

**TÜRKİYE HAYAT ANNUİTE ÜRÜNLERİNDEKİ
ÖLÜMLÜLÜK RİSKLERİNİN MENKUL
KIYMETLEŞTİRİLMESİ**

**SECURITIZATION of MORTALITY RISKS in TURKEY LIFE
ANNUTIES**

SELİN DEĞİRMENCİ

YRD. DOÇ. DR. ŞULE ŞAHİN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2014

SELİN DEĞİRMENCİ'nin hazırladığı “Türkiye Hayat Annüite Ürünlerindeki Uzun Ömürlülük Risklerinin Menkul Kıymetleştirilmesi” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Sevtap Kestel
Başkan

Yrd.Doç.Dr. Şule Şahin
Danışman

Doç. Dr. Kasırga Yıldırak
Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/06/2014

Selin Değirmenci

ÖZET

TÜRKİYE HAYAT ANNÜİTE ÜRÜNLERİNDEKİ ÖLÜMLÜLÜK RİSKLERİNİN MENKUL KIYMETLEŞTİRİLMESİ

SELİN DEĞİRMENCİ

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule Şahin

Haziran 2014, 87 sayfa

Ölümlülük oranı bir gruptaki ölen sayısının ölçüsüdür. Zaman içerisinde bireylerin beklenen yaşam sürelerinin artması sigorta şirketleri için bir risk oluşturmaktadır. Tahmin edilenden daha uzun süre yapılması gereken ödemeler sigorta şirketlerinin hesaplarında kayıplara yol açmaktadır. İnsanların beklenenden daha uzun süre yaşamaları riski uzun ömürlülük riski olarak adlandırılmaktadır.

Bu tezin amacı uzun ömürlülük risklerine karşı korunma sağlamak, risk yönetim aracı olarak yaşam swaplarını kullanarak böyle bir işlemi menkul kıymetleştirmek, fiyatlandırmak ve Türkiye verisini kullanarak uygulamasını yapmaktır. Çalışmada uzun ömürlülük riski incelenmiş ve Türkiye için ölümlülük Lee-Carter modeli, beta ve gamma dağılımlı Olivier-Smith modelleri yardımı ile modellenmiştir. Bu modeller kullanılarak yaşam swaplarının primi farklı ölümlülük varsayımları için hesaplanmıştır.

Yaşam swapları en az bir getirisinin yaşam indeksine bağlı olduğu ve bu getirilere bağlı olarak elde edilen nakit akışlarının gelecekte bir tarihte takas edilmesi üzerine yapılan sözleşmelerdir. Yaşam swaplarının fiyatlandırılabilmesi için ilk adım ölümlülüğün modellenmesidir. Yaşam swapının değişken ödemeleri, gamma

ve beta dağılımlı Olivier-Smith modeli ve Lee-Carter modeli ile tahmin edilen yaşam olasılıkları ile hesaplanmıştır. Elde edilen yaşam olasılıklarının Q risk nötral fiyatlandırma ölçütü altında fiyatlandırılması amacı ile Wang dönüşümü kullanılmıştır. Riskin piyasa fiyatının farklı değerleri, farklı faiz oranları ve farklı ölümlülük modelleri için swapın değişken ödemeleri elde edilmiştir. Swapın sabit ödemeleri ise temel alınan yaşam tablosuna göre hesaplanmış ve swapın her iki ödemelerinin bugünkü değerlerini birbirlerine eşitleyecek swap primleri elde edilmiştir.

Elde edilen swap primleri incelendiğinde primlerin faiz oranı ve riskin piyasa fiyatının değişimlerinden önemli ölçüde etkilenmediği görülmüştür. Swap priminin hesaplanmasında en önemli etkenin seçilen ölümlülük modeli olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yaşam swapları, ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi, Lee-Carter modeli, Olivier-Smith modeli, Wang dönüşümü, Türkiye hayat tabloları.

ABSTRACT

SECURITIZATION OF MORTALITY RISKS IN TURKEY LIFE ANNUITIES

Selin Değirmenci

Master of Science, Department of Actuarial Science

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Şule Şahin

June 2014, 87 Pages

Mortality rates are the measure of number of deaths in a society. There has been a great improvement in mortality rates in recent years. The increase in life expectancy of individuals poses a risk for insurance companies. If people live longer than anticipated, insurance companies make losses on their annuity books. The risk that mortality rates might be higher than anticipated is called the longevity risk.

The aim of this paper is hedging longevity risk, securitization of longevity risks with survivor swaps and price survivor swaps using Turkey Life Tables. In this paper we examine the longevity risk and Turkey's mortality modelled by Lee-Carter model, Olivier-Smith model with beta and gamma distributions. We calculate survivor swap premium for different mortality scenarios with this models.

Survivor swap is an agreement to exchange cash flows in the future based on the outcome of at least one survivor index. The first step to price the survivor swaps is

to model the mortality. . The random payment of longevity swaps is calculated with survivor rates which are projected by Lee-Carter model and Olivier-Smith model with gamma and beta distributions. In order to price the random payments under Q risk neutral pricing measure we use Wang transform. We calculate random payments of swap for different market prices of risk, different interest rates and different mortality models. The fixed payments of the swap are calculated using underlying life table. Swap premium is the rate which equates the present values of fixed payments and random payments.

As a result we find that swap premiums are not significantly affected by the market price of risk and interest rates. We conclude that the most important factor is the mortality model to get fair value of the swap.

Key words: Survivor swaps, securitization of mortality, Lee-Carter model, Olivier-Smith model, Wang transform, Turkey life tables.

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam boyunca benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, değerli katkı ve eleőtirileriyle yol gösteren, beni her zaman sabırla dinleyen ve teşvik eden çok değerli danıőmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Şule ŞAHİN'e,

Önemli yorum ve değerlendirmeleri ile katkıda bulunan jüri üyeleri Sayın Doç. Dr. Kasırğa Yıldırak ve Doç. Dr. Sevtap Kestel'e,

Bu süreç boyunca beni hiç yalnız bırakmayan ve her zaman destekleyen arkadaşlarım Rümeysa Karataő, Bükre Yıldırım ve Fikret Őimőek'e,

Son olarak sevgi ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Önceki Çalışmalar	2
2. UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİ VE MENKUL KIYMETLEŞTİRİLMESİ	7
2.1. Uzun Ömürlülük Riski	7
2.2. Uzun Ömürlülük Riskinin Menkul Kıymetleştirilmesi	10
2.2.1. Uzun Ömürlülüğe Bağlı Menkul Kıymetler İçin Piyasa Paydaşları	11
2.2.2. Ölümlülüğe Bağlı Menkul Kıymetler	12
3. SWAPLAR	15
3.1. Swap Piyasaları.....	16
3.2. Swap İşlemleri	18
3.3. Swap Piyasalarının İşleyişi	19
3.3.1. Finansal Aracıların Rolü	19
3.3.2. Swap Depoları.....	20
3.3.3. Fiyatların Kote Edilmesi.....	20
3.3.4. Pazar Belirleyiciler ve Brokerlar.....	21

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
3.4. Swap Türleri	22
3.4.1. Para Swapı	23
3.4.2. Öz Kaynak Swapları	23
3.4.3. Mal Swapları.....	24
3.4.4. Faiz Swapları.....	24
3.4.4.1. Faiz Swaplarının Yapısı.....	24
3.4.4.2. Faiz Swaplarının Fiyatlandırılması	25
3.5. Swapların İşleminin Avantajları	26
3.6. Türev Piyasalar ve Türkiye	27
3.6.1. Türkiye’de Swap İşlemleri.....	28
4. YAŞAM SWAPLARI VE FİYATLANDIRMA	29
4.1. Yaşam Swapları	29
4.1.1. Yaşam Swaplarının Avantajları	29
4.1.2. Yaşam Swapı Türleri	30
4.1.2.1. Tek Ödemeli Yaşam Swapları	30
4.1.2.2. Vanilla Yaşam Swapları.....	30
4.1.2.3. Diğer Yaşam Swapları	31
4.1.3. Yaşam Swaplarının Kullanım Alanları	31
4.1.3.1. Sigorta Şirketleri Tarafından Kullanımları	31
4.1.3.2. Diğer Yatırımcılar Tarafından Kullanımları	33
4.1.3.3. Spekülatif Kullanımı.....	33

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
4.2. Ölümlülüğün Vade Yapısı	34
4.2.1. Bütünsel Ölümlülük Riski İçin Model	35
4.2.2. Lee-Carter Modeli.....	36
4.2.2.1. Model Parametrelerinin En Küçük Kareler İle Tahmini	38
4.2.2.2. Tekil Değer Ayrıştırma Yöntemi.....	38
4.2.2.3. İkinci Aşama Kestirimi	40
4.2.3. Olivier ve Smith Ölümlülük Modeli	41
4.3. Fiyatlandırma.....	46
4.3.1. Vanilla Yaşam Swaplarının Fiyatlandırma Yapısı	46
4.3.2. Fiyatlandırma Yöntemleri.....	47
4.3.2.1. Sigorta Fiyatlandırmasının Temelleri	47
4.3.2.2. Finansta Fiyatlandırma	50
4.3.2.3. Aktüeryal ve Finansal Fiyatlandırma.....	53
5. UYGULAMA	61
5.1. Lee-Carter Ölümlülük Modeli İle Fiyatlandırma	61
5.2. Gamma Dağılımlı Olivier-Smith Modeli İle Fiyatlandırma	66
5.3. Beta Dağılımlı Olivier-Smith Modeli İle Fiyatlandırma	69
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	76
KAYNAKLAR	78
EKLER	83
ÖZGEÇMİŞ	87

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Yıllara Göre Nüfus Artışı.....	9
Şekil 5.1. a_x Parametre Değerleri	62
Şekil 5.2. b_x Parametre Değerleri	63
Şekil 5.3. $k_t^{(2)}$ Parametre Değerleri.....	64
Şekil 5.4. k_t Parametrelerinin 2020 Yılına Kadar Öngörüsü	65
Şekil 5.5. Gamma Dağılımlı O-S ve Ham Verinin Karşılaştırılması	68
Şekil 5.6. Beta Dağılımlı O-S İle Artan Yaşam Olasılıklarının ve Ham Verinin Karşılaştırılması.....	71
Şekil 5.7. Beta Dağılımlı O-S İle Azalan Yaşam Olasılıkları İle Ham Verinin Karşılaştırılması.....	73
Şekil 5.8. Gamma ve Beta Dağılımlı O-S Modeli ile Hesaplanan Yaşam Olasılıklarının Ham Veri ile Karşılaştırılması	74

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.1. Lee-Carter Modeline Göre Primler.....	66
Çizelge 5.2. Gamma Dağılımlı O-S İle Elde Edilen Primler	69
Çizelge 5.3. Beta Dağılımlı O-S İle Artan Yaşam Olasılıklarına Göre Prim	72
Çizelge 5.4. Beta Dağılımlı O-S İle Azalan Yaşam Olasılıklarına Göre Prim.....	73
Çizelge 5.5. Modellere Göre Hesaplanmış Primler.....	74

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ADNKS	Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi
EIB	European Investment Bank
EKK	En Küçük Kareler
LC	Lee-Carter Yöntemi
O-S	Olivier-Smith Modeli
SPV	Özel Amaç Kurumu
SS	Yaşam Swapları
TDA	Tekil Değer Ayırıştırma Yöntemi
TÜİK	Türkiye İstatistik Kurumu
VSS	Vanilla Yaşam Swapları
CAPM	Sermaye Varlık Fiyatlandırma Modeli
CAT	Katastrofik

1.GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş

Uzun ömürlülük riski bireylerin beklenilenden daha uzun süre yaşamaları riskidir. Tıp alanındaki gelişmelerle birlikte insanların beklenen yaşam sürelerinde önemli bir artış gözlemlenmiştir.

Emeklilik şirketleri bireylere emekli oldukları zamandan ölüm zamanlarına kadar periyodik olarak belirli bir ödemeyi taahhüt etmektedir. Beklenen yaşam süresinin artması sigorta şirketleri için tehlike oluşturmaktadır. Beklenilenden daha uzun süre yapılmak zorunda kalınan ödemeler sigorta şirketlerinin annüite hesaplarında kayıplara yol açabilmektedir.

Geçmişte uzun ömürlülük riskinden korunabilmenin tek yolu reasürans anlaşmaları yapmaktı. Ancak reasürans anlaşmalarının maliyetleri oldukça yüksek olduğu için annüite satan şirketler bu anlaşmaları belirli sınırlar çerçevesinde yapmaktaydılar. Uzun ömürlülük riskinden daha az maliyetle korunma ihtiyacı ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi işleminin ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler, annüite ürünleri sağlayan kurum ve kuruluşlara bütünsel uzun ömürlülük riskinden korunma olanağı sunulmaktadır. Annüite ürünlerini satın alan kişilerin beklenenden daha uzun yaşamaları durumunda uzayan ödeme periyotları nedeniyle daha fazla hasara maruz kalan sigortacılar uzun ömürlülük menkul kıymetlerine sahip olduklarından, daha fazla kupon ödemesi alarak, hasarlarını dengeleyebilmektedir (Cairns, Blake, Dowd, 2005).

Bu çalışmada Türkiye için uzun ömürlülük riski ve bu riskin menkul kıymetleştirilmesi incelenmiştir. Uzun ömürlülük riskinden korunmada risk yönetim aracı olarak yaşam swapları kullanılmıştır. Swaplar Türkiye’de bankalar tarafından yabancı para birimlerinde kaydedilen dalgalanmaları minimize etmek amacı ile kullanılmaktadır ancak sigorta piyasasında kullanımı bir ilk olacaktır.

Yaşam swapları getirisi en az bir yaşam indeksine bağlı olarak hesaplanan nakit akışları dizisinin, gelecekte bir tarihte takas edilmesi üzerine yapılan sözleşmelerdir. Yaşam swapları ölümlülüğe bağlı riskleri yönetmede ve bu

risklerden korunmada oldukça ideal araçlardır. Swaplar esnek bir yapıya sahip oldukları için de tarafların her türlü isteklerini karşılayabilmektedir.

Yaşam swaplarının fiyatlandırılabilmesi için öncelikle ölümlülüğün modellenmesi gerekmektedir. Uzun ömürlülüğe bağlı türevleri fiyatlandırmak için faiz oranı ve anlık ölümlülük oranı arasındaki benzerlikten faydalanılabilir. Bu çalışmada bu benzerlik dikkate alınmış ve arbitrajsız fiyatlandırma yöntemlerinden yararlanılarak yaşam swapı fiyatlandırılmıştır.

Yaşam olasılıklarını modellemek amacı ile kısa vadeli modellerden Lee-Carter ve forward ölümlülük modellerinden Oliver-Smith ölümlülük modeli kullanılmıştır. Risksiz bir fiyatlandırma yapılabilmesi amacı ile ölümlülük modelleri ile elde edilen olasılıklara Wang dönüşümü uygulanmıştır. Wang dönüşümü finansal ve aktüeryal fiyatlandırma teorilerini birbirine bağlayan bir risk fiyatlandırma yöntemidir. Çalışmanın amacı Türkiye için farklı ölümlülük modelleri, farklı faiz oranları ve riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ile swap primini hesaplamak ve elde edilen değerleri karşılaştırarak analiz yapmaktır.

Çalışmanın Birinci Bölümü'nde ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler ve yaşam swapları ile ilgili yapılan önceki çalışmalar anlatılmıştır. İkinci Bölümü'nde ise uzun ömürlülük riski ve uzun ömürlülük riskinin menkul kıymetleştirilmesi incelenmiştir. Çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde swaplar detaylı bir şekilde ele alınmış ve swap piyasasının işleyişi hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmanın Dördüncü Bölümü'nde yaşam swapları ve yaşam olasılıklarının modellenmesinde kullanılacak olan modeller ele alınmıştır. Ayrıca sigorta ve finansal fiyatlandırma teorileri incelenmiş, swap fiyatlandırmasında kullanılacak olan risksiz fiyatlandırma yöntemi olan Wang dönüşümü anlatılmıştır. Çalışmanın Beşinci Bölümü'nde Türkiye yaşam olasılıkları Lee-Carter modeli ve gamma ve beta dağılımlı Olivier-Smith modeli ile modellenmiştir. Elde edilen yaşam olasılıklarına Wang dönüşümü uygulanmış ve swap işlemi fiyatlandırılmıştır.

1.2. Önceki Çalışmalar

Ölümlülük ya da uzun yaşama riski bir süredir sigorta şirketleri için tehlike teşkil etmektedir. Bu durum annüite piyasasını oldukça cazip hale getirmiştir.

Geçmişte uzun ömürlülük riskinden korunmanın tek yolu reasürans anlaşmaları yapmaktı. Fakat reasürans anlaşmalarının maliyetleri çok yüksek olduğu için, emeklilik şirketleri ve annüite satan şirketler anlaşmalarını belirli limitlerde yapmak zorunda kalıyorlardı. Uzun ömürlülükten korunmada reasürans anlaşmalarının yetersiz kalması uzun ömürlülük türevlerinin ne kadar gerekli olduğunu göstermektedir (Blake, 2008; Neville and Ho, 2006).

Ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi fikri ilk kez 1998 yılında Samuel H. Cox'un bir konuşmasında gündeme getirilmiştir. Uzun ömürlülük bonoları, annüite ürünleri sağlayan kurum ve kuruluşlara bütünsel uzun ömürlülük riskinden korunma imkanı sunmaktadır. Bireylerin beklenenden daha uzun yaşaması durumunda, sigortacılar uzayan ödeme dönemleri nedeniyle hasara maruz kalmakla birlikte; uzun ömürlülük bonosuna sahip olduklarından daha fazla kupon ödemesi alarak, hasarlarını dengeleyebilmektedirler (Denuit, Devolder, Goderniaux, 2007).

Mitchell, Poterba, Warshawsky ve Brown (1999) bireysel annüite sözleşmelerinin on sene öncesine göre daha cazip hale geldiğini göstermişlerdir. Bu sebeple potansiyel ölümlülük gelişmeleri sigorta şirketleri için önemli bir risktir ve bundan etkili bir şekilde korunmaları gerekmektedir.

Blake ve Burrows (2001) hükümetlerin, annüite ürünleri sağlayan şirketlerin bütünsel ölümlülük risklerinden korunmalarına yardımcı olabilmek için yaşam bonoları çıkarmaları gerektiğini savunmuşlardır. Bu bonoların kupon ödemeleri, belirli bir yaştaki grubun bir süre yaşaması olasılığına bağlı olarak hesaplanan bir orana bağlı olacaktır ve bu duruma örnek olarak kupon ödemeleri yaşam indeksine bağlı olarak yapılan annüite bonolarını vermişlerdir. Blake ve Burrows yaşam bonolarının hayat sigortası şirketleri için ölümlülük riskinden korunmada önemli bir rol oynadığını göstermişlerdir. Fakat yaşam bonolarının piyasada yeterli talep göremeyebileceğini düşünmüşler ve buna çare olarak yaşam bonolarının devletler tarafından çıkarılmasını önermişlerdir. Ancak bu öneri birçok tartışmaya sebep olmuştur (Dowd et al, 2006).

2003 yılının Aralık ayında Swiss Re ilk ölümlülük menkul kıymeti olan, üç yıl vadeli bir katastrofik hayat bonusu çıkarmıştır. Bu bono ölümlülükte meydana gelebilecek katastrofik yükselmelere karşı Swiss Re'nin maruz kaldığı riske karşı korunma sağlamıştır. Bononun ödemeleri beş ülkenin ölümlülük indeksine bağlı olarak

hesaplanmıştır. Ölümlülük oranlarında bir gelişme olduğunda yatırımcılar yüksek kupon ödemeleri elde edebilecekler ve sigorta şirketleri de kayıplarını dengeleyebileceklerdir (Chang, Chen, Tsay, 2010).

Swiss Re'nin yaşam bonosunu takiben BNP Paribas tarafından ödemeleri 2003 yılındaki İngiliz ve Galler hayat tablosundaki 65 yaşındaki bireylerin yaşam indeksine ve başlangıçta 50 milyon pound değerinde annüite ödemesine bağlı olan bir bono ihraç edilmiştir. Bu sırada Avrupa Yatırım Bankası (European Investment Bank, EIB) 2004 yılının Kasım ayında 540 milyon pound değerinde bir bono çıkarmıştır. EIB/BNP bonosunun vadesi Swiss Re'nin bonosunun vadesine göre daha uzun süreli olmasına rağmen bu bono beklenildiği kadar talep görmemiş ve 2005 yılının sonlarında piyasadan geri çekilmiştir (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

Dowd (2003) yaşam bonolarının sigorta şirketleri için neden yararlı bir risk yönetim aracı olduğunu incelemiştir. Aynı zamanda yaşam riskinden korunmanın reasürans ve yaşam sözleşmeleri gibi alternatif yöntemlerini de göstermiş ve bunları karşılaştırmıştır. Reasürans genellikle standart korunma yöntemidir fakat yaşam bonolarına göre oldukça pahalıdır. Ölümlülük gelişmelerinden korunabilmek için gerekli sermaye ya da rezerv seviyesi belirlenmiş dahi olsa bu çözüm oldukça pahalıdır ve yeterli sermaye seviyesinin ne olduğunun belirlenmesi oldukça güçtür.

Lin ve Cox (2005) ölümlülük bonoları ve swapları gibi ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler üzerine çalışmışlar ve bu menkul kıymetleri fiyatlandırmışlardır. İlk olarak gelecek ölümlülük oranlarının belirlenmiş olduğunu varsayımlardır. Bu varsayım altında ölümlülük bonoları için kapalı formda bir formül elde etmişlerdir. İkinci olarak gelecek ölümlülük oranlarını stokastik kabul etmişler ve bunlara ölümlülük oranlarının rasgele şokları için beta dağılımını uygulamışlardır; ancak gelecek ölümlülük oranları belirlenmediğinde kapalı formda bir formül elde edilememektedir. Ölümlülük bonolarını fiyatlandırmak için ise Monte Carlo benzetimini kullanmışlardır.

Dowd et al. (2006), ölümlülüğe bağlı risklerin yönetiminde, korunmada ve alım-satımının yapılmasında yaşam swaplarının olası kullanımlarını incelemiştir.

Aynı zamanda yaşam swaplarının bonolara göre daha avantajlı olduğuna dikkat çekmişlerdir (Chang, Chen, Tsay, 2010).

Dünyada ilk kez kamuya duyurulan yaşam swapı Swiss Re ve Friends's Provident hayat sigortası şirketi arasında 2007 yılının Nisan ayında yapılmıştır. Bu swap sadece uzun ömürlülük riskinin transferini kapsamaktadır ve başka herhangi bir finansal araca ya da işleme bağlı değildir. Swap anlaşması Friends's Provident'in 2001 yılının Temmuz ayı ve 2006 yılının Aralık ayı arasında yazılmış 78000 adet emeklilik annüite sözleşmesine bağlı olarak yapılmıştır. Poliçelerin yönetimi Friends's Provident'in elinde bulunmaktaydı. Swiss Re ise uzun ömürlülük riskinin takası için bir prim karşılığında ödemeleri yapmaktaydı. Özel olarak belirtilmelidir ki bu swap, finansal sözleşmelerin kuralları çerçevesinde değil, sigorta sözleşmesinin yasal kuralları çerçevesinde düzenlenmiştir.

Swaplarla ilgili bir başka gelişme 2007 yılının Aralık ayında Goldman Sachs'ın 5 ve 10 yıl vadeli standartlaştırılmış swapların kombinasyonundan oluşan QxX.LS olarak adlandırılan aylık indeksleri yayınlamaya başlamasıdır. Bu indeks, hayat poliçesi satan şirketlerin veri tabanlarından 65 yaş üzeri 46290 birey üzerinden hesaplanmıştır.

Geniş kapsamlı bir çalışma ise Dahl ve arkadaşlarının 2008 yılındaki çalışmasıdır. Bu çalışmada hayat sigortası portföylerindeki ölümlülük riskinden yaşam swapı ile dinamik olarak korunabilme durumu incelenmiştir. Çalışmadaki en önemli nokta swapın dayanak referans popülasyonunun, korunma sağlanan portföyden farklı olabileceğidir. Ayrıca temel oran riskinin (basis risk) sonucunda oluşan etkileri detaylı bir sayısal örnek yardımı ile açıklamışlardır. Çözülebilirlik özelliği sağlayan affine bir model (affine model) geliştirmişlerdir. Bu modelin kullanımı ölümlülük riskinin sonuçlarını hafifletici korunma stratejilerinin geliştirilmesine yardımcı olmaktadır. Bu çalışmada affine modelin analitik çözülebilirliği, dinamik bir korunma stratejisi uygulayabilme ve korunmanın etkinliğini geliştirme imkanı sağlamaktadır. (Cairns, Blake, Dowd, 2008)

Yaşam swapları ile ilgili üçüncü anlaşma ise JP Morgan ve Lucida sigorta şirketi arasında 2008 yılının Ocak ayında yapılan anlaşmadır. Bu anlaşma ile birlikte yatırımcılara, çeşitli popülasyonlardaki bireylerin yaşam sürelerine bağlı olarak uzun ömürlülük riski ile piyasalarda işlem yapmalarına olanak sağlanmıştır.

Anlaşmanın koşullarına göre banka, sigortacıdan aldığı sabit bir ödeme dizisi karşılığında dayanak annüite ürünlerinin sahiplerine emeklilik ödemeleri yapacaktır. Burada korunma sağlanan portföyün değeri 500 milyon pound iken, bankacı annüite sahiplerinin beklenilenden daha kısa süre yaşayacağını düşünmektedir. Bu nedenle swap anlaşmasına girmiştir. Sigortacı açısından ise, ileride karşı karşıya kalabileceği riskler ortadan kaldırılmıştır.

Yaşam sözleşmelerinin satılması ise bir diğer korunma yöntemidir. Bu durum sigorta şirketlerine ölümlülük gelişmelerinde uzun pozisyon sağlamaktadır, böylece annüite satarak hayat sigortalarındaki riskleri dengeleyebilmektedirler. Cox ve Lin (2007) yaşam risklerinde doğal korunma yöntemini tanımlayarak yaşam swapları ile yaşam risklerinden korunma yöntemini anlatmışlardır.

Lin ve Cox (2005) ve Dowd et al. (2006) ölümlülüğe bağlı ürünleri fiyatlandırmak amacı ile Wang dönüşümünü kullanmışlardır. Wang (2000, 2002) sigorta ve finansal fiyatlandırma teorilerini birbirine bağlayan yeni bir yaklaşım geliştirmiştir. Wang dönüşümünden faydalanarak birçok fiyatlandırma çalışması yapılmıştır. Dawson et al. (2009) çalışmasında yaşam swaplarını fiyatlandırmak için Wang dönüşümünü kullanmıştır. Olivier ve Smith (2004)'in ölümlülük modeli yardımı ile projekte edilmiş ölümlülük oranlarına Wang dönüşümünü uygulamışlar ve yaşam swapı fiyatlandırması yapmışlardır.

2. UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİ VE MENKUL KIYMETLEŞTİRİLMESİ

2.1. Uzun Ömürlülük Riski

Ölüm hızının zamanla azalması, bireyler için olumlu bir değişiklik ve azımsanmayacak önemde sosyal başarı olarak görülebilir; ancak, özel hayat annüite ürünlerinin ve kamu emeklilik sistemlerinin planlanmasını tehdit eder. Aslında sadece emeklilik sistemi değil, sosyal güvenlik sisteminin yaşlılık bakım hizmeti gibi bileşenleri de ölüm hızının değişiminden etkilenir. Benzer şekilde özel şirketler tarafından satılan diğer sigorta ürünleri de ölümlülükteki değişimlerden etkilenmektedir (Demircioğlu, Büyükyazıcı, 2013).

Çeşitli nedenlerden kaynaklanan ölümlülük riski üç farklı biçimde ortaya çıkmaktadır. Bu durumlar sırası ile şu şekilde açıklanabilir:

- a. Bir bireye ilişkin ortalama yaşam süresi, ait olduğu popülasyonun ortalama yaşam süresinden daha düşük ya da daha yüksek olabilir. Bu durumda ölüm oranları kimi yıllarda beklenenin üzerinde gözlemlenirken, kimi yıllarda ise beklenenin altında gerçekleşebilmektedir.
- b. Bir popülasyona ilişkin ortalama yaşam süresi beklenenden farklı olarak da gerçekleşebilir. Buna bağlı olarak popülasyona ilişkin gözlemlenen ölüm oranları, ölümlülük tablosunda öngörülen değerlerin altında ya da üzerinde olabilmektedir.
- c. Popülasyonda yer alan ölüm oranları; grip salgını, şiddetli iklim koşulları, doğal afetler gibi çeşitli sebeplere bağlı olarak ani sıçramalar yapabilmektedir.

Her üç durumda da, beklenen ölüm oranlarında çeşitli sapmalar ortaya çıkmaktadır.

(a) durumu, bireylerin beklenen ölüm oranlarında meydana gelen olası sapmaları göstermektedir. Hayat ve hayat dışı sigorta sektörü için oldukça geleneksel olan bu risk, “rastsal dalgalanma riski” olarak bilinmekte ve “süreç riski” ya da “sigorta riski” olarak adlandırılmaktadır. Uygun bir havuz etkisinin dikkate alınması ile süreç riskinden korunmak mümkündür. Portföyün yeterli büyüklükte olması, benzer poliçelerden oluşması ve geleneksel risk transfer yöntemlerine başvurulduğu takdirde riskin azaldığı gözlemlenmektedir.

(b) durumu riskin sistematik doğasına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum ilgili ölümlülük modelinin yanlış tanımlanmasından (gerçek ölümlülük değerlerinin kullanılan ölümlülük tablosunun öngördüğü değerlerden farklı olmasından) ya da ilgili parametrelerin (veri eksikliği nedeniyle) yanlış tahmin edilmesinden kaynaklanabilmektedir. İlk durum “model riski” olarak adlandırılırken, ikinci durum “parametre riski” olarak ifade edilmektedir. “Belirsizlik riski” kavramı ise, genellikle, model ve parametre riskini birlikte ifade etmek için kullanılmaktadır. Yetişkin ve ileri yaşlar dikkate alındığında, belirsizlik riski ölüm oranlarında ortaya çıkan (istenmeyen) azalmadan kaynaklanabilir. Bu durumda “uzun ömürlülük riski” kavram olarak belirsizlik riski yerine kullanılabilir. Uzun ömürlülük riskinin bütünsel ölümlülük ile ilişkili olduğu ve bu nedenle, havuz anlaşmaları ile bu riskten korunmanın mümkün olamayacağı söylenebilir.

(c) durumunda ise ölüm oranlarında ani ve kısa dönemli artışa neden olan “katastrofik risklerden” söz edilmektedir. (b) durumu ile benzer olarak, bütünsel ölüm oranları ile ilgili bir durum olduğu söylenebilir. (b) durumu ile (c) durumu, uzun ömürlülük riski açısından incelendiğinde, risklerin ortaya çıkışları ile birlikte geçen süre açısından farklılık gösterdikleri vurgulanmalıdır: (c) durumunda süre kısa iken; (b) durumunda süre uzundur ve etki muhtemelen kalıcı olmaktadır. Ölüm teminatları göz önüne alındığında, katastrofik riskten uygun bir şekilde korunmak gerektiği görülmektedir. Diğer taraftan hayat annüitesinde, yüksek ölüm oranları karı arttıracaktır. Bu tip riskleri yönetmekte geleneksel havuz anlaşmaları kullanılamamakla birlikte; çeşitlendirme (diversification) etkileri göz önüne alınarak, risk transferleri de yapılabilmektedir.

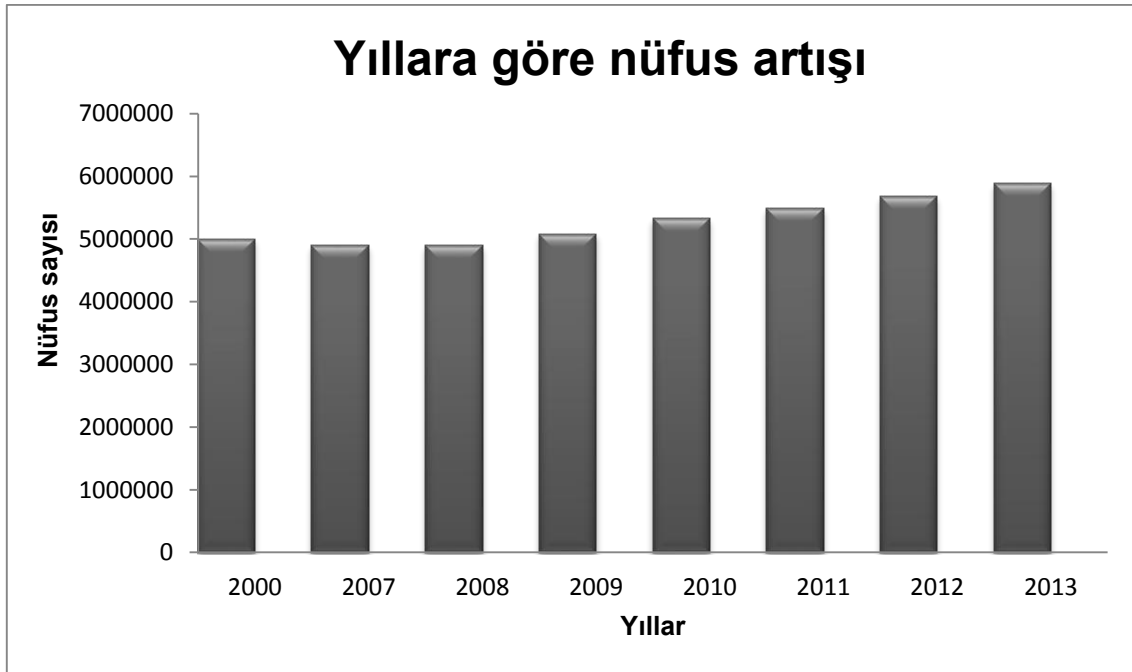
Ölüm oranlarının zaman içerisinde gösterdiği gelişim dikkate alındığında; uzun ömürlülük riski, yetişkin bireylerin ölüm oranlarında ortaya çıkan istenmeyen düşüşler olarak tanımlanmaktadır (Pitacco et al., 2009).

Uzun ömürlülük riski bireysel ve bütünsel seviyede incelenmektedir. Bireysel uzun ömürlülük riski için risk, uzun yaşayan bireyin birikimli varlığıdır. Bütünsel uzun ömürlülük riskinde ise, bir grubun üyelerinin ortalama olarak beklenenden daha uzun yaşaması riskidir. Bireysel uzun ömürlülük riski için risk yönetim araçları, devletler tarafından sağlanan sosyal güvenlik sistemleri, faydası belirli emeklilik planları ve hayat annüiteleri olarak uzun zamandır mevcuttur. Bütünsel uzun

ömürlülük riski olmadığında “büyük sayılar kanunu” emeklilik planları ve sigortacılar için uzun ömürlülük riskini yönetmekte yeterli olmaktadır. Fakat bu problemin bütünsel olduğu durumda uzun ömürlülük riskinin yönetimi oldukça güçleşmektedir (MacMinn, Brockett, Blake, 2006).

Yapılan araştırmalara göre Türk insanının yaşam süresinin 80 yılda iki katına çıktığı gözlemlenmiştir. 1930 yılında erkekler için beklenen ömür 40 yıl iken, kadınlar için 36 yıl olduğu; ancak 2009 yılında ortalama yaşam süresinin erkeklerde 71,7, kadınlarda ise 77 yıl olarak gerçekleşmiştir.

TÜİK'den alınan yıllara göre Türkiye genel nüfus sayım verilerinden yola çıkılarak 65 yaş ve üzeri bireylerin nüfus sayıları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. 2007 yılından itibaren 65 ve yaş üzeri yaşayan kişi sayısının sürekli olarak artış gösterdiği gözlemlenmektedir.



Şekil 2.1. Yıllara Göre Nüfus Artışı

Uzun ömürlülük riskine maruz kalan şirketler bu riskten değişik yollarla korunma sağlamaya çalışabilirler:

- i. Tahmin ettikleri ve yönetebilecekleri bir iş riski gibi kabul ederler.
- ii. Uzun ömürlülük risklerini çeşitlendirebilirler (örneğin; farklı ürünler oluşturmak, sosyo-ekonomik gruplara ayırmak gibi). Buna örnek olarak

doğal korunma verilebilir. Hayat sigortası ve annüitelerin birleşimini içeren doğal korunmadan faydalanarak portföylerini dengede tutabilirler.

- iii. Çeşitli reasürans anlaşmaları yapabilirler. Uzun ömürlülük riskinin bir kısmını ya da tamamını devredebilirler.
- iv. Uzun ömürlülük riskinden ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler yardımı ile korunabilirler. Bu tür menkul kıymetler tezgah üstü piyasalarda işlem görmektedir (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

Bu çalışmada uzun ömürlülük risklerinden korunmak amacı ile uzun ömürlülüğe bağlı menkul kıymetler kullanılmıştır.

2.2. Uzun Ömürlülük Riskinin Menkul Kıymetleştirilmesi

Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler, ödemeleri bir uzun ömürlülük ya da ölümlülük indeksine bağlı olan finansal sözleşmelerdir. Uzun ömürlülük risklerinden ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler ile korunmanın sigortacıya bir maliyeti vardır. Sigortacının uzun ömürlülük menkul kıymetleri ile avantajlı duruma geçebilmesi için bu işlemi düşük maliyetle yapması gerekir. Bunu da finansal piyasalar aracılığı ile sağlayabilir. Ölümlülüğün finansal piyasalara devredilmesi ise ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi ile mümkün olmaktadır. Menkul kıymetleştirme sigorta şirketinin ya da emeklilik planlarının bilançolarından varlıklarını, yükümlülüklerini ya da nakit akışlarını alarak onları alım-satımı yapılabilir menkul kıymetler aracılığı ile üçüncü kişilere devretme sürecidir. Bu menkul kıymetler de ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler olarak bilinmektedir ve birçok türev ürünü içermektedir (Cipra , 2010). Ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi işlemi hayat sigortası piyasasına yeni bir risk transferi işlemi kazandırmıştır. Ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi sayesinde katastrofik kayıplar finansal piyasalara devredilerek hayat sigortası endüstrisinin risk kabul kapasitesi artırılmıştır (Lin ve Cox, 2007). Menkul kıymetleştirme işleminin amacı;

- i. Gelecekteki nakit akışlarının satılarak likiditenin artırılması,
- ii. Olası ödemeler ya da rastsal nakit akışları ortaya çıktığında riskin transfer edilmesidir.

Bir menkul kıymetleştirme işlemi organizasyon açısından çok daha karmaşıktır. İşlem, poliçelerin yazıldığı sigorta piyasasında başlamaktadır. Böylece yazılan

poliçelere ilişkin nakit akışları en azından kısmen menkul kıymetleştirilebilmektedir. Sonrasında sigortacı, nakit akışlarına ilişkin haklarının bir kısmını özel bir amaç kurumu (a special purpose vehicle) olan SPV'ye transfer etmektedir. SPV, sigortacının sermaye piyasasına bağlanması için tasarlanan bir çeşit finansal kurumdur. Seçilen nakit akışlarına dayanan menkul kıymetler, SPV tarafından çıkarılmakta ve sermaye piyasasında kazanç sağlamaktadır. Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetlerin teknik kazancı, verilen popülasyonun ölümlülüğüne bağlı olmaktadır. Bu menkul kıymetler, bir popülasyona ilişkin ölümlülük indeksinin çeşitli türev araçlara uygulanması yolu ile elde edilmektedir (Pitacco et al., 2009).

2.2.1. Uzun Ömürlülüğe Bağlı Menkul Kıymetler İçin Piyasa Paydaşları

Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetlere geçmeden önce bu menkul kıymetlerin alım satımını yapmak isteyebilecek tarafları incelemek gerekmektedir.

- i. Korunmacılar (Hedgers): Korunmacılar maruz kaldıkları uzun ömürlülük risklerini finansal piyasalara devrederek korunma sağlamaya çalışan piyasa paydaşlarıdır. İstemediği bir uzun ömürlülük riskine sahip tarafın, riskini devredebilmesi için bu riski üstlenmek isteyen taraflara ödeme yapmasıdır. Hayat sigortası ürünü satan bir şirketin uzun ömürlülük riskini sigorta ettirerek veya riski sermaye piyasalarına devrederek korunma sağlaması bu duruma örnek olarak verilebilir.
- ii. Genel Yatırımcılar (General Investors): Bankalar ya da korunma fonları gibi sermaye piyasası şirketleri uzun ömürlülük riskinden kazanç elde etmek isteyebilirler. Standart finansal piyasa risk faktörleri ile uzun ömürlülük riski arasındaki düşük korelasyon sebebiyle bu işlemi yapmak isteyebilirler.
- iii. Spekülatörler ve Arbitrajcılar (Speculators and Arbitrageurs): Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetlerin işlem gördüğü piyasalar spekülatörlerin ilgisini çekebilir. Spekülatörler bireysel menkul kıymetlerin fiyatlarındaki değişime göre kısa süreli işlem yapan kişilerdir. Spekülatörlerin aktif olarak uzun ömürlülük piyasasına dahil olması ile piyasa likiditesi artacaktır. Arbitrajcılar ise ilgili menkul kıymetlerin herhangi bir normal olmayan fiyat hareketlerinden fayda sağlamaya çalışırlar.
- iv. Devletler (Governments): Hükümetlerin ölümlülüğe bağlı menkul kıymetlerle ilgilenmelerinin birkaç farklı nedeni olabilir. Böyle piyasaları teşvik etmek

isteyebilir ve uzun ömürlülük riskine maruz kalmış finansal kurumlara yardım etmek isteyebilirler. Bu tarz yardımlarla şirketlerin maruz kaldıkları riski azaltabilir ve onları emeklilik fonları yardımıyla iflas etmekten kurtarabilirler. Devletler ölümlülüğe bağlı menkul kıymetleri kendi maruz kaldıkları uzun ömürlülük risklerini yönetebilmek için de kullanabilirler.

- v. **Düzenleyiciler (Regulators):** Düzenleyicilerin iki temel görevi vardır: Birincisi düzenli, adil ve verimli bir piyasanın desteklenmesi yoluyla finansal istikrarın geliştirilmesi; ikincisi ise perakende müşterilerine adil bir anlaşma sağlayabilmektir.
- vi. **Diğer Paydaşlar (Other Stakeholders):** Menkul kıymet yöneticileri ve organize piyasalar diğer paydaşları oluşturabilirler (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

2.2.2. Ölümlülüğe Bağlı Menkul Kıymetler

Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir:

- i. **Uzun Ömürlülük Bonoları (Longevity Bonds):** Uzun ömürlülük bonolarının birçok çeşidi vardır; fakat genel olarak iki temel kategoriye ayrılmaktadır. Bunlardan birincisi 'principal at risk' uzun ömürlülük bonolarıdır. Swiss Re'nin bonoları bu türe bir örnektir. Bu tür uzun ömürlülük bonolarında yatırımcılar ölümlülüğe bağlı olarak bütün yatırımlarını riske ederler. Uzun ömürlülük bonusu türlerinden ikincisi ise 'kupon-bazlı (coupon-based)' ölümlülüğe bağlı bonolardır. EIB/BNP bonoları kupon bazlı bonolara bir örnektir. Burada ödemeler belirli bir ölümlülük indeksine bağlı olarak yapılmaktadır. Bu tür bonolarda yatırımcı eğer ölümlülük indeksi belirli bir sınırı aşarsa kuponlarının bir kısmını ya da tamamını kaybedebilir. Uzun ömürlülük bonolarının her iki türü de uzun ömürlülük riskinden korunma amaçlı tasarlanmış araçlardır. Birçok çeşit uzun ömürlülük bonusu vardır. Sıfır-kupon uzun ömürlülük bonoları, klasik uzun ömürlülük bonoları, ertelenmiş uzun ömürlülük bonoları bunlardan birkaçıdır.
- ii. **Yaşam Swapları (Survivor Swaps):** Yaşam swapları getirisi en az bir yaşam ya da ölüm indeksine bağlı olan ve gelecekte bir tarihte nakit akışlarının takas edilmesi üzerine anlaşılan sözleşmelerdir. Yaşam swapları

en az bir ödemesi yaşam indeksine bağlı olan swap olarak da tanımlanabilir (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

Karşı taraf riskinin olmadığı varsayımı altında sigortacı reasürans işleminden elde edebileceği kadar fayda sağlayabilir (Lin ve Cox, 2007).

iii. **Ölümlülüğe Bağlı Vadeli Sözleşmeler (Mortality Futures):** Bir futures sözleşmesinin temel içeriği (a) dayanak fiyat süreci olan $X(t)$ 'nin tanımlanması, (b) sözleşmenin vadesi olan T 'nin belirlenmesinden oluşmaktadır. Klasik futures sözleşmelerinde fiyat süreci, futures fiyatlarından belirlenmektedir. Ölümlülüğe bağlı vadeli sözleşmelerde ise fiyat sürecinin belirlenmesinde kullanılan dayanak varlık ölümlülük indeksleridir.

iv. **Ölümlülük Opsiyonları (Mortality Options):** Opsiyonlar, dayanak değişkenlerin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olarak belirlenen ödemeleri içeren sözleşmelerdir. Ölümlülük opsiyonları ise ödemeleri, ödeme tarihindeki bir dayanak ölümlülük tablosuna bağlı olan opsiyon sözleşmelerinin karakteristik özelliklerini taşıyan sözleşmelerdir (Cairns et al., 2006). Ölümlülük oranlarının ne olacağından çok oynaklığı üzerine olan tahminlerden kazanç sağlamak isteyen spekülâtörler için oldukça kazançlı sözleşmelerdir.

Ölümlülüğe bağlı menkul kıymetler bonoların, swapların, vadeli sözleşmelerin ve opsiyonların klasik özelliklerini taşımaktadır; ancak tezgâh üstü piyasalarda işlem görenler ile organize piyasalarda işlem görenler arasında farklar vardır. Yaşam swapları tezgâh üstü piyasalarda işlem görürken, ölümlülüğe bağlı vadeli işlemler organize piyasalarda işlem görmektedir. Tezgâh üstü piyasalar herhangi bir organize borsaya sahip olmayan finansal piyasalardır. Bu piyasaların temel özelliği finansal ürün çeşitliliği ve bu ürünlerin özelliklerinin tümüyle sözleşmeye taraf kurum ya da kişilerce belirlenebilmesidir. Organize piyasalar ise işlemlerin belirli kurallara göre yapıldığı piyasalardır. Bu piyasaların binaları, üyeleri, yasalari, kurallari ve yönetenleri vardır. Organize piyasalarda, piyasayı etkileyebilecek bilgiler, yatırımcılar tarafından kolay ve doğru bir şekilde elde edilebilmektedir. Organize piyasalarda tam rekabet koşullarının geçerli olması, alıcı ve satıcıların tek başlarına piyasayı etkileyebilme gücüne sahip olmaması gerekmektedir. Organize piyasalara, bankalar ve menkul kıymet borsaları örnek verilebilir. Tezgâh

üstü piyasalarda işlemi yapacak olan kişinin ihtiyaçları doğrultusunda anlaşma yapılabilir, organize borsalarda ise piyasa likiditesi daha yüksektir.

Bir diğer fark ise kredi riskidir. Borsada işlem gören menkul kıymetlerde kredi riski borsanın kendisi tarafından her iki tarafın karşısında yer alması ile karşılanmaktadır. Borsa her bir işlemde karşı taraf gibi yer alır ve bütün işlemcileri garanti altına alır, zorunlu peşin ödeme koşulu ile de kendisini de garanti altına alır. Fakat tezgah üstü piyasalarda durum biraz farklıdır. Bu piyasalarda anlaşmalar iki taraflı yapılmaktadır ve en az bir ya da iki taraf olası kredi riskine maruzdur (Blake, Cairns, Dowd, 2006). Ancak birçok çalışmada karşı taraf riskinin olmadığı varsayımı altında fiyatlandırma yapılmıştır. Bu çalışmada da karşı taraf riskinin olmadığı varsayımı altında fiyatlandırma yapılmıştır.

Çalışmada risk yönetim aracı olarak, ölümlülüğe bağlı menkul kıymetlerden yaşam swapları (survivor swaps) kullanılmıştır. Uzun ömürlülüğe bağlı swapları incelenmeden önce swapların işleyişinin, türlerinin ve fiyatlandırılmasının incelenmesi yaşam swaplarının anlaşılması açısından faydalı olacaktır.

3. SWAPLAR

İngilizce swap kelimesinin Türkçe karşılığı takastır. Türev piyasaları açısından swap işlemleri denilince finansal araçlar üzerinden yapılan takas kastedilmektedir. Swaplar özellikle 1980'li yıllardan itibaren büyük bir gelişme göstermeye başlamışlardır. Swaplar arasında en yaygın olan yabancı para swapı ilk olarak 1960'lı yıllarda İngiltere'de uygulanmaya başlanmıştır. Faiz oranı swapı ise 1981 yılından itibaren swap piyasasında yer almaya başlamış ve oldukça geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bunun nedenlerinden biri faiz oranı swapı yapan taraflardan hepsinin bu işlemde yarar sağlamasıdır. Swap işlemi yapanlar arasında finansal kuruluşlar, yatırım ve ticaret bankaları, devlet adına çalışan acenteler ve şirketler yer almaktadır.

Varlıkların alım satımı için uzun süredir faaliyet gösteren piyasalar vardır. Oysa yükümlülüklerin alım satımı, son yıllara kadar üzerinde düşünülmemiş bir konudur. Bu nedenle, swap, borçların değiş-tokuşunu mümkün kılmaktadır (Karatepe, 2000). Belirtildiği üzere, özellikle 1980 yılından bu yana swaplar finansal piyasalarda en önemli büyüme hızını yakalayan finansal araçların başında gelmektedir. Swaplar sıfır düzeyinden başlayıp milyon dolarlık işlem hacmine ulaşmışlardır.

Swaplar iki taraf arasında, önceden belirlenen bir sistem içinde, belirli bir finansal varlıktan kaynaklanan gelecekteki nakit akışlarının değiştirilmesi konusunda yapılan özel bir anlaşmadır. Taraflar bu anlaşma ile içinde buldukları finansal koşulları kendi yararlarına değiştirmeyi amaçlarlar (Chambers, 2007). Değişime konu olan ödemeler, faiz, anapara veya hem faiz hem anapara ödemeleri olabilir.

Başka bir deyişle swap, iki taraf arasında yapılan faiz veya anapara ödemelerinin, koşullarının önceden belirleyerek, değişimi sağlayan bir mali işlemidir. Swap işleminde bir para birimi başka bir para birimi ile aynı gün içerisinde değiştirilmektedir. Ancak, vadeli işlem çeşidi olan swapta satılan para birim ileriki bir günde ters işlemle geri alınmaktadır.

Swapta amaç, faiz oranları ile döviz kurlarında kaydedilen dalgalanmaların yarattığı riski minimize etmektir. Swap, farklı kuruluşların farklı mali piyasalardaki değişik kredi değerlerine bağlı olarak, farklı kredi şartları ile karşı karşıya

kalmalarıdır. Böylece, söz konusu farklılıklardan swap işlemine taraf olan işletmelerin her birinin yararlanması söz konusu olmaktadır.

Swap işleminin özü, alacakların bulunduğu finansal piyasadaki konumuna dayanarak, bir tarafın diğer tarafa karşı sağladığı görece üstünlüğü, arbitraj amacıyla değiştirmesidir. Böylece, finansal piyasadaki konumu nedeniyle, görece maliyet üstünlüğüne sahip olan işletme, swap sözleşmesiyle, diğer işletmenin bu üstünlüğe ulaşabilmesine olanak sağlamaktadır. Swap işlemlerinin gerçekleştirilmesinde swap araçlarına önemli görevler düşmektedir.

Konuya döviz açısından bakıldığında, "swap" spot (peşin) piyasada bir alıma karşılık, vadeli piyasada bir satış ya da tam tersi bir işlem anlamına gelmektedir. Bu durumda, swap işlemi, peşin ve vadeli döviz piyasalarını birleştirerek, söz konusu iki piyasa arasında bir köprü oluşturmaktadır.

Swap, işletme finansman yöneticilerine, hem risklerini azaltma, hem de gelirlerini artırma olanağı veren bir yöntemdir. İşletmeler, yapacakları swaplarla, özel tercih ve ihtiyaçlarına göre borçlarını yeniden değerlendirmek için bir araç sağlamakta, para cinsinin ve enstrüman tipinin avantaj sağladığı yerlerden borçlanma olanağına sahip olmaktadır. Böylece, swap yoluyla tasarruflar en verimli şekilde kullanılacakları alanlara yönlendirilmektedir. Bu nedenle, taraflar açısından önemli ölçüde maliyet tasarrufu söz konusu olmaktadır. Özellikle, iç piyasalardaki istikrarsızlık dönemlerinde swapın önemi daha da artmaktadır.

İlk olarak döviz piyasalarında kullanılmaya başlanan swap işlemleri, daha sonra para ve sermaye piyasalarında borçlanma maliyetlerini azaltan bir finansman tekniği olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Swap işlemi, yalnız swapı ilk talep eden işletme açısından değil, işleme katılan tüm taraflar açısından karlı olabilmektedir.

3.1. Swap Piyasaları

Swap işlemleri, farklı kuruluşların farklı finansal piyasalardaki, farklı kredi değerliliklerine bağlı olarak, farklı kredi şartları ile karşı karşıya kalmaları ve bu farklılıklardan swap işlemine taraf olanlardan her birinin yararına olacak şekilde yararlanmalarıdır. Öte yandan, finansal piyasaların kurumsal ve yapısal açılardan

farklılık göstermeleri, swap işlemlerinden yararlanma olanaklarını özendirilmektedir. Swap piyasasının gelişimindeki en önemli nedenlerden birisi, swapın bir para piyasası aracı olmaktan çıkarak, bir kredi piyasası aracı haline gelmeye başlamasıdır.

Swap işlemleri, krediden farklı olarak, son derece hızlı bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Uygulamada genellikle telefonla kurulan bağlantılar, daha sonra faksla teyit edilmektedir. Böylece, kısa sürede anlaşma yapılmakta ve maliyetler önemli ölçüde düşürülmektedir.

Swap işlemleri, ülkeler açısından özellikle ödemeler bilançosunda geçici nedenlerle ortaya çıkan açıkları finanse etmek veya ulusal paradan spekülasyon kaçışları önlemek için yapılır. Ülkenin ulusal parasının değer kaybettiği dönemlerde, spekülasyonörler, sağlam dövizlere yönelirler. Bu durumda, swap anlaşmaları, ülkelerin başvurabileceği güvenlik aracı durumundadır. Böyle bir durumda, swap aracılığıyla, sağlam paralı ülkelerin paraları elde edilir ve bu dövizler, merkez bankasının döviz piyasasına yapacağı müdahalede kullanılır. Böylece, spekülasyon hareketler durdurulduğu zaman, swap anlaşması da amacına ulaşmış olur. Bundan sonra yapılacak işlem, alınan bu dövizleri iade etmek ve karşılıklı ülkelere verilen ulusal para fonlarını geri almaktır.

Swap anlaşmaları ilk kez 1923 yılında Avusturya Merkez Bankası tarafından spot pazarda İngiliz Sterlini karşısında ulusal paranın satılıp, vadeli olarak geri alınması ile denenmiştir.

1962 yılında ise, Bretton Woods Sistemi içinde, doların sarsıntı geçirmeye başladığı dönemlerde, Amerikan Federal Rezerv Bankası ile belli başlı sanayileşmiş ülkelerin merkez bankaları arasında imzalanmıştır. ABD bu kaynaktan sık sık yararlanmış ve doların değerine istikrar getirmeye çalışmıştır.

Swap işlemine temel oluşturan bu farklılıklardan bazılarını şu şekilde özetlemek mümkündür.

- i. Belirli döviz fonlarına erişebilme yeteneği ya da erişme güçlükleri,
- ii. Değişken faizli fon sağlayabilme yeteneğine karşın, sabit faizli fon bulmada karşılaşılan zorluklar,

- iii. Belirli bir döviz üzerinden elde edilebilen ihracat ve diğer kredilerin varlığı ve farklı bir döviz cinsinden fon edinebilme zorunluluğu,
- iv. Belirli bir piyasada birincil borçlanma için gerekli likiditenin bulunmaması,
- v. Bazı piyasalarda erişilen vadelerin kısalığı,
- vi. Tarafların farklı finans piyasalarında farklı kredi değerliliklerine sahip olmaları,
- vii. Farklı finansal piyasalarda kurumsal ve yapısal farklılıkların bulunmasıdır.

Swapın kullanım alanları ise şu şekilde özetlenebilir:

- ❖ Aktif getiri oranlarını yükseltmek,
- ❖ Kaynak kullanım maliyetlerini düşürmek,
- ❖ Risk yönetimi,
- ❖ Arbitraj,
- ❖ Korunma
- ❖ Spekülasyon
- ❖ Alım-satım yaparak kar sağlamak.

3.2. Swap İşlemleri

Swap işlemi, belirlenen vadeye göre şartlara uymayı karşılıklı olarak kabul eden, en az iki tarafın varlığını gerektirmektedir. Swap işlemlerinin koşulları tarafların ticari ihtiyaçları, döviz kontrolleri ve çeşitli hukuksal düzenlemelere göre değişebilmektedir. Swap işlemlerinin koşulları şöyle sıralanabilir:

- i. Taraflar: Swap işlemine taraf olanlar arasında işletmeler, finansal kuruluşlar veya aracılar, uluslararası kuruluşlar, devletler ve devlet kurumları bulunmaktadır.
- ii. Tutar: Swap işlemleri genellikle büyük para tutarları üzerinden yapılmaktadır. Genellikle 10 milyon USD ile 100 milyon USD arasında değişen bu tutarlar, diğer para birimlerinde de bu tutarlara eşit para birimleri kullanılmaktadır.
- iii. Para Birimleri: Swap işlemleri farklı para birimleri arasında düzenlenebilir.
- iv. Vadeler: Swap işlemleri genellikle orta vadeli işlemlerdir. Vade 3-10 yıl arası bir süreyi kapsamaktadır. Vadenin daha uzun olması mümkündür. Genel olarak, para swapı işlemleri, orta vadeden uzun vadeye, vadeli döviz

piyasaının olmadığı durumlarda kullanılır. Faiz swapı işlemleri ise, istenen vadeyi veya esnekliği sağlayamayan, vadeli piyasaların mevcudiyeti durumunda kullanılır.

- v. Yenileme: Genellikle swap işlemleri, tek bir vadede geri ödenebilen anapara miktarlarını içerir. Ancak bir seri swap işleminin yapılmasıyla yenilemenin sağlanması mümkündür.
- vi. Fiyatlama: Faiz swapı fiyatlama, sabit faizle borçlanma maliyeti, değişken faizle borçlanma maliyeti ve kredi değerliliği ile ilgili piyasa şartlarına bağlıdır. Para swapı fiyatlama ise genellikle görüşmeler yoluyla saptanır. Fakat bu fiyatlama genellikle paralar arasındaki faiz oranı farklılıklarını yansıtır.
- vii. Gelecekteki Zorunluluklar: Faiz swapı işleminde taraflar, değişken faiz oranı veya sabit faiz oranıyla hesaplanmış tutarların satılmasını veya her iki faiz tutarının şartlı olarak üçüncü bir tarafa satılmasını kabul ederler. Aynı şekilde, para swapı işlemlerinde taraflar, önceden tespit edilen yöntemler veya gerekli şartlara uygun bir hesaplama yöntemiyle hesaplanmış borç tutarlarının satılmasını kabul ederler.
- viii. Komisyon ve Diğer Masraflar: Komisyon oranını belirleyen etmen tarafların kredi değerliliğidir. Aracılar tarafından yapılan ilk swap işlemlerinde, her yıl için aracılardan komisyonu 0,0010-0,0025 arasında değişmektedir. Komisyon aynı zamanda alış ve satış fiyatları arasındaki fark olarak da bilinir. USD birimli faiz swapı için komisyon oranları, 0,0005-0,0010 arasında değişmektedir. Diğer para birimleri üzerinden yapılan swap işlemlerinde ise, komisyon oranları, borçluların kredi değerliliklerine bağlıdır. Swap işleminin düzenleyicisi, komisyonuyla birlikte diğer bütün masraflarını, swap işleminde yer alan taraflardan tahsil eder.
- ix. Yasal Düzenlemeler: Yasal düzenlemeler, tarafların ikamet ettikleri ülkelerin yasalarına göre belirlenir. Uluslararası finansal düzenlemeler ve ödemelerin yapıldığı yerle, hangi yasal düzenlemelere uyulacağını belirlemektedir (Karatepe, 2000).

3.3. Swap Piyasalarının İşleyişi

3.3.1. Finansal Aracıların Rolü

Finansal piyasalarda swapların vazgeçilmez bir araç haline gelmesinin en önemli nedeni riski finansal aracıya transfer etmeleridir. Örneğin, bir şirket aldığı borçların faizinden doğabilecek risklere karşı korunabilmek amacıyla, finansal bir aracı ile swap işlemi yapmak isteyebilir. Faiz riskini üstlenen finansal aracı daha sonra bu riski taşımak istemediğinde, riski bir başka finansal aracıya devredebilir (Miron, Swannel, 1991).

Swap piyasalarının gelişmesinde finansal araçların, örneğin bankaların, rolü oldukça önemlidir. Önceden bankalar sıradan bir acente işlevini görmekteydi. Bir ücret karşılığında tarafları bir araya getirip işlemin ayrıntılarını oluşturmakla görevleri sona ererdi. Ancak iş dünyasındaki hızlı büyüme hacmi bankalara ve takas odalarına büyük görevler ve sorumluluklar yükledi. Örneğin, finansal araçlar swap işlemlerinde her iki taraf adına ödemelerle ilgili güvence vermeye, başka bir ifadeyle ödememe riskini üstlenmeye ve zaman zaman da swap işlemlerinde pazar belirleyicisi olmaya başlamışlardır. Swap işlemlerinde taraflardan birini bulmadan diğer tarafın swap talebini kabul ederek, swap piyasasında likidite artışına önemli bir katkıda bulunmaktadırlar (Foley, 1991).

3.3.2. Swap Depoları (Warehousing)

Uygulamada, swap yapmak isteyen her iki tarafın finansal aracıya aynı anda başvurmaları pek sık rastlanan bir durum değildir. Böyle bir durumda, finansal aracı swap işlemi yapmak isteyen bir müşteriye sahiptir; ancak aynı anda bu swap işlemine taraf olabilecek başka bir müşteri bulamayabilir. Gelen talebi geri çevirmemek esas olduğundan, finansal aracı karşı taraf olmadan swap işlemi kabul eder. Böylece karşı tarafı bulana kadar swap işlemi açıkta tutar, söz konusu taraf bulunduğu da işlem tamamlanır. Açık swap pozisyonlarını kapatmak için swap depoları arasında aktif bir ticaret söz konusudur.

Swap depolarında yapılan işlemleri çabuklaştırmak ve riski azaltmak için swapların alınıp satılabilir hale getirilmeleri ve en azından daha likit olmaları gereği doğmuştur. Bu da swapların standardize edilmeleriyle sağlanmıştır.

3.3.3. Fiyatların Kote Edilmesi (Price Quotation)

Uygulamada işlemleri çabuklaştırmak amacıyla, faiz swapları standart bir form içinde kote edilmektedir. Buna göre değişken faiz oranları 6 aylık LIBOR'a eşittir.

LIBOR (London Interbank Offered Rate) Londra'da bankalar arası piyasada borçlanmalarda ortaya çıkan faiz oranına verilen isimdir. Ancak burada ortaya çıkan faiz oranı sadece Londra'daki bankalarda değil, birçok finansal işlemde LIBOR referans faiz oranı olarak kullanılmaktadır. Birçok durumda LIBOR'a, bazı puanlar eklenerek de faiz oranı oluşturulmaktadır.

Faiz swapları piyasasında faiz oranları, LIBOR'un yanı sıra hazine bonusu ve finansman bonusu faiz oranlarına belirli bir marj eklenmek suretiyle de belirlenebilmektedir. Bu orana swap oranı denir ve genellikle yıllık baza dayanmaktadır. Örneğin, beş yıllık bir swap oranının 75 puan olması şöyle açıklanabilir. Bir borçlunun değişken faiz oranı üzerinden beş yıllığına borçlandığını ve bu borcun faiz oranının altı aylık LIBOR'a bağlı olduğu bir durumda, borçlu bu borcun faizini sabit faiz oranı üzerinden swap yaparak beş yıllığına değiştirebilir. Bu sabit faiz oranının yıllık maliyeti ise beş yıllık hazine bonosunun faiz oranına 75 puanın eklenmesiyle saptanan orandır. Aynı şekilde, bir borçlunun sabit faiz oranı üzerinden beş yıllığına borçlandığı ve bu borcun faiz oranının hazine bonosunun faiz oranına 75 puan eklenerek oluşturulduğu bir durumda, borçlu bu sabit faizi, LIBOR'a dayalı değişken bir faizle swap edebilir (Brown, 1989).

Yabancı para swapları da standart bir temele dayandırılmıştır. Bununla birlikte kredi riskinden doğabilecek maliyetler de fiyata eklenebilir.

Swapların standart hale getirilmesiyle ikincil piyasada işlem görmelerine olanak sağlanmış olmaktadır. Taraflardan biri kendi pozisyonunu ikincil piyasada satarak bütün yükümlülüklerinden kurtulabilir.

3.3.4. Pazarı Belirleyiciler ve Brokerlar (Market Makers and Brokers)

Pazarı belirleyiciler ve brokerlar swap piyasalarında likidite artışına katkıda bulunurlar. Swap anlaşması yapıldıktan sonra faiz oranlarında veya döviz kurlarında değişme olduğunda, swap değeri de değişmektedir. Swap piyasasına katılanların çoğu, futures piyasasında olduğu gibi pazarın her gün yeniden belirlenmesini isterler. Eğer faiz oranları düşerse sabit faiz oranı ödeyen taraf için swap sözleşmesinin değeri düşecek ve bir kayıpla karşı karşıya kalacaktır. Çünkü piyasada faiz oranları düşmesine rağmen, kendisi sözleşme gereğince sabit faiz

ödemekle yükümlü olduğundan, piyasadakinden yüksek faiz ödemeye devam edecektir. Bu durumda swap işleminin kendisi için bir değeri kalmayacak ve bu pozisyonu devredebileceği bir taraf aramaya başlayacaktır. Buna karşılık değişken faiz ödemekle yükümlü olan taraf faiz oranlarının düşmesinden kazançlı çıkacak ve kendisi için swap işleminin değeri artacaktır. Çünkü piyasada faiz oranları düşmüş ve kendisi değişken faiz ödemekle yükümlü olduğundan, piyasadaki düşük faizden ödemelerini yapacak ve bu ödemelerin değeri kendisi açısından artmış olacaktır. Bu durum, elinde sabit getirili bir menkul değer tutan yatırımcının durumuyla aynıdır. Faiz oranları yükseldiğinde burada açıklanan durumun tam tersi söz konusu olacaktır.

Yukarıdaki durum, futures piyasalardaki durumla çok benzerdir. Swap işleminde, değişken faiz ödemekle yükümlü olan taraf, faiz futures kontratındaki alıcı pozisyonundadır. Faiz oranları yükselirse futures kontratın değeri düşeceğinden kaybeder, faiz oranları düşerse kontratın değeri artacağından kazanır. Buna karşılık, swap işleminde sabit faiz ödemekle yükümlü olan taraf, futures kontratındaki satıcı pozisyonundadır. Burada faiz oranlarındaki bir artış sonucunda futures kontratın değeri de artacaktır. Faiz oranları düşerse kontratın değeri de düşecektir. Böylece bir faiz swapı futures ya da forward kontratla benzerlik göstermektedir. Buradan anlaşılacağı üzere, swap piyasalarında pazarın belirlenmesine gerek duyulmaktadır. Çünkü yatırımcı artık kendisi için değerli olmayan swap sözleşmesini elinde tutmak istemeyecek ve bunu satabileceği fiyatı bilmek isteyecektir. Bu nedenle, pazar belirleyiciler, swap piyasalarında swap sözleşmelerinin alım ve satım fiyatlarını belirleyerek işlem yaparlar ve bu fiyat aralığında kazanç sağlamaya çalışırlar.

Swaplar ayrıca brokerlar aracılığı ile de düzenlenebilirler. Brokerlar swap işlemi yapacak tarafları birbirleriyle karşılaştırırlar ve her bir taraftan belirli bir ücret alırlar. Ücretler swap işlemi başladığında ödenir.

Swaplar farklı para birimlerinde işlem konusu olabilirler. Ayrıca swaplar 2 ile 10 yıl arasında değişen sürelerle yapılabilirler (Chambers, 2007).

3.4. Swap Türleri

Dört temel swap çeşidi vardır.

1. Para swapı (currency swaps)
2. Öz kaynak swapları (equity swaps)
3. Mal swapları (commodity swaps)
4. Faiz swapları (interest rate swaps)

3.4.1. Para Swapı (Currency Swaps)

Bir para swap sözleşmesi iki taraf arasında, farklı para birimleri cinsinden ödemelerin yapıldığı ödeme dizisidir. Bu ödeme dizileri faiz ödemelerine eşdeğerdir; çünkü faiz oranlarının belirli bir nominal değer üzerinden ödendiği varsayımı altında hesaplanmaktadır. Para swapında, her bir para biriminin kendi nominal değeri vardır. Buna ek olarak, para swapında, tarafların isteklerine göre swapın yürürlükte kaldığı sürenin başında ve sonunda nominal değer takas edilebilir. Bu işlemde bir taraf diğer tarafa kendi borçlu olduğu tutarı, diğer taraf da kendi borçlu olduğu tutarı ödemektedir.

3.4.2. Öz kaynak Swapları

Öz kaynak swaplarında iki nakit akışı dizisinin en az birinin hisse senedi fiyatıyla, hisse senedi portföyünün değeriyle veya hisse senedi indeksinin seviyesiyle belirlenmesi gerekmektedir. Diğer nakit akışı dizisi sabit bir oranda, LIBOR gibi değişken bir oranda veya diğer hisse senedinin değeriyle, hisse senedi portföyüyle veya hisse senedi indeksiyle belirlenebilir. Aynı şekilde, bir öz kaynak swapı alım-satım da bağımsız hisse senetleri, hisse senetleri portföyü ve hisse senedi indeksinin yerine konulabilir.

Öz kaynak swapları, faiz swapları ve para swaplarıyla benzerdir fakat aralarında bazı farklılıklar bulunmaktadır. En temel fark ise swap ödemelerinin hisse senedi getirilerinden belirlenmesidir. Hisse senedi getirileri negatif olabileceğinden swap ödemeleri de negatif olabilir. Örneğin, A ve B diye iki taraf olsun ve A'nın B'ye dayanak hisse senedinin getirilerinden ödeme yapması için anlaşsınlar. Ödeme tarihinde hisse senedi getirisi negatif olsun. Bu B'nin A'ya getiriye ödemesi demektir. Aynı şekilde eğer B negatif bir getiriye sahipse B bu ödemelerin ikisini de yapar.

Bir diğer farklılık da gelecek öz kaynak swapı ödemesinin ne olduğu bilinemez. Öz kaynak swapında malın getirisi anlaşma vadesinin sonuna kadar belirlenemez.

Son olarak burada ödemeler için (gün sayısı/360) gibi bir düzeltme yapılmasına gerek yoktur. Ödemeler verilen dönem boyunca hisse senedi getirisinden belirlenir ve düzeltmeye gerek yoktur.

3.4.3. Mal Swapları (Commodity Swaps)

Mal swapında en az bir ödeme benzin veya altın gibi bir malın fiyatı tarafından belirlenir. Diğer ödeme genellikle sabittir. Fakat bu ödemenin neden başka bir değişken tarafından belirlenmediğine dair bir sebep yoktur.

3.4.4. Faiz Swapları (Interest Rate Swaps)

Faiz swapı iki taraf arasındaki bir dizi faiz ödemeleridir. Her bir ödeme dizisi sabit veya değişken bir orana dayanmaktadır. Eğer oran değişken ve swap sabit değil ise oran genellikle LIBOR oranıdır. Diğer paralardaki swaplar benzer diğer oranları kullanırlar. İki taraf aynı paradaki, farklı miktarlardaki bir dizi faiz ödemesini değiştirmek için anlaşılırlar. Ödemeler belirlenmiş bir anapara tutarına dayanırlar.

En yaygın olan swap türü bir tarafın sabit bir oran, diğer tarafın da değişken bir oran ödediği swaplardır. Bu swap türü tüm swaplar arasında en yaygın olarak kullanılan swap türüdür. Buna "*değişiklik gerektirmeyen swap (plain vanilla swap)*" denir.

Ölümlülük swaplarının yapısı faiz swaplarının yapısına benzemektedir. Ölümlülük swaplarının fiyatlandırılmasının anlaşılabilmesi için önce faiz swaplarının yapısının ve fiyatlandırılmasının incelenmesi gerekmektedir.

3.4.4.1. Faiz Swaplarının Yapısı

Faiz swaplarının yapısını açıklayabilmek amacı ile örnek olarak XYZ adındaki bir şirket ele alınmıştır. Bu şirketin ABSwaps adındaki bir satıcı ile \$50 milyon'luk ana para tutarı olan bir swap sözleşmesi yapacağı varsayılmaktadır. Swapın başlangıç tarihi 15 Aralık'tır. Bu swap ABSwap'inin 90 günlük LIBOR faiz oranına bağlı olarak 1 yıl boyunca 15 Mart, Haziran, Eylül ve Aralık'ta XYZ'ye ödeme yapmasını gerektirir. Ödeme miktarı ödeme dönemi başlangıcında 3 aylık LIBOR tarafından belirlenir. Daha sonra ödeme, ödeme dönemi sonunda yapılır. Dolayısıyla, 15 Mart'taki ödeme bir önceki 15 Aralık'taki LIBOR oranına bağlıdır ve aynı şekilde 15 Haziran'daki ödeme bir önceki 15 Mart'taki LIBOR oranına

bağlıdır. Sistem bu şekilde devam etmektedir. XYZ yıllık %7.5 oran ile ABSwap'ına sabit ödeme yapacaktır. Faiz oranı ödeme tarihleri arasındaki tam gün sayımına bağlı olabilir ya da taraflar bir ayı 30 gün olarak düşünebilirler. Bu örnekte tarafların tam gün sayımını kullandığı varsayılıyor. Bunun yanı sıra taraflar ödemelerini yılda 360 ya da 365 güne dayalı olarak yapabilirler. Burada yılın 360 gün üzerinden hesaplandığı varsayılmaktadır ve bu varsayımlarla faiz ödeme miktarı şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$(\text{Ana Para Tutarı}) * (\text{LIBOR} - \text{sabit oran}) * (\text{Gün Sayısı}/360 \text{ veya } 365)$$

Yıllık hesaplama kesri "artış dönemi (accrual period)" olarak bilinmektedir. Artış döneminin hesaplanması için birçok farklı yol vardır. İki tarih arasındaki tam gün sayısını hesaplanabilir ya da "30/360" gün sayımı yöntemi adı verilen yol kullanılabilir. Hafta sonu ve tatillerin hesaplanması da değişmektedir. Aynı zamanda bir yıl içindeki gün sayısı 360 gün, 365 gün, gerçek gün sayısı ve benzeri gibi farklılıklar gösterebilir.

Bu varsayımlar altında XYZ bakımından ödemeler şu şekildedir:

$$\$50,000,000 * (\text{LIBOR} - 0.075) * (\text{Gün Sayısı}/360)$$

Böylece eğer LIBOR 0.075'in üzerinde olursa XYZ ABSwap'inden yukarıdaki miktarda bir ödeme alacaktır. Eğer LIBOR 0.075'in altında ise, XYZ ABSwap'ine ödeme yapacaktır.

Bir önceki tarihteki LIBOR ödemeyi belirler, dolayısıyla swap başlatıldığında 15 Aralık'taki LIBOR, 15 Mart'taki değişken ödemeyi belirler. Aynı şekilde 15 Mart'taki LIBOR, 15 Haziran'daki ödemeyi belirler. Bu durumda taraflar gelecek değişken ödemeyi her zaman bilirler. Fakat taraflar bir sonraki ödeme dışındaki değişken ödemeleri bilemezler (Chance, 2008).

3.4.4.2. Faiz Swaplarının Fiyatlandırılması

Swapların fiyatlandırılmasına ilişkin işlemler genellikle sıfır kuponlu ya da kuponsuz (zero-coupon) tahvillerinin getiri oranına göre yapılmaktadır. Sıfır kuponlu tahvil faiz ödemesi olmayan tahvillerdir. Sıfır kuponlu tahvillerde vade boyunca kupon ödemesi söz konusu olmayıp, ödemeler vade sonunda yapılmaktadır. Sıfır kuponlu getiri veya iskonto oranı, swap nakit akışları için en

uygun oran olmakta ve swapların fiyatlandırılmasında yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bir swap fiyatlama işlemi, swap için en uygun faiz oranını belirlemek amacıyla üç aşamaya ayrılabilir.

1.aşama: En uygun tahminle değişken faiz oranının belirlenmesi,

2.aşama: Sıfır kuponlu getiri oranı kullanılarak, swap işlemlerinde beklenen değişken faiz ödemelerinin bugünkü değerini hesaplamak,

3.aşama: İkinci aşamada belirlenen bugünkü değerlerle aynı değere sahip yıllık sabit ödemelerin hesaplanmasıdır.

Gelecekte beklenen değişken faiz oranlarına dayalı ödemeleri bugünkü değerini belirlemek için gereken strateji yukarıda verilmiştir. Daha sonra, eğer swap piyasası rekabetçi bir piyasa ise swap fiyatı veya swaptaki sabit faiz oranı, sabit faiz ödemelerinin bugünkü değeri beklenen değişken faiz oranlarının bugünkü değerine eşit olana kadar aşağıya çekilir. Bugünkü değerler hesaplanırken en uygun sıfır kuponlu getiri oranı (zero coupon yield rate) esas alınmalıdır. Ayrıca swap vadesi boyunca sabit ödemeler aynı kalacağından bunlara ilişkin hesaplamaların yıllık olarak yapılması gerekmektedir. Bu nedenle, bir kere değişken faiz oranı ödemelerin hesaplanması gerekmektedir. Başka bir deyişle değişken ve sabit faiz ödemelerinin bugünkü değerlerinin birbirine eşit olması gerekmektedir.

Swap işlemine konu olan ve üzerinden faiz hesaplanan ana paraya farazi ana para tutarı denilmektedir. Bunun nedeni swap işleminde ana paraların değiş tokuşunun konu yapılmayıdır (Stigum, 1990)

3.5. Swap İşleminin Avantajları

Swap işleminin birçok avantajı vardır. Bunlar arasında en önemlisi swapın, işlemi yapan tarafların maliyetini önemli ölçüde azaltmasıdır. Böyle bir fırsat swap işlemine giren tarafların kredi değerliliğinin ve dolayısıyla risklerinin farklı düzeyde olmasından kaynaklanmaktadır.

Swapların bir diğeri yararı da tarafların vergi yasalarından ve bir takım ekonomik düzenlemelerden kaçınmalarına olanak sağlamalarıdır. Bu durum genellikle swap işlemine giren tarafların farklı ülkelerde olmaları halinde söz konusu olmaktadır. Örneğin kendi ülkesindeki sınırlamalardan uzaklaşmak isteyen bir yatırımcı başka bir ülkedeki yatırımcı ile swap yapabilir.

Gelişmekte olan ülkelerdeki kuruluşlar için, uluslararası finansal piyasalarda işlem yapmak ve kaynak bulmak oldukça pahalıdır. Ya da bir takım yasal ve ekonomik engeller söz konusu olmaktadır. Buna karşılık, gelişmiş ülkelerin kuruluşları bu tür piyasalarda, özellikle kaynak bulmada, karşılaştırmalı üstünlüklere sahiptirler. Gelişmekte olan ülkeler bu tür dezavantajlarını, swap işlemi ile bir ölçüde de olsa giderilebilmektedir. Swap, söz konusu ülkelerin kuruluşlarına uluslararası finansal piyasalara girmek ve orada işlem yapmak olanağı sağlamaktadır.

Swap işlemleri aynı zamanda, şirketlerin aktif ve pasif mevcutlarının korunması için de kullanılabilir. Döviz kurlarındaki değişimler, ulusal para birim üzerinden borçları olan çok uluslu şirketlerin beklenen kazançlarını azaltabilmektedir. Bu nedenle çok uluslu şirketler para swapı işlemlerini kullanarak borçlarını ve alacaklarını döviz kuru riskine karşı koruyabilmektedir (Ceylan, 1995).

3.6. Türev Piyasalar ve Türkiye

Türkiye'nin son yıllarda içine girdiği yapısal değişim finans dünyasına olan ilgiyi de büyük ölçüde arttırmıştır. Özellikle İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın açılışından sonra çeşitli yeni finansal araçların geliştirilmesi ve bu araçların finansal piyasalardaki etkinliklerinin yaygınlaşması bu ilgiyi arttırmıştır. Finansal araçların kullanımlarındaki amaçlar fon maliyetlerini azaltıp getiriye çoğaltmak, tahvil ihracı gibi prosedürü uzun ve çıkarımların maliyeti yüksek işlemlere gerek kalmadan borçlanabilmek, risklerden korunmak, getirideki beklenmedik değişikliklerden korunma olanağı sağlamak ve spekülasyon kazanç sağlamak olarak sıralanabilir.

Finansal yeniliklere uyum sağlamak, geliştirilen finansal araçları benimsemek ve bunlardan yararlanmaya çalışmak dışarı açılma sürecinin bir gereği haline gelmiştir. Yatırımcıların bu tür gelişmeleri izlemeleri kaçınılmaz olmakla birlikte, devletin de

gerekli yasal düzenlemeleri gecikmeden yerine getirerek, yatırımcılara yol göstermesi büyük önem taşımaktadır.

3.6.1. Türkiye’de Swap İşlemleri

Türkiye’de swaplar daha çok bankalar tarafından kullanılmaktadır. Türkiye’de bankalar swap işlemi yapmakla aşağıdaki yararları sağlarlar.

- i. Borçlanma ve plasman gibi 2 işlem tek bir işleme dönüştürülür,
- ii. Plasmanın yarattığı kredi riskini minimuma indirir. Çünkü vadedeki risk sadece ödenecek ve alınacak faizle sınırlıdır,
- iii. Farklı kredi riski primlerinin uygulandığı piyasalarda borçlanma maliyetini en aza indirirken plasman getirisini en yükseğe çıkarır,
- iv. Gereksiz kredi kullanımlarını önler,
- v. Döviz kuru riskini yönetir,
- vi. Para ve sermaye piyasalarında bulunan fonların maliyetini azaltır,
- vii. Yatırım kazancının para birimini değiştirir (yatırımcılar için nakit akışlarının para türünün değiştirilmesi olanağını sağlar) (Chambers, 2007).

Ayrıca yeni bir swap türü olan kredi temerrüt swapları da son yıllarda kullanılmaya başlanmıştır. Kredi temerrüt swapları herhangi bir devlet veya şirketin yükümlülüklerini yerine getirememesi riskine (default risk) karşı bir garanti mekanizması sağlanması olarak tanımlanabilir.

4. YAŞAM SWAPLARI VE FİYATLANDIRMA

4.1. Yaşam Swapları (Survivor Swaps)

Yaşam swapları (SS) getirisinin en az bir yaşam ya da ölümlülük indeksine bağlı olarak hesaplandığı ve bu getirilere bağlı bir ya da daha fazla nakit akışının gelecekte takas edilmesi üzerine anlaşma yapıldığı sözleşmelerdir. Yaşam swaplarının çeşitli reasürans anlaşmaları ile aynı faydayı sağlayabileceği daha önce de belirtilmişti. Her ikisi de zaman zaman tahmin ettikleri ödemeleri ya da hasarları takas edebilir ve ikisi de aynı amaçlar için kullanılabilirler. Fakat aralarında temel bazı farklar bulunmaktadır. Yaşam swapları hukuki açıdan bir sigorta sözleşmesi değildir; bu nedenle sigorta sözleşmelerine özel yasal yaptırımlardan etkilenmez. Bunun yerine, yaşam swapları menkul kıymetlerin bağlı olduğu hukuki kurallara bağlıdır. Örneğin, yaşam swapları rastgele bir değişken üzerinden spekülasyon yapılabilmesine olanak sağlarken, sigorta sözleşmelerinde böyle bir durum söz konusu olamaz. Benzer biçimde, sigorta sözleşmeleri sigortalanabilir menfaat için bir poliçe sahibine ihtiyaç duymaktadır; ancak yaşam swaplarında böyle bir ihtiyaç yoktur.

Bazı sigorta şirketlerinin tezgâh üstü piyasa temeline dayanarak yaşam swapı sözleşmeleri yaptıkları sanayi sözleşmelerinden bilinmektedir. Ancak bu piyasanın çok yeni olması sebebiyle somut detayların elde edilmesi oldukça zordur. Fakat gayri resmi olarak elde edilen bilgilere göre birçok reasürans şirketi de yaşam swapı işlemini gerçekleştirmektedir. Reasürans şirketleri maruz kaldıkları riskleri dağıtmak amacı ile bu işlemi yapmaktadırlar. Yapılan bu işlemlerin avantajı riski azaltması, uzun ömürlülük riskinden korunabilecek sermayeyi sağlaması ve düşük beta (low-beta risk exposure) riski taşımasıdır. Beta riski finansta, bir yatırımın riskinin ölçüsünü ifade etmek için kullanılmaktadır (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.1. Yaşam Swaplarının Avantajları

Yaşam swapları, uzun ömürlülüğe bağlı birçok türev ürüne göre daha avantajlı menkul kıymetlerdir. Bu avantajlar aşağıdaki gibi sıralanabilir;

- i. Swaplar, bonoların çıkarılması için gerekli maliyete göre düşük işlem maliyetleri ile düzenlenebilirler ve daha kolay iptal edilebilirler.

- ii. Bonolara göre esnektirler ve değişen piyasa koşullarına göre düzenlenebilirler.
- iii. Likit bir piyasanın varlığına ihtiyaç duymazlar. Sadece ölümlülüğün zaman içerisindeki değişimine bağlı olarak işlem yapmak isteyen gönüllü katılımcıların olması yeterlidir.
- iv. Yaşam swapları geleneksel sigorta düzenlemelerinden daha avantajlıdır. Reasürans tretelerinden daha düşük işlem maliyetine sahiptirler ve tretelere göre daha esnektirler (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.2. Yaşam Swapları Türleri

4.1.2.1. Tek Ödemeli Yaşam Swapları (One-Payment Survivor Swaps)

En temel yaşam swapı olarak tek ödemeli yaşam swapı, önceden belirlenmiş tek bir ödemeye karşılık ölümlülüğe bağlı rastgele bir ödemeden oluşmaktadır. Örneğin, sıfır anında iki firmanın $K(t)$ önceden belirlenmiş tutarına karşılık $S(t)$ rasgele tutarı takas etmek üzere bir swap anlaşması yaptığı varsayılmaktadır. Geleneksel forward oranı anlaşmalarında olduğu gibi $K(t)$ nominal bir tutara bağlı olarak hesaplanan kupon ödemeleri olarak görülebilir. Kredi riskini mümkün olabildiğince azaltabilmek amacı ile tarafların sadece iki ödeme tutarının farklarını takas etmek üzerine anlaştıkları varsayılmaktadır. Böylece A firması B firmasına $K(t) > S(t)$ olduğunda $K(t) - S(t)$ tutarını, $S(t) > K(t)$ olduğu durumda ise B firması A firmasına $S(t) - K(t)$ tutarını öder. $S(t)$ tutarı referans alınan tablodan elde edilen t zamanına kadar yaşayan sayısıyla ilişkilidir. Örneğin, sıfır anında, sigorta şirketinin sahip olduğu bütün poliçe sahibi sayısına ya da bütün popülasyona eşittir. Nihai olarak, $S(t)$, $K(t)$ ile yakın ilişkili olursa fayda sağlar, tam tersi olması durumunda ise kayba neden olmaktadır. A firması $S(t)$ için uzun dönemli bir riske maruz ise, B firması kısa süreli bir riske maruz kalır (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.2.2. Vanilla Yaşam Swapları (Vanilla Survivor Swaps)

Tek ödemeli yaşam swapları, vanilla yaşam swaplarının (VSS) temel taşı olarak adlandırılabilir. Burada taraflar swap vadesi olan T süresi sonuna kadar birbirlerine periyodik olarak bir dizi ödeme yapmak üzere anlaşılır. VSS'lerin yapısal olarak faiz swaplarına benzediği daha önce de belirtilmişti. VSS, sabit ödemeler ve ölümlülüğe bağlı değişken ödemelerden oluşmaktadır. Faiz swapları da sabit ödemeler ve LIBOR oranı gibi bir piyasa oranına bağlı değişken ödemelerden

oluşmaktadır. Her ikisi de alıcılarına piyasadaki hareketlere karşı net nakit akışları ile koruma sağlamaktadır. Her ikisinde de swap primi swapın başlangıç değerini sıfır yapacak şekilde belirlenmektedir.

Ancak aralarında belirli farklar vardır. Faiz swaplarında sabit kısmın ödemeleri zaman içinde sürekli sabit kalmaktadır. VSS ise sıfır zamanında beklenen yaşam indeksine göre zaman içerisinde azalmaktadır. Faiz swaplarının değişken ödemeleri piyasa faiz oranlarına bağlı olarak hesaplanırken, VSS'lerin değişken kısımları t zamanında gözlemlenen yaşam indeksine bağlı olarak hesaplanmaktadır. Faiz swapları için piyasa bilgilerine ulaşmak oldukça kolay iken, yaşam swapları için piyasa bilgisi bulunmamaktadır. Bu nedenle farklı varsayımlar yapılarak fiyatlandırılmaktadır. Son olarak, faiz swapları bono piyasalarının likit olmalarından dolayı arbitrajsız piyasa koşullarına göre fiyatlandırılmaktadır. Likit piyasalar, işlem yapan kişiler tarafından birçok alım satım fiyatının önerildiği, oynaklığın ve spreadlerin düşük olduğu piyasalardır. Ancak VSS için böyle bir durum söz konusu değildir. VSS'ler tamamlanmamış piyasalarda işlem görmektedirler (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.2.3. Diğer Yaşam Swapları

Swaplar isteğe bağlı düzenlenebilen araçlar oldukları için çok çeşitli swap anlaşmaları mevcuttur. Örneğin, değişken bir ödemeye karşılık yine değişken ödemelerin elde edildiği ölümlülüğe bağlı swap anlaşmaları yapılabilir. Daha detaylı swap anlaşmalarının yapılması da mümkündür. Ölümlülük yayılımlarına (mortality spreads) bağlı swaplar, birden fazla ödemesi ölümlülüğe bağlı olmayan ancak bir ödemesi ölümlülüğe bağlı olan swaplar ve opsiyon anlaşmalarına benzer yaşam swapları da düzenlenebilir (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.3. Yaşam Swaplarının Kullanım Alanları

4.1.3.1. Sigorta Şirketleri Tarafından Kullanımları

Bir hayat sigortası şirketi VSS ile hayat portföylerindeki ölümlülük risklerinden korunma sağlayabilir. Hayat sigortası portföyü ölümlülüğün gelişmesi riskine daha uzun süreli olarak maruz kalmaktadır; annüite portföyleri ise bu riske daha kısa süre maruz kalmaktadır. Bu sebeple hayat portföylerinde korunma sağlayabilmek için önceden belirlenmiş ödemeleri zaman içinde düşüş yerine artış göstermesi

beklenen poliçe ödemelerine eşitlenmesi gerekmektedir. Kısaca gerekli düzenlemeler yapıldığında annüite ürünü satan şirketler ve hayat sigorta şirketlerinin ikisi de VSS ile korunma sağlayabilirler.

Sigorta şirketleri yaşam swapları yardımı ile birçok şekilde korunma sağlayabilir. Buna bir örnek annüite ürünü satan şirket ile hayat sigortası şirketinin birbirleri ile swap anlaşması yapmalarıdır. Hayat sigortası şirketleri ile annüite ürünü satan şirketler ölümlülüğün gelişimi riskinden birbirine zıt şekilde etkilenmektedirler. Bu durumda yaşam swapı her iki tarafa da ölümlülüğün korunma sağlamaktadır. Cox ve Lin (2007) çalışmalarında açıkladıkları gibi, bir yaşam swapı, annüite ve hayat sigortası portföylerinin her ikisine de sahip bir şirket için doğal korunma (natural hedging) ile pozisyonlarını koruyabilme imkânı vermektedir. Hayat sigortası ve annüiteler ölümlülük risklerinden birbirlerine zıt şekilde etkilendikleri için birinin kazancı diğerinin kaybını dengeleyecektir. Böylece doğal bir korunma sağlanmış olacaktır. Doğal korunma şirketin ölümlülük riskini de azaltacağı için risk primleri de düşecektir. Bu durumda doğal korunma ile şirket rakiplerine göre daha avantajlı olacaktır (Cox ve Lin, 2007).

Yaşam swapları ile bir diğer korunma şekli de değişken ödemeye karşılık değişken bir ödemenin elde edilmesidir. Değişken ödemeye karşılık değişken ödemelerin yapıldığı yaşam swapı annüite ürünü satan şirket ile hayat sigortası şirketinin swap anlaşması yapması durumu için uygundur. Değişken ödemelerden biri annüite ürünü satan şirketin annüite ödemelerine, diğeri ise sigorta şirketinin sigorta ödemelerine bağlı olacaktır. Ayrıca bir ya da birden fazla değişken ödemelerin ölümlülüğe bağlı olmayan ancak rasgele bir değişkene (faiz oranı, hisse endeksi gibi) bağlı olan yaşam swapı türleri de bulunmaktadır.

Sigorta şirketleri için yaşam swapları ile ölümlülük riskinden korunmanın birçok yolu vardır. Swap ödemelerinin belirli zaman periyotlarına ve referans popülasyona bağlı olduğu göz önüne alınmalıdır. Bir hayat sigortası şirketi referans popülasyondan kaynaklanan riskleri ve ölümlülüğün vade yapısından kaynaklanan riskleri yönetebilmek amacı ile yaşam swapı anlaşması yapabilir.

Yaşam swapları sigorta şirketlerine maliyeti düşük ve oldukça esnek şekillerde ölümlülük risklerini yönetebilme imkânı tanımaktadır. Eğer koşullar değişecek olursa firma daha sonra üstlenmek istediği risk miktarını değiştirmek isteyebilir;

yaşam swaplarının tarafların ihtiyaçlarına göre düzenlenebilir olma özelliğinden dolayı firmanın üstlenmek istediği risk miktarı değiştirilebilir (Blake, Cairns, Dowd, 2006).

4.1.3.2. Diğer Yatırımcılar Tarafından Kullanımları

Yaşam swaplarının, sermaye piyasası kurumları, bankalar ve uzun dönemli yatırımcılar için de avantajlı olduğu durumlar bulunmaktadır. Sermaye Varlık Fiyatlandırma Modeline (Capital Asset Pricing Model, CAPM) göre, finansal kurumlar düşük beta riskine sahip fakat beklenen getirileri yüksek olabilecek yeni yatırım yapılabilecek araçlar aramaktadırlar. Bu açıdan bakıldığında, ölümlülüğe bağlı varlıklar, ölümlülük riskleri ile finansal piyasalar arasındaki düşük ilişkiden dolayı avantajlı olmaktadır. Ölümlülük riskleri ile finansal piyasalar arasındaki bu ilişkinin sifıra çok yakın bir değer olduğu söylenebilir. Ayrıca SS'lerin düşük maliyetli oluşları sayesinde piyasadaki yatırım hacmi önemli ölçüde artabilir (Dowd, Blake, Cairns, Dawson, 2006).

4.1.3.3. Spekülatif Kullanımı

SS'ler ölümlülük risklerini speküle etme aracı olarak da kullanılabilirler. Gelecek ölümlülük oranlarının, piyasada gelecekte olması beklenilenden daha düşük oranlarda gerçekleşeceğine inanan bir şirket bu duruma örnek olarak verilebilir. Bu şirket bir sigorta şirketi olabilir ve gelecek ölümlülük gelişimlerinin tahmin edilenden daha yüksek olmasını bekliyor olabilir. Şirket sabit oran ödeyen kısım olarak bir yaşam swapı anlaşması yaparak bu görüşünden fayda sağlayabilir. Eğer tahminleri doğruysa, ölümlülük oranları düşmeye başlayacak ve swapın değişken ödeme miktarları yükselecektir. Ayrıca firmanın teminatı kazanabilmesi için tahminleri tamamen doğru olana kadar beklemesine de gerek yoktur. Piyasa beklentileri firmanın tahminleri doğrultusunda gerçekleştiği anda SS'lerin piyasa değerleri revize edilir ve firma bu işlemde kazanç sağlar.

Ölümlülük riski üzerinden daha ayrıntılı stratejiler düzenlemek mümkündür. Örneğin ölümlülüğün vade yapısının sonunda ölümlülük riskinin başka bir ölümlülük vade yapısı ile alakalı olarak fazla tahmin edildiğini düşünen bir firma ele alınırsa, piyasada uzun dönemli ölümlülükle alakalı olarak kısa dönemli ölümlülük oranları fazla tahmin edilmiş olabilir. Böyle bir durumda, firmanın kısa vadede sabit

oranı elde eden taraf olarak swap anlaşması yapması, uzun vadede ise sabit oranı ödeyen taraf olarak swap anlaşması yapması uygun olacaktır. Eğer firmanın tahminleri doğru ise böyle bir işlemde kazanç sağlayacaktır.

Bir firma yaşam swaplarını kullanarak iki farklı popülasyonun yaşam oranları arasındaki farkı da speküle edebilir. En basit şekilde, bir firma T vadesi boyunca birinci popülasyondaki ölümlülüğün ikinci popülasyonla alakalı olarak artacağını düşünüyor olabilir. Böyle bir durumda firma iki popülasyon üzerinden yaşam swapları ile birçok spekülasyon yapabilir (Dowd et al., 2006).

4.2. Ölümlülüğün Vade Yapısı

Bir riski ifade etmek gerektiğinde, olasılıksal değerlendirmenin yapılması gerekmektedir. Ölümlülüğün incelenebilmesi için ise bazı bileşenlerinin tanımlanması gerekmektedir. $\mu(t,x)$, t zamanında x yaşındaki bireyin anlık ölümlülük oranını göstermektedir. Geleneksel statik modellemeler $\mu(t,x)$ 'nin $\mu(x)$ 'e eşit olduğunu varsaymaktadır. Bunun sebebi deterministik ölümlülük tahminlerinde $\mu(t,x)$ 'nin t ve x'in deterministik bir fonksiyonu olduğunun varsayılmasıdır. Fakat bu çalışmada $\mu(t,x)$ stokastik bir süreç olarak ele alınmıştır.

İki çeşit stokastik ölümlülük vardır (Dahl, 2004):

- **Sistemik olmayan ölümlülük riski:** Sonlu yaşayan sayısı için verilen bir grupta gerçekleşen ölüm sayısının tahmin edilen ölüm sayısından sapması riskidir. Klasik varsayımlar yardımı ile bu risk büyük oranda dağıtılabilmektedir. Bu tür risklerin fiyatlandırılmasında ek bir risk primi gerekmemektedir.
- **Sistemik ölümlülük riski:** Anlık ölümlülük oranının tahmin edilenden farklı şekillerde gelişmesi riskidir. Bu risk dağıtılamamaktadır, bu nedenle ek bir risk primi gerektirmektedir.

Finansal sözleşmelerin fiyatlandırılmasından yola çıkarak ölümlülük türevlerinin de risk nötral olasılık ölçütü yani Q altında fiyatlandırılması beklenir. Q olasılık ölçütü fiziksel P ölçütünden farklıdır. Tamamlanmamış piyasalarda işlem yapıldığı için fiyatlandırma ölçütünün bir tane olması mümkün değildir. Bu sebeple ek bir varsayım yapılması gerekmektedir. Risk nötral fiyatlandırma ölçütü, farklı uzun

ömürlülüğe bağlı menkul kıymetlerin birbirleri ile tutarlı bir şekilde fiyatlandırılmasını sağlamaktadır (Cairns, Blake, Dowd 2006).

4.2.1. Bütünsel Ölümlülük Riski İçin Model

Bütünsel uzun ömürlülük zaman içerisinde önemli ölçüde gelişme göstermiştir. Bu gelişme ile birlikte farklı yıllar ve farklı yaşlar için ölümlülük oranlarının ne olacağı tahmin edilmesi güç bir problem haline gelmiştir. Bütünsel uzun ömürlülük riskinin öngörülebilmesi için birçok stokastik model geliştirilmiştir. Modellerden çoğu iyi bir model için gerekli olan kriterleri sağlayan istatistiksel uyum iyiliği testleri (goodness of fit) ile geliştirilen modellerdir. Bunlara örnek olarak Lee ve Carter (1992), Bohurns ve diğerleri (2002), Renshaw ve Haberman (2003, 2006) verilebilir. Diğer modelleme yaklaşımları ise daha çok matematiksel bakış açısı ile geliştirilen modellerdir. Bunlara örnek olarak ise Dahl (2004), Biffis (2005) ve Miltersen ve Persson (2005) verilebilir.

Geliştirilen modellerden ilk grup, faiz oranı modellerinde *kısa dönemli (short rate) modeller* olarak yer almaktadır. Bu modeller “ q_x ” ölümlülük eğrisini herhangi bir zamanda bir yıl ileri götürmektedir. Ölümlülük eğrisi $X(t)$ durum değişkeninin bir fonksiyonu olarak modellenmektedir. Ölümlülük oranlarının dinamikleri $X(t)$ durum değişkeninin dinamiklerine bağlıdır.

Yukarıdaki modellere alternatif olarak öne sürülen diğer yaklaşım ise Milterson ve Persson (2005), Olivier ve Jeffery (2004) ve Smith (2005) tarafından geliştirilen *forward oran (forward rate) modelleridir*. Tek boyutlu ölümlülük eğrisini modellemek yerine bu modeller forward yaşam olasılıklarını iki boyutlu olarak modellemektedir.

Kısa dönemli modeller ile forward modeller arasındaki temel farklar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

- Genel olarak kısa dönemli modeller geçmiş veriye daha iyi uyum sağlamaktadır.
- Kısa dönemli modellerin simülasyonu daha kolaydır.
- Kısa dönemli modellerde kuponsuz bonoların sıfır zamanındaki fiyatları doğrudan hesaplanabilmektedir; ancak forward modellerde bu fiyatlar sadece bilgi olarak alınmaktadır.

- Daha kompleks hayat sigortaları sözleşmelerinde gelecekte bir T tarihinde sözleşmenin değeri T zamanındaki yaşam olasılığını içeren T zamanındaki hayat tablosuna bağlıdır. Kısa dönemli modellerde bu tablo $X(T)$ değişkeninin basit bir fonksiyonu olarak yer almamaktadır. Bunun yerine $X(T)$ 'nin her bir simülasyonu forward yaşam olasılıklarını elde edebilmek için T zamanına kadar başka bir simülasyon daha gerektirir. Ancak forward olasılıklarda T zamanındaki yaşam olasılıkları doğrudan elde edilmektedir. Bu sebeple sözleşmelerin fiyatlandırılmasında forward modellerin kullanılması daha uygundur (Cairns, 2007).

Bu çalışmada $S(t)$ ölümlülük sürecini modellemek amacı ile hem kısa dönemli model hem de forward model kullanılmıştır. Kullanılan modeller Lee-Carter (LC) ölümlülük modeli ve Oliver-Smith ölümlülük modelidir.

Modellerden ilki kısa dönemli modellere örnek olarak seçilmiştir. İkinci model ise forward modele örnek olarak seçilmiştir.

4.2.2. Lee-Carter Modeli

LC modeli, ölümlülük modellerinin olasılıksal bir süreç olarak ifade edilmesini sağlayan ilk örnektir. Modelde örneklem hatalarından sapmalar tanımlanmış ve böylece süreç riski dikkate alınmıştır. LC yöntemi oldukça etkili sonuçlar elde edilmesini sağladığından, birçok yeni modelin geliştirilmesine yol açmıştır (Pitacco et al., 2009).

1992 yılında Lee ve Carter tarafından geliştirilen LC yöntemi x yaş grubuna ve t zaman değişkenlerine sahip basit bir bilinear modeldir. Bu model,

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\sum_t k_t = 0 \text{ ve } \sum_x b_x = 1$$

kısıtlarına sahiptir. Burada,

$m_{x,t}$: x yaşı ve t yılı için ölüm hızını,

a_x : yaşa özel ortalama ölümlülük yapısını,

k_t : zamana bağlı genel ölümlülük düzeyini temsil eder.

b_x : Zamana bağlı genel ölümlülük düzeyinin değişiminde x yaş grubundaki ölüm hızının logaritmasının duyarlılığını belirtir. Prensipde, b_x bazı yaş gruplarında negatif olabilir. Bu, ölümlülüğün diğer yaş gruplarında azalırken o yaş grubunda arttığını anlatır. Fakat bu durum veri setlerinde genelde gözlenmez.

$\varepsilon_{x,t}$: Ortalaması sıfır ve sabit varyansa sahip olan hata terimidir. Model tarafından yakalanamayan tarihsel etkiyi yansıtır (Brouhns, Denuit, Vermunt, 2002).

Zaman bileşeni k_t , ölüm hızlarının logaritmalarının zaman içerisindeki genel değişimini göstermektedir. Oysaki ölüm hızlarında gerçekleşen genel değişimin tüm yaşlar için aynı oranda olması beklenemez. Örneğin, genelde 50 yaş ve üzeri bireylerde rastlanan ve ölümcül olan pankreas kanseri hastalığının tedavisinin keşfi, yaşlı ölüm hızlarında büyük bir düşüşe sebep olabileceken, çocuk ölümlülüğünde bir değişime neden olmayabilir. Dolayısıyla ölümlülüğün genel seviyesinde gerçekleşebilecek herhangi bir düşüşün her yaşa etkisi farklı olacaktır. Bu değişimlerin, etkisinin her yaş grubuna ayrı tanımlanmasını sağlayan b_x parametresidir. a_x parametresi ise, her yaş grubu için yıllar üzerinden ortalama alınarak bulunan, dolayısıyla t zaman indisinden arındırılan, yaşa özel ölümlülük düzeyidir. σ_ε^2 varyanslı ve sıfır ortalamalı olduğu kabul edilen $\varepsilon_{x,t}$ hata terimleri ise model tarafından yakalanamamış artık değerleri temsil etmektedir.

Lee ve Carter (1992) çalışmasında iki aşamalı bir tahmin süreci izlemiştir. Buna göre ilk aşamada b_x ve k_t tahminlerinin elde edilebilmesi için $\{\log(m_{x,t}) - a_x\}$ matrisine tekil değer ayrıştırma yöntemi uygulanmıştır. İkinci aşamada ise k_t zaman serisi *ikinci aşama kestirimi* yöntemi ile yeniden tahmin edilmektedir. Lee ve Carter b_x ve k_t tahminleri yardımı ile bulunan tahmini ölen kişi sayılarının,

gözlemlenen kişi sayılarını gösteren $D_t \equiv \sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ ile tam örtüşmediğini görmüştür.

Bu sebeple tahmini ölen kişi sayıları ile gözlemlenen ölen kişi sayılarını birbirine eşit yapan k_t değerleri ikinci aşama kestirimleri ile bulunmaya çalışılmıştır:

$$D_t = \sum_x \{ \exp(a_x + b_x k_t) N_{x,t} \}$$

Eşitlikteki D_t ifadesi t yılında ölen kişi sayısını gösterirken $N_{x,t}$, t yılında x yaşında olan bireylerin sayısını göstermektedir.

Birinci aşama kestirimi için birçok model önerilmiştir. Wilmoth (1993) birinci aşama kestirimi için iki alternatif yöntem geliştirmiştir. Bunlar ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemidir.

Tekil değer ayrıştırma yöntemi, ağırlıklandırılmış en küçük kareler ve en çok olabilirlik tahmin yöntemi birinci aşama kestirimi için en sık kullanılan modellerdir. Marie Claire Koissi, Arnold Shapiro ve Göran Högnas bu üç yöntemi karşılaştırmışlar ve ölümlülük indeksi k_t için en iyi tahmin yönteminin tekil değer ayrıştırma yöntemi olduğunu belirtmişlerdir (Wang, 2007).

4.2.2.1. Model Parametrelerinin En küçük Kareler Yöntemi İle Tahmini

LC modelinde yer alan a_x , b_x parametrelerinin ve k_t ölümlülük indeksinin, gözlemlenmiş değerler yerine, tahmin edilmesi gereken parametreler şeklinde yer almasından dolayı basit regresyon yaklaşımı ile sonuç elde edilemez. Ancak *tekil değer ayrıştırma* (TDA) ile yapılan en küçük kareler (EKK) yöntemi model parametrelerinin bulunmasında kullanılabilir.

$$\sum_{x,t} (\ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2$$

Yukarıdaki fonksiyonu minimize eden parametrelerin tahmin değerlerinden oluşan a_x , b_x ve k_t vektörleri bulunur. $\ln(m_{x,t})$ matrisinde zaman boyutu üzerinden ortalama alınarak elde edilen a_x vektörünün, $\ln(m_{x,t})$ matrisinden çıkartılarak

oluşturulan $Z = [\ln(m_{x,t}) - a_x]$ matrisine TDA yöntemi uygulanırsa, EKK yöntemi ile parametre tahmini yapılmış olur (Haberman ve Russolillo, 2005).

4.2.2.2. Tekil Değer Ayrıştırma Yöntemi

a_x parametre vektörü,

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t}), \quad \sum_x b_x^2 = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_t k_t = 0$$

eşitlikleri yardımı ile logaritmik merkezi ölüm oranlarının ortalaması alınarak kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Bunun sonucunda ise

$$ULV' = SVD(Z_{x,t}) = L_1 U_{x1} V_{t1} + \dots + L_x U_{xX} V_{tX}$$

matrisleri elde edilmektedir. Eşitlikteki ilk terim yaklaşık olarak $b_x = U_{x1}$ ve $k_t = L_t V_{t1}$ tahminlerini ifade etmektedir. TDA yöntemi aşağıdaki adımlara uygun olarak kullanılmaktadır:

1. $a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=t_1}^{t=t_n} \ln(m_{x,t}), \quad Z_{x,t} = [\ln(m_{x,t}) - a_x]$
2. b_x ve k_t tahminlerini elde edebilmek için $Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - a_x = b_x k_t$ matrisi oluşturulur.
3. $Z_{x,t}$ matrisine TDA yöntemi uygulanıp, $Z_{x,t}$ matrisi üç matrisin çarpımı şeklinde ifade edilir: $ULV' = SVD(Z_{x,t}) = L_1 U_{x1} V_{t1} + \dots + L_x U_{xX} V_{tX}$. Eşitlikteki U matrisi yaş bileşenini gösterirken, L ve V matrisleri, sırasıyla, tekil değerleri ve zaman bileşenini göstermektedir.
4. k_t zaman bileşeni matrisi ve tekil değer çarpımından oluşan ilk vektörden elde edilirken ($k_t = L_t V_{t1}$), b_x ise U_{x1} yaş bileşeni vektöründen elde edilir.
5. b_x ve k_t parametre tahminlerinin çarpımından yeni bir $Z_{x,t}$ matrisine ulaşılabacaktır, $Z_{x_1,t_1} = \hat{b}_{x_1} k_{t_1}$.

$$Z_{x,t} = \begin{pmatrix} Z_{x_1,t_1} & \cdots & Z_{x_1,t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{x_A,t_1} & \cdots & Z_{x_A,t_n} \end{pmatrix} b_x$$

6. Merkezi ölüm oranlarının logaritması tahmin edilir,

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + Z_{x,t} = a_x + b_x k_t .$$

(Koissi et al., 2004).

4.2.2.3. İkinci Aşama Kestirimi

İlk aşama kestirimi ölüm oranlarının yerine logaritmalarına bağlı olarak yapıldığından, tahmini ölüm sayıları ile gerçekleşen ölüm sayıları arasında ölçülebilir farklılıklar ortaya çıkabilmektedir. Tahmini ölüm sayıları ile gerçekleşen ölüm sayıları arasında tutarlılığın sağlanabilmesi için a_x ve b_x kestirimlerinin ilk aşamada elde edilen değerleri korunarak, k_t değerleri yeniden kestirilmektedir.

Her bir t yılına ilişkin yeni k_t değeri; birinci aşamada elde edilen k_t değeri, gözlemlenen toplam ölüm sayısını gösteren $\sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ ile beklenen toplam ölüm

sayısını gösteren $\sum_{x_1}^{x_k} N_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)}$ birbirine eşit oluncaya kadar yapılan yinelemeli

bir çalışma ile elde edilmektedir. Yineleme yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Toplam beklenen ölüm sayısı $\sum_{x_1}^{x_k} N_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)}$ ile gerçekleşen toplam ölüm

sayısı $\sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ her bir periyotta karşılaştırılır.

2. Bu karşılaştırma sonucu aşağıdaki üç olası durumdan biriyle karşılaştırılır:

a. Eğer $\sum_{x_1}^{x_k} N_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)} > \sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ ise beklenen ölüm sayısını azaltmak

amacı ile k_t değeri düzeltilmelidir. d değeri oldukça küçük bir sayı,

$k_t^{(1)}$ ilk kestirim değeri ve $k_t^{(2)}$ de ikinci kestirim değeri olmak üzere,

$$k_t^{(2)} = \begin{cases} k_t^{(1)}(1-d), k_t^{(1)} > 0 \\ k_t^{(1)}(1+d), k_t^{(1)} < 0 \end{cases}$$

şeklinde yeni k_t değeri elde edilir.

b. Eğer $\sum_{x_1}^{x_k} N_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)} = \sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ ise yinelemeye son verilmelidir.

c. Eğer $\sum_{x_1}^{x_k} N_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)} < \sum_{x_1}^{x_k} D_{x,t}$ ise beklenen ölüm sayıları artırmak

suretiyle k_t değeri düzeltilmelidir. Bu durumda,

$$k_t^{(2)} = \begin{cases} k_t^{(1)}(1+d), k_t^{(1)} > 0 \\ k_t^{(1)}(1-d), k_t^{(1)} < 0 \end{cases}$$

eşitliği yardımı ile yeni k_t değeri elde edilir.

3. Birinci adıma geri dönülür (Haberman ve Russolillo, 2005).

Bu yineleme yöntemleri ile modelin birinci aşama kestiriminde logaritmik dönüşüm nedeniyle yakalanamayan farklılıklar düzeltilmiş olacaktır.

4.2.3. Olivier and Smith Ölümlülük Modeli

Olivier ve Jeffery (2004)'nin modeli $T=t, t+1, \dots$ zamanları ve bütün x yaşları için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$p_Q = (t+1, T, T+1, x) = p_Q(t, T, T+1, x)^{b(t+1, T, T+1, x)G(t+1)}$$

Eşitlikteki $G(1), G(2), \dots$ bağımsız ve aynı dağılımlı Gamma dağılımına sahip, ölümlülük şoklarını ifade eden rastgele değişkenleri göstermektedir. Hepsinin şekli

aynıdır, parametreleri sabit ve α 'ya eşittir. Bu rastgele değişkenler ölümlülüğün bir sonraki sene için gelişimini göstermektedir. $b(t+1, T, T+1, x)$ ise M_t -ölçülebilir normalleştirilmiş düzeltme faktörüdür. Arbitrajsız piyasa koşulları altında bütün $T > t$ zamanları ve x yaşları için yaşam olasılığı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Cairns, 2007).

$$p_Q(t, t, T, x) = E_Q[p_Q(t+1, t, T, x) | M_t]$$

Ölümlülüğün modellenenebilmesi için bazı tanımlamaların yapılması gerekmektedir. $p_Q(t+1, T, T+1, x)$, $t+1$ zamanında elde edilen bilgiye göre sıfır zamanında x yaşında olan bir bireyin T zamanında hayatta olup $T+1$ zamanına kadar yaşaması olasılığını ve $S(t, x)$ de swap düzenlendiği zamandaki temel alınan yaşam tablosuna göre sıfır zamanında x yaşında olan bir bireyin t zamanına kadar yaşama olasılığını göstermektedir. $S(t, x)$ 'in daha genel bir şekilde açıklanması gerekirse, M_t , t zamanına kadar ölümlülüğün gelişimi hakkında filtrasyon üreten (filtration generated) fonksiyon olsun. Böylece $S(t, x)$ M_t -ölçülebilirdir (M_t -measurable). Kısaca verilen bir M_t bilgisinde $S(t, x)$, x yaşındaki bir bireyin $x+t$ yaşına kadar yaşaması olasılığını vermektedir. (Cairns, Blake, Dowd, 2008).

Filtrasyon M_t bize yalnızca dayanak ölümlülüğün dinamikleri hakkında, yani sadece ölümlülüğün gelişimi ile ilgili bilgi vermektedir. Popülasyondaki bireylerin ölüm zamanları hakkında bilgi vermemektedir. Bir ölümlülük süreci, $t-1$ zamanındaki değeri biliniyorsa tahmin edilebilirdir. M_t de t zamanında elde edilebilir bilgidir. Bilgi miktarının zaman içinde azalmadığı varsayımı unutulmamalıdır (Moller ve Steffensen, 2007).

$I(t)$, sıfır ya da t zamanında birey yaşıyorsa 1'i, yaşamıyorsa 0'ı gösterecek bir gösterge değişkeni olarak tanımlanmaktadır. Bütün bu tanımlamalardan yola çıkılırsa $S(t, x)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\Pr[I(t) = 1 | M_t] = S(t, x)$$

$$\Pr[I(t) = 1 | M_u] = S(t, x), \text{ bütün } u \geq t \text{ için (Cairns, Blake, Dowd, 2008).}$$

$p_Q = (t+1, T, T+1, x)$ yaşam olasılığı Cairns, Blake ve Dowd (2006)'un çalışmasına göre *forward ölümlülük olasılığı*dır. Bu olasılığı daha genel bir şekilde açıklayabilmek için öncelikle birkaç temel varsayım yapılması gerekmektedir. İlk olarak arbitrajın olmadığı bir ortamda fiyatlandırma yapıldığı varsayılmaktadır. Arbitrajın olmadığı ortamda fiyatlandırma yapılması demek Q gibi bir olasılık ölçütünde bütün fiyatların martengal (risk nötral) olması demektir.

Q olasılık ölçütü altında yaşam olasılıkları aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir.

$$p_Q(t, T_0, T_1, x) = \Pr_Q[\tau_x > T_1 | \tau_x > T_0, M_t] = \frac{E_Q[S(T_1, x) | M_t]}{E_Q[S(T_0, x) | M_t]}$$

$$\Pr_Q[\tau_x > T_1 | \tau_x > T_0, M_t] = \frac{S(T_1, x)}{S(T_0, x)}$$

Eşitlikteki τ_x ifadesi 0 zamanında x yaşında olan bir bireyin gelecek yaşam zamanını göstermektedir. $p_Q(t, T_0, T_1, x)$ olasılığı ise t zamanında ulaşılabilir olan bilgiye göre x yaşındaki bir bireyin T_0 zamanına kadar yaşaması ve daha sonra T_1 zamanına kadar yaşaması olasılığıdır. Yani yaşam olasılığı iki parçaya ayrılabilir: Birinci parça bireyin T_0 zamanından t zamanına kadar yaşaması olasılığından oluşmaktadır. Bu olasılık t zamanında ölçülebilir. İkinci parça ise t zamanından T_1 zamanına kadar yaşama olasılığının tahminidir. Buradan genel olarak $E_Q[S(T, x) | M_u]$ ifadesi Q ölçütü altında martingaldir. Bu ifade aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$E_Q[S(T, x) | M_{t+1}] = p_Q(t, 0, t, x) \times p_Q(t+1, t, t+1, x) \times p_Q(t+1, t+1, T, x)$$

Yukarıdaki eşitlikte $p_Q(u, 0, t, x)$ ifadesi $u=t$ zamanına kadar bilinmekte ve t zamanından sonra değişmemektedir. Böylece $p_Q(u, 0, t, x) = p_Q(t, 0, t, x)$ ifadesi bütün $u>t$ için yazılabilmektedir. İkinci olarak $p_Q(u, t, t+1, x)$ ifadesi $u=t$ ve $u=t+1$ arasında değişecektir fakat $u>t+1$ olduğundan sabit kalacaktır. $u=t+1$ zamanından

sonra $p_Q(u, t, t+1, x)$ ifadesi $S(t+1, x)/S(t, x)$ 'in gözlemlenen değeri olacaktır. Üçüncü bileşen ise t+1 zamanından sonra hala değişkenlik gösterecektir.

$p_Q(u, 0, t, x)$ ifadesi t zamanından t+1 zamanına kadar sabit kaldığı için Q ölçümü altında martingal olma özelliğinden dolayı bütün t zamanları ve x yaşları için $p_Q(t, t, T, x) = E_Q[p_Q(t+1, t, T, x) | M_t]$ olmaktadır (Cairns, 2007).

$b(t+1, T, T+1, x)$ normalleştirme katsayısı 1'e çok yakın bir değer olduğu için hesaplamaların pratikliği açısından modele dahil edilmemiştir (Dawson et al., 2009).

$p_Q(s, t, u, x)$ olasılığı risk düzeltmeli bir olasılıktır. Bu olasılığın hesaplanabilmesi için $p_Q(0, 0, u, x)$ ve $p_Q(u, 0, u, x)$ olasılıklarının bilinmesi gerekmektedir. Bu olasılıklardan birincisi u'ya kadar yaşama olasılığı tahmini, ikincisi ise gerçek yaşam olasılığını göstermektedir. Buradan yola çıkılarak S(t) ölümlülük süreci birer yıllık olasılıkların çarpımı olarak modellenmiştir.

$$S(t) = p_Q(1, 0, 1, x) \times p_Q(2, 1, 2, x) \times \dots \times p_Q(u, u-1, u, x)$$

Her bir t için 1 yıllık gelecek yaşam olasılıklarının bağımsız ve aynı dağılımlı olan rastgele şoklara maruz kaldığı varsayılmaktadır. Fakat öncelikle $p_Q(0, t-1, t, x) = S(t, x)/S(t-1, x)$ olasılığının t-1 zamanından t zamanına kadar ölümlülük tablosunda hiçbir değişim olmadığı varsayımı altında hesaplanması gerekmektedir (Dowd et al., 2006).

Gamma dağılımı sadece ölümlülüğün gelişimini göstermektedir. Ancak ölümlülüğün bir sonraki sene gelişmesi ya da ölümlülük oranlarında önemli bir artış olması durumu söz konusu olabilir. Bu çalışmada gamma dağılımı ve ek olarak gamma dağılımı yerine ölümlülüğün gelişimi ile ilgili her iki olasılığı göstermek amacı ile beta dağılımı kullanılmıştır. Bir çok çalışmada olduğu gibi $b(t+1, T, T+1, x)$ hesaplamalara dahil edilmemiştir. Böylece yaşam olasılıkları gamma dağılımlı O-S modeli ile aşağıdaki şekilde tahmin edilmiştir.

$$p_Q(t+1, T, T+1, x) = p_Q(t, T, T+1, x)^{G(t)}$$

Beta dağılımlı O-S ile Dowd et al. (2006) çalışması izlenerek aşağıdaki şekilde tahmin edilmiştir.

$$p_Q = (t+1, T, T+1, x) = p_Q(t, T, T+1, x)^{\varepsilon(t)}$$

$\varepsilon(t)$ 'lerin birbirlerinden bağımsız oldukları varsayımı altında taşınması gereken özellikler şu şekilde sıralanabilir:

1. $\varepsilon < 1$ olması durumu risk nötral fiyatlandırma varsayımı altında yaşam olasılıklarının beklenenden daha yüksek gerçekleştiğini, $\varepsilon > 1$ olması durumu ise tam tersini göstermektedir.
2. Risk nötral fiyatlandırma ölçütü altında ε 'nin ortalaması 1'dir.
3. Gerçek fiyatlandırma ölçütünün olduğu durumda ε 'nin ortalaması $1 - \mu$ 'ye eşittir. Böyle bir durumda ölümlülük oranlarında yüzde ikilik bir azalma beklenmesi demek ε 'nin ortalamasının $1 - 0.02 = 0.98$ olması demektir.
4. ε aynı zamanda bir sonraki senenin tahmin edilen hatası olarak da ifade edilebilir. Eğer beklentiler ya da tahminler rasyonelse, tahmin hatalarının da zamandan bağımsız olması gerekmektedir (Dawson et al., 2010).

ε 'nin olasılığa dahil olması ile yaşam olasılığı t zamanına kadar her yıl uzun ömürlülük şoklarından etkilenmektedir. Bu durumda uzun ömürlülük şoklarının da dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Uzun ömürlülük şokları olan $\varepsilon(s)$ 'ler $[0, 2]$ aralığında değişmelidir. Bunun sebebi $\varepsilon(s) < 1$ olduğunda ölümlülüğün beklenmedik şekilde geliştiği gösterilebilmeli, $\varepsilon(s) > 1$ olduğunda ise ölüm oranlarının beklenmedik şekilde arttığı gösterilebilmelidir. Bu sebeple $\varepsilon(s)$ beta dağılımının bir dönüşümü olarak alınmaktadır. Beta dağılımı çoğunlukla örnekler üzerinde bazı değişkenlerin farklı kısıtlara göre değişimini incelemek için kullanılmaktadır. Beta dağılımı a ve b olmak üzere iki parametreye sahip, oldukça esnek bir dağılımdır. Parametrelerin değerleri dağılımın şeklinin istenilen şekilde ayarlanabilir olmasını sağlamaktadır. Ancak beta dağılımı $[0, 1]$ aralığında değiştiği için $\varepsilon(s) > 1$ olduğu durumun incelenmesi mümkün değildir. Aralığı genişletmek amacı ile $y(s)$ beta dağılımına sahip bir değişken olarak alınmaktadır. $\varepsilon(s)$ ise $y(s)$ 'in bir dönüşümü olarak alınacaktır.

$$\varepsilon(s) = 2y(s)$$

Yukarıdaki dönüşüm rastgele şokların değişim aralığını $[0,2]$ yapmıştır. Aynı zamanda, $\varepsilon(s)$ 'in dağılımın genel şekli dayanak beta dağılımını yansıtmaktadır. Dönüşüm sayesinde istenilen aralık sağlanmış ve aynı zamanda beta dağılımının esnekliği de korunmuştur.

Dayanak beta dağılımının tanım aralığı içerisinde tek tepeli olması istenmektedir. Parametrelerin birden büyük alınması bu durumu sağlayacaktır. Beta dağılımının ortalaması ve varyansı, $a/(a+b)$ ve $ab/[(a+b)^2(a+b+1)]$ 'dir. $\varepsilon(s)$ 'in ortalama ve varyansı ise $E(\varepsilon(s)) = 2.y(s)$ ve $Var(\varepsilon(s)) = 4Var(y(s))$ olacaktır. Böylece $a > b$ alındığında $\varepsilon(s)$ 'nin ortalaması pozitif ve $a < b$ alınırsa da ortalama negatif olacaktır. Prensip, a ve b 'nin değerleri uygun bir stokastik ölümlülük modeli ile belirlenmektedir ancak istediğimiz sonuçlara ulaşabilmemiz için varsayımsal olarak sadece her biri farklı bir stokastik senaryoyu açıklayacak olan iki farklı değer serisinin uygulanması yeterli olacaktır. Uygulanacak olan değer serileri Lin ve Cox (2005) çalışmasında elde edilen, ölümlülüğün gelişimini ve artışını göstermek amacı ile kullanılan serilerdir. İlk varsayım ölümlülüğün önemli seviyede geliştiğini göstermesi amacı ile $a=1.49$ ve $b=147.51$ alınarak $\varepsilon(s)$ 'in ortalaması %2, standart sapması ise %1.6 olduğu senaryodur. İkinci varsayım ölümlülüğün önemli ölçüde arttığı yani $\varepsilon(s)$ 'in ortalamasının 1.98, standart sapmasının ise %1.6 olduğu senaryodur. Üçüncü senaryonun ortalaması ve varyansı $a=147.51$ ve $b=1.49$ alınarak elde edilmiştir. Ölümlülük şoklarının bu şekilde alınmasının sebebi anlık ölümlülük oranı üzerindeki yüzdelerdeki değişimleri göstermektir.

Bu stokastik ölümlülük modelleri sigortacının karşılaştığı bütünsel ölümlülük riskini tanımlamaktadır (Dowd et al., 2006).

4.3. Fiyatlandırma

4.3.1. Vanilla Yaşam Swaplarının Fiyatlandırma Yapısı

Vanilla yaşam swapının fiyatlandırılmasındaki temel nokta t zamanındaki rastsal ödemenin bir ölümlülük indeksine bağlı olmasıdır. Bu ölümlülük indeksi belirli bir gruba bağlı olarak hesaplanabileceği gibi belirli bir yerdeki tüm popülasyona bağlı olarak da hesaplanabilmektedir. Swap anlaşmasının başlangıcında, iki taraf t zamanında sabit tutar $H(t)$ ile değişken tutar $S(t)$ 'nin takas edilmesi üzerine anlaşılır. Swapın t anındaki ödemesi ise $H(t)$ ile $S(t)$ arasındaki fark kadardır. Bu

tutarı t zamanında, hangi tarafın sahip olduğu değer daha yüksekse o taraf yapmaktadır.

VSS'nin sabit kısmı olan $H(t)$, referans alınan ölümlülük tablosuna göre tahmin edilmiş olan kısımdır ve π ise sabit oranlı bir primi ifade etmektedir. $S(t)$, t gelecek zamanındaki bir yaşam indeksi ile bağlantı kuran rasgele tutardır. VSS'in önceden belirlenmiş olan karşı tarafa ödemesi eğer tutar pozitif ise $(1 + \pi) H(t) - S(t)$, tutar negatif ise $S(t) - (1 + \pi) H(t)$ olmaktadır. Faiz swaplarında da olduğu gibi swapın başlangıç değeri her iki taraf için sıfır olmalıdır. Bu durumda swap priminin $S(t)$ 'nin bugünkü değeri ile $(1 + \pi) H(t)$ 'nin bugünkü değerini birbirine eşit yapabilecek bir değer olması gerekmektedir. Swap yürürlüğe girdikten sonra değeri, referans popülasyonun yaşam deneyimlerine göre değişkenlik gösterecektir.

$$\text{Swapın Değeri} = V[S(t)] - V[(1 + \pi)H(t)] = V[S(t)] - (1 + \pi)V[H(t)]$$

π swapın değerini sıfıra eşitlemesi gerektiği için eşitlik sıfıra eşitlenerek çözüldüğünde swapın primi elde edilmektedir (Dowd et al., 2006).

$$\pi = \frac{V[S(t)]}{V[H(t)]} - 1$$

Swapın sabit kısmı olan $H(t)$ 'nin değeri standart bugünkü değer yöntemleri ile elde edilebilmektedir. Ancak değişken kısım olan $S(t)$ ise ölümlülüğün tahminine bağlı olarak farklı fiyatlandırma yöntemleri ile belirlenmektedir.

4.3.2. Fiyatlandırma Yöntemleri

4.3.2.1. Sigorta Fiyatlandırmasının Temelleri

Sigorta matematiğini anlatan herhangi bir kitap, *gerçek sigorta primini* tanımlar ve prim hesaplama prensiplerini, gerekli olan yükleme faktörleriyle birlikte anlatır. Örneğin, Bowers, Gerber, Hickman, Jones ve Nesbitt (1989) sigorta primlerinin hesaplanmasını fayda kuramı çerçevesinde incelemişlerdir.

Fayda kuramı, karar verme mekanizmasında belirsizlik durumunda devreye giren doğal bir araçtır. (Ω, F, P) olasılık uzayından bir rasgele değişken olan ekonomik bir çıktının değerinin belirlenmesinde beklenen değer kuramı *aktüeryal değeri* vermektedir. Bu durum $E(X)$ ile ifade edilmektedir. X rastlantı değişkeni ile

gösterilen ekonomik çıktının beklenen değeri P olasılık ölçümü altında aktüeryal değeri vermektedir. Beklenen değer tek başına prim ilkesi olarak yetersiz kalmaktadır, bu durumda prim belirleme eşitliğine bir u fayda fonksiyonu dahil edilmektedir.

$$u(w - \pi) = E(u(w - X))$$

Yukarıdaki eşitliğe göre w sigortacının inceleme anındaki varlığını, π ise $u(x)$ fayda fonksiyonu verildiğinde X hasarını karşılamak için alınan primi göstermektedir. Bunun anlamı, $u(x)$ fonksiyonu R üzerinde tanımlı $u'(x) > 0$ ve $u''(x) < 0$ olmak üzere iki kez türevi alınabilir, artan bir fonksiyondur. Jensen eşitsizliğine göre u 'nun konkav olması durumunda $\pi \geq E[X]$ eşitsizliği yazılabilmektedir. X rastsal hasarları karşılığında Θ primini alan, k başlangıç sermayesine ve $v(x)$ fayda fonksiyonuna sahip bir sigortacıya ilişkin prim elde etme eşitliği ise aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$v(k) = E[v(k + \Theta - X)]$$

Buradan yine sigortacının riskten kaçınan bir birey olması durumunda $\Theta \geq E[X]$ olacaktır. Bu çerçevede $\pi \geq \Theta \geq E[X]$ eşitsizliği sağlandığı sürece sigorta sözleşmelerinin yürürlükte kalabileceği söylenebilir.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones ve Nesbitt (1989) kitabında aşağıdaki şekilde özetlemektedir:

Bir fayda fonksiyonu çıktıların çeşitli dağılımları için karar vericinin tercihlerine dayanmaktadır. Bir sigortacının bireysel olması gerekmemektedir. Bir ortaklık, özel bir şirket ya da devlet acentesi olabilir. v 'nin belirli şekillerde seçilmesi durumunda, sigortacının fayda fonksiyonu daha karmaşık olabilir. Örneğin, eğer sigortacı bir şirket ise, yöneticilerden birinin görevi çeşitli riskli sigorta sözleşmeleri için birbiri ile uyumlu bir dizi tercihi formüle etmektir.

Fayda fonksiyonu olan v 'nin belirli şekillerde seçilmesi ile birçok çeşit prim hesaplama ilkesi elde edilebilir.

a) *Net Prim Prensibi*: Yalnızca riske duyarsız sigortacılar için yeterli olmaktadır

$$\Theta = E[X]$$

Net prim prensibine çeşitli yüklemeler yapılarak diğer prensipler elde edilebilir:

- i. *Beklenen Değer Prensibi*: $\Theta = E[X] + \delta E[X]$, $\delta > 0$;
- ii. *Varyans Prensibi*: $\Theta = E[X] + \delta \text{Var}(X)$, $\delta > 0$;
- iii. *Standart Sapma Prensibi*: $\Theta = E[X] + \delta (\text{Var}(X))^{1/2}$, $\delta > 0$;
- iv. *Yarı-Varyans İlkesi*: $\Theta = E[X] + \delta E[(X - E[X])^+]^2$, $\delta > 0$.

Yukarıdaki prensipler ile belirli bir zaman içerisindeki iflas olasılıkları ile prim büyüklükleri arasında ilişki kurulabilmektedir. Bu nedenle yükleme faktörü de yükümlülük karşılama yeterliliğini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Yükümlülük karşılama yeterliliği, belirli bir zaman aralığındaki risk sürecinin iflas tahminlerinden yola çıkılarak tahmin edilmektedir.

b) Prim prensipleri fayda teorisi ile belirlenmektedir. Net prim prensibinin yanında aşağıdaki prensiplerde oldukça önemlidir:

- i. *Üstel İlkesi*: uygun bir $\delta > 0$ için;

$$\Theta = \frac{1}{\delta} \log E(e^{\delta X}).$$

Bu durumda fayda fonksiyonu olan $u(x) = -e^{-\delta x}$, üstel fayda ilkesi olarak adlandırılmaktadır. δ ise sabit riskten kaçınma faktörünü göstermektedir.

c) *Yüzdellik İlkesi*: Hasar değişkeni X 'in F dağılım fonksiyonuna sahip olduğu varsayılırsa, F 'in genelleştirilmiş ters fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$F^{\leftarrow}(y) = \min\{x \in R : F(x) \geq y\}, 0 < y < 1.$$

Bu durumda $(1-\varepsilon)$ yüzdellik ilkesi $\Theta = F^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ eşitliğine yakınsar. Finanstaki kullanılan birçok risk yönetim sisteminin VaR hesaplamalarında bu yöntem sıklıkla kullanılmaktadır (Basle Committee, 1996). Artzner, Delbaen, Eber ve Heath (1996) yılındaki çalışmalarında, $\Theta = F^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ tutarlı risk ölçüsünün sağlaması gereken alt-toplamsallık (sub-additivity) özelliğini sağlamadığını göstermişlerdir. Embrechts, McNeil ve Straumann 1999 yılındaki çalışmalarında VaR'daki başarısızlığın sebebini araştırmak amacıyla ile VaR'ı Birleşik Risk Yönetiminin Temel Teoremleri

(Fundamental Theorems of Integrated Risk Management) kapsamında incelemişlerdir ve çalışmalar sonucunda VaR'ın kullanım için uygun bir ölçüm olmadığına karar vermişlerdir.

d) *Esscher İlkesi*: Uygun bir $\delta > 0$ parametresi için Esscher primi:

$$\Theta = \frac{E(Xe^{\delta X})}{E(e^{\delta X})}$$

Bühlman (1980) Esscher ilkesi için risk değişimi, denge fiyatlandırma ve Borch Teoremi'ne (Borch, Denuit,.... 1962) bağlı olarak bir ekonomik temel oluşturmuştur.

Yukarıda verilen standart prim ilkelerinin yanı sıra; Θ priminin rastlantı değişkeni olarak tanımlanması durumu için de alternatif bir yaklaşım geliştirilebilir. Θ priminin özellikleri isteğe bağlı olarak düzenlenebilir. Konveks olma, özyineleme, sıranın korunması ve sağlamlık gibi birtakım özelliklerin sağlanabilmesi için bazı homojenlik ve toplamsallık özelliklerinin incelenmesi gerekmektedir. Birçok uygulamada üstel, standart sapma ve varyans ilkeleri kullanılmıştır (Heilmann, 1987). Bühlmann ise portföyün tamamına ilişkin primin standart sapma ilkesi ile bulunmasını, bireysel risklere ilişkin primin ise elde edilen primin beklenen değer ya da varyans ilkesi ile dağıtılarak yeniden hesaplanmasını önermiştir (Bühlmann, 1984). Artzner, Delbaen, Eber, Heath (1996) çalışmalarında bu önerilere benzer bir yaklaşım ile finansal risk değerlemesi (VaR) kapsamında ele almıştır (Embrechts, 1997).

4.3.2.2. Finansta Fiyatlandırma

Sigorta alanından finans alanına geçildiğinde dayanak olasılık uzayı olan (Ω, \mathcal{F}, P) 'den, filtrelenmiş olasılık uzayı olarak adlandırılan $(\Omega, \mathcal{M}, (M_t)_{t \geq 0}, P)$ uzayı olarak değiştiği gözlemlenmektedir. (M_t) , geçmişte ve şu anda kullanılmakta olan finans süreçlerini ifade eden M -alt- σ -cebirleri ailesini göstermektedir.

Finans ve sigorta alanlarında fiyatlandırma yapılırken ortaya çıkan farklılıkların temel nedeni, piyasada ulaşılabilir olan bilginin tam olarak nasıl tanımlandığı ile ilgilidir. Arbitrajsız fiyatlandırma çerçevesi incelendiğinde; daha önce tanımlanan X

risk değişkeni $[0, T]$ aralığında değişen bir koşullu hasar değişkeni olmaktadır. T vade süresini göstermek üzere X , M_t ile ölçülebilir (M_t -measurable). Böylece X dayanak süreç yardımı ile T anına kadar ve T 'nin de dahil olduğu bir zaman aralığında elde edilmektedir. $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ ile ifade edilen dayanak süreç; kullanım fiyatı K olan ve vade süresi T olan bir Avrupa alım opsiyonu olması durumunda $X = (S_T - K)^+$ şeklinde yazılabilmektedir.

Bu rastlantı değişkeni, muafiyet miktarının K olduğu, bir hasar fazlası resürans anlaşması ile benzerdir. Sigorta ve finans arasındaki etkileşimi gösteren bir başka örnek ise K kullanım fiyatına sahip Asya opsiyonudur. Bu opsiyona göre

$$X = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+$$
 ifadesi yazılabilmektedir. Böyle bir opsiyon ise hasar oranı

fazlası reasürans anlaşmasına benzemektedir. Sigorta literatüründe olduğu gibi, bu hasarlar aktüeryal prim prensibi olan beklenen değer ilkesi ile P ölçümü altında fiyatlandırılmaya başlanacaktır. Finansal açıdan incelendiğinde, böyle bir fiyatlandırmanın arbitrajsız fiyatlandırma kavramına karşılık geldiği görülmektedir (Embrechts, 1997).

Arbitrajın olmadığı bir durumda koşullu olasılıkların doğru bir şekilde fiyatlandırılması, risksiz faiz oranı olan r 'ye bağlı olarak X 'in t anındaki *doğru değeri* (*correct value*) olarak adlandırılmaktadır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$v_t = E^Q(e^{-r(T-t)} X | M_t)$$

Yukarıdaki eşitliğe bağlı olarak $t=0$ anındaki prim $v_0 = E^Q(e^{-rT} X)$ ile tanımlanmaktadır. Gösterim açısından kolaylık sağlayabilmek için sabit bir r risksiz faiz oranı kullanılmıştır. t anında herhangi bir değer olarak ifade edilebilecek olan v 'ye ilişkin çok daha genel bir model aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$E^Q(\exp\{-\int_t^T r(s) ds\} X | M_t)$$

Burada asıl vurgulanmaya çalışılan nokta faiz oranından çok Q'dur. Adil yani arbitrajsız prim yine beklenen değer ilkesi ile hesaplanmakta ancak Q gibi bir olasılık ölçütü altında hesaplama yapılmaktadır. Risk nötral olasılık ölçütü olan Q; orijinal P ölçüsünü, riskten kaçınılan bir çevrede istenmeyen olaylara daha çok ağırlık verecek şekilde revize etmektedir. Bu durum finansal ekonomilerde *riskin fiyatı* olarak değerlendirilirken, sigorta matematiğinde *güvenlik yüklemesi* olarak açıklanmaktadır. Teoriye göre bazı özel durumlarda Q, P'ye eşit tek bir olasılık ölçüsü olarak ifade edilebilmektedir. Bu durumda (S_t) , bir martingal (martingale) forma dönüşmektedir (Embrechts, 1997). Martingal tek bir olasılık ölçütü altında risk nötral değerlendirilmez. Bir X süreci $(M_t)_{t \geq 0}$ martingal ise,

- $X, (M_t)_{t \geq 0}$ filtrasyonuna uygundur,
- $E[|X_t|] < \infty$
- $E[X_t | M_s] < X_s, s \leq 0$ olmak üzere

Koşullarını sağlamalıdır (Yıldırak, Çalışkan, Çetinkaya, 2008).

$v_0 = E^Q(e^{-rT} X)$ eşitliğinde verilen fiyatı elde edebilmek için, Q ölçüsünün tanımlanması gerekmektedir. Bu noktada *özel durumların (nice cases)* ne oldukları incelenmelidir. Black-Scholes olarak da bilinen geometrik Brown hareketi ve finasta genellikle Cox-Ross-Rubinstein olarak bilinen binom ağaç modeli sözü edilen durumlara örnek olarak verilebilir. Bu durumları özel yapan ise *tamamlanmamış model* olarak bilinmeleridir. Tamamlanmamış model ile anlatılmak istenen; herhangi bir koşullu X hasarının, kendi kendini finanse eden bir ticaret stratejisi ile elde edilebileceğidir. Bu durumda X'in S_t 'ye bağlı bir Ito gösterimine sahip olması gerekmektedir (Jensen ve Nielsen, 1995).

Özet olarak arbitrajın olmaması teorisi (no-arbitrage theory), doğrusal fiyatlandırma fonksiyonlarının önünü açmaktadır. Buna göre eğer piyasada yeterli sayıda temel yapıtaşı mevcutsa ve yeni varlıklar bu yapıtaşlarının doğrusal kombinasyonu olarak elde edilebiliyorsa; bu yapıtaşlarının tek bir fiyatı varsa piyasa *tamamlanmış (complete)* demektir. Eğer piyasada yukarıdaki koşullar sağlanmıyorsa piyasa *tamamlanmamıştır (incomplete)*. Piyasanın tamamlanmış

olması durumunda fiyatlar tektir (Q tektir). Diğer durumda ise yatırımcının belirli tercihlerine ilişkin detaylı bilgi verilmediğinden, fiyatlara ilişkin yalnız sınırlar belirlenebilmektedir (Q tek değildir).

Tamamlanmış piyasalar aşağıdaki durumlarda meydana gelebilir.

- Stokastik oynaklık modellerinde,
- Rasgele büyüklükteki sıçrama (jump) süreçlerinde (örneğin, bileşik poisson süreci gibi).

İlk durumdaki modeller için genel olarak tek bir martingal fiyat yoktur ve yatırımcının elinde bir opsiyon bulundurması oldukça risklidir. Eğer fiyatlandırma fayda maksimizasyonu çerçevesinde yapılıyorsa, tek fiyatlandırma ölçütü ortaya çıkmaktadır. Piyasada bugüne kadar ilgilenilen tüm tamamlanmamış piyasalarda, beklenen hatalar karesinin (expected squared hedge error) minimize edilmesine dayanan Föllmer-Schweizer-Sondermann yaklaşımı kullanılması gerekmiştir (Föllmer ve Sondermann, 1986; Föllmer ve Schweizer, 1989; Dybvig, 1992).

4.3.2.3. Aktüeryal ve Finansal Fiyatlandırma

Atlanta'da 1995 yılında Georgia State Üniversitesi'nde riskin menkul kıymetleştirilmesi üzerine verilen Bowles Sempozyum'unda Morton Lane (Lane, 1996) "Sigortacılıkta tamamıyla doğru bir fiyatlandırma olmadığı için, diğer taraftan piyasada satıcıların ortaya çıkmasını sağlayacak derecede yüksek; ancak alıcıların ikna edilebileceği kadar da düşük belirlenen işlem fiyatları olduğunun" altını çizmiştir. Bu piyasada teklik ve arbitrajsız olma durumu kesin değildir. Bu yüzden piyasa fiyatlarında denklik yoktur. Arbitraj fırsatının olmadığı bu piyasada, prim hesaplama ilkeleri için bir martingal yaklaşımı önerilmiştir. Bu konuyu, Delbaen ve Haezendonck 1989 yılındaki çalışmalarında ele almışlardır. Delbaen ve Haezendonck çalışmalarına $[0, T]$ sonlu zaman aralığındaki temel dayanak risk süreci ile başlamışlardır.

$$X(N_t) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, 0 \leq t \leq T$$

Eşitlikteki (X_k) değişkenleri $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız ve özdeş rastlantı değişkenlerini göstermektedir. (N_t) ise λ yoğunluğuna sahip bağımsız bir Poisson sürecini göstermekte olup, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$N_t = \sup\{n \in N : T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t\}$$

Eşitlikteki (T_k) rastlantı değişkenleri λ parametresi ile üstel dağılıma sahip, bağımsız ve özdeş rastlantı değişkenleridir. T_k rastlantı değişkeni; k. hasar olan X_k 'nin ortaya çıkış anını göstermektedir. (X_k) ve (T_k) süreçlerinin birbirinden bağımsız oldukları varsayılmaktadır.

Yukarıda yapılan tanıma göre $X(N_t)$,

$$P(X(N_t) \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{k*}(x), \quad x \geq 0,$$

dağılımı ile bileşik Poisson süreci olacaktır. Eşitlikteki F^{k*} ifadesi F'in k. konvolasyonunu göstermektedir.

$$F^{k*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq x)$$

Her bir t anında, belli bir ρ_t primine ilişkin $[t, T]$ periyodunda kalan riski devredebileceği düşünülen bir şirket olduğu varsayılırsa, bu durumda fiyat sürecinin yapısı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$S_t = \Theta_t + X(N_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Şirketin t anındaki yükümlülüklerini gösteren S_t iki parçadan oluşmaktadır: ilk parça olan $X(N_t)$, t zamanına kadar ortaya çıkan hasarları gösterirken, diğer parça herhangi bir t anında geriye kalan riski gösteren $X(N_T) - X(N_t)$ 'e ilişkin Θ_t primidir.

Dalbaen ve Haezendonck (1989) bu durumu şu şekilde açıklamışlardır: “t anında alım ve satım yapma olasılığı, poliçenin *devralınması* (*take-over*) olasılığını da gösterecektir. Piyasadaki bu likidite arbitraj fırsatının olmadığına işaret etmektedir. Buradan Harrison-Kreps teoremine göre (Harrison ve Kreps, 1979), Q gibi riske duyarsız bir olasılık dağılımı bulunabilecektir. Buna göre $\{S_t: 0 \leq t \leq T\}$ bir Q-martingal olarak tanımlanabilecektir.”

θ prim yoğunluğunu ve $\Theta_t = \theta(T-t)$, $0 \leq t \leq T$ olmak üzere, birçok reasürans şirketi primlerin doğrusal olmasının Q ölçümü altında risk süreci $\{X(N_t), 0 \leq t \leq T\}$ ’nin, yeterli büyüklükteki bir piyasada, bileşik Poisson sürecine uyduğunu söyleyebilir. Dolayısıyla temel çözüm $\{X(N_t), 0 \leq t \leq T\}$ ’nin bileşik Poisson olması özelliğini koruyan eşdeğer Q ölçümleri olmalarıdır. Arbitraj fırsatı içermeyen sigorta kapsamında, uygun prim yoğunluğu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\theta_Q = E^Q(X(N_1)) = E^Q(N_1)E^Q(X_1).$$

Yukarıdaki eşitlikte gösterilen risk sürecinde, hem hasar büyüklüğünde hem de hasar yoğunluğunda değişim gözlemlenmektedir. Belirli ölçüm koşulları altında, uygun prim ilkeleri elde edilmesini sağlayan Q ölçümleri, dağılım fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$F_Q^{(\beta)}(x) = \frac{1}{E[\exp\{\beta(X_1)\}]} \int_0^x e^{\beta(y)} dF(y), \quad x \geq 0$$

Eşitlikte $\beta: R^+ \rightarrow R$ artan bir fonksiyondur. Buradan $E(\exp\{\beta(X_1)\}) < \infty$ ve $E(X_1 \exp\{\beta(X_1)\}) < \infty$ yazılabilmektedir.

Ortaya çıkan $\theta_{Q(\beta)}$ prim yoğunluğunun, güvenlik yüklemesi de hesaba katıldığında aşağıdaki özellik sağlanmaktadır.

$$\theta_p = E(N_1)E(X_1) < \theta_{Q(\beta)} < \infty$$

β için seçilen özel değerlere bağlı olarak, arbitrajın olmadığı piyasa koşullarına uygun çeşitli prim ilkeleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

a) $\beta \equiv \alpha$ olduğunda,

$$E^{Q(\beta)}(N_1) = e^\alpha E(N_1) = e^\alpha \lambda,$$

$$E^{Q(\beta)}(X_1) = E(X_1), \text{ (Beklenen Değer Prensibi)}$$

b) $\beta(x) = \log(a + bx), b > 0$ ve $a = 1 - bE(X_1) > 0$ olduğunda,

$$E^{Q(\beta)}(N_1) = \lambda,$$

$$E^{Q(\beta)}(X_1) = E(X_1) + b\text{Var}(X_1), \text{ (Varyans Prensibi)}$$

c) $\beta(x) = \alpha x - \log E(e^{\alpha X_1}), \alpha > 0$ olduğunda,

$$E^{Q(\beta)}(N_1) = \lambda,$$

$$E^{Q(\beta)}(X_1) = \frac{E(X_1 \exp\{\alpha X_1\})}{E(\exp\{\alpha X_1\})}, \text{ (Esscher İlkesi)}$$

Meister (1995) elde edilen temel sonucun ispatını yaparak, yaklaşımı karışık Poisson ve çift stokastik Poisson süreçlerine genellemektedir. Ayrıca elde ettiği sonuçları CAT vadeli işlem sözleşmesini fiyatlandırmak için kullanmıştır. Venter (1991) ise reasürans işlemlerindeki arbitrajsız fiyatlandırmalar üzerinde ayrıntılı bir inceleme yapmıştır.

Yeterli derecede likit bir sigorta ya da reasürans piyasasında, sigortacılıktaki klasik prim ilkeleri, arbitrajın olmadığı standart fiyatlandırma ilkelerine göre yorumlanabilmektedir. Öne sürülen gerekli likidite varsayımları, özellikle katastrofik risklerin fiyatlandırılmasında çok gerçekçi olmayabilir. Chicago Board of Trade tarafından CAT vadeli işlem sözleşmelerinin 1992 yılında yapılan tanıtımında böyle bir likiditeye ulaşılmasının amaçlandığı belirtilmiştir. Tartışılan konular uygulanabilir hale dönüştüğünde sigortacılıktaki risklerin menkul kıymetleştirilmesi sayesinde piyasadaki daha çok kazanç elde edilebileceği beklenmektedir.

Fakat burada asıl önemli sorun fiziksel bir ölçüm olan P'nin mi, yoksa eşdeğer martingal ölçümünün mü seçileceğidir. Tam anlamıyla likit olmayan piyasalarda risklerin veya ürünlerin fiyatlandırılması yapılırken, P fiziksel ölçümü ilgilenilen rastsallık ile ilgili objektif bir ölçüt sunmaktadır.

Aktüerya alanında, sigortanın finansal fiyatlandırılmasında yaygın olarak kullanılan ilkelerden biri de Esscher fiyatlandırma ilkesidir. x büyük hasar miktarlarını göstermek üzere, toplam hasar büyüklüğü dağılımına yakınsamak için geliştirilmiş bir yaklaşımdır.

$$P(X(N(t)) \leq x), \quad x > 0$$

Esscher dönüşümü (Exponential Tilting olarak da adlandırılmaktadır) aktüeryal fiyatlandırmanın finans alanına aktarılmasında temel bir rol oynamaktadır. Sigorta ve finans alanında türevlerin fiyatlandırılması için Esscher dönüşümünün stokastik bir süreç olarak ele alınması gerekmektedir. Yukarıdaki gibi bir formülün tahmini yalnızca dayanak F dağılımın üstel bir dönüşümüdür (Jensen,1995). Gerber ve Shiu (1994) çalışmalarında Esscher dönüşümünü Levy süreçlerinin üstel dağılımlarıyla tanımlamıştır (durağan ve bağımsız artımlara sahip bir süreç olarak). Esscher dönüşümü olasılık ölçümü altında, iskonto edilmiş fiyat süreçleri martingaldir. Bu sebeple arbitrajsız fiyatlar hesaplanabilmektedir. Piyasanın tamamlanmamış olması durumunda, Esscher dönüşümü ile elde edilen fiyat, piyasada uygulanabilir durumda olan fiyatlardan biridir (Embrechts, 1997).

Yukarıdaki fiyatlandırma ilkelerine ek olarak Buhlmann 1980 yılındaki çalışmasından elde ettiği Esscher dönüşümünü yeniden değerlendirerek finansal ve sigorta risklerini fiyatlandırmak amacı ile yeni bir prim hesaplama ilkesi olan Wang dönüşümünü (2000, 2002) geliştirmiştir.

Aktüeryal araştırma literatüründe, finansal ve sigorta risklerini fiyatlandırmak amacı ile birçok olasılık dönüşümü elde edilmiştir. Riskin fiyatlandırılması işlemi genellikle ekonomik/piyasa (economic/market) çerçevesinde yapılmakta olduğu için piyasa katılımcılarının kolektif risk tercihlerini yansıtacak bir ekonomik model ile fiyatlandırma yapmak isteyebilirler. Dr. Hans Buhlmann böyle bir ekonomik model geliştirmiştir. Buhlmann'ın ekonomik modeli olan Esscher dönüşümü üzerine bir dizi varsayım yapıldıktan sonra eşdeğer primler üretilmiştir. Venter (1991) yılındaki çalışmasında sigorta fiyatlarının belirli seviyelerdeki (hasar fazlası gibi) hesaplanmaları dönüştürülmüş dağılımı göstermektedir. Bu durum Wang'ın ilgisini çekmiş ve bir bozunum (distortion) operatörünü birikimli dağılım fonksiyonlarına uygulamıştır (Wang, 2003).

Wang dönüşümü yalnızca istenilen özellikleri içeren bir fiyatlandırma yöntemi değildir, aynı zamanda sağlam bir ekonomi yorumlamasıdır. Örneğin, Wang dönüşümü dayanak varlıklar için CAPM'i ve opsiyonlar için de Black-Scholes formülünü kapsayan tek bozunum fonksiyonudur. Aynı zamanda yukarıdaki dönüşüm fonksiyonu Buhlmann'ın ekonomik prim prensibi ile ilgilidir.

Wang 2003 yılındaki çalışmasında Buhlmann'ın ekonomik prim prensibini kullanarak, bütünsel riskler ($Z = \sum_{j=1}^n X_j$) üzerine aşağıdaki varsayımlar altında

Wang dönüşümünü elde etmiştir.

- I. X_j bireysel risklerinden piyasada çok sayıda bulunmaktadır ve bireysel risklerin toplamından elde edilen bütünsel risk olan Z yaklaşık olarak normal dağılmaktadır,
- II. $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip bir X riski için $X = F^{-1}(\Phi(V))$ eşitliğini sağlayan bir V değişkeni vardır ve $\{V, Z_0\}$, ($Z_0 = (Z - E(Z)) / \sigma[Z]$), arasındaki korelasyon katsayısı ρ ile iki değişkenli normal dağılıma sahiptir (Kijima, Muromachi, 2008).

Detaylı açıklanabilmesi için $[0, T]$ zaman aralığında finansal bir varlık ya da yükümlülük ele alınmaktadır. $X = X_T$ ise $F(x) = \Pr\{X \leq x\}$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip $t=T$ zamanındaki gelecek değeri göstermektedir. Wang (1996, 2000, 2001) aşağıdaki dönüşüme bağlı olarak riskleri fiyatlandırmak amacı ile finansal ve sigorta fiyatlandırma teorilerini birbirine bağlayan bir yöntem geliştirmiştir.

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda]$$

Bu dönüşüm, Wang dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. Eşitlikteki Φ ifadesi standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonunu göstermektedir ve λ ise sistematik riskin seviyesini gösteren, riskin piyasa fiyatı olarak adlandırılan bir sabittir. Yukarıdaki dönüşüm ise Wang dönüşümü olarak adlandırılmaktadır.

$F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip bir X varlığına Wang dönüşümünün uygulanması ile "risk düzeltilmeli (risk adjusted)" $F^*(x)$ dağılımı üretilmiş olur. $F^*(x)$ 'e bağlı olarak

hesaplanan beklenen değerin risksiz faiz oranı ile iskonto edilmiş değeri ise X 'in T anındaki risk düzeltmeli "adil değerini" verecektir.

Wang dönüşümünün en önemli özelliklerinden birisi normal ve lognormal dağılımların dönüşüm içinde korunmasıdır.

- Eğer F , μ ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılıma sahipse, $F^*(x)$ dağılımı da $\mu^* = \mu - \lambda\sigma$ ortalama ve $\sigma^* = \sigma$ standart sapma ile normal dağılmaktadır.
- Eğer F , μ ortalama ve σ^2 varyans ile lognormal dağılıma sahip ise, $F^*(x)$ dağılımı da $\mu^* = \mu - \lambda\sigma$ ortalama ve $\sigma^* = \sigma$ standart sapma ile lognormal dağılıma sahiptir.

Koşullu Ödemelerin Wang Dönüşümü ile Fiyatlandırılması: Dayanak bir X riski ve h fonksiyonu için $Y=h(x)$ ifadesi yazılabilmektedir. Y değişkeni X 'in bir fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Eğer h monoton (monotone) bir fonksiyon ise Y , X 'in komonoton (co-monotone) bir türevidir. Örneğin, bir Avrupa alım opsiyonu dayanak varlığının komonoton bir türevidir.

Teorik olarak dayanak risk X ile komonoton türev Y 'nin aynı λ 'ya yani riskin piyasa fiyatına sahip olmaları gerekmektedir. Bunun sebebi piyasa portföyleri ile aynı korelasyon ölçümüne sahip olmalarıdır.

$Y=h(x)$ koşullu ödemelerini fiyatlandırmada, Wang dönüşümü iki şekilde uygulanabilir.

- **1. Yöntem:** Dayanak X riskinin dağılım fonksiyonu olan $F(x)$ 'e Wang dönüşümü uygulanır. Daha sonra $Y^*=h(X^*)$ kullanılarak $F^*(Y)$ risk düzeltmeli dağılımı elde edilir.
- **2. Yöntem:** Öncelikle $Y=h(X)$ kullanılarak $F(Y)$ 'nin dağılım fonksiyonu elde edilir ve elde edilen bu dağılım fonksiyonuna 1. yöntemdeki aynı λ kullanılarak Wang dönüşümü uygulanır.

Matematiksel olarak yukarıdaki iki yöntem birbirine eşittir. Bu sonuç Wang dönüşümü ile koşullu ödemelerin risk nötral değerlemesinin yapılabildiğinin önemli bir göstergesidir.

Riskin piyasa fiyatını gösteren λ parametresi ise dayanak varlıkların piyasa fiyatları kullanılarak elde edilmektedir. Mevcut varlıkların piyasa fiyatları kullanılarak ortalama ve standart sapma yardımı ile riskin piyasa fiyatı hesaplanabilmektedir. R_i i. varlığın getiri oranını göstermek üzere riskin piyasa fiyatı aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$R_i = \frac{E[R_i] - r}{\sigma_i}$$

Eşitlikteki “r” ifadesi risksiz faiz oranını, σ_i ise getirinin standart sapmasını ifade etmektedir (Wang, 2002).

Bu çalışmada Q risk ölçümü altında adil bir fiyatlandırma yapabilmek amacı ile Wang dönüşümü kullanılmıştır. Wang dönüşümü ile swap fiyatlandırılması işlemi için öncelikle hesaplanan ölümlülük modeline Wang dönüşüm fonksiyonu uygulanmıştır. Wang dönüşümü uygulanmış ölümlülük olasılıklarının beklenen değeri swapın değişken ödemelerini oluşturacaktır. Aşağıdaki eşitlik çözülerek swap primi elde edilecektir.

$$E^*[S(t)] = (1 + \pi)E[H(t)]$$

Fiyatlandırmada Wang dönüşümünün kullanılması ile risk nötral bir fiyatlandırma yapılmış olacaktır. Wang dönüşümü sayesinde Q gibi bir olasılık ölçütünün belirlenmesine veya risk nötral fiyatlandırma yapabilmek için ölümlülük modelinin parametrelerini değiştirilmesine gerek kalmamıştır. Riskin piyasa fiyatının işlemlere dahil edilmesi ile risksiz bir fiyatlandırma yapılmış olur.

5. UYGULAMA

Swapların genellikle kısa vadeli varlıklar olduğu belirtilmişti. Cairns (2013), Cox ve Lin (2007) ve birçok çalışmada olduğu gibi swaplar on yıl vade ile fiyatlandırılmıştır.

5.1. Lee-Carter Ölümlülük Modeli İle Fiyatlandırma

Bu bölümde veri seti olarak 1938-1995 yılları arası Türkiye Hayat Ölümlülük Tabloları kullanılmıştır. Bu hayat tabloları “Türkiye Hayat ve Annüite Tabloları Oluşturma Projesi” kapsamında hesaplanmış regresyon seviyeleri kullanılarak elde edilmiştir.

Yaş aralıkları 0 ve 1’den sonra beşerli olarak gruplandırılmış fakat verinin güvenilirliği açısından 80 yaş ve üzeri veri kullanılmamıştır.

Yaş grupları ve temsil ettikleri yaş aralıkları aşağıdaki gibidir.

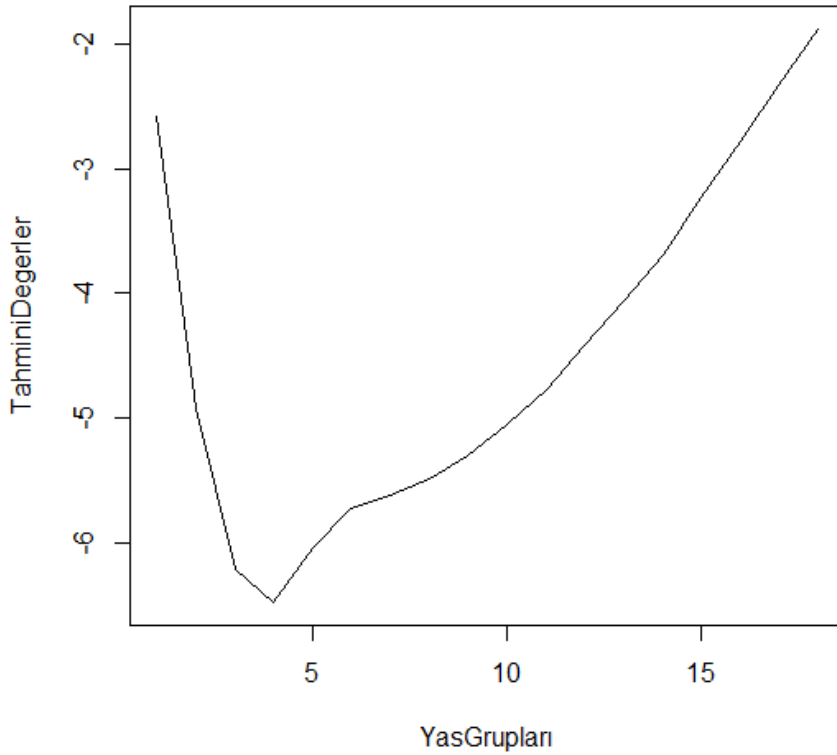
Gruplar	Yaşlar		Gruplar	Yaşlar
1	0		10	40
2	1		11	45
3	5		12	50
4	10		13	55
5	15		14	60
6	20		15	65
7	25		16	70
8	30		17	75
9	35		18	80

Derlenen verilerdeki kadın ve erkek yaşayan sayısı birleştirilerek toplam bir ölümlülük oranı elde edilmiş ve işlemler elde edilen ölümlülük indeksi ile yapılmıştır.

Fiyatlandırma yapılabilmesi için ilk olarak ölümlülüğün modellenmesi gerekmektedir. Veri seti olarak 1938-1995 yıllarına ait Türkiye ölümlülük indeksi kullanılmıştır. Lee-Carter ile ölümlülüğün modellenmesi için R programında

“demography” paketi kullanılmıştır. Orijinal Lee-Carter modelinde, modelin parametreleri iki aşamalı bir kestirim yöntemi ile tahmin edilmektedir ve k_t zamana bağlı ölümlülük düzeyine driftli rastgele yürüyüş yöntemi uygulanarak tahminler yapılmaktadır. Bu paket içerisinde de hesaplamalar yukarıdaki yöntemlere bağlı olarak yapılmıştır. Modelin parametrelerinin tahmin edilebilmesi için ilk olarak ölümlülük verisini programın inceleyebileceği şekilde hazırlamak gerekmektedir. 1938-1995 yılları arasındaki ölümlülük verisini kullanarak veri aralığı olarak bu yıllar arasındaki ölüm olasılıkları, popülasyon verisi olarak riske maruz kalan birey sayısı, zaman aralığı olarak takvim yılları ve yaş aralığı olarak da yaş grupları programa tanıtılmıştır.

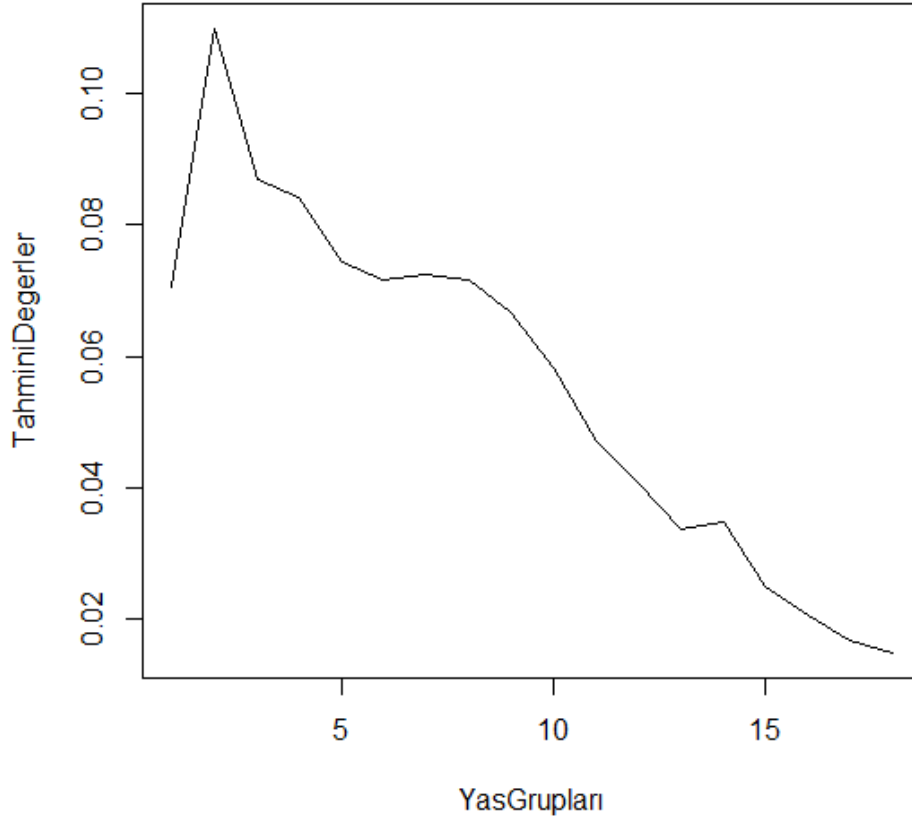
Programaya tanıtılmış olan veri setine tekil değer ayrıştırma yöntemi ve k_t için ikinci aşama kestirimi uygulanmıştır. Yaşa özel ölümlülük yapısını gösteren a_x değerleri Şekil 5.1.’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. a_x Parametre Değerleri

a_x değerlerinin beklenildiği gibi ilk yaş gruplarında azaldığı, sonraki yaş gruplarında ise yaş arttıkça önemli bir artış gösterdiği görülmektedir.

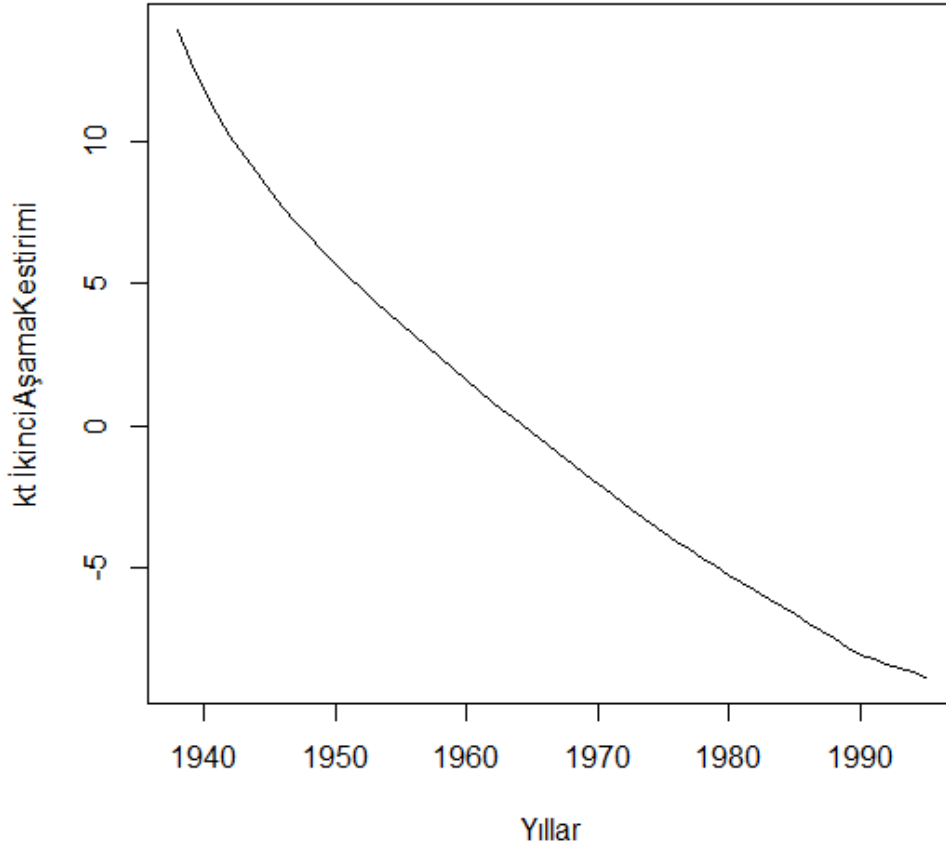
Ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişiminin hangi yaşa, ne oranda yansıdığını gösteren b_x değerleri Şekil 5.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. b_x Parametre Değerleri

b_x parametresi değerleri incelendiğinde negatif değerler olmadığı gözlemlenmiştir. Bu durum ölümlülüğün tüm yaşlar için azalmakta olduğunu ifade etmektedir. Genç yaş grupları için yüksek değerlere ulaşmaktadır. Bu durum ölümlülüğün bu yaş aralıkları için daha hızlı azalma göstereceğini ifade etmektedir. İlerleyen yaş gruplarında ise azalan bir yapıya sahip olduğu ve ölümlülükteki iyileşmenin yaşlar arttıkça etkisini yitirdiğini gözlemlenmektedir.

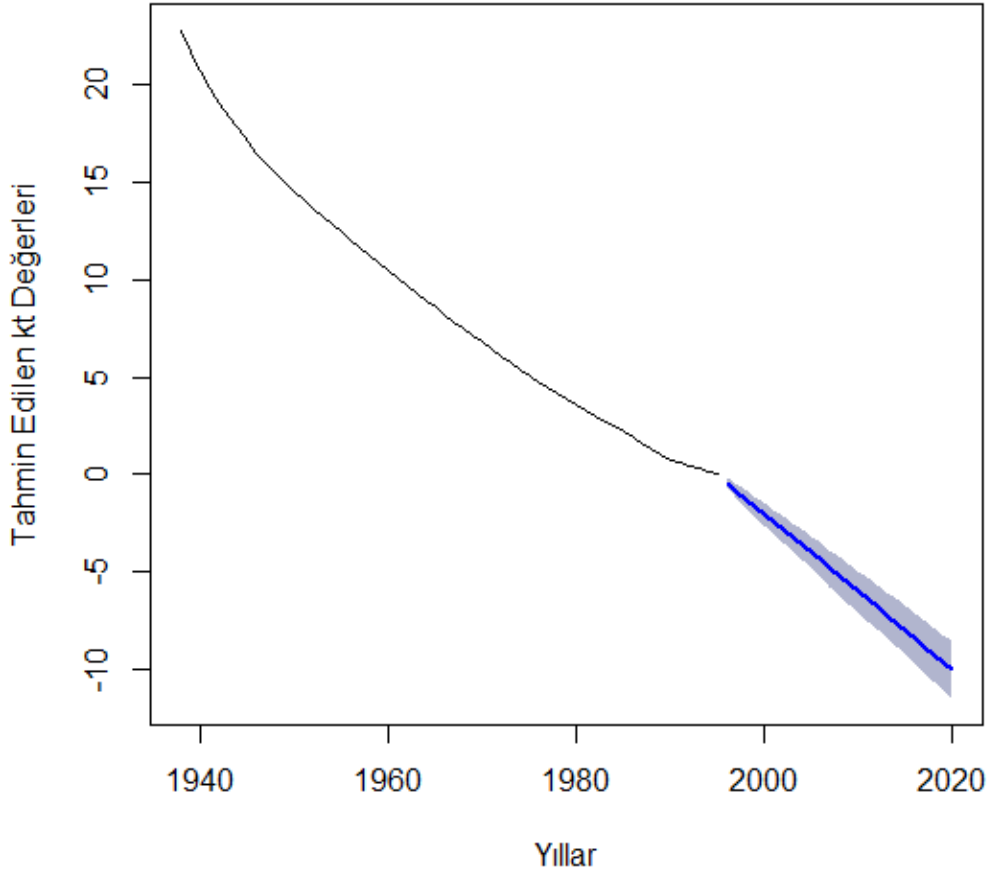
Ölümlülüğün yıllar içerisindeki gelişimini ifade eden k_t için ikinci aşama kestirimi sonucunda elde edilen değerler Şekil 5.3.'te gösterilmiştir.



Şekil 5.3. $k_t^{(2)}$ Parametre Değerleri

İkinci aşama kestiriminde elde edilen ve ölümlülüğün yıllar içerisindeki seyrini ifade eden $k_t^{(2)}$ değerleri ölümlülüğün Türkiye için azalan bir yapıda olduğunu göstermektedir.

Gelecek yaşam oranlarının tahmini için ölümlülük indeksi olarak adlandırılan, ölümlülük göstergesi k_t Lee ve Carter (1992)'de olduğu gibi driftli rastgele yürüyüş modeli ile modellenmiştir. Öngörüsü yapılan k_t değerleri Şekil 5.4.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.4. k_t Parametrelerinin 2020 Yılına Kadar Öngörüsü

Elde edilen k_t ile 1995 yılından 2020 yılına kadar ölüm oranlarının öngörüsü yapılmıştır. Elde edilen ölüm oranlarından yaşam oranları elde edilmiştir. Q risk ölçütü altında hesaplamaları yapmak amacı ile Wang dönüşümü kullanılmıştır. LC yöntemi ile elde edilen yaşam olasılıklarına Wang dönüşümü uygulanarak risksiz oranlar elde edilmiştir. Wang dönüşümünde kullanılacak olan dağılım fonksiyonunu olarak elde edilen yaşam olasılıkları kullanılmıştır ve bu durum $F(t)=(S(t))$ ile ifade edilmektedir. Bu dağılıma farklı λ değerleri uygulanarak risksiz oranlar aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanmıştır.

$$F^*(S(t)) = \Phi[\Phi^{-1}(F(S(t))) + \lambda]$$

Wang dönüşümü uygulanmış yaşam olasılıkları sabit faiz oranı ile iskonto edildiğinde swapın değişken ödemeleri elde edilmiş olacaktır. Swapın sabit ödemeleri “2010 Türkiye Hayat Annüite Tablosu” temel alınarak klasik bugünkü

değer hesaplamaları ile elde edilmiştir. Son olarak swap primi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmıştır.

$$\pi = \frac{\sum_{t=1}^{10} v^t (\Phi(\Phi^{-1}(S(t)) - \lambda)}{\sum_{t=1}^{10} v^t p(t)} - 1$$

Riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ve %2, %3, %4 faiz oranları altında LC modeline bağlı primler Çizelge 5.1.'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. Lee-Carter Modeline Göre Primler

	Faiz Oranı	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.20$	$\lambda=0.25$
LC Modeli	2%	-6.40%	-7.50%	-8.80%	-10.20%	-11.60%
	3%	-6.50%	-7.70%	-9%	-10.30%	-11.70%
	4%	-6.70%	-7.90%	-9.10%	-10.40%	-11.80%

Belirli λ değerleri için hesaplanan primlerin negatif olması temel alınan hayat tablosuna göre sabit ödemeler yapan tarafın yaşam olasılıklarının daha yüksek, değişken ödemeler yapan tarafın yaşam olasılıklarının daha düşük olmasından kaynaklanmaktadır. Bu durumda sabit ödeme yapan taraf sabit ödemelerle değişken ödemeler arasındaki fark kadar değişken ödemeleri yapan tarafa ödeme yapmaktadır.

5.2. Gamma Dağılımlı Olivier-Smith Modeli İle Fiyatlandırma

Olivier-Smith modelinde altmış beş yaşındaki bireylerin yaşam olasılıkları için “2010 Türkiye Hayat Annüite Tablosu” kullanılmıştır. Buradaki ölümlülük seviyesi temel alınarak birer yıllık yaşam olasılıkları gamma ölümlülük gelişimi faktörüne bağlı olarak tahmin edilmiştir. $b(t+1, T, T+1, x)$ normalleştirme katsayısı hesaplamalara dahil edilmediğinde birer yıllık yaşam olasılıkları aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanmıştır.

$$p_Q = (t+1, T, T+1, x) = p_Q(t, T, T+1, x)^{G(t)}$$

Yukarıdaki eşitlik t zamanındaki elde edilebilir bilgiye göre sıfır zamanında x yaşında olan bir bireyin t zamanında hayatta olup t+1 zamanına kadar yaşaması olasılığını göstermektedir. Buna göre yaşam olasılıklarının gamma gelişim faktörüne bağlı olarak hesaplanması bir yıl sonraki yaşam olasılıklarını vermektedir. Böylece on yıl boyunca her yıl yaşam olasılıkları ölümlülüğün gelişiminden etkilenmektedir. Değişken ödemeleri verecek olan S(t) ölümlülük süreci ise aşağıdaki eşitlik ile tanımlanmıştır.

$$S(t) = \prod_{t=1}^{10} p(t-1, t-1, t, x)^{G(t)}$$

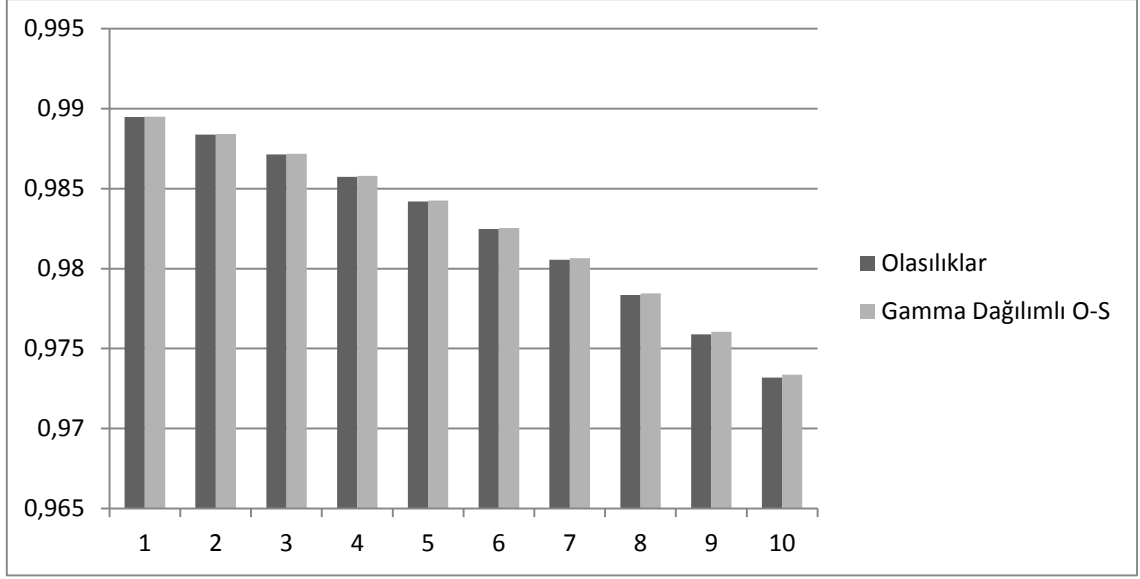
Elde edilen yaşam olasılıklarının Q risk ölçütü altındaki beklenen değerinin faiz oranı ile iskonto edilmesi swapın değişken ödemelerini verecektir. S(t) ölümlülük süreci Q ölçütü altında Cairns (2007) çalışmasındaki (7) eşitliği temel alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E_Q\left[\prod_{t=1}^{10} p(t-1, t-1, t, x)^{G(t)} \middle| M_t\right] = E_Q\left[\prod_{t=1}^{10} p_Q(0, t-1, t, x)^{\sum_{u=1}^t G(u)} \middle| M_t\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left(G(t) \sum_{t=1}^{10} \log(p_Q(0, t-1, t, 65))\right)\right] \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlik gamma dağılımının $t = \sum_{t=1}^{10} \log(p_Q(0, t-1, t, 65))$ alınması durumunda moment çıkaran fonksiyonunu vermektedir ve bu durumda aşağıdaki eşitlik S(t) ölümlülük süreci için.

$$E[S(t)] = \frac{\alpha^\alpha}{\left(\alpha - \sum_{t=1}^{10} \log(p_Q(0, t-1, t, 65))\right)^\alpha}$$

Şeklinde yazılır. Eşitliğin t=1,...,10 zamanları için birer yıl olarak çözümlenmesi gamma dağılımlı ölümlülük şoklarına maruz kalmış yaşam olasılıklarını vermektedir.



Şekil 5.5. Gamma Dağılımlı O-S ve Ham Verinin Karşılaştırılması

Şekil 5.5.'te görüldüğü üzere gamma dağılımına sahip ölüm olasılıklarının temel alınan hayat tablosundaki olasılıklarla karşılaştırıldığında çok az gelişim gösterdikleri gözlemlenmiştir. Gamma dağılımının farklı parametre değerleri ile de olasılıklar elde edilmiştir. Parametre değeri düştükçe yaşam olasılıklarındaki gelişmenin arttığı ancak aralarındaki farkın çok az olduğu gözlemlenmiştir. Burada gamma dağılımının parametresi 4 olarak alınmıştır.

Q risk ölçütü altında fiyatlandırma yapmak için ölümlülük sürecinde elde edilen yaşam olasılıklarına Wang dönüşümü uygulanarak risksiz oranlar elde edilmiştir. Wang dönüşümünde kullanılacak olan dağılım fonksiyonu olarak Olivier-Smith modeli ile elde edilen yaşam olasılıkları alınmıştır ve $F(t)=(S(t))$ ile ifade edilmektedir. Bu dağılıma farklı λ değerleri uygulanarak risk nötral oranlar aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanmıştır.

$$F^*(S(t)) = \Phi[\Phi^{-1}(F(S(t))) + \lambda]$$

Wang dönüşümü uygulanmış olasılıklar sabit faiz oranı ile iskonto edildiğinde swapın değişken ödemelerini vermektedir. Swapın sabit kısmı ise aynı kalacaktır. Swapın değişken ve sabit kısımları elde edildiğinde prim aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmıştır.

$$\pi = \frac{\sum_{t=1}^{10} v^t (\Phi(\Phi^{-1}(S(t)) - \lambda)}{\sum_{t=1}^{10} v^t p(t)} - 1$$

Riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ve %2, %3, %4 faiz oranları için swap işleminin primleri Çizelge 5.2.'de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Gamma Dağılımlı O-S İle Elde Edilen Primler

	Faiz Oranı	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.20$	$\lambda=0.25$
Gamma Dağılımlı O-S	2%	6%	5.70%	5.40%	5.10%	4.70%
	3%	5.80%	5.60%	5.30%	5%	4.60%
	4%	6%	5.40%	5.20%	4.80%	4.50%

Çizelge 5.2.'de görüldüğü üzere riskin piyasa fiyatının artması ile prim miktarlarında düşüş meydana gelmiştir. Primlerin pozitif olmasının sebebi değişken ödemeleri yapan tarafın yaşam olasılıklarının, sabit ödemeler yapan tarafın yaşam olasılıklarından yüksek olmasıdır. Primlerin farklı faiz oranları ve riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ile hesaplanması sonucunda primler arasında kayda değer bir farklılık olmadığı görülmüştür.

5.3. Beta Dağılımlı Olivier-Smith Ölümlülük Modeli İle Fiyatlandırma

Olivier-Smith modeli ile fiyatlandırmada altmış beş yaşındaki bireylerin yaşam olasılıkları için "2010 Türkiye Hayat Annüite Tablosu" kullanılmıştır. Buradaki ölümlülük seviyesi temel alınarak birer yıllık yaşam olasılıkları beta ölümlülük gelişimi faktörüne bağlı olarak tahmin edilmiştir. Beta dağılımlı Olivier-Smith modeline göre yaşam olasılıkları aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$p_Q = (t+1, T, T+1, x) = p_Q(t, T, T+1, x)^{\varepsilon(t)}$$

Yukarıdaki eşitlik t zamanındaki bilgiye göre sıfır zamanında x yaşında olan bir bireyin t zamanda hayatta olup t+1 zamanına kadar yaşaması olasılığını göstermektedir. Buna göre yaşam olasılıklarının beta gelişim faktörüne bağlı

olarak hesaplanması bir yıl sonraki yaşam olasılıklarını vermektedir. Böylece on yıl boyunca her yıl yaşam olasılıkları ölümlülüğün gelişiminden etkilenmektedir. Swapın değişken ödemeleri bu ölümlülük modeline bağlı olarak fiyatlandırılmıştır. Değişken ödemeleri verecek olan ölümlülük süreci ise aşağıdaki eşitlik ile tanımlanmıştır.

$$S(t) = \prod_{t=1}^{10} p(t-1, t-1, t, x)^{\varepsilon(t)}$$

Elde edilen yaşam olasılıklarına Q risk ölçütü altındaki beklenen değerinin faiz oranı ile iskonto edilmesi swapın değişken ödemelerini verecektir.

$$E[S(t)] = E_Q\left[\prod_{t=1}^{10} p(t-1, t-1, t, x)^{\varepsilon(t)} \middle| M_t\right] = E_Q\left[\prod_{t=1}^{10} p_Q(0, t-1, t, x)^{\sum_{u=1}^t \varepsilon(u)} \middle| M_t\right]$$

Yukarıdaki eşitliği çözümlenebilmek amacı ile Cairns (2007)'de verilen (7) eşitliği temel alınmış ve beta dağılımının standart özellikleri kullanılmıştır.

$$E_Q\left[\exp\left(\prod_{u=1}^t \varepsilon(u) \sum_{t=1}^{10} \log p_Q(0, t-1, t, 65)\right) \middle| M_t\right]$$

Bu eşitlik beta dağılımının moment çıkarıcı fonksiyonunu ifade etmektedir. Burada $t = \sum_{k=1}^t \log p_Q(0, s-1, s, 65)$ olarak alınmıştır. Beta dağılımının moment çıkarıcı

fonksiyonu ise $M_x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\alpha + n}{\alpha + \beta + n}$ şeklindedir ve k ifadesi k.momentini ifade

etmektedir. Birinci moment yani beklenen değer ile işlem yapıldığı için k=1 alınmıştır.

Beta dağılımı ile gösterilen ölümlülük şoklarının hem ölümlülüğün gelişimini hem de ölümlülük oranlarındaki artışı göstermesi amacı ile uygulanan $y = 2\varepsilon(t)$

dönüşümü sonucunda $M_{2\varepsilon(u)}(t) = M_{\varepsilon(u)}(2t)$ elde edilmiştir.

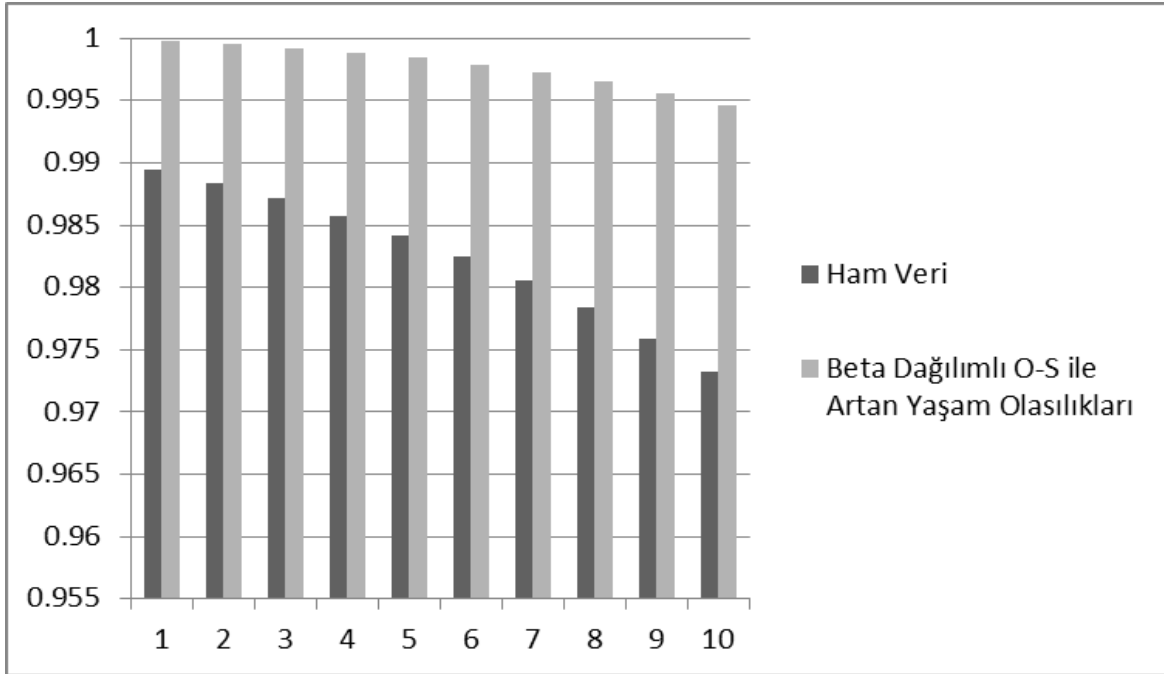
Buna göre beta dağılımının moment çıkarıcı fonksiyonu yeniden düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$M_{\varepsilon(u)}(2t) = \prod_{u=1}^t \left(1 + \left(2 \times \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \times \sum_{t=1}^{10} \log p_Q(0, t-1, t, 65)\right)\right)$$

$u=1,2,\dots,t$ ve $t=1,2,\dots,10$ zamanlarına kadar yukarıdaki eşitlik tekrarlanmış ve $S(t)$ ölümlülük süreci elde edilmiştir.

Modelde seçilen parametreler Lin ve Cox'un 2005 yılındaki çalışmalarında kullanılan parametrelerdir. Bu çalışmadaki bütün parametreler denenmiş ve yaşam olasılıklarının artış ve azalışına en uygun parametre setinin ilk durum için $\alpha=1.49$, $\beta =147.51$ ve ikinci durum için $\alpha=147.51$, $\beta =1.49$ olduğuna karar verilmiştir.

İlk olarak $E[\varepsilon(u)] < 1$ durumu yani ölümlülüğün gelişmekte olduğu durum ele alınmıştır. Ölümlülüğün gelişimini göstermek amacı ile beta dağılımının parametreleri $\alpha=1.49$, $\beta =147.51$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.6. Beta Dağılımlı O-S İle Artan Yaşam Olasılıklarının ve Ham Verinin Karşılaştırılması

Şekil 5.6.'da görüldüğü gibi beta dağılımına sahip ölümlülük şokları ile yaşam olasılıklarında önemli ölçüde gelişme gözlemlenmiştir. Q risksiz fiyatlandırma ölçütü altında fiyatlandırma yapılabilmesi amacı ile elde edilen gelişmiş yaşam olasılıklarına $\lambda=0.05,0.10,0.15,0.20,0.25$ değerleri için Wang dönüşümü uygulanmıştır. Uygulanan Wang dönüşümü sonrasında riskin piyasa fiyatı arttıkça yaşam olasılıklarında düşüş olmuş ancak yine de ham yaşam olasılıklarından yüksek oldukları gözlemlenmiştir.

Swapın sabit ödemeleri diğer modellerde hesaplandığı gibi hesaplanmış ve bu işlemlerden sonra swap anlaşmasının primi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmıştır.

$$\pi = \frac{\sum_{t=1}^{10} v^t (\Phi(\Phi^{-1}(S(t)) - \lambda)}{\sum_{t=1}^{10} v^t p(t)} - 1$$

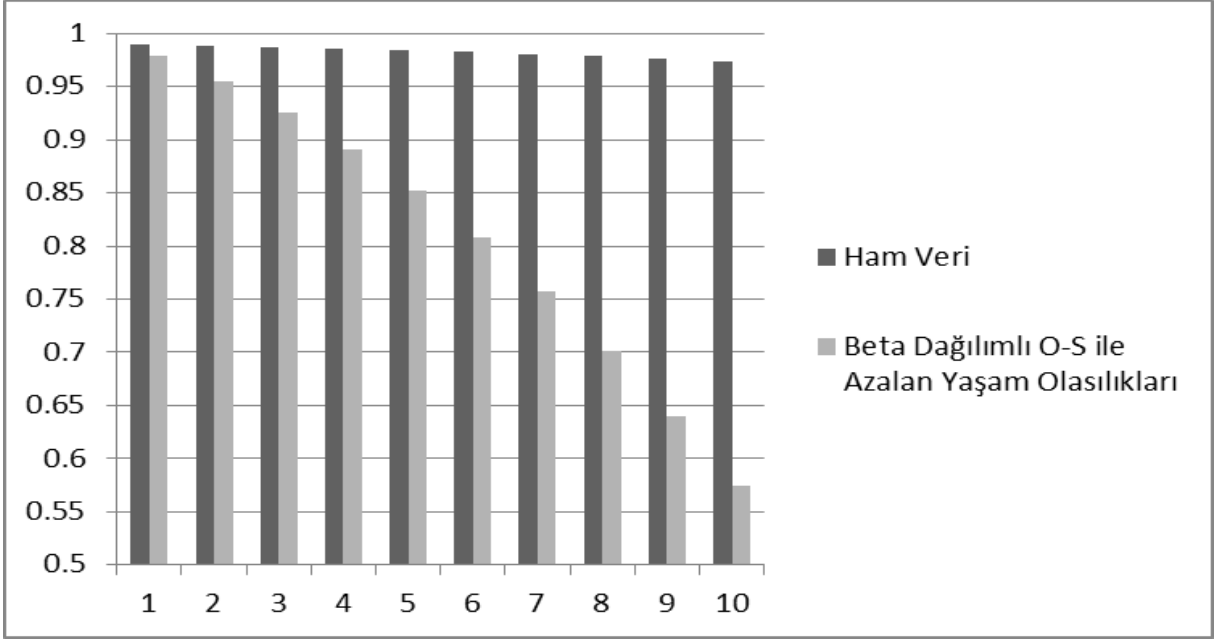
Riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ve %2, %3, %4 faiz oranları için swap primleri Çizelge 5.3.'te gösterilmiştir.

Çizelge 5.3.Beta Dağılımlı O-S İle Artan Yaşam Olasılıklarına Göre Prim

	Faiz Oranı	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.20$	$\lambda=0.25$
	2%	7.80%	7.76%	7.70%	7.65%	7.58%
Beta Dağılımlı O-S	3%	7.65%	7.61%	7.56%	7.50%	7.44%
	4%	7.50%	7.46%	7.41%	7.36%	7.30%

Çizelge 5.3.'de görüldüğü üzere riskin piyasa fiyatı ve faiz oranı arttıkça swap primlerinde düşüş gözlemlenmiştir. Ancak prim miktarındaki bu düşüş kayda değer bir değişime sebep olmamıştır.

Ölümlülüğün gelişmekte olduğu durumu inceledikten sonra $E[\varepsilon(u)] > 1$ ile ifade edilen, yaşam oranlarının azalmakta olduğu durum incelenmiştir. Ölümlülüğün kötüleştiği durumu göstermek amacı ile beta dağılımının parametreleri $\alpha=147.51$, $\beta=1.49$ olarak alınmıştır. Hesaplanan yaşam olasılıkları Şekil 5.7.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.7. Beta Dağılımlı O-S İle Azalan Yaşam Olasılıkları İle Ham Verinin Karşılaştırılması

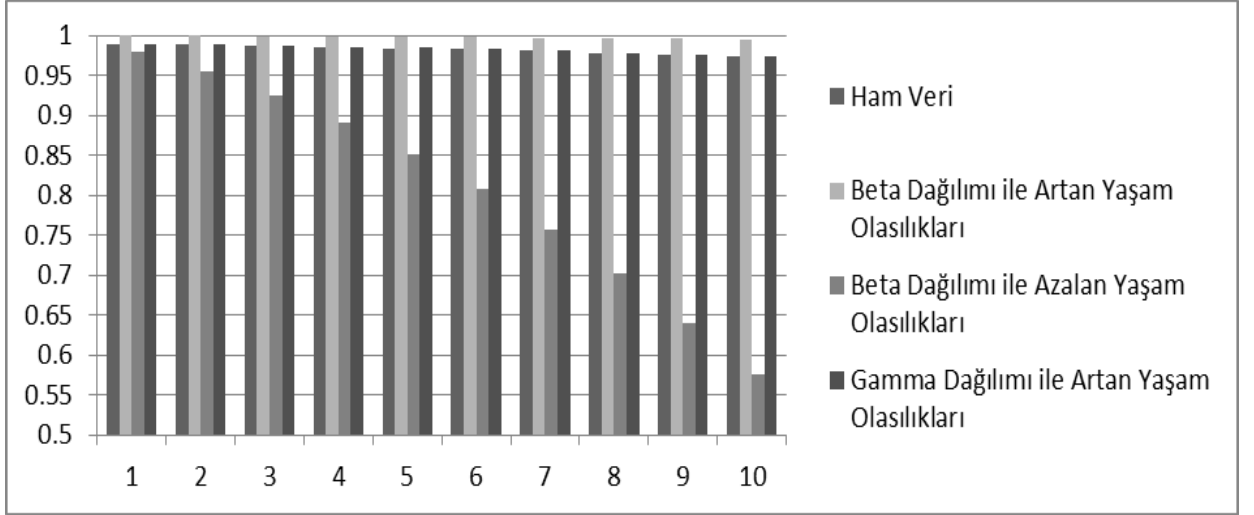
Şekilde görüldüğü üzere ölümlülük şoklarından etkilenen yaşam olasılıklarında önemli ölçüde düşüş meydana gelmiştir. Yukarıda yapılan işlemler bu kez artan ölüm olasılıkları için tekrar edilmiştir. %2, %3 ve %4 faiz oranlarına göre hesaplanan primler Çizelge 5.4.'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.4. Beta Dağılımlı O-S İle Azalan Yaşam Olasılıklarına Göre Prim

	Faiz Oranı	Faiz Oranı				
		$\lambda=0.05$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.20$	$\lambda=0.25$
Beta Dağılımlı O-S	2%	-1.31%	-1.45%	-1.60%	-1.73%	-1.88%
	3%	-1.29%	-1.42%	-1.56%	-1.70%	-1.84%
	4%	-0.85%	-1.39%	-1.52%	-1.66%	-1.81%

Çizelge 5.4.'de primlerin negatif olduğu ve riskin piyasa fiyatının artması ile artış gösterdiği gözlemlenmiştir. Riskin piyasa fiyatı arttıkça değişken ödemeleri yapan tarafın risk düzeltilmeli değişken ödemelerinin miktarı düşecektir. Sabit ödemeleri yapan tarafın ise uzun ömürlülük riski daha fazla olacaktır.

Gamma ve beta dağılımlı O-S modeli ile hesaplanan artan ve azalan yaşam olasılıklarının ham veri ile karşılaştırılması Şekil 5.8.'de verilmiştir.



Şekil 5.8. Gamma ve Beta Dağılımlı O-S Modeli ile Hesaplanan Yaşam Olasılıklarının Ham Veri ile Karşılaştırılması

Kullanılan bütün modellere göre hesaplanan primler %2, %3 ve %4 faiz oranları ile Çizelge 5.5'te gösterilmiştir.

Çizelge 5.5. Modellere Göre Hesaplanmış Primler

	Faiz Oranı	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.20$	$\lambda=0.25$
LC Modeli	2%	-6.40%	-7.50%	-8.80%	-10.20%	-11.60%
	3%	-6.50%	-7.70%	-9%	-10.30%	-11.70%
	4%	-6.70%	-7.90%	-9.10%	-10.40%	-11.80%
Gamma Dağılımlı O-S	2%	6%	5.70%	5.40%	5.10%	4.70%
	3%	5.80%	5.60%	5.30%	5%	4.60%
	4%	6%	5.40%	5.20%	4.80%	4.50%
$\alpha=1.49, \beta =147.51$ durumunda						
Beta Dağılımlı O-S	2%	7.80%	7.76%	7.70%	7.65%	7.58%
	3%	7.65%	7.61%	7.56%	7.50%	7.44%
	4%	7.50%	7.46%	7.41%	7.36%	7.30%
$\alpha=147.51, \beta =1.49$ durumunda						
Beta Dağılımlı O-S	2%	-1.31%	-1.45%	-1.60%	-1.73%	-1.88%
	3%	-1.29%	-1.42%	-1.56%	-1.70%	-1.84%
	4%	-0.85%	-1.39%	-1.52%	-1.66%	-1.81%

Çizelge 5.5. incelendiğinde faiz oranındaki değişim ile riskin piyasa fiyatındaki değişimin yaşam swapı primlerinin değerlerini kayda değer ölçüde etkilemediği gözlemlenmiştir. Lee-Carter modeli ile hesaplanan primlerin negatif olmasından dolayı sabit ödemeler yapan tarafın yaşam olasılıklarının daha yüksek olduğu anlaşılmaktadır. Riskin piyasa fiyatının artması ile değişken ödemelerin değerinin azalması primlerdeki negatif artışa sebep olmaktadır. Ancak beta dağılımlı O-S modelinde primler parametrelerin değişimine göre kayda değer değişiklik göstermişlerdir. Ölümlülük şoklarının artması ya da azalması sonucunda yaşam olasılıkları önemli ölçüde farklılık göstermiştir. Bu durum primlerin değerlerini aynı ölçüde etkilemiştir. Gamma dağılımlı O-S modeli incelendiğinde primlerin pozitif olduğu ve değişken ödemeleri yapan tarafın, sabit ödeme yapan tarafa ödeme yaptığı görülmektedir. Bütün modeller karşılaştırıldığında primlerin birbirinden oldukça farklı oldukları gözlemlenmektedir. Primlerin, ölümlülük modelleri ve parametre değişimlerine oldukça duyarlı oldukları anlaşılmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde λ arttıkça primlerin değerlerinde düşüş meydana geldiği gözlemlenmiştir. Riskin piyasa fiyatının yüksek olması elde edilecek değişken ödemelerin risk düzeltmeli değerini düşürmektedir. Bir başka dikkat edilmesi gereken durum ise swap primlerinin faiz oranlarının değişimine olan duyarlılığıdır. Faiz oranı arttıkça swap priminde düşüş gözlemlenmiştir. Bu durumun sebebi gelecek nakit akışlarının bugünkü değerinin faiz oranı arttıkça düşmesi ve böylece sabit ödeme yapan tarafın nakit akışlarındaki değişkenlikten korunma amacı ile ödemek istediği primin değerini de düşürmesidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Uzun ömürlülük riski sigorta şirketleri için bireylerin daha uzun yaşamaları ile birlikte önemli bir risk haline gelmiştir. Bu sebeple uzun ömürlülük riskinin yönetilmesi ve bu riske karşı korunma sağlanması önemlidir.

Bu çalışmada uzun ömürlülük riskine karşı korunma sağlamak amacı ile uzun ömürlülük riskinin finansal piyasalara devredilmesi durumu incelenmiştir. Türkiye için ölümlülük farklı yaşam modelleri ile modellenmiş ve bu modeller yardımı ile yaşam swapı fiyatlandırılmıştır.

Yaşam swapları ölümlülüğe bağlı riskleri yönetebilmede oldukça etkili araçlardır. Tarafların isteklerine göre ve değişen koşullara göre ayarlanabilmekte ve ödemeler istenilen şekilde yapılabilmektedir. Şirketler yaşam swaplarını ölümlülük risklerinden korunmada, farklı iş kollarına göre doğal korunma sağlamada, ölümlülük risklerini çeşitlendirerek ölümlülüğün vade yapısına göre maruz kaldıkları riski yeniden düzenleyebilirler. Yaşam swapları isteğe göre ayarlanabilir olduklarından oldukça cazip varlıklardır.

Bu çalışmada ölümlülük modeli, faiz oranı ve riskin piyasa fiyatının swap primi üzerine etkisi incelenmiştir. Türkiye verisi için uzun ömürlülük riski iki farklı model ile modellenmiştir. Olivier-Smith modeli ile yapılan modellemede 65 yaşındaki bireylerin yaşam olasılıkları için “Türkiye Hayat Annüite Tablosu” kullanılmıştır. Elde edilen yaşam olasılıklarına riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ile Wang dönüşümü uygulanmış ve daha sonra swapın primi elde edilmiştir. Lee-Carter ile yapılan modellemede 1938-1995 yılları arası Türkiye nüfus verisi kullanılmıştır. Bu verilere LC modeli uygulanmış ve elde edilen ölüm hızlarına riskin piyasa fiyatının farklı değerleri ile Wang dönüşümü uygulanmıştır. Elde edilen risksiz yaşam olasılıkları ile swapın primleri hesaplanmıştır. Her iki model için de %2, %3 ve %4 faiz oranları kullanılmıştır.

Hesaplamalar primlerin faiz oranı ve riskin piyasa fiyatına çok duyarlı olmadığını ancak kullanılan ölümlülük modeline ise duyarlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca O-S modelinde parametrelerin değişimi de primleri oldukça etkilemiştir. Riskin piyasa fiyatı ve faiz oranı primler üzerinde etkili olamamıştır. Primler değişen faiz ve riskin

piyasa fiyatlarında çok fazla değişkenlik göstermemiştir. Yaşam swapları primlerinin hesaplanmasında en önemli nokta kullanılan ölümlülük modelidir.

Bu çalışma ölümlülüğün sıçrayışlarla (jump) modellenmesi ile geliştirilebilir. Risksiz fiyatlandırma yapabilmek amacı ile parametrelerin düzenlenmesi ve yeniden ayarlanması ile modeller değiştirilerek ölümlülüğün vade yapısı modellenebilir. Böylece Wang dönüşümü ile aralarındaki fark karşılaştırılabilir. Ölümlülüğün vade yapısını etkileyebilecek kaç tane risk faktörü olabileceği belirlenerek ölümlülük gelişim faktörü yeniden düzenlenebilir. Ayrıca firmaların temerrüde düşme riski de hesaba katılarak fiyatlandırma yapılabilir. Böylece temerrüt riskinin swap fiyatlarını nasıl etkilediği incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. And Heath, D., A Characterization of Measures of Risk. Department of Mathematics, ULP, Strasbourg, **1996**.
- [2] Basle Committee on Banking Supervision, *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basle, January, **1996**.
- [3] Biffis, E., Affine Processes for Dynamic Mortality and Actuarial Valuations, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37: 443-468, **1995**.
- [4] Blake, D., Survivor Products: Managing Longevity Risk & Mortality Improvements,
<http://siteresources.worldbank.org/INTLACREGTOFINSECDEV/Reosurces/SurvivorProductsBlake.ppt>, Pensions Institute, **2008**.
- [5] Blake, D. Ve W. Burrows, Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk, *Journal of Risk and Insurance* 68, 339-348, **2001**.
- [6] Blake, D., Cairns, A.J.G., Dowd, K., Living with mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities, *British Actuarial Journal*, 12: 153-228, **2006**.
- [7] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J.K., Measuring the Longevity Risk in Mortality Projections, *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 105-130, **2002**.
- [8] Borch, K., Equilibrium in a Reinsurance Market, *Econometrics*, 30, 424-444, **1962**.
- [9] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. And Nesbitt, C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, **1989**.
- [10] Brown, Brendan, *The Economics of the Swap Market*, Routledge, London, **1989**.
- [11] Buhlmann, H., An Economic Premium Principle, *ASTIN Bulletin*, 11, 52-60, **1980**.
- [12] Cairns, A.J.G., A Multifactor generalisation of the Olivier – Smith Model for Stochastic Mortality, *In Proceedings of the First IAA Life Colloquium*, Stockholm, **2007**.
- [13] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk, *ASTIN Bulletin*, 36(1):79-120, **2006**.

- [14] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Modelling and Management of Mortality Risk : A Review, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2(3): 79-113, **2008**.
- [15] Cairns, A.J.G., Robust Hedging of Longevity Risk, *Journal of Risk and Insurance*, 70(3): 621-648, **2013**.
- [16] Ceylan, Ali, *Finansal Teknikler*, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, **1995**.
- [17] Chambers Nurgül. *Türev Piyasalar*, Eylül **2007**.
- [18] Chance, D. M., Brooks, R., *An Introduction to Derivatives and Risk Management*, 7th ed. Mason, OH: Thomson South-Western, **2008**.
- [19] Chuang – Chang Chang, Chih – Chan Chen and Min – Hung Tsay, Pricing Survivor Swaps with Mortality Jumps and Default Risk, *Academia Economic Papers*, 38(2):119-156, **2010**.
- [20] Cibra, T., Securitization of Longevity and Mortality Risk, *Journal of Economics and Finance*, **2010**.
- [21] Cox, S.H. and Lin, Y., Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks. *In Proceedings of the 14th International AFIR Colloquim*, Boston, pp. 483-507, **2007**.
- [22] Dahl, M., Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-Linked Insurance Contracts, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 113-136, **2004**.
- [23] Dawson P., Dowd K., Cairns, A.J.G., Blake D., *Completing the Survivor Derivatives Market: A General Pricing Framework*, Pensions Institute Discussion Paper No. PI-0712, **2009**.
- [24] Dawson, P. Dowd, K., Cairns, A.J.G., Blake, D., Survivor Derivatives: A Consistent Pricing Framework, *The Journal of Risk and Insurance*, 77(3): 579-596, **2010**.
- [25] Demircioğlu, S., Büyükyazıcı, M., Poisson log-bilineer yaklaşımıyla Lee-Carter modellemesi ve Türkiye uygulaması, *İstatistikçiler Dergisi* 6: 14-40, **2013**.
- [26] Denuit, M., Devolder, P., Goderniaux, A., Securitization of longevity risk: Pricing survivor bonds with Wang transform in the Lee-Carter framework, *Journal of Risk and Insurance* 74(1), 87-113, **2007**.
- [27] Delbaen, F. And Haezendonck, J.M., A Martingale Approach to Premium Calculations Principles in an Arbitrage Free Market, *Insurance: Mathematics and Economics*, 8, 269-277, **1989**.

- [28] Dowd, K., Survivor Bonds: A Comment on Blake and Burrows, *Journal of Risk and Insurance* 70, 339-348, **2003**.
- [29] Dowd, K., Blake, D., Cairns, Andrew J.G., Dawson, P., Survivor Swaps, *The Journal of Risk and Insurance*, 73(1):1-17, **2006**.
- [30] Dybvig, P.H., Hedging Non-Traded Wealth: When Is There Separation of Hedging and Investment. In: S.D. Hodges (ed.), *Options: Recent Advances in Theory and Practice 2*, Manchester United Press, pp. 13-24, **1992**.
- [31] Embrechts, P., Actuarial Versus Financial Pricing of Insurance, *This paper was presented at the conference on Risk Management in Insurance Firms*, Financial Institutions Center, The Wharton School of University of Pennsylvania, May 15-17, **1997**.
- [32] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls, *RISK* 12(5), 69-71, **1999**.
- [33] Foley, Bernard J., *Capital Markets*, Macmillan Education Ltd., London, **1991**.
- [34] Föllmer, H. and Schweizer, M., Hedging of Contingent Claims Under Incomplete Information. In: *Applied Stochastic Analysis*, eds. M.H.A. Davis and R.J. Elliott, Gordon and Breach, London, **1989**.
- [35] Föllmer, H. and Sondermann, D., Hedging of Non-Redundant Contingent Claims. In: W. Hildebrand and A. Mas-Collel, Eds, *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu*, Elsevier North-Holland, Amsterdam, pp. 205-223, **1986**.
- [36] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., Option Pricing by Esscher Transforms. With Discussion, *Transactions of the Society of Actuaries*, 99-191, **1994**.
- [37] Harrison, J.M. and Kreps, D.M., Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408, **1979**.
- [38] Heilmann, W.R., *Grundbegriffe der Risikottheorie*. VVM Karlsruhe, **1987**.
- [39] Jensen, B.A. and Nielsen, J.A., Pricing by No Arbitrage. In: D.R. Cox, D. Hinkley and O.E. Barndorff-Nielsen (Eds.). *Likelihood, Time Series with Econometric and other Applications*. Chapman and Hall, London, **1995**.
- [40] Jensen, J.L., *Saddlepoint Approximations*, Oxford University Press, Oxford, **1995**.
- [41] Karatepe, Y., Türev Piyasaları, *A.Ü. Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını*, Yayın No: 587, **2000**.

- [42] Kijima, M., Muromachi, Y., An Extension of the Wang Transform Derived From Buhlmann's Economic Premium Principle for Insurance Risk, *Insurance: Mathematics and Economics*, **2008**.
- [43] Koissi, M-C, Shapiro, A., Högnas, G., *Fitting and Forecasting Mortality Rates for Nordic Countries Using Lee-Carter Method*, Department of Mathematics, Abo Academy University, Finland, **2004**.
- [44] Lane, M., The Perfume of the Premium or Pricing Insurance Derivatives, *Proceedings Bowles Symposium on Securitization of Risk*, Georgia State University, Atlanta, **1996**.
- [45] Lee, R.D. ve Carter, L.R., Modelling and Forecasting U.S. Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, No:419, 659-675, **1992**.
- [46] Lin, Y., ve S. H. Cox, Securitization of Mortality Risks in Life Annuities, *Journal of Risk and Insurance* 72, 227-252, **2005**.
- [47] MacMinn, R., Brockett, P., Blake, D., Longevity Risk and Capital Markets, *Journal Of Risk and Insurance*, 73(4): 551-557, **2006**.
- [48] Meister, S., *Contributions to the Mathematics of Catastrophe Insurance Futures*. Diplomarbeit, ETH-Zürich, **1995**.
- [49] Miltersen, K.R., ve Persson, S.-A., *Is Mortality Dead? Stochastic Forward Force of Mortality Determined by No Arbitrage*, Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, **2005**.
- [50] Miron, Paul, Swannel P., *Pricing and Hedging Swaps*, Euromoney Publications, London, **1991**.
- [51] Mitchell, O.S., J.M. Poterba, M.J. Warshawsky ve J.R. Brown, New Evidence on the Money's Worth of Individual Annuities, *American Economic Review* 89, 1299-1318, **1999**.
- [52] Moller Thomas, Steffensen Mogens, *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*, Cambridge University Press, New York, **2007**.
- [53] Neville, L. Ve H. Ho, Buying in Bulk, *Risk Magazine*, vol. 19, no.5, **2006**.
- [54] Olivier, P., and Jeffery, T., Stochastic Mortality Models, *in Proceedings of the Presentation to the Society of Actuaries of Ireland*, **2004**.
- [55] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., Olivieri, A., *Modelling Longevity Dynamics For Pensions and Annuity Business*, Oxford University Press, **2009**.

- [56] Renshaw, A.E., ve Haberman, S., Lee-Carter Mortality Forecasting with Age-Specific Enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33: 255-272, **2003**.
- [57] Renshaw, A.E., ve Haberman, S., A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model For Mortality Reduction Factors, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38: 556-570, **2006**.
- [58] Smith, A.D., Stochastic Mortality Modelling. Talk at Workshop on the Interface Between Quantitative Finance and Insurance, *International Centre for the Mathematical Sciences*, Edinburgh, **2005**.
- [59] Stigum, Marcia, *The Money Market*, Irwin Professional Publishing, New York, **1990**.
- [60] Türkiye Hayat ve Annüite Tabloları Oluşturma Projesi, 2010, Sigorta Bilgi Gözetim Merkezi, <http://www.sbm.org.tr/?p=mortalitelstatistik>, Kasım, **2013**.
- [61] Venter, G.G., Premium Calculation Implications of Reinsurance Without Arbitrage, *ASTIN Bulletin*, 21(2): 223-230, **1991**.
- [62] Wang, S.S., Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, 26, 71-92, **1996**.
- [63] Wang, S.S., A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks, *Journal of Risk and Insurance*, 67(1): 15-36, **2000**.
- [64] Wang, S.S., A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks, *ASTIN Bulletin*, 32, 213-234, **2002**.
- [65] Wang, S.S., Equilibrium Pricing Transforms: New Results Using Buhlmann's 1980 Economic Model, *ASTIN Bulletin*, 33, 57-73, **2003**.
- [66] Wang, Z.W., Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model, *Mathematical Statistics Stockholm University, Examensarbete*, 1, **2007**.
- [67] Yıldırak, K., Çalışkan, N., Çetinkaya, Ş., *Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri*, Literatür Yayınları, İstanbul, **2008**.

EKLER

EK 1. Lee-Carter Modeli Yaş Parametreleri

EK 2. Lee-Carter Modeli Yıl Parametreleri

EK 3. Lee-Carter Modeli ile 2020 Yılına Kadar k_t Parametrelerinin Öngörüsü

EK 1: Lee-Carter Modeli Yaş Parametreleri

Yaş	a_x	b_x
0	-2.58	0.07
1	-4.92	0.11
5	-6.21	0.09
10	-6.47	0.08
15	-6.04	0.07
20	-5.72	0.07
25	-5.62	0.07
30	-5.48	0.07
35	-5.30	0.06
40	-5.06	0.06
45	-4.77	0.05
50	-4.42	0.04
55	-4.06	0.03
60	-3.69	0.03
65	-3.23	0.02
70	-2.78	0.02
75	-2.33	0.02
80	-1.89	0.01

EK 2: Lee-Carter Modeli Yıl Parametreleri

Yıl	$k_t^{(2)}$	Yıl	$k_t^{(2)}$
1938	13.92	1967	-0.98
1939	12.81	1968	-1.34
1940	11.85	1969	-1.69
1941	10.96	1970	-2.05
1942	10.17	1971	-2.40
1943	9.50	1972	-2.75
1944	8.87	1973	-3.10
1945	8.25	1974	-3.45
1946	7.66	1975	-3.77
1947	7.14	1976	-4.06
1948	6.63	1977	-4.36
1949	6.15	1978	-4.65
1950	5.70	1979	-4.94
1951	5.25	1980	-5.23
1952	4.81	1981	-5.52
1953	4.37	1982	-5.80
1954	3.97	1983	-6.09
1955	3.56	1984	-6.38
1956	3.16	1985	-6.66
1957	2.77	1986	-6.95
1958	2.38	1987	-7.23
1959	2.00	1988	-7.51
1960	1.61	1989	-7.80
1961	1.22	1990	-8.08
1962	0.84	1991	-8.22
1963	0.47	1992	-8.37
1964	0.10	1993	-8.53
1965	-0.26	1994	-8.68
1966	-0.62	1995	-8.84

EK 3: Lee-Carter Modeli ile 2020 Yılına Kadar k_t Parametrelerinin Öngörüsü

Yıllar	k_t
1996	-0.40
1997	-0.80
1998	-1.20
1999	-1.60
2000	-2.00
2001	-2.40
2002	-2.79
2003	-3.19
2004	-3.59
2005	-3.99
2006	-4.39
2007	-4.79
2008	-5.19
2009	-5.59
2010	-5.99
2011	-6.39
2012	-6.79
2013	-7.19
2014	-7.59
2015	-7.98
2016	-8.38
2017	-8.78
2018	-9.18
2019	-9.58
2020	-9.98

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Selin Değirmenci
Doğum Yeri : Kırıkkale
Medeni Hali : Bekar
E-posta : selindegirmenci@karabuk.edu.tr
Adres : Karabük Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Aktüerya ve Risk Yönetimi Bölümü

Eğitim

Lise : Mehmet Emin Resulzade Anadolu Lisesi, 2004-2008
Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri, 2008-2012
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri, 2012-2014

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri

İş Deneyimi

Karabük Üniversitesi, Aktüerya ve Risk Yönetimi Bölümü - Araştırma Görevlisi/2013-...

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar