

**DEĐIŐKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARI VE
OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ**

**INDIVIDUAL PENSION PLANS WITH TARGETED
CONTRIBUTIONS AND OPTIMAL INVESTMENT
STRATEGY**

MURAT KIRKAĞAÇ

YRD. DOÇ. DR. YASEMİN GENÇTÜRK
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2015

MURAT KIRKAĞAÇ'ın hazırladığı “**Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planları ve Optimal Yatırım Stratejisi**” adlı bu çalışma aşağıdaki juri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Serpil CULA

Başkan

.....

Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK

Danışman

.....

Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

Üye

.....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Dedem'e...

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

_ / _ / 2015

Murat KIRKAĞAÇ

ÖZET

DEĞİŞKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARI VE OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ

Murat KIRKAĞAÇ

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK

Ocak 2015, 52 sayfa

Bireysel emeklilik sistemi bireylerin çalışma dönemlerinde birikim oluşturmaları ve emeklilik dönemlerinde gelir elde etmeleri üzerine kurulmuş katkısı belirli bir emeklilik planıdır. Bireysel emeklilik planlarında katılımcı belirli bir hedef fon büyüklüğü belirlemekte ve hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için katkılar yapmaktadır. Bu tezde katılımcının hedef fon büyüklüğüne ulaşması amacıyla yönelik iki farklı yöntem incelenmiştir. Bu yöntemlerden biri gerçekleşen getirinin beklenen getiriden farklı olması nedeniyle ortaya çıkacak fon açığının dikkate alınarak katkının belirlenmesi, diğeri ise sabit katkılardan oluşan fonun yatırım araçlarına optimal tahsisidir.

Bu tezde bireysel emeklilik planlarında genellikle kullanılmakta olan sabit katkılı bireysel emeklilik planları, bu geleneksel plana alternatif olarak değişken katkılı

bireysel emeklilik planları ile bireysel emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi birlikte incelenmiştir.

Bu çalışmada, 10.000 tekrarlı iki benzetim çalışması ile iki farklı uygulama yapılmış; birinci uygulamada sabit ve değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında dönem sonu açık miktarları karşılaştırılarak, hangi planda hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı, hangi planın daha riskli olduğu, ikinci uygulamada ise yıllar içerisinde fonun ne kadarının yüksek riskli ne kadarının düşük riskli yatırım aracında değerlendirilmesi gerektiği, yani optimal yatırım stratejisi belirlenmiştir. Optimal yatırım stratejisi belirlenirken optimizasyon yöntemi olarak yatırım getirisinin zamanla değişmesinden kaynaklanan dinamik yapısı nedeniyle Dinamik Programlama kullanılmıştır.

Birinci uygulamanın sonuçları incelendiğinde; değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında dönem sonu açık miktarının sabit katkılı bireysel emeklilik planlarına göre daha düşük olduğu, hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı ve değişken katkılı planların daha az riskli olduğu sonucuna varılmıştır.

Optimal yatırım stratejisinin belirlendiği ikinci uygulamanın sonuçları incelendiğinde; birikim döneminin başlarında fonun büyük bir kısmının hisse senedi gibi yüksek riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmesi, vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirilen oranının azaltılarak devlet tahvili gibi düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilen oranının artırılması ve emeklilik dönemine yaklaşıldığında ise fonun büyük bir kısmının düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmesinin, optimal yatırım stratejisi olacağı; sabit katkıların yatırım araçlarına optimal tahsisi sonucunda da hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşılabileceği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bireysel Emeklilik Sistemi, Sabit Katkılı Bireysel Emeklilik Planları, Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planları, Hedef Fon Büyüklüğü, Benzetim, Dinamik Programlama, Optimal Yatırım Stratejisi.

ABSTRACT

INDIVIDUAL PENSION PLANS WITH TARGETED CONTRIBUTIONS AND OPTIMAL INVESTMENT STRATEGY

Murat KIRKAĞAÇ

Master of Science, Department of Actuarial Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yasemin GENÇTÜRK

January 2015, 52 pages

Individual pension system is a defined contribution pension plan which is based on individuals' creating savings throughout their work period and generating income during their retirement period. In individual pension plans, the saver determines a particular fund target and contributes in order to reach this fund target. In this thesis, it was aimed that the saver reached this fund target and two methods were examined for this purpose. One of these methods is determining the contribution by taking fund deficit arising due to the fact that actual return is different from the expected return into account while the other one is the optimal asset allocation of the fund incurred by the fixed contributions.

This thesis deals with individual pension plans with fixed contribution, which is commonly used in individual pension plans, individual pension plans with targeted

contribution as an alternative to the conventional plan and determining optimal investment strategy in individual pension plans.

In this thesis, two simulation studies with 10.000 iterations and two different application studies were conducted. In the first application study, in which plan the fund target was approached more, and which plan was more risky were determined by comparing final deficits in the individual pension plans with fixed and targeted contributions. In the second application study, on the other hand, the optimal investment strategy- what proportion of the fund should be invested in the high-risk asset and what proportion of the fund should be invested in the low-risk asset in years- were specified. While optimal investment strategy was being determined, Dynamic Programming was utilized as an optimization method due to investment return's dynamic structure as a result of the changes in time.

When the results of the first application study were examined, it was found out that final fund deficit is lower in the pension plans with targeted contribution than that of the pension plans with fixed contribution, fund target was approached more in the pension plans with targeted contributions, and pension plans with targeted contributions were less risky.

When the results of second application study, where optimal investment strategy was determined, were analyzed, it was seen that optimal investment strategy is at the beginning of the saving period to invest the fund mainly in high-risk and high-return assets such as equities; after some years, to decrease the proportion of the fund which was invested in high-risk assets gradually, thus, to increase the proportion of the fund which was invested in the low-risk and low-return assets like treasury bonds; and finally close to the retirement period, to invest the fund mainly in low-risk and low-return assets. It was observed that target fund could be reached as a result of optimal asset allocation of fixed contributions.

Keywords: Individual Pension System, Individual Pension Plans With Fixed Contribution, Individual Pension Plans With Targeted Contribution, Fund Target, Simulation, Dynamic Programming, Optimal Investment Strategy.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında desteğini bir an olsun esirgemeyen, beni daima çalışmaya teşvik eden, karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemi sağlayan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK'e,

Tez savunma jurisinde yer alan; çok değerli önerileri ve yapıcı eleştirileri ile tezime katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. Serpil CULA'ya, tezin uygulama aşamasında da yardımını esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Bu tezin hazırlanma aşamasında gösterdiği anlayış için bölüm başkanımız Sayın Doç. Dr. Kasırga YILDIRAK'a ve üzerimde emeği geçen tüm hocalarıma,

Tez çalışmam boyunca destekleri ve yardımları ile yanımda olan; arkadaşım Arş. Gör. Övgücan KARADAĞ'a, oda arkadaşım Arş. Gör. Betül Zehra KARAGÜL'e, hocam Uzm. Furkan YILDIRIM'a,

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi tez dönemimde de bana güç ve destek olan arkadaşlarım Şükrü ÖZ'e, Alper AVCIOĞLU'na, Hakan AYÇİÇEK'e,

Bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan, emeklerini asla ödeyemeyeceğim annem Tansu KIRKAĞAÇ'a, babam Adnan KIRKAĞAÇ'a, abim İsmail KIRKAĞAÇ'a,

Hayattaki en büyük destekçim, aldığım her nefes için şükretme sebebim olan eşim Şenay KIRKAĞAÇ'a,

En içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ÇİZELGELER	viii
ŞEKİLLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. SABİT VE DEĞİŞKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARI	5
2.1. Sabit Katkıli Bireysel Emeklilik Planları	6
2.2. Değişken Katkıli Bireysel Emeklilik Planları.....	7
3. BİRİNCİ UYGULAMA: SABİT VE DEĞİŞKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARININ KARŞILAŞTIRILMASI.....	9
3.1. Yatırım Getirisindeki Tahmin Hatasının İncelenmesi	11
3.2. Vade Değişiminin Etkisinin İncelenmesi.....	19
3.3. Hedef Fon Büyüklüğündeki Değişimin Etkisinin İncelenmesi	20
3.4. Lamda Katsayılarındaki Değişimin Etkisinin İncelenmesi	22
4. DİNAMİK PROGRAMLAMA	26
4.1. Dinamik Programlamada Kullanılan Temel Kavramlar	26
4.1.1. Süreç.....	26
4.1.2. Aşama	27
4.1.3. Durum.....	27
4.1.4. Geçiş (Dönüşüm) Fonksiyonları	27
4.1.5. Karar.....	27
4.1.6. Optimal Politika	27
4.2. Optimalite İlkesi	28
4.3. Çok Aşamalı Karar Süreçleri	28
4.4. Dinamik Programlama Türleri.....	28
4.5. Dinamik Programlamanın Formülasyonu	28
4.6. Dinamik Programlama Çözüm Yolları.....	30

4.6.1. Tablosal Çözüm Yolu	30
4.6.2. Analitik Çözüm Yolu	30
4.7. Dinamik Programlamanın Yineleme ile Çözüm Yöntemleri	30
4.7.1. İleriye Doğru Yineleme ile Çözüm Yöntemi	30
4.7.2. Geriye Doğru Yineleme ile Çözüm Yöntemi	31
5. OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ	32
5.1. Model.....	32
5.2. Optimizasyon Probleminin Formüle Edilmesi	33
5.3. Optimal Yatırım Stratejisinin Dinamik Programlama ile Belirlenmesi.....	34
5.4. Dinamik Programlama Probleminin Çözümü.....	35
6. İKİNCİ UYGULAMA: OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİNİN BELİRLENMESİ .40	
6.1. Optimal Yatırım Stratejisinin Farklı Vadeler İçin Belirlenmesi.....	40
6.2. Hedef Fon Büyüklüğündeki Değişimin Etkisinin İncelenmesi	45
6.3. Dönem Sonu Hedefi İçin Ağırlık Katsayısındaki Değişimin Etkisinin İncelenmesi	46
6.4. İskonto Faktöründeki Değişimin Etkisinin İncelenmesi	47
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ	52

ÇİZELGELER

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1. Birinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları.....	11
Çizelge 3.2. İkinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları.....	12
Çizelge 3.3. Üçüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	14
Çizelge 3.4. Dördüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	15
Çizelge 3.5. Beşinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları.....	16
Çizelge 3.6. Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler.....	17
Çizelge 3.7. Fon Büyüklüğünün ve Katkı Miktarının Varyansı	18
Çizelge 3.8. Farklı Vadelerde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler .	19
Çizelge 3.9. Farklı Hedef Fon Büyüklüklerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler	21
Çizelge 3.10. Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı λ_1 Değerleri İçin Katkıların Standart Sapmaları ($\lambda_2 = 0,01$)	23
Çizelge 3.11. Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı λ_2 Değerleri İçin Katkıların Standart Sapmaları ($\lambda_1 = 0,2$)	23
Çizelge 3.12. Farklı λ_1 Değerlerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler ($\lambda_2 = 0,01$).....	24
Çizelge 3.13. Farklı λ_2 Değerlerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler ($\lambda_1 = 0,2$)	24
Çizelge 6.1. Birinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	41
Çizelge 6.2. İkinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	42
Çizelge 6.3. Üçüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	43
Çizelge 6.4. Dördüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	44
Çizelge 6.5. Farklı θ_0 Değerleri İçin Optimal Yatırım Oranları	46
Çizelge 6.6. Farklı İskonto Faktörleri İçin Optimal Yatırım Oranları	47

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Birinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	12
Şekil 3.2. İkinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	13
Şekil 3.3. Üçüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	14
Şekil 3.4. Dördüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	16
Şekil 3.5. Beşinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları	17
Şekil 3.6. Sabit ve Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı Vade Değerleri İçin Fon Büyüklükleri.....	20
Şekil 3.7. Sabit ve Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı Hedef Fon Büyüklükleri İçin Gerçekleşen Fon Büyüklükleri	22
Şekil 6.1. Birinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	42
Şekil 6.2. İkinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü.....	43
Şekil 6.3. Üçüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü	44
Şekil 6.4. Dördüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü.....	45
Şekil 6.5. Farklı Hedef Fon Büyüklükleri İçin Gerçekleşen Fon Büyüklükleri.....	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

μ, λ	Ortalama
σ_1, σ_2	Standart Sapma

Kısaltmalar

BES	Bireysel Emeklilik Sistemi
SSK	Sosyal Sigortalar Kurumu
EGM	Emeklilik Gözetim Merkezi
SPK	Sermaye Piyasa Kurulu
DP	Dinamik Programlama

1. GİRİŞ

Dünyada emeklilik sistemleri genellikle ulusal sosyal güvenlik sistemi, tamamlayıcı emeklilik planları ve özel emeklilik fonları olmak üzere üç ayaklı bir şekilde inşa edilmektedir. Birinci ayakta devletin oluşturup çalıştırdığı ve çalışana emeklilik hakkı veren ulusal sosyal güvenlik sistemi, ikinci ayakta işverenler tarafından kurulup çalıştırılan tamamlayıcı emeklilik fon ve planları, üçüncü ayakta ise özel kesimin kurduğu, isteğe bağlı tasarruf ve yatırım sisteminin ürünü olan özel emeklilik fonları yer almaktadır [1].

Üç ayaklı bu yapının üçüncü ayağını oluşturan Bireysel Emeklilik Sistemi (BES), kişilerin aktif çalışma yaşamları süresince yaptıkları tasarrufları uzun vadeli yatırıma yönlendirerek emeklilik dönemlerinde, yaşam standartlarını koruyabilecekleri bir gelir elde etmelerini sağlayan özel bir emeklilik sistemidir [2].

Temelde katkısı belirli emeklilik planları, faydası belirli emeklilik planları ve karma emeklilik planları olmak üzere üçe ayrılan emeklilik planlarında, bireysel emeklilik planları katkısı belirli emeklilik planları olup bu planlarda katkılar sabit veya değişken olabilir.

Sabit katkılı bireysel emeklilik planları Türkiye de dahil olmak üzere birçok ülkede çoğunlukla kullanılan geleneksel emeklilik planları olup bu planlarda emeklilik hesabına düzenli aralıklarla, sabit katkılar yapılmaktadır. Bu katkılar genellikle maaşın belirli bir oranı olmakla birlikte önceden belirlenen sabit bir miktar da olabilir.

Bu tezde bu geleneksel planların yanı sıra değişken katkılı, esnek bireysel emeklilik planları da ele alınmıştır. Değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında katılımcı tarafından fona yapılacak katkı miktarı; gerçekleşen fon büyüklüğü ile hedeflenen fon büyüklüğü arasındaki fark göz önünde bulundurularak, sistematik olarak belirlenmektedir [3].

Önerilen bu plan Box ve Luceno [4] tarafından yapılan sanayideki süreç kontrolünde kullanılan yöntemle dayanmaktadır. Bu yöntemin altında yatan düşünce çiktının, girdideki son hataya ve geçmiş hataların kümülatif toplamına bağlı olmasıdır. Galdolfi, Sabatini ve Rossolini [5] bu yöntemi ekonofizik literatüründe de kullanılmıştır. Bu yöntem aynı zamanda Owadally [6] tarafından ekonomik varsayımların deterministik olduğu faydası belirli emeklilik planlarının

fonlanmasında da kullanılmıştır. Faydası belirli emeklilik planları değerlendirilirken varlıkların getiri oranlarına ilişkin varsayımlar yapılır. Bu varsayımların gerçekleşen getirilerden farklı olması sonucunda fonda açık veya fazlalık oluşur. Fonda açık da fazlalık da istenmeyen durumlardır. Bu nedenle yapılan varsayımın gerçekleşmesi oldukça önemlidir. Bu çalışmada yatırım getirisi varsayımındaki sapmanın emeklilik fonlarına etkisi incelenmiştir. Bu yöntem son olarak Owadally, Haberman ve Hernández [3] tarafından kısa dönemli birikim planı için kullanılmıştır. Bu tezde ise bu yöntem, uzun dönemli bireysel emeklilik planları için uygulanmıştır.

Hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki sapmanın en önemli nedeni yatırım getirisi, bir başka deyişle yatırım stratejisidir. Bireysel emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu nedenle yapılan bu tezde optimal yatırım stratejisi de belirlenmiş ve belirlenen bu optimal yatırım stratejisi ile hedeflenen fon büyüklüğüne ne ölçüde ulaşılabileceği gösterilmiştir.

Optimal yatırım stratejisi gelecekte meydana gelecek fon büyüklüğündeki açıkların minimize edilmesi ile belirlenmiş ve optimizasyon yöntemi olarak da Dinamik Programlama (DP) kullanılmıştır. DP kullanılmasının en önemli nedeni yatırım getirisinin zaman içinde değişken bir yapıda olması, bir başka ifade ile yatırım getirisinin zamanla değişmesinden kaynaklanan dinamik yapısıdır. Dinamik programlama; çok aşamalı karar süreçlerinin optimizasyonu için geliştirilmiş bir tekniktir. Bu teknikte bir problemle ilgili kararlar, bütün olmaktan ziyade aşamalarda optimize edilir. Karar problemi, hesaplama açısından daha etkin yapılabilmesi için daha küçük alt problemlere ayrılır [7]. Böylece çok aşamalı bir karar süreci, tek aşamalı alt problemlere ayrılmış olup, bu sayede optimizasyon problemin çözümü daha kolay bir hale gelmektedir.

DP tekniği aktüerya literatüründe uzun süredir kullanılmaktadır. Haberman ve Sung [8] faydası belirli emeklilik planlarında katkı riskini ve solvency riskini eş zamanlı olarak minimize etmek için, Cairns [9] sürekli zaman diliminde, Owadally [10] ise kesikli zaman diliminde fonun iki tane yatırım aracında değerlendirildiğini varsayarak katkısı belirli emeklilik planlarında optimal katkı oranını ve optimal yatırım stratejisini belirlemek için DP yöntemini kullanmışlardır. Vigna ve Haberman [11] katkısı belirli emeklilik planlarında finansal riski analiz etmiş, fonun iki tane yatırım aracında değerlendirildiğini varsayarak, DP yöntemi ile optimal yatırım

stratejisini belirlemiştir. Vigna ve Haberman [12] 2001'de yaptığı çalışmayı fonun n tane yatırım aracında değerlendirildiğini varsayarak geliştirmişlerdir. Thomson [13] DP yöntemi ile çok dönem için bireyin beklenen faydasını maksimize ederek optimal yatırım stratejisini belirlemiştir. Karlstrom, Palme ve Svensson [14] İsveç'deki emeklilik kararını modellemek, Schäl [15] sigortacının beklenen faydasını maksimize etmek ve iflas olasılığını minimize etmek, Lin ve Li [16] optimal reasürans-yatırım problemini belirlemek, Liu, Yiu, Siu ve Ching [17] sigortacı açısından optimal reasürans anlaşmasını bulmak, He ve Liang [18] katkısı belirli emeklilik planlarının fonun hisse senedi ve bonolarda değerlendirildiği hisse senedi bağlantılı anuite programlarında optimal yatırım stratejisi belirlemek için DP yöntemini kullanmışlardır. Bu tezde ise Vigna ve Haberman [11] tarafından yapılan çalışmada olduğu gibi emeklilik fonlarının düşük ve yüksek riskli iki varlıkta değerlendirildiği varsayılarak, Stokastik DP yöntemi ile bireysel emeklilik planları için optimal yatırım stratejisi belirlenmiştir.

Bu tez şu şekilde oluşturulmuştur:

Tezin ikinci bölümünde geleneksel yöntem olan sabit katkılı bireysel emeklilik planları ve bu geleneksel yöntem alternatif olarak değişken katkılı bireysel emeklilik planları sunulmuştur.

Tezin üçüncü bölümünde sabit ve değişken katkılı bireysel emeklilik planlarının karşılaştırılması için bir uygulama yapılmıştır. Yapılan bu uygulamada fonun önceden belirlenen sabit bir oranla biri düşük biri yüksek riskli iki yatırım aracında değerlendirileceği durum ele alınmış, bu yatırım araçlarının matematiksel modellerinin parametre değerlerine ilişkin varsayım yapılmış, varsayılan bu parametreler temel alınarak yapılan benzetim çalışması ile hangi bireysel emeklilik planında hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı, hangi planın getiriye ilişkin yapılan tahmine karşı daha duyarlı olduğu ve hangi planın daha riskli olduğu belirlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde DP ve DP'de kullanılan temel kavramlar tanımlanmış, DP'nin türleri, formülasyonu, çözüm yöntemleri ve yolları verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde DP optimizasyon yöntemi kullanılarak, fonun biri düşük riskli diğeri yüksek riskli iki yatırım aracında değerlendirilmesi durumunda yıllara

göre fonun ne oranla hangi yatırım aracında değerlendirileceği formüle edilmiş, bu formülün analitik çıkarımı gösterilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde belirlenen bu optimal yatırım stratejisi kullanılarak ikinci bir uygulama yapılmış, bu uygulama sonucunda farklı vade değerleri sonunda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşılabilmesi için fonun ne kadarının hangi yatırım aracında değerlendirilmesi gerektiği, yani optimal yatırım stratejisi belirlenmiş, ve sonuçlar yorumlanmıştır. Bu uygulamada birinci uygulamada elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapılabilmesi için aynı varsayımlar yapılmış, aynı parametre değerleri ile aynı sayıda benzetim tekrarlanmıştır.

Tezin yedinci ve son bölümünde ise her iki uygulamanın da sonuçları ve gelecek çalışmalar için öneriler yer almaktadır.

2. SABİT VE DEĞİŞKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARI

Emeklilik planı, katılımcılarına emekli olduklarında düzenli olarak emeklilik ödemelerinin yapılmasını sağlamak amacıyla oluşturulan ve plan katılımcılarının hakları ve yükümlülükleri, yapılan katkıların ne şekilde değerlendirileceği, emeklilik ödemelerinin hangi esaslara göre yapılacağı gibi konuları ayrıntılı olarak düzenleyen sözleşmelerdir [19]. Emeklilik planının amacı, kişilerin emekli olduklarında en azından aktif çalışma hayatlarındaki refah düzeyini devam ettirmelerini sağlamak, makul bir yaşam standardı sağlayarak son yıllarında başkalarına muhtaç olmalarını engellemektir [20].

Emeklilik planları temelde katkısı belirli emeklilik planları, faydası belirli emeklilik planları ve karma emeklilik planları olmak üzere üçe ayrılır.

Faydası belirli emeklilik planları, emeklilikte elde edilecek tazminat miktarının önceden kesin olarak bilinmesi de bir formül kullanılarak hesaplandığı planlardır. Genellikle kamu sektöründe yaygın olan bu planlarda plan sponsorunun yapacağı katkı, yatırımın getirisine bağlıdır. Bu nedenle yatırım riski, plan sponsoru tarafından üstlenilir [21].

Katkısı belirli emeklilik planları, katılımcının ve plan sponsorunun her yıl yapacağı katkı miktarının önceden belirlendiği planlardır. Katılımcının emeklilikte alacağı tazminat, emeklilik boyunca yapacağı katkıların bir fonksiyonudur. Bu planlarda faydası belirli planlarının aksine, katılımcı yatırım riskine katlanmak zorundadır [21].

Karma emeklilik planları ise, hem katkısı belirli emeklilik planlarının hem de faydası belirli emeklilik planlarının özelliklerini taşıyan emeklilik planlarıdır [22].

Bireysel emeklilik planları, belirli bir mesleğe, işverene veya iş sözleşmesine bağlı olmayan, kişinin işinden ayrılrsa bile, emeklilik planı kapsamındaki haklarının devam ettiği katkısı belirli emeklilik planlarıdır. Bu planlarda teşviği artırmak için vergi avantajları, vergi muafiyeti vardır. Bireysel emeklilik planlarında katkılar sabit ya da değişken olabilir.

2.1. Sabit Katkılı Bireysel Emeklilik Planları

Sabit katkılı bireysel emeklilik planları emeklilik hesabına düzenli aralıklarla, sabit katkıların yapıldığı planlardır. Bu katkılar genellikle maaşın belirli bir oranı olmakla birlikte önceden belirlenen sabit bir miktar da olabilir. Birey emekliliğe hak kazandığı zaman birikimini toplu para veya anuite şeklinde alabilir. Oluşturulan fon çeşitli yatırım araçlarında değerlendirilir ve oluşacak fonun büyüklüğü yatırım performansına ve katkının miktarına bağlıdır [23].

Sabit katkılı bireysel emeklilik planları Türkiye de dahil olmak üzere birçok ülkede kullanılmakta olan geleneksel birikim planlarıdır.

Sabit katkılı bireysel emeklilik planlarında katılımcı bir vade sonunda ne kadarlık bir fon miktarına ulaşmak istediğine karar verir. Bu hedef fon miktarı göz önünde bulundurularak finansal danışmanlar tarafından gelecekteki getiriye ilişkin bir tahminde bulunulur. Bu tahmin genellikle finansal danışman tarafından, varlık getirilerinin istatistiksel veya stokastik modelinden elde edilerek ve piyasa koşulları dikkate alınarak belirlenir.

i_A , finansal danışman tarafından yapılan getiri tahminini, F_T , dönem sonunda hedeflenen fon büyüklüğünü göstermek üzere, katılımcı tarafından her dönem başında yapılacak sabit katkı miktarı (C);

$$C = \frac{F_T}{S_{\overline{T}|i_A}} = \frac{F_T}{\frac{(1+i_A)^T - 1}{i_A / (1+i_A)}} \quad (2.1)$$

eşitliğinden hesaplanır.

i_t , (t-1,t) zaman aralığında fonun getirisini gösteren raslantı değişkeni olmak üzere t anında fonun değeri özyineli olarak şu şekilde elde edilir:

$$f_t = (1+i_t)(f_{t-1} + C) \quad (2.2)$$

Yatırım getirisinin tahmin edilenden farklı olması nedeniyle fonun vade sonu değerini gösteren f_T , hedef fon büyüklüğü F_T 'den farklı olacaktır. Dolayısıyla vade sonunda bir açık meydana gelecektir. Bu açık miktarı; hedeflenen fon büyüklüğü ile T zamanında gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farka eşittir:

$$D_T = F_T - f_T \quad (2.3)$$

Katılımcı için risk, bu açığın yüksek olmasıdır. Bu açığın negatif olması ise fazlalık olarak adlandırılır. Fonda açık da fazlalık da istenmeyen durumlardır [3].

2.2. Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planları

Değişken katkıli bireysel emeklilik planları; katılımcı tarafından fona yapılacak katkı miktarının, gerçekleşen fon büyüklüğü ile hedeflenen fon büyüklüğü arasındaki fark göz önünde bulundurularak, sabit miktarda katkı yerine değişken miktarlarda belirlendiği birikim planlarıdır.

Değişken katkıli bireysel emeklilik planlarında katılımcı tarafından fona yapılacak katkı miktarı, gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğünden sapması dikkate alınarak belirlenmektedir. C_t ($t, t+1$) anında fona yapılacak katkıyı, D_t t anında fondaki açığı göstermek üzere, değişken katkı miktarı (C_t);

$$C_t = C + \lambda_1 D_t + \lambda_2 \sum_{j=0}^t D_{t-j} \quad (2.4)$$

biçiminde bulunur.

Bu eşitlikte $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 > 0$ 'dir. Ayrıca λ_1 ve λ_2 'nin uygulama değerleri düşüktür. Çünkü yatırımcı ilave katkı yapmaya isteksiz veya maddi olarak ilave katkı yapamayacak durumda olabilir.

D_t fonun i_A kadar getiri sağlaması ve sabit katkı yapılması durumunda, t anındaki fon büyüklüğüne ilişkin tahmin ile fonun t anındaki değeri olan F_t arasındaki farka eşittir:

$$\begin{aligned} D_t &= F_T - f_t \\ D_t &= C * \ddot{s}_{\bar{t}|i} - f_t \\ D_t &= C * \left[\frac{(1+i_A)^T - 1}{i_A / (1+i_A)} \right] - f_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

Gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fondan saptıkça açık veya fazlalık oluşur. t anındaki farkın λ_1 katı katkıya eklenir. λ_1 'in uygulama değeri düşük olduğu için bu farkın tamamı o anda katkıya eklenmiş olmaz. Bu nedenle sadece t anında değil, t anından önceki zamanlarda ortaya çıkan açıkların da göz önünde bulundurularak bu açıkların kümülatif toplamının λ_2 katı kadarının daha ilave edilmesi

gerekmektedir. Bu sayede açıkların, açık oluştuğu anda tek seferde katkıya eklenmesi yerine bu açıkların tüm döneme yayılması sağlanmış ve katılımcının yüksek miktarlarda katkı yapmasının önüne geçilmiş olur [3].

3. BİRİNCİ UYGULAMA: SABİT VE DEĞİŞKEN KATKILI BİREYSEL EMEKLİLİK PLANLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu uygulamada, 10.000 tekrarlı bir benzetim çalışması ile sabit ve değişken katkıli bireysel emeklilik planlarında dönem sonu açık miktarları karşılaştırılarak; hangi planın daha riskli olduğuna, hangi planın getiriye ilişkin yapılan tahmine karşı daha duyarlı olduğuna karar verilecek, hangi planda hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı belirlenecektir. Aynı zamanda vade değişimi, hedeflenen fon büyüklüğündeki değişim ile lamda katsayılarındaki değişimin sonuçlara etkisi de incelenecektir.

Katkı ve fon büyüklüğü belirlenirken:

- Katılımcının 25 yaşında sisteme girdiği ve 65 yaşında sistemden ayrılacağı,
- Sistemden emeklilik dışında ayrılmanın olmadığı,
- Katkıların yıllık olarak her yılın başında yapıldığı,
- Yapılan katkılarla oluşan fonun, %50'sinin düşük riskli, %50'sinin ise yüksek riskli yatırım aracında değerlendirildiği ve yatırım araçlarının getirilerinin zamandan ve birbirlerinden bağımsız oldukları,
- Merkezi limit teoremine göre; yeterince büyük sayıda ve sonlu beklenen değer ve varyansa sahip bağımsız raslantı değişkenlerinin ortalaması, örneklemin dağılımı ne olursa olsun Normal dağılıma yakınsayacağından [24], düşük riskli yatırım aracının yıllık logaritmik getirilerinin μ ortalama ve σ_1 standart sapma, yüksek riskli yatırım aracının yıllık logaritmik getirilerinin ise λ ortalama ve σ_2 standart sapma ile Normal dağılımlı olduğu,

varsayılmıştır.

Hedef fonun 100.000 TL olması durumunda Eş. 2.3.'den sabit katkıli planlar için açık miktarı ve Eş. 2.5.'den $\lambda_1=0,2$ ve $\lambda_2=0,01$ alınarak değişken katkıli planlar için açık miktarı hesaplanmıştır.

$\delta_t = \ln(1+i_t)$, μ ortalama ve σ standart sapma ile Normal dağılıma sahip olduğuna göre; $(1+i_t)$ μ ortalama ve σ standart sapma ile Log-normal dağılıma sahip olduğundan,

$$E[1+i_t]=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow E[i_t]=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} - 1$$

biçimindedir.

Fonun %50'sinin düşük riskli, %50'sinin yüksek riskli yatırım aracında değerlendirildiği durumda yıllık logaritmik getiri:

$$Y = \ln(1+i_A) = 0,5 * [\text{Düşük Riskli Yatırım Aracının Getirisi}] + 0,5 * [\text{Yüksek Riskli Yatırım Aracının Getirisi}]$$

olacağından, yıllık logaritmik getirinin beklenen değeri:

$$\begin{aligned} E[Y] &= 0,5 E[\text{Düşük Riskli Yatırım Aracının Getirisi}] + 0,5 E[\text{Yüksek Riskli Yatırım Aracının Getirisi}] \\ &= 0,5 [\mu + \lambda] \end{aligned}$$

ve varyansı:

$$\begin{aligned} V[Y] &= 0,5^2 V[\text{Düşük Riskli Yatırım Aracının Getirisi}] + 0,5^2 V[\text{Yüksek Riskli Yatırım Aracının Getirisi}] \\ &= 0,5^2 [\sigma_1^2 + \sigma_2^2] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu nedenle, $E[i_A] = e^{0,5 * [\mu + \lambda + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}]} - 1$ 'dir.

$\mu = 0,01$, $\sigma_1 = 0,05$ ve $\lambda = 0,03$, $\sigma_2 = 0,15$ değerleri için

$$E[i_A] = e^{0,5 * [0,01 - 0,03 + \frac{(0,05)^2 + (0,15)^2}{4}]} - 1 \approx 0,023 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Finansal danışman vadenin başında fonun yıllık ortalama getirisi i_A 'ya ilişkin bir tahmin yapmalıdır. Yapılan bu tahminin tam olarak gerçekleşmesi az rastlanan bir durumdur; finansal danışman gerçekleşecek olan yatırım getirisinin üstünde veya altında bir tahminde bulunabilir. Gerçekleşecek olan yatırım getirisi ile tahmin edilen yatırım getirisi arasındaki fark "yatırım getirisindeki tahmin hatası" olarak adlandırılmaktadır.

3.1. Yatırım Getirisindeki Tahmin Hatasının Etkisinin İncelenmesi

Bu bölümde sabit ve değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve katkı miktarları, yatırım getirisindeki tahmin hatasının çeşitli değerleri için incelenmiştir.

1. Durum: Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0 olduğu yani i_A değerinin doğru tahmin edildiği durum ($i_A(\text{tahmin}) \approx 0,023$)

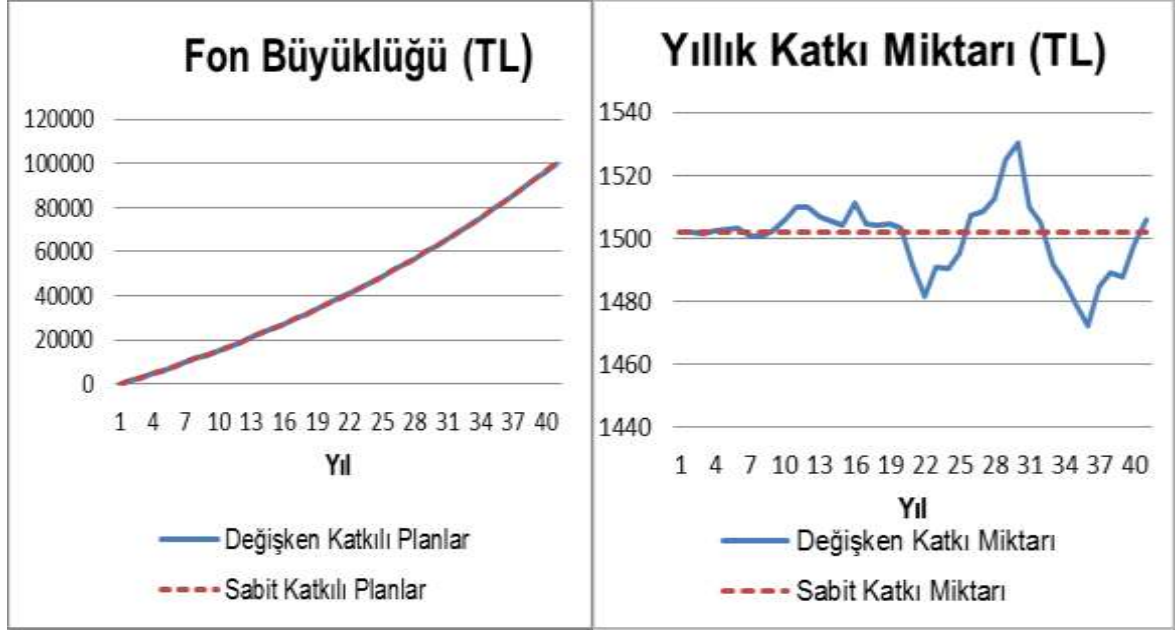
Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0 olduğu durumda, sabit ve değişken katkılı planlarda yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve yıllık katkı miktarının ortalama değerleri Çizelge 3.1.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 3.1.'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Birinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Yıl	Fon Büyüklüğü (TL)		Yıllık Katkı Miktarı (TL)	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planları
0	0	0	1.502	1.502
10	17.053	17.057	1.502	1.510
20	38.643	38.687	1.502	1.491
30	56.708	65.750	1.502	1.509
40	100.106	99.981	1.502	1.505

Çizelge 3.1. ve Şekil 3.1.'den sabit katkılı bireysel emeklilik planlarında dönem sonu fon büyüklüğünün yaklaşık 100.106 TL, değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında ise yaklaşık 99.981 TL olduğu görülmektedir. Hedeflenen fon büyüklüğü 100.000 TL olduğundan dönem sonu açık miktarı sabit katkılı planlarda yaklaşık -106 TL iken, değişken katkılı planlarda yaklaşık 19 TL olduğu görülmektedir. Dolayısıyla değişken katkılı planlarda hedefe daha daha çok yaklaşıldığı söylenebilir.

Yatırım getirisinin doğru tahmin edilmesi durumunda, değişken katkılı planlarda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için her yıl yapılacak katkı miktarlarının, sabit katkılı planlarda yıllar itibariyle fona yapılması gereken katkı miktarı olan 1.502 TL'den çok büyük bir farklılık göstermediği görülmektedir.



Şekil 3.1. Birinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

2. Durum: Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,01 olduğu yani i_A değerinin 0,01 daha fazla tahmin edildiği durum ($i_A(\text{tahmin}) \approx 0,033$)

Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,01 olduğu durumda, sabit ve değişken katkı planlarda yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve yıllık katkı miktarının ortalama değerleri Çizelge 3.2.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 3.2.'de verilmiştir.

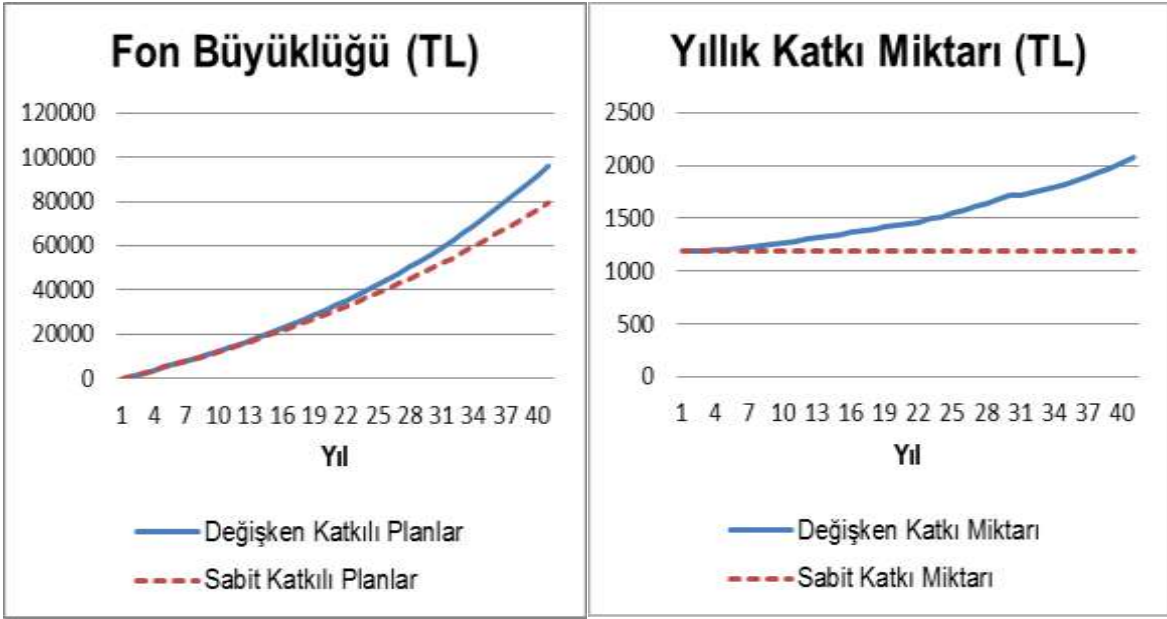
Çizelge 3.2. İkinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Yıl	Fon Büyüklüğü (TL)		Yıllık Katkı Miktarı (TL)	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	0	0	1.187	1.187
10	13.484	13.822	1.187	1.286
20	30.555	32.884	1.187	1.451
30	51.955	59.156	1.187	1.724
40	79.153	95.757	1.187	2.078

Çizelge 3.2. ve Şekil 3.2.'den sabit katkıli bireysel emeklilik planlarında dönem sonu fon büyüklüğünün yaklaşık 79.153 TL, açık miktarının yaklaşık 20.857 TL, değişken katkıli bireysel emeklilik planlarında ise dönem sonu fon büyüklüğünün yaklaşık 95.757 TL, açık miktarının yaklaşık 4.243 TL olduğu görülmektedir. Her iki planda da birinci duruma göre hedeften uzaklaşılmasına rağmen, değişken katkıli

planlarda açık miktarının sabit katkılı planlara göre daha düşük olduğu yani hedefe daha çok yaklaşıldığı söylenebilir.

Sabit katkılı planlarda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için her yıl yapılacak katkı miktarlarının 1.187 TL olarak, birinci duruma göre düşük belirlendiği ve değişken katkılı planlarda bu hatayı düzeltmek için yıllar itibariyle fona yapılması gereken katkı miktarının 1.187 TL'den genel bir artış eğilimi gösterdiği görülmektedir.



Şekil 3.2. İkinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

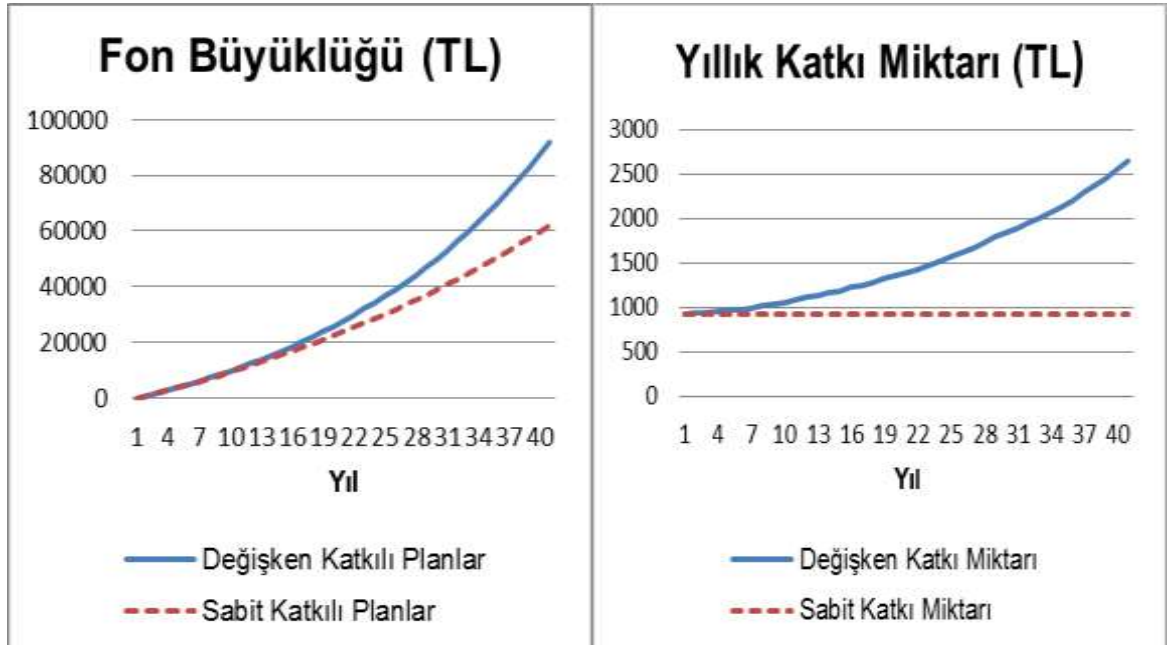
3. Durum: Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu yani i_A değerinin 0,02 daha fazla tahmin edildiği durum ($i_A(\text{tahmin}) \approx 0,043$)

Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu durumda, sabit ve değişken katkılı planlarda yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve yıllık katkı miktarının ortalama değerleri Çizelge 3.3.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 3.3.'de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Üçüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Yıl	Fon Büyüklüğü (TL)		Yıllık Katkı Miktarı (TL)	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	0	0	930	930
10	10.564	11.103	930	1.085
20	23.939	27.766	930	1.389
30	40.706	53.044	930	1.897
40	62.016	91.800	930	2.652

Çizelge 3.3. ve Şekil 3.3.'den, ikinci durumda olduğu gibi değişken katkıli planlarda açık miktarının sabit katkıli planlara göre daha düşük olduğu, fakat ikinci duruma göre yatırım getirisindeki tahmin hatasının daha yüksek olması nedeniyle sabit katkıli planlarda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için her yıl yapılacak katkı miktarının daha da düşük belirlendiği, değişken katkıli planlarda bu hatayı düzeltmek için yıllar itibariyle fona yapılması gereken katkı miktarının daha yüksek bir artış eğilimi gösterdiği ve bu katkılarla oluşan fon büyüklüklerinin her iki planda da hedef fon büyüklüğünden daha çok uzaklaştığı görülmektedir.



Şekil 3.3. Üçüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

4. Durum: Yatırım getirisindeki tahmin hatasının -0,01 olduğu yani i_A değerinin 0,01 daha az tahmin edildiği durum ($i_A(\text{tahmin}) \approx 0,013$)

Yatırım getirisindeki tahmin hatasının -0,01 olduğu durumda, sabit ve değişken katkılı planlarda yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve yıllık katkı miktarının ortalama değerleri Çizelge 3.4.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 3.4.'de verilmiştir.

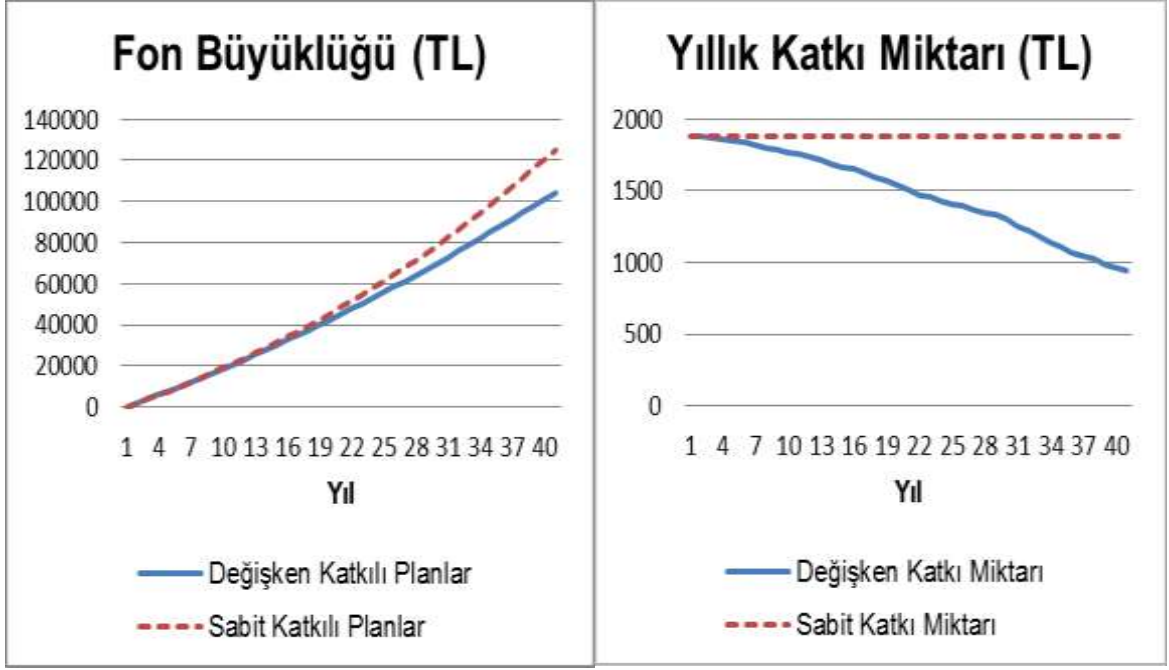
Çizelge 3.4. Dördüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Yıl	Fon Büyüklüğü (TL)		Yıllık Katkı Miktarı (TL)	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	0	0	1.880	1.880
10	21.355	20.852	1.880	1.754
20	48.389	45.177	1.880	1.504
30	82.281	72.790	1.880	1.255
40	125.354	104.474	1.880	941

Çizelge 3.4. ve Şekil 3.4.'den sabit katkılı bireysel emeklilik planlarında dönem sonu fon büyüklüğünün yaklaşık 125.354 TL, açık miktarının yaklaşık -25.354 TL, değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında ise dönem sonu fon büyüklüğünün yaklaşık 104.474 TL, açık miktarının yaklaşık -4.474 TL olduğu görülmektedir. Her iki planda da birinci duruma göre hedeften uzaklaşılmasına rağmen değişken katkılı planlarda açık miktarının sabit katkılı planlara daha düşük olduğu, hedefe daha çok yaklaşıldığı söylenebilir.

İlk bakışta oluşan fon büyüklüğünün sabit katkılı planlarda daha yüksek olması katılımcı açısından olumlu bir sonuç gibi gözükmeyle birlikte, hedef fondan daha yüksek bir fon büyüklüğüne ulaşmak da istenilen bir durum değildir. Çünkü fon büyüklüğünün yüksek olmasının nedeni birikim döneminde daha yüksek katkı yapılmasıdır ki bu durum katılımcının birikim döneminde ödeme gücü çökmesine neden olabilmektedir.

Sabit katkılı planlarda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için her yıl yapılacak katkı miktarlarının 1.880 TL olarak, birinci duruma göre yüksek belirlendiği ve değişken katkılı planlarda bu hatayı düzeltmek için yıllar itibariyle fona yapılması gereken katkı miktarının 1880 TL'den genel bir azalış eğilimi gösterdiği görülmektedir.



Şekil 3.4. Dördüncü Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

5. Durum: Yatırım getirisindeki tahmin hatasının $-0,02$ olduğu yani i_A değerinin $0,02$ daha az tahmin edildiği durum ($i_A(\text{tahmin}) \approx 0,003$)

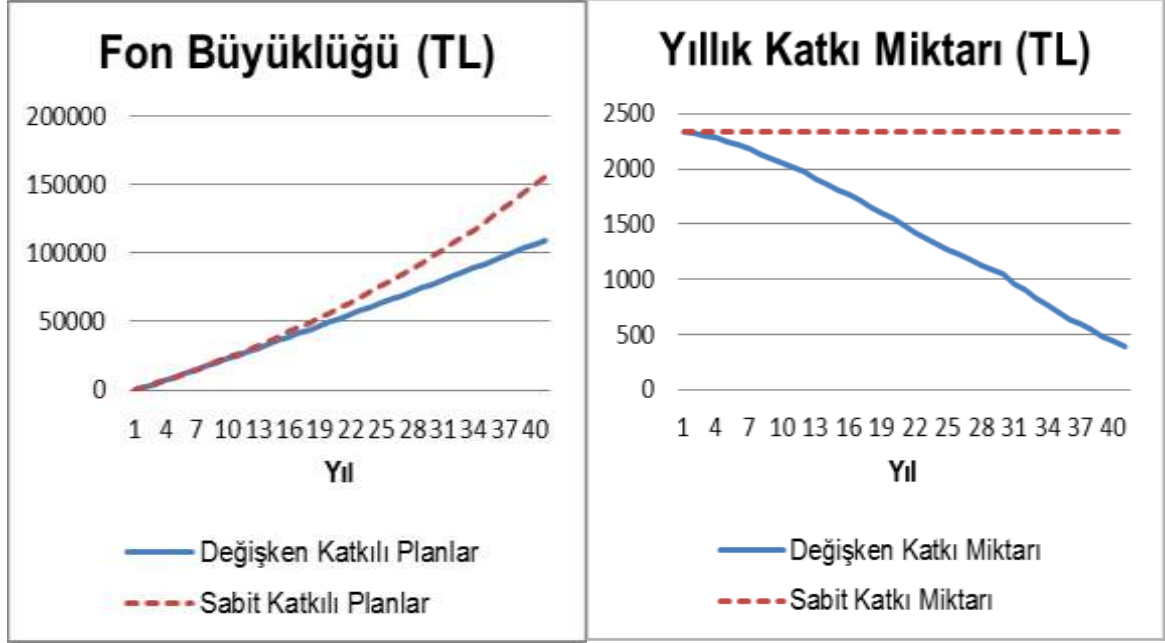
Yatırım getirisindeki tahmin hatasının $-0,02$ olduğu durumda, sabit ve değişken katkı planlarda yıllar itibariyle fon büyüklüğü ve yıllık katkı miktarının ortalama değerleri Çizelge 3.5.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 3.5.'de verilmiştir.

Çizelge 3.5. Beşinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Yıl	Fon Büyüklüğü (TL)		Yıllık Katkı Miktarı (TL)	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	0	0	2.330	2.330
10	26.458	25.234	2.330	2.017
20	59.954	52.332	2.330	1.484
30	101.945	80.223	2.330	963
40	155.313	109.234	2.330	391

Çizelge 3.5. ve Şekil 3.5.'den, dördüncü durumda olduğu gibi değişken katkı planlarda açık miktarının sabit katkı planlara göre daha düşük olduğu, fakat dördüncü duruma göre yatırım getirisindeki tahmin hatasının daha yüksek olması nedeniyle sabit katkı planlarda hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için her yıl

yapılacak katkı miktarının daha da yüksek belirlendiği. değişken katkıli planlarda bu hatayı düzeltmek için yıllar itibariyle fona yapılması gereken katkı miktarının daha yüksek bir azalış eğilimi gösterdiği ve bu katkılarla oluşan fon büyüklüklerinin her iki planda da hedef fon büyüklüğünden daha çok uzaklaştığı görülmektedir.



Şekil 3.5. Beşinci Durum İçin Fon Büyüklükleri ve Katkı Miktarları

Çizelge 3.6.'da bu beş durum için gözlenen dönem sonu açıkların ortalaması, standart sapması, %95'e bölen değeri ile karesel ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.6. Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler

Yatırım Getirisindeki Tahmin Hatası	Ortalama Açık		Açıkların Standart Sapması		Açıkların %95'e Bölen Değeri		Açıkların Karelerinin Ortalaması	
	Sabit Katkıli Planlar	Değişken Katkıli Planlar	Sabit Katkıli Planlar	Değişken Katkıli Planlar	Sabit Katkıli Planlar	Değişken Katkıli Planlar	Sabit Katkıli Planlar	Değişken Katkıli Planlar
-%2	-55.313	-9.234	54.277	14.264	13.240	12.117	6.005.639.826	288.741.074
-%1	-25.354	-4.474	43.807	13.523	29.975	15.737	2.561.996.298	202.915.624
0	-106	18	37.984	12.821	44.079	19.212	1.223.924.447	164.385.082
%1	20.846	4.242	27.661	12.158	55.784	22.450	1.199.751.823	165.833.547
%2	37.984	8.200	21.672	11.537	65.357	25.514	1.912.473.637	200.335.064

Çizelge 3.6.'dan, değişken katkılı planlarda dönem sonu açığın standart sapması, %95'e bölünmüş değeri ve karesel ortalaması (açıkların karelerinin ortalaması fondaki istenmeyen durumlar olan açığı da fazlalığı da pozitif yaptığı için ortalama açığa göre daha tutarlı bir istatistiktir) tüm tahmin hataları için sabit katkılı planlara göre daha düşük olduğu görüldüğünden, sabit katkılı planların daha riskli olduğu söylenebilir.

Değişken katkılı planlarda gözlenen açıklar azaltılacak şekilde katkılarda ayarlama yapılması nedeniyle, dönem sonu hedeflenen fona ulaşamama riski sabit katkılı planlardan daha düşük olmaktadır. Fona yapılacak katkı belirlenirken her yıl gözlenen açığın dikkate alınması ile yatırım riskinin bir kısmı telafi edilmiş olur.

Yatırım getirisindeki tahmin hatası arttıkça hem sabit hem de değişken katkılı planlarda dönem sonu açık miktarının da arttığı, bu artış miktarları incelendiğinde sabit katkılı planlardaki artışın, değişken katkılı planlardaki artışa göre çok daha büyük olduğu, sabit katkılı planların getiriye ilişkin yapılan tahmine karşı daha duyarlı olduğu yani tahmin hatasından daha çok etkilendiği söylenebilir.

Çizelge 3.7.'de, yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0 olması durumunda yıllar itibariyle sabit ve değişken katkılı bireysel emeklilik planlarındaki fon büyüklüğünün ve katkı miktarının varyansları yer almaktadır.

Çizelge 3.7. Fon Büyüklüğünün ve Katkı Miktarının Varyansı

Yıl	Fon Büyüklüğünün Varyansı		Katkı Miktarının Varyansı	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	0	0	0	0
10	7.690.493	3.771.925	0	166.341
20	81.296.961	23.012.344	0	1.014.844
30	369.384.691	70.168.796	0	3.094.443
40	1.223.913.016	164.384.736	0	7.249.366

Çizelge 3.7.'den, değişken katkılı planlarda fondaki belirsizliğin bir kısmının katkıya aktarıldığı ve bu sayede sabit katkılı planlara göre fondaki belirsizliğin daha az olduğu; değişken katkılı planlarda fon büyüklüğündeki belirsizliğin, sabit katkılı planlara göre daha düşük olduğu, ayrıca vade sonuna yaklaştıkça her iki planda da belirsizliğin arttığı söylenebilir.

3.2. Vade Değişiminin Etkisinin İncelenmesi

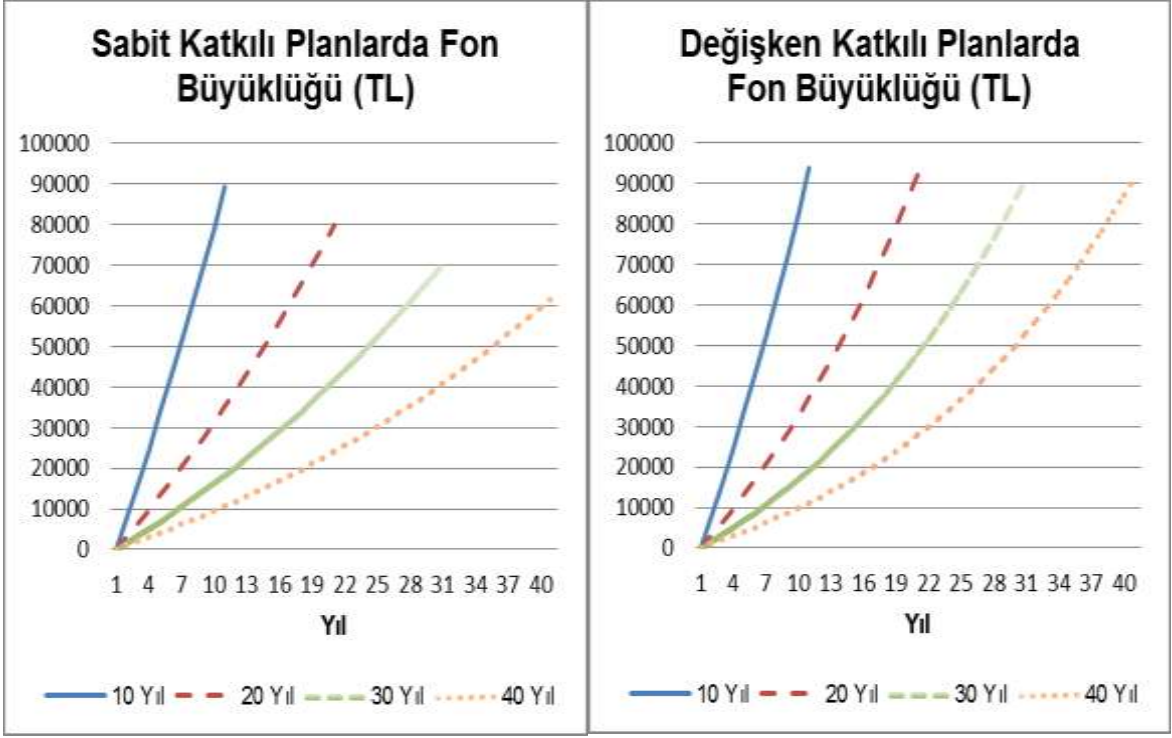
Vade değişiminin etkisini incelemek amacıyla vadenin 10, 20, 30 ve 40 yıl olduğu durumlar ele alınmıştır. Çizelge 3.8.'de yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu üçüncü durumda bu dört vade için gözlenen dönem sonu açıkların ortalaması, standart sapması, %95'e bölünmüş değeri ile karesel ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.8. Farklı Vadelerde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler

Vade (Yıl)	Ortalama Açık		Açıkların Standart Sapması		Açıkların %95'e Bölünmüş Değeri		Açıkların Karelerinin Ortalaması	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
10	10.785	6.234	14.507	10.599	32.004	22.512	326.792.257	151.227.938
20	20.073	7.296	18.648	11.336	45.644	24.130	750.712.005	181.759.910
30	29.386	7.984	20.654	11.519	56.489	25.417	1.290.138.207	196.451.617
40	37.984	8.200	21.672	11.537	65.357	25.514	1.912.473.637	200.335.064

Çizelge 3.8.'den değişken katkı planlarında açıkların daha düşük ve bu planların daha az riskli olduğuna ilişkin tespitin vade değişiminden etkilenmediği ve vade arttıkça her iki planda da ortalama açık miktarının arttığı söylenebilir. Bu artış incelendiğinde değişken katkı planlardaki artışın çok daha az olduğu, dolayısıyla değişken katkı planlarının vade değişiminden daha az etkilendiği söylenebilir.

Şekil 3.6.'da farklı vadeler için her iki planda oluşan fon büyüklükleri verilmiştir.



Şekil 3.6. Sabit ve Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı Vade Değerleri İçin Fon Büyüklükleri

Şekil 3.6.'dan sabit katkıli planlarda vade süresi uzadıkça vade sonu açığı arttığı, dolayısıyla hedef fondan daha da uzaklaşıldığı; değişken katkıli planlarda vade ne olursa olsun hedeflenen fon büyüklüğüne hemen hemen yaklaşıldığı görülmektedir.

3.3. Hedef Fon Büyüklüğündeki Değişimin Etkisinin İncelenmesi

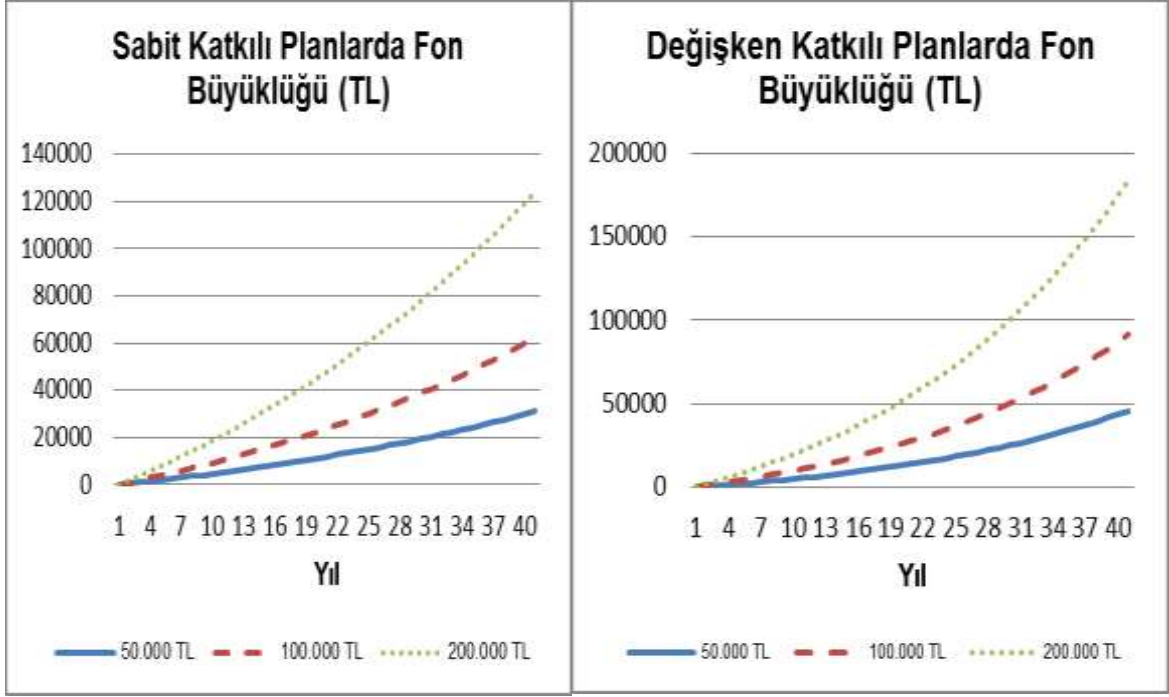
Hedef fon büyüklüğündeki değişiminin etkisini incelemek amacıyla hedef fon büyüklüğünün 50.000 TL, 100.000 TL ve 200.000 TL olduğu durumlar ele alınmıştır. Çizelge 3.9.'da yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu üçüncü durumda bu üç hedef fon büyüklüğü için gözlenen dönem sonu açıkların ortalaması, standart sapması, %95'e bölen değeri ile karesel ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.9. Farklı Hedef Fon Büyüklüklerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler

Hedef Fon Büyüklüğü (TL)	Ortalama Açık		Açıkların Standart Sapması		Açıkların %95'lik Değeri		Açıkların Karelerinin Ortalaması	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
50.000	18.991	4.099	10.836	5.768	32.678	12.757	478.118.409	50.083.766
100.000	37.984	8.200	21.672	11.537	65.357	25.514	1.912.473.637	200.335.064
200.000	75.967	16.398	43.345	23.074	130.714	51.029	7.649.894.548	801.340.257

Çizelge 3.9. ve Şekil 3.7.'den değişken katkıli planlarda açığın daha düşük ve bu planların daha az riskli olduğuna ilişkin tespitin hedef fon büyüklüğü değişiminden etkilenmediği ve hedef fon büyüklüğü arttıkça her iki planda da ortalama açık miktarının hedef fon büyüklüğü ile aynı oranda arttığı söylenebilir. Bu artış incelendiğinde değişken katkıli planlardaki artışın çok daha az olduğu, dolayısıyla değişken katkıli planların hedef fon büyüklüğü değişiminden daha az etkilendiği söylenebilir.

Şekil 3.7.'de farklı hedef fon büyüklükleri için her iki planda oluşan fon büyüklükleri verilmiştir.



Şekil 3.7. Sabit ve Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı Hedef Fon Büyüklükleri İçin Gerçekleşen Fon Büyüklükleri

3.4. Lamda Katsayılarındaki Değişimin Etkisinin İncelenmesi

Emeklilik planlarında gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden saptıkça açık veya fazlalık oluşur. Değişken katkılı bireysel emeklilik planlarının hesaplanmasında son açığın λ_1 katı kadarı ve geçmiş açıkların birikimli toplamının λ_2 katı kadarı sabit katkıya eklenmektedir. Uygulamada $\lambda_1=0,2$, $\lambda_2=0,01$ olarak varsayılmıştır. Bu bölümde lamda katsayılarının değişimin etkisini incelemek amacıyla farklı lamda katsayılarının kullanıldığı durumlar ele alınmıştır. Çizelge 3.10. ve Çizelge 3.11.'de yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu üçüncü durumda değişken katkılı planlarda katılımcı tarafından farklı yıllarda ödenen katkıların standart sapma değerleri gösterilmektedir.

Çizelge 3.10. Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı λ_1 Değerleri İçin Katkıların Standart Sapmaları ($\lambda_2 = 0,01$)

Yıl	λ_1 Değerleri					
	0	0.1	0.2	0.5	1	2
0	0	0	0	0	0	0
10	17	156	264	522	945	3.807
20	54	443	713	1.343	2.397	13.531
30	112	876	1.395	2.591	4.600	33.021
40	202	1.534	2.423	4.463	7.926	66.752

Çizelge 3.11. Değişken Katkılı Bireysel Emeklilik Planlarında Farklı λ_2 Değerleri İçin Katkıların Standart Sapmaları ($\lambda_1 = 0,2$)

Yıl	λ_2 Değerleri							
	0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	254	264	302	347	432	675	1,142	7,194
20	689	713	807	918	1.125	1.718	2.905	66.989
30	1.348	1.395	1.574	1.784	2.178	3.303	5.591	543.378
40	2.343	2.423	2.728	3.087	3.758	5.683	9.658	4.382.503

Çizelge 3.10. ve 3.11.'den görüldüğü gibi λ_1 ve λ_2 değerleri arttıkça katkılar daha fazla değişkenlik göstermektedir. Bu gözlem tutarlı bir sonuçtur. Çünkü Eş. 2.4.'e göre λ_1 ve λ_2 'nin değerleri arttıkça, açıkların katkı üzerindeki etkisi artmakta bu da katkı miktarlarının daha çok oynaklık göstermesine neden olmaktadır.

λ_1 ve λ_2 'nin büyük değerleri için, değişken katkıli planlar, çok büyük ve istenmeyen katkı ödemeleri ile geçmiş açıkları fazlasıyla telafi etmekte, fakat bu katılımcı açısından istenmeyen bir durum olan çok büyük miktarlarda ve değişkenlikte katkı ödenmesine neden olmaktadır. Bu nedenle λ_1 ve λ_2 'nin büyük değerlerinden kaçınılmalıdır.

Çizelge 3.12. ve Çizelge 3.13.'de yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0,02 olduğu üçüncü durumda farklı λ_1 ve λ_2 değerleri için gözlenen dönem sonu açıkların ortalaması, standart sapması, %95'e bölen değeri ile karesel ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.12. Farklı λ_1 Değerlerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler ($\lambda_2 = 0,01$)

λ_1	Ortalama Açık		Açıkların Standart Sapması		Açıkların %95'lik Değeri		Açıkların Karelerinin Ortalaması	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	37.984	33.528	21.673	20.218	65.357	59.908	1.912.473.637	1.532.899.303
0.1	37.984	13.670	21.673	13.947	65.357	33.892	1.912.473.637	381.380.630
0.2	37.984	8.200	21.673	11.537	65.357	25.515	1.912.473.637	200.335.064
0.5	37.984	3.703	21.673	8.752	65.357	17.117	1.912.473.637	90.305.865
1	37.984	1.930	21.673	7.847	65.357	14.212	1.912.473.637	65.307.309
2	37.984	584	21.673	33.210	65.357	54.258	1.912.473.637	1.103.254.434

Çizelge 3.13. Farklı λ_2 Değerlerinde Dönem Sonu Açıklar İçin Bazı Temel İstatistikler ($\lambda_1 = 0,2$)

λ_2	Ortalama Açık		Açıkların Standart Sapması		Açıkların %95'lik Değeri		Açıkların Karelerinin Ortalaması	
	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar	Sabit Katkılı Planlar	Değişken Katkılı Planlar
0	37.984	8.545	21.673	11.716	65.357	26.090	1.912.473.637	210.273.125
0.01	37.984	8.200	21.673	11.537	65.357	25.515	1.912.473.637	200.335.064
0.05	37.984	7.057	21.673	10.912	65.357	23.512	1.912.473.637	168.880.645
0.1	37.984	6.010	21.673	10.290	65.357	21.529	1.912.473.637	141.997.539
0.2	37.984	4.635	21.673	9.396	65.357	18.996	1.912.473.637	109.766.946
0.5	37.984	2.747	21.673	8.118	65.357	15.392	1.912.473.637	73.454.560
1	37.984	1.630	21.673	8.048	65.357	14.133	1.912.473.637	67.428.918
2	37.984	-49.493	21.673	1.992.047	65.357	3.081.445	1.912.473.637	3.970.700.256

Sabit katkılı planlar λ_1 ve λ_2 'den bağımsız olmasına rağmen, değişken katkılı planlar ile karşılaştırma yapabilmek için Çizelge 3.12 ve 3.13' de verilmiştir.

Çizelge 3.12. ve Çizelge 3.13.'den lamda arttıkça açıkların standart sapmasının belirli bir yere kadar azaldığı, sonrasında ise artmaya başladığı görülmektedir, dolayısıyla lamdanın büyük değerlerinin değişken katkılı planlarda riski arttırdığı söylenebilir.

4. DİNAMİK PROGRAMLAMA

Genel olarak optimizasyonda amaç, mevcut kısıtlayıcı koşullar altında eldeki sorunla ilgili en iyi karara varmaktır. Dinamik Programlama (DP), yöneylem araştırmalarında kullanılan optimizasyon yöntemlerinden biridir. [25].

1920'den bu yana önemini artırarak gelişmekte olan [26] DP, Richard Ernest Bellman tarafından 1950 yılında isimlendirilmiştir. Başlangıçta yalnızca bir ekonomik sistemin zaman içindeki durumunun incelenmesinde kullanılan bu yöntem, günümüzde zamanla ilgili olan süreçlerin yanı sıra, farklı nitelikteki süreçlerin incelenmesinde de yaygın olarak kullanılmaktadır [25].

DP, çok aşamalı karar süreçlerinin optimizasyonu için geliştirilmiş bir tekniktir. Bu teknikte bir problemle ilgili kararlar, bütün olmaktan ziyade aşamalarda optimize edilir ve karar problemi tek aşamalı alt problemlere ayrılarak çözülür [7].

Bir problemin DP ile çözülebilmesi için söz konusu problemin, biri diğeri ile bağlantılı alt problemlere ayrıştırılabilme özelliğine sahip olması gerekmektedir. DP, matematiksel programlama problemlerini daha basit, birbirinden bağımsız alt problemlere ayırdıktan sonra aşama aşama bu alt problemlere çözüm getiren ve sonuçta orijinal problem için bir sonuç ortaya koyan bir yaklaşım olup, birbiri ile ilişkili kararlar serisinin çözümünde kullanılan sayısal bir yöntemdir [27].

4.1. Dinamik Programlamada Kullanılan Temel Kavramlar

4.1.1. Süreç

Aralarında birlik olan veya belirli bir düzen veya zaman içinde tekrarlayan, gelişen olay ve hareketler dizisine süreç denilmektedir [28]. İstatistiksel anlamda kullanılan süreç temelde deterministik ve stokastik süreç olarak ikiye ayrılmaktadır. Deterministik süreç: sürece etki eden tüm dışsal etmenlerin kesin olarak bilindiği, stokastik süreç ise: zamanla olasılık kurallarına göre değişen süreçlerdir [29].

Süreçler kesikli ve sürekli olarak da ayrılabilir. Durum uzayı kesikli ise böyle süreçlere "kesikli durum süreci", durum uzayı sürekli ise "sürekli durum süreci" adı verilir [30].

Olasılık dağılımı zaman içinde sabit olan süreçler ise "durağan süreç" olarak adlandırılır.

4.1.2. Aşama

Büyük bir problem çözümlenmek üzere daha küçük alt problemlere ayrıştırılır ve her alt problem çözümlenmesi gereken bir karar problemi olarak düşünülürse, karar verilmesi gereken her nokta aşama olarak tanımlanır. Bu bağlamda her alt problem bir aşamaya karşılık gelmektedir [31].

Aşama genellikle anlamlı bir zaman göstergesi olmakla birlikte farklı göstergeler de olabilir.

4.1.3. Durum

Durum her bir aşamada sistemin veya değişkenlerin alabileceği değerlerdir. Herhangi bir aşamada sürecin koşulu olarak da tanımlanan durum kavramı ile incelenen konunun içerdiği tüm bilgiler ve sınırlamalar anlatılır. Sistemin verilen bir durumuna bağlı olarak ortaya çıkan ilgili aşamadaki eylem seçeneklerine “durum değişkenleri” adı verilir [25].

4.1.4. Geçiş (Dönüşüm) Fonksiyonları

Geçiş fonksiyonları aşamalar arasındaki geçişi sağlayan matematiksel ifadelerdir. Bir anlamda problemin kısıtlarını belirtirler [32].

4.1.5. Karar

Karar herhangi bir süreçte aşamaları tamamlamayla ilgili seçenekler arasından bir seçim yapılması işlemidir.

Belirli bir durum ve aşamada verilen bir karar, sürecin hem durumunu hem de aşamasını değiştirir. Dolayısıyla her karar, mevcut durumdan bir sonraki aşamaya bağlı olan duruma geçişi etkiler. Çok aşamalı bir karar süreci aşamalara ayrıldıktan sonra her aşama için bir geçiş fonksiyonu oluşturulur. Her aşamaya ilişkin karar verme süreci, o aşamanın seçeneklerinden birinin seçimi ile sonuçlanır. Buna aşama kararı denir. Ayrıca herhangi bir aşamadaki karar optimal ise bu karar problemin optimal çözümünün bir parçası olarak kullanılabilir [25].

4.1.6. Optimal Politika

Çok aşamalı bir karar sürecinin her karara bağlı, sürecin aşama ve durumu ile birlikte değişen, maliyet veya kar cinsinden bir getirisi vardır. Optimal politika, sürecin herbir aşamasında verilen kararlardan oluşur. Çözüm bir aşamadan

diğerine sıra önceliğine göre gidilerek elde edilir ve son aşamaya erişildikten sonra her karar değişkeni için değerler belirlenerek işlem tamamlanır. Böylece en uygun politika belirlenir [25].

4.2. Optimalite İlkesi

Bu ilke DP yönteminin temelini oluşturmaktadır. İlk kez Richard Ernest Bellman tarafından ortaya atılan bu ilke, daha sonraları Bellman Eşitliği olarak isimlendirilmiştir.

Bellman'ın Optimalite İlkesi: “Başlangıç koşulu ve başlangıç kararı ne olursa olsun geri kalan kararlar verilen ilk kararın sonucuna göre optimal bir politika oluşturmalıdır [33]” biçiminde tanımlanmaktadır.

Tanımdan da anlaşıldığı gibi DP'de belirli bir aşamada verilecek karar, geçmişteki kararlara bakılmadan verilmektedir.

DP'de süreç için optimal politika, alt optimal politikalarından meydana gelir. Başka bir deyişle, optimal politikanın her türlü alt politikası da optimaldir [25].

4.3. Çok Aşamalı Karar Süreçleri

Çok aşamalı karar süreci; herhangi bir yöntem veya kritere göre sıralı adımlara ayrılabilen bir karar süreci ya da ardışık olarak bir araya getirilebilen aşamalar olarak tanımlanabilir [25].

4.4. Dinamik Programlama Türleri

DP problemleri, rassallığın bulunduğu durum ve bulunmadığı durum olmak üzere iki şekilde sınıflandırılabilir. Sürecin özelliğini belirleyen şey geçiş fonksiyonlarıdır. Süreçle ilgili geçişlerde bir rassallık varsa stokastik, rassallık yoksa deterministik DP söz konusu olmaktadır [25].

4.5. Dinamik Programlamanın Formülasyonu

DP problemlerinin çözümüne uygun bir matematiksel modelin kurulması ile başlanır. DP ile ilgili problemler biçimsel olarak ya da konuları açısından birbirlerinden oldukça büyük farklılıklar gösterebilmektedirler. Bu nedenle problemlere ilişkin modellerin veya dönüşüm denklemlerinin farklı şekilde kurulması gerekebilir. Bunun yanı sıra tüm DP modellerini içeren ve bunların çözümünü sağlayan tek bir yöntem yoktur [25].

DP'de problemin çözümü için kararlar bir bütünden ziyade her bir aşama için ayrı ayrı verilir. Bu nedenle DP probleminin alt problemlere ayrılması ve ardından geçiş fonksiyonlarının oluşturulması gerekmektedir.

DP'de problem alt problemlere ayrıldıktan sonra hesaplamalar yinelenerek yapılır, bu bakımdan bir alt problemin optimal çözümü bir sonraki alt problemin girdisidir. Son alt problem çözüldüğünde, problemin optimal çözümü elde edilmiş olur. Yinelenen hesaplamaların uygulanma biçimi orjinal problemin nasıl ayrıştırıldığına bağlıdır. Özellikle alt problemler bazı ortak kısıtlarla birbiriyle ilişkilendirilir. Bir alt problemden bir sonrakine ilerledikçe bu kısıtların uygunluğuna dikkat etmek zorunludur.

DP probleminin genel formülasyonu:

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n}(\max)[r_n(s_n, x_n) + f_{n-1}^*(s_{n-1})] \quad (4.1)$$

biçimindedir [27].

Burada;

n : Mevcut aşamayı

n-1 : Bir önceki aşamayı

s_n : n inci aşamada sistemin durumunu

s_{n-1} : n-1 inci aşamada sistemin durumunu

x_n : n inci aşama için karar değişkenini

x_n^* : x_n 'lerin optimal değerini

$r_n(s_n, x_n)$: s_n durumundaki x_n kararı benimsendiğinde n inci aşamada gerçekleşen kazanımı

$f_n(s_n)$: n inci aşamadaki s_n durumundan başlayıp işlemlerin sonuna kadar, her alternatif için gerçekleşen toplam kazanımı

$f_n^*(s_n)$: En iyi toplam kazanımı

$f_{n-1}^*(s_{n-1})$: n-1 inci aşamada elde edilen en iyi toplam kazanımı

göstermektedir.

4.6. Dinamik Programlama Çözüm Yolları

DP problemleri tablosal veya analitik çözüm yolu ile çözülebilir.

4.6.1. Tablosal Çözüm Yolu

Tablosal çözüm yolu optimal politikanın belirlenmesi amacıyla yönelik olarak, çözümün aşama aşama tablolar halinde gösterilmesi olarak tanımlanabilir. Karar probleminin çözüm süreci ile ilgili aşamalarda tüm durumlar göz önüne alınarak karar seçenekleri belirlenir. Her aşamada dönüşüm fonksiyonları ile hesaplanan ilgili seçenekler arasından en iyileri seçilerek tabloya yerleştirilir. Seçenekler arasından seçim yapılırken, seçilen seçeneğin uygun çözüm olup olmadığı da çözüm sırasında göz önünde bulundurulmalıdır. Uygun çözüm olmayan seçenekler hesaplamalara dahil edilmez. Dolayısıyla bu çözüm yolu ile elde edilen çözümler uygun çözümler olmaktadır. Bu nedenle tablosal çözüm yolunun, yalnızca uygun seçenekleri göz önüne alarak çözüm yapılmasına olanak sağladığı söylenebilir [27].

4.6.2. Analitik Çözüm Yolu

Analitik çözüm yolu verilen dönüşüm denklemlerinin her bir aşamada türevleri alınarak optimal değerlerin bulunmaya çalışıldığı çözüm yoludur.

Herhangi bir problemin çözümünde tablosal yöntemin kullanılabilmesi için; değişkenlerin kesikli olması, problemle ilgili parametrelerin sayısal değerlerinin ve kısıtlayıcılarının açık olarak verilmesi gerekir. Değişkenlerin sürekli olduğu problemlerin çözümünde ise analitik yöntem kullanılmaktadır [25].

4.7. Dinamik Programlamanın Yineleme İle Çözüm Yöntemleri

DP problemleri çözülürken gerek tablosal çözüm yolunda, gerekse analitik çözüm yolunda ileriye ve geriye doğru yineleme ile çözüm yapılabilir.

4.7.1. İleriye Doğru Yineleme İle Çözüm Yöntemi

Bu yöntemde n-1 inci aşama ile ilgili bilgiler, n inci aşamanın karar girdilerini oluşturur. Çözüme, 1 inci aşamadan başlanarak sırasıyla 2,3,, n-1, n inci aşamaya doğru gidileceğinden geçiş fonksiyonu da buna uygun olarak formüle edilmelidir [25].

Bu çözüm yönteminin genel formülü, birinci aşama için;

$$f_1(s_1) = \min(\max) [r_1(s_1, x_1)]$$

İkinci aşama için;

$$f_2(s_2) = \min(\max) [r_2(s_2, x_2) + f_1(s_1)]$$

...

n inci aşama için;

$$f_n(s_n) = \min(\max) [r_n(s_n, x_n) + f_{n-1}(s_{n-1})] \quad (4.2)$$

şeklindedir.

4.7.2. Geriye Doğru Yineleme İle Çözüm Yöntemi

Bu yöntem ileriye doğru çözüm yönteminin tersi gibi düşünülebilir. Bu kez çözüme son aşamadan başlanarak n,n-1,.....,3,2,1 inci aşamaya doğru gidilir ve geçiş fonksiyonu da bu şekilde formüle edilir.

Bu çözüm yönteminin genel formülü n inci aşama için;

$$f_n(s_n) = \min(\max) [r_n(s_n, x_n)]$$

n-1 inci aşama için;

$$f_{n-1}(s_{n-1}) = \min(\max) [r_{n-1}(s_{n-1}, x_{n-1}) + f_n(s_n)]$$

...

Birinci aşama için;

$$f_1(s_1) = \min(\max) [r_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)] \quad (4.3)$$

şeklindedir.

İleriye ve geriye doğru yineleme aynı sonucu verir. İleriye doğru yineleme daha mantıklı görünmekle birlikte, DP literatürü değişmez bir biçimde geriye doğru yinelemeyi kullanmaktadır. Bu tercihin nedeni, geriye doğru yinelemenin hesaplama bakımından daha etkili olmasıdır [34].

5. OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ

Hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki sapmanın en önemli nedeni yatırım getirisi, bir başka deyişle yatırım stratejisidir. Bireysel emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu nedenle yapılan bu tezde optimal yatırım stratejisi de belirlenmiştir.

Optimal yatırım stratejisi belirlenirken Dinamik Programlama(DP) optimizasyon yöntemi seçilmiştir. Bunun en önemli nedeni yatırım getirisinin zaman içinde değişken bir yapıda hareket etmesi, bir başka deyişle yatırım getirisinin zamanla değişmesinden kaynaklanan dinamik yapısıdır.

5.1. Model

DP problemlerinin çözümüne uygun bir matematiksel modelin kurulması ile başlanmaktadır. Bu tezde Vigna ve Haberman [11] tarafından yapılan çalışmada olduğu gibi emeklilik fonlarının biri düşük diğeri yüksek riskli olmak üzere iki yatırım aracında değerlendirildiği varsayılarak, Stokastik DP yöntemi ile bireysel emeklilik planları için bir model oluşturulacaktır.

Modelde birinci uygulama ile karşılaştırma yapılabilmesi için birinci uygulama ile aynı varsayımlar kullanılmıştır.

Fonun t ve t+1 anındaki değeri özyineli olarak Eş. 2.2.'ye benzer biçimde:

$$f_{t+1} = (f_t + C)[(1 - y_t)e^{\mu t} + y_t e^{\lambda t}] \quad (5.1)$$

biçiminde hesaplanır.

Burada:

f_{t+1} : Fonun t+1 anındaki değerini

f_t : Fonun t anındaki değerini

C : Sabit katkı miktarını

y_t : Fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını

$(1-y_t)$: Fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını

μ_t : $[t, t+1]$ zaman aralığında sabit olan, düşük riskli varlık için anlık faiz oranını

λ_t : $[t, t+1]$ zaman aralığında sabit olan, yüksek riskli varlık için anlık faiz oranını göstermektedir.

$t=0$ anında bireysel emeklilik planına girmiş, $t=T$ anında emekli olacak bir katılımcının F_T büyüklüğünde bir hedef fon büyüklüğüne ulaşabilmesi için her yılın başında fona yapılması gereken sabit katkı miktarı (C) Eş 2.1.'den hesaplanır.

Optimal yatırım stratejisi belirlenirken dönem sonu fon büyüklüğü hedefinin yanı sıra ara dönem hedeflerinin de belirlenmesi gerekmektedir. $t=1$ anındaki hedef fon $t=0$ anında dönem başında yapılan katkı miktarı C'nin bir dönem ileri çekilmesi ile bulunur:

$$F_1 = C e^{iA} \quad (5.2)$$

Diğer ara dönemlerde hedef fon büyüklüklerini bulmak için, hedef fon büyüklüğünün F_1 'den F_T 'ye doğrusal olarak arttığı varsayılmıştır.

5.2. Optimizasyon Probleminin Formüle Edilmesi

Ara dönemlerde hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki fark için:

$$M(t) = \theta_1 (f_t - F_t)^2 \quad (5.3)$$

dönem sonu için ise:

$$M(T) = \theta_0 (f_T - F_T)^2 \quad (5.4)$$

biçiminde bir maliyet fonksiyonu tanımlansın.

Eş. 5.3. ve Eş. 5.4.'de θ_0 ve θ_1 sabit birer katsayı olup, vade sonunda hedef fon büyüklüğüne ulaşılması ara dönem hedeflerine ulaşılmasından daha önemli olduğundan; θ_0 , θ_1 'den daha büyük seçilir.

$M(t)$ fonksiyonu Eş. 4.1.'de tanımlanan, s_n durumundaki x_n kararı benimsendiğinde n inci aşamada gerçekleşen kazanımı ifade eden $r_n(s_n, x_n)$ fonksiyonuna karşılık gelmektedir.

Vade sonuna kadar her dönem oluşacak maliyetlerin t anındaki (bugünkü) değeri:

$$G_t = \sum_{s=t}^T v^{s-t} M(s) \quad (5.5)$$

biçiminde olup, bu eşitlikte verilen v iskonto faktörüdür.

Optimizasyonda hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimize edilmesi amaçlandığından G_t fonksiyonu minimize edilmiştir.

X_t ; t anına kadarki mevcut tüm bilgiler, yani $X_t = \{f_0, f_1, \dots, f_t, y_0, y_1, \dots, y_{t-1}\}$ olmak üzere değer fonksiyonu:

$$J(X_t) = \min_{\pi_t} E[G_t | X_t] \quad (5.6)$$

biçiminde tanımlanabilir.

Bu eşitlikte verilen π_t gelecekteki optimal yatırım stratejileri dizisini ifade etmektedir:

$$\pi_t = [\{y_s\}_{s=t, t+1, \dots, N-1} : 0 \leq y_s \leq 1] = [\{y_t, y_{t+1}, \dots, y_{N-1}\} : 0 \leq y_s \leq 1]$$

$J(X_t)$ fonksiyonu Eş. 4.1.'de tanımlanan, n inci aşamadaki s_n durumundan başlayıp işlemlerin sonuna kadar her alternatif için gerçekleşen toplam kazanımı ifade eden $f_n(s_n)$ fonksiyonuna karşılık gelmektedir.

5.3. Optimal Yatırım Stratejisinin Dinamik Programlama İle Belirlenmesi

Eş. 5.5., Eş. 5.6.'da yerine konulursa değer fonksiyonu:

$$\begin{aligned} J(X_t) &= \min_{\pi_t} E\left[\sum_{s=t}^T v^{s-t} M(s) | X_t\right] \\ &= \min_{\pi_t} E[M(t) + vM(t+1) + \dots + v^{T-t} M(T) | X_t] \\ &= \min_{\pi_t} E[M(t) + v\{M(t+1) + \dots + v^{T-t-1} M(T) | X_t\}] \\ &= \min_{y_t} E[M(t) + vE[J(X_{t+1}) | X_t]] \end{aligned} \quad (5.7)$$

olarak da ifade edilebilir.

Burada f_t 'nin Markov özelliğine sahip olduğu varsayılmıştır. Markov özelliğine göre sürecin herhangi bir anda içinde bulunduğu durum sadece bir önceki adımda içinde bulunduğu duruma bağlı olduğundan:

$$\Pr[f_{t+1}|X_t] = \Pr[f_{t+1}|f_t]$$

$$\Pr[f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_T | X_t] = \Pr[f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_T | f_t]$$

$$\Pr[G_t | X_t] = \Pr[G_t | f_t]$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısıyla Eş. 5.6.;

$$J(X_t) = \min_{y_t} E[G_t | X_t] = J(f_t, t) \quad (5.8)$$

Eş. 5.7. ise;

$$J(f_t, t) = \min_{y_t} [M(t) + v E[J(f_{t+1}, t+1)]] \quad (5.9)$$

olarak elde edilir.

$\theta_1=1$ ve $\theta_0=\theta$ olarak alınırsa Eş. 5.9.:

$$J(f_t, t) = \min_{y_t} [(f_t - F_t)^2 + v E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t]] \quad (5.10)$$

olarak yazılır. Bu optimizasyon problemi için kısıtlayıcı koşul:

$$J(f_T, T) = \theta (f_T - F_T)^2 \quad (5.11)$$

şeklindedir.

5.4. Dinamik Programlama Probleminin Çözümü

Dinamik programlama problemi, geriye doğru çözüm yöntemi ve analitik çözüm yolu kullanılarak çözülmüştür.

Değer fonksiyonu için bir deneme çözümü

$$J(f_t, t) = P_t f_t^2 - 2Q_t f_t + R_t \quad (5.12)$$

olarak alınıp bu deneme çözümünün doğru olduğu tümden gelim ile gösterilecektir.

$t=T$ için;

$$J(f_T, T) = \theta (f_T - F_T)^2 = \theta f_T^2 - (2\theta F_T) f_T + \theta F_T^2 \quad (5.13)$$

şeklinde olup,

$$P_T = \theta \quad (5.14)$$

$$Q_T = \theta F_T \quad (5.15)$$

$$R_T = \theta F_T^2 \quad (5.16)$$

ifadelerine karşılık gelmektedir.

Bu deneme çözümünün (t+1) noktası için doğru olduğu varsayımı ile (t+1) noktası için değer fonksiyonu;

$$J(f_{t+1}, t+1) = P_{t+1} f_{t+1}^2 - 2Q_{t+1} f_{t+1} + R_{t+1} \quad (5.17)$$

şeklindedir.

Eş. 5.17., Eş. 5.10.'da yerine konulduğunda Eş. 5.10.'daki beklenen değer ifadesi:

$$E[J(f_{t+1}, t+1)|f_t] = P_{t+1} E[f_{t+1}^2|f_t] - 2Q_{t+1} E[f_{t+1}|f_t] + R_{t+1} \quad (5.18)$$

biçiminde bulunur.

Logaritmik getiriler Normal dağılıma sahip olduğu için fonun t+1 anındaki beklenen değeri:

$$E[f_{t+1}|f_t] = (f_t + C)[(1 - y_t)e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}} + y_t e^{\lambda + \frac{\sigma_2^2}{2}}] \quad (5.19)$$

ikinci momenti:

$$E[f_{t+1}^2|f_t] = (f_t + C)^2 [(1 - y_t)^2 e^{2\mu + \sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + \sigma_2^2} + 2y_t(1 - y_t)e^{\mu + \lambda + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}] \quad (5.20)$$

varyansı ise

$$\text{Var}[f_{t+1}|f_t] = (f_t + C)^2 [(1 - y_t)^2 e^{2\mu + \sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) + y_t^2 e^{2\lambda + \sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1)] \quad (5.21)$$

olarak elde edilir.

Eş. 5.19. ve Eş. 5.20., Eş. 5.18.'de yerine konulursa:

$$\begin{aligned} E[J(f_{t+1}, t+1)|f_t] &= y_t^2 [P_{t+1} (f_t + C)^2 (e^{2\mu + \sigma_1^2} + e^{2\lambda + \sigma_2^2} - 2e^{\mu + \lambda + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}})] \\ &\quad + y_t [P_{t+1} (f_t + C)^2 (-2e^{2\mu + \sigma_1^2} + 2e^{\mu + \lambda + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}) - 2Q_{t+1} (f_t + C) (-e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}} + e^{\lambda + \frac{\sigma_2^2}{2}})] \\ &\quad + [P_{t+1} (f_t + C)^2 (e^{2\mu + \sigma_1^2}) - 2Q_{t+1} (f_t + C) (e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}}) + R_{t+1}] \end{aligned} \quad (5.22)$$

biçiminde elde edilir.

$$L_t = P_{t+1} (f_t + C)^2 (e^{2\mu + \sigma_1^2} + e^{2\lambda + \sigma_2^2} - 2e^{\mu + \lambda + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}) \quad (5.23)$$

$$M_t = P_{t+1}(f_t + C)^2(-2e^{2\mu+\sigma_1^2} + 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}) - 2Q_{t+1}(f_t + C)(-e^{\mu+\frac{\sigma_1^2}{2}} + e^{\lambda+\frac{\sigma_2^2}{2}}) \quad (5.24)$$

$$N_t = P_{t+1}(f_t + c)^2(e^{2\mu+\sigma_1^2}) - 2Q_{t+1}(f_t + C)(e^{\mu+\frac{\sigma_1^2}{2}}) + R_{t+1} \quad (5.25)$$

olarak alındığında Eş. 5.22.:

$$E[J(f_{t+1}, t+1)|f_t] = L_t y_t^2 + M_t y_t + N_t = \psi(y_t) \quad (5.26)$$

şeklinde yazılabilir.

DP problemindeki amaç $\psi(y_t)$ ifadesini minimize eden y_t^* değerini bulmaktır. $L_t > 0$ olduğu için Eş. 5.26.'nın minimumu olan Z_t^* değerini veren bir y_t^* değeri vardır ($\psi(y_t^*) = Z_t^*$). Bu değer DP'nin analitik çözüm yolunda belirtildiği gibi, fonksiyonun türevini sıfıra eşitleyen değerdir.

$$\frac{d}{dy_t} \psi(y_t) = 2L_t y_t + M_t = 0$$

$$y_t^* = -\frac{M_t}{2L_t} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} Z_t^* &= L_t \left(-\frac{M_t}{2L_t}\right)^2 + M_t \left(-\frac{M_t}{2L_t}\right) + N_t \\ &= N_t - \frac{M_t^2}{4L_t} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Eş. 5.23., Eş. 5.24. ve Eş. 5.25.'in açık halleri Eş. 5.28.'de yerlerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} Z_t^* &= f_t^2 \left[P_{t+1} \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} (e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} \right] \\ &+ f_t [2P_{t+1}c \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} (e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} + 2Q_{t+1} \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}} (e^{\mu+0,5\sigma_1^2} + e^{\lambda+0,5\sigma_2^2} - e^{\mu+1,5\sigma_1^2} - e^{\lambda+1,5\sigma_2^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} \end{aligned}$$

$$+[P_{t+1}c^2 \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} + 2Q_{t+1}C \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}(e^{\mu+0,5\sigma_1^2}+e^{\lambda+0,5\sigma_2^2}-e^{\mu+1,5\sigma_1^2}-e^{\lambda+1,5\sigma_2^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}}] + R_{t+1}] \quad (5.29)$$

biçiminde elde edilir.

Bu eşitlikte

$$P'_t = P_{t+1} \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} \quad (5.30)$$

$$Q'_t = 2P_{t+1}c \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} + 2Q_{t+1} \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}(e^{\mu+0,5\sigma_1^2}+e^{\lambda+0,5\sigma_2^2}-e^{\mu+1,5\sigma_1^2}-e^{\lambda+1,5\sigma_2^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} \quad (5.31)$$

$$R'_t = P_{t+1}c^2 \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} + 2Q_{t+1}C \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}(e^{\mu+0,5\sigma_1^2}+e^{\lambda+0,5\sigma_2^2}-e^{\mu+1,5\sigma_1^2}-e^{\lambda+1,5\sigma_2^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} + R_{t+1} \quad (5.32)$$

olarak ifade edildiğinde fonksiyonun optimal noktadaki değeri:

$$Z_t^* = P'_t f_t^2 + Q'_t f_t + R'_t \quad (5.33)$$

şeklinde elde edilir.

Eş. 5.33. Eş. 5.10.'da yerine konulduğunda değer fonksiyonu:

$$\begin{aligned} J(f_t, t) &= (f_t - F_t)^2 + v \min_{y_t} [E[J(f_{t+1}, t+1)|f_t]] \\ &= (f_t - F_t)^2 + vZ_t^* \\ &= (f_t^2 + 2f_t F_t + F_t^2) + v(P'_t f_t^2 + Q'_t f_t + R'_t) \\ &= f_t^2(1 + vP'_t) + f_t(-2F_t + vQ'_t) + (F_t^2 + vR'_t) \end{aligned} \quad (5.34)$$

olur. Bu eşitlikte;

$$P_t = 1 + vP'_t \quad (5.35)$$

$$Q_t = F_t - 0,5vQ'_t \quad (5.36)$$

$$R_t = F_t^2 + vR'_t \quad (5.37)$$

olarak alınır, değer fonksiyonu:

$$J(f_t, t) = P_t f_t^2 - 2Q_t f_t + R_t \quad (5.38)$$

biçiminde elde edilir.

Eş. 5.38.'den görüldüğü üzere bu ifade Eş. 5.12.'de verilen deneme çözümünün aynısıdır. Böylece bu deneme çözümünün gerçek çözüm olduğu ispat edilmiştir.

Hesaplama Eş. 5.30.'da verilen P_t^i ifadesi Eş. 5.35.'de yerine yazılırsa, P_t ifadesi Eş. 5.14'de verilen vade sonu değerinden başlanılarak:

$$P_t = 1 + P_{t+1} * \left[\frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} (e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} \right] \quad (5.39)$$

biçiminde, Eş. 5.31.'de verilen Q_t^i ifadesi Eş. 5.36.'da yerine yazılırsa, Q_t ifadesi Eş. 5.15'de verilen vade sonu değerinden başlanılarak:

$$Q_t = F_t - \left[v * C * \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} (e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} * P_{t+1} \right] - \left[v * \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}} (e^{\mu+0,5\sigma_1^2} + e^{\lambda+0,5\sigma_2^2} - e^{\mu+1,5\sigma_1^2} - e^{\lambda+1,5\sigma_2^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} * Q_{t+1} \right] \quad (5.40)$$

biçiminde özyineli olarak elde edilmiştir.

6. İKİNCİ UYGULAMA: OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİNİN BELİRLENMESİ

Bu uygulamada, 10.000 tekrarlı bir benzetim çalışması ile, beşinci bölümde belirlenen optimal yatırım stratejisi kullanılarak farklı gelecek hizmet süresi olan katılımcılar için yıllar içerisinde fonun ne kadarının yüksek riskli, ne kadarının düşük riskli yatırım aracında değerlendirilmesi gerektiği belirlenecektir. Aynı zamanda hedeflenen fon büyüklüğündeki değişim, dönem sonu hedefi için ağırlık katsayısı olan θ_0 'daki değişim ile iskonto faktöründeki değişimin sonuçlara etkisi de incelenecektir.

Optimal yatırım stratejisi ve fon büyüklüğü belirlenirken birinci uygulama ile karşılaştırma yapılabilmesi için birinci uygulamadaki varsayımlar yapılmış, düşük ve yüksek riskli yatırım araçlarının yıllık logaritmik getirilerinin ortalamaları ve standart sapmaları için aynı parametreler kullanılmıştır.

Maliyet fonksiyonlarını hesaplamak için Eş. 5.3.'de verilen ara dönem hedefleri için ağırlık katsayısı olan $\theta_1=1$, Eş. 5.4.'de verilen dönem sonu hedefi için ağırlık katsayısı olan $\theta_0=2$ ve maliyetlerin bugünkü değerini hesaplamak için Eş. 5.5.'de verilen iskonto faktörü olan $v=0,95$ olarak alınmıştır.

6.1. Optimal Yatırım Stratejisinin Farklı Vadeler İçin Belirlenmesi

Bu bölümde, Eş. 5.27.'den yıllar itibariyle optimal yatırım oranı y_t^* belirlenmiş, belirlenen bu optimal oranlar kullanılarak Eş. 5.1.'den fon büyüklükleri hesaplanmış ve farklı vadeler için durumlar incelenmiştir.

1. *Durum*: Vadenin 40 yıl olduğu durum

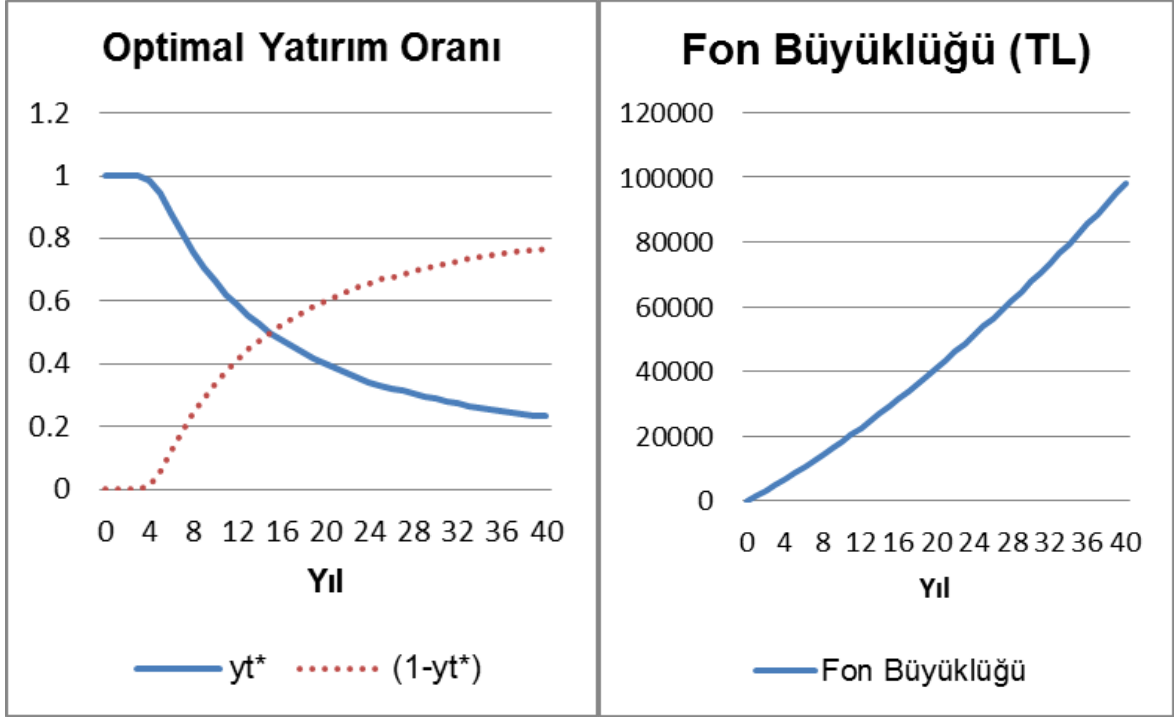
40 yıl vade için yıllar itibariyle optimal yatırım oranı y_t^* 'in ortalama değerleri ve yapılan sabit katkıların yatırım araçlarında bu optimal oranlarla değerlendirilmesi sonucu oluşan fon büyüklüğü Çizelge 6.1.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 6.1.'de verilmiştir.

Çizelge 6.1. Birinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

Yıl	y_t^*	$(1 - y_t^*)$	Fon Büyüklüğü(TL)
0	1	0	0
5	0.9426	0.0574	6.664
10	0.6219	0.3781	18.406
20	0.3842	0.6158	41.104
30	0.2802	0.7198	67.634
40	0.2332	0.7668	98.057

Çizelge 6.1. ve Şekil 6.1.'den fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı y_t^* 'in vadenin başında 1 değerini aldığı ve yıllar içinde azalarak vade sonunda yaklaşık 0,2332 değerine düştüğü, dolayısıyla fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı $(1 - y_t^*)$ 'in vade başında 0 değerini aldığı ve yıllar içinde artarak vade sonunda yaklaşık 0,7668 değerine ulaştığı görülmektedir. Bu yatırım stratejisi aslında tüm emeklilik planlarında kabul edilmiş ve tavsiye edilen bir yatırım stratejisidir. Bu stratejiye göre birikim döneminin başlarında fonun büyük bir kısmı hisse senedi gibi yüksek riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmeli, vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirilen oranı azaltılarak devlet tahvili gibi düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilen oranı artırılmalı ve emeklilik dönemine yaklaşıldığında ise fonun büyük bir kısmı düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmelidir.

Çizelge 6.1. ve Şekil 6.1.'den ayrıca, fonun yatırım araçlarına optimal tahsisi ile 40 yıllık vade sonunda yaklaşık 98.057 TL tutarında bir fon büyüklüğüne ulaşıldığı, yani hedeflenen fon büyüklüğü olan 100.000 TL'ye oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.



Şekil 6.1. Birinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

2. Durum: Vadenin 30 yıl olduğu durum

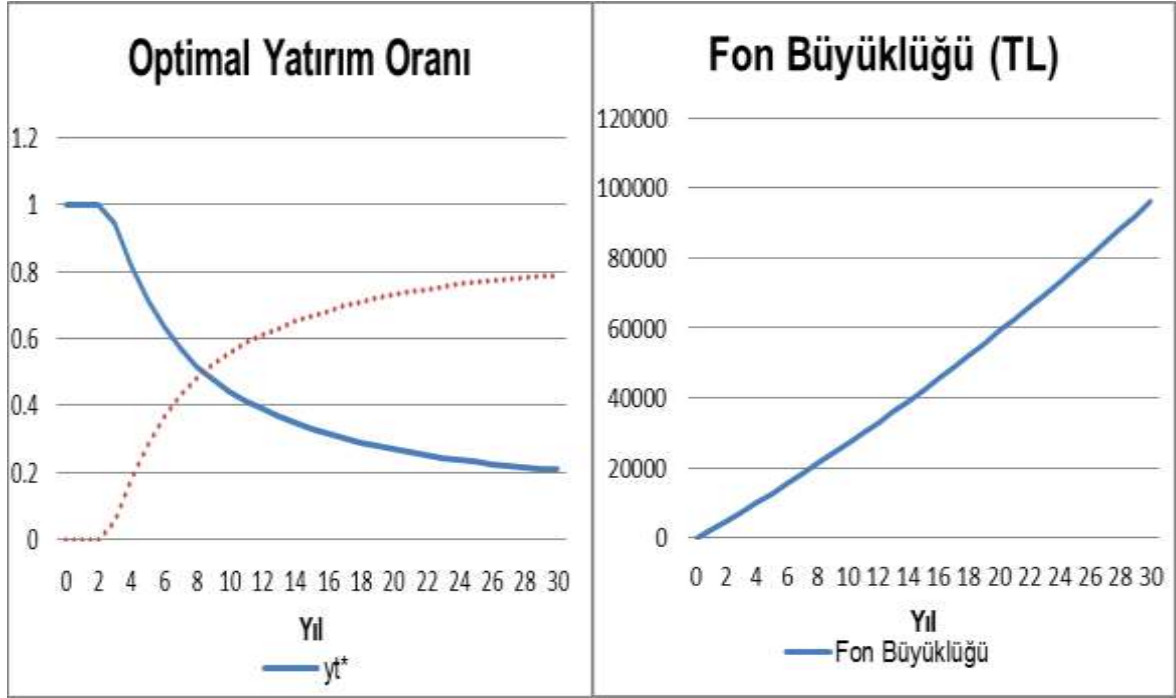
30 yıl vade için yıllar itibariyle optimal yatırım oranı y_t^* 'in ortalama değerleri ve yapılan sabit katkıların yatırım araçlarında bu optimal oranlarla değerlendirilmesi sonucu oluşan fon büyüklüğü Çizelge 6.2.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 6.2.'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. İkinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

Yıl	y_t^*	$(1-y_t^*)$	Fon Büyüklüğü(TL)
0	1	0	0
5	0.7141	0.2859	10.071
10	0.4121	0.5879	26.967
20	0.2598	0.7402	59.012
30	0.2111	0.7889	96.119

Çizelge 6.2. ve Şekil 6.2.'den yatırım stratejisinin birinci durum ile aynı olduğu, fakat fonun ağırlıklı olarak yüksek riskli yatırım aracında değerlendirildiği yıl sayısının daha az olduğu, fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranından düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranına geçişin daha hızlı ve keskin olduğu, vadenin sonunda fonun daha büyük bir oranının düşük riskli

yatırım aracında değerlendirildiği yani daha az risk alındığı, ayrıca 30 yıllık vade sonunda yaklaşık 96.119 TL tutarında bir fon büyüklüğüne ulaşıldığı, hedeflenen fon büyüklüğüne birinci durumdaki gibi oldukça yaklaşıldığı söylenebilir.



Şekil 6.2. İkinci Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

3. Durum: Vadenin 20 yıl olduğu durum

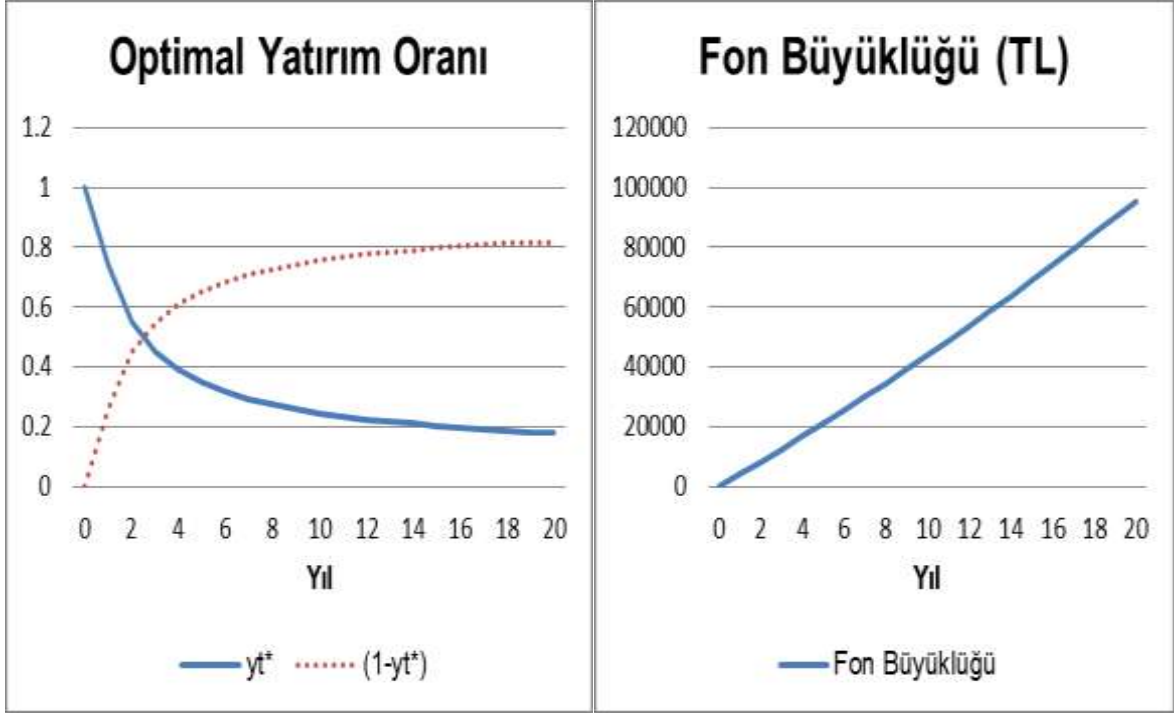
20 yıl vade için yıllar itibariyle optimal yatırım oranı y_t^* 'in ortalama değerleri ve yapılan sabit katkıların yatırım araçlarında bu optimal oranlarla değerlendirilmesi sonucu oluşan fon büyüklüğü Çizelge 6.3.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 6.3.'de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Üçüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

Yıl	y_t^*	(1 y_t^*)	Fon Büyüklüğü(TL)
0	1	0	0
5	0.3493	0.6507	21.096
10	0.2445	0.7555	44.022
20	0.1827	0.8173	95.393

Çizelge 6.3. ve Şekil 6.3.'den yatırım stratejisinin birinci ve ikinci durum ile aynı olduğu, ikinci duruma göre fonun ağırlıklı olarak yüksek riskli yatırım aracında değerlendirildiği yıl sayısının daha az olduğu, fonun yüksek riskli yatırım aracında

değerlendirilen oranından düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranına geçişin daha hızlı ve keskin olduğu, vadenin sonunda fonun daha büyük bir oranının düşük riskli yatırım aracında değerlendirildiği, ayrıca 20 yıllık vade sonunda yaklaşık 95.393 TL tutarında bir fon büyüklüğüne ulaşıldığı, hedeflenen fon büyüklüğüne birinci ve ikinci durumda olduğu gibi oldukça yaklaşıldığı söylenebilir.



Şekil 6.3. Üçüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

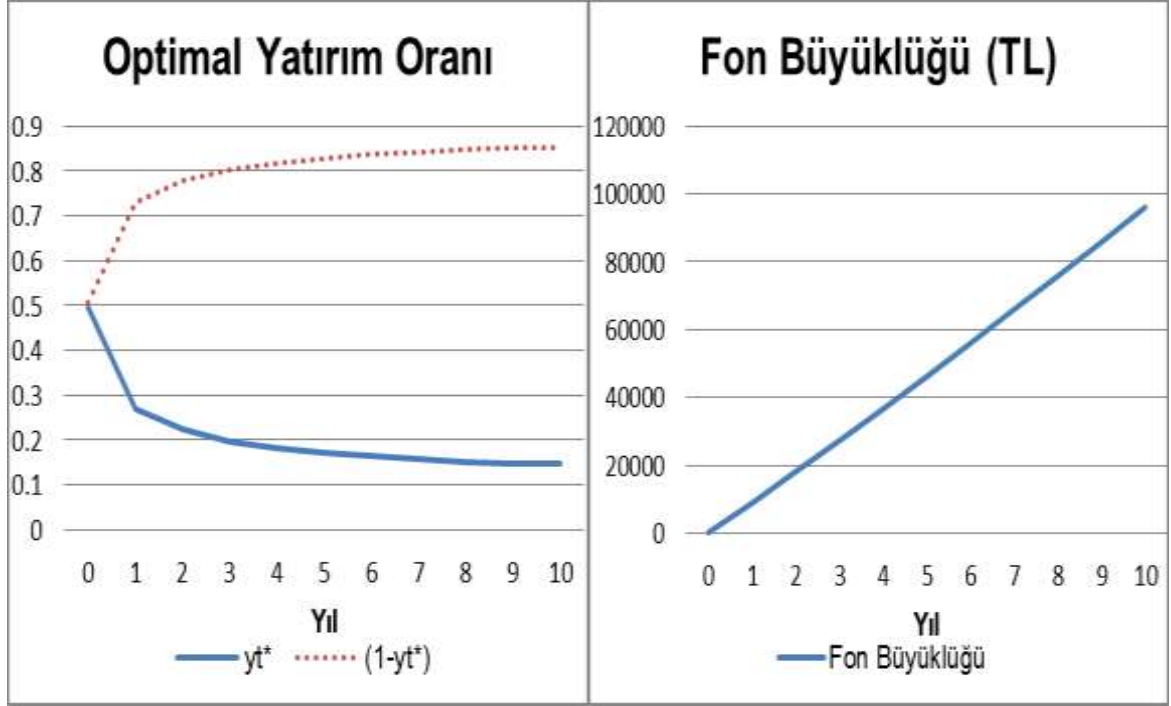
4. Durum: Vadenin 10 yıl olduğu durum

10 yıl vade için yıllar itibariyle optimal yatırım oranı y_t^* 'in ortalama değerleri ve yapılan sabit katkıların yatırım araçlarında bu optimal oranlarla değerlendirilmesi sonucu oluşan fon büyüklüğü Çizelge 6.4.'de, bu değerlere ilişkin grafikler ise Şekil 6.4.'de verilmiştir.

Çizelge 6.4. Dördüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

Yıl	y_t^*	$(1-y_t^*)$	Fon Büyüklüğü(TL)
0	0.4946	0.5054	0
5	0.1717	0.8283	46.334
10	0.1486	0.8514	96.342

Çizelge 6.4. ve Şekil 6.4.'den yatırım stratejisinin önceki durumlar ile aynı olduğu, fakat vadenin kısa olması nedeniyle birikim döneminin başında dahi fonun büyük kısmının yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilmesinden kaçınıldığı ve vadenin sonunda fonun daha büyük bir oranının düşük riskli yatırım aracında değerlendirildiği yani daha az risk alındığı, ayrıca 10 yıllık vade sonunda yaklaşık 96.342 TL tutarında bir fon büyüklüğüne ulaşıldığı yani hedeflenen fon büyüklüğüne diğer durumlarda olduğu gibi oldukça yaklaşıldığı söylenebilir.



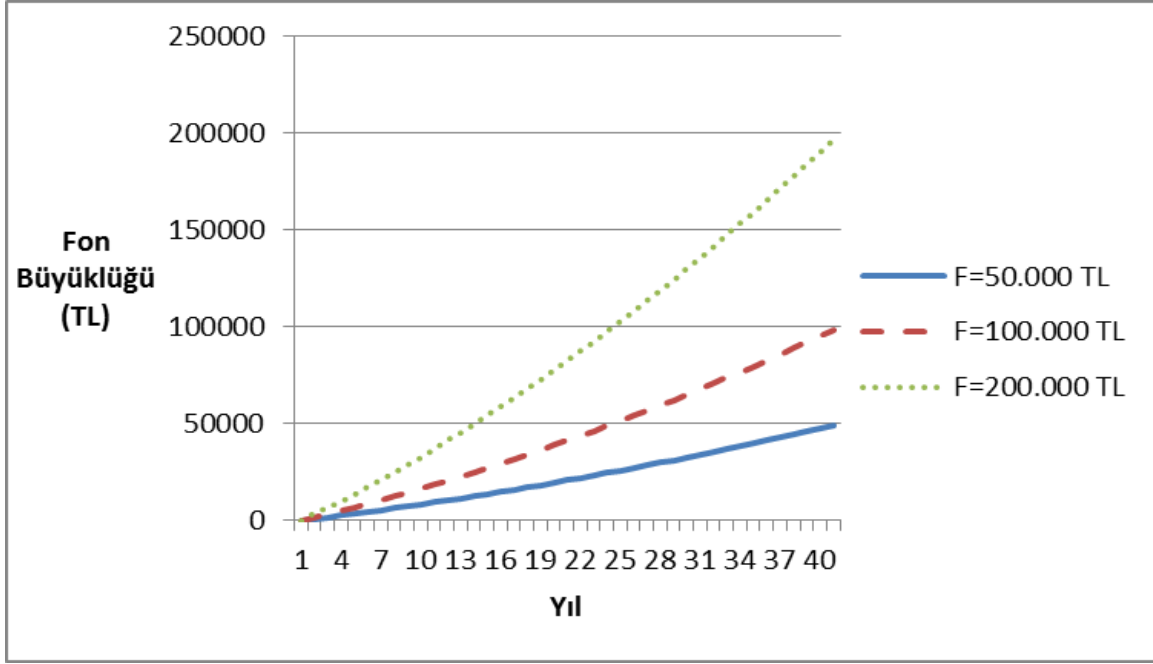
Şekil 6.4. Dördüncü Durum İçin Optimal Yatırım Oranı ve Fon Büyüklüğü

Belirtilen dört durum göz önünde bulundurularak, sabit katkıların yatırım araçlarına optimal tahsisi sonucunda da hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşılabileceği söylenebilir.

6.2. Hedef Fon Büyüklüğündeki Değişiminin Etkisinin İncelenmesi

Hedef fon büyüklüğündeki değişimin etkisini incelemek amacıyla hedef fon büyüklüğünün 50.000 TL, 100.000 TL ve 200.000 TL olduğu durumlar ele alınmıştır. Bu üç hedef fon büyüklüğü için 40 yıl vade boyunca optimal yatırım oranı y_t^* 'in ortalama değerleri incelenmiş ve hedef fon büyüklüğündeki değişimin optimal yatırım oranlarını değiştirmedeği görülmüştür.

Yapılan sabit katkıların yatırım araçlarında optimal oranlarla değerlendirilmesi sonucu oluşan fon büyüklüklerine ilişkin grafik Şekil 6.5.'de verilmiştir.



Şekil 6.5. Farklı Hedef Fon Büyüklükleri İçin Gerçekleşen Fon Büyüklükleri

Şekil 6.5.'den hedef fon büyüklüğünün daha düşük değerleri için hedef fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı, açık miktarının dolayısıyla riskin daha az olduğu söylenebilir.

6.3. Dönem Sonu Hedefi İçin Ağırlık Katsayısındaki Değişimin Etkisinin İncelenmesi

Dönem sonu hedefi için ağırlık katsayısındaki değişimin etkisini incelemek amacıyla dönem sonu hedefi için ağırlık katsayısı olan θ_0 'ın 1, 2 ve 3 olduğu durumlar ele alınmıştır. Çizelge 6.5.'de bu üç θ_0 değeri için 40 yıl vade boyunca optimal yatırım oranı olan y_t^* 'in ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 6.5. Farklı θ_0 Değerleri İçin Optimal Yatırım Oranları

θ_0	y_t^*				
	0. Yıl	10. Yıl	20. Yıl	30. Yıl	40.Yıl
1	1	0.6230	0.3860	0.2820	0.2327
2	1	0.6220	0.3842	0.2802	0.2332
3	1	0.6210	0.3826	0.2787	0.2336

Çizelge 6.5.'den θ_0 'ın optimal yatırım oranı olan y_t^* 'a etkisinin çok az olduğu, bu nedenle θ_0 'ın farklı değerleri için gerçekleşen fon büyüklüklerinde de çok küçük bir değişime neden olacağı söylenebilir.

6.4. İskonto Faktöründeki Değişimin Etkisinin İncelenmesi

İskonto faktöründeki değişimin etkisini incelemek amacıyla iskonto faktörü olan v 'nin 0,80, 0,95 ve 1 olduğu durumlar ele alınmıştır. Çizelge 6.6.'da bu üç iskonto faktörü için 40 yıl vade boyunca farklı yıllar için optimal yatırım oranı olan y_t^* 'in ortalama değerleri verilmiştir.

Çizelge 6.6. Farklı İskonto Faktörleri İçin Optimal Yatırım Oranları

v	y_t^*				
	0. Yıl	10. Yıl	20. Yıl	30. Yıl	40.Yıl
0.80	1	0.5955	0.4018	0.2883	0.2328
0.95	1	0.6220	0.3842	0.2802	0.2332
1	1	0.6230	0.3765	0.2784	0.2339

Çizelge 6.6.'dan iskonto faktörünün optimal yatırım oranı olan y_t^* 'a etkisinin çok az olduğu, bu nedenle iskonto faktörünün farklı değerleri için gerçekleşen fon büyüklüklerinde de çok küçük bir değişime neden olacağı söylenebilir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde katkısı belirli emeklilik planı olan bireysel emeklilik planlarında katkıların genellikle sabit olduğu planlar incelenmiş, bu geleneksel plana alternatif olarak hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için, katkıların hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki fark dikkate alınarak, sistematik olarak belirlendiği değişken katkılı planlar da ele alınmış ve bu iki plandaki dönem sonu açık miktarları benzetim çalışması ile karşılaştırılarak hangi planın daha riskli olduğu belirlenmiştir.

Birinci uygulamanın sonuçları incelendiğinde değişken katkılı bireysel emeklilik planlarında dönem sonu açık miktarının sabit katkılı bireysel emeklilik planlarına göre daha düşük olduğu, hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı görülmektedir. Vade boyunca gerçekleşen yatırım getirisinin, vade başında katkının belirlenmesi amacıyla kullanılan beklenen yatırım getirisine ilişkin tahminden farklı olmasının yol açtığı etki incelenmiş, sabit katkılı planların bu sapmaya daha duyarlı olduğu; yani tahmin hatasından daha çok etkilendiği görülmüştür. Her iki plan için dönem sonu açıkların ortalaması, standart sapması, %95'e bölen değeri ile karesel ortalama değerleri incelenmiş, değişken katkılı planlarda yatırım getirisindeki tahmin hatasının tüm değerleri için bu istatistiklerin daha düşük olduğu görüldüğünden sabit katkılı planların daha riskli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bunun nedeni değişken katkılı planlarda fondaki belirsizliğin bir kısmının katkıya yansımalarıdır.

Hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki sapmanın en önemli nedeni yatırım getirisi, bir başka deyişle yatırım stratejisidir. Bireysel emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu nedenle yapılan bu tezde gelecekte ortaya çıkacak hedef fondan sapmaları minimize eden optimal yatırım stratejisi Dinamik Programlama (DP) kullanılarak belirlenmiştir. Belirlenen bu optimal yatırım stratejisi ile de hedeflenen fon büyüklüğüne ne ölçüde ulaşılabildiğini göstermek amacıyla ikinci bir benzetim çalışması yapılmıştır.

İkinci uygulamanın sonuçları incelendiğinde, optimal yatırım stratejisinin; birikim döneminin başlarında fonun büyük bir kısmının hisse senedi gibi yüksek riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmesi, vade ilerledikçe fonun yüksek riskli

yatırım araçlarında değerlendirilen oranı azaltılarak devlet tahvili gibi düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilen oranının artırılması ve emeklilik dönemine yaklaşıldığında ise fonun büyük bir kısmının düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmesi olduğu görülmüştür. Farklı vade değerleri için sabit katkıların yatırım araçlarına optimal tahsisi sonucunda da hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşılabileceği görülmüştür.

Yapılan iki uygulamada da yıllık logaritmik getirilerin Normal dağılıma sahip, bağımsız raslantı değişkenleri olduğu varsayılmıştır. Fakat gerçekte getirilerin bu varsayımı sağlamadığı görülmektedir. Bu çalışma, yatırım getirileri uygun bir zaman serisi modeliyle modellenerek, getiriler arasındaki korelasyon da göz önünde bulundurularak genişletilebilir.

Hedef fon büyüklüğü her iki uygulamada da sabit bir miktar olarak alınmıştır. Hedef fon büyüklüğü MacDonald ve Cairns [35] tarafından yapılan çalışmada olduğu gibi farklı yollarla da belirlenebilir.

Birinci uygulamada değişken katkılı planlarda katkı miktarının hesaplanmasında kullanılan lamda katsayıları için bir optimizasyon çalışması yapılmamış, lamda katsayıları sabit bir oran olarak varsayılmıştır. Lamda katsayıları için de bir optimizasyon çalışması yapılabilir.

Hedef fondan sapmalar vade sonuna kalan süreye yayılarak da amortize edilip bulunan sonuçlar bu tezdeki sonuçlarla karşılaştırılabilir.

Yapılan bu tezde hedef fon büyüklüğüne ulaşmak için değişken katkılı planlarda katkıların yatırım araçlarında sabit bir oran ile değerlendirilme durumu ve sabit katkılı planlarda katkıların belirlenen optimal yatırım stratejisi kullanılarak yatırım araçlarında optimal olan değişken bir oran ile değerlendirilme durumu birbirlerinden ayrı olarak ele alınmıştır. Bireysel emeklilik planlarında hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşabilmek için fona yapılacak değişken katkı miktarları yatırım araçlarına optimal tahsis edilerek değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Dağlar, H., *Kurumsal Yatırımcılar Olarak Emeklilik Yatırım Fonları ve Performanslarının Değerlendirilmesi*, Türkiye Bankalar Birliği, Yayın No:249, Burdur, **2007**.
- [2] E.G.M Emeklilik Gözetim Merkezi A.Ş., <http://www.egm.org.tr/?pid=480> (Aralık, **2014**).
- [3] Owadally, I., Haberman, S., Hernández, D.G., A Savings Plan with Targeted Contributions, *The Journal of Risk and Insurance*, 79(1), 1-26, **2012**.
- [4] Box, G.E.P., Luceño, A., Discrete Proportional Integral Control with Constrained Adjustment, *The Statistician*, 44(4), 479-495, **1995**.
- [5] Gandolfi, G., Sabatini, A., Rossolini, M., PID Feedback Controller Used as a Tactical Asset Allocation Technique: The GAM Model, *Physica A*, 383, 71-78, **2007**.
- [6] Owadally, I., Pension Funding and The Actuarial Assumption Concerning Investment Returns, *Astin Bulletin*, 33(2), 289-312, **2003**.
- [7] Halaç, O., *Kantitatif Karar Verme Teknikleri: Yöneylem Araştırması*, Arpaz Matbaacılık, İstanbul, **1978**.
- [8] Haberman, S., Sung, J-H., Dynamic Approaches to Pension Funding, *Insurance: Mathematics and Economics*, 15, 151-162, **1994**.
- [9] Cairns, A.J., *An Introduction to Stochastic Pension Fund Management*, Discussion Paper PI-9607, London, **1996**.
- [10] Owadally, I., The Dynamics and Control of Pension Funding, Phd Thesis, City University, London, **1998**.
- [11] Vigna, E., Haberman, S., Optimal Investment Strategy For Defined Contribution Pension Schemes, *Insurance: Mathematics and Economics*, 28, 233-262, **2001**.
- [12] Vigna, E., Haberman, S., Optimal Investment Strategies and Risk Measures in Defined Contribution Pension Schemes, *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 35-69, **2002**.
- [13] Thomson, R.J., The Use of Utility Functions for Investment Channel Choice in Defined Contribution Retirement Funds I: Defence, *British Actuarial Journal*, 9, 653-709, **2003**.
- [14] Karlstrom, A., Palme, M., Svensson, I., A Dynamic Programming Approach to Model The Retirement Behaviour of Blue-Collar Workers in Sweden, *Journal of Applied Econometrics*, 19, 795-807, **2004**.
- [15] Schäl, M., On Discrete-Time Dynamic Programming in Insurance: Exponential Utility and Minimizing The Ruin Probability, *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 189-210, **2004**.
- [16] Lin, X., Li, Y., Optimal Reinsurance and Investment for a Jump Diffusion Risk Process under the CEV Model, *North American Actuarial Journal*, 15(3), 417-431, **2012**.

- [17] Liu, J., Yiu, K-F.C., Siu, T.K., Ching, W-K., Optimal Investment-Reinsurance with Dynamic Risk Constraint and Regime Switching, *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 263-265, **2013**.
- [18] He, L., Liang, Z., Optimal Dynamic Asset Allocation Strategy for ELA Scheme of DC Pension Plan during The Distribution Phase, *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 404-410, **2013**.
- [19] Dereliođlu, D., *Türkiye’de Özel Emeklilik Fonu Uygulamaları*, TÜGİAD Ekonomi Ödülleri Kitapları, İstanbul, **2001**.
- [20] Blake, D., Annuities in Pension Plans, *Text of Talk for World Bank Annuities Workshop*, 7-8 June, United Kingdom, **1999**.
- [21] Aitken, W.H., *Pension Funding and Valuation*, Second Edition, Actex Publications, **1996**.
- [22] Allen, E.T., Melone, J.J., Rosenbloom, J.S., Vanderhei, J.L., *Pension Planning*, Eighth Edition, Irwin/McGraw Hill, **1997**.
- [23] Bodie, Z., Marcus, A.J., Merton R.C., Defined Benefit versus Defined Contribution Plans: What are the Real Trade-offs?, <http://papers.nber.org/books/bodi88-1> (Aralık, **2014**).
- [24] The Central Limit Theorem, <http://www.math.uah.edu/stat/sample/CLT.html> (Aralık, **2014**).
- [25] Sezen, H.K., *Yöneylem Araştırması*, 2. Baskı, Ekin Basım Yayın Dağıtım, Bursa, **2007**.
- [26] Gülçür, F., *İşletmelerde Faaliyet Araştırmaları, Programlama Organizasyon ve Karar Metodları*, Berksoy Matbaası, İstanbul, **1966**.
- [27] Sevinç, C., *Lojistik Planlama Çok Ürünlü Çok Kademeli İkmal Zincirindeki Depolarda Bulundurulması Gerekli Minimum Malzeme Miktarının Dinamik Programlama Yöntemiyle Optimizasyonu*, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir, **2008**.
- [28] Türk Dil Kurumu, Büyük Türkçe Sözlük, http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts (Aralık, **2014**).
- [29] Önalın, Ö., *Stokastik Süreçler*, Avcıol Yayınları, İstanbul, **2011**.
- [30] İnal, C., *Olasılıksal Süreçlere Giriş: Markov Zincirleri*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, **1988**.
- [31] Cook, T.M., Robert A.R., *Introduction To Management Science*, Second Edition, Pearson Prentice Hall, New Jersey, **1981**.
- [32] Kara, İ., *Yöneylem Araştırması: Doğrusal Olmayan Modeller*, Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir, **1986**.
- [33] Bellman R., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, **1957**.
- [34] Taha, H.A., *Yöneylem Araştırması*, (çev: Baray, Ş.A.), Literatür Yayıncılık, İstanbul, **2010**.
- [35] MacDonald, B-J., Cairns, A.J.G., Three Retirement Decision Models For Defined Contribution Pension Plan Members: A Simulation Study, *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 1-18, **2011**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Murat KIRKAĞAÇ
Doğum Yeri : Afyonkarahisar
Medeni Hali : Evli
E-posta : murat.k@hacettepe.edu.tr
Adresi : Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü / Ankara

Eğitim

Lise : 2003-2007 Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans : 2007-2011 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü
Yüksek Lisans : 2012-2015 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı

Yabancı Dil Düzeyi

İngilizce, İleri
Almanca, Başlangıç

İş Deneyimi

Ocak 2012 – Ocak 2013 Dumlupınar Üniversitesi Uygulamalı Bilimler
Yüksekokulu , Araştırma Görevlisi
Ocak 2013 - ... Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü,
Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar