

## ÖZET

### ARDIŞIK OLASILIK ORAN TESTİNE DAYALI KONTROL KARTLARI

**DİLŞAD ERKEK**

**Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. SEVİL BACANLI**

**Temmuz 2013, 63 sayfa**

İstatistiksel süreç kontrollerinde kontrol kartları bir üretim sürecinin istatistiksel olarak kontrolde olup olmadığını test etmek veya izlemek için oldukça önemli araçlardır.

Ardışık olasılık oran testi ise kalite kontrol uygulamalarında oldukça sık kullanılan ve kalite kontrol çalışmalarında zaman ve para bakımından tasarruf sağlayan bir yöntem olarak bilinmektedir. Ardışık olasılık oran test kontrol kartları Wald'ın önerdiği ardışık olasılık oran testlerine dayanarak geliştirilmiştir.

Tez çalışmasında literatürde normal ve binom dağılımı için geliştirilen ardışık olasılık oran kontrol kartları incelenmiş; ortalama ( $\bar{X}$ ) kontrol kartı ve kusurlu oranı ( $p$ ) kontrol kartı ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Ardışık Olasılık Oran Testleri, Kontrol Kartları, Karakteristik İşlem Eğrisi, Ortalama Örneklem Sayısı, *SPRT*

## ABSTRACT

### CONTROL CHARTS BASED ON SEQUENTIAL PROBABILITY OF RATIO TEST

**DİLŞAD ERKEK**

**Master of Science, Department of Statistics**

**Supervisor: Ast. Prof. Dr. SEVİL BACANLI**

**July 2013, 63 pages**

In statistical process controls, control cards are very important tools for testing statistically if the process is in control or not and evaluating the production process.

Sequential probability test is a well-known method with its advantages in time and money disposal. Sequential probability ratio test has been built based on sequential probability ratio test studies which was submitted by Wald.

In thesis, sequential probability ratio test control chart which has been built for normal and binomial distributions, is studied and then sequential probability ratio test control charts are compared to average ( $\bar{X}$ ) control charts and defective ratio ( $p$ ) control charts.

**Key Words:** Sequential Probability Ratio Tests, Control Charts, Operational Curve, Average Number of Sample, *SPRT*

## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam boyunca gösterdiği özveri ve sarf ettiği eősiz emeği ile bana yol gösteren ve en önemlisi sabrını benden esirgemeyen değerli tez danıőmanım Doç. Dr. Sevil BACANLI'ya,

Bu tez çalıőması sırasında bana her türlü desteği gösteren ve yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Süleyman Günay'a,

Doęduęum andan itibaren her zaman ve her durumda büyük bir destekle yanımda olan, varlıklarıyla kendimi güvende hissettiren, en kıymetlilerim canım Annem Őerife ERKEK ve canım Babam Selahattin ERKEK'e,

Hayatıma mutluluk ve huzur getiren, her türlü kararımda beni yalnız bırakmayan, sonsuz sabrı ve özverisi ile beni güçlü kılan en yakın dostum ve sevgili eőim Yankı AKAR'a,

Teőekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

## Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
KISALTMALAR DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. ARDIŞIK OLASILIK ORAN TESTİ .....	3
2.1 A ve B Sabitlerinin Belirlenmesi.....	4
2.2 Karakteristik İşlem Eğrisi .....	5
2.3 Ortalama Örneklem Sayısı Fonksiyonu.....	9
2.4 Binom Dağılım için Ardışık Olasılık Oran Testi .....	11
2.5 Normal Dağılım için Ardışık Olasılık Oran Testi.....	16
3. ORTALAMA ( $\bar{X}$ ) ve KUSURLU ORANI ( $p$ ) İÇİN KONTROL KARTLARI .....	21
3.1 Ortalama ( $\bar{X}$ ) Kart.....	21
3.1.1 Ortalama ( $\bar{X}$ ) Kartın Karakteristik İşlem Eğrisi.....	25
3.2 Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kart .....	27
3.2.1 Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kartının Karakteristik İşlem Eğrisi.....	31
4. OLASILIK ORANLARININ ARDIŞIK TESTİ İÇİN KONTROL KARTLARI.....	33
4.1. Normal Dağılımda <i>SPRT</i> Kartı Kullanımı .....	33
4.1.1 <i>SPRT</i> Kartın İstatistiksel Özellikleri ve <i>CD</i> Yaklaşımı .....	37
4.1.2 Normal Dağılım için <i>SPRT</i> Kartın Tasarımı.....	39
4.1.3 <i>SPRT</i> Kartlarının ve $\bar{X}$ Kartın Karşılaştırılması.....	40
4.2 Binom Dağılımda <i>SPRT</i> Kartı Kullanımı .....	42
4.2.1 Binom Dağılım için <i>SPRT</i> Kartların İstatistiksel Özellikleri ve <i>CD</i> Yaklaşımı .....	45
4.2.2 Binom Dağılım için <i>SPRT</i> Kartın Tasarımı .....	46
4.2.3 <i>SPRT</i> Kontrol Kartı ve Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kart Karşılaştırması .....	47
4.3 Sayısal Örnek .....	53
5. SONUÇLAR.....	57
KAYNAKLAR .....	58
EKLER .....	60
ÖZGEÇMİŞ .....	62

## KISALTMALAR DİZİNİ

<b>SPRT</b>	Sequential Probability Ratio Tests- Ardışık Olasılık Oran Testleri (AOOT)
<b>ASN</b>	Average Sample Number- Ortalama Örneklem Sayısı
<b>ARL</b>	Average Run Length-Ortalama Süreç Uzunluğu
<b>ANSS</b>	Average Number of Sample to Signal- Sinyale dek Alınan Ortalama Örneklem Sayısı
<b>SSATS</b>	Steady- State Average Time to Signal- Durağan ATS
<b>OC</b>	Operational Curve- Karakteristik İşlem Eğrisi
<b>SPRT</b>	SPRT Fixed Times- Sabit Zamanlı AOOT
<b>AOR</b>	Average Observation Rate- Ortalama Gözlem Oranı
<b>ATS</b>	Average Time to Signal- Sinyale Dek Geçen Ortalama Zaman
<b>ANOS</b>	Average Number of Observations to Signal- Sinyale Dek Beklenen Gözlem Sayısı
<b>ANTS</b>	Average Number of Tests to Signal- Sinyale Dek Gerçekleşen Ortalama Test Sayısı
<b>CD</b>	Corrected Diffusion- Düzeltilmiş Yayılım

# 1. GİRİŞ

İstatistiksel tahmin yöntemleri bir modelin bilinmeyen kısımları hakkında parametrik ya da parametrik olmayan problemlerin çözümleri ile ilgili teknikleri ele almaktadır. Bu tahminleri yapmak için araştırmacı çoğu zaman sabit bir örneklem büyüklüğüne ihtiyaç duymaktadır. Sabit örneklem analizi, eldeki probleme, daha önceden belirlenmiş bir modele uygun toplanmış bir takım verinin analizi ile çözüm bulabilmektedir. Dolayısıyla örneklem büyüklüğü  $n$ hin ve örnekleme yönteminin, veriler elde edilirken değil daha önceden belirlenmesi gerekmektedir. Ardışık analizlere ait teoriler ve yöntemler ise verilerin niteliğinin ve genişliğinin araştırma öncesinde değil; araştırma esnasında gözlemlenmesine dayalı bir çözüm yolu için geliştirilmiştir [1].

Sabit örneklem süreci kendi doğal yapısı nedeniyle araştırma esnasında birikimli bilgiyi kullanmakta başarısız olmaktadır. Ardışık test yöntemleri ise diğer sabit örneklem yöntemlerine nazaran gözlem sayısını azaltarak daha avantajlı olabilmektedir. İkinci bir avantajı ise ardışık yöntemde araştırma sürerken veriler analize alınabilir; araştırmacı analize başlamak için tüm verilerin elde edilmesini beklemek zorunlu değildir.

Wald [1] dağılımı bilinen bir kitlenin parametrelerine ilişkin kurulan hipotezlerin, karar verme sürecinde ardışık olasılık oran testini (Sequential Probability Ratio Test, SPRT) geliştirmiştir. Ardışık testi diğer testlerden ayıran temel özellik birimlerin ardışık olarak elde edilmesi ve test için gerekli örneklem genişliğinin bir rastlantı değişkeni olmasıdır. Bu nedenle test için gerekli örneklem büyüklüğü ortalama örneklem sayısı (Average Sample Size, ASN) olarak tanımlanır. SPRT, kalite kontrol uygulamalarında oldukça sık kullanılır. Dolayısıyla yapılan kalite kontrol çalışmalarında zaman ve para bakımından tasarruf sağlanmaktadır. İstatistiksel süreç kontrollerinde kontrol kartları bir üretim sürecinin istatistiksel olarak kontrolde olup olmadığını test etmek veya izlemek için oldukça önemli araçlardır. Kalite kontrol kartları arasında SPRT'ye dayanarak birikimli toplam kontrol kartları (CUSUM) farklı dağılımlar için geliştirilmiştir [2; 3; 4; 5].

Üretim kontrolünde ardışık test yöntemi ile elde edilen kontrol kartlarının kullanımı oldukça yaygındır. Kontrol kartları üretim süreci esnasında meydana gelebilecek değişimi tespit etmek ve üretime ait çıktı verilerini görmek amacıyla kullanılan

istatistiksel araçlardır. Kontrol kartları üretim sürecinde meydana gelen değişimleri ortaya çıkarmak, bu değişimlerin nedenlerini bulmak, süreç için uygun düzeltmeleri yapmak gibi amaçlara hizmet etmektedir.

Bir üretim sürecinde üretilen ürünlerin daha önceden belirlenen standartlardan göstermiş olduğu küçük veya büyük sapmayı mümkün olduğunca çabuk tespit edebilmek, kalite kontrolünde çok önemlidir. Üretim sürecine zamanında müdahale edilerek, sürecin tekrar istenilen seviyeye döndürülmesi ve meydana gelebilecek kayıpların önüne geçilmesi mümkün olmaktadır. Kalite kontrol için üretim sürecinde uygulanması gereken kontrol kartları, süreçte ilgilenilen kalite karakteristiğine göre değişiklik gösterir [6].

Ardışık Olasılık Oran Testi (Sequential Probability Ratio Tests, *SPRT*) Wald [1] tarafından geliştirilen oldukça yüksek etkinliğe sahip istatistiksel bir testtir. *SPRT* kartları, gözlemlerin teker teker işleme alındığı ve her bir gözlemin sonucu ortaya çıkıp kaydedilmeden diğer bir gözlemin işleme alınmadığı ve ardışık olasılık oran testinin  $n$  adım için uygulanması ile oluşmaktadır.

Stoumbos ve Reynolds [7], Reynolds ve Stoumbos [8] ve Reynolds ve Stoumbos [9] çalışmalarında Wald [1] tarafından geliştirilen *SPRT*'yi temel alarak normal ve binom dağılım için *SPRT* kartlarını geliştirmişlerdir. *SPRT*'de ortalama örneklem sayısı bellidir; maksimum örneklem sayısı belli değildir. Lorden [10]; Li, Pu ve Tsung [6], Qu, Wu ve Goh [11] Keiffer Weiss problemini [12] temel alarak çift *SPRT* testleri (2-*SPRT*) geliştirmişlerdir.

Tez çalışmasında öncelikle *SPRT*'nin genel yapısı verilmiş; testlerin binom ve normal dağılım için genel yapıları ile dağılımlara ait örneklemelerden elde edilen kontrol kartlarının tasarımı incelenmiştir. Ayrıca literatürde sıkça kullanılan ortalama ( $\bar{X}$ ) ve kusurlu oranı ( $p$ ) kartlarının yapısı ile tasarımları ele alınmıştır. Daha sonrasında ise ortalama ( $\bar{X}$ ) kart ile kusurlu ( $p$ ) kontrol kartları ile *SPRT* kartın karşılaştırması yapılmıştır. Kartların işleyişini göstermek amacıyla uygulama yapılmış sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. ARDIŞIK OLASILIK ORAN TESTİ

Dağılımı bilinen bir kitlenin parametrelerine ilişkin hipotezlerin karar verme sürecinde, olasılık oranlarının ardışık testlerinden yararlanılmaktadır. Ardışık testi diğer testlerden ayıran temel özellik test için gereken örneklem genişliğinin daha önceden belirlenmemiş olup bir rastlantı değişkeni olmasıdır. Dolayısıyla *SPRT* de çözümlene için sabit örneklem genişlikli testlere nazaran daha az örneklem genişliğine gereksinim duyulmaktadır.

*SPRT* de örneklem genişliği ( $n$ ) bir rastlantı değişkenidir ve dolayısıyla beklenen değeri söz konusudur. Bu beklenen değere Ortalama Örneklem Sayısı (Average Sampling Number, ASN) adı verilir. Böylece *SPRT* de test için gerekli olan örneklem genişliği ( $n$ ) belirlenen hipotez testleri için ortalama olarak elde edilebilmektedir.

Wald [1], Neymann-Pearson Teoremi'ni temel alarak *SPRT* yi geliştirmiştir.  $X$  rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_{\theta}(x)$  ile gösterilsin.  $X$  rastlantı değişkeni ardışık  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerini alsın.  $f_{\theta}(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu parametresine ilişkin;

$$H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta = \theta_1, (\theta_0 < \theta_1) \quad (2.1)$$

basit hipotezleri kurulsun.  $H_0$  hipotezi doğru iken olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_{\theta_0}(x)$ ,  $H_1$  doğru iken olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_{\theta_1}(x)$  ile gösterilir.

$X$  rastlantı değişkenleri birbirlerinden bağımsız iseler;

$$\begin{aligned} f_{\theta_0}(x) &= f_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\theta_0}(x_1) \dots f_{\theta_0}(x_n), H_0 \text{ doğru iken} \\ f_{\theta_1}(x) &= f_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\theta_1}(x_1) \dots f_{\theta_1}(x_n), H_1 \text{ doğru iken} \end{aligned} \quad (2.2)$$

yazılabilir.  $H_0$  hipotezini  $H_1$  hipotezine göre ardışık test yöntemi ile test etmek için, olasılık yoğunluk fonksiyonları oranı olan olabilirlik oranı  $L_n$ 'den yararlanır. Olabilirlik oranı;

$$L_n = \prod_{i=1}^n \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} \quad (2.3)$$

biçimindedir [1].

Ardışık çözümlenmede testi gerçekleştirmek için birinci tip hata  $\alpha$ ,  $P(H_0 \text{ ret} | H_0 \text{ doğru iken})$  biçiminde tanımlanırken; ikinci tip hata  $\beta$ ,



$P(H_1 \text{ ret} | H_1 \text{ doğru iken})$  biçiminde tanımlanmaktadır. SPRT için  $\alpha$  ve  $\beta$  olasılıkları önceden belirlenir ve ardışık testler için  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerine bağlı olan  $A = \frac{\alpha}{1-\beta}$  ve  $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$  ( $0 < B < A < \infty$ ) sabit değerleri önceden bulunur.

$L_n$  oranı, logaritma yardımıyla daha kolay bulunabileceğinden olabilirlik oranının logaritması alınarak, test istatistiği

$$\ln L_n = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$Z_i = \ln \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} \quad (2.5)$$

olacaktır [1]. Böylece  $n$ 'inci aşamada  $\ln L_n$  bulunarak  $\ln A$  ve  $\ln B$  değerleriyle aşağıda verildiği gibi karşılaştırılır:

- 1)  $\sum_{i=1}^n Z_i \leq \ln B$  ise  $H_0$  kabul edilir ve süreç sona erdirilir.
- 2)  $\sum_{i=1}^n Z_i \geq \ln A$  ise  $H_0$  reddedilerek sürece son verilir.
- 3)  $\ln B < \sum_{i=1}^n Z_i < \ln A$  ise gözlemlerin yetersiz olduğuna karar verilip bir gözlem daha analize dâhil edilerek süreç sürdürülür [1].

## 2.1 A ve B Sabitlerinin Belirlenmesi

Ardışık testlerde amaç  $\alpha$  ve  $\beta$  hata olasılıklarını aşmadan en küçük örneklem büyüklüğünde  $H_0$  ve  $H_1$  hipotezlerinden biri hakkında güvenilir bir karar vermektir. Buna bağlı olarak  $A$  ve  $B$  sabitlerinin önceden belirlenmesi gerekmektedir. Eğer  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$  örnekleminde  $n = 1, 2, \dots$  olmak üzere  $H_0$  kabul edilerek sürece son verilmişse,

$$L_n \leq B$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} \leq B \quad (2.6)$$

olduğu bilindiğine göre;

$$f_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq B f_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.7)$$

biçiminde ifade edilebilir.  $H_0$ 'ın kabul edildiği biliniyorsa  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin tanımından

$$\beta \leq B(1 - \alpha)$$

$$B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (2.8)$$

sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde eğer  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$  örnekleminde  $n = 1, 2, \dots$  olmak üzere  $H_0$  kabul edilerek sürece son verilmişse,

$$L_n \geq A, \quad \prod_{i=1}^n \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} \geq A \quad (2.9)$$

olduğu bilindiğine göre;

$$f_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq A f_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.10)$$

sonucuna ulaşılır.  $H_0$ 'ın reddedildiği biliniyorsa Eşitlik 2.8'de belirtildiği gibi  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin tanımından;

$$(1 - \beta) \geq A \alpha \quad A \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (2.11)$$

sonucuna ulaşılır [1; 13].

## 2.2 Karakteristik İşlem Eğrisi

$X$  rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_{\theta}(x)$ ;  $\theta$ 'nin bilinen bir fonksiyonu olsun. Böylece  $H_0: \theta = \theta_0$  hipotezini kabul etme olasılığı  $\theta$ 'nin bir fonksiyonu olacaktır. Bu fonksiyona karakteristik işlem eğrisi (Operating Curve, OC) denir ve  $P(\theta)$  ile gösterilir [1; 13].

$P(\theta) = P(H_0 \text{ kabul} / H_1 \text{ yanlış ya da } H_0 \text{ yanlış})$  yazılabilir.  $L_n \leq B$  olduğunda  $H_0$ 'ın kabul edildiği ve  $B < L_n < A$  olduğunda da karar verilemediği bilindiğine göre karakteristik işlem fonksiyonu,

$$P(\theta) = P(L_1 \leq B/\theta) + \sum_{i=2}^{\infty} P(B < L_1 < A, \dots, B < L_{i-1} < A, L_i \leq B/\theta) \quad (2.12)$$

eşitliğindeki olasılıklar yardımıyla elde edilecektir. Ancak olasılıkları elde etmek güç olduğundan bir başka yolla karakteristik işlem fonksiyonu elde edilebilir. Wald tarafından geliştirilen bu yöntemde  $\left[ \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right]^h$  şeklinde yeni bir ifade tanımlanır. Bu ifadenin beklenen değeri Eşitlik 2.13'te görüldüğü gibi 1 olacak şekilde  $\theta$ 'nin her değeri için;  $h$ , tanımlı ve sıfırdan farklıdır [1; 13].

$$E \left\{ \left[ \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right]^h \right\} = 1 \quad (2.13)$$

Eğer  $X$  rastlantı değişkeni sürekli ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right]^h f_{\theta}(x) dx = 1 \quad (2.14)$$

eşitliğinden,  $X$  rastlantı değişkeni kesikli ise,

$$\sum_x \left[ \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right]^h f_{\theta}(x) = 1 \quad (2.15)$$

eşitliğinden yararlanarak  $h$  bulunur.  $h = 0$  olduğunda beklenen değer 1'e eşittir.  $h \neq 0$  için  $f_{\theta}(x)$  mevcuttur ( $h > 0$  ya da  $h < 0$ ). Burada,  $h > 0$  durumu gösterilecektir ancak  $h < 0$  için de aynı sonuçlar elde edilir. Buna göre,

$$g_{\theta}(X) = \left[ \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right]^h f_{\theta}(x) \quad (2.16)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlanır.  $h > 0$  için  $X$  in gerçek dağılım fonksiyonu hakkında aşağıdaki hipotezler kurulabilir:

$H'_0: f_{\theta}(x)$  x'in gerçek dağılım fonksiyonudur.

$H'_1: g_{\theta}(x)$  x'in gerçek dağılım fonksiyonudur.

Bu hipotezler ardışık olasılık oran testine göre test edilebilir. Olabilirlik oranı,

$$L'_n = \prod_{i=1}^n \frac{g_{\theta}(x_i)}{f_{\theta}(x_i)} \quad (2.17)$$

olur.  $g_{\theta}(x)$ 'in başta verilen değeri yardımıyla;

$$L'_n = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} \right]^h \quad (2.18)$$

şeklini alır.  $L'_n$  oranı  $A^h$  ve  $B^h$  değerleri ile karşılaştırılır. Bu değerlere karşılık gelen birinci ve ikinci tip hata olasılıklarını  $\alpha'$  ve  $\beta'$  ile gösterildiğinde;

$$A^h \cong \frac{1 - \beta'}{\alpha'} \quad (2.19)$$

$$B^h \cong \frac{\beta'}{1 - \alpha'} \quad (2.20)$$

elde edilir.

$H'_0$  hipotezi  $H'_1$  karşıt hipotezine göre ardışık olasılık oran testi ile test edilirse, aşağıdaki üç karardan birine ulaşılır:

- 1)  $L'_n \leq B^h$  ise,  $H'_0$  hipotezi kabul edilerek sürece son verilir,

- 2)  $L'_n \geq A^h$  ise,  $H'_0$  hipotezi reddedilerek sürece son verilir,  
 3)  $B^h < L'_n < A^h$  ise, gözlemlerin yetersizliğine verilip bir gözlem daha eklenerek süreç sürdürülür.

Verilen üç eşitsizliğin  $1/h$  kuvveti alınır, daha önce verilen  $H_0$  hipotezinin  $H_1$  karşıt hipotezine göre ardışık olasılık oran testi ile aynı olduğu görülebilir.  $h < 0$  olduğunda ise;  $A^h$  alt sınır,  $B^h$  üst sınır olacak ve yine aynı sonuçlar elde edilecektir. Buna göre  $H_0$ 'ın kabul edilme olasılığı  $P(\theta)$  ile,  $H'_0$ 'nün kabul edilme olasılıkları aynı olacaktır ve

$$P(\theta) = P(H_0 \text{ kabul}) = P(H'_0 \text{ kabul}) \quad (2.21)$$

biçiminde gösterilir [1; 13].

Böylece birinci ve ikinci tip hata olasılıkları,

$$\alpha' = P(H'_0 \text{ red} / H'_0 \text{ doğru iken}) \quad (2.22)$$

$$\beta' = P(H'_1 \text{ red} / H'_1 \text{ doğru iken}) \quad (2.23)$$

olur.  $A$  ve  $B$  sabitleri Eşitlik 2.8 ve Eşitlik 2.11'den;

$$\frac{\beta'}{1 - \alpha'} \leq B^h \quad (2.24)$$

$$\frac{1 - \beta'}{\alpha'} \geq A^h \quad (2.25)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik 2.19 ve Eşitlik 2.20'de olduğu gibi eşitsizlik işareti yerine yaklaşık eşit ( $\cong$ ) işareti kullanılırsa,

$$\frac{\beta'}{1 - \alpha'} \cong B^h \quad (2.26)$$

$$\frac{1 - \beta'}{\alpha'} \cong A^h \quad (2.27)$$

elde edilir. Bu eşitlikler  $\alpha'$ 'ne göre çözüldüğünde,

$$\alpha' \cong \frac{1 - B^h}{A^h - B^h} \quad (2.28)$$

elde edilir. Eşitlik 2.21, Eşitlik 2.22 ve Eşitlik 2.23 doğrultusunda  $P(\theta) = 1 - \alpha'$  olduğu bilindiğine göre,

$$P(\theta) \cong \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad (2.29)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu karakteristik işlem fonksiyonunun yaklaşık değerini vermektedir.  $\theta$  parametresi  $h$ 'ye bağlıdır. Seçilen her bir  $h$  değeri için  $\theta$  belirlenir ve  $P(\theta)$ 'nin değeri ile birlikte karakteristik işlem eğrisi üzerinde bir nokta oluşturur.

Eşitlik 2.29'da  $\theta$  parametresi  $h$  değerine bağlı olduğundan her bir  $h$  değeri için  $\theta$  parametresinin ve karakteristik işlem fonksiyonunun ( $P(\theta)$ ) alacağı değerler bulunabilir. Örneğin  $h = -1$  için  $\theta = \theta_1$  olup  $P(\theta) = \beta$  dir.  $h = 1$  için ise  $\theta = \theta_0$  olup  $P(\theta) = 1 - \alpha$  dir. Oysa  $h$ 'nin  $-\infty$ ,  $0$ ,  $+\infty$  değerlerine karşılık  $\theta$  parametresinin alacağı değerler belirlenmemiştir. Bu değerler rastlantı değişkeninin kesikli veya sürekli oluşuna göre Eşitlik 2.14 ve Eşitlik 2.15'den  $h$  değerine bağlı olarak bulunur. Bu noktalarda  $P(\theta)$  değerleri;

$$\lim_{h \rightarrow \infty} P(\theta) = 1 \quad (2.30)$$

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} P(\theta) = 0 \quad (2.31)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(\theta) = \frac{\ln A}{\ln A - \ln B} \quad (2.32)$$

olarak elde edilir.  $h=1$  ve  $h=-1$  için de  $P(\theta)$  bulunabilir.  $H_0$  hipotezi doğru iken  $H_0$ 'ın kabul edilme olasılığı;

$$P(\theta_0) = 1 - \alpha, \quad (h = 1) \quad (2.33)$$

$H_1$  hipotezi doğru iken  $H_0$ 'ın kabul edilme olasılığı;

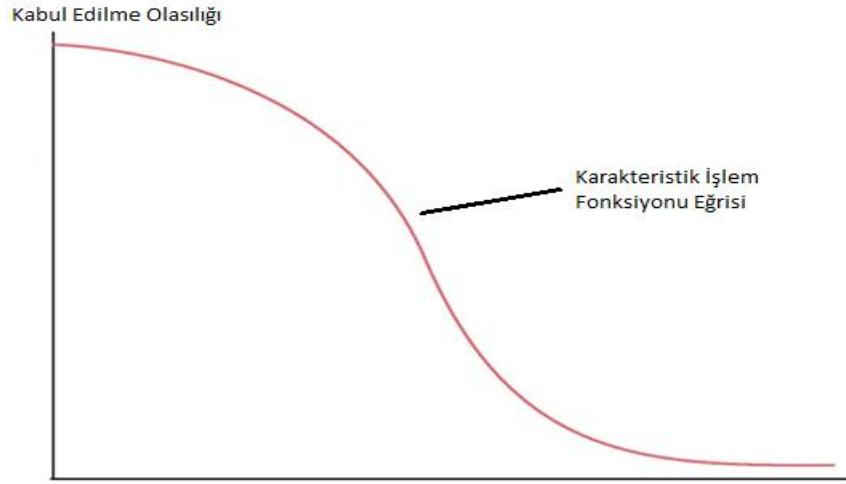
$$P(\theta_1) = \beta, \quad (h = -1) \quad (2.34)$$

olacaktır. Böylece karakteristik işlem eğrisinin bu eşitliklerle verilen beş noktası elde edilir. Bu değerler Çizelge 2.1'de gösterilmiştir [1; 14].

**Çizelge 2.1.** Wald Tipi ardışık test için çeşitli  $h$  değerlerinde  $\theta$  ve karakteristik işlem eğrisi OC'nin ( $P(\theta)$ ) değerleri

$h$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\infty$
$\theta$	-	$\theta_1$	-	$\theta_0$	-
$P(\theta)$	0	$\beta$	$\frac{\ln A}{\ln A - \ln B}$	$1 - \alpha$	1

Çizelge 2.1.'de görüldüğü gibi  $h$ 'nin  $-\infty, 0, +\infty$  değerlerine karşılık  $\theta$ 'nın dağılım fonksiyonundan elde edilir. Şekil 2.1.'de ise karakteristik işlem fonksiyonu eğrisi (OC) verilmiştir.



**Şekil 2.1.** OC (Karakteristik İşlem Fonksiyonu) Eğrisi

### 2.3 Ortalama Örneklem Sayısı Fonksiyonu

*SPRT*de bir karara ulaşmak için gerekli örneklem büyüklüğü bir rastlantı değişkenidir. Bu rastlantı değişkeninin dağılımı örnekleme süreci sırasında bulunan dağılıma bağlıdır. Parametrenin gerçek değeri  $\theta$  olduğunda, örneklem büyüklüğünün beklenen değeri  $E_{\theta}(n)$ , parametrenin bir fonksiyonudur. Bu nedenle ortalama örneklem sayısı (Average Sampling Number, ASN) fonksiyonu adını alır. Eşitlik 2.5'de tanımlanmış olan;

$$Z_i = \ln \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)}$$

değişkeni:

$$Z_1 + \dots + Z_N = (Z_1 + \dots + Z_n) + (Z_{n+1} + \dots + Z_N)$$

$$\sum_{i=1}^N Z_i = \sum_{i=1}^n Z_i + \sum_{i=n+1}^N Z_i$$

şeklinde ikiye ayrılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alınırsa,

$$NE(Z) = E(Z_1 + \dots + Z_n) + E(Z_{n+1} + \dots + Z_N) \quad (2.35)$$

bulunur. Burada, ilk tarafta  $n$ , ikinci tarafta  $N-n$  tane terim vardır. Buradan;

$$Z = \ln \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \quad (2.36)$$

ve

$$E(Z_{n+1} + \dots + Z_N) = E(N - n)E(Z) = N E(Z) - E(n)E(Z) \quad (2.37)$$

ayrı ayrı yazılabilir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında, test edilecek parametre  $\theta$  olduğundan;

$$E_{\theta}(n) = \frac{E_{\theta}(Z_1 + \dots + Z_n)}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.38)$$

elde edilmektedir.

$\sum_{i=1}^n Z_i \leq \ln B$  iken  $H_0$  kabul edilerek çözümlenmeye son verildiğinden,  $\sum_{i=1}^n Z_i$ 'nin beklenen değeri;

$$E'_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i) \quad (2.39)$$

$\sum_{i=1}^n Z_i \leq \ln A$  iken  $H_0$  reddedilerek çözümlenmeye son verildiğinden  $\sum_{i=1}^n Z_i$ 'nin beklenen değeri;

$$E''_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i) \quad (2.40)$$

ile gösterilsin.  $H_0$ 'ın kabul edilme olasılığı  $P(\theta)$  ve reddetme olasılığı  $1 - P(\theta)$  olduğundan;

$$E_{\theta}(n) = \frac{P(\theta)E'_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i) + (1 - P(\theta))E''_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i)}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.41)$$

ifadesi elde edilmektedir.  $E_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i)$ 'nin tam değeri bulunabilirse,  $E_{\theta}(n)$ 'nin de tam değeri bulunabilir.

$Z$ 'nin standart sapması ve  $|E(Z)|$  küçük ise  $E'_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i)$   $\ln B$ 'ye çok yakın bir değer ve  $E''_{\theta}(\sum_{i=1}^n Z_i)$  de  $\ln A$ 'ya çok yakın bir değer alır. Bu değer Eşitlik 2.40'ta kullanılarak  $n$  örneklem büyüklüğünün beklenen değeri için yaklaşık eşitlik elde edilir.

$$E_{\theta}(n) = \frac{P(\theta)\ln B + (1-P(\theta))\ln A}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.42)$$

$H_0$  hipotezi doğru ise,

$$P(\theta_0) = 1 - \alpha \quad (2.43)$$

ve

$$E_{\theta_0}(n) \cong \frac{(1-\alpha)\ln B + \alpha\ln A}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.44)$$

biçiminde sonuca ulaşılmaktadır [13].

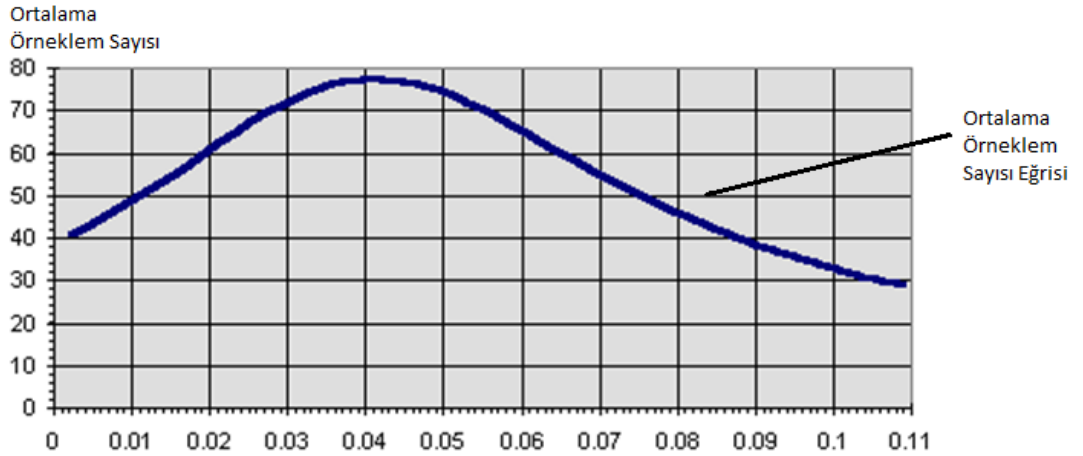
$H_1$  hipotezi doğru olması durumunda ise,

$$P(\theta_1) = \beta \quad (2.45)$$

ve

$$E_{\theta_1}(n) \cong \frac{\beta \ln B + (1-\beta)\ln A}{E_{\theta}(Z)} \quad (2.46)$$

biçiminde sonuca ulaşılmaktadır. Şekil 2.2'de ise ANS fonksiyonunun grafiği verilmiştir [13].



**Şekil 2.2.** Binom dağılıma sahip bir örneklem için ASN (Ortalama Örneklem Sayısı) Eğrisi

#### 2.4 Binom Dağılım için Ardışık Olasılık Oran Testi

$x_i$  ardışık gözlemleri 1 ve 0 değerlerini  $p$  ve  $1-p$  olasılıklarını alan binom dağılıma sahip olsunlar. *SPRT* için hipotez 2.1'de tanımlandığı gibi;

$$H_0: p = p_0 \quad H_1: p = p_1 \quad (p_0 < p_1) \quad (2.47)$$

olarak kurulur.



$x_i$  rastlantı değişkeni binom dağılımına sahip olduğunda olasılık fonksiyonu;

$$f_p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}, \quad x_i = 0, 1, \dots, n \quad (2.48)$$

ile verilir. Olasılık fonksiyonu,  $H_0$  ve  $H_1$  hipotezleri için yazılır, oranlanır ve logaritması alınır ise;

$$L_n = \ln \frac{f_{p_1}(x_i)}{f_{p_0}(x_i)} = \sum X_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (n - \sum X_i) \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \quad (2.49)$$

ifadesi elde edilir. Bu değer  $\ln A$  ve  $\ln B$  ile karşılaştırılarak aşağıdaki kararlardan birine ulaşılır:

$$1) \quad \left( \sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \right) \leq \ln B \text{ ise } H_0 \text{ kabul edilerek}$$

sürece son verilir.

$$2) \quad \left( \sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \right) \geq \ln A \text{ ise } H_0 \text{ reddedilerek sürece}$$

son verilir.

$$3) \quad \ln B < \left( \sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \right) < \ln A \text{ ise gözlemlerin}$$

yetersiz olduğu kararına varılır ve bir gözlem daha eklenerek süreç sürdürülür.

Yukarıdaki eşitsizlikler işlemleri kolaylaştırmak amacıyla  $\sum_{i=1}^n x_i$ 'ye göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &\leq h_1 + ns \\ \sum_{i=1}^n x_i &\geq h_2 + ns \end{aligned} \quad (2.50)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eşitlik 2.8 ve Eşitlik 2.11'de  $A$  ve  $B$  sabitlerinin değerleri kullanılarak  $h_1$ ,  $h_2$  ve  $s$  değerleri;

$$h_1 = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)} \quad (2.51)$$

$$h_2 = \frac{\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)} \quad (2.52)$$

$$s = \frac{\ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)} \quad (2.53)$$

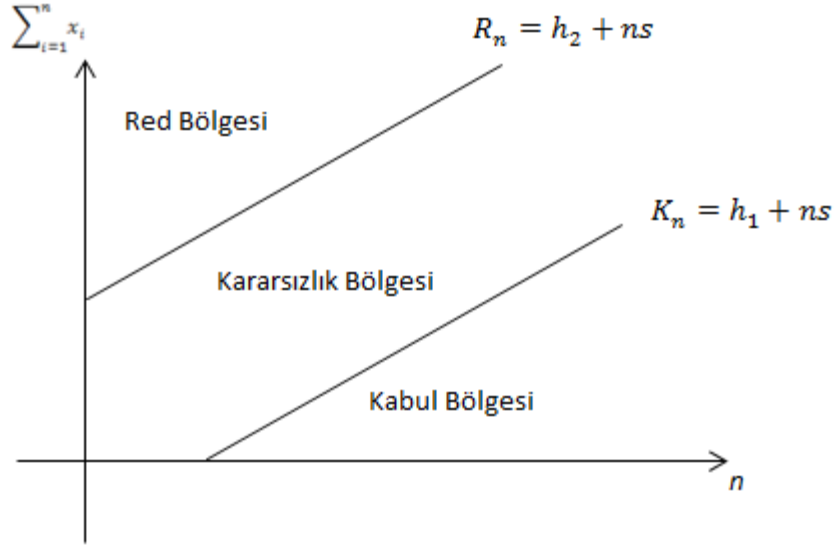
biçiminde tanımlanır.

Kabul ve red doğruları;

$$K_n = h_1 + ns$$

$$R_n = h_2 + ns$$

biçiminde elde edilir. Buna göre karar bölgeleri aşağıdaki grafikte gösterilmektedir[13].



**Şekil 2.3.** SPRT'de kabul ve red doğruları

Şekil 2.3'te grafikte  $(n, \sum_{i=1}^n x_i)$  noktası  $R_n$  doğrusunun üzerine ya da üst bölgesine düşerse  $H_0$  reddedilerek süreç sona erer. Bu nokta  $K_n$  doğrusunun üzerine ya da alt bölgesine düşerse  $H_0$  kabul edilerek süreç sona erdirilir. Nokta bu doğrular arasında kalırsa bir gözlem ya da gözlem grubu daha alınarak sürece devam edilir [13].

Binom dağılımı için  $H_0: p = p_0$  hipotezini kabul etme olasılığını  $P(p)$  ile gösterirsek kesikli olasılık fonksiyonu olduğundan Eşitlik 2.13'ten;

$$E_p \left[ \frac{f_{p_1}(x)}{f_{p_0}(x)} \right]^h = 1 \quad (2.54)$$

eşitliği elde edilir.  $X$  rastlantı değişkeni 1 değerini aldığı anda olasılık fonksiyonu  $f_p(1) = p$ , 0 değerini aldığı anda  $f_p(0) = 1 - p$ 'ye eşittir. Buradan;

$$p \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^h + (1 - p) \left( \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right)^h = 1 \quad (2.55)$$

eşitliği elde edilir ve  $p$ 'ye göre çözüldüğünde;

$$p = \frac{1 - \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^h}{(p_1/p_0)^h - \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^h} \quad (2.56)$$

biçiminde elde edilir. Binom dağılımı için karakteristik işlem fonksiyonu  $P(p)$  ise;

$$P(p) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad (2.57)$$

dır. Çizelge 2.2'de çeşitli  $h$  değerlerine karşılık gelen  $p$  ve  $P(p)$  değerleri verilmiştir.

**Çizelge 2.2.** Binom dağılımda çeşitli  $h$  değerlerine karşılık gelen  $p, P(p)$  değerleri

$h$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\infty$
$p$	$1$	$p_1$	$\frac{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}$	$p_0$	$0$
$P(p)$	$0$	$\beta$	$\frac{\log A}{(\log A - \log B)}$	$1-\alpha$	$1$

Binom parametresinin testi için gerekli olan ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$ASN(p) = \frac{P(p) \log B + (1-P(p)) \log A}{E(z, p)} \quad (2.58)$$

eşitliğinden yararlanarak bulunmaktadır. Eşitlikte  $E(z, p)$  ise,

$$E(z, p) = E\left(\ln \frac{f(x, p_1)}{f(x, p_0)}\right) \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} E(z, p) &= p \ln \frac{f(1, p_1)}{f(1, p_0)} + (1-p) \ln \frac{f(0, p_1)}{f(0, p_0)} \\ &= p \ln \frac{p_1}{p_0} + (1-p) \ln \frac{(1-p_1)}{(1-p_0)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

biçiminde elde edilir ve ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$ASN(p) = \frac{P(p) \log B + (1-P(p)) \log A}{p \log \frac{p_1}{p_0} + (1-p) \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \quad (2.61)$$

olarak bulunur [1; 13].

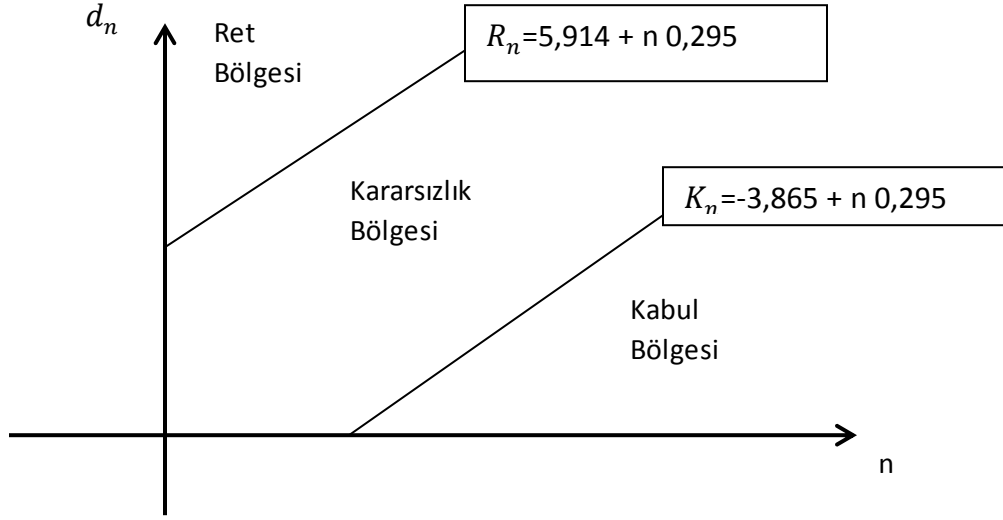
Örnek:

Çizelge 2.3 binom dağılımına sahip kitle için,  $p_0=0,25$ ;  $p_1=0,35$  ve  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,15$  için SPRT için adım sayısı  $n$ ,  $K_n$ ,  $R_n$  değerlerini göstermektedir [13].

**Çizelge 2.3.** Binom dağılım için SPRT kabul ve red değerleri

$n$	$K_n$	$R_n$
1	-	-
2	-	-
3	-	-
4	-	-
5	-	-
6	-	-
7	-	-
8	-	-
9	-	9
10	-	9
11	-	10
12	-	10
13	0	10
14	0	11
15	0	11
16	0	11
17	1	11
18	1	12
19	1	12
20	2	12

Şekil 2.4'te ise örneğe ilişkin karar bölgesinin grafiği verilmiştir.



**Şekil 2.4.** Karar bölgeleri grafiği

## 2.5 Normal Dağılım için Ardışık Olasılık Oran Testi

$X$ , varyansı ( $\sigma^2$ ) bilinen, ortalaması ( $\mu$ ) bilinmeyen normal dağılıma sahip bir rastlantı değişkeni olsun. Test edilecek parametre kitle ortalaması olduğundan Eşitlik 2.1'den hipotezler:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu = \mu_1 \quad (\mu_0 < \mu_1) \quad (2.62)$$

biçiminde kurulsun.  $X$  rastlantı değişkeni normal dağılıma sahip olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.63)$$

biçiminde gösterilmektedir.  $H_0$  hipotezi doğru iken  $X$  rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x; \mu_0; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x - \mu_0)^2/2\sigma^2] \quad (2.64)$$

$H_1$  hipotezi doğru iken,

$$f(x; \mu_1; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x - \mu_1)^2/2\sigma^2] \quad (2.65)$$

biçimlerinde ifade edilmektedir [9].

$X$  rastlantı değişkeninin aldığı değerler  $x_1, x_2, \dots, x_n$  olarak belirtildiğinde olabilirlik oranı,

$$L_n = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i; \mu_1; \sigma^2)}{f(x_i; \mu_0; \sigma^2)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right]} \quad (2.66)$$

biçiminde elde edilmektedir. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından olabilirlik oranının logaritması alınır ve test istatistiği,

$$\sum_{i=1}^n z_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) \quad (2.67)$$

olarak elde edilir. Burada,  $z_i$  ise;

$$z_i = \frac{(\mu_1 - \mu_0)x_i}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) \quad (2.68)$$

olacaktır [1]. Bu değer  $\ln A$  ve  $\ln B$  ile karşılaştırılarak aşağıdaki üç karardan birine ulaşılır:

- 1)  $\sum_{i=1}^n z_i \leq \ln B$  ise  $H_0$  hipotezi kabul edilerek sürece son verilir.
- 2)  $\sum_{i=1}^n z_i \geq \ln A$  ise  $H_1$  hipotezi kabul edilerek sürece son verilir.
- 3)  $\ln B < \sum_{i=1}^n z_i < \ln A$  ise gözlemlerin yetersizliğine karar verilip bir gözlem daha eklenerek sürece devam edilir. Kabul ve red doğruları ise;

$$K_n = \frac{\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (2.69)$$

$$R_n = \frac{\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (2.70)$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$s = \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \quad (2.71)$$

olarak tanımlanır ise karar kuralları,

1.  $\sum_{i=1}^n x_i \leq K_n + ns$  ise  $H_0$  hipotezi kabul edilerek sürece son verilir.
2.  $\sum_{i=1}^n x_i \geq R_n + ns$  ise  $H_0$  hipotezi red edilerek sürece son verilir.
3.  $K_n + ns < \sum_{i=1}^n x_i < R_n + ns$  ise gözlemlerin yetersizliğine karar verilip bir gözlem daha eklenerek sürece devam edilir [1; 13]

Varyansı bilinen normal dağılımda, ortalamaya bağlı olarak kurulan  $H_0: \mu = \mu_0$  hipotezinin kabul edilme olasılığı  $P(\mu)$ ,

$$P(\mu) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad (2.72)$$

eşitliği ile bulunabilmektedir. Bunun için Eşitlik 2.13'te belirtildiği üzere,

$$E \left\{ \left[ \frac{f(x_i; \mu_1; \sigma^2)}{f(x_i; \mu_0; \sigma^2)} \right]^h \right\} = 1 \quad (2.73)$$

olacak şekilde  $\mu$  parametresinin elde edilmesi gerekmektedir.  $X$  rastlantı değişkeni sürekli olduğundan bu eşitlik;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{f(x; \mu_1; \sigma^2)}{f(x; \mu_0; \sigma^2)} \right]^h f(x, \mu, \sigma^2) dx = 1 \quad (2.74)$$

biçiminde yazılmaktadır. İlgili fonksiyonlar eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_1)^2\right)^h}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_0)^2\right)^h} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dx = 1 \quad (2.75)$$

eşitliği elde edilmektedir. İntegral  $\mu$ 'ye göre çözüldüğünde,

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_0 - h(\mu_1 - \mu_0)}{2} \quad (2.76)$$

elde edilmektedir. Çizelge 2.4'te çeşitli  $h$  değerleri için  $\mu$  ve  $P(\mu)$  değerleri verilmiştir [1; 13].

**Çizelge 2.4.** Normal dağılımda çeşitli  $h$  değerlerine karşılık gelen  $\mu$  ve  $P(\mu)$  değerleri

<i>h</i> değerleri	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\infty$
$\mu$	$\infty$	$\mu_1$	$\frac{\mu_1 + \mu_0}{2}$	$\mu_0$	$-\infty$
$P(\mu)$	$0$	$\beta$	$\frac{\ln A}{\ln A - \ln B}$	$1-\alpha$	$1$

Varyansı bilinen normal dağılıma sahip bir kitlede kitle ortalaması test edilmek istendiğinde test için gerekli olan ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$ASN(\mu) \cong \frac{P(\mu) \ln B + (1-P(\mu)) \ln A}{E(z, \mu)} \quad (2.77)$$

eşitliği ile bulunmaktadır. Burada  $E(z, \mu)$  Eşitlik 2. 68'den;

$$E(z, \mu) = [2(\mu_1 - \mu_0)\mu + (\mu_0^2 - \mu_1^2)]/2\sigma^2 \quad (2.78)$$

biçiminde elde edilir ve ortalama örneklem sayısı fonksiyonu  $ASN(\mu)$ ,

$$ASN(\mu) \cong \frac{P(\mu)\ln B + (1-P(\mu))\ln A}{[2(\mu_1 - \mu_0)\mu + (\mu_0^2 - \mu_1^2)]/2\sigma^2} \quad (2.79)$$

olarak tanımlanır [1].

Örnek:

Varyansı 168,617 olduğu bilinen normal dağılımlı bir kitlede aşağıdaki veriler ardışık olarak elde edilsin [13]

65, 70, 70, 75, 65, 80, 75, 75, 65, 60, 70, 95, 90, 75, 70, 60, 75, 65, 65, 95, 65, 60, 75, 70, 35, 70, 65, 40, 60, ...

$\alpha = 0,03$ ,  $\beta = 0,10$  ve belirlenen  $H_0: \mu = \mu_0 = 66$ ,  $H_1: \mu = \mu_1 = 71$  hipotezleri için kabul ve red doğruları;

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = 30, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha} = 0,103$$

$$K_n = -33,29 + n 68,5 \quad R_n = 49,813 + n 68,5$$

biçiminde elde edilir. Test için gerekli adımlar,  $K_n$  ve  $R_n$  değerleri Çizelge 2.5'te verilmiştir. Çizelge incelendiğinde 13. adımda  $H_0$ 'ın reddildiği görülmektedir.



**Çizelge 2.5.** Normal dağılım için kabul ve ret değerleri

$n$	$K_n$	$\sum x_i$	$R_n$
1	36	65	119
2	104	135	187
3	173	205	256
4	241	280	324
5	310	345	393
6	378	425	461
7	447	500	530
8	515	575	598
9	584	640	667
10	652	700	735
11	721	770	804
12	789	865	872
13	857	955	941

### 3. ORTALAMA ( $\bar{X}$ ) ve KUSURLU ORANI ( $p$ ) İÇİN KONTROL KARTLARI

Kontrol edilen özelliklerin ölçülebildiği ve ölçülemediği durumlarda farklı kontrol kartları kullanılmaktadır. Ortalama ( $\bar{X}$ ) kart ağırlık, ürünün ömrü, lif uzunluğu, dayanıklılık, çalışma sıcaklığı gibi ürünün ölçülebilir özelliklerinde meydana gelen değişimleri ya da sapmaları araştırırken; kusurlu oranı ( $p$ ) kart sayılarak elde edilebilen ürünün ölçülemeyen, araştırmacının gözlemlerine dayanan özelliklerini araştırmaktadır. Bu doğrultuda ölçülebilen (nicel) kalite özellikleri için  $\bar{X}$  kontrol kartları ve ölçülemeyen (nitel) kalite özellikleri için  $p$  kontrol kartları incelenecektir.

#### 3.1 Ortalama ( $\bar{X}$ ) Kart

Ortalama ( $\bar{X}$ ) kart bir sürece ilişkin belli saydaki gözlemin ortalamasında ve dağılımında meydana gelen değişimleri görebilme aracı olarak kullanılmaktadır. Bu doğrultuda sürecin istatistiksel olarak kontrol altında olup olmadığını kontrol etmektedir. Değişken bir kalite özelliği ile ilgili iken bu özelliğin ortalama değeri ve değişkenliğini izlemek gerekmektedir. Sürecin ortalamasının ya da ortalama kalite düzeyinin kontrolünü yapan kontrol kartlarına *ortalama için kontrol kartları* ya da  $\bar{X}$  *kart* denir.

$\bar{X}$  kartının çizilebilmesi için öncelikle kitlenin sahip olduğu ortalama ( $\mu$ ) ve standart sapma ( $\sigma$ ) parametrelerinin bilindiği ya da bilinmediği durumun araştırılması gerekmektedir. Kitlenin  $\mu$  ve  $\sigma$  değerleri ile normal dağıldığı bilinirken bir gözlemin bir aralık içinde olması hesaplanabilir. Dolayısıyla  $X$  rastlantı değişkeninin  $\mu \pm 3\sigma$  arasında olma olasılığı %99'dur. Merkezi Limit Teoremi yardımı ile  $n$  büyüklüğünde alt grupların ortalamalarının dağılımı ortalama  $\mu$  ve  $\frac{\sigma^2}{n}$  varyansa sahip olacaktır. Böylelikle  $\bar{X}$  kartına ilişkin kontrol sınırları;

$$\text{Üst Sınır} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Merkez Doğrusu} = \mu$$

$$\text{Alt Sınır} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Eşitliklerde  $A = 3/\sqrt{n}$  değeri EK-1'de verilen tablodan yararlanılarak bulunmaktadır [15].

Ancak genellikle uygulamalarda  $\mu$  ve  $\sigma$  bilinmemekte ve parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir.  $\mu$ 'nün en iyi tahmin edicisi olan süreç ortalamasını elde etmek için  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  her bir örneklem grubunun ortalaması olmak üzere;

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (3.2)$$

hesaplanır.  $\bar{\bar{x}}$  değeri  $\bar{X}$  kart için merkez doğrusunu oluşturur [15].

Varyansı bilinmeyen bir örneklem grubunda ise kontrol sınırlarını oluşturmak için kitlenin standart sapması  $\sigma$ 'nı tahmin etmek gerekir. Varyansı bilinmeyen bir kitleden  $n$  genişliğinde bir örneklemin  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en büyük gözlemi ile en küçük gözlemi arasındaki fark;

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (3.3)$$

olmak üzere  $m$  tane örneklemin genişliği  $R_1, R_2, \dots, R_m$  olsun. Bu durumda ortalama genişlik;

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır.  $\sigma$ 'nın tahmin edicisi ise;

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} \quad (3.5)$$

biçimindedir.  $\bar{R}$ ,  $m$  tane örneklemin ortalama genişliği olmak üzere  $\sigma$ 'nın tahmini;

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (3.6)$$

Olacaktır.  $d_2$ , çeşitli örneklem genişliklerinin bir fonksiyonudur ve aldığı değerler EK-1'de verilmektedir [15].

Dolayısıyla  $\mu$  ve  $\sigma$  bilinmediğinde  $\bar{X}$  kart için kontrol sınırları;

$$\text{Üst Sınır} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{Merkez Doğrusu} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{Alt Sınır} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \quad (3.7)$$

biçiminde tanımlanır [15]. Bu tanımda  $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$  biçiminde ifade edilirse  $A_2$  değeri EK 1'deki tablodan yararlanılarak bulunur.

Örnek:

Bir metal fabrikasında otomotiv motoru için piston halkası üretilmektedir. Süreçte üretilen halkaların çapının istatistiksel kontrolünün yapılması için  $\bar{X}$  kartının kullanılması uygun görülmüştür. Her biri 5 çap ölçüm değerlerinden oluşan 25 örneklem Çizelge 3.1.'de verilmektedir [15].

Çizelge 3.1'de verilen örneklemelerden  $\bar{x}_i$  ve  $R_i$  değerleri;

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{0,581}{25} = 0,023$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{1850,028}{25} = 74,001$$

olarak elde edilmektedir.  $\bar{X}$  kartın kontrol sınırlarını bulmak için  $n = 5$  için EK-1'deki tablodan  $A_2 = 0,577$  kullanılarak;

$$\text{ÜstSınır} = \bar{X} + A_2\bar{R} = 74,001 + (0,577)(0,023) = 74,014$$

$$\text{Merkez Doğrusu} = \bar{X} = 74,001$$

$$\text{AltSınır} = \bar{X} - A_2\bar{R} = 74,001 - (0,577)(0,023) = 73,988$$

elde edilir. Örneğe ilişkin kontrol sınırları Şekil 3.1'de verilmiştir. Sürecin standart sapması ise  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0,023}{2,326} = 0,0099$  olarak elde edilir.  $\bar{X} - R$  kartları sürecin yeterliliği ve performansı hakkında da bilgi sağlayabilmektedir. Süreç kapasite oranı (process capability ratio-PCR) olarak tanımlanan performans göstergesi;

$$PCR = \frac{\text{ÜstSınır} - \text{AltSınır}}{6\sigma} \quad (3.8)$$

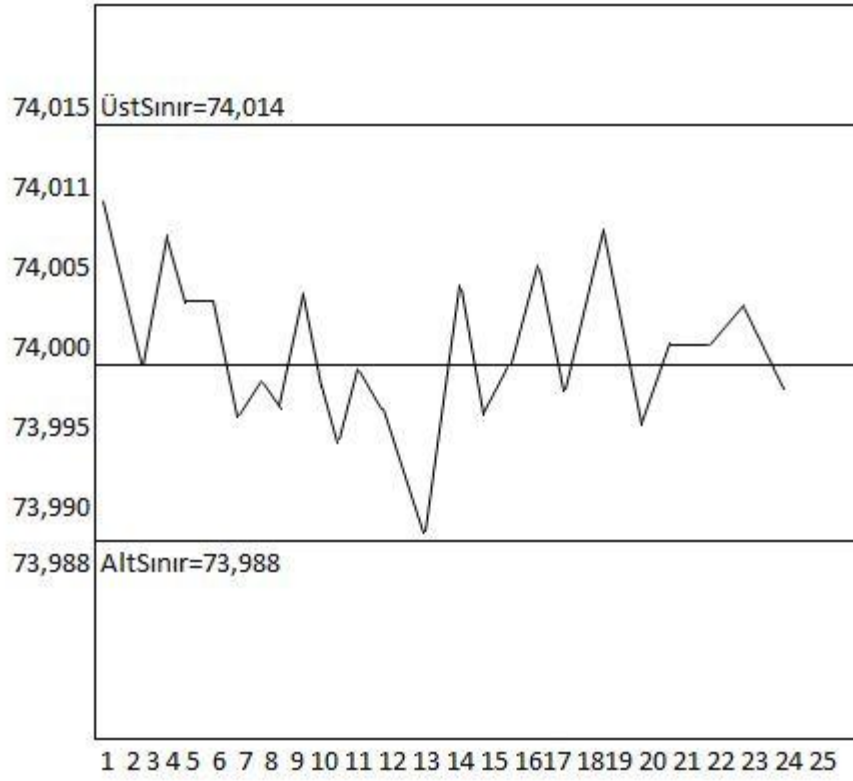
biçiminde tanımlanmaktadır. Ancak  $\sigma$  bilinmediği zamanlarda  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ ; PCR'nin bir tahmini olan  $\widehat{PCR}$ 'yi bulabilmek için kullanılmaktadır. Örneğe ilişkin  $\hat{\sigma} = 0,0099$  olarak hesaplandığında  $\widehat{PCR}$  değeri;

$$\widehat{PCR} = \frac{74,05 - 73,95}{6(0,0099)} = 1,68$$

biçiminde elde edilir [15].

**Çizelge 3.1.** Ortalama ( $\bar{X}$ ) kart için  $\bar{x}_i$  ve  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 25$ ) değerleri

ÖRNEKLEM NUMARASI	GÖZLEMLER					$\bar{x}_i$	$R_i$
1	74,030	74,02	74,019	73,992	74,008	74,010	0,038
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,001	0,019
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,036
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,022
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,003	0,026
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,996	0,024
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005	74,000	0,012
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,997	0,030
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,004	0,014
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	0,017
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	0,008
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	0,011
13	73,983	74,002	73,998	73,997	74,012	73,998	0,029
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	0,039
15	74,012	74,014	73,998	73,999	74,007	74,006	0,016
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996	73,997	0,021
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007	74,001	0,026
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	0,018
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,988	0,021
20	74,00	74,010	74,013	74,020	74,003	74,009	0,021
21	73,988	74,001	74,009	74,005	73,996	74,000	0,033
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	0,019
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014	74,002	0,025
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,022
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	0,035
						$\bar{\bar{X}} = 74,001$	$\bar{\bar{R}} = 0,023$



**Şekil 3.1.** Alt sınırı 73,988, üst sınırı 74,014 olan ortalama ( $\bar{X}$ ) Kart

### 3.1.1 Ortalama ( $\bar{X}$ ) Kartın Karakteristik İşlem Eğrisi

Bir süreçte araştırılan bir parametrenin belli bir değerden artış ya da azalış göstermesi sapma olarak tanımlanmaktadır. Karakteristik işlem eğrileri (OC),  $\bar{X}$  kontrol kartlarının süreç kalitesindeki sapmaları tespit edebilme gücü olarak açıklanmaktadır. Eğer  $\mu_0$  gibi bir kontrol değerinden  $\mu_1$  gibi başka bir değere ( $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$ ) sapma bulunuyorsa, sapmayı ilk ön örneklemede tespit edememe olasılığı  $\beta$ ;

$$\beta = P(\text{Alt Sınır} \leq \bar{X} \leq \text{Üst Sınır} | \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma) \quad (3.9)$$

biçimindedir.  $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  olmak üzere alt ve üst sınırları;

$$\text{Alt Sınır} = \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} \quad (3.10)$$

$$\text{Üst Sınır} = \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır.  $L$ , kontrol doğrularının merkez doğrudan uzaklığını göstermek üzere yaklaşık 3 kabul edilmektedir ( $3\sigma$  sınırları). Buna göre  $\Phi$  standart normal birikimli dağılım fonksiyonu olmak üzere;

$$\beta = \Phi \left[ \frac{\text{ÜstSınır} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] - \Phi \left[ \frac{\text{AltSınır} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] = \Phi \left[ \frac{\mu_0 + \frac{L\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] - \Phi \left[ \frac{\mu_0 - \frac{L\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] \quad (3.12)$$

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}) \quad (3.13)$$

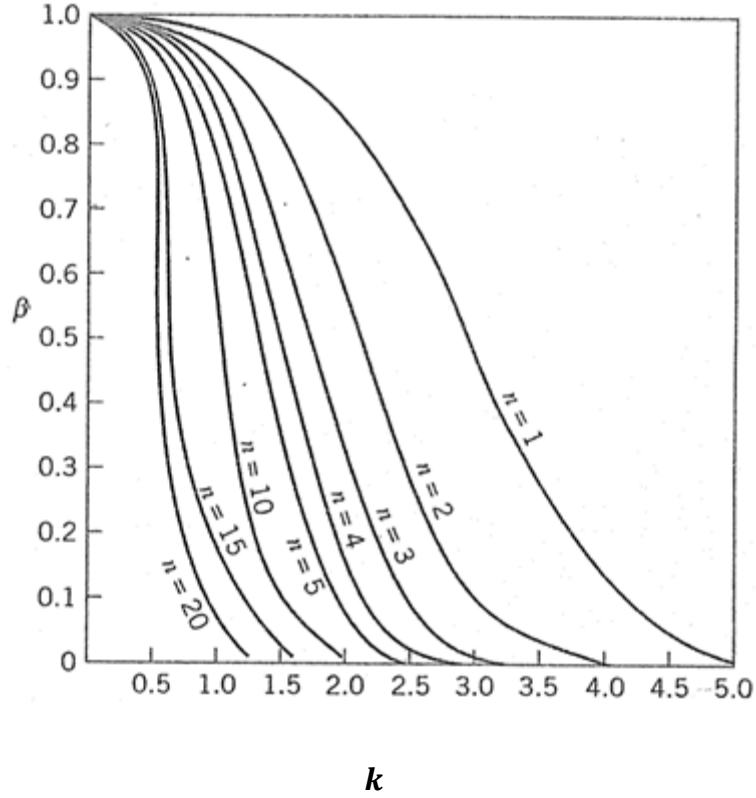
olarak tanımlanır [15].

Örneğin  $L = 3$  ve örneklem genişliği  $n = 5$  olmak üzere  $\mu_1 = \mu_0 + 2\sigma$  olarak tanımlanır ise  $\beta$  olasılığı;

$$\beta = \Phi(3 - 2\sqrt{5}) - \Phi(-3 - 2\sqrt{5}) = \Phi(-1,47) - \Phi(-7,37) = 0,0708$$

biçiminde elde edilir.  $\beta$ -riski bir sapmanın tespit edilememesi olasılığını vermektedir. İstenilen sapmanın tespit edilmesi olasılığı ise  $1 - \beta = 1 - 0,0708 = 0,9292$  olarak elde edilir [15].

Şekil 3.2'de 1,5  $k$  ya da altında  $\bar{X}$  kartlarının küçük sapmaları tespit etmede çok etkin olmadığı görülmektedir. Örneğin sapma 1,0  $k$  ve  $n = 5$ 'te ise yaklaşık olarak  $\beta = 0,75$  elde edilir. Sapmanın ikinci örnekleme tespit edilmesi olasılığı  $\beta(1 - \beta) = 0,19$ ; üçüncü örnekleme tespit edilme olasılığı ise  $\beta^2(1 - \beta) = 0,14$  olacaktır. Sapmanın, takip eden  $r$ . örnekleme tespit edilebilme olasılığı,  $\beta^{r-1}(1 - \beta)$  ile hesaplanır [15].



**Şekil 3.2.** Ortalama ( $\bar{X}$ ) kart için farklı gözlem sayılarında OC eğrileri

Bir sapma tespit edilmeden önce alınacak örneklemin beklenen değeri ortalama seri uzunluğu (Average Run Length-ARL);

$$ARL = \sum_{r=1}^{\infty} r\beta^{r-1}(1 - \beta) = \frac{1}{1-\beta} \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır. Kontrol kartında bir sinyal oluşana (bir sapma tespit edilene) kadar geçen periyod sayısını veren sinyal ortalama süresi (Average Time to Signal-ATS);

$$ATS = ARL * d \quad (3.15)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $d$ , eşit aralıklı periyot süresidir [15].

### 3.2 Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kart

Birçok kalite karakteristiği sayısal olarak ifade edilememektedir. Böyle durumlarda her gözlem kalite karakteristiğinin özelliği doğrultusunda uygun ya da uygun olmayan şeklinde sınıflandırılmaktadır. Bir üretim sürecinde uygun ya da uygun olmayan partinin ele alındığı durumlarda kusurlu oranı  $p$  kontrol kart kullanılabilir. Bazı durumlarda uygun olmayan kısımdan daha çok uygun olmayan ürün ile ilgilenilmektedir. Böyle durumlarda bir grup ürün seçilir ve ürünün çeşitli kalite



karakteristik özellikleri araştırmacı tarafından incelenerek bir ya da daha çok özellik açısından standartlara uygun olmadığı gözlenirse uygun olmayan ürün olarak nitelenir. Böylece gruptaki uygun olmayan ürün sayılır ve uygun olmayan ürün oranı, bir kitlede uygun olmayan ürün sayısının toplam ürün sayısına oranı ile bulunur.

Uygun olmayan kısmın kontrolü için uygulanan kontrol kartları binom dağılıma dayanır. Örneğın, bir üretim sürecinde  $n$  tane ürün ele alınsın; bir ürünün aranılan özelliğeye uygun olmama olasılığı  $p$ ; ve uygun olmayan ürün sayısı  $D$  olsun. Buna göre  $D$ ;  $n$  ve  $p$  parametreleri ile binom dağılıma;

$$P(D = x) = \binom{n}{p} p^x (1 - p)^{n-x} \quad (3.16)$$

sahip olmaktadır.  $D$ ;  $np$  ortalama ve  $np(1-p)$  varyans ile binom dağılır [15].

$p$  bilinmediğı durumlarda, gözlenen verilerden tahmin edilmesi gerekmektedir. Eğer  $m$  adet örneklem grubu içinde; örneklem  $i$ 'de  $D_i$  adet kusurlu ürün bulunuyorsa  $i$ . örneklemin kusurlu ürün oranı;

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n} \quad (3.17)$$

biçimindedir. Örneklem için kusurlu ürün oranı ise;

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} \quad (3.18)$$

biçimindedir ve  $p$ 'nin tahmini olarak kullanılır. Dolayısıyla  $p$  kart için alt ve üst sınırlar;

$$\begin{aligned} \text{Üst Sınır} &= \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ \text{Merkez Doğru} &= \bar{p} \\ \text{Alt Sınır} &= \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

biçiminde tanımlanır [15].

Örnek:

Bir portakal suyu üretiminde meyve suları 6 onzluk kutularda kutulanmakta ve kutular bir makinede kartondan ve tabanına metal panel eklenerek yapılmaktadır. Bu sistemde uygun olmayan kutuların kontrolünü sağlamak amacıyla kontrol kart oluşturulmak istensin. 30 örneklem grubu  $n = 50$  kutudan yarım saatlik aralıklarla 3-vardiya aralığında seçilmiştir ve elde edilen bilgiler Çizelge 3.2'de verilmiştir. Buna göre Çizelge 3.2'den;

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{30} D_i}{nm} = \frac{347}{(30)(50)} = 0,2313$$

elde edilir. Kontrol kart sınırları ise;

$$\text{Alt Sınır} = 0,2313 - 3 \sqrt{\frac{0,2313(0,7687)}{50}} = 0,1789$$

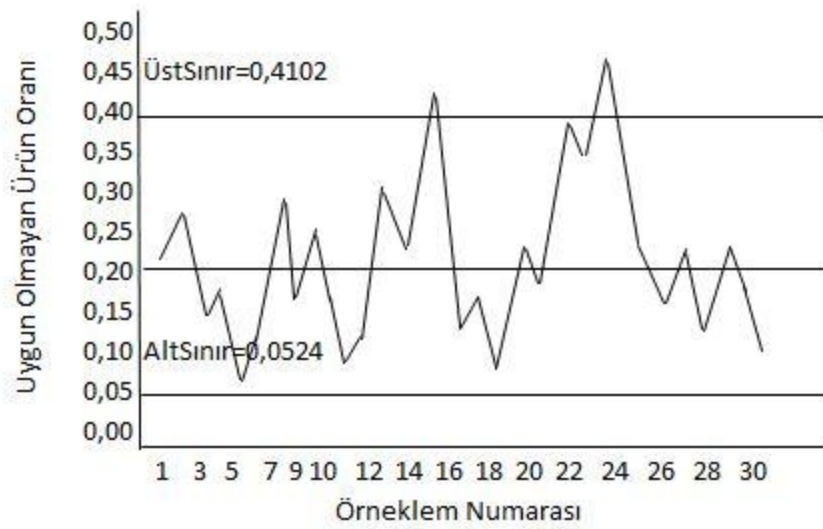
$$\text{Merkez Doğru} = 0,2313$$

$$\text{Üst Sınır} = 0,2313 + 3 \sqrt{\frac{0,2313(0,7687)}{50}} = 0,4101$$

biçiminde hesaplanmaktadır [15].

Çizelge 3.2.  $p$  kart için örneklem değerleri

Örn. Sys.	$D_i$	$\hat{p}_i$	Örn. Sys.	$D_i$	$\hat{p}_i$
1	12	0,24	17	10	0,20
2	15	0,30	18	5	0,10
3	8	0,16	19	13	0,26
4	10	0,20	20	11	0,22
5	4	0,08	21	20	0,40
6	7	0,14	22	18	0,36
7	16	0,32	23	24	0,48
8	9	0,18	24	15	0,30
9	14	0,28	25	9	0,18
10	10	0,20	26	12	0,24
11	5	0,10	27	7	0,14
12	6	0,12	28	13	0,26
13	17	0,34	29	9	0,18
14	12	0,24	30	6	0,12
15	22	0,44	<b>Toplam</b>	<b>347</b>	<b><math>\bar{p}=0,2313</math></b>
16	8	0,16			



Şekil 3.3. Üst sınırı 0,4102, alt sınırı 0,0524 olan kusurlu oranı ( $p$ ) kontrol kartı

### 3.2.1 Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kartının Karakteristik İşlem Eğrisi

$p$  kart için  $\beta$  olasılığı;

$$\begin{aligned}\beta &= P(\hat{p} < \text{Üst Sınır}|p) - P(\hat{p} < \text{Alt Sınır}|p) \\ &= P(D < n\text{Üst Sınır}|p) - P(D < n\text{Alt Sınır}|p)\end{aligned}\quad (3.20)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer  $\delta$  süreç sapmasının büyüklüğü ise;

$$\delta = L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\quad (3.21)$$

ile ifade edilir. Bu durumda örnekleme bir sapma tespit edilme olasılığının kontrol sınırları;

$$\text{AltSınır} = p - L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\quad (3.22)$$

$$\text{ÜstSınır} = p + L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

olarak elde edilmektedir [15].

$D$ ;  $n$  ve  $p$  parametreleri ile binom dağılan bir değişken olduğu için  $\beta$  hata değeri kümülatif binom dağılımından elde edilir. Aşağıdaki tablo  $n = 50$ ,  $\text{Alt Sınır} = 0,03030$  ve  $\text{Üst Sınır} = 0,3697$  parametreleri ile kusurlu oran için kontrol kartının OC eğrisinin hesaplamalarını göstermektedir. Eşitlik 3.21 kullanılarak;

$$\begin{aligned}\beta &= P\{D < (50)(0,3697|p)\} - P\{D \leq (50)(0,03030|p)\} \\ &= P\{D < 18,49|p\} - P\{D \leq 1,52|p\}\end{aligned}$$

hesaplanır ancak  $D$ 'nin bir tamsayı olması gerektiği için;

$$= P\{D < 18|p\} - P\{D \leq 1|p\}$$

elde edilir [15].

**Çizelge 3.3.**Kusurlu oranı ( $p$ ) kartların karakteristik işlem eğrisi değerleri

$p$	$P\{D < 18 p\}$	$P\{D \leq 1 p\}$	$P\{D < 18 p\} - P\{D \leq 1 p\}$
0,01	1,0000	0,9106	0,0894
0,03	1,0000	0,5553	0,4447
0,05	1,0000	0,2794	0,7206
0,10	1,0000	0,0338	0,9662
0,15	0,9999	0,0291	0,9708
0,20	0,9975	0,0002	0,9973
0,25	0,9713	0,0001	0,9712
0,30	0,8594	0,0000	0,8594
0,35	0,6216	0,0000	0,6216
0,40	0,3356	0,0000	0,3356
0,45	0,1273	0,0000	0,1273
0,50	0,0325	0,0000	0,0325
0,55	0,0053	0,0000	0,0053

$p$  kart için ortalama seri uzunluğu ARL  $\bar{X}$  kart için Eşitlik 3.14'ten;

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} \quad (3.23)$$

eşitliği ile verilir. ATS, sinyal ortalama süresi ise  $\bar{X}$  kart için Eşitlik 3.15'te olduğu gibi  $d$  eşit aralıklı periyod süresi olmak üzere;

$$ATS = ARL * d \quad (3.24)$$

olarak tanımlanır [15].

## 4. OLASILIK ORANLARININ ARDIŞIK TESTİ İÇİN KONTROL KARTLARI

Normal örnekleme süreçlerinde bir araştırma için belli bir örneklem sayısına göre gözlemler elde edilir ve bu gözlem değerleri üzerinden hesaplamalar yapılır. *SPRT* sürecinde ise gözlemler teker teker işleme alınır ve tüm gözlemlerin elde edilmesi beklenmez. *SPRT* kartı süreçlerinde her bir gözlem değeri kaydedilip hesaplamalar yapılmadan bir sonraki gözlem işleme alınmaz ve sürece devam edilmez. Dolayısıyla verilerin ardışık olarak elde edildiği çalışmalarda *SPRT* kontrol kartlarının kullanımı avantaj sağlamaktadır Stoumbos ve Reynolds [7], Reynolds ve Stoumbos [8] ve Reynolds ve Stoumbos [9] çalışmalarında Wald [1] tarafından geliştirilen *SPRT*'yi temel alarak normal ve binom dağılım için *SPRT* kartlarını geliştirmişlerdir. Bu kesimde *SPRT* temel alınarak geliştirilen *SPRT* kontrol kartları binom ve normal dağılım için incelenmiştir.

### 4.1. Normal Dağılımda *SPRT* Kartı Kullanımı

$X_1 = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})$ ,  $X_2 = (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n})$ , . . .  $n \geq 1$  olmak üzere birbirinden bağımsız  $\mu$  ortalama ve bilinen  $\sigma^2$  varyans ile normal dağılım gösteren rasgele gözlemlerden oluşan bağımsız örneklemelerdir. Her bir örneklem ardışık alındığında ve her birinin ortalaması  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$  olarak tanımlanır. Ortalamanın testi için hipotezler;

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu = \mu_1$$

biçiminde kurulur [9].

*SPRT* test istatistiği Kesim 2.5 ve Eşitlik 2.66 ile verilen test istatistiği  $\bar{X}$  için düzenlenirse;

$$R_j = \ln \left\{ \frac{f_{\bar{x}}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j; \mu_1)}{f_{\bar{x}}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j; \mu_0)} \right\} = \sum_{j'=1}^j \frac{f_{\bar{x}}(\bar{X}_{j'}; \mu_1)}{f_{\bar{x}}(\bar{X}_{j'}; \mu_0)} \quad (4.1)$$

olarak elde edilir. Test istatistiği;

$$U_j = \frac{R_j}{2\gamma} = \sum_{j'=1}^j (Z_{j'} - \gamma) \quad (4.2)$$

biçimindedir. Burada;

$$Z_{j'} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_{j'} - \mu_0)}{\sigma} \quad (4.3)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma} \quad (4.4)$$

olmaktadır. Bu durumda *SPRT*'nin durdurma kuralları  $\ln A = h$  ve  $\ln B = g$  olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

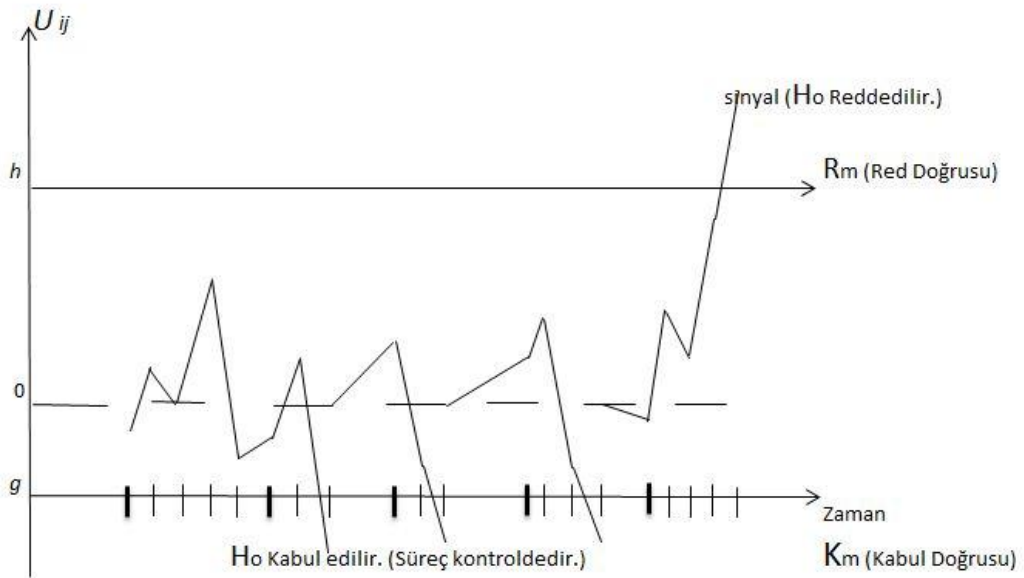
1. Eğer  $U_j > h$  örnekleme durdurulur, sinyal verilir ve  $H_0$  reddedilir.
2.  $g < U_j < h$  ise ardışık örnelemeye devam edilir.
3.  $U_j < g$  ise örnekleme durdurulur ve  $H_0$  kabul edilir.

Süreç ortalamasındaki artışın tespiti  $\mu_1 > \mu_0$  olduğu durumda *SPRT* kart için gerekli test istatistiği Eşitlik 4.2;

$$U_{ij} = \sum_{j'=1}^j (Z_{ij'} - \gamma) \quad (i=1,2,\dots, j=1,2,\dots, N_i) \quad (4.5)$$

biçiminde verilir [9].

Normal dağılımda ortalama ( $\mu$ ) için *SPRT* kartın uygulaması Şekil 4.1'de verilmiştir.



**Şekil 4.1.**  $\mu$ 'ye ilişkin bir *SPRT* kart uygulaması

Süreç ortalamasındaki düşüşün tespiti *SPRT* kart ortalamasındaki artışın tespit edilmesi durumuna benzerdir.  $\mu_1 < \mu_0$  durumunda Eşitlik 4.4;

$$\gamma = -\frac{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma} \quad (4.6)$$

biçimini alır ve benzer şekilde Eşitlik 4.2'de verilen  $U_{ij}$  istatistiği bu durum için;

$$L_{ij} = \sum_{j'=1}^j (Z_{ij'} + \gamma) \quad (4.7)$$

biçiminde tanımlanır. *SPRT* kart örnekleme ve sinyal için aşağıdaki kurallar geçerlidir:

- (1) Eğer  $L_{ij} < -h$  örnekleme durur ve sinyal verilir;
- (2)  $-h \leq L_{ij} < -g$  olduğu sürece  $d_1$  örnekleme aralığını kullanarak ardışık örnekleme devam edilir;
- (3)  $L_{ij} \geq -g$  ise örnekleme durur; sürecin kontrol altında olduğu sonucuna varılarak bir sonraki (i+1)inci *SPRT*'nin başlatılacağı bir sonraki belirli zamanı beklenir. ( $-\infty < g < h < \infty$ )

*SPRT* sürecinin başlatılabileceği zamanlar  $d_F, 2d_F, 3d_F, \dots$  şeklinde tanımlanır. Bu durumda hipotez karar verebilmek için  $n \geq 1$  olmak üzere örnekleme sürece alınır. Eğer  $H_0$  red ise  $\mu = \mu_1$  kararı verilir ve kart tarafından bir sinyal verilir; eğer karar hipotez kabul edilerek  $\mu = \mu_0$  şeklinde olursa başka bir *SPRT*'nin başlatılacağı zamana kadar süreç durdurulur.  $d_1$  bir grup parçanın üretim ya da gözlem zamanına karşılık gelirken  $n$  başarılı grubun  $\eta = 2, 3, \dots$  için  $\eta d_1 = d_F$  eşitliğini sağlayan  $d_1$  zaman birim uzakta olduğu düşünüldüğünde;  $\eta$ 'nün seçimi genellikle başarılı grupların en hızlı gözlemlenme ihtimaline dayanmaktadır [9; 17].

Örneğin; her bir *SPRT* sürecinin 2 saat süreceği ( $d_F = 2$  saat) ve tek bir seferde bir ürün üretilerek her bir ürün arasında yaklaşık 12 dakikanın bulunacağı bir üretim süreci ele alınsın. Gözlemlerin ölçümlerinin örnekleme zamanını etkilemeyeceği varsayıldığında  $d_1 = 12$  dakika (0,2 saat) olacak ve  $\eta = 10$  elde edilecektir. Her bir 8 saatlik çalışma ve araştırma süresi boyunca 4 sabit noktada 4 *SPRT*'nin uygulanması beklenmektedir. 8 saatlik birinci süreçteki ilk *SPRT* birinci ölçümle başlamaktadır. Bu ölçüm bir sinyal ya da kabul kararı vermiyorsa bu ölçümden 12 dakika sonra başka bir ölçüm yapılacaktır. Ürünlerin ölçümleri 12 dakika aralıklarla bir sinyal ya da kabul kararı alıncaya devam edecektir. Örneğin 12 dakika sonra ikinci ölçümün sonunda  $\mu = \mu_0$  kararına ulaşıldığı varsayılınsın. Bu durumda 1 saat 48 dakika süresi boyunca ikinci *SPRT*'ye kadar hiçbir ürün izlemeye alınmayacaktır [9]. Bu durum kalite kontrolünde maliyet ve iş gücü tasarrufunu sağlamaktadır.



Süreç içinde  $\mu$ 'de gerçekleşecek herhangi bir değişikliğin tespiti için kullanılan bir kontrol kartının etkinliği; kartın bir sinyal oluşturmaya ( $H_0$  reddedilinceye) kadar geçen beklenen zaman olarak açıklanmaktadır. Süreçte gerçekleşen değişikliklerin hızlı tespiti ve mümkün oldukça az yanlış alarm, kontrol kartlarının performans amaçlarındandır. En yaygın kullanılan performans göstergelerinden olan ARL (average run length), belirlenen bir zaman noktasından kartın sinyal üretmesine kadar geçen zaman içinde beklenen örneklem sayısıdır ve Eşitlik 3.14'te verilen tanım;

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1-OC(\delta)} \quad (4.8)$$

biçiminde tanımlanır. Diğer bir yaygın kullanılan performans göstergesi ise sinyale kadar alınan ortalama gözlem sayısı ANOS(average number of observations to signal);

$$ANOS(\delta) = ARL(\delta)ASN(\delta) = \frac{ASN(\delta)}{1-OC(\delta)} \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanır. Sinyale kadar gerçekleşecek test sayısını veren ANTS (average tests to signal), ARL'nin Eşitlik 4.8'deki gösterimine paralel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ANTS(\delta) = \frac{1}{1-OC(\delta)}, \quad (4.10)$$

ANOS ise Eşitlik 4.9 ve Eşitlik 4.10'dan yararlanarak;

$$ANOS(\delta) = ANTS(\delta).ASN(\delta) = \frac{ASN(\delta)}{1-OC(\delta)}, \quad (4.11)$$

biçiminde verilir. Kontrol kartlarının her zaman biriminde örneklenen uzun dönem ortalama gözlem sayısı olan AOR (average observation rate) ise;

$$AOR(\delta) = \frac{ANOS(\delta)}{ATS(\delta)} \quad (4.12)$$

olarak verilir. Bir *SPRT* kartında sinyal verinceye kadar geçecek ortalama zaman ATS (average time to signal);

$$\begin{aligned} ATS(\delta) &= d_0 + (ARL(\delta) - 1)E_\delta(D_i) + ARL(\delta) \left( \frac{ASN(\delta)}{n} - 1 \right) d_1 \\ &= d_0 + \left( \frac{1}{1-OC(\delta)} - 1 \right) E_\delta(D_i) + \left( \frac{1}{1-OC(\delta)} \right) \left( \frac{ASN(\delta)}{n} - 1 \right) d_1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

biçimindedir. Eşitlikte  $D_i$ ,  $i$ . ve  $(i + 1)$ . *SPRT*ler arasındaki rasgele zaman aralığıdır.  $ATS(\delta)$ 'nin hesaplanması Eşitlik 4.14 ve Eşitlik 4.15'te olduğu gibi  $E_\delta(D_i)$ 'nin hesaplanması gerekmektedir. Buna göre  $I_i$ ,  $i$ . ve  $(i + 1)$ . *SPRT*lerin başlangıcı arasındaki rasgele zaman aralığı olmak üzere:

$$E_\delta(D_i) = E_\delta(I_i) - \left(\frac{ASN(\delta)}{n} - 1\right)d_1 \quad (4.14)$$

$$E_\delta(I_i) = E_\delta \left[ \left( \left\lfloor \frac{(N_i - 1)d_1}{d_0} \right\rfloor + 1 \right) d_0 \right] \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bir sapmadan bir sinyale kadar geçen zamanın beklenen değerine dengeli ve durağan ATS, SSATS (steady-steady ATS) olarak ifade edilir;

$$\begin{aligned} SSATS(\delta) = & \left( ATS(\delta) - d_0 + \frac{E_\delta(D_i)}{2} \right) \left( \frac{E_1(D_i)}{ATS(0)(1 - OC(0))} \right) \\ & + \left( ATS(\delta) - d_0 + \frac{d_1}{2} \right) \left( \frac{\left(\frac{ASN(0)}{n} - 1\right)d_1}{ATS(0)(1 - OC(0))} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

biçiminde tanımlanır [9].

#### 4.1.1 *SPRT Kartın İstatistiksel Özellikleri ve CD Yaklaşımı*

*SPRT* ortalamasının testi için OC ve ASN fonksiyonları Kesim 2.5'te verilmişti. *SPRT* için ASN ve OC belli değerler için elde edilir. Eğer farklı değerler için ASN ve OC elde edilmek istenirse işlemlerin zorlaştığı görülmektedir. Stoumbus ve Reynoulds [9], düzeltilmiş yayılım (corrected diffusion-CD) CD yaklaşımını önermiştir. Buna göre  $g \leq 0$  ve  $g > 0$  için OC ve ASN fonksiyonları CD yaklaşımı ile aşağıda açıklanmıştır [7; 9]. Hipotezler;

$$H_0: \delta = 0, \quad H_1: \delta = 2\gamma$$

biçiminde kurulsung  $\leq 0$  durumu için OC ve ASN fonksiyonlarına CD yaklaşımı uygulaması;

$$OC(\delta) = \begin{cases} \frac{\exp\{-2(\delta - \gamma)(\widehat{h} + \varepsilon_1)\} - 1}{\exp\{-2(\delta - \gamma)(h + \varepsilon_1)\} - \exp\{-2(\delta - \gamma)g - \varepsilon(g)\}} & \text{eğer } \delta \neq \gamma, \\ \frac{(h + \varepsilon_1)}{(h + \varepsilon_1) + |g - \varepsilon_0|} & \text{eğer } \delta = \gamma. \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\widehat{ASN}(\delta) = \begin{cases} -\frac{n}{\gamma}[(g - \varepsilon_0) + (h - g + \varepsilon_1 + \varepsilon_0)(1 - OC(0))] & \text{eğer } \delta = 0, \\ \frac{n}{(\delta - \gamma)}[(g - \varepsilon_1) + (h - g + 2\varepsilon_1)(1 - OC(\delta))] & \text{eğer } \delta \neq \{0, \gamma\}, \\ n(h + \varepsilon_1)|h - \varepsilon_0| & \text{eğer } \delta = \gamma. \end{cases} \quad (4.18)$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik 4.17 ve Eşitlik 4.18'de belirtilen  $\varepsilon(g)$ ;

$$\varepsilon(g) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{eğer } -0,2 \leq g \leq 0; \\ \varepsilon_1 & \text{eğer } g < -0,2. \end{cases} \quad (4.19)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $\varepsilon_0$  ve  $\varepsilon_1$  değerleri;

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071 \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \ln \left\{ \frac{2}{t^2} (1 - e^{-t^2/2}) \right\} dt = -\frac{\mathfrak{z}(0,5)}{\sqrt{2\pi}} = 0,5825971580 \\ \approx 0,5826 \quad (4.21)$$

biçiminde elde edilir.  $g \leq 0$  koşulu altında  $\widehat{OC}(0) = 1 - \alpha$  ve  $\widehat{OC}(2\delta) = \beta$  olarak belirlenmekte ve  $g - \varepsilon(g)$  ile  $h + \varepsilon_1$  çözümlenmesi ile eşitlikler;

$$h + \varepsilon_1 \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \left\{ \frac{1-\beta}{\alpha} \right\} \quad (4.22)$$

$$g - \varepsilon(g) \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \left\{ \frac{\beta}{1-\alpha} \right\} \quad (4.23)$$

biçiminde verilir [9].

•  $g > 0$  durumda OC ve ASN fonksiyonlarının CD yaklaşımı ile gerçek kabul ve ret sınırları olan  $g$  ve  $h$ :

$$g^* = g - (g + \varepsilon_0) = -\varepsilon_0 \quad (4.24)$$

$$h^* = h - (g + \varepsilon_0) \quad (4.25)$$

olarak tanımlanır.  $\widehat{OC}^*(\delta)$  ve  $\widehat{ASN}^*(\delta)$  değerleri yeni  $g^*$  ve  $h^*$  sınırları doğrultusunda:

$$\widehat{OC}(\delta) = \Phi(g - \delta + \gamma) + \widehat{OC}^*(\delta)(\Phi(h - \delta + \gamma) - \Phi(g - \delta + \gamma)) \quad (4.26)$$

$$\widehat{ASN}(\delta) = n + \widehat{ASN}^*(\delta)(\Phi(h - \delta + \gamma) - (\Phi(h - \delta + \gamma) - \Phi(g - \delta + \gamma))) \quad (4.27)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $\phi(g - \delta + \gamma)$  standart normal dağılım gösterir.  $\overline{OC}(0) = 1 - \alpha$  ve  $\overline{OC}(2\delta) = \beta$  olduğunda  $\alpha$  ve  $\beta$ ;

$$\alpha \approx 1 - \phi(g + \gamma) - \overline{OC}^*(0)(\phi(h + \gamma) - \phi(g + \gamma)) \quad (4.28)$$

$$\beta \approx \phi(g - \gamma) + \overline{OC}^*(2\gamma)(\phi(h - \gamma) - \phi(g - \gamma)) \quad (4.29)$$

biçiminde tanımlanır [9].

#### 4.1.2 Normal Dağılım için SPRT Kartın Tasarımı

SPRT kartın tasarımı,  $\bar{X}$  kartta alt ve üst kontrol sınırlarının belirlenmesi gibi  $g$  ve  $h$  sınırlarının belirlenmesi doğrultusunda gerçekleşmektedir. Dolayısıyla ortalama kartta sınırlar önceden belirlenirken SPRT kartta gözlem geldikçe kart sınırlarını oluşturmak ve bu doğrultuda test etmek mümkün olmaktadır.

SPRT kontrol kartlarında  $d_0$  ilk SPRT'nin uygulanmaya başlandığı zaman aralığını,  $d_1$  ise her bir SPRT'de bir gözlemin araştırılması için gerekli zaman aralığını ve  $d_2$  ise birbiri ardına gerçekleşen testler arasındaki örnekleme aralığını belirtmektedir [9].

Normal dağılım için tasarlanan SPRT kontrol kartlarında öncelikle  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $\delta$ ,  $g$  ve  $h$  parametreleri belirlenir.  $d_0$  genellikle sürecin başlangıç zamanı, personel vardiyaları, ulaştırma, hammaddelerin işlenme zamanı gibi proses özellikleri ve gerekliliklerine uygun seçilmelidir.  $d_1$  ise küçük değerlerde büyük değerlere göre daha etkinlik göstermektedir.  $\delta$  değerinin seçimi için ise şimdiye kadar yapılmış birçok yüksek maliyetli araştırmalar bu değer 0,2 ile 0,7 değerleri arasında seçilmesinin en etkin sonucu vereceğini ortaya çıkarmıştır. Bu değerler küçük ya da büyük sapmaların araştırılmasına göre değişmektedir [9].

$d_0$ ,  $d_1$ ,  $\delta$  değerlerinin belirlenmesinden sonra hipotezin kabul ve red sınırlarını belirleyen  $g$  ve  $h$  belirlenir. Bu değerlerin belirlenmesi ve böylelikle SPRT kartın tasarımı için  $d_1$  değerinin göz ardı edilemeyecek kadar büyük bir değer ( $d_1 > 0$ ) ve  $d_1$  değerinin göz ardı edilebilecek kadar küçük bir değer ( $d_1 < 0$ ) olmasına göre değişen iki farklı yol izlenmektedir [9]:

- $d_1 > 0$  ise  $g$  ve  $h$ 'nin elde edilmesi:
  - a)  $ASN(0)/n$  değeri bulunur.
  - b)  $\alpha \approx \frac{E_0(D_i) + (\frac{ASN(0)}{n} - 1)d_1}{ATS_0 - d_0 + E_0(D_i)}$  formülünden  $\alpha$  elde edilir.

$$c) \frac{ASN(0)}{n} > \exp(0.15 - 0.71 \ln(\delta)) \text{ ise } g \leq 0$$

$$\frac{ASN(0)}{n} \leq \exp(0.15 - 0.71 \ln(\delta)) \text{ ise } g > 0 \text{ olmak üzere } g' \text{ ye karar verilir.}$$

$$d) g \leq 0 \text{ ise } \beta \text{ değeri } \frac{ASN(0)}{n} + \frac{1}{2\theta^2} \left[ \alpha \ln \left\{ \frac{1-\beta}{x} \right\} + (1-x) \ln \left\{ \frac{\beta}{1-\alpha} \right\} \right] \approx 0$$

denkleminde elde edilir.

$$e) g \leq 0 \text{ ise } g \text{ ve } h \text{ değerleri}$$

$$h \approx \frac{1}{2\delta} \ln \left\{ \frac{1-\beta}{\alpha} \right\} - \varepsilon_1 \text{ ve } g \approx \frac{1}{2\delta} \ln \left\{ \frac{\beta}{1-\alpha} \right\} - \tilde{\varepsilon} \text{ olarak elde edilir.}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{eğer } \exp \left\{ 0.15 - 0.71 \ln(\delta) \right\} < \frac{ASN(0)}{n} \leq 1.13 \exp \{ 0.15 - 0.71 \ln(\delta) \} \\ \varepsilon_1 & \text{eğer } \frac{ASN(0)}{n} > 1.13 \exp \{ 0.15 - 0.71 \ln(\delta) \} \end{cases}$$

$$f) g > 0 \text{ ise } g^* = -\varepsilon_0 \text{ ve } h^* = h - g - \varepsilon_0 \text{ şeklinde elde edilir [6].}$$

- $d_1 = 0$  ise  $g$  ve  $h$ 'nin elde edilmesi:

$$a) ASN(0)/n \text{ değerini } ASN(0)/n \approx AOR_0 d_0/n \text{ ile yaklaşık bulunur.}$$

$$b) \alpha = d_0/ATS_0 \text{ ile } \alpha \text{ değeri elde edilir.}$$

$$c) g \leq 0 \text{ ya da } g > 0 \text{ olduğu önceden belirtildiği şekilde bulunur.}$$

$$d) g \leq 0 \text{ ise } g \text{ ve } h \text{ değerleri } d_1 > 0 \text{ seçeneğinde olduğu gibi bulunur.}$$

$$e) g > 0 \text{ ise } g \text{ ve } h \text{ değerleri } d_1 > 0 \text{ seçeneğinde olduğu gibi bulunur [6].}$$

#### 4.1.3 SPRT Kartlarının ve $\bar{X}$ Kartın Karşılaştırılması

Kontrol kartlarının performansı,  $\delta$ 'nın çeşitli sapma değerlerinde, kartların SSATS değerleri karşılaştırılarak değerlendirilir. Belli bir  $\delta$ 'da en küçük SSATS değerine sahip kart, aynı  $\delta$ 'da en verimli karttır. Örnekleme aralığını değiştirmenin performans değerleri ATS ve SSATS değerleri Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

SPRT kartın, çoğu sapmayı  $\bar{X}$  karttan daha hızlı tespit edebildiği gözlenmektedir. SPRT kartta  $h$  üst kontrol sınırı,  $c$  parametresi iki örnekleme aralığı ve  $d_1 < d_2$  olmak üzere; iki bölge arasındaki sınır  $(-\infty, c]$  ve  $(c, h]$  olarak tanımlanır [9].

Çizelge 4.1, SPRT ve  $\bar{X}$  kartları için  $g, h, c$  parametrelerini ve  $\delta = 0$  için ATS değerlerini ve  $\delta > 0$  için SSATS değerlerini göstermektedir.  $ATS(0) = 740,8$  "standart"  $3\sigma/\sqrt{n}$  sınırlı tek taraflı  $\bar{X}$  kartın ARL değerine karşılık gelir.

Çizelge 4.1, *SPRT* kart  $\gamma = 0,5$  ve  $\gamma = 0,3$  referans değerini kullanmaktadır.  $\delta = 0,25$  sapmanın tespit edilmesinde  $\gamma = 0,3$  referans değeri ve  $\delta = 1$  sapmanın tespit edilmesinde ise  $\gamma = 0,5$  referans değerinin en iyi sonuç verdiği görülmektedir. Belli bir aralık üstündeki sapmalarda *SPRT* kartları  $\bar{X}$  karta göre daha verimlidir [9].

Çizelge 4.1.'deki kartlarda bütün belirli zamanların birim aralıklı olacağı varsayılmıştır. Bu yüzden  $d_f=1$  olarak belirlenmiştir. Çizelgelerdeki sütun 2 ve 3 sırasıyla  $\eta=10$  ve 4 için *SPRT* kartlarının, sütun 4 ve 5 sırasıyla  $\eta=10$  ve 4 için  $\bar{X}$  kartlarının SSATS değerlerini vermektedir [9].

**Çizelge 4.1.** *SPRT* kart ile  $\bar{X}$  Kartın ATS ve SSATS değerlerinin karşılaştırması

$\delta$	<i>SPRT</i> Kart		<i>SPRT</i>		$\bar{X}$ Kart	
	$\gamma = 0,30$		$\gamma = 0,50$		$\gamma = 3,21$	
	$\eta = 10$	$\eta = 4$	$\eta = 10$	$\eta = 4$	$\eta = 10$	$\eta = 4$
0	740,8	740,8	740,80	740,80	740,8	740,8
0,25	35,4	42,95	62,65	71,78	258,12	276,51
0,5	7,06	9,96	10,03	13,80	92,92	110,69
0,75	3,24	4,92	3,37	5,26	35,23	47,85
1	2	3,2	1,80	2,99	14,47	22,42
1,25	1,39	2,36	1,19	2,05	6,6	11,39
1,5	1,05	1,87	0,90	1,56	3,4	6,26
2	0,76	1,33	0,67	1,04	1,31	2,35
2,5	0,65	1	0,59	0,78	0,75	1,15
3	0,59	0,79	0,55	0,65	0,56	0,7
3,5	0,56	0,69	0,53	0,59	0,48	0,51
4	0,54	0,64	0,51	0,55	0,45	0,42
$h$	8,14	8,19	5,46	5,43	0,0	0,0
$g$	0,35	0,11	-0,15	-0,37	*	*
$c$	*	*	*	*	-3,21	-3,32

Çizelge 4.1 incelendiğinde, *SPRT* kart,  $\bar{X}$  kartlarından önemli ölçüde verimlidir. Bu nedenle *SPRT*ler her zaman belirli zamanda başlarken *SPRT* kart  $\delta$ 'nın bütün aralıklardaki değerlerinde daha iyi performans sağlamaktadır. Buna göre sinyale kadar geçen süre *SPRT* kartlarında,  $\bar{X}$  kartlarına göre daha kısa sürmektedir. *SPRT* kartlarında hipotez kontrolü için geçen süre daha kısadır [9].

Çizelge 4.1.'deki sonuçlar verilen sapmaları tespit etmek için diğer kartlara göre *SPRT* kart kullanımının çok daha hızlı tespit sağladığını göstermektedir. Buna rağmen bazı uygulamalarda süreç sapmalarına karşı yeterli koruma sağlarken süreç izlemeyle örnekleme maliyetleri azaltılmak istenebilir. Tespit yeteneğini koruyarak örnekleme maliyetini düşürmek için diğer kontrol kartlarına kıyasla *SPRT* kartı kullanmanın daha avantajlı olacağı söylenebilir [9].

#### 4.2 Binom Dağılımda *SPRT* Kartı Kullanımı

Bir üretim sürecinde  $p$  kusur oranını test edilmek istendiğinde hipotezler,

$$H_0: p = p_0, H_1: p = p_1 \quad (p_1 > p_0 \text{ için})$$

biçiminde kurulur.  $i$ . gözlem kusurlu iken  $X_i = 1$ ; diğer durumlarda ise  $X_i = 0$  değerini alır.  $X_i$ 'nin olasılık fonksiyonu;

$$f(x; p) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1 \quad (4.30)$$

dır. Kusurlu oranının ( $p$ ) *SPRT* için test istatistiği ( $L_i$ ) Eşitlik 2.49'dan;

$$\begin{aligned} L_i &= X_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (1 - X_i) \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \\ &= X_i \left[ \ln \frac{p_1}{p_0} - \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right] + \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \\ &= X_i \left[ \ln \frac{p_1(1 - p_0)}{p_0(1 - p_1)} \right] + \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0} = X_i r_2 - r_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

olarak verilir. Eşitlikte  $r_1$  ve  $r_2$ ;

$$r_1 = -\ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \quad (4.32)$$

$$r_2 = \ln \frac{p_1(1 - p_0)}{p_0(1 - p_1)} \quad (4.33)$$

biçimindedir. Ayrıca  $T_j = \sum_{i=1}^j X_i$   $j = 1, 2, \dots, n$  ile tanımlanır ise test istatistiği;

$$Z_i = r_2 T_j - r_1 j \quad (4.34)$$

biçiminde elde edilir [8].

*SPRT* için  $a = \ln A$  ve  $b = \ln B$  olmak üzere ;

$$g = b/r_2; \quad (4.35)$$

$$h = a/r_2; \quad (4.36)$$

$$\gamma = r_1/r_2 \quad (4.37)$$

biçiminde elde edilir.  $j$ . gözlem elde edildikten sonra *SPRT*'ye ilişkin oluşan karar aşamaları aşağıda verilmiştir:

- 1) Eğer  $g < T_j - \gamma_j < h$  ise örneklemeye devam edilir
- 2) Eğer  $T_j - \gamma_j \leq g$  ise  $H_0$  kabul edilir.
- 3) Eğer  $T_j - \gamma_j \geq h$  ise  $H_0$  reddedilir.

Gözlemler sürece ardışık olarak alınırken her iki gözlem arasında  $d$  sabit zaman aralığı bulunur ve her bir gözleme bu zaman aralığında *SPRT* uygulanır. Örneğin her 10 saniyede bir ürün üretilirse ve araştırma ile kayıt işlemi 10 saniyeden uzun sürmezse ( $d = 10$  saniye), ürünler üretilirken araştırma da tamamlanır. Alternatif olarak araştırma, bazı ürünler atlanarak, geriye kalan ürünler üzerinde gerçekleştirilebilir. Bir ürün 10 saniye içinde üretilirse, buna karşın araştırma 30 ile 40 saniye sürerse; bu durumda araştırma periyodları süresince, her 3. veya 4. ürün araştırmaya alınacaktır [8].

Bu süreçte  $p_0$  ,  $p$ 'nin kontrolde olduğunu ve izlenen değişken değerinin kontrol sınırları içinde yer aldığını göstermektedir. Eğer *SPRT*'de  $H_0$  kabul edilirse sürecin kontrol altında olduğuna karar verilir ve sürecin başka bir *SPRT* uygulanacak olan, bir sonraki örnekleme noktasına kadar devam etmesine izin verilir.  $p_1$  ise izlenen değişken değerinin kontrol sınırları dışına çıktığını göstererek kontrol kartının bir uyarı (sinyal) vermesine neden olacaktır. Bu uyarı sürecin normal değerden saptığı konusunda araştırmacıya sinyal niteliği taşımaktadır. Sinyal  $H_0$ 'ın reddedildiğini ve hem *SPRT*'nin hem de üretimin durdurulması gerektiğini işaret etmektedir. Bu durumda süreci olumsuz etkileyen nedenler tespit edilerek normal şartlar sağlanır. Normal şartların sağlanmasının ardından hem süreç hem de *SPRT* tekrar başlatılır [8].

Her bir *SPRT* süreç içinden alınmış bir örnekleme karşılık gelmektedir ve bir sinyal verinceye kadar uygulanan *SPRT* sayısı, bir sinyal verinceye kadar alınan



örneklem sayısına eşittir. Buna göre bir sinyale kadar alınacak ortalama örneklem sayısı- ANSS (average number of sampling to signal) olarak adlandırılır. ANNS, daha önce tanımlanan ortalama işlem uzunluğu ARL (avarage run length) olarak da bilinmektedir.  $p$  için oluşturulan *SPRT* kartlarında;

$$ANSS(p) = ARL(p) = 1/(1 - OC(p)) \quad (4.38)$$

olarak tanımlanır. *SPRT* kart sinyaline kadar beklenen toplam gözlem sayısı ANOS (average number of observations to signal) *SPRT* kart için hesaplanabilen bir değerdir çünkü ASN değeri de sadece *SPRT*de hesaplanabilmektedir. Buna göre;

$$ANOS(p) = ANSS(p) \times ASN(p) \quad (4.39)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. İki gözlem arasında geçen zaman ( $d$ ) olarak tanımlanır ise kontrol kartının sinyal vermesine kadar geçen ortalama zaman ATS (Average Time to Signal);

$$ATS(p) = d \times ANSS(p) = d / (1 - OC(p)) \quad (4.40)$$

biçiminde tanımlanır. Kesim 2.4'ten yararlanılarak  $p = p_0$  ve  $p = p_1$  için;

$$OC(p_0) = 1 - \alpha \quad (4.41)$$

$$ATS(p_0) = \frac{d}{\alpha} \quad (4.42)$$

$$OC(p_1) = \beta \quad (4.43)$$

$$ATS(p_1) = \frac{d}{1-\beta} \quad (4.44)$$

olarak tanımlanır [8].

Bir sapmadan bir sinyale kadar geçen zamanın beklenen değerine dengeli ve durağan ATS yani SSATS (steady-steady ATS);

$$SSATS(p) = ATS(p) - (d / 2) = d / (1 - OC(p)) \quad (4.45)$$

biçiminde ifade edilir [8].

#### 4.2.1 Binom Dağılım için SPRT Kartların İstatistiksel Özellikleri ve CD Yaklaşımı

Binom dağılımına sahip örneklerde SPRT uygulanırken OC ve ASN fonksiyonlarının hesaplamalarında daha avantaj sağlayan CD yaklaşımı kullanılmaktadır [7; 8; 16].

OC ve ASN fonksiyonlarına uygulanan CD yaklaşımı için;

$$h^* = h + (1 - 2p_0)/3 \quad (4.46)$$

eşitliği kullanılır ise CD yaklaşımı için OC fonksiyonu;

$$OC(p) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(h^*r_2)-1}{\exp(h^*r_2)-\exp(gr_2)} \\ \frac{\exp(gr_2)\exp(h^*r_2)-1}{\exp(h^*r_2)-\exp(gr_2)} \\ \frac{h^*r_2}{h^*r_2+|gr_2|} \\ \frac{\exp(\varphi(p)(h^*r_2)-1)}{[\exp(\varphi(p)(h^*r_2)-1)-\exp(\varphi(p)(gr_2)-1)]} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} p = p_0 \text{ ise} \\ p = p_1 \text{ ise} \\ p = \frac{r_1}{r_2} \text{ ise} \\ \text{diğer.} \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

biçiminde elde edilir. ASN fonksiyonu ise;

$$ASN(p) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{h^*r_2(gr_2)}{r_1(r_2-r_1)} \\ \frac{h^*r_2(1-OC(p))+gr_2OC(p)}{r_2p-r_1} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} p = \frac{r_1}{r_2} \text{ ise} \\ \text{diğer.} \end{array} \right\} \quad (4.48)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik 4.46 ve Eşitlik 4.47;  $H_0:p = p_0$  ve  $H_1:p = p_1$  için elde edilir ise Kesim 2.4'teki değerlere eşit olmaktadır. Ancak CD yaklaşımı kullanılır ise  $p_0$  ve  $p_1$ 'den farklı değerler için  $OC(p)$  ve  $ASN(p)$  değerleri elde edilebilmektedir. Uygulamada SPRT'nin sağladığı avantaj, ortalama örneklem sayısı (ASN) ve sinyale kadar geçen ortalama sürenin (ATS) hesaplanmasıdır [8].

SPRT, hipotez testi için kullanılırken  $\alpha$  ve  $\beta$  hata olasılıkları için belirli değerlere sahip olmasının sağlanması için, genellikle  $g$  ve  $h$  sabitlerinin seçilmesi beklenmektedir. Eşitlik 4.47; Eşitlik 4.41 ve Eşitlik 4.43 için düzenlenirse;

$$h \sim \frac{1}{r_2} \ln \left( \frac{1-\beta}{\alpha} \right) \quad (4.49)$$

$$g \sim \frac{1}{r_2} \ln \left( \frac{\beta}{1-\alpha} \right) \quad (4.50)$$

elde edilir. Dolayısıyla  $p = p_0$  ve  $p = p_1$  için CD yaklaşımı kullanıldığında  $ASN(p_0)$  ve  $ASN(p_1)$ ;

$$ASN(p_0) \sim \frac{\alpha \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) + (1-\alpha) \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}{r_2 p_0 - r_1} \quad (4.51)$$

$$ASN(p_1) \sim \frac{\alpha \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) + (1-\alpha) \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}{r_2 p_1 - r_1} \quad (4.52)$$

biçiminde elde edilir [7; 8; 16].

#### 4.2.2 Binom Dağılım için *SPRT* Kartın Tasarımı

*SPRT* kart tasarımının uygulanması için gözlemler arasında geçen  $d$  zaman aralığının, kart parametresini  $\gamma$ 'yı oluşturan  $p_0$ ,  $p_1$  değerlerinin,  $g$  ve  $h$  değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir.  $d$  ile  $p_1$  belirlendikten sonra  $g$  ve  $h$ 'nin bulunması için iki ayrı yöntem bulunmaktadır. Yöntemler aşağıda açıklanmıştır [8].

##### 1. Yöntem:

Birinci yöntem  $ATS(p_0)$  ve  $p_0$ 'dan  $p_1$ 'e oluşacak bir sapmayı tespit etmek için gerekli ortalama zamanı  $SSTAS(p_1)$  değeri bulmaktadır. Yöntem için izlenecek adımlar aşağıda verilmiştir [8]:

- a)  $p_0$  ve  $p_1$  belirlenir.
- b) İki gözlem arasında geçen zaman  $d$  belirlenir.
- c)  $ATS(p_0)$  hesaplanır.  $\alpha$ ,  $\alpha = (d/ATS(p_0))$  denkleminde elde edilir.
- d)  $SSTAS(p_1)$  hesaplanır.  $\beta$ ,  $\beta = \left(SSTAS(p_1) - \frac{d}{2}\right) - \left(SSTAS(p_1) + \frac{d}{2}\right)$  ile elde edilir.
- e) Bulunan  $\alpha, \beta$  değerleri ile  $h$ ,  $h = \left(\frac{1}{r_2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) - \left(\frac{1-2p_0}{3}\right)$  ile elde edilir.
- f) Bulunan  $\alpha, \beta$  değerleri ile  $g$ ,  $g = (1/r_2) \ln(\beta/(1-\alpha))$  ile elde edilir. Son olarak Eşitlik 4.51 kullanılarak  $ASN(p_0)$  bulunur.

Yanlış alarm, süreçte herhangi bir sapma olmamasına rağmen sinyal oluşması durumu olması dolayısıyla  $p = p_0$  olduğunda yanlış alarm sıklığının düşük olması için  $ATS$ 'nin büyük olması beklendiği daha önce belirtilmişti. Eğer bu  $ASN(p_0)$  değeri çok yüksek çıkar ise  $ATS(p_0)$  ve/veya  $SSATS(p_1)$  özellikleri değiştirilir. Dolayısıyla örnekleme maliyeti, yanlış alarm oranı ve bir sapma tespit edilmesi için gerekli zaman arasında geçerli bir denge oluşuncaya kadar tekrar edilir.

Birinci yöntemin avantajı kontrol kartının yanlış alarm oranı ve sapma tespit edilmesi için gerekli zamanın direk olarak kontrol edilebilmesidir. Olası bir

dezavantajı ise her bir *SPRT*de ortalama örneklem sayısının belirlenmemesi ve kontrol edilememesidir [8].

## 2. Yöntem:

Birçok uygulamada kontrol edilebilir ortalama örneklem oranına sahip olmak beklenmektedir. İkinci yöntemde *SPRT* kart tasarımı için  $ASN(p_0)$  belirlenir. İkinci yaklaşım için izlenecek adımlar aşağıda verilmiştir [8]:

- a)  $p_0$  ve  $p_1$  belirlenir. Eğer gerekirse  $p_1$ ;  $\gamma = 1/m$  ve  $m$ 'nin pozitif tamsayı olacak şekilde ayarlanır.
- b) İki gözlem arasında geçen zaman  $d$  belirlenir.
- c)  $ATS(p_0)$  hesaplanır ve  $\alpha$ ,  $\alpha = (d/ATS(p_0))$  denkleminde elde edilir.
- d)  $ASN(p_0)$  belirlenir ve 4.51 kullanılarak  $\beta$  elde edilir.
- e) Yukarıda belirlenen  $\alpha, \beta$  değerleri kullanılarak  $h = \left(\frac{1}{r_2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) - \left(\frac{1-2p_0}{3}\right)$  elde edilir.
- f) Yukarıda belirlenen  $\alpha, \beta$  değerleri kullanılarak  $g = (1/r_2) \ln(\beta/(1-\alpha))$  elde edilir.
- g)  $SSATS(p_1)$  değeri  $SSATS(p_1) = (d/(1-\beta)) - (d/2)$  kullanılarak elde edilir. Eğer  $SSATS(p_1)$  değeri çok yüksek çıkarsa  $ATS(p_0)$  ve/veya  $ASN(p_0)$  özellikleri değiştirilir. Örneklem maliyeti, yanlış alarm oranı ve bir sapma tespit edilmesi için gerekli zaman arasında geçerli bir denge oluşuncaya kadar tekrar edilir.

İkinci yöntemde  $p_1$  için seçilen değer *SPRT* kartı tasarımı için önemli bir araçtır. Böylece  $p$ 'nin bir değeri olan bu değer hemen saptanması gereken tek değer olmayacaktır. Sonuçta  $p_1$ 'e yakın  $p$  değerlerinin aralığı için  $SSATS$  parametresi Eşitlik 4.45'te olduğu gibi elde edilecektir [8].

### 4.2.3 *SPRT* Kontrol Kartı ve Kusurlu Oranı ( $p$ ) Kart Karşılaştırması

Bir süreç kontrolünde  $p$ 'deki küçük sapmaların belirlenmesi için  $p$  kartta, *SPRT* karta göre daha büyük bir örneklem genişliğine gerek duyulmaktadır. Daha büyük bir örneklem genişliği ise örneklem aralıkları  $d$ 'nin daha uzun seçilmesine yol açmakta; zaman ve maliyet artmaktadır. Buna karşın *SPRT* kart daha kısa örneklem aralıklarında alınmış küçük örneklemelerde,  $p$ 'deki sapmaları daha kolay tespit edebilmektedir.

Örneğin; 5 saniyede bir birim üretim yapan ve kusurlu birim oranı %1 olan bir üretim süreci ele alınsın. Birimler, üretim süresi ile eş zamanda olmak üzere 5 saniyede test edilebilmekte ve üretildiğinde teker teker araştırmaya alınabilmektedir. Prosesten her dört saatte bir ( $d = 4 sa$ ) 200 birimlik bir örneklem alınmaktadır. Böylece kontrol değeri 0,01 ( $p_0$ ) olan  $p$ 'de oluşacak bir sapmanın özel nedeni belirlenmek istenmektedir.

$p$  kart için 3-sigma kontrol sınırları  $0,01 \pm 3\left[\frac{(0,01)(0,99)}{200}\right]^{1/2}$  ifadesinden elde edilmektedir. Bu üst kontrol sınırı 200 örnekleme 6 ya da daha fazla hatalı birime denk gelmektedir.  $p = p_0$  olduğunda  $p$  kart tarafından bir sinyalin verilmesi olasılığı 0,004296 olurken; bu sinyale kadar alınacak ortalama örneklem sayısı ( $ANSS$ ) 232,8 ve sinyale kadar geçecek ortalama süre ( $ATS$ ) 931,20 saat olmaktadır. Bu da süreç kontrolde iken her bir 931,20 saat ortalama ile bir kusurlu ürün alarmı meydana geleceği anlamına gelmektedir.  $p$  değeri 0,01'den 0,02'ye yükseldiğinde  $SSATS$  34,85 saat olurken;  $p$ 'nin iki katı değere ulaştığını fark etmek  $p$  kart için görece uzun bir zaman almaktadır. Eğer  $p$ , 0,03'e yükselirse  $SSATS$  8,16 olacaktır (Çizelge 4.2).

$SPRT$  kart oluşturmak için ise hızlı saptanabilecek bir  $p_1$  belirlemek gerekmektedir.  $p$ 'deki küçük sapmaları tespit etmek için gerekli zamanı kısaltmak ve  $p$ ,  $p_1 = 0,02$ 'ye yükselirken daha hızlı tespit edebilmek amaçlanmaktadır. Daha önce verilen örnekte olduğu gibi (Kesim 4.1.2)  $p_1$ 'i 0,02014 gibi bir değere ayarlamak uygun olacak ve böylelikle  $\gamma = 1/69$  olacaktır.  $SPRT$  kart,  $p$  kart ile yaklaşık olarak aynı yanlış alarm oranı ve aynı ortalama örneklem oranına sahip olacak şekilde tasarlanması istenmektedir. Böylece  $d = 4$  saat;  $ASN(p_0) = 200$  saat ve  $ATS(p_0) = 931,20$  saat olacaktır. Devamında  $ASN(p_0)$  için tam bir değer vermesinden dolayı bir önceki bölümde anlatılan II. yöntemle çözüme devam edilirse;  $ATS(p_0)$  için belirlenen değeri kullanarak,  $\alpha = (d/ATS(p_0))$  ile  $\alpha = 0,004296$  elde edilmektedir. Eşitlik 4.14 kullanılarak  $\beta = 0,5138$  bulunmaktadır. Daha sonra e ve f adımları  $h = 6,3289$  ve  $g = -0,9311$ 'i vermektedir.  $g$  ve  $h$ ;  $1/69$ 'un en yakın çarpanına yuvarlandığında  $g = -64/69 = -0,9275$  ve  $h = 437/69 = 6,3333$  elde edilmektedir. Böylelikle  $SPRT$  kart için;

$$-0,9275 < T_j - \frac{j}{69} < 6,3333$$

sınırlarına ulaşılmaktadır. Kontroldeki *ASN* değeri bu kontrol kartı için yaklaşık 200 (tam değer 199,24) ve kontroldeki *ATS* değeri yaklaşık 931,20 (tam değer 933,88) olmaktadır. İlyöntemin *g* adımında *SSATS* parametresi  $p = p_1 = 0,02014$  noktasında yaklaşık olarak 6,30 saat (tam değeri 6,25 saat) bulunmaktadır. Bu değerler *p* kart ile karşılaştırıldığında *SPRT* kart  $p_0$ 'dan  $p_1$ 'e meydana gelen sapmaların tespiti için gerekli zamanda büyük bir düşüş sağlamıştır (Çizelge 4.2.).

Prosesi izlerken daha etkin ve verimli bir kontrol kartı oluşturmak iki amaç içermektedir: Birincisi *p*'deki yükselişleri daha kısa sürede daha hızlı gözlemlemektir. İkinci bir amaç ise örnekleme maliyetlerini düşürmek ve daha az örnekleme bu testi gerçekleştirebilmektir. *SPRT* kart iki amacı da gerçekleştirebilmektedir.

Çizelge 4.2 *p* kart ve *SPRT* kart için *OC*, *ANSS* ve *ATS* değerlerini göstermektedir. Çizelgenin altıncı sütununda *SPRT* kart için *ASN* değerleri verilmiştir (*p* kart için *ASN* her zaman  $n = 200$ ). Bu noktada *SPRT* kart ortalama örneklem sayısı *p*'nin 0,02; 0,03 ve 0,04 değerlerinden sonra alacağı değerler için 200'ün altına düştüğü görülmektedir.  $p = 0,08$  olduğunda *p* kart 200 *ASN* yani 200 birimlik bir ortalama örneklem sayısı gerekirken *SPRT* kart için ortalama örneklem sayısı 100 birime kadar indirilebilmiştir. Dolayısıyla araştırmanın maliyetinin düşürülebildiğini göstermektedir [8].

**Çizelge 4.2.**  $p_0=0,01$  için  $p$  kart ve  $SPRT$  kartın  $OC, ASN, ANSS, ATS$  ve  $SSATS$  değerleri

$P$	$p$ kart			$SPRT$ kart			
	$OC$	$ANSS$	$ATS$	$OC$	$ASN$	$ANSS$	$SSATS$
0,01	0,9957	232,80	931,20	0,9957	199,24	233,47	933,88
0,02	0,8914	9,21	34,85	0,5228	490,39	2,09	6,38
0,03	0,6063	2,54	8,16	0,2026	332,29	1,25	3,02
0,04	0,3084	1,45	3,78	0,0893	236,50	1,10	2,39
0,05	0,1237	1,14	2,56	0,0419	180,45	1,04	2,17
0,06	0,0413	1,04	2,17	0,0203	144,68	1,02	2,08
0,07	0,0119	1,01	2,05	0,0099	120,23	1,01	2,04
0,08	0,0030	1,00	2,01	0,0049	101,82	1,00	2,02

**Çizelge 4.3.**  $p_0 = 0,01$  için  $p$  kart ve  $SPRT$  kartın ATS ve SSATS değerleri

$p$ kart		$SPRT$ kart; gözlem/saat=50			$SPRT$ kart; gözlem/saat=25			$SPRT$ kart; gözlem/saat=12,5			
$p_1$	*	0,020	0,025	0,030	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025
$d$	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	2,0	1,0	4,0	2,0	1,0	0,4
ASN	200	199,2	200,6	201,1	98,8	49,5	24,7	50,6	24,1	12,1	4,8
Obs/h	50	49,8	50,1	50,3	24,7	24,7	24,7	12,6	12,1	12,1	12,1
$p=0,01$	931,2	933,9	924,8	924,4	927,0	936,9	939,1	912,4	952,8	960,4	952,9
0,015	121,57	24,19	33,65	44,93	54,27	54,33	54,35	83,37	87,34	87,57	87,35
0,020	34,85	6,38	6,91	8,21	13,10	13,02	13,01	23,78	24,91	24,92	24,90
0,025	14,95	3,87	3,66	3,78	6,71	6,56	6,52	12,42	12,95	12,93	12,93
0,030	8,16	3,02	2,77	2,71	4,69	4,46	4,41	8,51	8,80	8,77	8,77
0,040	3,78	2,39	2,23	2,17	3,22	2,88	2,79	5,50	5,57	5,53	5,52
0,050	2,56	2,17	2,08	2,05	2,67	2,22	2,10	4,26	4,20	4,14	4,12
0,070	2,05	2,04	2,01	2,01	2,24	1,63	1,46	3,14	2,91	2,82	2,80
0,100	2,00	2,00	2,00	2,00	2,06	1,28	1,04	2,49	2,07	1,95	1,91
0,200	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	1,02	0,62	2,04	1,24	0,99	0,91
$m$	*	69	61	55	61	61	61	61	61	61	61
$h$	*	$\frac{437}{69}$	$\frac{314}{61}$	$\frac{243}{55}$	$\frac{286}{61}$	$\frac{296}{61}$	$\frac{301}{66}$	$\frac{252}{61}$	$\frac{257}{61}$	$\frac{260}{61}$	$\frac{261}{61}$
$g$	*	- 64/69	- 80/61	- 92/55	- 40/61	- 20/61	- 10/61	- 21/61	- 10/61	-5/61	-2/61

Çizelge 4.3., ise  $SPRT$  kartın performans ölçümlerinin araştırılması için  $SSATS$  değerlerini içermektedir. Çizelge incelendiğinde (sütun 3-5)  $SSATS$  değerleri küçük sapmalara daha duyarlı olduğu dikkat çekmektedir.  $p_1 = 0,025$  olarak seçilmesinin;



0,020 iken var olan küçük sapmalardaki performansını düşürerek; büyük sapmalardaki performansını artıracak sonucuna ulaşılır.

*SPRT* kartın  $p$  karttan daha etkin olmasının nedeni;  $p$ 'deki sapmaların hızlı tespit edilmesini sağlarken ortalama örnekleme oranının düşük olmasıdır.  $p$  kart, saatte 50 gözleme tekabül eden, her 4 saatte 200 gözlem almaktadır. Sütun 6-8 aralığında; çizelgedeki üç *SPRT* kart için  $p_1 = 0,025$  için *SSATS* değerleri ve saatte 25 gözlem için yaklaşık ortalama örneklem sayısıdır. 2 ve 1 saat örnekleme aralığına sahip *SPRT* kartlarının, *SSATS* değerlerinin  $p$  karttan daha düşük olduğu görülmektedir. Böylece *SPRT* kart kullanarak, ortalama örneklem sayısı yarıya düşürülse de;  $p$ 'deki sapmaların  $p$  karttakinden daha hızlı tespit edildiği görülmektedir.

*SPRT* kartlarının  $p$  karta göre küçük sapmalarda daha hassas olduğunu fakat büyük sapmalar için yeterince iyi performans gösteremediğini işaret etmektedir (Sütun 9-10).  $p$ 'deki çok büyük sapmalar için *SPRT*deki kısa örnekleme aralıkları ( $d=1,0$  ve  $0,4$ )  $p$  karttan daha başarılıdır. Çizelge 4.3'ten görüleceği gibi örneklemin alınma aralığı ( $d$ ) küçük sapmaların saptanması için önemli bir değişkendir. *SPRT* kartlarda  $p$  kartın tersine küçük sapmaları tespit etmek için büyük örneklem genişliklerini uzun aralıklarla almaya gerek olmadığı görülmektedir. *SPRT* kartlarda kısa aralıklarda küçük örneklem genişlikleri küçük sapmaları tespit etmek için iyi sonuç verirken büyük sapmalar için çok daha başarılı sonuçlar vermektedir.

### 4.3 Sayısal Örnek

Gözlem değerleri normal dağıldığı bilinen bir metal eşya üretim süreci ele alınsın. Üretilen metal eşyaların uzunluklarının üretim sırasında ortaya çıkan sıcaklıktan etkilendiği ve genişerek farklılık gösterdiği farz edilsin. Buna göre bu ürünlerin kalite kontrolü sırasında kontrolü yapılan değişken metal eşyaların uzunluğu olacaktır. Bu süreçte üretim yapan sadece bir makine olduğu ve bu makinadan son ürün olarak aynı anda 17 metal ürün çıktığı bilinmektedir. Bu 17 metal ürünün üretimi ise tam bir saat almaktadır. Bu 17 metal ürün üzerinde yapılan kalite kontrol işlemlerinin yapılarak *SPRT* sürecine dâhil edilme süresi ise yine 1 saatten uzun sürmemektedir.

Bu üretimin yapıldığı iş yerinde 8 saat süren mesaide makine hiç durmadan üretim yapmakta ve sonunda toplam 8 parti ürün çıkmaktadır. Süreçte  $n = 17$  birimin aynı anda üretildiği ve aynı anda gözleme alındığı kabul edilirse  $k = 8$  parti gözlemden toplam  $N=136$  birim üretilmektedir.

Aslam [18] çalışmasından elde edilen normal dağılıma ait 136 birimlik gözlemler (EK-2) bu çalışmada her bir ürünün uzunluğunu vermektedir. Buna göre varyansı 0,00036 olarak bilinen örneklemdeki gözlemlerin uzunluk ortalamaları için;

$$H_0: \mu_0 = 1,975 \quad H_1: \mu_1 = 1,985$$

hipotezi kurulmuştur. Bu süreçte ortalamanın 1,975'ten fazla ve 1,985'e eşit olup olmadığı ve ürün uzunluklarında bir artış olup olmadığı kontrol edilmek istenmektedir ( $\mu_0 < \mu_1$ ). Bu durumda  $\alpha = 0,025$  ve  $\beta = 0,075$  olarak kabul edilirse; sürecin kontrol sınırları  $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$  ve  $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$  değerlerinden  $h = \ln A = 3,6109$  ve  $g = \ln B = -2,5649$  olarak elde edilir. Bu durumda Eşitlik 4.4'ten  $\gamma = \frac{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma} = 3,0732$  olarak elde edilmektedir. 17 birimlik partilere ait elde edilen değerler Çizelge 4.4'te verilmiştir.

**Çizelge 4.4.**  $k = 8$  partili 136 birimlik örneklemin *SPRT* kartı için çözüm sonuçları (artış için)

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
$\sum X_i$	33,7208	33,728	33,8201	33,7129
$\bar{X}_i$	1,9835	1,984	1,9894	1,9831
$Z_i$	1,8640	1,9557	3,1292	1,7627
$Z_i - \gamma$	-1,2092	-1,1175	0,056	-1,9693
$U_{ij}$	-1,2092	-2,3267	-2,2707	-4,24

$U_{ij}$  değerleri  $h$  ve  $g$  sırasıyla üst ve alt sınırları ile karşılaştırıldığında aşağıdaki grafik elde edilmektedir. Ele alınan ilk 3 partinin ölçümleri sonucunda,

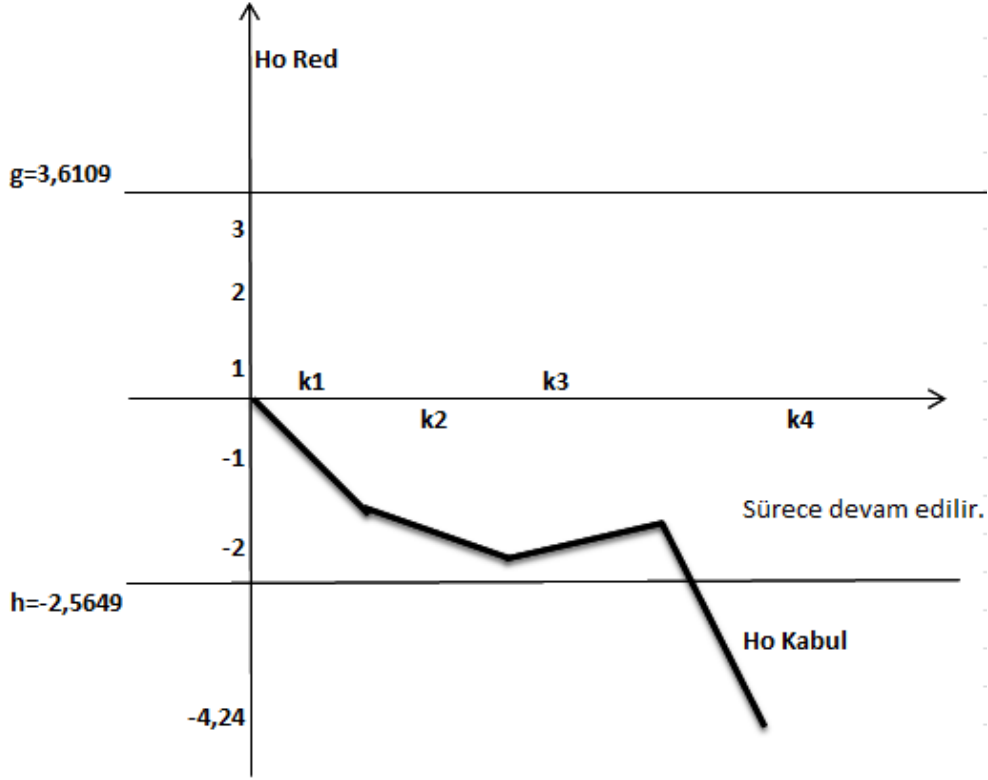
$$h = 3,6109 > U_{ij} > g = -2,5649$$

olduğu için sürece devam edilmektedir. Fakat dördüncü partide;

$$U_i = -4,24 < g = -2,5649$$

olduğu için alt sınırın dışına çıkarak değer  $H_0: \mu_0 = 1,975$  hipotezinin kabul edildiği gözlenmektedir. Süreçte bir artış olmadığı sonucuna ulaşılır ve *SPRT* araştırmasına son verilir (Şekil 4.2).

Bu durumda ikinci grup gözlem dışında tüm grupların kontrol altında olduğu ve herhangi bir artış ya da azalış göstermediği söylenebilir. İlk 3 partide herhangi bir sonuca ulaşılamamıştır. Dördüncü adımda süreç hipotez kabul edilmekte ve ortalamanın 1,975'e eşit olduğu sonucuna varılmaktadır.



**Şekil 4.2.** Çizelge 4.4'de ilişkin *SPRT* kart grafiği

Süreç için bir azalış testi edilmek istenirse bunun için;

$$H_0: \mu_0 = 1,99 \quad H_1: \mu_1 = 1,96$$

$\mu_0 > \mu_1$  olduğu göze çarpmaktadır. Eşitlik 4.28'den  $\gamma = -\frac{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma} = -3,2596$  olarak elde edilmektedir. Kesim 4.1'den Eşitlik 4.6 ve Eşitlik 4.7 ile elde edilen 17 birimlik partilere ait değerler Çizelge 4.5'te verilmiştir.

**Çizelge 4.5.**  $k = 8$  partili 136 birimlik örneklemin *SPRT* kartı için çözüm sonuçları (azalış için)

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
$\sum X_i$	33,7208	33,6057	33,5344	33,5814	33,7129
$\bar{X}_i$	1,9835	1,9768	1,9726	1,9753	1,9831
$Z_i$	2,9336	-2,8684	-3,7811	-3,1944	-1,4994
$Z_i - \gamma$	1,8471	0,3911	-0,5215	0,0651	1,7601
$L_{ij}$	1,8471	2,2382	1,7167	1,7818	3,5419

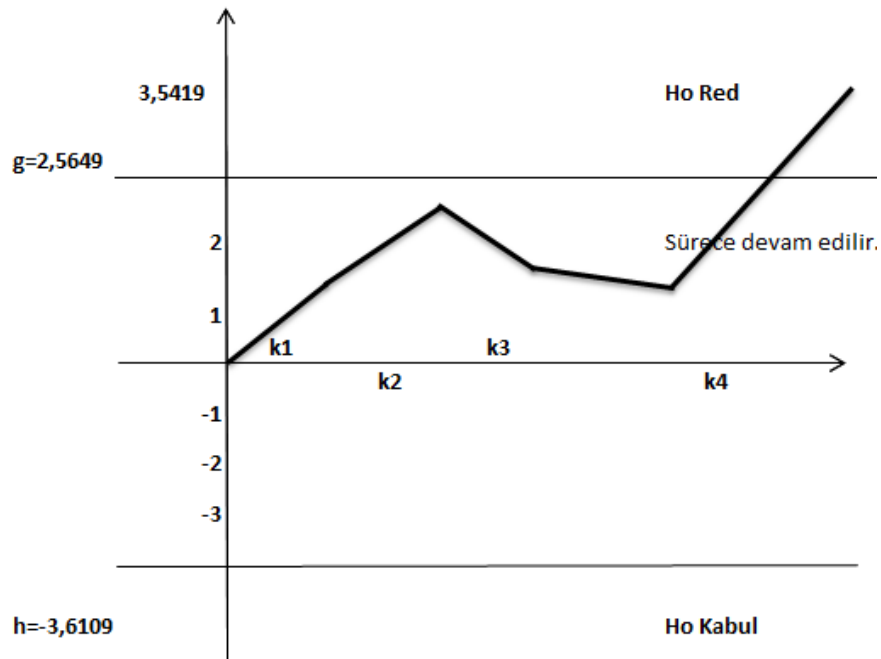
$L_{ij}$ 'ler alt ve üst sınır ile karşılaştırıldığında ilk dört partinin  $L_{ij}$  değerleri;

$$-h = -3,6109 < L_{ij} < -g = 2,5649$$

aralığında kaldığı için süreç devam edilir ancak beşinci partide;

$$L_{ij} = 3,5419 > -g = 2,5649$$

olduğundan  $H_0$ 'ın red edilir.



**Şekil 4.3.** Çizelge 4.5'e ilişkin *SPRT* kart grafiği

## 5. SONUÇLAR

*SPRT* kartın  $\bar{X}$  ve  $p$  karta göre daha avantajlı bir kontrol kartı olduğu gözlenmiştir. Öncelikle *SPRT* kart ile yapılan bir araştırmada örneklem genişliğinin önceden belirlenmesi ve tüm gözlemlerin araştırma başlamadan elde edilmesi gerekmemektedir. Aksine *SPRT* kartta her bir gözlem bir test özelliği taşımaktadır. Böylece her gözlem teker teker işleme alınıp karar verilemezse bir sonraki gözleme ihtiyaç duyulmaktadır. *SPRT*, özellikle maliyetli ve uzun zaman isteyen süreçler için büyük avantaj sağlamaktadır. Bununla birlikte *SPRT* kartta örneklemin beklenen değerinin tahmin edilebiliyor olması araştırmacıya önemli bir avantaj sağlamaktadır.

Kontrol kartları genel olarak süreçteki sapmaların hızlı ve verimli tespitini amaçlamaktadır. Kontrol kartlarının karşılaştırmaları  $\bar{X}$  ve  $p$  kartın kontrol değerine yakın sapmalar için; *SPRT* kartın ise kontrol değerinden farkı büyük olan sapmalarda daha avantajlı olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte *SPRT* kart, yanlış alarm oranı ve ortalama örneklem oranı için süreç değişikliklerini, sapmaları çok daha hızlı tespit edebilmektedir. Ayrıca *SPRT* kartta CD düzeltmesi kullanılarak kontrol değerinden farklı  $\mu$  ve  $p$  değerleri için de performans göstergelerinin elde edilmesi mümkün olmaktadır. Sonuç olarak ardışık olasılık oran testlerinin geleneksel  $\bar{X}$ -ortalama ve  $p$ -oran kontrol kartlarına göre daha hızlı sonuç verdiği ve böylece zamandan ve maliyetten kâr edilmesini sağladığı söylenebilir.

Tez çalışmasında normal dağılımda ortalama ve binom dağılımda kusurlu oranı için *SPRT* kart incelenmiş ve sabit örneklem genişlikli düzenlerde kullanılan  $\bar{X}$  ve  $p$  kart ile karşılaştırılmıştır. Daha sonra yapılacak çalışmalarda farklı dağılımların *SPRT* kartı incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Wald, A., Sequential Analysis, John Wiley, New York, **1947**
- [2] Reynolds MR Jr, Amin RW, Arnold JC. CUSUM Charts With Variable Sampling Intervals, Technometrics, 32, 371-384, **1990**
- [3] Rendtel U., CUSUM Schemes With Variable Sampling Intervals and Sample Sizes, Statistical Papers, 31, 103-118, **1990**
- [4] Hamurkaroğulları C., Bacanlı S., Ardışık Örnekleme Planında CUSUM Kontrol Kartlarının Kullanımı, İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt 01, No.01, 87-99, **2002**
- [5] Qu L., Wu Z., Khoo M. B.C. , Castagliola P., A CUSUM Scheme For Event Monitoring, International Journal of Production Economies, Volume 145, Issue 1, 268-280, **2013**
- [6] Li Y., Pu X., Tsung F., Adaptive Charting Schemes Based On Double Sequential Probability Ratio Tests, Qual. Reliab. Engng. Int., 25:21-39, **2009**
- [7] Stoumbos Z. G., Reynolds M.R. Corrected Diffusion Theory Approximations In Evaluating Properties Of AOOT Charts For Monitoring A Process Mean, Nonlinear Analysis Theory, Method and Applications, Vol. 30 No.7; 3987-3996, **1997**
- [8] Reynolds M.R., Stoumbos Z. G., The AOOT Chart For Monitoring A Proportion, IIE Transaction 1998; 30:545-561, **1998**
- [9] Stoumbos Z. G., Reynolds M.R., The AOOT Control Chart For The Process Mean With Sample Starting At Fixed Times, Nonlinear Analysis: Real World Applications 2 2001; 1-34, **2001**
- [10] Lorden, G. 2-AOOT's And The Modified Kiefer-Weiss Problem Of Minimizing An Expected Sample Size, Annals of Statistics, 4:281-291, **1976**
- [11] Ou Y., Wu Z., Goh T. N., A New SPRT Chart For Monitoring Process Mean and Variance, International Journal of Production Economics, **2011**
- [12] Huffman M. D., An Efficient Approximate Solution To The Kiefer-Weiss Problem, Annals of Statistics, Vol. 11, No. 1, 306-316, **1983**
- [13] Çingil, H., Kadılar C., Ardışık Çözümleme, Bizim Büro Basımevi, Ankara **2005**

- [14] Bacanlı S., Korelasyon Katsayısının Ardışık Testi, Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi, Ankara, **1988**
- [15] Montgomery D.C., Introduction to Statistical Quality Control, Third Edition, Wiley Pub., **1996**
- [16] Siegmund D., Corrected Diffusion Approximations in Certain Random Walk Problems, APT Advances in Applied Probability, Vol. 11, No.4, 701-719, **1979**
- [17] Reynolds, M.R., Jr. Variable Sampling interval control charts with sampling at fixed times. IIE Transactions, 28, 497-510, **1996**
- [18] Aslam M., YenC., Jun C. Variable Repetitive Group Sampling Plans With Process Loss Consideration, Journal of Statistical Computation and Simulation, 81:11, 1417-1432, **2011**



## EKLER

### EK 1: $\bar{X}$ KONTROL KARTLARI SINIR DEĞERLERİ VE MERKEZ DOĞRUSU İÇİN FAKTÖR DEĞERLERİ

Örneklemdenki Gözlem Sayısı, n	Sınır Değerleri için			Merkez Doğrusu için	
	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>
2	2,121	1,880	2,659	1,128	0,8865
3	1,732	1,023	1,954	1,693	0,5907
4	1,500	0,726	1,628	2,059	0,4857
5	1,342	0,577	1,427	2,326	0,4299
6	1,225	0,483	1,287	2,534	0,3946
7	1,134	0,419	1,182	2,704	0,3698
8	1,061	0,373	1,099	2,847	0,3512
9	1,000	0,337	1,032	2,970	0,3367
10	0,949	0,308	0,975	3,078	0,3249
11	0,905	0,285	0,927	3,173	0,3152
12	0,866	0,266	0,886	3,258	0,3069
13	0,832	0,249	0,850	3,336	0,2998
14	0,802	0,235	0,817	3,407	0,2935
15	0,775	0,223	0,789	3,472	0,2880
16	0,750	0,212	0,763	3,532	0,2831
17	0,728	0,203	0,739	3,588	0,2787
18	0,707	0,194	0,718	3,640	0,2747
19	0,688	0,187	0,698	3,689	0,2711
20	0,671	0,180	0,680	3,735	0,2677
21	0,655	0,173	0,663	3,778	0,2647
22	0,640	0,167	0,647	3,819	0,2618
23	0,626	0,162	0,633	3,858	0,2592
24	0,612	0,157	0,619	3,895	0,2567
25	0,600	0,153	0,606	3,931	0,2544

**EK 2: KESİM 4.3'TE KULLANILAN 136 ADET GÖZLEM DEĞERİ**

1,9422	1,9651	2,0230	1,9712	1,9975	2,0164	1,9927	1,9566
1,9738	1,9541	1,9800	1,9596	1,9811	2,0088	1,9858	1,9677
2,0001	1,9659	1,9955	1,9842	1,9909	1,9829	1,9684	1,9942
1,9897	1,9836	1,9891	1,9608	2,0109	1,9912	2,0077	1,9803
2,0106	1,9885	1,9704	1,9882	1,9689	1,9553	1,9741	1,9825
1,9640	2,0187	1,9616	1,9865	1,9556	1,9817	1,9774	1,9316
1,9841	1,9919	1,9737	1,9958	2,0121	2,0021	1,9665	1,9773
1,9841	1,9570	1,9610	2,0015	1,9750	1,9825	1,9758	1,9682
1,9668	1,9696	2,0334	1,9656	1,9819	2,0116	1,9754	1,9986
2,0114	1,9861	1,9743	1,9594	1,9712	1,9849	1,9711	1,9486
1,9837	1,9424	1,9744	1,9605	1,9719	1,9656	1,9549	2,0174
1,9779	2,0072	1,9875	1,9781	1,9834	1,9893	1,9276	1,9513
1,9971	1,9963	1,9375	1,9941	1,9763	2,0108	1,9687	1,9559
1,9611	1,9729	1,9992	1,9925	2,0073	1,9742	1,9557	1,9726
1,9964	1,9614	1,9768	1,9991	1,9832	1,9847	1,9849	1,9918
1,9748	1,9664	2,0035	1,9822	1,9882	1,9809	1,9920	1,9994
2,0030	1,9786	1,9720	1,9834	1,9726	2,0012	1,9557	1,9874

## ÖZGEÇMİŞ

### Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Dilşad Erkek  
Doğum Yeri : Ankara  
Medeni Hali : Evli  
E-posta : dilsader@gmail.com  
Adresi : EGS Park Kongre ve Kültür Merkezi  
Güney Ege Kalkınma Ajansı  
Denizli/Merkez

### Eğitim

Lise : Pursaklar Anadolu Lisesi  
Lisans : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölüm  
Yüksek lisans: Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü

### Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : İleri Seviye

### İş Deneyimi

2008 – 2010 Global Kalite ve Belgelendirme  
Kalite Danışmanı ve Kalite Yönetim Sistemleri Denetmeni  
2010 - ... Güney Ege Kalkınma Ajansı  
Ekonomik Araştırmalar ve Planlama Birimi Uzmanı

### Deneyim Alanları

Kalite Yönetim Sistemleri, 2008-2011  
Bölgesel Kalkınma Ekonomisi, 2010-2013

### Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

## **Tezden Üretilmiş Yayınlar**

-

## **Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar**

-