}{2}$ dir.

Üçgen asimetri modeline ilişkin parametrelerin gözlemlere göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. ÜA gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan \hat{m}_{ij} elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir ;

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} 3 & i < j \\ 2 & i = j \\ 1 & i > j \end{cases} \quad (3.4)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için ÜA matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.2. Köşegen Asimetri Modeli (KA)

Goodman (1985) tarafından KS modelinin uzantısı olarak tanımlanan köşegen asimetri modeline ait hipotez Eşitlik 3.5 'de ifade edildiği gibidir [5];

$$H_{KA} : p_{ij} = p_{ji} \delta_k \quad k = j - 1 = \pm 1, \pm 2, \dots, (I-1) \quad (3.5)$$

Eşitlik 3.5' de yer alan δ_k parametreleri bir gözlem değerinin $k=j-i$ için, (j,i) gözesi yerine (i,j) gözesinde olmasının odds değerini ifade etmektedir.

Köşegen asimetri modeli altında beklenen sıklıklara ait en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 3.6 'da verilmiştir [16];

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{\hat{\delta}_{j-i}}{1 + \hat{\delta}_{j-i}} (x_{ij} + x_{ji}) & i < j \\ x_{ii} & i = j \\ \frac{1}{1 + \hat{\delta}_{i-j}} (x_{ij} + x_{ji}) & i > j \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\hat{\delta}_k = \frac{x_{(k)}^+}{x_{(k)}^-} \quad x_{(k)}^+ = \sum_{t=1}^{I-k} x_{t,t+k} \quad x_{(k)}^- = \sum_{t=1}^{I-k} x_{t+k,t}$$

Köşegen asimetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{KA} = \frac{(I-1)(I-2)}{2}$ dir [16;17].

Köşegen asimetri modeline ilişkin parametrelerin gözlemlere göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. KA gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan KA_{ij} elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir ;

$$KA_{ij} = \begin{cases} |i - j| & i < j \\ |i - j| + I - 1 & i > j \\ 2I - 1 & i = j \end{cases} \quad (3.7)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için KA matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$KA = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

3.1.3. Sabit Uzaklık Asimetri Modeli (SUA)

Sabit uzaklık asimetri modeli Agresti (1983) ve Tomizawa (1992) tarafından farklı isimlerle de tanımlanan köşegen asimetri modeline göre daha basit yapıda olan modeldir. Sabit uzaklık asimetri modelinde köşegen asimetri modelindeki parametrelerin logaritmaları $[\ln(\delta_k)]$ doğrusal yapıya sahiptir. Modele ait hipotez Eşitlik 3.8' de ifade edilmiştir [13].

$$H_{SUA} : p_{ij} = p_{ji} \delta^{|j-i|} \quad j \geq i \quad (3.8)$$

Sabit uzaklık asimetri modeli altında beklenen sıklıkların en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 3.9' da verilmiştir [18];

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{\hat{\delta}^{j-i}}{1 + \hat{\delta}^{j-i}} (x_{ij} + x_{ji}) & i < j \\ x_{ij} & i = j \\ \frac{1}{1 + \hat{\delta}^{j-i}} (x_{ij} + x_{ji}) & i > j \end{cases} \quad (3.9)$$

Sabit uzaklık asimetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{SUA} = \frac{(I+1)(I-2)}{2}$ dir.

Sabit uzaklık asimetri modeline ilişkin parametrelerin gözlemlere göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. SUA gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan SUA_{ij} elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir;

$$SUA_{ij} = \begin{cases} |i - j| + 1 & i < j \\ 1 & \text{ö.d} \end{cases} \quad (3.10)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için SUA matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$SUA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.4. Odds Asimetri 1 Modeli (OA1)

Üçgen asimetri modelinin uzantısı olarak Tomizawa (1985) tarafından tanımlanan odds asimetri 1 modeline ait hipotez Eşitlik 3.11' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{OA1} : \frac{p_{ij}}{p_{(i,j+1)}} = \frac{p_{ji}}{p_{(j+1,i)}} \quad i < j \quad (3.11)$$

Odds asimetri 1 modeline göre, olumsuzluk tablosunun sağ üst üçgeninde i. satır düzeyinde, sütun düzeyinin (j+1) yerine j'de olmasının odds oranı, sol alt üçgenin i. sütun düzeyinde satır düzeyinin (j+1) yerine j'de olmasının odds oranına eşittir [19].

Odds asimetri 1 modeli altında beklenen sıklıklara ait en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 3.12' de verilmiştir. [19];

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{(x_{ij} + x_{ji})b_i}{(b_i + c_i)} & i < j \\ x_{ii} & i = j \\ \frac{(x_{ij} + x_{ji})c_i}{(b_i + c_i)} & i > j \end{cases} \quad (3.12)$$

$$b_i = \sum_{I=i+1}^I x_{Ii} \quad c_i = \sum_{I=i+1}^I x_{Ii}$$

Odds asimetri 1 modelinin serbestlik derecesi;

$$sd_{OA1} = \frac{(I-1)(I-2)}{2} \quad \text{dir.}$$

Odds asimetri 1 modeline ilişkin parametrelerin gözeler göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. OA1 gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan $OA1_{ij}$ elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir;

$$(OA1)_{ij} = \begin{cases} i & i < j \\ (I-1) + j & i > j \\ 2I-1 & i = j \end{cases} \quad (3.13)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için OA1 matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$OA1 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Odds Asimetri 2 Modeli (OA2)

Üçgen asimetri modelinin uzantısı olarak Tomizawa (1985) tarafından tanımlanan odds asimetri 2 modeline ait hipotez Eşitlik 3.14' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{OA2} : \frac{p_{(i-1,j)}}{p_{ij}} = \frac{p_{(j,i-1)}}{p_{ji}} \quad i < j \quad (3.14)$$

Odds asimetri 2 modeline göre, olumsuzluk tablosunun sağ üst üçgeninde j. sütun düzeyinde, satır düzeyinin i yerine (i-1)'de olmasının odds oranı, sol alt üçgenin j. satır düzeyinde sütun düzeyinin i yerine (i-1)'de olmasının odds oranına eşittir.

Odds asimetri 2 modeli altında beklenen sıklıklara ait en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri Eşitlik 3.15' de verilmiştir [19];

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{(x_{ij} + x_{ji})b_i}{(b_i + c_i)} & i < j \\ x_{ii} & i = j \\ \frac{(x_{ij} + x_{ji})c_i}{(b_i + c_i)} & i > j \end{cases} \quad (3.15)$$

$$b_i = \sum_{I=i+1}^I x_{Ii} \quad c_i = \sum_{I=i+1}^I x_{Ii}$$

Odds asimetri 2 modelinin serbestlik derecesi;

$$sd_{OA2} = \frac{(I-1)(I-2)}{2} \quad \text{dir.}$$

Odds asimetri 2 modeline ilişkin parametrelerin gözlemlere göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. OA2 gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan $OA2_{ij}$ elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir;

$$(OA2)_{ij} = \begin{cases} (2I-j) & i < j \\ (I+1) - i & i > j \\ 2I - 1 & i = j \end{cases} \quad (3.16)$$

4×4 karesel olumsuzluk tablosu için OA2 matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$OA2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.1.6. İki Oran Parametre Asimetri Modeli (2OPA)

İki oran parametre asimetri modeline ait hipotez Eşitlik 3.17 'de verildiği gibidir.

$$H_{2OPA} : p_{ij} = p_{ji} \gamma \delta^{j-i} \quad i < j \quad (3.17)$$

Eşitlik 3.17' deki model $\delta = 1$ olduğunda koşullu simetri modeline, $\gamma = 1$ olduğunda sabit uzaklık asimetri modeline dönüşmektedir.

2 oran parametre asimetri modeli altında beklenen sıklıklara ait en çok olabilirlik tahminleri eşitlikleri Eşitlik 3.18' de verilen kısıtları sağlamalıdır;

$$\hat{m}_{ij} + \hat{m}_{ji} = x_{ij} + x_{ji} \quad 1 \leq i, j \leq I$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I j \hat{m}_{ij} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I j x_{ij} \quad (3.18)$$

$$\sum_{i < j} \hat{m}_{ij} \{I - 2(j - i)\} = \sum_{i < j} x_{ij} \{I - 2(j - i)\}$$

2 oran parametre asimetri modelinin serbestlik derecesi;

$$sd_{2OPA} = \frac{I^2 - I - 4}{2} \quad \text{dir.}$$

Asimetri modelleri tam simetri modelini temel aldıkları için bu modellerle birlikte ifade edilmelidir. Asimetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümü için özetlenen Çizelge 3.1' de matris gösterimleri "TERİMLER" başlığı altında gösterilmiştir

Çizelge 3.1. Asimetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler

MODEL	TERİMLER
Üçgen Asimetri	TS + ÜA
Köşegen Asimetri	TS + KA
Sabit Uzaklık Asimetri	TS + SUA
Odds Asimetri 1	TS + OA1
Odds Asimetri 2	TS + OA2
2 Oran Parametre Asimetri	TS + ÜA + SUA

Bölüm 3.1' de ifade edilen modeller bir çok yazar tarafından çeşitli başlıklar altında toplanarak farklı veri kümelerinde uygulamaları yapılmıştır. Bu çalışmalar Çizelge 3.2' de ifade edilmiştir [20;21;23].

Çizelge 3.2. Asimetri modellerine ait çalışmalar

Tomizawa (1990)	<p>TS, ÜA, SUA ve 2OPA modellerini KA modelinin özel durumları olarak aşağıdaki şekilde tanımlamıştır;</p> $H_{KA} : p_{ij} = p_{ji}\delta_k$ <p>$\delta_k = 1$ ise TS modeli, $\delta_k = \gamma$ ise ÜA modeli, $\delta_k = \delta^{j-1}$ ise SUA modeli, $\delta_k = \gamma\delta^{j-i}$ ise 2OPA modeli elde edilir</p>	Britanya baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesinde (1955) için modelleri uygulamıştır.
Lawal (2001)	<p>Genel simetri modeli olarak $p_{ij} = w_{ij}\alpha_j p_{ji}$ $i < j$ eşitliğini ifade etmiş ve aşağıda verilen koşullardan yararlanarak TS, ÜA, KA ve SUA modellerini tanımlamıştır;</p> <p>a. $w_{ij} = 1$ b. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 1$ c. $w_{ij} = \gamma$</p> <p>a ve b sağlanırsa TS modeli, b ve c sağlanırsa ÜA modeli, $w_{ij} = \delta_k$ ve b sağlanırsa KA modeli $w_{ij} = \delta^{j-i}$ ve b sağlanırsa SUA modeli elde edilir.</p>	Britanya baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesi (1955) ve Tokyo kadın işçiler sağ-sol göz görme dereceleri veri kümesi (1985) için modelleri uygulamıştır.
Lawal (2002)	Asimetri modellerinin istatistik yazılımlarında uygulanabilmesi için tasarım matrislerini elde etmiş SAS program kodlarıyla birlikte açıklamıştır	Danimarka baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesi (1959) için modelleri uygulamıştır.
Lawal (2004)	Asimetri modellerini "Genelleştirilmiş Simetri Modelleri" başlığı altında toplamıştır.	Brezilya baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesi (1958) için modelleri uygulamıştır.

3.2. Çarpık Simetri Modelleri

Yarı simetri modelinden sapmaları ifade eden çarpık simetri modelleri Yamagushi (1990) tarafından tanımlanmıştır. Çarpık simetri modelleri yarı simetri modelini temel alırlar. Bu nedenle yarı simetri modeli boş çarpık simetri modeli olarak adlandırılır [22].

3.2.1. Tekdüze Çarpık Simetri Modeli (TÇS)

Tekdüze çarpık simetri modeline ait hipotez Eşitlik 3.19' da ifade edildiği gibidir;

$$H_{TÇS} : p_{ij} = \gamma \alpha_j p_{ji} \quad i < j \quad (3.19)$$

Hipotezdeki γ parametresi koşulsuz olarak tanımlanmıştır.

$\alpha_j = 1$ olması durumunda tekdüze çarpık simetri modeli köşegen asimetri modeline dönüşmektedir.

TÇS modeli $I \geq 4$ durumunda tanımlıdır.

Tekdüze çarpık simetri modelinin serbestlik derecesi; $sd_{TÇSD} = \frac{I(I-3)}{2}$ dir.

3.2.2. Köşegen Parametre Çarpık Simetri Modeli (KPÇS)

Köşegen asimetri modelinden yola çıkarak elde edilen köşegen parametre çarpık simetri modeline ait hipotez $k=j-i$ olmak üzere Eşitlik 3.20' de verildiği gibidir;

$$H_{KPÇS} : p_{ij} = \alpha_j p_{ji} \delta_k \quad i < j \quad (3.20)$$

δ_k parametresi ilgili gözlemin (j,i) gözesi yerine (i,j) gözesinde olmasının odds oranıdır.

KPÇS modeli $I \geq 4$ durumunda tanımlıdır.

Köşegen parametre simetri modeline ait serbestlik derecesi;

$$sd_{KPÇS} = \frac{(I-2)(I-3)}{2} \text{ dir [13].}$$

3.2.3. Orta Değer Etkili Çarpık Simetri Modeli (OEÇS)

$\theta_{(i<j;k<l)}$ odds oranı olmak üzere orta değer etkili çarpık simetri modeli olumsuzluk tablosunun sağ üst üçgeninde yer alan odds oranının ($\theta_{(i<j;k<l)}$ $1 \leq i < j < k < l \leq I$), sol alt üçgeninde yer alan odds oranına ($\theta_{(k<l;i<j)}$) eşitliğini test eder. Orta değer etkili çarpık simetri modeline ait hipotez Eşitlik 3.21' de verildiği gibidir;

$$H_{OEÇS} : p_{ij} = \alpha_i \beta_j \delta_{ij} \quad i < j \quad (3.21)$$

OEÇS modeli $I \geq 4$ durumunda tanımlıdır.

Orta değer etkili çarpık simetri modelinin serbestlik derecesi;

$$sd_{OEÇS} = \frac{(I-2)(I-3)}{2} \text{ dir [19].}$$

Çarpık simetri modelleri yarı simetri modelini temel aldıkları için bu modellerle birlikte ifade edilmelidir. Çarpık simetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümü için özetlenen Çizelge 3.3' de matris gösterimleri "TERİMLER" başlığı altında gösterilmiştir

Çizelge 3.3. Çarpık simetri modellerinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler

MODEL	TERİMLER
Tekdüze Çarpık Simetri Düzey	SA + SÜ + TS + ÜA
Köşegen Parametre Çarpık Simetri	SA + SÜ + TS + KA
Ortadeğer Etkili Çarpık Simetri	SA + SÜ + TS + OA1

Çizelge 3.3' de yer alan SA ve SÜ gösterimleri bilgisayar ortamında olumsuzluk tabloları aktarılırken tanımlanan satır ve sütun değişkeni kodlarıdır.

Bölüm 3.2' de ifade edilen modellerin yazarlar tarafından farklı veri setlerine uygulamaları Çizelge 3.4' de ifade edilmiştir.

Çizelge 3.4. Çarpık simetri modellerine ait çalışmalar

Yamaguchi (1990)	Çarpık simetri modellerini, satır ve sütunlar arasındaki asimetric etkileşim bileşenlerini tanımlamak için özel parametre setlerini kullanan, çarpık simetri ilişki ve çarpık simetri düzey modelleri olarak iki sınıfa ayırmıştır. Bölüm (3.2)' de ifade edilen modeller bu sınıflandırmadaki çarpık simetri düzey modelleridir.	Amerika baba-oğul mesleki hareketlilik (1955) ve 1977 yaşam memnuniyeti veri kümelerine modelleri uygulamıştır.
Lawal (2001)	YS, TDÇS ve KPÇS modellerini asimetri modelleri başlığı altında incelemiştir.	Britanya baba-oğul mesleki hareketlilik (1955) ve Tokyo kadın işçiler sağ-sol göz görme dereceleri veri kümeleri (1985) için modelleri uygulamıştır.
Lawal (2002)	Çarpık simetri modellerinin istatistik yazılımlarında uygulanabilmesi için SAS program kodlarıyla birlikte açıklamıştır.	Danimarka baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesi (1959) için modelleri uygulamıştır.
Lawal (2004)	Çarpık simetri modellerini "Genelleştirilmiş Simetri Modelleri" başlığı altında toplamıştır.	Brezilya baba-oğul mesleki hareketlilik veri kümesi (1958) için modelleri uygulamıştır.

3.3. Marjinal Heterojenlik Modeli (\overline{MH})

Miyamoto vd. (2006) marjinal homojenlik modeline uyum olmadığı durumlarda kullanılan marjinal heterojenlik modelini önermişlerdir. $I \times I$ karesel olumsuzluk tabloları için \overline{MH} modeline ait hipotez Eşitlik 3.22' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{\overline{MH}} : p_{i.} = e^{\Delta} p_{.i} \quad i=1,2,\dots,I \quad (3.22)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir [24]. Eşitlik 3.22' de $|\Delta_i| = \Delta$ ve $\Delta > 0$ 'dır. Bu modelde, odds oranı $\Delta > 0$ iken $\frac{p_{1.}}{p_{.1}} = \frac{p_{2.}}{p_{.2}} = \dots = \frac{p_{I.}}{p_{.I}} = e^{\Delta}$ değerine eşittir.

Odds oranına ait eşitlikten açıkça görüldüğü üzere MH modeline uyum olmamaktadır. Eşitlik 3.22' de verilen Δ , MH modelinden sapma derecesini göstermektedir. Δ değeri arttıkça MH modelinden sapma derecesi de artmaktadır.

\overline{MH} ' ne ait farklı gösterimler Eşitlik 3.23' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{\overline{MH}} : |p_{i.}^w - p_{.i}^w| = \Delta^* \quad i=1,2,\dots,I \quad (3.23)$$

$$p_{i.}^w = \frac{p_{i.}}{(p_{i.} + p_{.i})} \quad p_{.i}^w = \frac{p_{.i}}{(p_{i.} + p_{.i})} \quad (3.24)$$

$$\Delta^* = \frac{(e^{\Delta} - 1)}{(e^{\Delta} + 1)} \quad (3.25)$$

$p_{i.}^w$: herhangi bir gözlemin, X satır değişkeninin i. düzeyinde yer alma olasılığının, X satır değişkeninin i. düzeyinde yer alması olasılığı ile Y sütun değişkeninin i. düzeyinde yer alması olasılıklarının toplamına oranı olarak ifade edilmektedir.

Eşitlik 3.27' de verilen Δ^* , $0 < \Delta^* < 1$ aralığında değer almaktadır. \overline{MH} modeli veriye uyum sağladığında, Δ^* parametresi 1 değerine yaklaşır. Eşitlik 3.23' de Δ^* yerine $(e^\Delta - 1)/(e^\Delta + 1)$ ve e^Δ yerine $p_{i.}/p_{.i}$ eşitlikleri yazılırsa,

$$|p_{i.}^w - p_{.i}^w| = \frac{p_{i.} - p_{.i}}{p_{i.} + p_{.i}} \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik 3.26 incelendiğinde, $|p_{i.}^w - p_{.i}^w|$ değerinin $(0,1)$ aralığında değer aldığı açıkça görülmektedir. $p_{i.}^w$ ve $p_{.i}^w$ tanımlamalarıyla elde edilen Δ^* , Δ ($\Delta > 0$)'ya göre tanım aralığı bakımından üst sınıra sahiptir. Bu nedenle Δ^* parametresi ile \overline{MH} modeline ne ölçüde uyum sağlandığı veya MH modelinden ne ölçüde sapma gösterildiği söylenebilmektedir.

3.4. Koşullu Marjinal Heterojenlik Modeli ($\overline{KM\overline{H}}$)

Koşullu satır ve sütun marjinal dağılımları kullanılarak KMH modeli Eşitlik 2.17 verildiği gibi ifade edilmiştir. \overline{MH} modeli, koşullu satır ve sütun marjinal dağılımları kullanılarak ifade edilebilir. Bu modele Koşullu Marjinal Heterojenlik ($\overline{KM\overline{H}}$) modeli denilmektedir. ($\overline{KM\overline{H}}$) modeline ilişkin hipotez Eşitlik 3.27' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{\overline{KM\overline{H}}} : p_{i.}^* = e^{\phi_i} p_{.i}^* \quad i=1,2,\dots,I \quad (3.27)$$

Eşitlik 3.35' de $|\Phi_j| = \Phi_j$ ve $\Phi > 0$ 'dır. $p_{i.}^*$ ve $p_{.j}^*$,

$$p_{i.}^* = \frac{p_{i.} - p_{ii}}{\delta}, \quad p_{.j}^* = \frac{p_{.j} - p_{jj}}{\delta}, \quad \delta = \sum_{i \neq j} \sum p_{ij}$$

eşitlikleri kullanılarak elde edilir.

$(\overline{KM\bar{H}})$ modeli, $p_{i.}^*/p_{.j}^*$ veya $p_{.j}^*/p_{i.}^*$ odds oranının e^Φ değerine eşit olduğunu ifade etmektedir. $(\overline{KM\bar{H}})$ modeli $I \geq 3$ durumunda tanımlıdır. $(\overline{KM\bar{H}})$ modelinde Φ parametresi, MH modelinden sapma derecesini ifade etmektedir. MH modelinden sapma miktarı arttıkça Φ parametresinin değeri de artar. \overline{MH} ve $(\overline{KM\bar{H}})$ modellerine ait parametreler arasındaki ilişki dikkatlice incelendiğinde $\Phi > \Delta$ olduğu açıkça görülmektedir. \overline{MH} ve $(\overline{KM\bar{H}})$ modellerine uyum olduğu durumda, $p_{i.}^*/p_{.j}^*$ odds oranı, $p_{i.}/p_{.j}$ odds oranına göre 1 değerinden daha büyük olacaktır.

$\overline{KM\bar{H}}$ modeline ait farklı gösterimler Eşitlik 3.28' de ifade edildiği gibidir;

$$H_{\overline{KM\bar{H}}} : |p_{i.}^c - p_{.j}^c| = \Phi^* \quad i=1,2,\dots,I \quad (3.28)$$

$$p_{i.}^c = \frac{p_{i.}^*}{(p_{i.}^* + p_{.j}^*)} \quad p_{.j}^c = \frac{p_{.j}^*}{(p_{i.}^* + p_{.j}^*)} \quad (3.29)$$

$$p_{i.}^c + p_{.j}^c = 1$$

$$\Phi^* = \frac{e^\Phi - 1}{e^\Phi + 1} \quad (3.30)$$

Eşitlik 3.30' de, verilen Φ^* , $0 < \Phi^* < 1$ arasında değer almaktadır. $(\overline{KM\bar{H}})$ modeli koşullu marjinal olasılıklar üzerinden marjinal heterojenlik yapısını açıklar.

3.5. Marjinal Homojenlik Modelinden Sapma Ölçüleri

Marjinal Homojenlik modeline uyum olmadığı zamanlarda, bir çok yazar tarafından sıralanabilir ve sınıflanabilir kategorik veriler için MH modelinden sapma derecelerini ifade eden ölçümler önerilmiştir [26].

Tahata (2012), MH modelinden sapma derecelerini ifade eden ve aldıkları değerlere göre alt ve üst üçgen marjinal heterojenlik kavramlarını ortaya çıkaran iki ölçü ifade etmiştir. Ölçü 1 olarak ifade edilen değer marjinal olasılıklar üzerinden hesaplanırken, Ölçü 2 olarak ifade edilen değer koşullu marjinal olasılıklar kullanılarak hesaplanmaktadır. Her iki ölçü de marjinal homojenlik modelinden sapma derecesini ifade etmektedir. [25].

Ölçü 1 (Ψ)

Ψ ölçü 1 değeri, alt ölçüm 1.1 (Ψ_1) ve alt ölçüm 1.2 (Ψ_2)' nin ortalamasıdır ve Eşitlik 2.16' dan yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler tanımlanmıştır;

Alt ölçü 1.1 (Ψ_1)

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{I-1} (F_i^X + F_i^Y) \quad (3.31)$$

$$F_{1(i)}^* = \frac{F_i^X}{\Lambda_1}, \quad F_{2(i)}^* = \frac{F_i^Y}{\Lambda_1}, \quad i=1, \dots, I-1 \quad (3.32)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{I-1} (F_{i(1)}^* + F_{i(2)}^*) = 1 \right\}, \quad \{(F_i^X + F_i^Y \neq 0)\}$$

$$\Psi_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{I-1} (F_{i(1)}^* + F_{i(2)}^*) \left(\theta_i^{(1)} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.33)$$

$$\theta_i^{(1)} = \sin^{-1} \left(\frac{F_i^Y}{\sqrt{(F_i^X)^2 + (F_i^Y)^2}} \right) \quad 0 \leq \theta_i^{(1)} \leq \pi/2 \quad (3.34)$$

Alt ölçüm 1.2 için özellikler aşağıda verilmiştir:

- $-1 \leq \Psi_1 \leq 1$
- $\Psi_1 = -1$ yalnızca $F_i^Y = 0$ ve $F_i^X > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- $\Psi_1 = 1$ yalnızca $F_i^X = 0$ ve $F_i^Y > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- MH modeli sağlandığında ise $\Psi_1 = 0$ dir.

Alt ölçü 1.2 (Ψ_2)

$$S_i^X = 1 - F_i^X, \quad S_i^Y = 1 - F_i^Y \quad i=1,2,\dots,I-1 \quad (3.35)$$

eşitliklerinden,

$S_i^X = S_i^Y \quad i=1,2,\dots,I-1$ eşitliğinin Eşitlik 2.16' ya eşit olduğu görülmektedir.

$$\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{I-1} (S_i^X + S_i^Y) \quad (3.36)$$

$$S_{1(i)}^* = \frac{S_i^X}{\Lambda_2}, \quad S_{2(i)}^* = \frac{S_i^Y}{\Lambda_2}, \quad i=1,\dots,I-1 \quad (3.37)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{I-1} (S_{i(1)}^* + S_{i(2)}^*) = 1 \right\}, \quad \{(S_i^X + S_i^Y \neq 0)\}$$

$$\Psi_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{I-1} (S_{i(1)}^* + S_{i(2)}^*) \left(\theta_i^{(2)} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.38)$$

$$\theta_i^{(2)} = \sin^{-1} \left(\frac{S_i^X}{\sqrt{(S_i^X)^2 + (S_i^Y)^2}} \right) \quad 0 \leq \theta_i^{(2)} \leq \pi/2 \quad (3.39)$$

Alt ölçüm 1.2 için özellikler aşağıda verilmiştir;

- $-1 \leq \Psi_2 \leq 1$
- $\Psi_2 = -1$ yalnızca $S_i^X = 0$ ve $S_i^Y > 0$ iken ($i = 1, \dots, I - 1$)
- $\Psi_2 = 1$ yalnızca $S_i^Y = 0$ ve $S_i^X > 0$ iken ($i = 1, \dots, I - 1$)
- MH modeli sağlandığında ise $\Psi_2 = 0$ dir.

Alt ölçü 1.1 ve alt ölçü 1.2' den ölçü 1 aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir;

$$\Psi = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \quad (3.40)$$

Ψ ölçümü $[-1,1]$ aralığında değer alır. Ψ ölçümünün alt sınır ve üst sınır değerine eşit olması ayrıntılı olarak incelenirse $\Psi = -1$ değeri için **üst üçgen marjinal heterojenlik**, $\Psi = 1$ için **alt üçgen marjinal heterojenlik** yapısı tanımlanmıştır.

Üst üçgen marjinal heterojenlik yapısı:

$\Psi = -1$, $F_i^X = 1$ ($S_i^X = 0$) ve $F_i^Y = 0$ ($S_i^Y = 1$) ($i = 1, \dots, I - 1$) durumunda sağlanır. Bu durumda $p_{11}=1$ ve diğer bütün olasılıklar 0 dir. 4x4 karesel olumsuzluk tablosu için üst üçgen marjinal heterojenlik yapısının gösterimi Çizelge 3.5' de ifade edilmiştir.

Çizelge 3.5. 4×4 boyutlu karesel olumsuzluk tablosuna ait üst üçgen marjinal heterojenliği

$n_{11}=0$	$n_{12}=0$	$n_{13}=0$	$n_{14}=n_{..}$
$n_{21}=0$	$n_{22}=0$	$n_{23}=0$	$n_{24}=0$
$n_{31}=0$	$n_{32}=0$	$n_{33}=0$	$n_{34}=0$
$n_{41}=0$	$n_{42}=0$	$n_{43}=0$	$n_{44}=0$

$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{n_{..}}$ eşitliğinden yola çıkarak;

$p_{11}=0$	$p_{12}=0$	$p_{13}=0$	$p_{14}=1$
$p_{21}=0$	$p_{22}=0$	$p_{23}=0$	$p_{24}=0$
$p_{31}=0$	$p_{32}=0$	$p_{33}=0$	$p_{34}=0$
$p_{41}=0$	$p_{42}=0$	$p_{43}=0$	$p_{44}=0$

$$p_{1.} = 1$$

$$p_{2.} = 0$$

$$p_{3.} = 0$$

$$p_{.1} = 0 \quad p_{.2} = 0 \quad p_{.3} = 0$$

$$F_1^X = p_{1.} = 1$$

$$F_2^X = p_{1.} + p_{2.} = 1$$

$$F_3^X = p_{1.} + p_{2.} + p_{3.} = 1$$

$$F_i^X = 1$$

$$F_1^Y = p_{.1} = 0$$

$$F_2^Y = p_{.1} + p_{.2} = 0$$

$$F_3^Y = p_{.1} + p_{.2} + p_{.3} = 0$$

$$F_i^Y = 0$$

$$\Psi = -1$$

Alt üçgen marjinal heterojenlik yapısı:

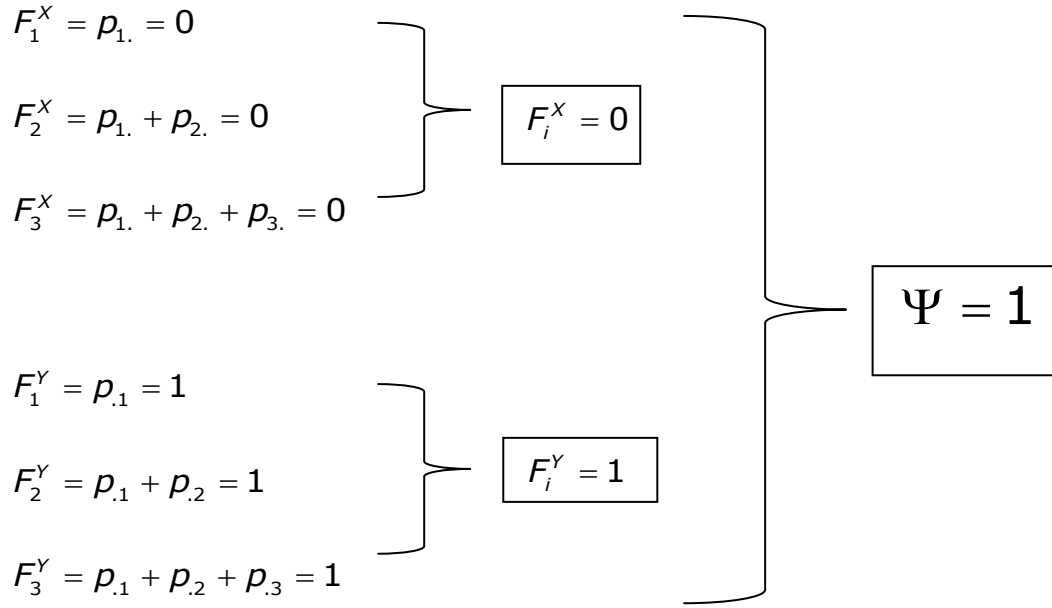
$\Psi = 1$, $F_i^X = 0$ ($S_i^X = 1$ ve $F_i^Y = 1$ ($S_i^Y = 0$)) ($i = 1, \dots, I - 1$) durumunda sağlanır. Bu durumda $p_{11}=1$ ve diğer bütün olasılıklar 0 dır. 4x4 karesel olumsuzluk tablosu için alt üçgen marjinal heterojenlik yapısının gösterimi Çizelge 3.6' da ifade edilmiştir.

Çizelge 3.6. 4 × 4 boyutlu karesel olumsuzluk tablosuna ait alt üçgen marjinal heterojenliği

$n_{11}=0$	$n_{12}=0$	$n_{13}=0$	$n_{14}=0$
$n_{21}=0$	$n_{22}=0$	$n_{23}=0$	$n_{24}=0$
$n_{31}=0$	$n_{32}=0$	$n_{33}=0$	$n_{34}=0$
$n_{41}=n_{..}$	$n_{42}=0$	$n_{43}=0$	$n_{44}=0$

$p_{ij} = \frac{X_{ij}}{n_{..}}$ eşitliğinden yola çıkarak;

$p_{11}=0$	$p_{12}=0$	$p_{13}=0$	$p_{14}=0$	$p_{1.} = 0$
$p_{21}=0$	$p_{22}=0$	$p_{23}=0$	$p_{24}=0$	$p_{2.} = 0$
$p_{31}=0$	$p_{32}=0$	$p_{33}=0$	$p_{34}=0$	$p_{3.} = 0$
$p_{41}=1$	$p_{42}=0$	$p_{43}=0$	$p_{44}=0$	
$p_{.1} = 1$	$p_{.2} = 0$	$p_{.3} = 0$		



MH modeli sağlandığında ise $\Psi = 0$ dir. Ψ ölçümü -1 e yaklaşıyorsa MH modelinden sapma üst üçgen marjinal heterojenlik yönünde daha fazla olur. Ψ ölçümü 1 e yaklaşıyorsa MH modelinden sapma alt üçgen marjinal heterojenlik yönünde daha fazladır.

Ölçü 2 (Υ)

Ölçü 2 (Υ) değeri alt ölçüm 2.1 (Υ_1) ve alt ölçüm 2.2 (Υ_2)' in ortalamasıdır ve Eşitlik 2.19' dan yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler tanımlanmıştır;

Alt ölçü 2.1 (Υ_1)

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{I-1} (T_i^X + T_i^Y) \quad (3.41)$$

$$T_{1(i)}^\diamond = \frac{T_i^X}{\Lambda_1}, \quad T_{2(i)}^\diamond = \frac{T_i^Y}{\Lambda_1}, \quad i=1, \dots, I-1 \quad (3.42)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{I-1} (T_{i(1)}^\diamond + T_{i(2)}^\diamond) = 1 \right\}, \quad \{(T_i^X + T_i^Y \neq 0)\}$$

$$\Upsilon_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{I-1} (T_{i(1)}^\diamond + T_{i(2)}^\diamond) \left(\theta_i^{(1)} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.43)$$

$$\theta_i^{(1)} = \sin^{-1} \left(\frac{T_i^Y}{\sqrt{(T_i^X)^2 + (T_i^Y)^2}} \right) \quad 0 \leq \theta_i^{(1)} \leq \pi/2 \quad (3.44)$$

Alt ölçüm 2.1. için özellikler aşağıda verilmiştir:

- $-1 \leq \Upsilon_1 \leq 1$
- $\Upsilon_1 = -1$ yalnızca $T_i^Y = 0$ ve $T_i^X > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- $\Upsilon_1 = 1$ yalnızca $T_i^X = 0$ ve $T_i^Y > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- MH modeli sağlandığında ise $\Upsilon_1 = 0$ dir.

Alt ölçü 2.2 (Υ_2)

$$U_i^X = 1 - T_i^X, \quad U_i^Y = 1 - T_i^Y \quad i=1,2,\dots,I-1 \quad (3.45)$$

eşitliklerinden,

$U_i^X = U_i^Y$ $i=1,2,\dots,I-1$ eşitliğinin Eşitlik 2.19' a eşit olduğu görülmektedir.

$$\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{I-1} (U_i^X + U_i^Y) \quad (3.46)$$

$$U_{1(i)}^\diamond = \frac{U_i^X}{\Lambda_2}, \quad U_{2(i)}^\diamond = \frac{U_i^Y}{\Lambda_2}, \quad i=1,\dots,I-1 \quad (3.47)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{I-1} (U_{i(1)}^\diamond + U_{i(2)}^\diamond) = 1 \right\}, \quad \{(U_i^X + U_i^Y \neq 0)\}$$

$$\Upsilon_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{I-1} (U_{i(1)}^\diamond + U_{i(2)}^\diamond) \left(\theta_i^{(2)} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.48)$$

$$\theta_i^{(2)} = \sin^{-1} \left(\frac{U_i^X}{\sqrt{(U_i^X)^2 + (U_i^Y)^2}} \right) \quad 0 \leq \theta_i^{(2)} \leq \pi/2 \quad (3.49)$$

Alt ölçüm 2.2. için özellikler aşağıda verilmiştir:

- $-1 \leq \Upsilon_2 \leq 1$
- $\Upsilon_2 = -1$ yalnızca $U_i^X = 0$ ve $U_i^Y > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- $\Upsilon_2 = 1$ yalnızca $U_i^Y = 0$ ve $S_i^X > 0$ iken ($i = 1, \dots, I-1$)
- MH modeli sağlandığında ise $\Upsilon_2 = 0$ dır.

Alt ölçü 2.1 ve alt ölçü 2.2' den ölçü 2 aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir;

$$\Upsilon = \frac{\Upsilon_1 + \Upsilon_2}{2} \quad (3.50)$$

Υ ölçümü $[-1,1]$ aralığında değer alır. Υ ölçümünün alt sınır ve üst sınır değerine eşit olması ayrıntılı olarak incelenirse $\Upsilon = -1$ için **koşullu üst üçgen marjinal heterojenlik**, $\Upsilon = 1$ için **koşullu alt üçgen marjinal heterojenlik** yapısı tanımlanmıştır.

Koşullu üst üçgen marjinal heterojenlik yapısı:

$\Upsilon = -1$, $T_i^X = 1 (U_i^X = 0)$ ve $T_i^Y = 0 (U_i^Y = 1)$ ($i = 1, \dots, I-1$) durumunda sağlanır. Bu durumda, $p_{11}^* = 1$ ve diğer bütün olasılıklar 0 dır.

Koşullu alt üçgen marjinal heterojenlik yapısı:

$\Upsilon = 1$, $T_i^X = 0 (U_i^X = 1)$ ve $T_i^Y = 1 (U_i^Y = 0)$ ($i = 1, I, \dots$), durumunda sağlanır. Bu durumda, $p_{11}^* = 1$ ve diğer bütün olasılıklar 0 dir.

MH modeli sağlandığında ise $\Upsilon = 0$ dir. Υ ölçümü -1 e yaklaşıyorsa KMH modelinden sapma koşullu üst üçgen marjinal heterojenlik yönünde daha fazla olur. Υ ölçümü 1 e yaklaşıyorsa KMH modelinden sapma koşullu alt üçgen marjinal heterojenlik yönünde daha fazladır.

4. ÖNERİLEN MODEL

Tez çalışmasında Bölüm 3.2' de bahsedilen modellere ek olarak yarı simetri modelinden sapmaları ifade etmek üzere farklı bir model önerilmiştir.

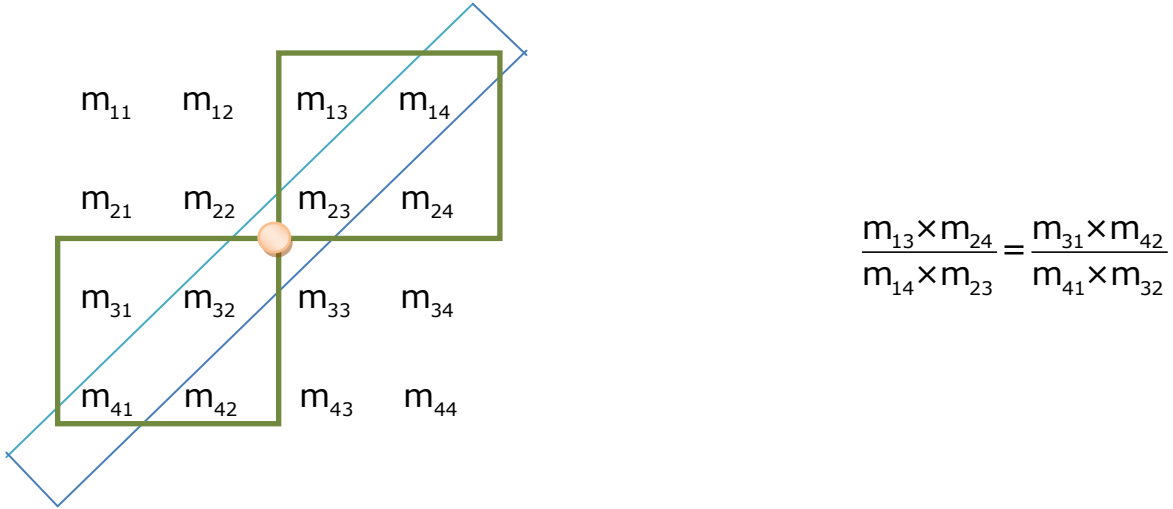
4.1. Koşullu Nokta Çarpık Simetri Modeli (KNÇS)

Koşullu nokta çarpık simetri modeli, karesel olumsuzluk tablosunun ters köşegeni üzerinde ve köşegenin orta noktasına en uzak mesafedeki gözelerin odds oranlarının eşitliğini test eden modeldir. Başka bir ifadeyle KNÇS modeli, satır ya da sütun değişkenlerinin düzeyleri arasındaki farkın I-1 ve I-3' e göre I-2' de olması risklerini eşitleyen modeldir. KNÇS modeline ait hipotez Eşitlik 4.1' de ifade edilmiştir.

$$H_{KNÇS} : \theta_{ij} = \theta_{ji} \quad i=1 \quad j=I-1 \quad (4.1)$$

KNÇS modelinin gösterimi aşağıda ifade edildiği gibidir.

Çizelge 4.1. 4x4 karesel olumsuzluk tablosu için KNÇS modelinin gösterimi



KNÇS modeli koşul, tam simetri ve çarpıklık üzerine kurulduğu için beklenen sıklık eşitliği, koşul parametresi (c), simetri parametresi (φ_k) ne nokta çarpıklık parametresine (η) bağlıdır. KNÇS modeline ait parametre sayısı $\frac{1}{2}I(I+3)$ ' tür. Model parametre sayısına bağlı olarak elde edilen KNÇS modeline ait serbestlik derecesi ise $sd_{KNÇS} = \frac{I^2-3I-2}{2}$ dir.

Çarpık simetri modelleri yarı simetri modelini temel aldıkları için bu modelle birlikte ifade edilmesi gerektiği daha önceki bölümlerde ifade edilmişti.

Koşullu nokta çarpık simetri modeline ilişkin parametrelerin gözeler göre dağılımı matris yapısında verilmiştir. N gösterimiyle ifade edilen bu matrisi oluşturan N_{ij} elemanları tüm (i,j) ler aşağıda verilen eşitlikler ile ifade edilir [27];

$$N_{ij} = \begin{cases} \frac{I}{2} + k & k=1,2,\dots,\binom{I}{2} & i < j \\ i & i=j, i \leq (I-2) \end{cases} \quad \begin{matrix} I \text{ çift ise,} \\ \\ \end{matrix} \quad (4.2)$$

$$N_{ij} = \begin{cases} \frac{I+1}{2} + k & k=1,2,\dots,\binom{I}{2} & i < j \\ i & i=j, i \leq (I-2) \end{cases} \quad \begin{matrix} I \text{ tek ise} \\ \\ \end{matrix} \quad (4.3)$$

4X4 karesel olumsuzluk tablosu için N matris gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Koşullu nokta çarpık simetri modelinin bilgisayar ortamındaki çözümü için özetlenen Çizelge 4.2' de matris gösterimleri "TERİMLER" başlığı altında gösterilmiştir.

Çizelge 4.2. KNÇS modelinin bilgisayar ortamındaki çözümüne ait terimler

MODEL	TERİMLER
Koşullu Nokta Çarpık Simetri	$SA (SÜ) + TS + ÜA + N$

5. UYGULAMA

Tez çalışmasında, uygulama verisi olarak ailelerde, annenin babasının mesleki statüsü (ABS) ile babanın babasının mesleki statü (BBS) dağılımını çözümlleyen Miyamoto (2006) çalışmasındaki Katz (1978) verisi Uygulama 1 başlığı altında incelenecektir. 3. Bölümde yer alan modellerin tümü bu veriye uygulanmıştır.

2013 yılında Hacettepe Üniversitesi Psikometri Araştırma ve Uygulama Merkezi (HÜPAM) tarafından gerçekleştirilen 012A701001 nolu ve "Ankara İlindeki Lise 4. Sınıf Öğrencilerinin Meslek ve Üniversite Tercihlerini Etkileyen Faktörler ve Hacettepe Üniversitesinin Tercihlerdeki Yeri" başlıklı projeden öğrencilerin anne-baba eğitim düzeyi dağılımı Uygulama 2 verisi olarak kullanılacaktır.

3. bölümde yer alan modeller ve yeni önerilen model bu veri kümesine uygulanmıştır. Modellerin bilgisayar ortamındaki çözümleri için SPSS, SAS ve C++ paket programları kullanılmıştır.

5.1. Uygulama 1

Miyamoto vd. çalışmasında yer alan Tablo 4 Uygulama 1 olarak seçilmiştir. Seçilen tabloda, Amerika Birleşik Devletleri genel istatistik bürosu anketleri verisi Katz (1978) çalışmasında anne ve babanın babalarının mesleki statü dağılımı 4 mesleki statü düzeyine göre düzenlenmiştir. Verilere ait sıralama aşağıda ifade edildiği gibidir.

- (1) Profesyonel , yönetici, resmi görevli,
- (2) Büro çalışanı, satış elemanı,
- (3) Zanaatkar,
- (4) İşletme ve servis işçisi, diğer tarım işçisi

olarak yüksek sınıftan düşük sınıfa doğru sıralanmıştır. Dağılımın sıklıkları Çizelge 5.1' de verilmiştir. [24].

Çizelge 5.1. Eşlerin babaları için mesleki statülere ait veri kümesi

ABS	BBS				Toplam
	1	2	3	4	
1	44	17	4	12	77
2	10	3	6	2	21
3	29	7	22	22	80
4	13	8	21	32	74
Toplam	46	35	53	68	252

Modellerin bilgisayar ortamındaki çözümlerini gerçekleştirmek için modellere ait tasarım matrisleri elde edilmiştir. İlk aşamada Çizelge 2.3' de verilen aşamalar dikkate alınarak verilerin simetri yapısına uyumu incelenmiştir. Çizelge 5.2' de verilen sonuçlar neticesinde veri kümesinin simetri yapısına uyum göstermediği ifade edilmiştir.

İkinci aşamada veri kümesine, simetri yapısından sapan modeller uygulanmıştır. Çizelge 2.5' de ifade edilen asimetri alt modellerinin veri kümesi için çözümleri Çizelge 5.3' de, Çizelge 2.6' da ifade edilen çarpık simetri alt modellerin veri kümesi için çözümleri Çizelge 5.4' de ve MH modelinden sapmaları ifade eden \overline{MH} ve \overline{KMH} modellerinin çözümleri Çizelge 5.5' de özetlenmiştir. Uyumlu çıkan modeller arasında en iyi modeli belirlemek amacıyla uyum gösteren modellerin AIC değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.6' da ifade edilmiştir. Bu aşamada son olarak odds oranları ve model parametreleri yardımıyla veri kümesi için en uygun bulunan modeller ayrıntılı olarak incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Uygulamanın üçüncü aşamasında ise alt bölüm 3.5' de verilen MH modelinden sapma ölçümleri hesaplanarak veri kümesinin alt veya üst üçgen heterojenliği hakkında bilgi verilmiştir.

Çizelge 5.2. Simetri yapısını ifade eden modellerinin sd, G^2 ve p değerleri

MODEL	Sd	G^2	P
TS	6	27.203	0.001*
YS	3	11.681	0.009*
MH	3	18.980	0.011*

*:p<0.05

Veriler simetri yapısını ifade eden modellere uyum sağlamamaktadır. Simetri yapısı tam simetri modeline uyum sağlamadığı için bozulmuştur. Veri kümesi için tam simetri yapısına uyum olmama nedeni ise yarı simetri ve marjinal homojenlik modeline uyum olmamasıdır.

Çizelge 5.3. Asimetri alt modellerinin sd, G^2 ve p değerleri

ASİMETRİ ALT MODELLERİ	Sd	G^2	P
ÜA	5	23.044	0.001*
KA	3	1.715	0.634
SUA	5	20.092	0.001*
OA1	3	20.732	0.001*
OA2	3	9.305	0.025*
2OPA	4	19.240	0.001*

* p<0.05

Çizelge 5.4. Çarpık simetri alt modellerinin sd, G^2 ve p değerleri

ÇARPIK SİMETRİ ALT MODELLERİ	Sd	G^2	P
TÇS	2	11.628	0.003*
KPÇS	1	0.945	0.331
OEÇS	1	7.924	0.005*

* p<0.05

Çizelge 5.5. Marjinal heterojenlik modellerinin sd, G^2 ve p değerleri

MARJİNAL HETEROJENLİK MODELLERİ	sd	G^2	P
\overline{MH}	3	6.200	0.150
$\overline{KM\overline{H}}$	3	5.650	0.100

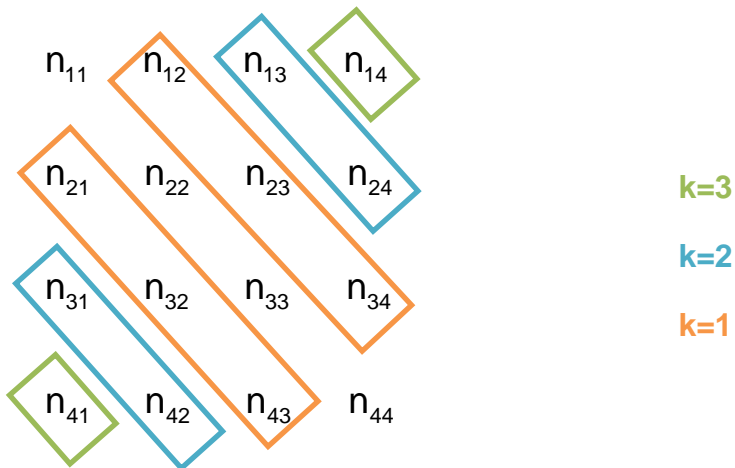
Çizelge 5.6. Uygun bulunan modeller için AIC değerleri

MODEL	AIC
KA	-4.285**
KPÇS	-1.550
\overline{MH}	0.200
$\overline{KM\overline{H}}$	-0.350***

** Eşlerin babalarının mesleki statülerini, aralarındaki statü düzeyi farkına göre karşılaştırmak için veriye en uygun model KA modelidir.

*** Eşlerin babalarının mesleki statülerini, buldukları statü düzeyinde olma olasılıklarına göre karşılaştırmak için veriye en uygun model $\overline{KM\overline{H}}$ modelidir.

Köşegen asimetri modeli için parametre tahminleri;



Çizelge 5.7. KA modeli altında parametre tahminlerine ait eşitlik sonuçları

$x_{(1)}^+ = \sum_{t=1}^3 x_{t,t+1} = x_{12} + x_{23} + x_{34} = 45$	$x_{(1)}^- = \sum_{t=1}^3 x_{1+t,t} = x_{21} + x_{32} + x_{43} = 38$
$x_{(2)}^+ = \sum_{t=1}^2 x_{t,t+2} = x_{13} + x_{24} = 6$	$x_{(2)}^- = \sum_{t=1}^2 x_{2+t,t} = x_{31} + x_{32} = 37$
$x_{(3)}^+ = \sum_{t=1}^1 x_{t,t+3} = x_{14} = 12$	$x_{(3)}^- = \sum_{t=1}^1 x_{3+t,t} = x_{41} = 13$

Çizelge 5.8. KA modeli için parametre tahminleri

$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$
1.180	0.160	0.920

Parametre tahminlerine göre;

- ❖ Annenin babasının mesleki statüsünün babanın babasının mesleki statüsünden 1 seviye fazla olması olasılığı 1 seviye az olma olasılığından 1.18 kat daha fazladır.
- ❖ Babanın babasının mesleki statüsünün annenin babasının mesleki statüsünden 2 seviye fazla olması olasılığı 2 seviye az olma olasılığından 6.25 (1/0.16) kat daha fazladır.
- ❖ Babanın babasının mesleki statüsünün annenin babasının mesleki statüsünden 3 seviye fazla olması olasılığı 3 seviye az olma olasılığından 1.09 (1/0.92) kat daha fazladır.

Koşullu marjinal heterojenlik modeli için odds oranları;

Çizelge 5.9. Koşullu marjinal heterojenlik modeli için beklenen sıklıklar

ABS	BBS				Toplam
	1	2	3	4	
1	44	21.106	4.386	10.418	35.907
	14.180	3	7.051	1.834	23.050
2	27.434	6.390	22	15.283	49.125
3	14.401	8.494	20.023	32	42.918
4					
Toplam	56.015	35.990	31.460	27.535	151

Koşullu marjinal heterojenlik modeline göre $p_{i.}^*/p_{.i}^*$ veya $p_{.i}^*/p_{i.}^*$ odds oranı e^{Φ} ya eşit olduğu belirtilmişti. Elde edilen beklenen sıklıklardan hesaplanan odds oranları aşağıda ifade edildiği gibidir;

Çizelge 5.10. KMH modeli altında odds oranları

$\frac{p_{1.}^*}{p_{.1}^*} = \frac{35.910}{56.034} = 0.640 \quad (\Phi < 0, \Phi = -0.440)$ <p style="text-align: center;">↓</p> $\frac{p_{.1}^*}{p_{1.}^*} = \frac{56.034}{35.910} = 1.560$	$\frac{p_{2.}^*}{p_{.2}^*} = \frac{23.065}{35.990} = 0.640 \quad (\Phi < 0, \Phi = -0.440)$ <p style="text-align: center;">↓</p> $\frac{p_{.2}^*}{p_{2.}^*} = \frac{35.065}{35.990} = 1.560$
$\frac{p_{3.}^*}{p_{.3}^*} = \frac{49.099}{31.466} = 1.560 \quad (\Phi > 0, \Phi = 0.440)$	$\frac{p_{4.}^*}{p_{.4}^*} = \frac{42.925}{27.509} = 1.560 \quad (\Phi > 0, \Phi = 0.440)$

$\Phi > 0$ ve $\Phi < 0$ durumlarına göre sosyal statüler için grupta yapılacak olunursa;

$\Phi > 0$ \longrightarrow 1. Sosyal statü gruplaması \longrightarrow statü 3 ve 4

$\Phi < 0$ \longrightarrow 2. Sosyal statü gruplaması \longrightarrow statü 1 ve 2

şeklinde ifade edebiliriz.

$\overline{\text{KM}}\text{H}$ modeli altında Φ odds oranı tahminine göre;

- ❖ Babanın babasının mesleki statüsünün yönetici veya büro çalışanı statüsünde olması, annenin babasının mesleki statüsünün yönetici veya büro çalışanı statüsünde olmasından **1.56** kat daha fazladır
- ❖ Annenin babasının mesleki statüsünün zanaatkar veya işçi statüsünde olması, babanın babasının mesleki statüsünün zanaatkar veya işçi statüsünde olmasından **1.56** (1/0.64) kat daha fazladır.

Genel olarak ifade edilecek olunursa;

- ❖ Babanın babasının mesleki statüsü ile annenin babasının mesleki statülerinin marjinal dağılımları farklıdır.
- ❖ Babanın babasının mesleki statüsünün yönetici veya büro çalışanı statüsünde olması ile annenin babasının mesleki statüsünün zanaatkar veya işçi statüsünde olma olasılığı, babanın babasının mesleki statüsünün zanaatkar veya işçi statüsünde olması ile annenin babasının mesleki statüsünün yönetici veya büro çalışanı statüsünde olma olasılığından daha fazladır.

$\overline{\text{KM}}\text{H}$ modelinde (0,1) aralığında değer alan Φ^* parametresi, 0.22 olarak hesaplanmıştır. Bu da, marjinal homojenlikten sapma (koşullu marjinal heterojenliğe uyum) derecesinin 0.22 olduğunu ifade etmektedir. Bu durumda, koşullu marjinal heterojenlik modeline uyum olmakla birlikte marjinal homojenlik modelinden sapma derecesinin çok yüksek olmadığı söylenebilmektedir.

Marjinal Homojenlik modelinden sapma ölçüsü;

Koşullu satır ve sütun marjinal dağılımlarının kullanıldığı $\overline{\text{KM}}\text{H}$ modeli veri kümesine en iyi uyum sağlayan marjinal heterojenlik modeli olarak ifade edildiğinden, sapma ölçüsü olarak ikinci bölüme ait alt başlıklarda ifade edilen KMH modeline ait eşitliklerden yararlanarak hesaplanan Ölçü 2 'yi yorumlamak gerekmektedir. Ölçü 2' ye ait eşitlikler ve çözümleri aşağıda ifade edildiği gibidir;

Çizelge 5.11. Alt ölçü 2.1' e ait eşitlik sonuçları

i	$p_{i.}^*$	$p_{.i}^*$	T_i^X	T_i^Y	$T_{1(i)}^\circ$	$T_{2(i)}^\circ$	$\theta_i^{(1)}$
1	0.215	0.338	0.215	0.338	0.074	0.117	57.570
2	0.117	0.208	0.332	0.546	0.115	0.189	58.650
3	0.377	0.202	0.709	0.748	0.245	0.259	46.550

$$\Lambda_1 = T_1^X + T_1^Y + T_2^X + T_2^Y + T_3^X + T_3^Y = 2.888 \quad \Upsilon_1 = \frac{4}{\pi} [2.4 + 4.15 + 0.78] = 0.163$$

Çizelge 5.12. Alt ölçü 2.2' ye ait eşitlik sonuçları

i	U_i^X	U_i^Y	$U_{1(i)}^\circ$	$U_{2(i)}^\circ$	$\theta_i^{(2)}$
1	0.785	0.662	0.252	0.213	49.820
2	0.668	0.454	0.195	0.146	55.790
3	0.291	0.252	0.093	0.081	49.110

$$\Lambda_2 = U_1^X + U_1^Y + U_2^X + U_2^Y + U_3^X + U_3^Y = 3.112 \quad \Upsilon_2 = \frac{4}{\pi} [2.240 + 3.680 + 0.720] = 0.150$$

Ölçü 2;

$$\Upsilon = \frac{\Upsilon_1 + \Upsilon_2}{2} \longrightarrow \Upsilon = \frac{\Upsilon_1 + \Upsilon_2}{2} = \frac{0.163 + 0.150}{2} = 0.160$$

- ❖ Eşlerin babalarının mesleki statüleri için MH modelinden sapma alt üçgen koşullu marjinal heterojenlik yönünde daha fazladır.

44	17	4	12
10	3	6	2
29	7	22	22
13	8	21	32

üst üçgene ait gözlem toplamı= 63

alt üçgene ait gözlem toplamı= 88

5.2. Uygulama 2

Tanıtıcı bilgisi Hacettepe Üniversitesi Psikometri Araştırma ve Uygulama Merkezi (HÜPAM) , “Ankara İlindeki Lise 4. Sınıf Öğrencilerinin Meslek ve Üniversite Tercihlerini Etkileyen Faktörler ve Hacettepe Üniversitesinin Tercihlerdeki Yeri” , Proje No: 012A701001 olan ve 2013 yılında gerçekleştirilen araştırmadan öğrencilerin anne-baba eğitim düzeyi dağılımı incelenmiştir. Eğitim düzeyi sıralaması projede aşağıda ifade edildiği gibi verilmiştir.

Anne ve babanın eğitim düzeyi sıralaması:

- (1) Okuryazar olmayan,
- (2) Okuryazar ve ilkokul mezunu ,
- (3) Ortaokul mezunu,
- (4) Lise mezunu,
- (5) Üniversite mezunu

Dağılımın sıklıkları Çizelge 5.13' de verilmiştir.

Çizelge 5.13. Anne ve babaların eğitim düzeylerine ait veri kümesi

Anne	Baba					Toplam
	1	2	3	4	5	
1	46	179	42	15	7	289
2	10	2081	889	738	359	4077
3	3	149	999	820	366	2337
4	2	89	301	1189	1035	2616
5	0	17	29	275	1122	1443
Toplam	61	2515	2260	3037	2889	10762

Uygulama 2' de öncelikle Çizelge 2.3, 2.5 ve 2.6' da verilen modeller incelenmiş ve modellere ait sonuçlar Çizelge (5.13)' de özetlenmiştir. Uygulamanın son aşamasında tez kapsamında önerilen model veri kümesine uygulanmış ve sonuçlar ayrıntılı olarak yorumlanmıştır.

Çizelge 5.14. Simetri yapısını ve simetri yapısından sapmaları ifade eden modeller ile önerilen modelin sd, G^2 ve p değerleri

MODEL	sd	G^2	p
TS	10	2854.188	0.001*
YS	6	40.829	0.001*
MH	4	3002.200	0.001*
ÜA	9	230.199	0.001*
KA	6	93.127	0.001*
SUA	9	118.555	0.001*
OA1	6	109.814	0.001*
OA2	6	184.816	0.001*
2OPA	8	93.302	0.001*
TÇS	5	23.971	0.001*
KPÇS	3	22.350	0.001*
OEÇS	3	4.019	0.260
\overline{MH}	4	636.160	0.001*
\overline{KMH}	4	875.840	0.001*
KNÇS	4	5.157	0.272

*p<0.05

Anne baba eğitim düzeyi dağılımı OEÇS ve KNÇS modelleri dışındaki tüm modellere uyum göstermemektedir.

Çizelge 5.15. Uygun bulunan modeller için AIC değerleri

MODEL	AIC
OEÇS	-1.981
KNÇS	-3.843

OEÇS ve KNÇS modellerinden en uygun olanı minimum AIC değerine göre KNÇS modelidir.

KNÇS modeli beklenen sıklıkları ve ters köşegen üzerinde orta noktaya en uzak 2x2 alt tabloları Çizelge 5.16' da gösterilmiştir.

Çizelge 5.16. KNÇS modeli altında beklenen sıklıklar

Anne	Baba					Toplam
	1	2	3	4	5	
1	46	177.46	42.43	16.196	6.915	289
2	11.541	2081	891.65	728.98	363.827	4077
3	2.57	146.35	999	826.28	362.8	2337
4	0.804	98.021	294.72	1189	1033.459	2616.001
5	0.085	12.173	32.2	276.54	1122	1442.998
Toplam	61	2515	2260	3037	2889.001	10762

KNÇS modeli altında, bilgisayar ortamındaki çözümlere ait parametre tahminleri Çizelge 5.17' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.17. KNÇS model parametreleri

PARAMETRE	η	φ_4	φ_5	φ_8	φ_9	c
PARAMETRE TAHMİNLERİ	0.904	-12.322	-14.077	-6.614	-8.213	-0.832
STANDART HATA	0.209	0.958	1.172	0.870	1.064	0.137
Z DEĞERİ	4.332*	-12.862*	-12.012*	-7.603*	-7.717*	-6.077*

*:p<0.05

Belirlenen noktaya en uzak mesafedeki gözlemlere ait odds oranları parametre tahminleri üzerinden aşağıdaki eşitliğe göre hesaplanabilir;

$$\hat{\theta}_{14} = \frac{\hat{m}_{14} \times \hat{m}_{25}}{\hat{m}_{24} \times \hat{m}_{15}} = \frac{e^{\eta+\varphi_4+C} \times e^{\eta+\varphi_5+C}}{e^{\eta+\varphi_3+C} \times e^{\eta+\varphi_5+C}} = e^{0.156} = 1.170$$

KNÇS modeli altında odds oranı tahminine göre, anne ve babanın eğitim düzeyleri arasındaki farkın **3** (I-2) derece olma olasılığı, **2** (I-3) ya da **4** (I-1) derece olma olasılığından 1.17 kat daha fazladır.

5.3 Sonuç ve Tartışma

Tez çalışmasında öncelikle karesel olumsuzluk tablolarında simetri yapısını ifade eden modeller ile araştırmacının denemesi gereken simetrik olmayan modeller tanıtılmıştır. Uygulama bölümünde yer alan 4x4 mesleki statü dağılımın, simetrik olmayan model çözümlenmesi sonunda 4 farklı mesleki statü grubu yerine 2 farklı mesleki statü grubu olması önerisinde bulunulması gerekir.

Uygulamanın ikinci bölümünde üniversite sınavına girecek olan lise son sınıf öğrencilerinin anne ve babalarının eğitim düzeyi dağılım verilerini içeren 5x5 boyutlu karesel olumsuzluk tablosu kullanılmıştır. Simetri yapısının bozulduğu çözümlenmelerle belirlendiği için veri kümesine önerilen model uygulanmıştır. Modele uyum 0.272 olasılığında bulunmuştur.

MH' den sapma derecesini gösteren $|p_{i.}^w - p_{.j}^w| = \left| \frac{p_{i.} - p_{.j}}{p_{i.} + p_{.j}} \right| = \Delta^*$ olarak önerilen

parametrenin, Δ parametresine göre üst sınıra sahip olduğunu ve (0,1) aralığında değer aldığını göstermek için yapılan hesaplamaya Çizelge 5.18' de yer verilmiştir.

Çizelge 5.18. 4x4 karesel olumsuzluk tablosu altında Δ^* parametresi için hesaplama sonuçları

p_i	p_i	Δ^*	p_i	p_i	Δ^*
0	0		0.8	0	1
	0.00000001	1		0.00000001	0.999999975
	0.5	1		0.5	0.230769231
	0.8	1		0.8	0
	0.99999999	1		0.99999999	0.111111106
	1	1		1	0.111111111
p_i	p_i	Δ^*	p_i	p_i	Δ^*
0.00000001	0	1	0.99999999	0	1
	0.00000001	0		0.00000001	0.999999980
	0.5	0.99999996		0.5	0.333333329
	0.8	0.99999975		0.8	0.111111106
	0.99999999	0.99999998		0.99999999	0
	1	0.99999998		1	0.00000005
p_i	p_i	Δ^*	p_i	p_i	Δ^*
0.5	0	1	1	0	1
	0.00000001	0.99999996		0.00000001	0.999999980
	0.5	0		0.5	0.333333333
	0.8	0.230769231		0.8	0.111111111
	0.99999999	0.333333329		0.99999999	0.000000005
	1	0.333333333		1	0

Karesel tablo çözümlerinde çalışmanın amacına göre test edilecek modeller için tam simetri (TS), yarı simetri (YS), marjinal homojenlik (MH), asimetri (ÜA,KA,SUA,OA1,OA2,2OPA), çarpık simetri (TÇS,KPÇS,OEÇS) ve marjinal heterojenlik ($\overline{MH},\overline{KM}$) sıralaması uygulanmalıdır. En uygun model beklenen sıklıkları üzerinden ya da parametre tahminleri kullanılarak odds oranları hesaplanmalı ve tablo ayrıntılı olarak yorumlanmalıdır.

Çok boyutlu karesel tablolarda model çözümleri, gelecek çalışmaların temelini oluşturmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Lawal, H. B., *Categorical Data Analysis with SAS and SPSS Applications*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, 449-451, **2003**
- [2] Agresti, A., *An Introduction Categorical Data Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 28-30,141-142, **2007**
- [3] Aktaş, S., Saraçbaşı T., Karesel Olumsuzluk Tablolarının Çözümlemesi, *Hacettepe Mühendislik Bilimleri Dergisi*, Cilt 16, sayfa 125-143, **1995**
- [4] Tomizawa, S., Miyamoto, N., Funato, R., Conditional Difference Asymmetry Model for Square Contingency Tables with Nominal Categories, *Journal of Applied Statistics*, 31 (3), 271-277, **2004**
- [5] Goodman, L. A., The Analysis of Cross-Classified Data Ordered and/or Unordered Categories: Association Models , Correlation Models, and Asymmetry Models for Contingency Tables with or without Missing Entries, *The Ann. of Statistics*, 13, 10-69, **1985**
- [6] Bishop, Y. M. ; Fienberg, S. ; Holland, P. W. *Discrete Multivariate Analysis*, Theory and Practice, MIT Press, London, **1975**
- [7] Lawal, H. B., Sundheim, R. A., Generating Factor variables for Asymmetry, Non-independence and Skew-symmetry models in Square Contingency Tables using SAS, <http://www.istatsoft.org/v07/i08/paper>, (Aralık **2014**)
- [8] Stuart, A., A Test for Homogeneity of the Marginal Distributions in a Two-way Classification, *Biometrika*, 42, 412-416, **1955**
- [9] Tahata, K., Iwashita, T., Tomizawa, S., Measure of Departure from Conditional Marginal Homogeneity for Square Contingency Tables with Ordered Categories, *Statistics*, 42 (5), 453-466, **2008**
- [10] Caussinus, H., *Contributions a l'analyse Statistique des Tableaux de Correlation*, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 29, 77-182, **1965**
- [11] Tomizawa, S., Miyamoto, N., Ouchi, M., Decompositions of Symmetry model into Marginal Homogeneity and distance subsymmetry in square contingency tables with ordered categories, *Statistical Journal*, 4 (2), 153-161, **2006**
- [12] Tahata, K. , Yoshimoto. T. , Tomizawa., Mariginal Asymmetry Measure Based on Entropy for Square Contingency Tables with Ordered Categories, *American Journal of Mathematics and Statistics*, 3(3), 95-98, **2013**
- [13] Lawal, H. B., Review of Non-Independence, Asymmetry, Skew-Symmetry and Point-Symmetry Models in the Analysis of Social Mobility Data, *Quality&Quantity*, 38, 259-289, **2004**
- [14] McCullagh, P., A class of PArametric Models for the Analysis of Square Contingency Tables with Ordered Categories, *Biometrika*, 65, 413-418, **1978**

- [15] Tomizawa. S., *Three Kinds of Decomposition for the Conditional Symmetry Model in a Square Contingency Table*, *J. Japan Statisti. Sco.*, 14, 413-418, **1984**
- [16] Tomizawa. S., *A Decomposition of Linear Diagonal Parameter Symmetry Model for Square Contingency Tables with ordered categories*, *Biom. J.*, 32 (6), 761-766, **1990**
- [17] Tomizawa. S., *Diagonal Weighted Marginal Homogeneity Models and Decompositions for Linear Diagonal Parameter Symmetry*, *Biom. J.*, 1, 45-55, **1987**
- [18] Tomizawa. S., *Decomposition for 2-Ratios-Parameter Symmetry Model in a Square Contingency Table with Ordered Categories*, *Commun. Statist. Theor. Met.*, 16, 477-488, **1987**
- [19] Tomizawa. S., *Decomposition for Odds-symmetry Models in a Square Contingency Table with Ordered Categories*, *J. Japan Statisti. Sco.*, 15, 151-159, **1985**
- [20] Lawal, H. B., *Modelling Symmetry Models in Square Contingency Tables with Ordered Categories*, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 71 (1), 59-83, **2001**
- [21] Tomizawa. S., *Models Having Structure of Various Symmetry Plus Diagonal Exponential Frequencies Applied to Data From Endometrial Cancer Study*, *Biom. J.*, 32 (7), 835-841, **1990**
- [22] Yamaguchi, K., *Some models for the analysis of asymmetric association in square contingency tables with ordered categories*,
- [23] Tomizawa, S., *Another Linear Diagonals-Parameter Symmetry Model for Square Contingency Tables with Ordered Categories*, *South African Statist. J.*, 24, 117-125, **1990**
- [24] Miyamoto, N., Tahata, K., Ebie, H., Tomizawa, S., *Marginal Inhomogeneity Models for Square Contingency Tables with Nominal Categories*, *Journal of Applied Statistics*, 33 (2), 203-215, **2006**
- [25] Tahata, K. , Kawasaki, K. , Tomizawa S., *Asymmetry Index on Marginal Homogeneity for Square Contingency Tables with Ordered Categories*, *Open Journal of Statistics*, 2, 198-203, **2012**
- [26] Tomizawa. S. , Niyamoto. N. , Ashihara. N., *Measure of Departure from Marginal Homogeneity for Square Contingency Tables Having Ordered Categories*, *Behaviormetrika*, 30, 173-193, **2003**
- [27] Lawal, H. B., *Implementing point-symmetry models for square contingency tables having ordered categories in SAS*, *J. Ital. Statist. Soc.*, 1 (3), 1-22, **2000**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Gökçen EFENDİOĞLU

Doğum Yeri: ORDU

Medeni Hali: Bekar

E-posta: gefendioglu@hacettepe.edu.tr

Adresi: Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü 06800 Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise: Gazi Anadolu Lisesi

Lisans: Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik A.B.D.

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri Seviye

İş Deneyimi

2013-2014 Bartın Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi

2014-... Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

-

Tezden Türetilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Yazılmış Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-