7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN İSPATA YÖNELİK ALGI VE İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN İRDELENMESİ

EXAMINATION OF 7TH GRADE STUDENTS' ABILITY ON PROVING AND THEIR PERCEPTION OF PROVING

Ebru AYLAR

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı İçin Öngördüğü

Doktora Tezi

olarak hazırlanmıştır.

2014

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı'nda ~~Yüksek Lisans~~/Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Prof. Dr. Ziya Argün
Üye (Danışman)	Doç. Dr. Yeter Şahiner
Üye	Prof. Dr. Safure Bulut
Üye	Prof. Dr. Ahmet Arıkan
Üye	Yrd. Doç. Dr. Elif Yetkin Özdemir

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 03/01/2014 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ...../...../......... tarihinde kabul edilmiştir.*

Prof. Dr. Berrin AKMAN
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

* Tez çalışması Enstitü Yönetim Kurulu tarafından onaylandıktan sonra ciltlenmelidir. Çünkü Enstitü Yönetim Kurulunun tezde eksikler bulması durumunda öğrencinin tezini yeniden ciltlettirmesi gerekecektir.

7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN İSPATA YÖNELİK ALGI VE İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN İRDELENMESİ

Ebru AYLAR

ÖZ

Bu araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve becerilerini geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim süreci sonrasında öğrencilerin ispata yönelik algı ve becerilerini betimleyebilmek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda araştırma, nitel araştırma yaklaşımlarından birisi olan eylem araştırması olarak kurgulanmış ve araştırmada betimsel analiz kullanılmıştır.

Çalışma grubunun seçiminde maksimum çeşitlilik örneklemi tercih edilmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu, Ankara ilinde, Çankaya ve Yenimahalle ilçelerine bağlı iki ortaokulda birer 7. sınıf oluşturmaktadır. Araştırmada 54 öğrenci yer almıştır.

Araştırmanın uygulama sürecinde 14 hafta, haftada 1 saat süren ispat öğretimi gerçekleştirilmiştir. Bu derslerde doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yoluyla ispat yöntemleri ele alınmıştır. Gerçekleştirilen bu uygulamanın ardından öğrencilere, ispata yönelik algılarındaki değişimi belirlemeyi amaçlayan ispat testi 1 ile ele alınan ispat yöntemlerine yönelik beceri ve performanslarını betimlemeyi amaçlayan ispat testi 2 ve 3 uygulanmıştır. Bu testler araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bu testlerin ardından, öğrencilerin verdikleri yanıtları ayrıntılandırmak amacıyla 16 öğrenci ile yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın sonucunda, 7. sınıf öğrencilerinin ispat kavramına yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinde bir gelişim gözlenmiştir. Öğrenciler karşı örnek vererek ispat yöntemi ile ispatlanan önermelerde başarılı olurken, durum yolu ile ispat yönteminin kullanılacağı önermelerde belirgin bir şekilde başarısız olmuşlardır. Durum yolu ile ispat yönteminde diğer yöntemlere göre daha çok zorlanan öğrencilerden bazıları gerçekleştirilen görüşmede öğrenciler, araştırmacının destek ve yönlendirmesi ile bu ispat yöntemi ile de ispat yapabilmişlerdir.

Anahtar sözcükler: İspat, ispat algısı, ispat yöntemleri, örnekle doğrulama, genelleme

Danışman: Doç. Dr. Yeter ŞAHİNER, Hacettepe Üniversitesi, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı

EXAMINATION OF 7th GRADE STUDENTS' ABILITY ON PROVING AND THEIR PERCEPTION OF PROVING

Ebru AYLAR

ABSTRACT

This study aims to determine the ability and perceptions of students towards proof after a teaching process with the objective of developing the perceptions and skills of 7th grade students towards proof. Accordingly, the study was designed as action research, which is one of the qualitative research approaches, and descriptive analysis was employed in the study.

Purposive sampling was preferred in the selection of the study group. The study group of the study consisted of a 7th grade from each of the two schools from the districts of Çankaya and Yenimahalle in the province of Ankara. 54 students took part in the study.

First of all proof teaching for 1 hour a week was performed for 14 weeks in the application process of the study. Direct proof, proof by counter-example, proof by exhaustion and proof by cases were discussed during the instruction. After this application, proof test 1 with the objective of determining the perception of students towards proving and proof test 2 and 3 with the objective of determining the abilities of students towards proving was utilized. Than, semi-structured in-depth interviews were conducted with 16 students in order to refine their responses to those tests.

As a result of the study, an improvement on ability and perceptions of students towards proving had been observed. Students were more succesful on proof by counterexample method than the others. But they clearly failed in proof by cases. Some of the students who were forced at proof by cases method, could be able to prove at interviews by the help of researchers support and guidance.

Keywords: Proof, proof perception, proof methods, justification by example, generalization

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yeter ŞAHİNER, Hacettepe University, Department of Elementary Education, Division of Elementary Mathematic Education

ETİK BEYANNAMESİ

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Ebru Aylar

İÇİNDEKİLER

ÖZET……………………………………………………………… ..... ……………....iii
ABSTRACT………………………………………………....... ……………………v
ETİK BEYANNAMESİ vi
İÇİNDEKİLER…………………………………… ......…………………………vii
TABLOLAR DİZİNİ .... …………………… ....……………………………....x
ŞEKİLLER DİZİNİ ....………………… .....……………………………………...xi

1 GİRİŞ………………………………… ....……………………………………………1
1.1. Matematik ve İspat… .... ……………………....……………………1
1.2. İspat Yöntemleri ve Sınıflandırma ....…………………… .... …....2
1.3. Bu Çalışmada Ele Alınacak İspat Yöntemleri……………… ....…….6
1.4. Matematik Eğitimi ve İspat………......…… ....…………………………...6
1.4. 1. NCTM'de İspat Öğretimi…… .... ……....…………….……......12
1.4. 2. Çocukta İspat Düşüncesinin Gelişimi…… .... ………….........14
1.4.3. Eğitim Literatüründe İspat Kavramı ve İspata Yönelik Adlandırmalar.. 16
1.5. Araştırmanın Amacı ve Problem Durumu.......... ....……….............21
1.6. Araştırmanın Önemi 23
1.7. Araştırmanın Sayıltıları 24
1.8. Araştırmanın Sınırlılıkları 24
1.9. Tanımlar 25

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.......................………..........………………………...26
2.1. İspat İle İlgili Türkiye'de Yapılan Araştırmalar… .... ….......………26
2.2. İspat İle İlgili Yurtdışında Yapılan Araştırmalar… .... ……......……34

3. YÖNTEM ....……………...………………...44
3.1. Araştırma Modeli.....…………………………………………………….......44
3.2. Çalışma Grubu 48
3.3. Araştırmacının Rolü ....…........49
3.4. Veri Toplama Süreci 49
3.4.1. Pilot Uygulama Süreci…….…… .....………………….................49
3.4.2. Uygulama Süresi………………… ..... ……………...................51
3.5. Veri Toplama Araçları 72
3.5.1. Başarı Testi…………………...... ………………………...............72
3.5.2. Hazır Bulunuşluk Testi………………………… .....……………...73
3.5.3. İspat Testi 1 …… ...... ………………………………………........74
3.5.4. İspat Testi 2 ....………………………………78
3.5.5. İspat Testi 3 …… .....……………………………...........................79

3.5.6. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu…… ......…………………79
3.6. Veri Analizi ....…. 80
3.6.1. Verili İspatı Değerlendirme Sorularına İlişkin Kodlar ....……..81
3.6.2. İspat Performansına İlişkin Kodlar…....... ……………………......83
3.6.2.1. Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Kodlama 83
3.6.2.2. Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine İlişkin Kodlama 84
3.6.2.3. Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Kodlama 84
3.6.2.4. Durum Yolu İle İspat Yöntemine İlişkin Kodlama....... 85
3.7. Geçerlik ve Güvenirlik 86

4. BULGULAR VE YORUM 88
4.1. Uygulama Öncesinde İspat Algısı ve becerisine İlişkin Bulgular....... ..85
4.2. Uygulama Sonrasında ispat Algısı ve Becerisine İlişkin Bulgular 93
4.2.1. Öğrencilerin İspat Kavramını Algılayışlarına İlişkin Bulgular.. 93
4.2.1.1. İspat mı, Doğrulama mı? 94
4.2.1.2. Önerme hem Doğru Hem yanlış Olabilir mi?.. 97
4.2.1.3. ÖnermeninBirden Fazla İspatı Olabilir mi?........ 101
4.2.1.4. Hangi Cebirsel Gösterim Önermenin İspatıdır?.. 104
4.2.1.5. Özet 106
4.2.2.Öğrencilerin İspat Beceri ve Performanslarına İlişkin Bulgular 107
4.2.2.1. Öğrencilerin Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları 110
4.2.2.2. Öğrencilerin Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları. 121
4.2.2.3. Öğrencilerin Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları 127
4.2.2.4. Öğrencilerin Durum Yolu İle İspat Yöntemine İlişkin beceri ve Performansları 135
4.2.2.5. Özet 143

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 145
5.1. Sonuç 145
5.1.1. Uygulama Öncesi Öğrencilerin İspat Algısı ve Becerisine İlişkinSonuçlar 145
5.1.2. Uyulama Sonrası Öğrencilerin İspat Algısına İlişkin Sonuçlar 146
5.1.3. Uygulama Sonrası Öğrencilerin İspat Beceri ve Performanslarına İlişkin Sonuçlar 148
5.2. Öneriler 151

Kaynakça 153

Ekler Dizini 161
EK 1 : İspat Öğretim Dersinde Kullanılan Akıl ve İspat Oyunları......................162
EK 2: Hazır Bulunuşluk Testi 164
EK 3: İspat Testi 1 165
Ek 4: İspat Testi 2 169
EK 5: İspat Testi 3 173
EK 6: Görüşme Formu 174
EK 7: Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğü’nden Alınan Araştırma İzni 178

Özgeçmiş 179

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Uygulamanın gerçekleştiği şubeler 49
Tablo 3.2. Başarı Testi İstatistikleri 73
Tablo 4.3. Hazır bulunuşluk testi 1. soruya ilişkin bulgular 89
Tablo 4.4. Hazır bulunuşluk testi 3. soruya ilişkin bulgular 90
Tablo 4.5. Hazır bulunuşluk testi 2. soruya ilişkin bulgular 91
Tablo 4.6. Hazır bulunuşluk testi 4. soruya ilişkin bulgular 92
Tablo 4.7. İspat testi 1, 1. soruya ilişkin bulgular 94
Tablo 4.8. İspat testi 1, 2. soruya ilişkin bulgular 98
Tablo 4.9. İspat testi 1, 3. soruya ilişkin bulgular 102
Tablo 4.10. İspat testi 1, 4. soruya ilişkin bulgular 104
Tablo 4.11. İspat testi 3'de yer alan sorular ve öğrencilerin bu soruları seçme oranları 108
Tablo 4.12. İspat testi 2, 1. Gruba ilişkin bulgular 110
Tablo 4.13. İspat testi 3, 1. soruya ilişkin bulgular 117
Tablo 4.14. İspat Testi 3, 2. soruya ilişkin bulgular 119
Tablo 4.15. İspat testi 2, 2. Gruba ilişkin bulgular 122
Tablo 4.16. İspat testi 3, 5. soruya ilişkin bulgular 125
Tablo 4.17. İspat testi 3, 6. soruya ilişkin bulgular 125
Tablo 4.18. İspat testi 2, 3. Gruba ilişkin bulgular 127
Tablo 4.19. İspat testi 3, 3. soruya ilişkin bulgular 133
Tablo 4.20. İspat testi 3, 4. soruya ilişkin bulgular 133
Tablo 4.21. İspat testi 2, 4. Gruba ilişkin bulgular 136
Tablo 4.22. İspat testi 3, 7. soruya ilişkin bulgular 141
Tablo 4.23. İspat testi 3, 8. soruya ilişkin bulgular 142

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. M.E.B.'e göre ispat yöntemleri 3
Şekil 1.2. Rossi'ye (2006) göre ispat yöntemleri 4
Şekil 3.3. Eylem araştırması döngüsü 45
Şekil 3.4. İspat testi 1, 1. soruda yer alan cevaplar 75
Şekil 3.5. İspat testi , 2. soruda yer alan yanıtlar 76
Şekil 3.6. İspat testi 1, 3. soruda yer alan cevaplar 77
Şekil 3.7. İspat testi 1, 4. soruda yer alan cevaplar 78
Şekil 3.8. İspat testi 2, soru örneği 79
Şekil 3.9. İspat Testi 1, 1. soru 82
Şekil 4.10. A Şubesinden Berk - Kod 3 90
Şekil 4.11. A Şubesinden Gülin - Kod 3 90
Şekil 4.12. A Şubesinden Nilay - Kod 2 91
Şekil 4.13. B şubesinden İlayda - Kod 4 111
Şekil 4.14. A Şubesinden Selda - Kod 3 111
Şekil 4.15. B Şubesinden Derya - Kod 4 112
Şekil 4.16. A Şubesinden Sude - Kod 2 113
Şekil 4.17. B Şubesinden Derya – Kod 3 117
Şekil 4.18. A Şubesinden Beyza – Kod 1 118
Şekil 4.19. B Şubesinden Aynur - Kod 2 120
Şekil 4.20. A Şubesinden Deniz - Kod 4 120
Şekil 4.21. B Şubesinden Tuna - Kod 2 123
Şekil 4.22. B Şubesinden İlayda - Kod 3 124
Şekil 4.23. B Şubesinden Ayşe - Kod 2, 5. soru 126
Şekil 4.24. A Şubesinden Sude - Kod 3, 5. soru 126
Şekil 4.25. A Şubesinden Berk - Kod 4 128
Şekil 4.26. A Şubesinden Eylem - Kod 3 129
Şekil 4.27. A Şubesinden Ömer – Kod 4 130
Şekil 4.28. B Şubesinden Tuna – Kod 2, 3. soru 134
Şekil 4.29. B Şubesinden Özer - Kod 3, 4. soru 134
Şekil 4.30. B Şubesinden Yeliz - Kod 3, 3. soru 135
Şekil 4.31. A Şubesinden Beyza - Kod 4, 4. soru 135

Şekil 4.32. B Şubesinden Bahar – Kod 1 137
Şekil 4.33. A Şubesinden Mehmet – Kod 2 137
Şekil 4.34. A Şubesinden Berk – Kod 4...139
Şekil 4.35. A Şubesinden Dicle - Kod 3, 7. soru 143

1. GİRİŞ

1.1. Matematik ve İspat

Tüm bilimsel araştırma alanları (formel, pozitif veya sosyal), belirli bir mantıksal temele dayanır. Tüm bu bilim alanları bir sonuca ulaşmayı, bu sonucun doğruluğunu ortaya koymayı amaçlasa da kullandıkları kanıtlama yöntemlerinde ciddi farklılıklar bulunmaktadır. Doğru bilgiye ulaşma ve doğru bilgiyi üretme amacıyla kullandıkları bu yöntemler temelde ikiye ayrılır; tümdengelim ve tümevarım. Tümdengelim, tümel (genel) bir önermeden tikel (özel) bir önerme çıkarma eylemidir. Tümevarım ise tikel önermeden tümel önerme oluşturma sürecidir. Tümevarım yöntemiyle deney, gözlem, hesap yapma gibi yollarla bir doğa yasasının genel kurallarına ulaşılmaya çalışılır (Karaçay, 2009).

Matematik aksiyomatik bir yapıya sahiptir ve yapısı gereği tümdengelimseldir. Bu yapı, üzerinde ortaklaşılmış bazı kavramlar ve önermeler kümesi ile başlar. Başlangıç noktası olarak kabul edilen bu küme "tanımsız terimler" ve aksiyomlardan oluşur. Hangi konuda olursa olsun her şeyin tanımını yapmak mümkün değildir (Çelik, 2010). Yapılan her tanım kendi içerisinde, tanımlanacak yeni terimler içerir. Bu terimler tanımlanmaya çalışıldığında ise içerisinde farklı terimleri barındıran yeni terimler kullanılır. Bu tanımlama süreci sınırsız bir süreç şeklinde ilerleyebilir. Yalnız tüm lisanlarda bulunan kelime sayısı sınırlıdır. Sınırlı sayıdaki kelimeler ile tüm kelimeleri tanımlamak mümkün değildir. Bu nedenle bazı kelimeleri tanımlamadan kullanmak gerekir. İşte bu terimler tanımlama sürecindeki başlangıç noktasını oluştururlar. Matematik alanında tanımlanmadan kullanılan bu terimlere tanımsız terimler adı verilir (Çelik, 2010). Bu terimler, kendilerinden daha basit terimler ya da kavramlarla açıklanamazlar. Ama onları sezgilerimizle kolayca algılayabiliriz (Karaçay, 2009). Nokta, doğru, düzlem vb. tanımlanamayan ama sezgisel olarak açık olan kavramlardır, matematiğin tanımsız terimleridir. Tanımsız terimlerin kabulünün ardından ise bu terimlere dayanan ve doğru olduğu varsayılan çeşitli önermeler; aksiyomlar ortaya konur. Aksiyomlar ispatsız kabul edilen önermelerdir (Karaçay, 2009). Örneğin "nokta" teriminden yola çıkılarak "bir noktadan başka bir noktaya tek bir doğru çizilebilir" aksiyomu da doğru kabul edilir. Matematik, bu temel kavramlar ve aksiyomlar üzerine, yeni bilgiler elde etmek amacıyla, mantık kuralları doğrultusunda inşa edilmiştir. Tanımlar ve aksiyomlar dışında kalan her önerme ispat edilmelidir (Gosset, 2003). Belki de matematik sahip olduğu bu yapıdan ötürü Sarı ve diğerlerince (2007) “kanıtlama disiplini” olarak adlandırılmıştır.

Genellikle matematiğe özgü bir işlem olarak kabul edilen ispat, bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu veya yanlışlığını, yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 1996). Matematikte doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir. Teoremler ise ispatlanabilen bilimsel önermelerdir. $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir önerme doğru ise teoremdir. $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilen bir teoremde, p hipotez, q ise hükümdür. $p \Rightarrow q$ teoreminin doğru olduğunu gösterme işine teoremin ispatı denir (Irmak, 2008).

Doğru bilgiye ulaşmak adına takip edilen bir süreç olarak tanımlayabileceğimiz ispat süreci, birbirinden farklı ama birbiriyle ilişkili 3 aşamadan oluşmaktadır. Bunlar; ispatı yapılacak şeyin ortaya konması, ispatın organizasyonu ve bu ispatın başka kişilere ilan edilmesidir (Lee, 2002). İspatın tasarlanması olarak bahsedilen uygulama sürecinin yani ortaya konan önermeyi sınama sürecinin ispat olabilmesi için mantık kurallarına dayanması gerekir. Ayrıca Hale (2003) mantık kurallarına ek olarak ispat sürecinde önermenin aşağıdakilerden bir ya da birkaçı tarafından muhakkak sınanması gerektiğini de vurgular:

- Mantık kuralları
- Daha önce ispatlanmış başka teoremler
- Aksiyomlar
- Konu ile ilgili tanımlar
- Gerçekleştirilen ispatın önceki aşamaları

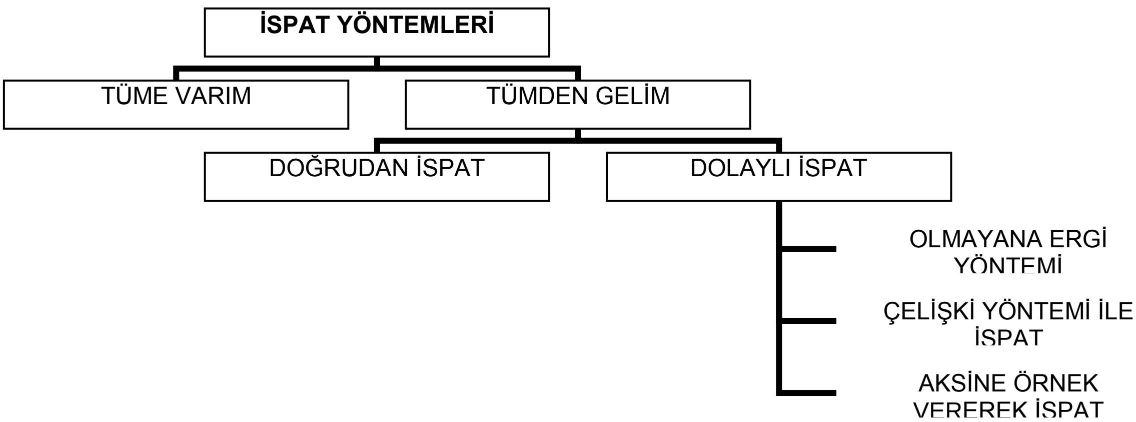
1. 2. İspat Yöntemleri Ve Sınıflandırma

İspatın matematikte sahip olduğu öneme karşın gerek yabancı, gerekse Türkçe literatürde ispat ile ilgili bir dizi karışıklık söz konusudur. Bu karışıklıklar ispat yöntemlerinin neler olduğu ve sınıflandırılması ile yöntemlerin Türkçe karşılıklarına yönelik adlandırma ile ilgilidir.

Bu karışıklıklardan ilki var olan ispat yöntemlerinin neler olduğu ve sınıflandırılmasına yöneliktir. İspat yöntemleri her kaynakta farklı ele alınmıştır.

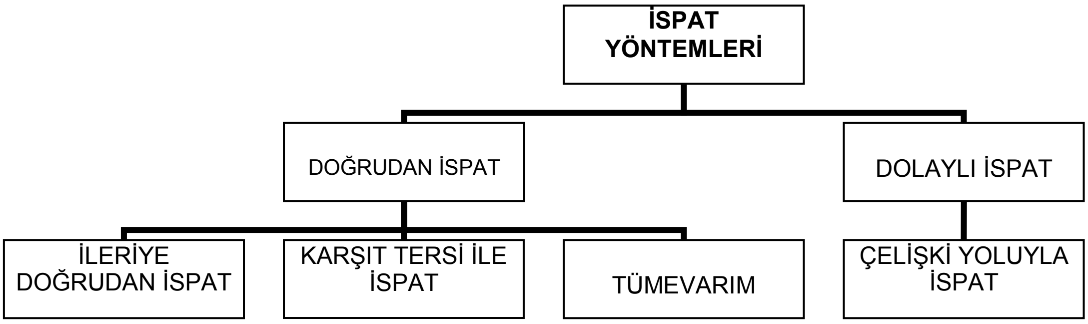
Literatürdeki kaynakların çoğunda var olan ispat yöntemleri şu şekilde sıralanabilir; doğrudan, dolaylı, aşikar, çelişki yoluyla, karşıt tersi ile, tümevarım yolu ile, tümdengelim yöntemiyle, aksine örnek vererek, deneme yoluyla, tüketerek, çift koşullu ve oluşturarak ispat (Gossett, 2003; Irmak, 2008; Rossi, 2006; MEB, 2011). Ne var ki kaynaklar bu ispat yöntemlerinin hepsine bir arada yer vermemekte, bazı ispat yöntemleri bazı kaynaklarda hiç ele alınmamaktadır. Ayrıca bu yöntemlere ek olarak bazı kaynaklarda da “modüler aritmetik yoluyla ispat” (Irmak, 2008) adlandırmasında olduğu gibi, ispat yapılırken kullanılan matematik yöntemini adında içeren adlandırmalara da rastlanabilmektedir.

İspat yöntemlerinin neler olduğuna yönelik netleşemeyen bu tabloya ek olarak, ispat yöntemlerinin sınıflandırmasında da bir kaynaktan diğerine ciddi farklılıklar bulunabilmektedir. Bazı kaynaklar ispat yöntemi olarak kabul ettiği türleri hiçbir sınıflandırmaya tabii tutmadan ard arda sıralarken (Gossett, 2003; Rosen, 1995), bazıları doğrudan ve dolaylı ispat üst başlıkları altında bir sınıflandırma yapmakta (Rossi, 2006), bazıları da tümevarım ve tümdengelimi en üst başlıklandırma olarak tercih etmektedir (MEB, 2011). MEB Ortaöğretim Matematik programında ispat yöntemleri öncelikle tümevarım ve tümdengelim üst başlıkları ile ikiye ayrılarak sınıflandırılmıştır:



Şekil 1.1. M.E.B.'e göre ispat yöntemleri (M.E.B., 2011)

Bu sınıflandırmaya ek olarak ispat yöntemlerini doğrudan ve dolaylı ispat yöntemleri olarak ikiye ayırıp bu doğrultuda sınıflandıran örnekler de mevcuttur.



Şekil 1.2. Rossi'ye (2006) göre ispat yöntemleri

Rossi (2006), ispat yöntemlerini doğrudan ve dolaylı ispat yöntemleri olarak ikiye ayırarak sınıflandırmıştır. Daha sonra bu ayrışmaya dâhil edemediği oluşturarak ispat, çift koşullu ispat, aksine örnek verme ve tüketerek ispat türlerinin varlığına da değinmiştir. Sadece Rossi ve MEB’in sınıflandırmasına baktığımızda dahi ciddi uyuşmazlıklar dikkati çekmektedir. Rossi sadece çelişki yoluyla ispat yöntemini dolaylı ispat olarak tanımlarken, MEB’in ortaöğretim programında yer verdiği sınıflandırmada aksine örnek vererek ispat, çelişki yoluyla ispat, olmayana ergi (karşıt tersi ispat) ve deneme yöntemiyle ispat dolaylı ispat başlığı altında toplanmıştır.

$p \Rightarrow q$ önermesini doğrudan ispat yöntemiyle ispatlamak istediğimizde, p hipotezi doğru kabul edilip, q hükmüne ulaşılmaya çalışılır. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri bu önermenin karşıt tersi olan $q' \Rightarrow p'$ nin doğruluk değeri ile aynıdır. Dolayısıyla $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak, $q' \Rightarrow p'$ i ispatlamakla eşdeğerdir. Bu önermenin karşıt tersini ispat etmek için ise yine q' doğru kabul edilip p hükmüne ulaşılmaya çalışılır. Yani $q' \Rightarrow p'$ önermesi için doğrudan ispat yöntemi kullanılmış olur. Ancak, ispata hükmün değili (q') ile başlanması, ispata dolaylılık katmıştır. Bu sebepten bazı sınıflandırmalarda karşıt tersi ile ispat, hükmün olumsuzu ile başlanması nedeniyle dolaylı ispat, ispatta doğrudan ispat yöntemi kullanılması nedeniyle de doğrudan ispat kategorisi altında ele alınabilmiştir. Doğrudan ve dolaylı ispatın nasıl tanımlanacağı, hangi ispat yöntemlerinin bu başlıklar altında yer alabileceği konusu da sınıflandırmaya yönelik netleşilemeyen bir başlıktır.

İspat yöntemlerinin neler olduğu ve sınıflandırmasına yönelik var olan karmaşaya ek olarak Türkçe literatürde yer alan, net olmayan bir diğer konu da ispat yöntemlerinin isimlerinin Türkçeleştirilmesiyle ilgilidir. “Olmayana ergi” kavramı bir ispat yöntemi olarak pek çok kişinin aşina olduğu bir kavramdır. Buna karşın “olmayana ergi” nin tanımı, “proof by contradiction” ve “proof by contrapositive” içeriğinde iki farklı şekilde tanımlanabilmektedir. Örneğin Irmak (2008) ve ortaöğretim programında MEB (2011) olmayana ergi ile ispatı, teoremin kendisi yerine, karşıt tersinin ele alınarak (proof by contraposition) ispatlanmaya çalışılması olarak tanımlamaktadırlar. Yani literatürde geçen başka bir adlandırma ile “karşıt tersi ile ispat” olarak tanımlamaktadırlar. Yani bu içerikte p $\Rightarrow$ q önermesi için $q' \Rightarrow p'$ ispatlanır.

TÜBİTAK Bilim Teknik Dergisinde ve bir dizi başka kaynakta ifade edildiği şekliyle ise “olmayana ergi”, “proof by contradiction” içeriğinde tanımlanmaktadır. İfade edilen bu yöntemde doğruluğunu ispatlamaya çalıştığımız ifadenin tersi ele alınarak ispatlanmaya çalışılır ve bir çelişki elde edilir. Bu içerik MEB (2011) programında “çelişki yöntemi ile ispat” olarak adlandırılmıştır.

İspat, matematik içerisinde önemli bir yere sahiptir. Sahip olduğu bu öneme karşın literatürde yer alan ve burada ifade edilen bir dizi karmaşıklık ispatın ne olduğu ve nasıl ele alınması gerektiğine dair ciddi bir boşluk yaratmaktadır. Öyle ki matematik alanında ispat ve ispat yöntemlerine yönelik net ve üzerinde ortaklaşılan bir yaklaşımın olmayışı, eğitim literatüründe de ispat olarak kabul edilip edilmeyeceği tartışılan ispat adlandırılmalarının varlığına zemin oluşturmaktadır. Görsel ispat yöntemi buna örnektir. “Proof without words” tanımlamasıyla yabancı literatürde yer alan bu yaklaşımın ispat yöntemi olup olmayışı yönündeki tereddütler aslında bu yaklaşımı literatüre kazandıran kişi tarafından, bu yaklaşımın temel kaynağı olan kitapta da açıkça ortaya konmuştur (Nelsen, 1993). Nelsen kitabında, bu yaklaşımın gerçek bir ispat olmadığını söylemektedir (Nelsen, 1993, vi). Buna karşın gerek görsel ispat, gerekse çeşitli gösterimler, modellemeler aracılığıyla ortaya konan doğrulamalar, örnek vererek yapılan veya deneyimlere dayanan doğrulamalar eğitim alanıyla ilgili literatürde ispat olarak adlandırılabilmektedir. Bu durum ispatın ne olduğu, ispat yöntemlerinin neler olduğu ve ispat öğretiminin tüm bunlar ışığında nasıl ele alınması gerektiğine yönelik çalışmalara olan ihtiyacı ortaya koymaktadır. Ancak bu tür çalışmalar ülkemizde yok denecek kadar azdır.

1.3. Bu Çalışmada Ele Alınacak İspat Yöntemleri

İspat yöntemlerinin sınıflandırılması ya da tanımlamasına yönelik farklılıklar bu araştırmanın başlıca konusu değildir. Bu farklılıklar okuyucuyu bilgilendirmek amacıyla, referansları ile birlikte önceki bölümde ele alınmıştır. 7. sınıf öğrencileri üzerinden ispat kavramının ilköğretim düzeyinde öğretilebilirliğinin irdeleneceği bu çalışmada ele alınacak ispat yöntemleri, herhangi bir sınıflandırmaya gerek görülmeden aşağıdaki şekilde sıralanmıştır:

- Doğrudan İspat Yöntemi
- Karşı Örnek Vererek İspat
- Tüketerek İspat
- Durum Yolu İle İspat
- Çelişki Yolu İle İspat

İspat yöntemlerine ilişkin tanımlamalara, "Tanımlar" bölümünde yer verilmiştir.

Araştırmanın başında 7. sınıf öğrencilerine tabloda yer alan beş ispat yöntemini içeren bir öğretimin uygulanması planlanmıştı. Gerçekleştirilen pilot çalışmasının ardından, ileriki bölümlerde ayrıntılarına değinilecek gerekçeler nedeniyle araştırma, doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemleri ile sınırlandırılmıştır.

1.4. Matematik Eğitimi Ve İspat

Matematiksel ispat matematiğin önemli bir parçasıdır. Matematik ve matematik eğitiminin temelinde yer alan önemli kavramlardan birisi olan ispat kavramının (Lee, 2002) önemine her iki alan literatüründe de değinilmektedir. İspat, matematiksel bilgilerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ortaya koyarken (Tall & Mejia-Ramos, 2006), matematik öğretimi açısından ise matematiksel bilginin inşasının sağlanmasında önem taşımaktadır. Knuth (2002) ispatı matematik öğrenme sürecinin önemli bir aracı olarak niteler. Senk ve diğerlerine göre ise matematiğin kalbi olan ispat (akt. Albayrak Bahtiyarı, 2010); sadece neyin doğru olduğu ile ilgili değil, aynı zamanda niçin doğru olduğu ile de ilgilidir (Almedia, 1996). Öğrenme sürecinde bir araç olarak ele alınan ispat, sadece doğru matematiksel bilgiye ulaşmak adına değil, ayrıca matematik bilmek ve yapmak adına; matematiksel algının temelini oluşturmak adına; matematiksel bilginin kavranması, kullanılması ve geliştirilmesi adına da önemsenmektedir (Hanna and Jahnke,1996; Kitcher,1984; Polya 1981). Tüm bu vurgular ispatın önemini ortaya koymakla birlikte ispat ile matematik eğitimi arasında da kuvvetli bir ilişki kurar.

Atfedilen bu öneme karşın matematik öğretimi süreci içerisinde ispat yoğunluklu olarak lise ve üniversite düzeyinde ele alınmaktadır. Türkiye de ise öğrenciler az da olsa ortaokul düzeyinde özellikle de 8. sınıf geometri derslerinde, Pisagor teoreminin ispatı üzerinden ispat kavramı ile karşılaşmışlardır. Son müfredat değişikliği ile bu karşılaşma 9. sınıfa kaydırılmıştır. Matematik eğitiminde ispat tüm boyutlarıyla aslolarak üniversite düzeyinde, özellikle de matematik ve matematik eğitimi bölümlerinde ele alınmaktadır.

2005 yılında "Her çocuk matematiği öğrenebilir" ilkesi temel alınarak yenilenen öğretim programı bugüne kadar bir dizi ufak değişikliğe uğratılmıştır. En son 2012-2013 eğitim öğretim yılında uygulamaya başlanan ve toplumda 4+4+4 eğitim sistemi olarak yankı bulan, 12 yıllık zorunlu eğitime geçiş programı ile öğretim programları güncellenmiştir. İlköğretim ve Eğitim Kanunu'nda nisan ayında gerçekleştirilen değişiklik doğrultusunda, 222 nolu kanunun 7. maddesi şu şekilde değiştirilmiştir; *“MADDE 7 – İlköğretim; 1 inci maddede belirtilen amacı gerçekleştirmek için kurulmuş dört yıl süreli ve zorunlu ilkokul ile dört yıl süreli ve zorunlu ortaokuldan oluşan bir Milli Eğitim ve Öğretim Kurumudur.”* (İlköğretim ve Eğitim Kanununun Bazı Maddelerinin Değiştirilmesine İlişkin Kanun, 2012). Bu bağlamda ilkokul programı 1-4. sınıfları, ortaokul programı 5-8. sınıfları kapsayacak şekilde yeniden düzenlenmiştir.

Gerek 2005 düzenlemesini, gerekse bu son düzenlemeyi birlikte incelediğimizde ilkokul ve ortaokul müfredatında ispata değinilmediği görülmektedir. Öğrencilere kazandırılması gereken beceriler problem çözme, ilişkilendirme, iletişim, tahmin ve akıl yürütme olarak sıralanmış, ispata bir beceri olarak programda yer verilmemiştir. İspat kavramına programda değinilmemiş olsa da, akıl yürütme becerisi şu şekilde tanımlanmıştır; *"Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.)*

kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci" (MEB, 2013, s.5). Ayrıca akıl yürütme becerisi içerisinde öğrencilerden matematiksel çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunmaları ile kuralları doğrudan ezberlemeleri yerine, kuralların arkasında yatan kavramlarla ilişkilerini kurmalarının da beklendiği vurgulanmıştır. Bu bağlamda ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı da olsa bir ilişki kurmak mümkün olmaktadır. Bununla birlikte program içerisinde yer alan diğer beceri başlıkları da incelendiğinde, bu becerilerle kazandırılması hedeflenen bazı davranışları, ispat yapabilme yeterliliği ile ilişkilendirmek de mümkündür (Çalışkan, 2012). Yine de dolaylı olarak kurulan bu ilişkilendirme yeterli değildir. İspat öğretim programı içerisinde 9. ve 11. sınıf programlarında, geliştirilmesi hedeflenen matematiksel beceri ve yeterlilik olarak ele alınmaktadır. "Matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme" ise süreç becerisi olarak vurgulanmıştır (MEB, 2013b). 2013 yılında güncellenen ortaöğretim programlarında ispat kavramı ilk olarak 9. sınıfta "Denklem ve eşitsizlikler" konu alanında, $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığının ispatı ile öğrencilerin karşısına çıkmaktadır. Daha sonra dik üçgende Pisagor teoremi ile üçgende kosinüs / sinüs teoremlerinin ispatlarına da programda yer verilmiştir. 11. sınıfta ise "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı içerisinde aksine örnek verme, karşıt tersi ile ispat, doğrudan ispat, çelişki yoluyla ispat ve tümevarım yöntemleri programda ispat yöntemleri olarak ele alınmıştır. Ortaöğretim programında ispata yer verilmesine rağmen, Çalışkan'ın 2012 yılında gerçekleştirdiği çalışma matematik öğretmenlerinin güncellenmemiş program kapsamında yer alan Mantık Öğrenme Alanı içerisindeki bazı temaları, özellikle de İspat Yöntemleri alt öğrenme alanını derste işlememe eğiliminde olduklarını ortaya koymuştur. İlhan da 2006 yılında gerçekleştirdiği çalışmasında programla ilgili bazı öğrenme alanlarının öğretmenlerce derslerde işlenmediğine yönelik var olan bu soruna değinmiştir. Bu durum programda zaten sınırlı oranda değinilen ispat alanının öğrencilerle olması gerektiği bir içerikte paylaşılmadığı düşüncesini kuvvetlendirmektedir.

İspat öğretiminin lise ve ileriki öğretim düzeylerinde yoğunlaşmasına paralel olarak, bu alanda gerçekleştirilen çalışmaların büyük bir bölümü ilk ve ortaokul düzeyinde ispat öğretimini ele almamakta ve hatta bazı çalışmalar okul matematiğinde ispatın sadece ileri ortaöğretim düzeyindeki öğrencilere uygun olduğunu, ortaokul öğrencilerinin formel ispatı anlamadığını ve yapamayacaklarını belirtebilmektedir (Bell, 1976; Fischbein, 1982; Knuth, 2002). Bu yaklaşımlara karşın son zamanlarda, okul öncesi öğretim sürecinden başlayarak, ispat öğretiminin erken yaş kuşağında da ele alınabileceğini savunan çalışmalarda bir artış da yaşanmaktadır (Ball vd., 2002; Cyr, 2011; Hanna, 1995; Schoenfeld, 1994; Stylianides, 2007a; Stylianides, 2007b).

Bahsedildiği üzere matematik eğitiminde ispat matematiksel bilginin kavranması açısından önem taşımaktadır. Bu nedenle matematikte ezberin önlenmesi, kavramsal bilginin inşası ile anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi açılarından da ispat matematik öğretiminde kritik bir değer taşımaktadır. Sonuç olarak matematiksel ispat, öğrenci seviyesine uygun olabilecek bir içerik ve düzeyde ele alınarak, öğretim sürecinin daha erken aşamalarında bu sürecin temel bir bileşeni olarak kullanılmalıdır.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de ispatı, müfredatın belirli konularının belirli zamanlarında yapılan özel bir aktivite olarak ele almamaktadır. İspat ve muhakeme, hangi konuda olunursa olunsun, ders işlenme sürecinin doğal akışının bir parçası olmalıdır (NCTM, 2000). Öğretim süreci içerisinde ispata bir konu alanı olarak yaklaşmayan, işlenen konudan bağımsız olarak ispatın öğretim sürecinin bir bileşeni olması gerektiğini savunan bu anlayış, matematik öğretiminde ispatın önemini daha da artırmaktadır.

NCTM'in süreç standardı olarak ele aldığı "akıl yürütme ve ispat", matematiksel içeriğin, bilginin kavranması ve kullanılmasının önemli bir yoludur. NCTM matematiği anlamak için ispatı kavramanın önemine değinir. Buna karşın NCTM'in süreç ve içerik standartlarına içeriğinde büyük oranda yer vermeye çalışan son ilköğretim programında ispata aynı derecede önem verildiği görülmemektedir. Öğretim programında ispat ve muhakeme ilişkisine yeterince değinilmemiş, NCTM'in "akıl yürütme ve ispat" standardı sadece "akıl yürütme" kazanımı olarak programda yer bulmuştur.

Benzer bir ilgi eksikliği ortaöğretim programında da yer almaktadır. 9 ve 11. sınıflarda ispat ve ispat yöntemleri ele alınmış olsa da, ispat programda bir konu başlığı olarak sınırlı kalmakta, öğretim sürecine içselleştirilmesinde eksiklikler bulunmaktadır. İspatın üniversite süreci öncesi öğretim programlarında yeterince yer almayışı sadece Türkiye'de yaşanan bir durum değildir. NCTM standartlarıyla birlikte matematik eğitiminde ispata yönelik ilgi artmakla birlikte, müfredatlarda henüz istenen düzeyde ispata yer verilmemektedir (Healy & Hoyles, 2000), hâlbuki ispat matematikten ayrı düşünülemez ve müfredatın ayrılmaz bir parçası olmalıdır (Schoenfeld, 1994).

İspat - matematik müfredatları ilişkisi tarihsel akış içerisinde farklı dönemlerde farklı şekillerde ele alınmıştır. ABD'de 1950 ve 1960'lı yıllarda gerçekleşen ortaöğretim müfredat reformlarında kavramsal öğrenmeye yönelik vurgu artmış, matematik daha formalist bir yapıda ele alınmıştır (Hanna, 1983). Bu süreçte müfredatta yer alan ispat, formel (rigorous) matematiksel ispattı ve aksiyomatik yöntem ile formel ispat tüm matematik konularının ve matematiksel düşünmenin merkezine yerleştirilmişti. Ortaöğretim müfredatında matematiği iyice soyutlaştırdığı gerekçesi ile eleştirilen bu yaklaşım, özellikle pedagojik yönlerden Hanna'nın da içerisinde yer aldığı bir çevre tarafından sakıncalı bulunarak eleştirilmiştir. Bu eleştiriler 80 ve 90'lı yıllarda öğretim programlarında ispata yönelik başka bir bakışın ortaya çıkmasına neden olur. Sonuç olarak 1980'li yıllara gelindiğinde başta ABD'de olmak üzere, müfredatta ispata yönelik vurguda bir azalma yaşanmıştır. Bu süreçte ispatın öğretim programlarında sınırlı düzeyde ele alınışını da eleştiren Hanna (2000), ispatın lise matematik programında gün be gün daha az yer bulduğuna değinerek, bunun olası nedenlerini şu şekilde sıralamıştır:

- İspatın yükseköğretime devam edecek öğrencilere öğretilmesinin gerekli olduğu düşünülmektedir.
- Tümdengelimsel ispat yerine kendi kendine öğrenmeye dayanan (heuristic) yöntemlerin muhakeme etme ve doğrulama becerilerinin gelişiminde daha etkili olduğu düşüncesi yaygın olarak kabul edilmeye başlanmıştır.
- Matematiksel doğrulamada dinamik yazılımların, görsel tekniklerin kullanımı giderek artan bir şekilde tercih edilmekte ve bu nedenle sınıflarda tümdengelimsel ispat kullanımı azalmaktadır.

Tüm bu değerlendirmelere ve kendisinin de içerisinde yer aldığı bir çevrenin 50 ve 60'lı yıllardaki uygulamaları da eleştirmiş olmasına karşın Hanna, ispatın matematik öğretiminde her düzeyde gerekli olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca, ispatın hem kendi kendine öğrenmeye dayanan teknikler, hem de görsel dinamik öğelerle bir arada da ele alınabileceğini ifade etmiştir.

2000’lere gelindiğinde ispatın öğretim programlarında sınırlı olarak yer almasına yönelik eleştirilerde bir artış gözlenmiş, bu artış 2000 yılında yayımlanan NCTM raporunda ispatın yeniden ele alınmasına neden olmuştur. NCTM’nin “Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları” raporunda ispata önceki metinlere göre daha çok değinilmiş ayrıca, ispatın matematik öğretimindeki rolü ve önemine de raporda yer verilmiştir. Bu raporun yayınlanmasının ardından gerek müfredat çalışmalarında, gerekse bu alanda yürütülen akademik çalışmalarda ilk ve ortaokullarda ispat öğretimine yönelik vurgu artmıştır.

Bu rapordan önce, Birleşik Krallık ulusal matematik müfredatında (DFE,1995) da matematiksel ispat sürecini içeren bir modele yer verilmiştir. Bu modelde erken yaş kuşağında çocuklara basit düzeyde örüntüler sunulmakta ve bu örüntülere yönelik tahminde bulunmaları sağlanmaktadır. Örneğin bu muhakeme sürecinde onlara "Bu durumda ne olurdu?" şeklinde sorular yöneltilmekte, onlardan "Tüm çift sayılar 2'ye bölünür" biçimindeki genel doğruları algılamaları beklenmektedir. Bu süreçte öğrencilerden varsayımlarda bulunmaları, genelleme yapmaları, bu genellemelerini test etmeleri, matematiksel bir açıklama ile deneysel kanıtlar arasındaki farkı ortaya koymaları beklenmektedir (Jones, 1997). Şu an kullanımda olan ulusal müfredatta ise 8. sınıf öğrencilerinin bir üçgenin iç açılarının toplamının 180, dörtgenin ise 360 derece olduğunun ispatları ile üçgende bir dış açının kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçülerinin toplamına eşit olduğunun ispatını anlama yeterliliğine sahip olması gerektiği belirtilir (DfEE, 2001).

Amerika Birleşik Devletleri'nde ise bugün öğrencilerin doğrulama ve ispat yapma yeterliliğini de geliştirmek üzerinden oluşturulan reform temelli müfredatlar bulunmakta ve bu müfredatlar bazı okullarda uygulanmaktadır. Connected Mathematica Project (CMP) temelinde hazırlanan müfredat bunlardan birisidir (Knuth vd., 2012, Cain, 2002). Bu müfredat Michigan State University’de, ortaokul öğrencileri için standart temelli ve problem odaklı olarak geliştirilen bir müfredattır.

Başta ABD ve İngiltere'de olmak üzere ispatın matematik öğretim programlarında ağırlığı artmakla birlikte gerçekleştirilen çalışmalar bu artışın yeterli olmadığını ortaya koymaktadır. Buna rağmen ispatın ileri düzeyde matematik eğitiminden ziyade, öğretim sürecinin her düzeyine yayılması gerektiğini vurgulayan ve ispat uygulamalarının öğrencilerin okuldaki matematik yaşantılarının bir parçası olarak görülmesini savunan pek çok çalışmaya da rastlanmaktadır (Stylianides, 2007a-b; Ball & Bass, 2003; Ball vd., 2002; Hanna, 1995; NCTM, 2000). Bu savunular temel olarak ispatı matematik yapmanın ve matematiği anlamanın temel taşı olarak ele alırlar.

1.4.1. NCTM'de İspat Öğretimi

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), başlangıçta ABD'deki okullar arası eşgüdümü sağlamak amacıyla kurulan ulusal bir merkez olsa da, bugün dünya çapında kabul görmektedir. İlk olarak 1989 yılında "Okul Matematiği için Öğretim Programı ve Değerlendirme Standardı" adlı kitabı yayınlayan NCTM, 2000 yılında "Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları" adlı raporu yayınladı. Bu kitapta, okul matematiğinde sağlanması gereken ilkelerin, ulaşılması beklenen standartların neler olduğu örnekleriyle açıklanmaktadır (Umay, 2007).

NCTM (2000) bu kitapta sınıf düzeylerine göre, ayrıntılı bir şekilde akıl yürütme ve ispatın gelişim sürecini ele almış ve bunların geliştirilebilmesi için yapılması gerekenleri şu şekilde sıralamıştır:

- Öğrenciler akıl yürütme ve ispatın matematiğin temel bir öğesi olduğunu kavramalıdır.
- Matematiksel tahminlerde bulunabilmeli ve bunları sınayabilmeli.
- Matematiksel tartışmaları ve ispatı değerlendirip geliştirebilmeli.
- Çeşitli akıl yürütme tiplerini bilmeli ve sınama sürecinde gerekli ispat yöntemlerini seçip kullanabilmeli.

Bu dört madde incelendiğinde, ülkemizde ortaokul öğrencilerinin ispatı matematiğin temel bir öğesi olarak algılamalarında, ispat içeren tartışmalar yürütüp bu tartışmaları geliştirmelerinde, ispat yöntemlerini kullanmalarında eksik olduklarını söylemek yanlış olmayacaktır. Var olan ortaokul müfredatı bu nitelikleri sağlamada yeterli değildir.

NCTM "Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları" adlı raporda ispat öğretiminin erken yaş kuşağında da ele alınması gerektiğini belirtirken, çocukta ispat düşüncesinin gelişimine yönelik bir sınıflandırma da yapmıştır. Raporda anaokulundan 8. sınıfa değin, akıl yürütme ve ispata yönelik bireyin gelişimi ve öğretmenlerin bu dönemlerde dikkat etmesi gereken noktalar şu şekilde ele alınmıştır:

Anaokulundan 2.Sınıfa Kadar: Bu süreç zarfında öğrenciler kendi deneyimlerinden yola çıkarak muhakeme yapabilirler. Muhakeme yaparken ampirik kanıtları, var olan önceki bildikleri gerçeklere dayanan tümdengelimsel yaklaşımı, kendi bakış açılarına dayanan varsayımı kullanırlar. Öğrencilerin bu dönemdeki akıl yürütmelerinin, genellemelerinin uygun olup olmadığını test etmek için öğretmenler öğrencileri örnek ve karşıt örnek vermeleri doğrultusunda yönlendirmelidirler. Ayrıca öğrencilerin dil becerileri, kendilerini ifade edebilme yetilerinin gelişmesi için sadece cevabı söylemelerinden ziyade, onları cevaba ulaştıran muhakemelerini de açıklamaları yönünde teşvik etmelidirler. Bunun için de “hayır”, “ve”, “veya”, “bazısı”, “hepsi”, “çünkü”, “eğer … o zaman” kalıplarını da kullanmaları sağlanabilir.

3–5. Sınıflar Arası: Öğrenciler bu dönemde tümevarım yöntemini tanımaya başlarlar. Karşıt örnekler vererek akıl yürütmek, ulaşılan çözümleri karşılaştırmak ve başkalarının muhakemelerini sorgulayıp karşılaştırarak genelleme yapmak, yapılan bu genellemelerin nedenini sorgulamak ve hangi durumlara uygulanabileceğine dair akıl yürütmek, bunları savunmak bu dönemde gerçekleştirilebilir. Öğretmenler bu dönemde açık uçlu, meydan okuyucu sorularla öğrencilerin matematiksel ilişkilere yönelik varsayım geliştirmelerini, bunları test edip uygulamalarını sağlamalıdırlar.

6–8. Sınıflar Arası: Bu dönemde öğrenciler varsayımlarını derinlemesine değerlendirmek için tümevarımla birlikte tümdengelimi kullanabilirler. Ayrıca doğru bir önermenin karşıtının her zaman doğru olmayacağını örneklerle kavrayabilirler.

NCTM’in ilköğretim düzeyinde akıl yürütme ve ispata yönelik çizdiği bu tablo ispat öğretiminin erken bir dönemde ele alınması gerektiğinin altını bir kez daha çizmektedir. İspat öğretimine erken dönemlerde başlanması ispat düşüncesinin gelişimini sağlayacaktır. Yukarıdaki aktarımlardan görüleceği üzere NCTM de öğrencilerin lise öncesi yaş dönemlerinde tümevarım ve hatta tümdengelime uzak olmadığını, ilk dönemlerde deneyimlerine dayanan, ampirik kanıtlarla genelleme yapma eğilimi baskın olacakken, daha sonrasında karşıt örnekler vererek akıl yürütebileceklerini net bir şekilde ifade etmektedir.

1.4.2. Çocukta İspat Düşüncesinin Gelişimi

Bireyde bilişsel gelişim doğumla birlikte başlayan ve çevremizdeki dünyayla bireyin etkileşimini sağlayan, bu etkileşim sonucu dünyanın algılanmasını, yorumlanmasını ve yorumlandığı noktada bireyin çevresine müdahalesine olanak sağlayan zihinsel süreçlerdir. Davranışçı kuramın aksine bireyi öğrenme sürecinde aktif kılan Piaget çocuğun duyusal-edimsel öğrenme aşamasından, soyut işlemler aşamasına uzanan bir dizi gelişimsel bilişsel süreçten geçtiğini savunur.

Tall (2008) bireyde formel ispat yapabilme becerisinin oluşumunu da bilişsel gelişim süreci içerisinde ele alır. Nesnelerin ve eylemliliklerin ilk algılanma anından aksiyomatik matematiğe varan bilişsel gelişim sürecini "matematiğin üç dünyası" olarak adlandırır ve şu şekilde ele alır:

- ***Kavramsal somut dünya*** (the conceptual-embodied world); başlangıçta gerçek dünyada görünen ve algılanan, daha sonra zihinde hayal edilen nesnelerin özelliklerinin algılanıp yansıtılmasını içerir.
- ***Nesnel ve süreçsel sembolik dünya*** (the proceptual-symbolic world); sayma işlemi gibi bir eylemle ilk olarak somut dünyada gelişir, bu sayma işlemini örneğin rakamları betimleyerek sembolleştirir ve bu süreçte hem işlem süreci hem de kavramın sembolik gösterimi bir arada düşünülmektedir.
- ***Aksiyomatik – formel dünya*** (the axiomatic-formal world); formel tanım ve ispatlara dayanır. Bu süreçte bilinen nesneler üzerinden anlam inşa etme yerine teorik tanımlar üzerinden formel kavramlar oluşturulur.

Bu yaklaşımı toplama işlemi üzerinden örneklemek gerekirse; çocuk ilk önce tahta bloklarla oynamakta, bu blokları gruplandırarak çokluklar oluşturmaktadır (kavramsal somut dünya). Daha sonra çocuk bu tahta bloklarla bir eylem ortaya koyar, çoklukları toplar. Bu eylemlilik süreci içerisinde hangi sıra ile çoklukları bir araya getirirse getirsin sonucun (toplamın) değişmediğini fark eder ve bunu sözel olarak dile getirir (nesnel ve süreçsel sembolik dünya). Çocuk toplama işleminde değişme özelliğini fark etmiştir. Son aşamada ise önce rakamlarla bu özellik ortaya konur (10+7 = 7+10), daha sonra x+y = y+x şeklindeki sembolik gösterim geliştirilerek genellemeye ulaşılır (aksiyomatik-formel dünya) (Tall vd., 2012).

Bilişsel gelişim süreci içerisinde Aktaş (2002) ispat kavramının oluşmasının okul öncesi dönemde başladığını söyler. Piaget tarafından sezgisel dönem olarak adlandırılan bu süreç aynı zamanda mantıksal düşünmeye geçiş dönemidir. Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi ispatın temelini oluşturan kavramların bu süreçte kazandırılması hedeflenir ve bu hedefler mantıksal düşünmeye geçişte köprü görevini üstlenirler. Bu köprü bu yaş döneminde sağlam oluşturulmazsa ileriki dönemlerde sorunlar ortaya çıkacaktır (Altıparmak, Öziş, 2005). Okul öncesi dönemde öğrencilere kazandırılması hedeflenen bu nitelikler başarıyla kazandırılırsa, matematiksel muhakeme gelişir, öğrenciler neden sonuç ilişkisi kurabilir ve tüm bunlar da ispat kavramının oluşumunda önemli bir zemin oluşturur.

İlkokul döneminde çocuklar somut işlem dönemindedirler. Bu süreç zarfında öğrencilerin somut nesne ve durumlar üzerinden akıl yürütmeleri ve varsayımda bulunmaları sağlanmalıdır. 3. sınıfa kadar fiziksel materyaller üzerinden nesneleri karşılaştıran, benzerlik veya farklılıklarına yönelik muhakemede bulunan ve bunun üzerinden genellemeye ulaşan öğrenciler, 3. sınıftan itibaren ulaştıkları genellemeleri ve varsayımları test edip, savunmaya yönelik teşvik edilmelidir. Bu seviyedeki öğrenciler varsayımlarını sınamak veya varsayımlarının doğruluğunu göstermek için birkaç örneğin yeterli olmadığını tartışabilmeli, birbirlerinin muhakemelerini sorgulayabilmeli ve karşı örnekleri varsayımlarını çürütebilmek için kullanabilmelidir. Matematiksel iddia kavramı bu yaşlarda oluşmaktadır (Altıparmak, Öziş, 2005). Bu nedenle NCTM'in de benzer bir içerikte ele aldığı bu yapının öğrencilerde kurulması önemlidir.

Ortaokul döneminde öğrencilerde soyut düşüncenin gelişimi söz konusudur. Öğrenciler matematiksel iddiaları tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini kullanarak sınayabilmeli, yanlış olan ifadelere karşı örnekler sunabilmeli, matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak ifade edebilmelidirler. Bu dönem içerisinde öğrencilerin tümdengelim mantığını kullanmaları teşvik edilmelidir.

Lise öğretimi sürecinde ise öğrenciler soyut düşünme dönemindedirler. Bu yıllarda daha önceki öğretim kademelerinde inşa edilen ispat yaklaşımı kuvvetlendirilmeli, dolaylı ispat yöntemleri ağırlıklı olarak kullanılmalıdır (Altıparmak, Öziş, 2005).

Tüm bu aktarımlar bireyde bilişsel gelişim süreci içerisinde ispat düşüncesinin de aşamalı olarak gelişeceğini ortaya koymaktadır. Anaokulundan başlayarak tüm öğretim düzeylerinde, bu gelişimin önemli bir parçası inşa edilmektedir. Bugün literatüre baktığımızda öğrencilerin ispata yönelik performanslarının farklı ispat adlandırmaları (şemalar, kodlandırmalar) altında sınıflandırıldığı görülmektedir. Bu adlandırmalar her ne kadar hangi muhakemenin ve hangi doğrulamaların ispat olarak kabul edileceğine yönelik ortak bir yaklaşıma sahip olmasalar da bireyde ispat düşüncesinin gelişimini ortaya koymaları açısından önemlidirler.

1.4.3. Eğitim Literatüründe İspat Kavramı ve İspata Yönelik Adlandırmalar

Bilişsel yaklaşımın babası olarak kabul edilen Piaget'in duyusal-edimsel öğrenme aşamasından, soyut işlemler aşamasına uzanan sınıflandırması, öğrenme düzeylerine ilişkin her türlü sınıflandırmanın temelini oluşturmaktadır. Örneğin Van Hiele (1986) Öklid Geometrisi üzerine yoğunlaştığı çalışmalarında çocuktaki geometri düşüncesinin gelişimini 5 düzeye ayırarak somut kavramadan soyuta ulaşan ve son basamağında formel düzeyde ispat becerisinin geliştiği bir sınıflandırma yapar:

Düzey 0: Temel seviyedir, kabaca şekillerin benzerliklerinin farkında olunur, şekiller sınıflandırılabilir. Üçgen ve dörtgen farklı olarak kabul edilir ama paralelkenar ile eşkenar dörtgenin farkı ortaya konulamaz.

Düzey 1 (visual): Temel geometri bilgisi vardır, şekillerin özellikleri üzerinden genelleme yapılabilir. Şekil kötü çizilmiş olsa da dört dik açısı olan şekil dörtgen olarak kabul edilir. Buna karşın kare dikdörtgen olarak kabul edilmez.

Düzey 2 (descriptive): Şekil üzerinden özellikler arası ilişki kurulabilir. Tümdengelim yapılamaz. Ama özellikler arası ilişki kurulabildiği için kare dikdörtgen olarak adlandırılabilir.

Düzey 3 (relational): Bu seviyede şeklin özellikleri arasında karşılaştırma yapılabilir. Temel / basit düzeyde ispat yapılabilir.

Düzey 4: Formel ispat yapılabilir. Geometri içerisindeki aksiyomatik yapı fark edilir.

Doğrulama ile ispat arasındaki farka değindikleri çalışmalarında Carpenter ve diğerleri (2003) ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin ispat düşüncesindeki gelişimini doğrulama kategorileri olarak adlandırırlar;

Otoriteye Başvuru (Appeal to Authority): Bu seviyedeki öğrenciler bazı önermeleri ders kitaplarında yazdığı için veya öğretmeni söylediği için, yani alana özgü otoritelerden edindiği bilgiler nedeni ile doğru kabul ederler.

Örnekle Doğrulama (Justification by Example): Öğrenciler önermeleri örnek vererek doğrular ve bu doğrulamalarını genellerler. Otoriteye başvurmadan ziyade öğrenciler ifadeyi örnek verip doğrulayarak genellemeye ulaşma eğilimindedirler.

Genellenebilir Argumanlar (Generalizable Arguments.): Çocuklar erken yaş döneminde bu yönteme pek başvurmaz, yalnız ortaokul düzeyinde öğrenciler artık örnekler yardımıyla sınırlı bir doğrulama düzeyine ulaşabileceğini fark eder ve bu yaşlarda çeşitli genellemeler yapmaya teşvik edildiğinde farklı metodlar geliştirebilir.

Balacheff (1988) ise öğrencilerin kullandığı ispat yöntemlerini betimlerken örnekle doğrulamayı ispat olarak nitelemektedir. Balacheff ispat yöntemlerini iki temel düzeyde ele alır; pragmatik ispat (pragmatic proof), zihinsel ispat (intellectual proof). En alt seviye pragmatic ispattır.

1. Pragmatic İspat (Pragmatic Proof): En alt seviyedeki ispat yapma durumlarıdır.

    - Acemi Deneycilik (Naive Empiricism): Belirli sayıdaki deney durumlarından elde edilen kanıtlarla önerme doğrulanmaya çalışılır, yani rastgele seçilen birkaç örnek denenir ve genellemeye varılır.

    - Kritik Deneyim (Crucial Experiment): Önerme tipik/belirli/tek bir durum içerisinde doğrulanarak gösterilir. Bilinçli bir örnek seçilir ve o örnek kullanılarak genellemeye ulaşıldığı düşünülür. Öğrencinin o örneği seçmesinin bir gerekçesi vardır.

2. Zihinsel İspat (İntellectual Proof): Özelliklerin formülasyonu ve özellikler arası ilişki kullanılır, deney durumu içermez.

    - Belirleyici / Kapsamlı Örnek – Jenerik Örnek (Generic Example): Matematiğin yapısal özelliklerinden yola çıkarak seçilen belirleyici bir örnek yardımıyla doğrulama yapılır.

    - Düşünce Deneyi (Thought Experiment): Önerme örneklerden ziyade matematiğin yapısal özellikleri ile doğrulanır. Bu doğrulama süreci karmaşık bilişsel ve dilsel, anlatımsal yapılar içerir.

İspat ile ilgili literatürde en çok karşılaşılan ve en çok kullanılan sınıflandırma ise Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemalarıdır. İspat şemaları, ispat yaparken öğrencinin ispata nasıl yaklaştığını ve bilişsel gelişimini ortaya koyar.

1. Dışsal İkna İspat Şeması (External Conviction Proof Scheme): Öğrenci sadece formülleri uygular, rutin kuralları ezberler, öğretmen ya da kitapları birer otorite olarak kabul edip onlardan edindiği bilgilerle kendisini ya da başkalarını ikna etmeye çalışır.

    - Otoriteye Dayalı İspat Şeması (Autoritarian Proof Scheme): Sadece kitaplarda yazılanlar ya da öğretmenin söyledikleri, öğrettikleri temel alınır.

    - Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması (Ritual Proof Scheme): İspatın içerdiği doğruluktan ziyade öğrenci ispatın biçimine, görünüşüne dikkat ederek ikna olur. Doğrulamanın sadece matematiksel notasyonlarla, sembolik gösterimlerle, hesaplamalarla gerçekleştirilebileceğine inanırlar.

    - Sembolik İspat Şeması (Symbolic Proof Scheme): İspatın içerdiği sembolik muhakemelere dayalı olarak birey ikna olur. İspatın anlamını kavramadan, çözüm yapma yaklaşımına sahip olunmakta.

2. Deneysel İspat Şemaları (Empirical Proof Schemes): Varsayımlar fiziksel gerçekler ya da duyular yardımıyla oluşturulan deneylerle onaylanmaya çalışılır (kabul edilir ya da reddedilir).

    - Tümevarımsal İspat Şeması (Inductive Proof Scheme): Öğrenciler önermenin doğruluğuna yönelik kendi kendilerine araştırma yaparak elde ettikleri verileri (örnekleri), nicel değerlendirmelerle başkalarını ikna etmede kullanır ve bunu yeterli görür. Bir veya birkaç spesifik durum, özel örnekle genellemeye varılır.

- Algısal İspat Şeması (Perceptual Proof Scheme): Herhangi bir konu alanındaki ilk öğrenmeler sonucu zihinde oluşan gösterimler kullanılarak doğrulama yapılmaya çalışılır. Büyük oranda yetersiz kalır. Algılara dayalı temel zihinsel imgeler kullanılır.

3. <u>Analitik İspat Şemaları (Analytical Proof Scheme):</u> Doğrulamalar mantık kullanılarak ve tümdengelimsel yollarla yapılır.

    - Dönüşümsel İspat Şeması (Transformational Proof Scheme): Amaca yönelik zihinsel işlemler uygulanır. Tahminler ve onlara dayalı çıkarımlarla genellenmeye ulaşılmaya çalışılır. İkna tümdengelimsel olarak yapılır.

    - Aksiyomatik İspat Şeması (Axiomatic Proof Scheme): Doğrulama tanımsız terimler, aksiyomlar kullanılarak, bunlardan başlanılarak yapılır. Aksiyom, tanımız terim, teorem arasındaki fark kavranmıştır.

Harel ve Sowder'ın bu sınıflandırması bireydeki ispat düşüncesinin gelişimini ayrıntılandırması açısından önemli olmakla birlikte literatürde kavramsal bir itirazla da karşılaşmıştır. Yakın dönem çalışmalarında ispat konusu üzerine yoğunlaşan Gabriel J. Stylianides ve Andreas J. Stylianides, ilk ve ortaokul düzeyine yoğunlaştıkları çalışmalarında öğrencilerin ispat becerilerini ve ispat yapabilme düzeylerini incelerken "ispat" kavramının tanımına yönelik de bir tartışma yürütmüş, erken yaş düzeyindeki her çocuğun genellemeye ulaşma eğilimlerini "ispat" olarak adlandırmamak gerektiğini vurgulamışlardır. Çalışmalarının bazılarında ispat ve ampirik doğrulama arasındaki farka ayrıntılı olarak değinmişlerdir (Stylianides, 2007b; Stylianides & Stylianides, 2009, Stylianides, 2007a). Stylianides & Stylianides (2009) bir çalışmalarında ise Harel ve Sowder'in sınıflandırmasını kullanmakla birlikte bu sınıflandırmayı "ispat şeması" olarak değil de "doğrulama şeması – justification scheme" olarak adlandırmanın gerekliliği üzerine bir tartışma yürütmüşlerdir. Reid (2001) de benzer bir yaklaşımla Harel ve Sowder'ın "ispat şemaları"nın, otoriteye başvurulan, örnekle sınanan, matematiksel görünüme dayanan doğrulamaları da içerdiğini belirtir. Öğrenciler ilk ve ortaöğretim düzeyinde yaygın bir şekilde ampirik veriler sunarak genellemeye ulaşma eğilimindedirler ama onların bu uygulamalarının ispat olarak değerlendirilip değerlendirilmeyeceği tartışmalı bir başlıktır. Bu çalışma kapsamında bu eğilimler ispat değil doğrulama olarak adlandırılacaktır.

İspat düşüncesinin gelişimine yönelik bu sınıflandırmalardan farklı olarak Blum ve Kirsch (1991) ise yazılı ispat örneklerinden yola çıkarak ispat yapmayı; ispat, preformel ispat ve formel ispat şeklinde üçe ayırırlar. İspatı deneysel doğrulamalar, sezgisel argumanların sunulması ve eksik kalmış tümevarım yaklaşımları olarak tanımlamakla birlikte preformel ispatı ise geçerli, yalnız formel olarak gösterilmeyen, ortaya konmayan önermeler olarak ele almışlardır. Preformel ispatlar geçerli ve kesin ispatlardır, yalnız kesinlikleri formel oldukları anlamına gelmez.

Lakatos da (1978) ispatı formel olma düzeyine göre üçe ayırır; pre-formel, formel ve post-formel ispat. Pre-formel ispatı Blum ve Kirsch'e benzer bir içerikte, ikna edici olan, matematikçiler tarafından kabul edilen ama formel olmayan ispat olarak tanımlamıştır. Pre-formel ispatta postulatlar, iyi tanımlanmış mantıksal çıkarımlar yoktur, sadece teoremin doğru olduğu sezgisel olarak ortaya konulmaktadır. Reid ve Knipping (2010, s.9) ise matematikçiler tarafından kabul edilen bu informel ispatı yarı-formel (semi-formal) ispat olarak adlandırmışlar, ayrıca gerçekleştirilen ispatların çoğunun yarı-formel ispat olduğunu belirtmişlerdir. Harel ve Sowder'in ispat şemaları tekrar dikkate alındığında ispat tümdengelimsel bir yapıya sahip olmasa da belirli bir kitle için ikna edici olması gerekli iken, Reid ve Knipping için tümdengelimsel yaklaşım ispatta vazgeçilmezdir.

Bu çalışmada, öğrencilerde ispat düşüncesinin gelişiminde önemli bir aşama olan örnekle doğrulama eğilimi ispat olarak ele alınmamıştır. Bir doğrulama / yanlışlamanın ispat olarak değerlendirilmesinde Stylianides'in (2007a)'in ispat tanımlaması temel alınmıştır. Sınıf içerisinde yapılan ispatlama etkinliklerinin hangilerinin ispat olduğunu belirlemeye yarayan bu tanımlamada ispat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da yanlışlamak üzerinden ortaya konan, birbiriyle ilişkili savlar dizisidir. Bu savların ispat sayılabilmesi için aşağıdaki özellikleri taşıması gerekir;

1. Sınıfça doğru olarak kabul edilen ve ekstradan doğrulanmasına ihtiyaç duyulmayan *onaylanmış ifadeler setini* (set of accepted statements)

içermeli. Matematiksel bağlamda tanımlar, aksiyom ve teoremler de bu gruba girmektedir.

2. Bilinen ve geçerli kabul edilen veya sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan *muhakeme biçimleri* (modes of argumentation) kullanılır. Matematiksel olarak mantık kurallarının kullanımı, verilen ifadenin olası tüm durumlarda incelenmesi, karşı örneğin sunulması, bir çelişki elde edilmesi vb. uygulamalar bu kapsamda ele alınmaktadır.
3. Kullanılan muhakemeler, uygun olan ve bilinen veya sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan *aktarım, temsil yolları* (modes of argument representation) ile sunulur. Matematiksel olarak sözel anlatım, sembolik dil kullanımı, tablo, diyagram kullanımı bu kapsamda ele alınmaktadır.

Stylianides (2007a) ortaya koyduğu bu tanımlamayı, matematik disiplini ile uyumlu olan ve ispatı tüm yaş kuşaklarına uygun bir içerikte ele alan, ampirik verilerin ispat olarak kabul edilmesini engelleyen ve öğretim sürecinde ispatın nasıl ele alınacağına yönelik öğretmenlere yol sunan bir tanım olarak nitelemektedir.

1.5. Araştırmanın Amacı Ve Problem Durumu

Akıl yürütme ve ispat lise müfredatında süreç kazanımı olarak değerlendirilmektedir. 9. sınıf düzeyinde bazı teoremlerim ispatı ele alınırken, 11. sınıfta ispat yöntemlerine değinilmektedir. Yakın süreçte yapılan bazı çalışmalar ispata yönelik içeriklerin lise matematik öğretmenlerince sınıfta uygulanmadığını da ortaya koymaktadır (Çalışkan, 2012; İlhan, 2006). Ortaokul düzeyinde ise ispata yer verilmemekte, akıl yürütme becerisi içerisinde yer alan değerlendirmelerde, ispata yönelik dolaylı çıkarımlar yapılabilmektedir. Bu tablo üniversite öncesi öğretim kademelerinde ispat öğretimine ülkemizde yeterince önem verilmediğini, ispat öğretiminin yeterli düzeyde ele alınmadığını ortaya koymaktadır. Buna karşın yakın geçmişte ispatın matematik öğretiminin temel bir bileşeni olması gerektiğini ve her yaş kuşağının, kendi yaşına uygun bir şekilde ispat yapabileceğini savunan yaklaşımlarda artış gözlenmektedir. ABD, İngiltere gibi bazı ülkelerin müfredatlarında ispat uygulamaları erken dönemlerde ele alınabilmekte, anaokulundan itibaren öğrencilerin ispat algıları ve performansları araştırmalara konu olabilmektedir.

Tüm bu araştırmalar, ispatı matematikte anlamlı öğrenmenin sağlanması ve ezberin önlenmesi açısından önemli bulmaktadır. Öğrenciye sadece doğru matematiksel bilgiyi sunmak değil, bu bilginin neden doğru olduğunu da öğretebilmek önemlidir. İspata yönelik matematiksel muhakemenin gelişimi erken yaş dönemlerinde, hatta anaokulunda başlamaktadır. Bu nedenle anaokulundan başlayarak öğretim süreci içerisinde ispata yönelik muhakemeye yer vermek, ispat bilgisinin inşasında öğrencilere kolaylık sağlayacaktır. Öğretim sürecini bu bağlamda düzenlemek ve çeşitli öneriler sunabilmek için her bir yaş kuşağının ispata yönelik yaklaşımını, ispatı ne düzeyde algılayıp, yapabileceklerini betimleyebilmek gerekir. Ülkemizde bu alanda yapılmış çalışmalar oldukça sınırlıdır. Türkiye'deki öğrenciler için "erken yaş dönemi ve ispat ilişkisi" pek bilinemeyen bir başlıktır.

Bahsi geçen sorunlara bir nebze cevap üretebilmek için bu araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin ispatı algılama düzeyleri ve ispat yapabilme becerilerini betimleyebilmek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda, 7. sınıf öğrencilerine ispatın öğretilebilirliği irdelenmiştir, ispat öğretiminin ortaokul düzeyinde ne oranda ele alınabileceği de araştırılmıştır.

Ortaokul öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında yer alır, 6. sınıftan itibaren ise cebir öğrenme alanına yoğun olarak girer, sembolik dili daha çok kullanmaya başlarlar. 7. sınıfta ise sembolik dil kullanımı pekişmektedir. Bu nedenle de araştırmacı 7. sınıf öğrencilerinin formel ispatı belirli bir düzeyde algılayıp, yapabileceklerini düşünerek araştırmayı kurgulamaya başlamıştır.

Bu araştırmada ispat kavramıyla birlikte “doğrudan ispat”, “durum yoluyla ispat”, “aksine örnek vererek ispat” ve “tüketerek ispat” yöntemleri de ele alınmıştır. Sınıfta gerçekleştirilen uygulamanın ardından bu yöntemlerin hangilerinin öğrencilerce rahatça algılanıp, uygulanabildiğine bakılmıştır. Öğrencilerin performansları ile birlikte, bu ispat yöntemlerini uygularken karşılaştıkları zorlukları da betimlemek hedeflenmiştir.

Bu amaçlar doğrultusunda, 7. sınıf öğrencilerine ispat kavramının ne oranda kazandırılabileceği sorusuna yanıt üretebilmek, ele alınan ispat yöntemlerine yönelik öğrencilerin performansları ve ispat yaparken zorlandıkları noktaları betimlemek bu araştırmanın problem durumunu oluşturmaktadır. Bu araştırmada aşağıdaki sorulara yanıt aranacaktır:

1. Uygulamaya dâhil edilen 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algıları nasıl değişmiştir?
2. Uygulamaya dâhil edilen 7. sınıf öğrencilerinin araştırmada ele alınan ispat yöntemlerine yönelik beceri ve performansları nasıl değişmiştir?

1.6. Araştırmanın Önemi

Son zamanlarda ispatın matematik ve matematik öğretimindeki yerine yönelik vurgular artarken, atfedilen bu önemin karşılığı öğretim programlarında gözlenememektedir. İspatın matematik programlarındaki ağırlığının düşük oluşuna ek olarak bir diğer sorun da ülkemizde ilköğretim düzeyinde ispat öğretimine yönelik çalışmaların yetersizliğidir. “İspat nedir, nasıl bir akıl yürütme gerektirir?”, “Ortaokul öğrencileri ispatı ne oranda kavrayabilirler ve ispat yapabilirler mi?”, “Ortaokul öğrencileri ispat yöntemlerini kavrayabilir, uygulayabilir mi?” vb. sorulara bugün ülkemizde rahatlıkla yanıt verilememektedir.

Bugün Türkiye'de lise öncesi yaş dönemleri ile ispata yönelik yapılan çalışmalar oldukça sınırlıdır. Ortaokul öğrencileri ile yapılan çalışmaların bir kısmı öğrencilerde ispat düşüncesinin gelişimine ve öğrencilerin ispat yapabilme seviyelerine odaklanmış (Arslan, 2007; Zaimoğlu, 2012; Çalışkan, 2012), bir kısmı ise öğrencilerin ispata yönelik düşüncelerini belirlemeye çalışmıştır (Albayrak Bahtiyari, 2010). Tüm bu çalışmalar verili öğretim süreçleri içerisinde gerçekleşmiş, öğrencilere ispat becerilerini geliştirmek doğrultusunda bir müdahalede bulunulmamıştır. İspatın müfredatta yer almıyor oluşu da dikkate alındığında var olan bu çalışmalar, öğrencilere ispat becerilerini geliştirmek doğrultusunda bir öğretim uygulandığında, onların ispat yapıp yapamayacağına, ispata yönelik kavrayışlarının gelişip gelişmeyeceğine yanıt üretememektedirler. Literatürde bu kapsamda önemli bir eksiklik bulunmaktadır.

Bu araştırma ile ispat öğretiminin 7. sınıf düzeylerinde uygulanabilirliği ele alınarak, bu alanda var olan boşluk giderilmeye çalışılacaktır. Bu nedenden ötürü de alana özgün bir katkı sunacağı düşünülmektedir. Bu araştırmadan elde edilen sonuçların yeni araştırmalara ve öğretim programına yönelik katkılara ışık tutacağı umulmakta ve bu doğrultudaki yaklaşımlara temel oluşturacağı düşünülmektedir.

1.7. Araştırmanın Sayıtlıları

Bu çalışmada öğrencileri daha iyi betimleyebilmek amacıyla uygulanan başarı testinin, öğrencilerin gerçek başarı durumlarını ortaya koyduğu varsayılmıştır. Ayrıca öğrencilerin veri toplamak amacıyla uygulanan sınavlarda performanslarını ortaya koydukları, gerçekleştirilen görüşmelerde içtenlikle ve gerçek görüşlerini yansıtacak biçimde cevap verdikleri de varsayılmaktadır.

1.8. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Bu araştırma kapsamında uygulanan öğretimin 8. sınıflar için de uyun olduğu düşünülmektedir. Buna karşın 8. sınıf öğrencileri yılsonunda girecekleri merkezi sınav nedeni ile bu araştırma kapsamına alınamamıştır.
2. Araştırma sürecinin başında araştırma kapsamında doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat, durum yolu ile ispat ve çelişki yolu ile ispat yöntemleri yer almaktaydı. Gerçekleştirilen pilot uygulamanın ardından çelişki yolu ile ispat yöntemi uygulama sürecinin zaman açısından sınırlı olması ve diğer ispat yöntemlerine daha çok zaman ayrılması gerektiği gerekçeleri ile araştırma kapsamı dışına alınmıştır.
3. Bu araştırmada ispat becerisinin gelişimine yönelik uygulanan öğretim yönteminin etkinliği irdelenmemektedir. Araştırmada bazı ispat yöntemlerinin öğretilebilirliğine odaklanılmıştır.

1.9. Tanımlar

Önerme: Matematikte doğru veya yanlış, kesin hüküm bildiren ifadelerdir. Önermeler p, q, r gibi harflerle gösterilir.

Bu araştırmada uygulama sürecinde ele alınan önermeler, sınıfta ve sınavlarda matematiksel ifadeler olarak adlandırılmıştır.

Teorem: Doğruluğu ispatlanabilen önermelerdir.

Aksiyom: İspat edilmesine gerek duyulmadan doğru olarak kabul edilen önermelerdir.

p $\Rightarrow$ q Önermesi: Bu önerme bileşik bir önermedir ve “p ise q” olarak okunur. “p” önermenin varsayımı, hipotezidir. “q” ise sonuç, yani hükümdür.

Bu çalışma kapsamında ele alınan ispat yöntemleri şunlardır:

Doğrudan İspat Yöntemi: p $\Rightarrow$ q önermesinin ispatı için p hipotezinin doğruluğundan hareket edilerek, q hükmünün doğru olduğu, bilinen tanım, teorem ve kurallar kullanılarak gösterilir.

Tüketerek İspat: Verilen önerme, ilgili kümenin tüm elemanları tek tek denenerek doğrulanır. Önermenin doğru olması için, tüm elemanların önermeyi doğrulaması gerekir.

Karşı Örnek Vererek İspat: Verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren en az bir örnek bularak gerçekleştirilen ispat türüdür.

Durum Yolu ile İspat: Bu ispat yönteminde, önermenin tanımlandığı kümede tüm durumlar tek tek denenerek önermenin doğru olduğu gösterilir.

Çelişki Yolu ile İspat: Bu yöntemde p $\Rightarrow$ q önermesinin ispatı için (p $\Rightarrow$ q) $\equiv (p \wedge q')'$ denkliğinden yararlanılır ve $(p \wedge q')$ önermesinin yanlış olduğu gösterilir. Başka bir söylemle önermenin ispatında, p hipotezi ile q hükmünün değili birlikte doğru varsayılır ve bu birleşik önermenin yanlış olduğu gösterilir.

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde ispat ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

2.1. İspat İle İlgili Türkiye'de Yapılan Araştırmalar

Her ne kadar erken yaş dönemlerinde öğretim süreci içerisinde ispata pek yer verilmese de yakın dönemde yapılan çalışmalarda ispatın matematik öğretim sürecinin tüm kademelerinde ele alınabileceğine yönelik vurgu artmaktadır. Buna karşın ülkemizde erken yaş dönemlerinde ispat öğretimine yönelik çok fazla çalışma bulunmamaktadır.

Bu metnin yazıldığı süreçte ortaokul düzeyinde ispatı konu alan 5 lisansüstü tez çalışması mevcuttur (Arslan, 2007; Albayrak Bahtiyari, 2010; Çalışkan, 2012; Demir, 2011; Zaimoğlu; 2012). Bu çalışmalar alana özgün katkılar sunmakla birlikte, sadece 5 tez ile sınırlı kalınmış olunması, erken yaş kuşağında ispat öğretimine yönelik Türkiye'de yapılan çalışmaların sınırlı oluşunu bir kez daha ortaya koymaktadır.

Arslan 2007 yılında tamamladığı doktora tez çalışmasında, ilköğretim 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi üzerine bir çalışma yürütmüştür. Tarama modelinde düzenlenen çalışmada öğrencilerin zihinsel gelişimine uygun düşen ispat düzeyini belirleyebilmek amacı ile 5 sorudan oluşan bir veri toplama aracı kullanmıştır. Gerçekleştirilen araştırmanın sonucunda, literatürde bu yaş kuşağı ile yapılan çalışmalara oranla 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin düşük olduğu, verili bir matematiksel ifadenin doğruluğunu kanıtlamada beklenen stratejileri yeteri düzeyde kullanamadıkları ve öğrencilerin kullandıkları stratejiler ile sınıf düzeyleri arasında bir ilişki olduğu görülmüştür. Biraz daha ayrıntılandırmak gerekirse; soruda verili kuralı (cebirsel gösterim) kullanarak doğru yanıta ulaşan öğrenci sayısında sınıf düzeyi ilerledikçe bir artış gözlenmektedir. Bu oran 6. sınıfta %35,8 iken 8. sınıfta %61,7'ye çıkmıştır. Yine de soruda verilen cebirsel kurala rağmen, çözümü cebirsel olarak yeterince ifade edemeyen ve şekil üzerinde sayma işlemi ile doğru yanıta ulaşan öğrenci sayısı da azımsanmayacak düzeydedir. Sınıflara göre oranları % 13,4 ile % 31,8 arasında değişen bu öğrencilerde görsel doğrulama eğilimi baskındır. Uygulanan diğer sorularda da öğrencilerin muhakeme etme düzeyleri düşük olmakla birlikte, cebir kullanarak genellemeye ulaşma, birkaç durumu denemenin ispat olmadığının farkında olma ve denklem kullanarak doğru sonuca ulaşma eğilimleri de düşük çıkmıştır.

Albayrak Bahtiyari'nin 2010 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinde ise 8. sınıf öğrencilerinin mevcut matematik eğitimi ve matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşleri betimlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ilköğretim matematik müfredatında karşılaştıkları ispatları veya muhakemeleri anlamada yaşadıkları zorluklar; ispat öğrenirken kullandıkları teknikleri yeterli görüp görmedikleri ve ne tür muhakeme şekillerini kullandıkları da araştırılmıştır. Bu araştırmada veriler, öğrencilere likert tipi anket uygulanarak elde edilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin birçoğunun ispatın anlamından, gerekliliğinden, matematiksel gelişimleri açısından öneminden emin olmadıkları ve buna ilaveten ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyimlere sahip olmadıkları görülmüştür. Yapılan anket sonucunda öğrencilerin %60'a yakınının problem çözmek, hesaplama yapmak, matematiksel sembolleri öğrenmek gibi genel matematiksel becerilerinin olmadığı veya bu becerilere yönelik kuşkularının olduğu görülmektedir. Öğrencilerin önemli bir bölümü matematiksel bir sonuç açıkça doğruysa ispatlamanın anlamı olmadığını, sadece örnekler yardımıyla da bir önermenin doğru olduğunu anlayabileceklerini ifade etmişlerdir.

Benzer bir şekilde 8. sınıflarla çalışan Zaimoğlu, 2012 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinde ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme sürecini, ispat temsil şekillerine olan eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda veri toplama aracı olarak, 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların daha ön planda tutulduğu toplam 8 açık uçlu sorudan oluşan soru formu kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin örneğe, deney ve gözleme dayalı tümevarımsal yaklaşımı daha çok tercih ettikleri, cebirsel ispatı tercih etmedikleri, bilinenlere dayalı doğrudan ispatı kısmen kullanabildikleri ancak dolaylı ispata dayalı akıl yürütme sürecini neredeyse hiç bilmedikleri ortaya çıkmıştır. Araştırmada ulaşılan bir diğer sonuç öğrencilerin doğru bir önermeyi doğrulamayı az da olsa yapabilirken, yanlış bir önermeyi çürütmede başarısız olduğudur. Bu durum araştırmacı da öğrencilerin karşıt bir örnek sunma ve çelişkiye ulaşma yöntemlerini bilmedikleri fikrini oluşturmuştur. Öğrenciler geçersiz bir önermeyi çürütmeyi denememişlerdir.

Çalışkan ise 2012 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinde iki yönlü bir çalışma yürütmüştür. Çalışmasının ilk kısmında ilköğretim 6, 7, 8. sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikleri Balacheff'in ispat düzeylerine göre analiz etmiştir. İkinci kısımda ise ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bu doğrultuda öğrencilerin SBS sonuçları ile araştırmacının iki açık uçlu sorudan oluşan ispat sınavının verileri karşılaştırılmıştır. Araştırmanın ilk boyutunda, ders kitaplarının incelendiği kısımda matematik öğretim programının öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmede yeterli düzeyde olmadığı görülmüştür. Ders kitaplarında yer alan etkinlikler Balacheff'in düzeylemesine göre alt gruplarda yoğunlaşmış, örneğin en üst düzey olan düşünce deneyine yönelik hiçbir etkinliğin kitaplarda yer almadığı görülmüştür. Tüm ders kitaplarında yer alan etkinlikler genellikle, saf deneycilik (naive empricism - acemi deneycilik) ile önemli deney (crucial experiment - kritik deneyim) düzeylerinde yoğunlaşmaktadır. Bu düzeyler ispat düşüncesinin gelişimi açısından en alt seviye olan pragmatik ispat düzeyinde yer almaktadır. Genellemeye ulaşarak ispat yapma çabası yerine örnekle doğrulama eğilimi taşımaktadırlar. Türkiye'de 2000 yılındaki müfredat değişikliği kapsamında yeniden düzenlenen kitaplarda tümdengelim ispat yolu uygulanmaya çalışılmış, ispatlanması istenen durumun öğrencinin bulmasını, keşfetmesini, öğrencinin eski bilgileri üzerinde muhakeme yapmasını sağlamak yerine etkinliklerin başında bu durum açıkça verilerek öğrenci sadece doğrulama yapmaya yönlendirilmektedir. Bu durum da öğrencinin muhakeme yapması, kendi bilgilerinden yola çıkarak genellemeye ulaşması yollarını tıkayabilmektedir.

Araştırmanın ikinci kısmında ise öğrencilerin ispat becerileri ile SBS sınavından aldıkları puanların birbirlerine paralel olduğu görülmüştür. Öğrencilerin ispat düzeyi ile SBS başarıları arasında anlamlı bir ilişki vardır. Bunun dışında öğrencilerin ispat performanslarına bakıldığında, öğrencilerin yanıtlarının alt ispat düzeylerinde yoğunlaştığı görülmektedir. 8. sınıf öğrencilerinin üst seviyeler olan sosyal örnek ve düşünce deneyi seviyelerinde ispat yapmaları beklenirken, çoğu saf deneycilik ve önemli deney seviyelerinde kalmıştır. Ayrıca, öğrencilerin çoğunun ispat, doğrulama, sorgulama gibi kavramları bilemediği görülmüştür.

Bu çalışmalar dışında literatürde yer alan tezler lise ve özellikle üniversite düzeyinde (yoğunluklu olarak öğretmen adayları ile yapılan çalışmalar) yoğunlaşmıştır. Yukarıda ele alınan çalışmalar ortaokul ders kitaplarının çocukta ispat düşüncesinin geliştirme noktasındaki eksikliklerini ortaya koymakla birlikte öğrencilerin ispata yönelik algı ve performans düzeylerine yönelik de bilgiler sunmaktadır. Öğrencilerde 6. sınıftan 8. sınıfa doğru cebirsel ifadeleri kullanma eğiliminde bir artış gözlenmektedir, bu eğilim öğretim programında cebirsel ifadelerin kapladığı alanla doğru orantılıdır. Buna karşın öğrenciler gerek verilen önermeyi ispatlamada, gerekse cebirsel ifadeyi kullanmada beklenen düzeyde değildirler. Öğrenciler ispatı kavrayamamakta, genellemeye ulaşmak için örnekle doğrulamayı veya deney ve gözleme dayalı başka tümevarımsal yaklaşımları tercih etmektedirler. Buna karşın ele alınan bu çalışmalarda öğrencilere ispat öğretimi üzerinden hiçbir müdahalede bulunulmamış veya öğrenciler ispata yönelik algılarını geliştirecek hiç bir matematiksel süreç içerisine dâhil edilmemişlerdir. İspata yönelik algıları veya performans durumları verili öğretim süreci içerisinde sınanmış ve betimlenmiştir. Buna karşın ortaokul öğretim programı ve hazırlanan ders kitapları NCTM’nin (2000) bir süreç standardı olarak ele aldığı ispata yönelik vurguyu çok sınırlı tutmaktadır. Öğretim sürecimiz içerisinde erken yaş kuşağındaki öğrenciler ispat düşüncesinin gelişimine katkı sağlayacak etkinliklerle ve matematik dersi kapsamında ispat kavramıyla karşılaşmamaktadır. Verili bu durum lise öncesi yaş kuşağının ispat yapamayacağı anlamını taşımamaktadır.

Ülkemizde sınırlı sayıda da olsa, küçük yaş kuşağının ispata yönelik performansını, algısını ortaya koyan başka çalışmalar da mevcuttur. 2007-2009 yılları arasında, Eskişehir'de gerçekleştirilen ve TÜBİTAK tarafından desteklenen Eskişehir Matematik Okulu (EMO) projesinde ilköğretim 4, 5, 6 ve 7. sınıflar ile çalışılmıştır. Bu projenin iki temel hedefi şu şekilde belirtilmiştir; öğrencilerin matematikle ilgili olumlu tutum geliştirmelerini ve matematik süreçlerini tanımalarını sağlamak (Erdoğan vd., 2012). Erdoğan ve Erdoğan (2013) bu proje kapsamında gerçekleştirdikleri bir diğer çalışmalarında ise Guy Brousseau (2002) önderliğinde geliştirilmiş olan Didaktik Durumlar Teorisi ile uyumlu bir etkinliğin analizine yer vermişlerdir. Didaktik Durumlar Teorisi (DDT) öğrenme ortamı için adidaktik ortam tasarımı sunar ve matematiksel süreçleri sistemli bir şekilde ele alır. Çıkış noktasında matematiğin öğretileceği ortam ve durumların öğrencilere kendi bilgilerini oluşturmalarını sağlayacak şekilde tasarlanması yer alır (Brousseau, 2002). Hipotez kurma, deneme-yanılma, akıl yürütme, yorumlama vb. şekildeki matematiksel süreçler DDT bağlamında 5 ana başlık altında toplanır; eylem, formüle etme, doğrulama, kurumsallaştırma ve bağlamdan çıkarma. Bu süreçler içerisinde hipotez kurma, hipotezi test etme ve ispatlama önemli bir yer tutar. Brousseau (2002) ilköğretim seviyesindeki öğrencilerin üç tip ispata başvurduklarını belirtir; pragmatic ispat (deneysel sonuçlara dayanır - oyun oynamak gibi), semantik ispat (bağlamdan anlam çıkarılmaya çalışılır), entellektüel ispat (mantıksal çıkarımlara dayanır). Entellektüel ispat öğrencilerin mantıksal çıkarımlar yoluyla genellemeye ulaştıkları bir ispat iken semantik ve pragmatic ispatlar büyük oranda deneme/yanlıma ve somut deneyimlerden yola çıkarak yapılan doğrulamalardır. Erdoğan ve Erdoğan (2013) bu çalışmalarında 20 ilköğretim beşinci sınıf öğrencisi ile, DDT'ye uygun olarak tasarlanmış bir sınıfta 75 dakika süren bir etkinlik gerçekleştirmişlerdir. Etkinlik, Brousseau'nun çalışmalarında yer alan "Kim önce 20 diyecek?" isimli, oyun temelli bir etkinliktir. Oyun çalışmada şu şekilde tanımlanmıştır:

> *"Bir oyuncu 1 veya 2 diyerek oyuna başlar. Diğer oyuncu rakibinin söylediği sayıya 1 veya 2 ekleyebilir. Oyuncular bu şekilde bir birlerinin söyledikleri sayıya 1 veya 2 ekleyerek yeni bir sayı söylerler. İlk önce 20 sayısını söyleyebilen oyuncu oyunu kazanır."*

Bu etkinliğin amacı öğrencilere oyunu kazanmak için hipotez öne sürmek ve bu hipotezleri doğrulamak veya çürütmek olarak açıklanmıştır. 75 dakika süren etkinlik video ve ses kaydına alınmış, bu kayıtlar çözümlendikten sonra iki araştırmacı tarafından DDT'nin aşamalarına uygun olarak analiz edilmiştir. Oyun boyunca öğrenciler 13 hipotez geliştirmiş, farklılaşan sürelerle bu hipotezler üzerine tartışmışlardır. 3 Hipotez çeşitli nedenlerle değerlendirme dışında bırakılmıştır. Geri kalan 10 hipotezden dokuzunda öğrenciler pragmatik ispat kullanmış, sadece 1'inde semantik ispata başvurmuş, 5 hipotezde yürütülen tartışmada entellektüel ispata da başvurulmuştur. Bazı hipotezlerde öğretmenin yönlendirmesi ile ispat türleri arasında geçiş de yaşanmış, örneğin öğrenciler pragmatik ispat sunarken öğretmenleri tarafından yönlendirilerek entellektüel ispatı da geliştirebilmişlerdir.

Öğrenciler etkinliğin başında temel bir matematiksel süreç olan deneme/yanılma stratejisi ile oyunu kazanmaya çalışmışlardır. Öğrenciler oyun boyunca bu stratejiyi kullanmaktan vazgeçmemekle birlikte süreç içerisinde kullanım sıklıkları azalmış, farklı matematiksel süreçleri de denemeye başlamışlardır. Bu süreçlerden bir tanesi de bir durumu matematiksel olarak ifade etme sürecidir. Bu süreç formüle etme sürecinin temelini oluşturur. Etkinlik boyunca en öne çıkan matematiksel süreç ise doğrulama sürecinin temelini oluşturan ispat süreci olmuştur. Gerçekleşen bu ispat sürecinde ise araştırmacıların oyun oynayarak tezini kabul ettirme veya karşı tarafın tezini çürütmeye dayanan yöntem olarak adlandırdığı pragmatik ispat yöntemi yoğunlukla kullanılmıştır. Buna ek olarak mantıksal argümanlarla bazı hipotezlerin ispatlanması veya çürütülmesine dayanan entelektüel ispat yöntemi de azımsanmayacak düzeyde kullanılmıştır.

Tüm bu çalışmalar, ispat içeren matematiksel süreçlerin matematik öğrenimi açısından önemli olduğunu vurgulamakla birlikte lise öncesi yaş kuşağının ispatı kavramaya yönelik eksikliklerini de ortaya koymaktadır. Bu çalışmalara ek olarak ülkemizde gerçekleştirilen ve daha ileri yaş kuşakları ile yapılan çalışmalara bakıldığında, lise öğrencilerinin de ispata yönelik süreçlerde ciddi sıkıntılar yaşadıkları görülmektedir.

İspat yapmak matematiksel düşünme sürecinin önemli bir bileşenidir. Arslan ve Yıldız (2010) gerçekleştirdikleri bir çalışmada 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama olarak ele aldıkları aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya koymayı amaçlamışlardır. Bu amaca ulaşmak için nitel araştırma yöntemini tercih etmişler ve matematiksel düşünme süreçlerinin bu aşamalarını dikkate alan, her biri 9'ar sorudan oluşan üç ayrı çalışma yaprağı geliştirmişlerdir. Gerçekleştirdikleri pilot çalışmanın ardından bu çalışma kâğıtlarını 10'u kadın, 14'ü erkek olmak üzere 24 öğrenciye uygulamışlardır. Çalışmanın sonuçları incelendiğinde matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü görülmektedir. Öğrenciler özelleştirme ile ilgili soruları genel olarak doğru yapmakla birlikte genelleme aşamasında sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel olarak ifade etmiş ve bu ilişkiyi matematiksel sembollerle ifade etmede zorlanmışlardır. Varsayımda bulunmayla ilgili olarak ise öğrencilerin çoğunun varsayımlarını sözel şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Bu durum araştırmacılar tarafından öğrencilerin varsayımda bulunma konusunda yeterli olmadıkları şeklinde yorumlanmıştır. İspatlamayla ilgili olarak ise ispat soruları büyük oranda boş bırakıldığı, öğrencilerin ispat yapma ile ilgili büyük sıkıntılar çektiği gözlenmiştir. Öğrenciler oluşturdukları varsayımları daha çok aritmetik (yani değişkene değer vererek) ya da geometrik olarak ispat etme eğiliminde olmuşlardır. Öğrenciler doğrulama yapmak için varsayımın niçin doğru olduğunu araştırmak yerine, şekil çizerek veya değişkene değer vererek varsayımı özel durumlarda incelemeyi, örneklemeyi tercih etmişlerdir. Sonuç olarak, ilköğretim ve ortaöğretimdeki öğrencilerden, varsayım ve iddia oluşturabilmeleri ve onları değerlendirebilmeleri, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeleri beklenirken bu çalışmada matematiksel düşünme sürecinde, bir aşamadan bir sonrakine geçerken öğrenci başarısının düştüğü görülmüştür.

Özer ve Arıkan (2002) ise gerçekleştirdikleri çalışmada lise 2. sınıf (10. sınıf) öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerileri ile sahip oldukları ispat düzeylerini tespit etmeye çalışmışlardır. İspat düzeyini belirlemekte Miyazaki'nin (2000) ve Balacheff'in (1988) düzeylendirmelerini temel almışlardır. Araştırma 110 lise öğrencisine 6 sorudan oluşan açık uçlu sınav uygulanarak ve daha sonra 3 ayrı, lise 2 öğrenci ile görüşme yapılarak yürütülmüştür. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin hemen hemen tamamının amaçlanan düzeyde tümdengelim ve tümevarım yoluyla ispat yapamadıkları görülmüştür. Öğrenciler açık uçlu soruları genellikle sayısal örnek deneyerek doğrulamıştır. Öğrenciler tüm sorularda çoğunlukla Miyazaki'ye göre C düzeyinde (tümevarımsal muhakeme içeren, çizimler, örnekler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispat), Balacheff'e göre pragmatik düzeyde (en alt seviye, örnek vererek yapılan doğrulamalar) kalmışlardır. Bu çalışmada yer alan soruların önemli bir bölümü, ortaokul düzeyine uygundur ve bu tez kapsamında uygulamada yer alan sorularla paralellik göstermektedirler (**Soru 3:** İki tek sayının toplamının bir çift sayı olduğunu gösteriniz, **Soru 4:** 3 ardışık sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır, **Soru 5:** 5 ardışık sayının toplamı ortadaki sayının 5 katıdır, **Soru 6:** a bir çift sayı, b bir tek sayı ise a2 + b2' nin tek sayı olduğunu gösteriniz). Bu soruları tek tek incelersek; 3. soruda öğrencilerin % 76,4'ü soruyu örnek vererek doğrularken sadece % 10'u ifadeyi tam olarak doğru bir şekilde gösterebilmişlerdir. 4. soruda öğrencilerin % 46,4'ü cebir kullanarak ifadeyi ispatlarken %43,6'sı ifadeyi örnekle doğrulama eğiliminde olmuştur. 5. soruda 4. soruya benzer bir eğilim ortaya çıkmış, öğrencilerin % 48,2'si ifadeyi cebir kullanarak ispatlamıştır. % 39,1'i ise ifadeyi örnek vererek doğrulamıştır. 6. soruda ise öğrencilerin sadece % 13,6'sı ifadeyi ispatlarken % 66,4'ü ifadeyi örnekle doğrulama eğilimi göstermiştir.

Uğurel ve Moralı (2010) çalışmalarında 11. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde ispat yapma etkinliği esnasındaki iletişim durumlarının incelemişlerdir. Araştırmada nitel yöntem kullanılmış ve tüm sınıf bazında yapılan tartışmalara odaklanılarak söylem çözümlemesi gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın örneklemi özel bir fen lisesinin 11. sınıfındaki 11 öğrenci ve o sınıfın matematik öğretmeninden oluşmuştur. Teşvik edilmiş söylem (TES) aracılığıyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgileri, anlamaları hakkında verilere ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu makalede araştırmacının kendisinin belirlediği bir teorem, sınıf içerisinde matematik öğretmeni tarafından uygulanmış ve bu teorem üzerine sınıfça yürütülen tartışmaların ardından öğrencilerden bireysel olarak yazılı biçimde ispatı yapmaları da istenmiştir. Öğretmen sadece tartışmaları yönlendirmiştir. Derste gözlemci olarak bulunan Uğurel, ayrıca dersi video kaydına da almıştır. Derste "iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır" teoremi tartışılmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerden ispatı doğru olarak tamamlayan ya da kabul edilebilir bir yaklaşım geliştiren olmamıştır. Araştırmacılar bu durumun oluşmasına etki eden unsurlardan birisinin öğrencilerdeki ön bilgi eksiklikleri ve kavram yanılgıları olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca araştırma sonucunda öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları sorunlar şu şekilde ifade edilmiştir;

- Öğrenciler ispatın sadece sözel açıklamalar biçiminde yapılmayacağı fikrini kavramakta,
- İspatlarda örnekler üzerinde deneme yapmanın başlangıç için yararlı olmakla birlikte örnekleme yoluyla tek başına bir ispatın oluşturulamayacağı fikrini kabul etmekte,
- İspat yaparken teorem (ya da önerme) içerisinde geçen tanımların ve özeliklerin sadece anlamlarını ifade ederek değil, aynı zamanda matematiksel gösterimlerinin de kullanılmasının gerektiğini kabul etmekte,
- İspatın birbirini izleyen bir dizi mantıksal adım içerisinde verilenden istenene ulaşma süreci olduğunu kavramada ve bunu kendi ispat yapma süreçlerine aktarmalarında önemli sıkıntılar yaşamaktadırlar.

Öğrencilerin gerek ilkokul, gerek ortaokul, gerekse lise düzeyinde ispata yönelik sahip oldukları bu eksiklikler ülkemizde matematik öğretiminin ispat ve ispat yapmaya yönelik daha nitelikli hale getirilmesi ihtiyacını ortaya koymaktadır. Öğrenciler ispat ile örnekle doğrulama arasındaki ayrımı net olarak ortaya koyamamakta, ispat yapmaktan genellikle kaçınmakta, matematiksel dili, özellikle de cebirsel ifadeleri kullanmaktan kaçınmaktadırlar.

2.2. İspat İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar

Matematik eğitiminde ispat matematiksel bilginin kavranması açısından önem taşımaktadır. Bu nedenle matematikte ezberin önlenmesi, kavramsal bilginin inşası ile anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi açılarından da ispat matematik öğretiminde kritik bir değer taşımaktadır. Her ne kadar İspat, yaygın olarak ileri bir matematik uğraş alanı olarak görülmüş ve hala görülüyor olsa da 2000 yılında NCTM'in yayınladığı rapor ispat öğretimini her yaş kuşağı için matematik öğretiminin önemli bir bileşeni olarak ele almış ve bu alana yönelik ilgi ve tartışmaların yoğunlaşmasına neden olmuştur.

Genel olarak literatürde yer alan çalışmalara baktığımızda ispat öğretiminin her düzeyde ele alınması gerektiğini savunan çalışmalar arasında, ilkokul düzeyinde gerçekleştirilen çalışmalara da rastlanmaktadır (Zack, 1999 ; Maher, C. A. ve Martino, A. M., 1996; Komatsu, 2010; Lampert, 1990; Tall, 1999) . Bu çalışmalarda Zack (1999) ve Maher, Martino (1996) çocuklarda ispat fikrinin nasıl geliştiği üzerinde dururken, Lampert (1990) ve Maher, Martino (1996) tümevarım ve tümdengelimsel akıl yürütmelerin ilk ve ortaokul seviyesinde kazanılmaya başlandığını ifade ederek NCTM’i destekleyen veriler sunmuşlardır.

Komatsu (2010) bir araştırmasında 5. sınıf öğrencileri ile karşı örnek verme, çürütme durumları üzerine çalışmıştır. Çalışmada öğrencilerin doğru olduğunu ve ispatladıklarını düşündükleri varsayımlara araştırmacı karşı örnekler sunarak, öğrencilerin kendi varsayım ve ispatlarını tekrar gözden geçirmeleri sağlanmıştır, araştırmada bu süreç analiz edilmiştir. Bu doğrultuda iki Japon beşinci sınıf öğrencisi ile örnek olay çalışması gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerden önce ***“iki basamaklı bir sayı ile bu sayının basamaklarının yer değiştirmesi ile oluşan sayının toplamı”*** durumu ile uğraşmaları, ardından da elde ettikleri sonuca yönelik yorumlarda bulunmaları, bir genelleme yapmaları istenmiştir. Öğrenciler ilk olarak 52, 26, 13 gibi basit sayıları ele almış, bu sayıları verili kurala uyguladıklarında sırasıyla 77, 88 ve 44 sonucuna ulaşmışlardır. Bu denemeleri sonucunda da elde ettikleri tüm sayıların birler ve onlar basamağının aynı sayıdan oluşacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu sonucu ispatlamak için öğrenciler renkli pulları kullanmışlardır. Daha sonra araştırmacı öğrencilerden kullandıkları yöntemi 85+58 işlemi için de uygulamalarını ister. Sunulan bu örnek öğrencilerin iddialarını çürütmüş ve öğrencilerin yaklaşımlarını gözden geçirmelerine neden olmuştur. Öğrenciler ilk olarak iddialarının niçin yanlış olduğu üzerine yoğunlaşmış, bunun üzerine bir tartışma yürütmüşlerdir. Daha sonra yine renkli pullarla 93+39 işlemini modelleyerek ve bu işlem üzerinde tartışarak, verili iki sayının toplamının bu sayıları oluşturan rakamların toplamının 11 katı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmacının sunduğu karşıt örnek öğrencilerin varsayımları ve ispatlarını geliştirmeye yönelik bir katkı sunmuştur.

Maher ve Martino (1996) tek bir öğrenci, Stephanie ile 1. sınıftan 5. sınıfa süren, 5 yıllık bir örnek olay çalışması gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalarında Stephanie'nin ispat düşüncesinin gelişimini incelemişlerdir. Çalışmada birbirine paralel ama yıllar ilerledikçe zorluk düzeyi bir miktar artan sorular kullanılmıştır. 5 yıla yayılan ve 11 etkinlikten oluşan bu çalışmada bazen bu sorular sınıf içerisinde tartışılmış, bazen de sınıfta tartışılan soru üzerinden Stephanie ile bire bir görüşülmüş, sondan bir önceki etkinlikte ise küçük grup (Stephanie ve üç sınıf arkadaşı) görüşmesi ile öğrenciler bir soru üzerine tartışmış, birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu çalışma kapsamında ele alınan sorular; 2. sınıfta ***"3 t-shirt ve 2 pantolon ile kaç farklı giysi kombinasyonu yapılır?"***, 3. sınıfta ***" 3 t-shirt ve 2 pantolon ile kaç farklı giysi kombinasyonu yapılır?"***, 4. sınıfta ***"İki farklı renk küplerden oluşan ve 3 küp uzunluğunda kaç farklı kule yapılır?"*** - bu sorunun daha sonra 4, 5 ve 6 küp uzunluğundaki kule versiyonları da ele alınmıştır. Bu çalışmanın sonucunda 10 yaşındaki Stephanie'nin verdiği yanıtı doğrulamak için yürüttüğü tartışmalarda durum yolu ile ispat (proof by cases) yöntemini keşfederek ortaya koyduğu gözlenmiştir. Stephanie pek çok etkinlikte bu yöntemi kullanmış ve arkadaşlarına yaptığı ispatı aktarmıştır.

Öğrencilerde matematiksel dilin kullanımı, ispat yazımının gelişimi üzerine de değindiği çalışmasında Cyr (2011), 6. sınıf öğrencileri ile tümdengelimsel düşüncenin gelişimi üzerine çalışmıştır. Çalışmasında geometrinin öğrencinin somut düşünceden soyut düşünceye geçişindeki etkisine değinir, bu nedenle de çalışmasını geometri alanı üzerine kurgular. Geometri alanında öğrencilerin temel ispat yazım becerilerini geliştirmek üzere 25 kişilik, iki ayrı 6. sınıf şubesine, 4 ay (toplamda 8 ders) süren öğretme-öğrenme uygulaması gerçekleştirilir. Bu derslerde Kanada ilköğretim programıyla ve öğrenci seviyesiyle uyumlu 8 etkinlik seçilmiştir. Bu etkinlikler öğrenciler için yeni konu başlıkları içermemiş, bu nedenle de öğrenciler etkinliklere kolayca dahil olabilmişlerdir. Bu etkinliklerde yürütülen tartışmalar ve öğrencilerin geliştirdiği yanıtlar incelendiğinde, ilk etkinlikte öğrencilerin yaklaşık dörtte üçü (50 öğrencinin 40 tanesi) soruda verilen eksik bilgiyi, örneğin sorulan açıyı bulmak için ölçme işlemini kullanmıştır. Sadece 4 öğrenci teorik bilgileri kullanarak tümevarımsal akıl yürütmüş, 6 öğrenci ise hem tümdengelim, hem de ölçme işlemi gibi somut yaklaşımları (karma metot) birlikte ele almıştır. İlk dört etkinliğin uygulanmasının ardından öğrencilerin önemli bir bölümünde (50 öğrencinin 42'sinde) teorik bilgiler ışığında tümdengelimsel çıkarımların ortaya konulmaya çalışıldığı gözlenmiştir. Öğrencilerin % 50'si bu aşamada kendi geliştirdikleri yaklaşımı, ispatlarını uygun bir içerikte ortaya koyabilmiştir. Çalışmanın sonunda ise öğrencilerin tamamı ölçmeye ve gözleme dayalı yaklaşımların sınırlılığını fark etmiş, basit geometrik durumların geçerliliğini onaylamak için teorik özellikleri kullanmaya yönelmişlerdir. Buna rağmen tüm öğrencilerin basit ispatlar veya tümdengelimsel çıkarımlara dayalı argümanlar geliştirme yetisine sahip olduğu söylenememektedir. Öğrenciler zorluk düzeyi yüksek olan sorularda karma metoda başvurmuş, ölçme veya hesaplama işlemlerini de uygulamışlardır. Sonuç olarak öğrencilerin bir kısmı yaptıkları etkinliklerde somutlaştırma eğilimini devam ettirmiş olsalar da, öğrencilerin önemli bir bölümü Houdement ve Kuzniak'ın (2006) adlandırmaları ile Geometri 1 (pratik geometri) düzeyinden Geometri 2 (teorik geometri) düzeyine geçiş sağlamıştır. Bu da somut düşünmeden soyut düşünmeye geçişte önemli bir aşama kaydettiklerine işaret etmektedir.

Bu alanda yapılan pek çok çalışma doğrulama ve ispatın matematik öğretimindeki önemine değinmekle birlikte, öğrencilerin tümdengelimsel çıkarımları kullanmak ve ispat yapmak yerine, örnek ile doğrulamayı daha çok tercih ettiklerini ortaya koymaktadır. Cooper ve diğerleri (2011) gerçekleştirdikleri bir çalışmalarında öğrencilerin matematiksel varsayımları doğrulamak için kullanmayı tercih etmiş oldukları bu örneklerin niteliğine de odaklanmışlardır. Öğrencilerin sahip olduğu bu tümevarımsal yaklaşımın onların tümdengelimsel yaklaşımı öğrenmelerini nasıl destekleyebileceği üzerine durulmuş, örnekle doğrulama bu bağlamda ispat olarak değerlendirilmemekle birlikte ispat düşüncesine giden bir yol olarak önemsenmiştir. Araştırmada yedi 6. sınıf, yedi 7. sınıf ve beş tane de 8. sınıf öğrencisi (toplamda 19 öğrenci) ile iki soru üzerinden yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Araştırma kapsamında ele alınan sorular şunlardır; ***"Bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya bir önceki ve bir sonraki sayıyı ekleyin. Bulduğunuz sayı daima ilk tuttuğunuz sayının 3 katıdır."***, ***"Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya tuttuğunuz sayının yarısını ekleyin, bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünebilen bir sayıdır."***. Öğrencilerin yanıtları Healy ve Hoyles'ın (2000) sınıflandırmasına göre kodlanmıştır. Bu sınıflandırmada ampirik doğrulama (empirical justification) belirli bir kaç örneğin denenmesi, anlatımsal ispat (narrative proof) doğruluğun tümdengelimsel sözel dil kullanarak ifade edilmesi, görsel ispat (visual proof) genel durumların şekil çizilerek betimlendiği, bu yolla doğrulandığı yaklaşımdır, cebirsel ispatta (algebraic proof) ise tümdengelimsel formel yaklaşımlar kullanılır. Bu tanımlar ışığında son üç yaklaşım geçerli ispat stratejileri olarak ele alınırken, ampirik doğrulama önermenin doğruluğunu tam olarak ortaya koymamaktadır.

Çalışmada kullanılan iki soruyu birlikte değerlendirdiğimizde öğrencilerin %47'si soruyu yanıtlamak, verilen önermenin doğru veya yanlış olduğunu belirtmek noktasında isteksiz davranmışlardır. Beş öğrenci her iki soru için de geçerli bir ispat gerçekleştirmişlerdir. sekiz öğrenci ise sadece bir soru için geçerli bir ispat gerçekleştirmişlerdir. 19 öğrenci, verilen iki soru için toplamda 18 geçerli ispat gerçekleştirmiştir. Öğrenciler en çok anlatımsal ispat stratejisini kullanmış, daha sonra görsel ve en son olarak da cebirsel stratejiyi kullanmışlardır. İspatı yapan bu öğrencilerin hepsi ispatla birlikte en az 1 sayısal örneği de deneyerek önermeyi doğrulamışlardır. Bu öğrencilerin örneği ne zaman denediklerinde bir farklılaşma bulunmaktadır. Öğrencilerin %22'si ortaya koydukları ispatla yetinmemiş, ispatı yaptıktan sonra önermeleri örnek vererek de doğrulamışlardır. %78'i ise ispatı yapmadan önce önermeyi örnek vererek doğrulamışlardır. Yapılan görüşmelerde kullanılan bu örneklerin niteliği ve niceliğine yönelik bir sorgulamaya da gidilmiştir.

Öğrenciler başlangıçta doğru olduğunu düşündükleri ve geçerli bir ispat ortaya koydukları önermelerde az sayıda ve az çeşitlilikte örnek deneme eğilimi göstermişlerdir.

Knuth ve Sutherland (2004) benzer bir şekilde öğrencilerin örnek ile doğrulama eğilimine yoğunlaştıkları çalışmalarında, öğrencilerin kullandığı ampirik temelli argümanlar, stratejiler ile genelleme içeren argümanlara yönelik yaklaşımlarını incelemişlerdir. Araştırmalarında şu sorulara yanıt aramışlardır; öğrenciler ne oranda örnekle doğrulamanın ispat için yeterli olduğunu düşünmektedir? Öğrenciler ispatın ne ölçüde genellenebilir bir durum içerdiğini farketmektediler? Veriler aynı ortaokula giden 394 öğrencinin (6-8. sınıf arası) yazılı sınavlarından toplanmıştır. Bu ortaokul NCTM standartlarına uygun olarak hazırlanan Connected Mathamatics Program'ını (ABD'de reform temelli oluşturulan ve Michigan State Üniversitesinde geliştirilen bir müfredat) kullanmaktadır. Uygulanan sınavda ilk soru olarak öğrencilere bir önerme (***"Ardışık iki sayının toplamı her zaman tek sayıdır."***) ile bu önermenin 3 örnek deneyerek doğru olduğunu savunan yanıtı, bir de genellenebilir bir yargı içeren ispatı sunulmuştur. Öğrencilere verili argümanlardan hangisinin önermenin her zaman doğru olduğunu gösterdiği sorulmuştur. İkinci soru ise iki aşama içermektedir. İlk aşamada öğrencilere sınırlı bir küme ve bir matematiksel önerme verilmiş ve bu küme içerisinde önermenin doğru olup olmadığı sorulmuştur. İkinci aşamasında ise bu önermenin tüm sayılar için doğru olup olmadığı sorulmuştur. Elde edilen veriler Waring'in (2000) çalışmasında kullanılan kod sistemine uygun olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin tek tek sorulara verdikleri yanıtlar incelendiğinde, ilk soruda tüm öğrencilerin yaklaşık olarak % 40'ı örnekle doğrulamayı ispat olarak seçmiştir. İspatı doğru yanıt olarak seçen öğrencilerin oranı ise %30 da kalmıştır. İkinci soruda ise öğrencilerin ispat performansına bakılmıştır. Sorunun ilk aşamasında öğrencilerin %20'si tüketerek ispatı (proof by exhaustion) gerçekleştirmiştir. Her iki aşama dikkate alındığında ise öğrencilerin önemli bir bölümü önermeyi ispatlamamış, örnekle doğrulamayı tercih etmiştir. İlk aşamada tüketerek ispat yapan öğrencilerin önemli bir bölümü ikinci aşamada, ilk aşamada kullandıkları sayı örneklerini hatırlatarak veya ekstradan örneğin 2 sayı daha deneyerek önermeyi ispatladıklarını savunmuşlardır. Bu durum öğrencilerin tüketerek ispat ile örnekle doğrulama arasındaki farkı tam olarak bilmediklerini göstermektedir. Sonuç olarak bu çalışma pek çok ortaokul öğrencisinin genellenebilir yargıya ulaşmayı pek fazla kavrayamadıklarını ortaya koymuştur. Yine de her iki soruda da genellemeye ulaşmanın farkına varan, bu doğrultuda yanıt verip ispat geliştiren öğrencilerin varlığı önemlidir. İlk soruda öğrencilerin %30'u ispat ile örnekle doğrulama arasındaki farkı ortaya koyabilmiş, ne var ki bu öğrencilerden ispat yapmaları beklendiğinde, kendi ifadeleri ile örnekle doğrulamayı ispat için yetersiz bulmuş olsalar bile başka bir argüman geliştiremedikleri için örnekle doğrulama eğilimi göstermişlerdir. Ayrıca öğrencilerin %20'si tüketerek ispatı gerçekleştirebilmiştir. Tüm bu bulgular öğrencilerin ispata yönelik performans ve kavrayışlarını geliştirmek için onların genellemeye ulaşmaya yönelik farkındalıklarını artırmanın önemini ortaya koymaktadır.

Knuth vd. (2012) benzer içerikte gerçekleştirdikleri bir diğer çalışmada ise 2 yıl boyunca ortalama 400 öğrenciden (6,7 ve 8. sınıf öğrencileri) yazılı sınav şeklinde veri toplamışlardır. Verilerin analizinde yine Waring'in (2000) kodlama sisteminden yola çıkarak, dört seviyeden oluşan bir ispat oluşturma süreci tanımlamışlardır. İspat düzeyi 0'da öğrenciler ispat yapacaklarından ve hatta ispatın gerekliliğinden habersizdirler. Öğrenci verdiği cevabı gerekçelendirme eğiliminde değildir. İspat düzeyi 1'de öğrenciler ispat yapacaklarından haberdardırlar ama birkaç örnek denemenin ispat olduğunu düşünmektedirler. İspat düzeyi 2'de ise öğrenciler birkaç örneği denemenin ispat olmadığının farkındadırlar. Öğrenci genelleme yapması gerektiğinin farkında ama ya geçerli bir argüman sunamamakta, ya da argümanını tamamlayamamaktadır. Son düzey olan ispat düzeyi 3'te öğrenciler geçerli bir genelleme sunabilmektedir. Bu sınavda kullanılan sorular iki grup altında toplanabilir; ilk grupta 3 soru yer almakta ve sorular "sayı oyunları"nı içermekte (örn. ***"Sarah bir sayı oyunu keşfetti. 1 ile 10 arasında bir sayı tuttu ve bu sayıya 3 ekledi. Bulduğu sayıyı 2 ile çarptı ve elde ettiği sayıyı bir yere not etti. Daha sonra ilk başta tuttuğu sayıya yeniden döndü, bu sayıyı 2 ile çarptı ve sonuca 6 ekledi. Bulduğu bu sayıyı da bir yere not etti. Sarah'nın not ettiği bu iki sayı, 1 ile 10 arasında hangi sayı tutulursa tutulsun her zaman birbirine eşit mi olur? Yanıtınızı açıklayın."***) , ikinci grupta da 3 soru yer almakta ve sorular sayıların ardışıklık, teklik-çiftlik gibi özelliklerini içeren ifadelerden (örn. ***"Üç tek sayıyı topladığınızda her zaman tek sayı mı elde***

edersiniz? Yanıtınızın her zaman tek sayı olacağına öğretmeninizi ikna etmek için bir açıklama geliştiriniz.") oluşmakta idi.

İlk grupta yer alan soruları tek tek incelersek, öğrenciler her üç soruda da yoğunluklu olarak 1. düzeyde kalmışlardır. 1. soruda 6. sınıf öğrencilerin %78'i, 7. sınıf öğrencilerin % 79'u, 8. sınıf öğrencilerin %81'i 1. düzeyde yer alırken bu oran diğer sorularda düşüş yaşamıştır (3. soruda 6. sınıfların %36'sı, 7. sınıfların % 30'u, 8. sınıfların %31'i; 2. soruda 6. sınıfların %36'sı, 7. sınıfların % 51'i, 8. sınıfların %49'u 1. düzeydedir). İlk soruda sadece 8. sınıf öğrencilerin % 2'si ispatı eksiksiz yaparken, 2. soruda tüm sınıf düzeylerinde öğrencilerin yaklaşık %20'si tüketerek ispatı (proof by exhaustion) gerçekleştirmiştir. 3. Soruda ise 6. sınıf öğrencilerin %17'si, 7. sınıf öğrencilerin % 23'ü, 8. sınıf öğrencilerin %27'si ispat yaparken genellenebilir bir argüman ortaya koymuşlardır. Bu ilk grup genel olarak değerlendirildiğinde öğrencilerin ilk soruda diğer sorulara oranla daha çok örnekle doğrulama eğiliminde oldukları görülmektedir. Bu durum araştırmacılar tarafından eğer sunulan ifade daha karışık matematiksel işlemler içeriyorsa, öğrenciler ispat için örnekle doğrulamaya başvurmakta, sözel anlatım veya sembolik gösterimlerle matematiksel ilişkileri ortaya koymakta zorlanmaktadırlar şeklinde yorumlanmıştır.

İkinci grupta yer alan sorular incelendiğinde ise öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğilimleri bu sorularda da devam etmiştir; 1. soru için tüm öğrencilerin yaklaşık % 49'u, 2. soru için yaklaşık % 60'ı, 3. soru için ise % 42'si 1. düzeyde yanıtlar vermişlerdir. Sınıflar bazında 6. sınıftan 8. sınıfa ilerledikçe, 1. düzeyde bulunan öğrencilerin oranında bir azalma yaşanmıştır. Genellenebilir argümanlar üretme (2. ve 3. düzeyde) bakımından ise sınıf düzeyleri ilerledikçe oranda da bir artış yaşanmaktadır (1. soruda 6. sınıfta %12 olan oran 8. sınıfta % 32'ye, 3. soruda ise % 20'den % 29'a yükselmiştir). Tüm sorular bir arada değerlendirildiğinde öğrencilerin dörtte birinin 1. ve 3. soru için genellenebilir bir yargıya ulaşmaya çalıştıkları gözlenirken, aynı eğilimle 2. soruda ("Herhangi iki çift sayıyı topladığınızda toplamın da her zaman çift sayı olacağını gösteriniz. Sonucunuzun her zaman çift sayı olacağına sınıf arkadaşlarınızı ikna etmek için bir açıklama ortaya koyunuz.") karşılaşılmamıştır. Bu durum araştırmacılar tarafından öğrencilerin bildikleri, yerleşik matematiksel doğruları, doğrulama eğilimi taşımadıkları şeklinde yorumlanmıştır. Bu soruda öğrencilerin %22'si 0. düzeydedir, sadece % 8'i düzey 2 ve 3'te yer almıştır.

Bir miktar eski olmakla birlikte, sınıf düzeylerine göre öğrencilerin ispat performanslarının karşılaştırıldığı bir çalışma ilginç sonuçlar ortaya koymaktadır. Lester (1975) bu araştırmasında Piaget'den yola çıkarak çocukta bilişsel gelişimi ele almış ve her yaş kuşağındaki öğrencilerin farklılaşan düzeylerde de olsa, bir düzeyde ispat yapabilecek ya da ispat kavramını anlayabilecek donanıma sahip olduklarını savunmuştur. Araştırmasında 1–3, 4–6, 7–9, 10–12. sınıflar arasından 19'ar kişilik dört grupla çalışmış ve her bir gruba ilk önce ispata yönelik öğretimde bulunmuştur. Daha sonra bu grupların ispat performanslarını değerlendirdiğinde, 7–9. sınıflardan oluşan grubun, 10–12. sınıflardan oluşan grup kadar başarılı olduğunu gözlemlemiştir. Ayrıca ispatı gerçekleştirmeleri daha uzun süre alsa da, 4–6. sınıflardan oluşan grubun, kendilerinden yaşça büyükler kadar iyi bir performans çıkardığı sonucuna da ulaşmıştır. Bu çalışmanın sonucunda Lester, ortaokul düzeyindeki öğrencilerin ispata çok yakın matematiksel konularda başarılı olabilecekleri bulgusuna ulaşmıştır.

Reid ve Knipping (2010) ispat ile ilgili yapılan çalışmalardan çıkan sonuçları şu başlıklar altında gruplamışlardır:

• Öğrencilerin önemli bir kısmı örnekle doğrulamayı bir önermeyi doğrulamak için yeterli görmektedir.

Bir kısmı önceki sayfalarda aktarıldığı üzere, gerçekleştirilen pek çok çalışma tüm öğretim düzeylerinde yer alan öğrencilerin (ilkokuldan üniversite öğrenimine kadar) ispat yaparken ampirik verileri kullandığını, örnek deneyerek yapılan doğrulamaları ispat için yeterli bulduklarını ortaya koymaktadır (Chazan, 1993; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Özer ve Arıkan, 2002; Stylianides, 2009; Stylianides ve Stylianides, 2009; Zaimoğlu, 2012)

• Öğrenciler bazen tümdengelimsel ispatları doğrulama olarak kabul etmemektedirler.

Chazan (1993) öğrencilerde oluşan bu eğilimi lise öğrencileriyle yaptığı bir çalışma sonucu şu gerekçelere bağlamıştır; öğrenciler ispatın sunduğu genellemeye karşın, muhakkak sınırlı bir alan içerdiğini düşünebilmekte ve bunun sonucu olarak bu alanın dışında bir karşı örneğin var olabileceğini savunmaktadırlar; ispatta kullanılan varsayımlar yanlış olabilir, bu nedenle de ispat doğru olmayabilir; ya da ispatı yanlış anlamışlar bu nedenle doğru olduğunu düşünmemişlerdir.

• Öğrencilerin bir kısmı verilen karşı örneği bir önermenin yanlışlığını ispatlamada yeterli görmemektedir.

Galbraith (1981) 12-17 arası yaş kuşağındaki öğrencilerle yaptığı çalışmada öğrencilerin % 18'inin tek bir karşı örneğin önermeyi çürütmede yeterli olmadığını düşündükleri sonucuna ulaşmıştır.

• Öğrencilerin önemli bir bölümü hatalı tümdengelimsel yaklaşımları ispat olarak kabul edebilmektedirler.

Bu eğilimde tercih edilen yanıtın anlaşılmasından ziyade, daha matematiksel ve ispat gibi görünmesi etkili olmaktadır. Martin ve Harel (1989) öğreten adayları ile yaptıkları çalışmalarında kullandıkları iki ayrı soruda %52 ve % 38 oranında bu eğilime ulaşmışlardır. Healy ve Hoyles'ın 2000 yılında yayımlanan çalışmalarında 2459 öğrenciden (14-15 yaş aralığında) veri toplanmıştır. Bu çalışmada uygulanan sınavın iki sorusunda (1. ve 6. sorular) öğrencilere matematiksel önerme, bu önermenin ispatı olarak sunulmuş olası yanıtlar ile birlikte sunulmuştur. Sorularda ilk olarak öğrencilerin hangi yanıtı kendilerine yakın buldukları, daha sonra da verili yanıtlardan hangisinin öğretmen tarafından en yüksek notu alacağı sorulmuştur. Bu iki soruda da cebir kullanılarak gerçekleştirilen, hatalı tümdengelimsel ispatlar yer almıştır ve öğrencilerin 1. soruda %40'ı, ikinci soruda %24'ü bu hatalı yanıtların öğretmenleri tarafından en yüksek notla notlandırılacağını belirtmiştir.

• Çok sayıda öğrenci ispat yazamamaktadır.

Healy ve Hoyles'ın (2000) çalışmasında bildik bir önermenin ispatında öğrencilerin sadece %22'si ispatı tam olarak yazabilmiş, %18'i eksikli bir ispat yazımı gerçekleştirmiştir. Öğrenciler ilk defa karşılaştıkları bir önermede ise sadece %3 oranında ispatı tam olarak, %9 oranında ise eksikli yazabilmişlerdir. Bell'in (1976) çalışmasında ise öğrencilerin sadece % 19'u tümevarımsal ispat yazımında başarılı olmuşlardır. Öğrencilerin bu ispatları ya karşı örnek vererek yapılan ispat ya da tüketerek ispat yöntemlerine aittir.

Burada kısa özetler şeklinde sunulan çalışmalar göstermektedir ki her yaş kuşağından öğrenciler ispat yapmakta zorlanmaktadır, buna karşın sınıflarda ispat öğretimi üzerine yoğunlaşıldığında ve öğrencilerde ispat düşüncesinin gelişimi ile uyumlu etkinlikler onlara sunulduğunda ispata yönelik performanslarında artış gözlenebilmektedir.

3. YÖNTEM

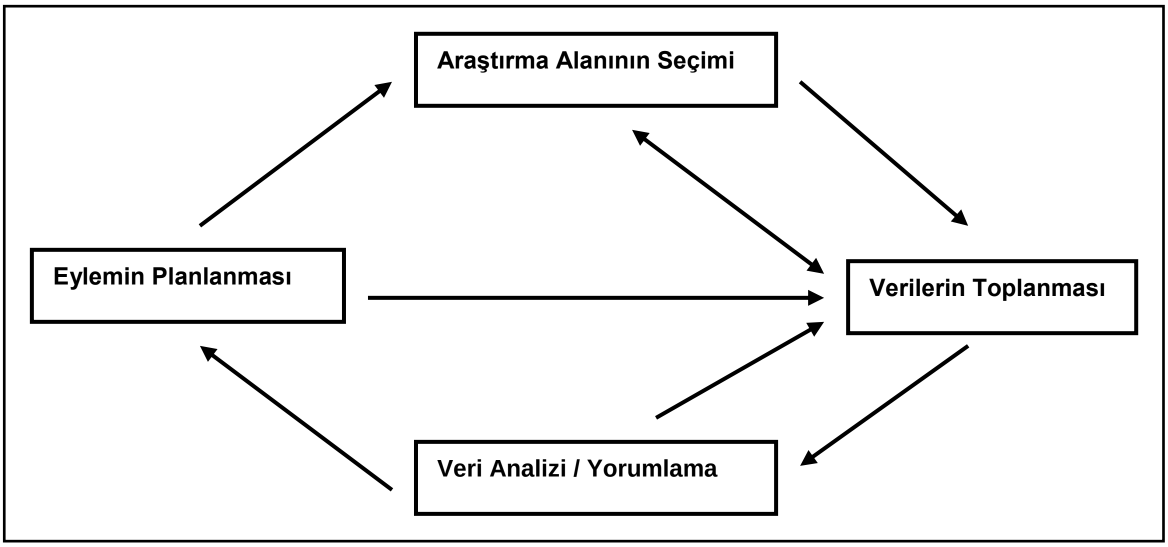
Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, uygulama süreci, araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve toplanan verilerin çözümlenmesinde kullanılan tekniklerle ilgili bilgiler yer almaktadır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırma nitel araştırma yaklaşımlarından birisi olan eylem araştırması olarak kurgulanmıştır. Eylem araştırması birbirinden farklı şekilde tanımlanabilmektedir. Her bir tanım eylem araştırmasının başka bir içeriğine işaret eder. Sosyal durum içerisinde eylemin niteliğini geliştirmenin amaçlandığı eylem araştırmasında (Elliot, 1991), eğitimcilerin uygulamalarının iyileştirilmesi ve onların bu doğrultuda bilgilendirilmesi de amaçlanabilmektedir (Calhoun, 2002). Diğer taraftan O’Brain (2003) eylem araştırmasını, bir grup insanın tanımladıkları problemi çözmek için bir şeyler yapması, ardından uygulamalarının ne kadar başarılı olduğunu sınamaları ve eğer sonuçtan memnun değillerse yeniden deneme yaptıkları bir süreç olarak tanımlar. Yani eylem araştırması, yaparak ve yaşayarak öğrenmeleridir. Ferrance'a (2002) göre eylem araştırması ise yanlış olan durumu tanımlamakla yetinmez, bu durumu düzeltmek üzerinden de bir çaba ortaya koyar. Baverly’nin (1993) çözüm yönelimli bir araştırma olarak tanımladığı eylem araştırması tam da belirlenen bu yanlışı, problemi çözme süreci olarak planlanmaktadır.

Son yıllarda matematiksel ispatı ileri düzeyde matematik bilgisi gerektiren bir konu alanı olarak görmekten vazgeçen, her yaş kuşağının matematiksel ispat yapabileceğini savunan yaklaşımlarda bir artış gözlenmektedir. Bu savunular NCTM'in (2000) de belirttiği üzere ispatı bir konu alanı olarak değil, matematiği öğretme etkinliklerinin doğal bir parçası olarak ele almaktadırlar. Bu doğrultuda ispat, başta ABD ve İngiltere olmak üzere bazı ülkelerde lise öncesi müfredatlarına dâhil edilmiştir. Matematiksel bilginin kavranması, ezberin önlenmesi ve anlamlı öğrenmenin sağlanması açısından kritik bir önem taşıyan ispat öğretimi ülkemizde de daha erken yaş kuşaklarında, bu yaş kuşaklarına uygun bir bağlamda ele alınmalı, müfredatta yer edinmelidir. Bunun için de bu yaş kuşağı ile ispat öğretimi üzerine yapılan çalışmaların sayısı artırılmalı, ilkokul ve ortaokul öğrencilerin ispatı algılama düzeyleri belirlenmelidir. Erken yaş kuşağı ispatı algılayıp, ispat yapabilir mi? Yoksa ispat ileri düzeyde matematik bilgisi ve yeterliliği gerektiren bir uğraş alanı mıdır? Tüm bu sorulara yanıt üretebilmek, ülkemizde bu bağlamda var olan boşluğu bir miktar doldurabilmek bu araştırmada problem durumu olarak tanımlanmıştır. Bu bağlamda gerçekleştirilen çalışma Yıldırım ve Şimşek'in (2005) belirttiği üzere "yeni bir yaklaşımın denenmesi" bağlığı altında da ele alınabilir. 7. sınıf öğrencilerine müfredat dışı bir başlık olan ispat öğretimi uygulanarak yeni bir yaklaşım denenecektir. Gerçekleştirilen ispat öğretimi uygulamasının ardından, ilköğretim 7. sınıf öğrencileri özelinde küçük yaş gruplarının ispat, hatta bu çalışmada ele alındığı biçimde formel ispat yapabilme düzeyleri ortaya konulmaya çalışılacaktır.

Eylem araştırması döngüsel bir süreç içerir. Eylem araştırmasının tanımlarında olduğu gibi, sürecin aşamalarına yönelik literatürde de birbirinden farklı yaklaşımlar bulunmaktadır (Cresswell, 2005; Fraenkel ve Wallen 2006; Mills, 2003; Yıldıım ve Şimşek; 2005). Mills (2003; s. 19), eylemin planlanması, araştırma alanının seçilmesi, verilerin toplanması ve verilerin analizi / yorumlanmasından oluşan, dört aşamalı bir diyalektik döngü tanımlar. Bu döngü şu şekildedir;



Şekil 3. 3. Eylem araştırması döngüsü

Frankel ve Wallen (2006, s.570) benzer bir şekilde yine dört basamakta tanımladıkları diyalektik döngünün aşamalarını şu şekilde ifade etmişlerdir; araştırma probleminin / sorusunun belirlenmesi, soruyu (soruları) yanıtlamak / problemi çözmek için gerekli bilginin toplanması, toplanan verilerin analizi ve yorumlanması, son olarak da bir eylem planının geliştirilmesi. Bu aşamaların doğrusal bir akış izlemesine gerek yoktur. Bazen bazı aşamalar tekrarlanabilir, bazı aşamaların yeri değiştirilebilir, aşamalar arasında geçişler farklılaşabilir. Bu araştırmada Wallen ve Frankel'in aşamaları temel alınmıştır. Daha önce belirtilen şekilde ortaya konan problem durumunu çözüme ulaştırmak amacı ile gerçekleştirilen eylem araştırması süreci araştırmacı, tez danışmanı ve emekli bir öğretim üyesi tarafından aşağıdaki şekilde planlanmış ve yürütülmüştür:

- ***Araştırma sorusunu yanıtlamak / problemini çözmek için gerekli bilginin toplanma süreci***
    a. İspat ve ispat öğretimine yönelik literatür tarandı.
    b. Literatürden yola çıkarak 7. sınıf öğrencileri için ispat öğretimini gerçekleştirmek üzere ders planı ve uygulama sonrasında kullanılacak olan ispat testinin ilk taslağı hazırlandı.
    c. İspat öğretimi ders planı, iki ayrı okulda, iki 7. sınıf şubesinde pilot uygulama olarak 8 hafta uygulandı.
    d. Bu uygulamanın değerlendirilmesi sonucu b maddesine yeniden dönüldü, ders planı ve ispat testinde değişiklikler yapıldı. Araştırmaya ilk başlandığında ele alınması düşünülen “olmayana ergi” yöntemi gerek öğrenci düzeyine ağır geleceği gerekse uygulama zamanının sınırlı olması nedeniyle uygulama kapsamından çıkarıldı.

       Buna ek olarak öğrencilerle yapılan pilot uygulama göstermiştir ki öğrenciler ispatla ilgili soruları çözmekte pek istekli değildir ve çabuk sıkılabilmektedirler. Bunun üzerine araştırma başında tek bir sınav olarak kurgulanan ispat sınavını; öğrencinin ispat algısını, ispat performansını ve hangi ispat yöntemlerini daha çok tercih ettiğini daha ayrıntılı betimleyebilmek amacıyla üç ayrı sınav olarak kurgulama kararı alındı.

e. Pilot uygulamada dikkat çeken bir diğer nokta öğrencilerin ispat yaparken örnek vererek doğrulama eğiliminde olduklarıdır. Bu eğilimi net olarak ortaya koymak amacıyla ana uygulama öncesi hazır bulunuşluk sınavının uygulanmasına karar verildi.
f. Pilot uygulama dışındaki farklı okullarda seçilen iki 7. sınıf şubesinde ilk olarak hazır bulunuşluk sınavı uygulandı, daha sonra ana uygulama olarak 14 hafta boyunca ispat öğretimi gerçekleştirildi.
g. Ana uygulamanın ardından 3 aşamadan oluşan ispat testi, birer hafta arayla uygulandı.
h. 3 sınav genel bağlamda değerlendirilerek sınavlarda ortaya konan tüm eğilimleri kapsayacak şekilde 16 öğrenci seçildi. Öğrencilerin sınavlarda sergiledikleri performansı ayrıntılı şekilde sorgulamak, buna ek olarak ispat ve ispat yöntemlerine yönelik görüşlerini almak amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme formu hazırlandı ve öğrencilerle görüşme gerçekleştirdi.

- ***Toplanan verilerin analizi ve yorumlanması***
  a. Her bir sınav, sorulara ve ispat yöntemlerine göre geliştirilen kodlama sistemine göre analiz edildi. Kodların yüzde ve frekans dağılımları tablolaştırıldı.
  b. Araştırma problemi temelinde ispat testleri ve görüşmeden elde edilen veriler bir arada ele alınarak yorumlandı. Göüşmeden elde edilen veriler öğrencilerin isimleri değiştirilerek raporlaştırıldı.

Eylem araştırmasında verilerin toplanması ve analizi sürecinde çeşitli yöntem ve teknikler kullanılabilmektedir. Literatürde yoğunluklu olarak nitel araştırmalar içerisinde yer alan eylem araştırmalarında nicel yöntem ve tekniklerinden de yararlanıldığı görülmektedir. Kock (1997) eylem araştırmasının nitel araştırma yaklaşımı olarak görülmesini bir mit olarak değerlendirir ve eylem araştırmasında kullanılacak yöntemin araştırmacıya ve araştırmanın konusuna bağlı olduğunu, bu nedenle de hem nicel hem de nitel yöntemlerin kullanılabileceğini belirtir. Kuzu (2009) ise eylem araştırmasında amaca ulaşmak ve araştırma sonuçlarını desteklemek amacı ile yoğunluklu olarak nitel araştırma yöntemleri kullanılırken, nicel araştırma yöntemlerinden de yararlanılacağını söyler. Eylem araştırmasının nicel bir araştırma olmadığını belirten Johnson (2002) ise araştırmada nicel yöntemlerin de kullanılabileceğini, buna karşın araştırmada bazı değişkenlerin kontrol edilemeyişinden dolayı, uygulamanın sonuçlarının geniş topluluklara genelleştirilmesinde çeşitli sorunların çıkabileceğinin hesaba katılması gerektiğini belirtmektedir.

Eylem araştırmasında nitel ve nicel yöntemlerin bir arada kullanılabileceğini belirten çalışmalara (Aksoy, 2003; Bogdan ve Biklen, 2002; Johnson, 2002; Kock, 1997; Kuzu, 2009; Yıldırım ve Şimşek, 2005) ek olarak Ekiz (2003) eylem araştırmasının felsefi olarak nicel ve nitel yöntemlerden de farklı olduğunu, eleştirel kuram kapsamında ele alınması gerektiğini belirtmiştir. Ekiz bu değerlendirmesinde eylem araştırmasında sadece anlama ya da sadece değiştirmenin yeterli olmadığını belirterek, aslolanın anlama ve değişimin birlikte sağlanması gerekliliği olduğunu vurgulamaktadır. Bu araştırmada da nitel ve nicel yöntemler birlikte kullanılmış, 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik kavrayış ve yaklaşımları anlaşılmaya çalışılırken öğretim sürecine yönelik bir değişim önerisi öngörülerek çalışma kurgulanmıştır.

3.2. Çalışma Grubu

Bu araştırma Ankara ilinde, Çankaya ve Yenimahalle ilçelerine bağlı iki ortaokulda birer 7. sınıf seçilerek, iki şubede gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın daha zengin veri sunması amacı ile farklı sosyoekonomik setlerden iki ayrı okul ve şube seçilmiştir. Çalışma grubunun seçiminde rastlantısal bir atama uygulanmayarak, bu atama sürecinde öğretim sürecini araştırmacının rahatlıkla yönlendirebileceği koşulların varlığına öncelikle dikkat edilmiştir.

Araştırmacı, okul yönetimi ve matematik öğretmeninin haftalık olarak verebildiği izin oranında derse girip uygulamayı gerçekleştireceği için öncelikli olarak okul seçiminde bu iki unsurun yol açıcılığı dikkate alınmıştır. Şube seçiminde ise matematik öğretmeninin yönlendirmesi dikkate alınmıştır. Bu bağlamda rastlantısal değil amaçsal bir örneklem oluşturulmuştur. Amaçsal örneklem bağlamında maksimum çeşitlilik örneklemi tercih edilmiştir (Balcı, 2005). Bu örnekleme yöntemindeki amaç, çeşitliliği sağlayarak genellemeye ulaşmak değil, çeşitlilik taşıyan durumlar arasında ne tür ortaklıkların ve benzerliklerin var olduğunu bulmak, bu çeşitliliğe bakarak problemin farklı durumlarını ortaya koyabilmektir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Maksimum çeşitlilik bağlamında farklı sosyo ekonomik setlerden seçilen şubelerde yer alan öğrencilerin cinsiyete göre dağılımı şu şekildedir:

Tablo 3.1. Uygulamanın gerçekleştiği şubeler

Şube	*Bulunduğu İlçe*	*Öğrenci Sayısı*	
A	Çankaya	30	15 kadın
			15 erkek
B	Yenimahalle	24	11 kadın
			13 erkek

Her iki şubenin başarı seviyelerini de karşılaştırabilmek amacı ile araştırmanın uygulama boyutuna geçmeden önce iki şubeye başarı testi uygulanmıştır. Gerçekleştirilen bu 15 maddelik başarı testinin ardından iki şubenin başarı seviyelerinin birbirine yakın olduğu gözlenmiştir. Başarı testi ile ilgili ayrıntılar "Bulgular ve Yorum" bölümünde ele alınmaktadır.

3.3. Araştırmacının Rolü

Bu çalışmada uygulama araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Uygulama sürecine başlamadan önce 2 hafta boyunca araştırmacı seçtiği şubenin matematik derslerini takip ederek hem sınıfı tanımaya çalışmış, hem de sınıfın kendisine olan yabancılığını kırmaya çalışmıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

3.4.1. Pilot Uygulama Süreci

7. sınıflara uygulanacak öğretim süreci ve ele alınacak ispat örnekleri literatür taramasından yola çıkarak hazırlanmıştır. Literatür taramasında Türkiye'de ispat öğretim uygulamasını içeren pek fazla çalışma bulunmadığı için, genellikle

yabancı kaynaklardan yararlanılmıştır. Bu nedenle araştırma probleminin oluşturulduğu süreçte 7. sınıf öğrencilerin formel ispat yapabilme yeterlikleri ve bu uygulama sürecinde ortaya koyacakları tutumlara yönelik bir öngörüde bulunulamamaktaydı. Bu durum uygulama sürecine yönelik bir ön gözlem ve değerlendirmeyi gerekli kılarak pilot uygulamasını önemli kılmıştır.

Araştırmacı Çankaya ve Mamak ilçelerinde yer alan iki farklı sosyo-ekonomik setten okul seçerek, 8 hafta süren pilot uygulama gerçekleştirmiştir. 2011 – 2012 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde gerçekleştirilen bu uygulamaya başlamadan önce 2 hafta kadar seçtiği şubelerin matematik derslerine gözlemci olarak giren araştırmacı, öğrencilerle tanışma ve aralarındaki yabancılığı kırma fırsatı yakalamıştır. Şube seçimi matematik öğretmeninin yönlendirmesi ile gerçekleşmiştir. 8 hafta süren bu uygulama video kaydına alınmış, bu kayıtlar çözümlenmiş ve araştırmacı, tez danışmanı ve bir öğretim üyesi ile birlikte değerlendirilerek gerçekleştirilecek ana uygulamaya son şekli verilmiştir.

Pilot uygulama öncesinde doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat, durum yolu ile ispat ve olmayana ergi yöntemlerinin hepsi ele alınmış ve bu yöntemlere yönelik 7. sınıflara uygun ispat örnekleri ve akıl oyunları hazırlanmıştı. Pilot uygulamada gerçekleştirilen gözlemler değerlendirilerek çalışmanın kapsamının daraltılmasına neden olmuştur.

Gerçekleştirilen pilot uygulamada öğretim süreci beklenenden yavaş ilerlemiş, derslerde genellikle bir ispat örneği, bazen de iki örnek üzerinde durulabilmiştir. Literatürde yer aldığı ve bu nedenle beklendiği üzere öğrencilerde herhangi bir şekilde genellemeye ulaşmak yerine, örnek vererek doğrulama eğilimi baskın çıkmıştır. Sınıfta matematik dersinde başarılı olan öğrenciler araştırmacının yönlendirmesi ile bu eğilimlerini sorgulayabilmişken, başarısız öğrencilerde örnek kullanma eğiliminde bir ısrar gözlenmiştir. Öğrencilerin başarı durumu önceki dönem karne notu ve matematik öğretmeninin değerlendirmesine göre veri olarak alınmıştır. Öğrenciler durum yolu ile ispat örneklerini kavramada diğer yöntemlere göre daha çok zorlanmış, bu örnekler üzerinde daha çok zaman harcanmıştır. Buna rağmen sınıfta yürütülen tartışmaları anlayarak, tartışmaya aktif katılan öğrenciler de olmuştur. Araştırmacının yönlendirmesi ile her iki şubede de bu yöntemi uygulayan öğrenciler sayıca az da olsa olmuştur. Olmayana ergi yönteminde ise izlenen süreci öğrenciler kavrayamamış, ifadenin yanlış olduğu kabul edilerek başlanan ispat sürecine yönelik sınıfta sürdürülen tartışmaya öğrenciler yeterli katılımı göstermemiş, sessiz kalmayı tercih etmişlerdir.

Bu bağlamda ana uygulamanın da gerçekleştirileceği sürecin sınırlı oluşu dikkate alınarak, uygulamada örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki ayrıma daha çok değinilmesi ve uygulamada kullanılacak yöntemlerin doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat ile sınırlandırılmasına karar verilmiştir. Bu doğrultuda ana uygulamaya son şekli verilir.

3.4.2. Uygulama Süreci

2012-2013 eğitim öğretim yılı başında 4+4+4 diye anılan ve zorunlu eğitimi 12 yıla çıkaran bir kanun değişikliği olmuştur. Bu değişiklikle birlikte ilköğretim okulları ilkokul ve ortaokul diye ayrışmış, aynı binada eğitim gören bu iki kademeden birisi dönem başında farklı okullara aktarılmıştır. Bir önceki eğitim öğretim yılında pilot uygulamanın gerçekleştirildiği okullarda da bu dönüşüm yaşanmış, uygulama sürecine yardımcı olan öğretmenlerin tayin olması nedeniyle yeni okul ve izin çıkarma arayışına girilmiştir. Bu nedenle uygulamaya planlanandan yaklaşık 1,5 ay geç başlanmıştır.

İspat öğretimi 7. sınıflar için müfredat dışı yeni bir konu alanıdır. Öğrencilerin hiç bir ön bilgisinin bulunmadığı bu konuda hazır bulunuşluk testi kullanılmamış, öğrencilerin ispat kavramından ne anladıkları betimlenmeye çalışılmıştır. 2012 Kasım ayında başlayan uygulamada, öncelikle A ve B şubelerine hazır bulunuşluk testi uygulanmıştır. Daha sonra haftada 1 saat olmak üzere toplamda 14 hafta sürecek olan ispat öğretimi ders izlencesine geçilmiştir. Bu süreçte, sayılar, ardışıklık, teklik çiftlik ve bölünebilme konuları üzerinde durulmuştur. Bu konuların seçiminde öğrencilerin uygulamanın başladığı süreçte bildikleri, müfredat içerisinde önceki ders yıllarında işlemiş oldukları konuların seçimine dikkat edilmiştir.

Uygulama sürecinde derslerde sırasıyla doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemleri tanıtılmış ve bu yöntemlerle ispatlanacak sorulara yer verilmiştir. Ayrıca öğrencilerin derse yönelik motivasyonunu artırmak için derste akıl oyunlarına da yer verilmiş, bazı oyunlar ispat ve ispat yöntemleri ile ilişkilendirilmiştir. İspat uygulamalarına geçilmeden önce ilk derslerde önce ispat kavramı üzerine tartışılmış, ardından belirlenen matematik konuları üzerine anlatım, soru-cevap yöntemleri kullanılarak hatırlatmalarda bulunulmuştur. Ele alınacak ispat uygulamalarında gerekli olacağı düşünülerek, seçilen konularla ilgili sembolik gösterimlerin kullanımının pekiştirilmesine de önem verilmiştir. Bu doğrultuda gerek uygulamanın başında ilk derste, gerekse ders süreci içerisinde ihtiyaç duyulduğu anlarda sembolik gösterimlerle ilgili hatırlatmalar ve örneklendirmelere yer verilmiştir.

Her bir derste, hafta hafta hazırlanan ders planında yer alan sorular üzerinde durulmuştur. Her iki şubede de bu plan eksiksiz uygulanmıştır, ne var ki uygulama her hafta paralel gidememiştir. Bazen bir şubede cebirsel gösterim üzerine hatırlatmalara daha sık yer verilebilmiş, bazen de diğer şubede konu anlatımına, hatırlatmalara plana ek olarak yer verilebilmiştir. Bu bağlamda uygulama öncesi hazırlanan ders planına süreç içerisinde öğrencilerin ihtiyaçları doğrultusunda eklemeler yapılabilmiştir. Uygulama öncesi 12 hafta olarak planlanan ders planı, uygulama esnasında 14 haftaya çıkarılmıştır. 14 haftanın sonunda derslerde ele alınması planlanan tüm ispat uygulamaları eksiksiz olarak, her iki şubede de tamamlanmıştır. 14 hafta boyunca ele alınan ispat örnekleri üzerinden sınıfta soru-cevap, tartışma ve beyin fırtınası yöntemleri kullanılarak matematiksel doğrulama ile ispat arasındaki fark üzerinde durulmuştur.

14 hafta süren uygulamanın ardından öğrencilere birer hafta arayla, 3 ayrı sınavdan oluşan ispat testleri uygulanmıştır. Bu sınavları da dâhil ettiğimizde 17 hafta süren bir uygulama gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın ikinci kısmında, öğrencilerin peş peşe 3 ayrı sınav şeklinde uygulanan ispat testlerine verdikleri yanıtları ayrıntılandırmak, zorlandıkları noktaları betimleyebilmek, yapamadıkları soruları, ispat yöntemlerini araştırmacının desteği ile yapıp yapamadıklarına bakmak ve genel olarak uygulama - ispat ile ilgili düşüncelerini almak amacıyla öğrencilerle yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme gerçekleştirilmiştir. İspat testlerinin sonuçları değerlendirilmiş ve bu sınavlarda verilen yanıtların çeşitliliğini kapsayacak şekilde 16 öğrenci görüşme için seçilmiştir. Bu öğrencilerle yaklaşık 40dk süren yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme gerçekleştirilmiştir.

Nitel görüşmeler, "derinlemesine görüşme" olarak da adlandırılır. Nicel görüşmelerden farklı olarak yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşmelerde “yüzeysel” değil, daha “derin”, “detaylı” ve “karmaşık” bilgilere ulaşmak amaçlanır (Kuş, 2009). Bu doğrultuda hazırlanan görüşme formu görüşme sırasında görüşmeciye yön verir ama onu sınırlandırmaz. Görüşülen kişinin verdiği yanıtlar doğrultusunda planlanan görüşme, formda yer almayan sondaj sorularıyla da detaylandırılabilir.

Aşağıda dersteki uygulama sürecine hafta hafta ayrıntılı olarak yer verilmiştir;

1. Hafta: İlk hafta her iki şubeye de hazır bulunuşluk testi uygulandı.

2. Hafta: İspat kavramı üzerine bir tartışma yürütüldü. Öğrenciler her ne kadar ispat kavramına matematik dersi kapsamında yabancı olsalar da, günlük yaşamlarında oynadıkları oyunlar, girdikleri iddialar üzerinden ispat / kanıt kavramı ve bir iddianın nasıl ispatlanacağı / kanıtlanacağı üzerine sınıfta bir tartışma yürütüldü. Bu tartışmalar sonunda var olan iddianın / önermenin ispatı için, herkesi ikna edecek veriler, bilgiler, deliller kullanarak genellenebilir kesin yargılara, savunmalara gereksinim olduğu düşüncesine ulaşıldı. Daha sonra Gardner’dan (2011, s. 105) uyarlanan ***"Tatile Giderken"*** (Ek 1) oyunu sınıfa dağıtılarak, bu oyunda anlatılan olay örgüsü örnek olay olarak sınıfta ele alındı. Anlatılan örnek olayın sonunda yer alan iddianın doğruluğu / yanlışlığı üzerine bir fikir geliştiren öğrenciler bu konu üzerine tartıştırıldı. İddiayı doğru bulanlar kendi haklılıklarını, yanlış bulanlar da kendi haklılıklarını ispat etmeye çalışarak sınıfın geri kalanını ikna etmeye çalıştılar. Bu örnek olay üzerinden ispat yapma pratiğine giriş yapıldı.

3. Hafta: İleriki derslerde kullanılacak olan ispat uygulamalarının içerdiği konu başlıkları; sayılar, ardışıklık, teklik çiftlik ve bölünebilme konuları üzerinde anlatım yolu ile kısa hatırlatmalarda bulunuldu. Ardından cebirsel gösterimlere geçildi. Önce öğrencilerin 6. sınıfta gördükleri cebirsel alıştırmalar ("bir sayının 3 katının 5 eksiği" gibi) üzerinde durularak cebirsel ifadelere yönelik hatırlatmalarda bulunuldu. Daha sonra tek ve çift sayılar, ardışık sayılar, ardışık tek sayılar, ardışık çift sayılar, 3'e bölünebilen sayılar vb. ifadelerin sembolik gösterimleri soru-cevap, tartışma yöntemleri kullanılarak öğrencilere aktarıldı.

4. Hafta: Bir önceki hafta ele alınan sembolik gösterimlere dair kısa bir hatırlatma yapıldı. Daha sonra bu derste matematiksel önermelerin ispatları üzerinde durulacağı belirtilerek öğrencilere; ***"iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır"*** önermesi verildi. Öğrencilere bu önermenin doğru olup olmadığı ve verdikleri yanıtları nasıl ispatlayacakları soruldu. Araştırmacı öğrencilerin yanıtlarını müdahale etmeden dinledi, öğrencilerin verdikleri yanıtlar üzerine tartışmalarını sağlayacak şekilde sınıfı yönlendirdi. Bu ilk soruda uzun bir süre verilen cevaplara müdahale edilmedi. Literatür, pilot uygulamadaki gözlemler ve hazır bulunuşluk testi sonuçlarında olduğu üzere öğrenciler de verilen önermeyi örnek vererek doğrulama eğilimindeydiler. Öğrencilerin hiç biri genellenebilir bir sonuca ulaşmaya çalışmayınca araştırmacı tartışmaya şu soruyu sorarak müdahale etti; *"Peki hep sayı örnekleri deniyorsunuz ama biz bu ifade tüm sayı kümesi için doğru mu onu bulmaya çalışıyoruz. Ya sizin denemediğiniz bir sayı çifti bu ifadenin yanlış olduğunu ortaya koyarsa, topladığımızda çift sayı vermezse o zaman ne olur? Nasıl emin olabiliriz tüm sayılar için bu ifadenin doğru olduğundan?"*. Dersin başında sembolik gösterimlere yönelik hatırlatmaların yapılmasına rağmen öğrenciler cebir kullanmaz, A şubesinde yaşanan şu diyaloga benzer bir eğilim her iki şubede de yaşanmıştır:

> ***Fırat:*** *O zaman tüm sayıları deneriz.*
>
> ***Hilal:*** *Yok olur mu? Ölene kadar denersin o zaman.*
>
> ***Berk:*** *Öğretmenim şöyle yapsak, haklısınız tek bir sayı denemek bizi yanıltabilir. O zaman birkaç sayı deneyelim, büyüklü küçüklü olsun. Hatta önce bir basamaklı, sonra çok basamaklı mesela. Ben öyle yapmıştım, önce 1 ve 3'ü topladım. Sonra 11 ve 25'i, son olarak da 111 ve 135'i. Rastgele seçtim, üçünde de topladım çift sayı çıktı. Bence bu yeterli.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Sizce Berk haklı mı?*
>
> ***Beyza:*** *Ben de öyle yapmıştım, 4 sayı denemişim, hepsinin toplamı çift sayı çıktı.*
>
> ***Sude:*** *Ama hocam ya olmazsa, milyon basamaklı bir sayı olsun topladığımda çıkmasın, olamaz mı? Nerden bilicez?*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki o zaman ne yapalım ki tüm sayılar için doğru olduğunu gösterelim, bir fikri olan var mı?*

Sınıfta bir süre sessizlik yaşanır, hemen ardından sınıfın başarılı öğrencilerinden Berk yaptığı işlemlere bakarak, iki sayının toplamının tek mi çift mi olduğunu son basamakların toplamının belirlediğini ifade eder ve Sude'nin çok büyük sayısını denemeye gerek olmadığını söyler. Berk'in ortaya attığı bu fikir üzerinden Dicle söz alır ve "Öğretmenim o zaman tüm tek olan rakamları ikili ikili toplarız. Hepsini toplar isek Berk'in dediği gibi, tüm tek sayıların toplamının birler basamağını bulmuş oluruz." der ve ispat için tahtaya kalkar. Tahtada aşağıdaki gibi 1'den 10'a kadar olan rakamlar içerisindeki tek sayıları, ikişer ikişer gruplayarak toplar:

1+1=2	3+3=6	5+5=10	7+7=14	9+9=18
1+3=4	3+5=8	5+7=12	7+9=16	
1+5=6	3+7=10	5+9=14		
1+7=8	3+9=12			
1+9=10				

> ***Dicle:*** *Tüm ihtimalleri topladık ve hepsinin toplamı çift sayı çıktı. Artık topladığımız sayılar ne kadar büyük olursa olsun hepsinin birler basamağı bu sayılardan birisi olacak o yüzden toplamın birler basamağı da buradakilerden birisi olacak, yani çift sayı olacak.*

İspat bu şekilde tamamlandıktan sonra araştırmacı sembolik gösterimlerin genel gösterimler olduğunu da sınıfa hatırlatarak onları bu gösterimleri kullanmaları doğrultusunda yönlendirdi. Öğrenciler ispatla ilgili bu ilk uygulamada sembolik gösterimleri kullanmakta epey zorlandı. Bunun üzerine araştırmacı tahtaya kalkan bir öğrenciye soru-cevap yöntemi ile yönlendirdi, cevap veremediği anlarda kendi hatırlatmalarda bulunarak tek sayıların sembolik gösterimini anımsattı ve bu şekilde ispatı tamamlattı.

5. Hafta: Derse önceki hafta ele alınan soruya benzer bir soru olan ***"bir tek ve bir çift sayının çarpımı her zaman çift sayıdır"*** önermesinin ispatı ile başlanır. Öğrenciler bu soruda da örnek vererek doğrulama eğilimini sürerek, örnek vermenin de ispat olduğunu düşünmeye devam ettiler. Araştırmacı önceki ders yaptıkları ispatı hatırlatarak, öğrencilerden cebir kullanmalarını istediğinde az sayıda öğrenci cebir kullanmaya başlar ve ispatı tamamlar. B şubesinden İlayda araştırmacının yönlendirmesi ile ispatı tamamlayan öğrencilerden birisidir. İlayda oturduğu sıradan parmak kaldırarak araştırmacıya şu soruyu yöneltir:

> ***İlayda:*** *Öğretmenim cebir kullanın dediniz ya, tek sayı için 2x+1, çift sayı için 2x diyerek mi yapıcaz?*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet İlayda. Peki çift ve tek sayıları bu şekilde alırsan, sonra nasıl devam edersin?*
>
> ***İlayda:*** *Bu iki sayıyı çarparım, çarpımı soruyor ya bize soruda.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Tamam, gel tahtada devam et, arkadaşlarına da yaptıklarını anlat istersen.*
>
> *[İlayda tahtaya kalkar ve ispatı anlatarak yapar]*

İlayda: *Şimdi 2x ile 2x+1 ile çarparım. Ama bunları tek tek çarpıcam sanırım. Öğretmenim parantez içine alayım mı bu sayıları?*

Araştırmacı: *Olur.*

İlayda: *O zaman 2x'i tek tek bu sayılarla çarparım [2x+1'de yer alan 2x ve 1 sayılarını kastetmekte]. 2x çarpı 2x artı 2x. Haa... Şimdi... [2x'i kendisi ile çarpmakta bir miktar zorlanır ve anlatımı yavaşlar] Öğretmenim 4x2 mi olur? Hani 2 çarpı 2 4, bir de x çarpı x olur.*

Araştırmacı: *Evet doğru yapıyorsun, ama işlemini arkadaşlarına da anlat istersen.*

İlayda: *Tamam. Şimdi 2x ile 2x+1 i çarpmamız gerekiyor. Çarpmayı yanlış yapmayım diye paranteze aldık. 2x'i 2x+1'deki sayılarla tek tek çarparsam, 2x çarpı 2x 4x2 olur, 2x ile 1'i çarpınca da artı 1 yazarım. Yani sonuç 4x2 + 2x olur. Soru demiş ki bize bu çarpım her zaman çift sayı olur, biz çarpımı 4x2 + 2x bulduk, bu da çift sayıdır.*

Araştırmacı: *Niçin?*

İlayda: *Çünkü 2'ye bölebilirim bunu. Soru doğruymuş.*

Araştırmacının gözlemi her iki şubede de öğrencilerin cebir kullanmaktan kaçındıkları ve buna ek olarak örnek vererek doğrulamanın ispat olduğu düşüncesinde ısrarlı olduklarıdır. Bunun üzerine ders planında yer alan ve Gardner'dan (2011, s. 41) uyarlanan ***"Dön dolaş aynı yerdeyim"*** oyununa (Ek 1) geçilir. Bu oyunda şu ifade yer alır;

> Aradığım arsayı bulmak için elimdeki yol tarifi ile yola koyuldum.
>
> Tarifte bulunduğum noktadan 100 metre güneye gitmem, daha sonra 200 metre doğu yönünde ilerlemem, son olarak da 100 metre kuzeye çıkmam söyleniyordu.
>
> Denileni aynen uyguladığımda başladığım noktada olduğumu gördüm.
>
> Sizce bu mümkün mü? Mümkünse nasıl mümkün olur?

Öğrencilerden bu oyuna yönelik tahminde bulunmaları, bir hipotez geliştirmeleri ve bu hipotezi ispatlamaları istenir. Öğrencilerin hepsi bir müddet düşündükten sonra oyunda verilen durumun mümkün olmadığını savunur ve hipotez olarak "bulunduğu yerden 200metre doğrudadır" ifadesini sunar. Öğrenciler verilen oyunu iki boyutlu bir düzlem üzerinde düşündüklerinde var oldukları noktanın 200 metre doğusunda olacaklarını bulmuş, bazı öğrenciler tahtaya kalkıp verilen yol tarifini uygulayarak (verili ölçeği küçültmüşlerdir, ölçeği %1 oranında küçülterek 100 metreyi 1 metre olarak uygulamışlardır) aynı noktada olamayacaklarını iddia etmişlerdir. Öğrenciler farklı yöntemler kullanarak ulaştıkları sonucun doğru olduğunu, yani kesinlikle aynı noktada olmayacaklarını, başladıkları noktanın 200 metre doğusunda bulunacaklarını iddia etmişlerdir. Gözden kaçırdıkları nokta dünyanın kutuplardan basık olan geoit yapısıdır ve kutuplara çok yakın noktalarda verilen yol tarifi izlendiğinde başladıkları noktaya çok yakın bir noktada bulunacaklardır. Başlangıç noktasını kutup noktası olarak aldığımızda ise yolu tamamladığında başladığı noktaya geri dönmüş olacaklardır. Araştırmacının tahtaya çizdiği dünya şekli üzerinden düşünmeye başlayan öğrenciler bu olasılığın da mümkün olacağını fark etmiş ve çok olası gözükmese de öyle bir noktanın, kendilerine kesin doğru gibi gözüken bir gerçekliği çürütebileceğini deneyimlemişlerdir. Bu oyun ile yürütülen tartışma ile öğrencilere örnek vererek gerçekleştirilen doğrulamanın, denemelerin genellenebilir bir yargı sunmakta yeterli olmayabileceği hissettirilmeye çalışıldı.

Bu uygulamanın ardından öğrencilerde örnekle doğrulama ile ispat arasındaki farkın daha da pekiştirilmesinin gerekli olduğu hissedildi, bu nedenle bu dersin sonunda ders planına bir haftalık ek yapılmasına karar verildi. Bir sonraki hafta için örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki farka değinilecek matematiksel bir etkinliğin kullanılması kararlaştırıldı. Ayrıca B şubesindeki öğrenciler cebirsel ifadeleri anlamakta diğer şubeye göre daha fazla zorlanmışlardır, bunun üzerine araştırmacı bu şubedeki öğrencilere daha sık cebirsel ifadelere yönelik hatırlatmalarda bulunmaya da karar verildi.

6. Hafta: Derste öğrencilere Mason ve diğerlerinden (1982) uyarlanan ***"Çember ve Nokta"*** (Ek 1) problemi dağıtıldı. Bu problem ile öğrencilerin örnek vererek doğrulama ile genellemeye ulaşabilecekleri ve bu yolla ispat yapabileceklerine dair inançları zayıflatılmak istenmiştir. Bir önceki derste "Dön dolaş aynı yerdeyim" oyunu ile bir örnek olay üzerinden akıl yürüten öğrenciler, bu problem ile matematiksel bir uğraş içerisinde ispata yönelik kavrayışlarını sınamıştır.

Öğrencilerden boş bir kâğıt çıkarmaları istendi ve onlara bu problem dağıtıldı. Öğrencilerden bir müddet yerlerinde problem ile uğraşmaları istendi. Bu sırada araştırmacı soruda yer alan "çember üzerindeki bağımsız bölge" ile neyin kastedildiğini tahtaya çizdiği çember ve üzerinde aldığı noktaları kullanarak anlatır.

Öğrenciler literatürdeki bulgularla (Stylianides & Stylianides, 2009; Stylianides, 2009; Stylianides, 2011) uyumlu olarak öncelikli olarak basit durumları (çember üzerinde 2 nokta, 3 nokta, 4 nokta alarak) denediler ve bunlar üzerinden elde ettikleri sonuçlarla genelleme yapma eğilimi gösterdiler. Bazı öğrenciler çember üzerindeki aldıkları 5 nokta ile de deneme yaptı, ama bu öğrenciler sayıca azdır. Öğrencilerin denemeleri sonucu buldukları sonuçlar şu şekildedir:

Çember üzerinde alınan	2 nokta	$\longrightarrow$	2 ayrı bölge
	3 nokta		4 ayrı bölge
	4 nokta		8 ayrı bölge
	5 nokta		16 ayrı bölge oluşturmakta.

Nokta ve bölge sayıları arasında var olan bu ilişkiye bakarak ilk etapta öğrenciler bölge sayısının her zaman bir öncekinin 2 katı şeklinde arttığını, bu nedenle 6 nokta alınırsa 32, 7 nokta alınırsa 64 bölge bulunacağını savundular. Sınıftaki bazı öğrenciler soruda çember üzerinde alınan 15 nokta ile kaç bölgenin oluşacağı sorulduğu için bir formül geliştirme ihtiyacı hissettiler. Bu öğrencilerden bazıları nokta sayısı ile bölge sayısı arasındaki ilişkinin 2^n-1 olduğunu ifade etti (n nokta sayısı). Öğrenciler ulaştıkları bu genelleme ile problemi çözdüklerini düşünürken araştırmacı onlardan boş bir kâğıt çıkarmalarını ve büyük bir çember çizip bu sefer de çember üzerinde 6 nokta almalarını istedi. Çizim öğrencileri biraz uğraştırdı ama sonunda öğrencilerin büyük bir kısmı bekledikleri gibi 32 bölge değil, 31 bölgenin oluştuğunu gördü. Bunun üzerine araştırmacı tahtaya bir öğrenci kaldırdı ve renkli kalemler kullanarak öğrenci ile birlikte, 6 nokta alarak çemberi bölgelere ayırdı. Tüm sınıfın izlediği bu uygulamanın ardından çember üzerinde alınan 6. noktanın beklenen sonucu vermediği görüldü.

1 ders saatini kaplayan bu uygulamanın ardından araştırmacı “Dön dolaş aynı yerdeyim” oyununu da hatırlatarak bu son iki etkinliğin de gösterdiği üzere denenen örneklerin, ampirik argümanların her zaman genellemeye ulaşmada yeterli olmayacağını, bu nedenle de örnek vererek yapılan doğrulamanın ispat olmadığını vurguladı.

7. Hafta: Derse ***“Ardışık iki sayının toplamı her zaman tek sayıdır***” önermesinin ispatı ile başlandı. Önceki haftalardaki uygulamalar nedeniyle cebirsel ifadeler kullanmaya alışan ve ispat yaparken örnek vererek doğrulama eğilimini bir miktar bırakan öğrenciler bu derste farklı tartışmalar yürüttü. Öğrenciler kendi aralarında tartışarak, itirazlar geliştirerek örnek vererek doğrulama eğiliminde olan arkadaşlarını ikna etmeye çalıştı. Buna karşın sınıfın önemli bir bölümünün cebirsel ifadeleri kullanmaktan kaçınmaya devam ettiği gözlendi. Bu uygulamanın ardından karşı örnek vererek ispat ile ilgili örneklere geçildi.

İlk olarak ***“Her asal sayı tek sayıdır.”*** önermesi üzerine tartışıldı. Öğrencilerin büyük bir kısmı 2'nin de asal sayı olduğu bilgisini unutarak önermenin doğru olduğunu savundu. Sınıf içerisinde yürütülen tartışmada bu savunuya itiraz geliştiren öğrenciler de oldu ve 2 sayısının asal sayı olduğunu hatırlatan bu öğrenciler önermenin yanlış olduğunu belirtti. Daha sonra öğrencilere şu önerme verildi; ***"n tek bir sayı olsun, bu durumda (n+1) / 2 sayısı her zaman tek sayıdır."*** . Öğrenciler sayı deneyerek buldukları sonuca göre önermenin doğru ya da yanlış olduğunu savundu. Yalnız yaptığı işlemin sonunda çift sayıya ulaşan öğrencilerin hepsi önermenin yanlış olduğunu savunmaya başladı. Öğrenciler bir önermenin yanlış olduğunu ispat etmekte zorlanmıyor gibidirler. Bunun üzerine araştırmacı *"bir önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için sizce tek bir örnek yeterli midir?"* sorusunu ortaya attı. Sınıfta bazı öğrencilerin bir kaç örnek deneyerek önermenin yanlış olduğunu savunma eğilimi taşıdığı gözlendi. Araştırmacı bu öğrencilere niçin çok sayıda örnek denediklerini sorduğunda B şubesinden Ömer gerekçesini şu şekilde sunar ve sınıfta bunun üzerine tartışma başlar:

> ***Ömer:*** *Öğretmenim ya doğrulayan bir örnek daha varsa? Yani iki örnek denedim diyelim birisinde doğru çıktı diğerinde yanlış o zaman ne olacak doğru mu yanlış mı? O yüzden daha çok örnek denerim ki yanlış olanların sayısı artsın.*
>
> ***İlayda:*** *Ama öğretmenim soruda her zaman demiyor mu? Ömer'in çok örnek denemesine gerek yok ki.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Niçin İlayda?*
>
> ***İlayda:*** *Soruda her zaman tek sayıdır demiş ama ben mesela 3'ü denedim, sonuç 2 oldu yani çift. Demek ki her zaman tek değilmiş. Tek bir örnek yeterli bence.*
>
> ***Araştırmacı:*** *[sınıfa] İlayda diyor ki biz bu ifadede hangi sayıyı denersek deneyelim sonucun tek olmasını istiyoruz çünkü soruda her zaman tek sayıdır denilmiş. O yüzden biz tek bir örnek denediğimizde eğer sonuç çift sayı çıkıyorsa bu örnek yeterlidir, başka deneme yapmamıza gerek olmaz. İlayda'nın bu yorumuna ne diyorsunuz?*
>
> ***Ömer:*** *Öğretmenim her zaman mı deniyor soruda?*
>
> ***Araştırmacı:*** *İfadeyi bir kez daha okuyun lütfen.*
>
> ***Emre:*** *Evet öğretmenim tek bir örnek yeterlidir bence de. Her zaman doğru olmayacağını gösteriyor o örnek çünkü. Bir kez bile yanlışsa her zaman doğru olmaz sonuçta.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki Ömer, senin dediğine dönelim. İki örnek denedin birisinde tek, diğerinde çift sayı çıktı. Bu durumda ifade sence doğru mu yanlış mı olur? Ne dersin?*
>
> ***Ömer:*** *Öğretmenim 5 için doğru mesela. O yüzden yanlış değil ki. Tamam 7’yi denediğimde çift çıkıyor ama hem doğru hem de yanlış gibi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *İkisi bir arada mı? Yani bir sayıyı denediğinde hem doğru hem de yanlış mı çıkıyor ifade?*

Ömer: *Hayır, denediğime göre değişiyor. Bazen doğru bazen yanlış çıkıyor.*

Emre: *Ömer soruyu bir daha okuyun dedi ya öğretmen, okusana.*

Araştırmacı: *Ömer, size verdiğim ifadede ne diyor?*

Ömer: *n tek sayı olsun, n artı 1 bölü 2 her zaman tek sayıdır.*

Araştırmacı: *Ama demin sen ne dedin, ifade bazen doğru bazen yanlış dedin değil mi? Soruda ise her zaman doğru diyor. Bu ikisi aynı şey mi?*

Ömer: *Yok, her zaman…sanırım anladım. Her zaman doğru değil, bazen doğru ama...*

Araştırmacı: *Evet aynen öyle, bazen doğru ama soruda bize her zaman doğru diyor. O yüzden de ifade yanlış diyoruz ve örnek vererek bunu ispatlıyoruz. Yani her zaman doğru olmadığını ispatlıyoruz.*

Benzer bir tartışma diğer şubede de yürütüldü, bu uygulamanın sonunda öğrencilerin karşı örnek vererek yapılan ispat mantığında çok zorlanmadıkları gözlendi.

8. Hafta: Bu derste öğrencilere Küchemann ve Hoyles'dan (2001-03) uyarlanan ***"5 kart oyunu"*** dağıtıldı. (Ek 1) Öğrenciler ilk olarak soru ile kendileri uğraştı, ardından buldukları yanıtlar üzerinden sınıfta bir tartışma yürütüldü. Bu tartışmada araştırmacının rolü sadece tartışmayı yönlendirmek oldu, öğrenciler birbirlerinin verdikleri yanıtları değerlendirdiler, yapılan hataları birbirlerine gösterdiler.

Her iki şubede de yere düşen kartlarda gözlemlenebilecek sayı dizesinin neler olabileceğine ilişkin, sorunun tam olarak okunmamasından kaynaklanan hatalar yapılabilmiştir. 1-2 , 3-4, 5-6, 7-8 ve 9-10 sayıları kartlara ard arda yazılmıştır, buna rağmen öğrenciler yere düşen kartlarda 2, 4, 1, 5, 7 sayılarının görünebileceğini örnek olarak vererek oyunda yer alan iddianın yanlış olduğunu savunabildiler. Her iki şubede de benzer eğilim gözlendi, öğrencilerin verdikleri bu hatalı örnekler tahtaya yazıldığında sınıf içerisinden gelen itirazlar ile oyunda verilen durumun ne olduğu, hangi sayıların aynı anda gelemeyeceği üzerine konuşulmaya başlandı.

Bunun üzerine araştırmacı önceden hazırladığı, üzerinde sayıların yazılı olduğu kartları çıkararak öğrencilerden deneme yapmalarını ister. Tahtaya kalkan her öğrenci kartonları önce yere atar, sonra oyunda verili koşulu (sayılardan ikisi çift, diğerleri tek sayı olacak) sağlamak için bazı kartların yere düşen yüzeyini değiştirerek buldukları sayıyı tahtaya yazmaya başlar. 3. öğrenciden sonra araştırmacı sınıfa *"Yaptığımız denemeler iddiayı doğrulamakta ama kartlar yere düştüğünde bu kurala uyarak yere düşen tüm sayıların toplamının 27 olacağından* *nasıl emin olabiliriz? Bu iddiayı nasıl ispatlarız?"* sorusunu yöneltir. Sınıf ispat üzerine tartışmaya başlar.

Bazı öğrenciler denedikleri örnekleri işaret ederek bu örnekleri iddianın ispatı olarak gösterdiler. Öğrenciler bu uygulamada da ampirik verileri kullanmaya, bir kaç örnek ile yetinmeye devam etmektedirler. Sınıfta tekrardan kullanılan 1 - 2 örneğin ispat için yeterli olup- olmayacağına yönelik bir tartışma yürütülmeye başlandı. A şubesinde aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır;

> ***Ege:*** *Öğretmenim iyi de 3 deneme yaptık tahtada bu üç denemede de farklı sayılar çıkmıştı, 3'ünde de sonuç 27 oldu. Yüksek bir ihtimalle 27 yani.*
>
> ***Beyza:*** *Ama hadi bir tane denedin ve onda toplamı başka çıktı, 29 mesela nasıl emin olacağız ki? Öğretmenim bende burada da önceki sorulardaki gibi, örnek vererek olmaz, kesin olmaz yani.*
>
> ***Araştırmacı:*** *[sınıfa] Peki ne yapmalı sizce? Gelebilecek tüm ihtimaller için 27 olacağını nasıl gösteririz?*
>
> ***Ege:*** *Öğretmenim başka yolu yok ki, sayıları yaptığımız gibi toplayacağız işte.*
>
> *Araştırmacı: Ama Beyza denediğimiz 2-3 örnek yeterli olmaz diyor.*
>
> ***Ege:*** *Hepsini yazıp toplayalım o zaman. Burada sonsuz sayı yok ki? Biraz uzun olur ama olur.*
>
> ***Araştırmacı:*** *[sınıfa] Ege yeni bir fikir attı ortaya, diyor ki elimizdeki ihtimaller sonsuz çoklukta değil diğer sorulardaki gibi, sınırlı sayıda ihtimal var, ispat için hepsini deneyebiliriz. Ne diyorsunuz?*
>
> ***Oğulcan:*** *Olur öğretmenim, tamamen kesin sonuç olur o zaman. Uzun sürer sanırım, denemek isteyen var mı?*
>
> *[O sırada Selin ve Sidar bir kâğıda tüm ihtimalleri yazmıştır]*
>
> ***Selin:*** *Öğretmenim biz yaptık, hepsinde de 27 çıkıyor, iddia doğru.*

Bu tartışmanın ardından Selin denedikleri 10 durumu tahtaya yazarak tüm ihtimalleri tüketir. Sınıf tahtada yazılanların dışında başka sayı ihtimallerinin gelemeyeceğine karar verdikten sonra ispat tamamlandı. Sınıf bu uygulama ile sonlu sayıdaki bir küme içerisinde yapılan ispatta tüm ihtimalleri tüketerek ispatın tamamlanabileceği fikri ile yani tüketerek ispat mantığı ile tanışmış oldu. Diğer şubede ise tüm ihtimalleri deneyerek ispatın tamamlanacağı fikri A şubesindeki gibi öğrenciler tarafından ortaya atılmadı, araştırmacının *"Peki acaba denediğiniz sayılara ek olarak, kartlar atıldığında gelebilecek tüm sayı dizilerini yazarak ispatı tamamlayabilir miyiz sizce?"* yönlendirmesi ile sınıfta ispat tamamlandı. Bu uygulama ile ders tamamlandı.

9. Hafta: Bu hafta tüketerek ispat uygulamalarına devam edildi. ***" $x \in \{-1, 0, 1\}$ ise $2^x \leq 2$ dir."*** önermesi sınıfa sunuldu. İfadenin ispatına geçilmeden önce araştırmacı sınıfa " $\leq$ " simgesinin ne anlama geldiğini sordu. "<" veya ">" işaretlerine alışık olan sınıf küçük eşittir işaretini yorumlamakta biraz zorlandı. Bunun üzerine araştırmacı bu işaretin anlamına yönelik sınıfa bir anlatımda bulunarak küçük ve büyük eşittir işaretleri ile ilgili bir kaç alıştırma yapıldı.

Ardından önermenin ispatına geçildi, her iki şubede de öğrencilerin önemli bir kısmı önermenin doğru olduğunu söyleyerek tahtaya kalkmak için parmak kaldırdılar. Bunun üzerine bir öğrenci tahtaya kalkar ve x'e 1 değerini vererek işlemi yapar, önermeyi doğrular. Hemen ardından araştırmacı öğrenciyi durdurur ve sınıfa yapılan bu tek örneğin ispat için yeterli olup olmadığını sorar. Öğrencilerin çoğu hepsini deneyelim yanıtını verir ve bunun üzerine tahtadaki öğrenci diğer iki sayıyı da deneyerek ispatı tamamlar.

Daha sonra öğrencilere ***" $x \in \{2, 3, 5, 7\}$ ise 2^x-1 her zaman asal sayıdır."*** önermesi verilir ve araştırmacı bu soruda öğrencilerin ispatı ilk önce defterlerine yapmalarını ister. Öğrenciler tahtaya kalkmak için parmak kaldırırken araştırmacı sınıfta dolaşarak parmak kaldıran öğrencilerin defterlerine bakar, öğrencilerin büyük bir kısmı sadece 2 ve 3 sayılarını deneyerek önermeyi doğruladılar. Bunun üzerine araştırmacı tahtaya kaldırmadan öğrencilere sıralarında söz vermeye başlar ve B şubesinde aşağıdaki diyalog yaşanır:

> ***Araştırmacı:*** *İbrahim sen ne diyorsun ifadeye dair?*
>
> ***İbrahim:*** *Bence doğru öğretmenim.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki bunu nasıl ispatlarız? Sen nasıl yaptın?*
>
> *İbrahim: Öğretmenim önce 2'yi denedim 3 çıktı, 3 asal sayıdır. Sonra 3'ü denedim, o zaman da 7 çıktı. 7 de asal sayı. Böylece bulmuş oldum.*
>
> ***Araştırmacı:*** *[sınıfa] İbrahim verilen kümedeki iki sayıyı denemiş. Sizce bu yaptığı yeterli mi?*
>
> ***Tuna:*** *Öğretmenim ben 5'i de denedim. O zaman da 31 çıkıyor, 31 de asal sayı. 7'yi denemedim ama o sayı büyüktü çünkü.*
>
> ***İlayda:*** *Öğretmenim hepsini denemezsek eksikli olur ama yani ispat olmaz. 2x-1'in her zaman asal sayı olduğunu söylüyor. Doğru olması için kümedeki tüm elemanların sonucunun asal sayı olması gerek. Ben 7'yi de denedim, tamam o da asal sayı çıkıyor, sonuç 127 oluyor ki o da asal sayı ama iddia doğru dememiz için hepsini denememiz lazım.*
>
> ***Araştırmacı:*** *[sınıfa] İlayda bize bir şey hatırlattı dikkat ettiniz mi? Eğer iddianın doğruluğunu ispatlamak istiyorsak tüm sayılar için doğru olduğunu göstermemiz gerekiyordu. Bu soruda sayı kümemiz sınırlanmış, tüm sayılar için değil de kümedeki sayılar için doğru olup olmadığına bakmaktayız. İlayda diyor ki ispatlamak için kümedeki tüm sayıları denemeliyiz? Ne dersiniz?*
>
> ***Tuna:*** *Deneyelim o zaman hocam, zaten İlayda'da eksik kalan sayıyı söylemişti. İspat tamamlandı.*

Öğrenciler her ne kadar tüketerek ispat yöntemi mantığına yönelik bir itiraz geliştirmemiş, az sayıda örnekle yetinme eğiliminde ısrarcı olmamışlarsa da önermenin tanımlı olduğu kümedeki eleman sayısı arttıkça bu elemanların tümünü deneme pratiğinden vazgeçmişlerdir. Ders araştırmacı tarafından bu önermenin ispatının tüketerek ispat yönteminin mantığı öğrencilere anlatılarak tahtada tekrarlanması ile tamamlandı.

10. Hafta: Öğrencilere Halıcı'dan (2005, s.49) uyarlanan ***"Güreşçiler"*** (Ek 1) oyunu dağıtıldı. Bu oyun üzerinden durum yolu ile ispat mantığı öğrencilerle paylaşılmaya çalışıldı. Bu örnek olayda aktarılan hikâye öğrencilerin gözünde rahat canlansın diye araştırmacı tahtaya birbirini dik kesen 20 dikey, 10 yatay paralel çizgi çizdi. Bu çizgilerin kesişme noktaları örnek olayda aktarılan sandalyelerdir ve güreşçiler bu kesişme noktalarına oturmaktadır. Araştırmacı öğrencilerin örnek olayı bu yerleşme planı üzerinden düşünmelerini ister.

Öğrenciler oyuna dair yorumlarda bulunur ama gerekçelerini çok temellendiremediler. Her bir sıra ve sütunu ayrı ayrı düşünmek ve bu parçalardaki değerlendirmelerini bir araya getirmekte zorlandılar. A şubesinden Sude bu oyunda aklının karıştığını belirtirken zorlandığı noktayı şu şekilde ifade eder:

> *Öğretmenim şimdi siz bu tabloyu verdiniz ya Ali'yi bir yere yerleştireyim diyorum, sonra da Mehmet'i kolonlara bakarak bir yere yerleştireyim diyorum, sonra da karşılaştıracağım ama orada karıştırıyorum her şeyi. Kolonlar sıralar kesişiyor ya, çok alakasız yerlerde de oturuyor olabilirler ya da aynı kolon ya da sırada da olabilirler. Nasıl bilicez ki? (**Sude**)*

Sude verili anlatımı okuyup kendince oturulan yere göre durumları yorumlamaya çalışırken her iki şubede de öğrencilerin büyük bir kısmı verili anlatımı parçalı düşünme noktasında zorlandılar. Şu ifadelere benzer aktarımlara her iki şubede de sıkça rastlandı; *"Öğretmenim nerde oturduklarını nasıl bilelim, orada bir sürü sandalye var. Bilemeyiz bence. O şekilde karşılaştırmak mümkün değil." (Emre, B Şubesi) , " Bence yanlış, çünkü soruda Mehmet seçilenler arsında en ağır olan diyor zaten. O yüzden Mehmet daha ağır bence." (Ömer, A Şubesi), ", "Öğretmenim birisi kolona göre kıyaslanmış, diğeri oturduğu sıraya göre bunlar bağımsız gibi, nerede oturduklarını bilmeden karşılaştırabilir miyiz?" (Berk, A Şubesi).*

Bu aktarımlardan da görüldüğü üzere, her iki şubede de öğrencilerin bu oyuna ilişkin verdikleri yanıtları incelediğimizde bir grup öğrenci verili bilgiler üzerine ayrıntılı düşünmek yerine genel bir değerlendirme yapıp (Ali ağırlar arasından seçilmiş, o zaman o daha ağırdır ya da Mehmet seçilenler arasındaki en ağır olanı imiş o zaman o daha ağırdır gibi) yanıtlarını iletmişlerdir. Bu öğrenciler her iki şubede de çoğunluktadır. Bazı öğrenciler ise Mehmet ve Ali'yi karşılaştırmak için oturdukları yerleri bilmek gerektiğini, bunu bilmenin de pek mümkün olmadığını savunmuşlardır. Yukarıda Sude'den aktarıldığı üzere bazı öğrenciler ise doğru bir mantık yürütmüşler, Ali ve Mehmet'in oturdukları yerin farklı farklı ihtimaller yani durumlar yaratabileceğini ve her birini değerlendirmek gerektiğini hissetmişler. Ne var ki bu düşüncelerini uygulamada tamamlayamamışlardır.

Sınıf içi tartışmalar bu eksende ilerlerken araştırmacı verilen örnek olayı çözme doğrultusunda sınıfı yönlendirmeye başlar. İlk olarak bazı öğrencilerin de dile getirdiği üzere Ali ve Mehmet'in oturduğu sandalyelerin birbirlerine göre konumlarına dikkat etmelerini ister. A şubesinde tahtaya "Ali ve Mehmet aynı sırada oturuyor iseler", "Ali ve Mehmet aynı kolonda oturuyor iseler" ve son olarak "Ali ve Mehmet aynı kolon ve sırada oturmuyor iseler" olmak üzere 3 ayrı durum yazar ve öğrencilere sorar;

> ***Araştırmacı:*** *Ali ve Mehmet bu tahtaya çizmiş olduğum sandalye düzeninde bir yerde oturuyor, ama biz nerede oturduklarını bilmiyoruz. Bir de tahtaya oturdukları yer için üç ayrı durum yazdım. Sizce bu üç durumun dışında başka bir ihtimal olabilir mi?*
>
> *[öğrenciler tahtaya bakarak bir müddet düşünür ve kendi aralarında konuşurlar, o sırada Berk söz alır]*
>
> ***Berk:*** *Yok, yani evet... Şimdi yine düşünüyorum ya aynı sırada olabilirler, ya aynı sütun ya da bağımsız oturacaklar. Öğretmenim bu yazdığınız üçüncü durum yani aynı kolon ya da sırada olmamaları bağımsız oturuyor gibi olurlar değil mi? Birisi bir sırada diğeri ayrı bir kolonda gibi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet aynen öyle.*
>
> ***Berk:*** *O zaman bu kadardır, başka bir ihtimal, hmm ... olamaz.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Bakın bu üç durum birbirinden ayrı, bağımsız durumlar. Bakın mesela ya aynı sırada oturuyor olabilirler, gelin iki nokta belirleyelim, birisi Ali diğeri Mehmet olsun. [o sırada aynı sıra üzerinde iki noktayı kırmızı renk kalem ile belirginleştirir] Ya da aynı kolon üzerinde [başka iki noktayı siyah kalem ile belirginleştirir]. Son olarak ne dedik birbirinden bağımsız, alakasız yerlerde oturuyor olabilirler onları da yeşil kalem ile belirginleştirelim, birisini buradan diğerini de buradan seçelim [yeşil kalemle çizilen düzende bir sağ üst köşeden bir de sol alt köşeden iki nokta belirginleştirir]. Bu çizdiğimiz noktalar birbirinden bağımsız durumlar, kırmızı ile siyah noktalar aynı ilişkiye sahip değil mesela. O yüzden de üçünü de ayrı ayrı incelememiz gerekmekte. Eğer üçünde de Ali ağır çıkar ise oyunda verilen iddia doğru demektir. Peki, kim bana tahtada yardım eder bu üç durumu incelemek için?*

Araştırmacı gerek tahtaya kalkan öğrenciye gerekse sınıfa sorular sorarak 3 durumu da tek tek incelettirdi. Her üç durumda da Ali'nin Mehmet'ten ağır olduğu sonucuna varan öğrencilere son olarak da üç durumda da aynı sonuca ulaştıkları için iddianın doğruluğunu ispatladıklarını vurguladı. Araştırmacının doğrudan yönlendirmesi ile bu oyun tamamlandı.

11. Hafta: Önceki hafta ele alınan durum yolu ile ispat yöntemine yönelik hatırlatmalarda bulunuldu. Ardından güreşçilerin oturma yerlerine göre var olan durumlar anımsatılarak, birbirinden bağımsız olan durumlar sayılar üzerinden örneklendirilmeye çalışıldı. Tamsayılar örnek olarak alındı ve tamsayıların birbirinden farklı durumlara nasıl ayrılabileceği üzerine konuşuldu.

Öğrencilerin sayıların olası durumlarını belirlemekte zorlandığı gözlenmiştir. Bunun üzerine B şubesinde araştırmacı aşağıdaki yönlendirmelerde bulunur:

> ***Araştırmacı:*** *Şimdi tamsayılar deyince aklınıza ne geliyor?*
>
> ***Yeliz:*** *1, 2, 3, 4, 5*
>
> ***Araştırmacı:*** *Başka?*
>
> ***Orhan:*** *Eksili sayılar da var öğretmenim, -1, -2, -3 gibi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Tamam şimdi bir sayı doğrusu çizelim [der ve tahtaya sayı doğrusu çizer] burası 0 noktası olsun, Yeliz'in söylediği sayılar 0'ın sağ tarafında kalmakta, Orhan'ın söylediği negatif sayılar ise sol tarafta. [0'ın sağ ve sol tarafını daire içerisine alır.] Bakın bunlar birbirinden bağımsız bölgeler değil mi, bu bölgelerdeki sayılar birbirinden farklı özellikler taşımakta. O zaman sağ taraf yani pozitif sayılar ve sol taraf negatif sayılar tamsayıların iki ayrı durumu olabilir diyebilir miyiz sizce? Durumlar ne idi, birbirinden bağımsız, ayrık ve birleşimi ana kümeyi, yani burada tamsayıları veren alt kümelerdi değil mi?*
>
> ***Orhan:*** *Öğretmenim ama 0 dışarıda kaldı, onu da katmamız gerekmez mi?*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet, o zaman şöyle diyelim mi tamsayılar pozitif, negatif sayılar ve 0 olarak üç alt kümeye ayrışabilir. Bu 3 küme tamsayılar kümesinde ele alınacak 3 ayrı durum olabilir. Bu üç ayrı durum tek tek incelenerek oturma düzeninde olduğu gibi, tamsayıların tümünü incelemiş oluruz.*
>
> ***Orhan:*** *Evet oluruz.*

Öğrenciler sayıların işaretlerine göre ayrıştırılan bu durumlara ek olarak başka özellikler üzerinden de tamsayıların farklı durumlara ayrıştırılabileceğine dair bilgilendirildi. Daha sonra yine aynı şubede tahtaya yeni bir sayı doğrusu çizen araştırmacı tek sayıları kırmızı, çift sayıları siyah kalemle belirtir ve diyalog şu şekilde devam eder;

Araştırmacı: *Şimdi de başka özellikleri üzerinden tamsayıları durumlarına ayıralım. Tahtaya çizdiğim sayı doğrusunu bir inceleyin, sayılara dair hangi özellik dikkatinizi çekiyor?*

İlayda: *Tek ve çift sayılar.*

Araştırmacı: *Peki bu özellik de sizce sayıların işaretlere göre ayrışmasında olduğu gibi birbirinden bağımsız alt kümeler oluşturur mu?*

Emre: *Siz çizmişsiniz zaten, tamsayılar için olur. O zaman tamsayıları tek ve çift sayılar olarak da inceleyebiliriz değil mi?*

Araştırmacı: *Evet aynen öyle...*

Dersin başında sayıları durumlara ayırma konusunda zorlanan öğrenciler, araştırmacının doğrudan yönlendirmesi ile bir miktar ilerleme kaydetmişlerdir. Daha sonra ise araştırmacı 2'ye ve 3'e bölünebilme durumlarına göre tamsayıları durumlarına ayrıştırma alıştırmalarına geçiş yapmıştır.

A şubesindeki öğrencilere araştırmacı şu soruyu yöneltti;

Araştırmacı: *Şimdi şu soru üzerine düşünmenizi istiyorum, her tam sayı 2'ye bölünür mü?*

Nilay: *Bölünmez. Tek sayılar var ya, onlar bölünmez.*

Araştırmacı: *Peki biz 2'ye bölünen sayıları nasıl yazıyorduk?*

Nilay: *2x, yani çift sayıları böyle yazıyorduk.*

Araştırmacı: *Doğru. [der ve tahtaya "2'ye bölünen sayılar 2x" yazar] Peki sayı 2'ye bölünmüyor ise onu nasıl gösteriyorduk?*

Gülin: *2x+1 oluyordu o da.*

Araştırmacı: *Tamam. [der ve tahtaya "2'ye bölünmeyen sayılar 2x+1" yazar] Peki şimdi tahtaya kim gelir, birlikte bölme işlemi yapacağız?*

[Araştırmacı parmak kaldıran öğrencilerden Ömer'i seçer ve tahtaya kaldırır]

Araştırmacı: *Ömer şimdi bir çift sayı almanı ve onu 2'ye bölmeni istiyorum, işlemi ilkokulda yaptığımız gibi yap bölme işleminde bölüneni, bölümü ve kalanı açık olarak yazıyorduk ya hani.*

[Ömer 18 sayısını 2'ye böler.]

Araştırmacı: *Peki Ömer bu bölme işleminde kalan sayı var mı?*

Ömer: *Kalan 0 oluyor. Yok.*

Araştırmacı: *Yaptığın bölme işlemine bakıp bölünen sayıyı bölen, bölüm ve kalan sayıları kullanarak nasıl yazıyorduk hatırlıyor musun?*

Ömer: *18'i bunların çarpımı şeklinde mi yazacağım.*

Araştırmacı: *Evet.*

[Ömer tahtaya 18 = 2. 9 yazar]

Ömer: *Artı 0 yazmama gerek yok sanırım.*

Araştırmacı: *Yok evet bu yeterli, bakın Ömer 18'i 2 çarpı 9 şeklinde yazdı. Bu benim en başta yazığım 2'ye bölünen sayılar gösterimime uygun değil mi?*

[sınıftan "evet" sesi yükselir]

Araştırmacı: *Ömer şimdi de senden tek bir sayıyı yine bu şekilde 2'ye bölmeni istesem.*

[Ömer 17 sayısını 2'ye böler]

Ömer: *Bunu da 18 gibi yazayım mı?*

Araştırmacı: *Olur.*

[Ömer tahtaya 17= 2.8 + 1 yazar]

Ömer: *Burada kalan sayı olduğu için onu da ekledim.*

Araştırmacı: *Bakın Ömer ne yazdı 2 çarpı bir sayı, yani 8 artı 1, yani bu da kalan sayı. Bizim 2'ye bölünmeyen sayılar için gösterimimiz ne idi; 2x+1. O zaman buradaki artı 1 kalan sayıyı göstermekte imiş değil mi?*

[sınıftan "evet" sesi yükselir]

Araştırmacı: *İsterseniz siz de başka tek sayıları deneyin, göreceksiniz ki kalan hep 1 olacak. Şimdi tekrar başa dönelim, ne demiştik sayılar ya 2'ye bölünür, ya da 2'ye bölünmez tek sayı olurlardı. İki durumumuz var bu sefer 2'ye bölünebilme üzerine. Birisinde [tahtadaki çift sayı gösterimini işaret etmekte] 2'ye bölündüğünde kalan 0 oluyor, diğerinde ise kalan 1 oluyor. Kalan sayı 2'den küçük olmalı bu nedenle de başka ihtimalimiz yok zaten. O yüzden tamsayılar, 2'ye bölünebilme ihtimali üzerinden 2 duruma ayrılır; birisi 2x diğeri de 2x+1 gösterimi. Burada anlaşılmayan bir şey var mı?*

Adım adım gerçekleştirilen bu aktarımın ardından, durum yolu ile ispat örneği olarak derste ele alınacak uygulamada kullanılacağı için 3'e bölünebilmesi üzerinden tamsayıların durumlarına ayrılması alıştırmasına geçildi.

Araştırmacı: *Peki arkadaşlar 2'ye bölünebilme aslında alışıkta olduğumuz bir uygulama idi, şimdi biraz daha zorlaştırsak ve 3'e bölünebilme ihtimaline göre tamsayıları durumlarına ayırsak nasıl yaparız? Aslında 2'ye bölünebilmeden pek farklı değil. Gelin bunu birlikte yapalım. İlk durumumuzda tamsayı 3'e bölünsün, nasıl gösteririz?*

[sınıftan bazı öğrenciler "3x" der, araştırmacı tahtaya "1. Durum: sayı 3'e tam bölünüyorsa 3x" yazar.]

Araştırmacı: *Peki sayı 3'e tam bölünmüyorsa kalan ne olur sizce? 3'e bölünmeyen sayılar üzerinden düşünebilirsiniz.*

Recep: *1 olabilir öğretmenim, mesela ben 7'yi denedim, 1 kaldı.*

Araştırmacı: *Tamam Recep gel tahtada 7'yi 3'e böl ve 7'yi bölüm ve kalan sayıya göre yaz, hani Ömer yapmıştı ya 2'ye bölünebilme üzerinden.*

[Recep tahtaya kalkar bölme işlemini yapar ama devam ettirmekte zorlanır, araştırmacı bunun üzerine Recep'i yönlendirmeye başlar]

Araştırmacı: *Recep 7'yi 3'e böldüğünde kalan sayı ne oldu?*

Recep: *1*

Araştırmacı: *Peki, bölüm ne oldu? Bölüm ne idi, 7'yi 3'e böldüğünde çıkan sayı idi değil mi?*

Recep: *Evet, o da 2 oldu.*

Araştırmacı: *Tamam şimdi nasıl yazıyorduk; 7 eşittir ... [bu sırada Recep araştırmacının söylediklerini tahtaya yazmaktadır], bölen sayı çarpı bölüm yani ...*

Recep: *3 çarpı 2 artı 1 olur.*

Araştırmacı: *Evet doğru, teşekkürler Recep. Şimdi 3'e bölünen sayıya 3x demiştik ya bunu da sembolik olarak, yani 1 kalanını veren sayıları da sembolik olarak göstersek nasıl gösteririz sence?*

Recep: *3 ile çarpılacak değil mi? 3x + 1 olur o zaman.*

Araştırmacı: *Doğru [der ve Recep yerine otururken tahtaya "2. Durum: sayı 3'e bölündüğünde 1 kalanını veriyorsa 3x+1" yazar.] Şimdi... Sizce bu kadar mı? Başka bir durum daha var mı?*

Berk: *Öğretmenim 2 kalanını da verebilir, o zaman da 3x+2 olur.*

Araştırmacı: *Berk hemen sembolik gösterimi ile birlikte üçüncü durumu da söyledi, onu da yazalım. Berk ne dedi, herhangi bir sayıyı 3'e böldüğümüzde 2 kalanını da verebilir, mesela 8'i 3'e bölün. 8 bu koşula uyan bir sayı. 3x+2'yi de yazalım. [tahtaya "3. Durum: sayı 3'e bölündüğünde 2 kalanını veriyorsa 3x+2" yazar] Peki başka?*

Berk: *Başka yok çünkü kalan sayı 3'den küçük olmalı, işte 0, 1, 2 olabilir onları da yazdık.*

Bir sayının 3'e bölünebilmesi ile ilgili; 3x, 3x+1 ve 3x+2 olmak üzere 3 ayrı durumun var olduğuna yönelik yürütülen bu tartışmanın ardından araştırmacı tüm derste ele alınanları kısaca özetleyerek dersi tamamladı. Yalnız bu uygulama sırasında her iki sınıfta da derse katılım oranı iyice düşmüş, az sayıdaki öğrenci ile bu tartışma yürütülmüştü.

12. Hafta: Araştırmacı dersin başında geçen hafta ele alınan gösterimlere yönelik kısa bir hatırlatmada bulundu, geçen hafta incelenen gösterimleri tahtaya yazdı. Ardından bu gösterimleri akıllarında tutarak öğrencilerden şu önermeyi ispatlamalarını ister; ***"Bir sayı tutun, daha sonra bu sayı ile ardışığını toplayın. Elinizde, tuttuğunuz sayı, ardışığı ve bu iki sayının toplamı olsun. Bu üç sayıdan birisi muhakkak 3'ün katıdır."***. Araştırmacı öğrencilerden ilk önce kendi kendilerine, defterlerine yazarak ispat ile uğraşmalarını istedi.

Bu süreçte sıralar arasında dolaşarak öğrencileri takip eden araştırmacı öğrencilerin hiç birinin sayıları 3'e bölünebilme ihtimali üzerinden durumlarına ayırmaya çalışmadığını gözlemledi. Bazı öğrenciler cebirsel ifade kullanmaya çalışmış; x, x+1 ve 2x+1 yazdıktan sonra cebirsel olarak ispata devam edememişlerdir. Bir süre sonra öğrenciler parmak kaldırarak ispata yönelik düşüncelerini söylemeye başladılar, öğrenciler önermenin doğru olduğunu savunmakta ispat olarak da denedikleri sayısal örnekleri göstermektedirler. Bunun üzerine defterinde ispata cebirsel gösterimler başlayan, buna karşın sayısal örnek vererek önermenin doğru olduğunu ifade eden Beyza'ya (A Şubesi) söz verilir;

Araştırmacı: *Beyza sen ne söylersin bu ifadeye dair?*

Beyza: *Öğretmenim doğru bence. Ben 7 aldım, bir sonraki 8 oldu. Toplamı 15. 15 3'e bölündüğü için doğru bence.*

Araştırmacı: *Peki bu denediğin sayılar bu ifadenin ispatı mı?*

Beyza: *Değil aslında, sadece denediğim örnekler için doğru oluyor aslında ama başka bir şey yapamadım.*

Araştırmacı: *Defterinde ispat yapmaya çalışırken cebirsel ifadeler kullandığını gördüm, peki niçin cebirle devam etmedin?*

Beyza: *Edemedim, x'i aldım sayı olarak, ardışığı x+1 olur, toplamları ise 2x+1 ama bunlar 3'e bölünür mü bilemedim. İspatı bu şekilde ilerletemedim.*

Araştırmacı: *[sınıfa yönelerek] Örnek vermenin ispat olmadığını önceden konuşmuştuk. Bakın Beyza bu ifadeyi cebir kullanarak ispatlamaya çalışmış ilk önce ama sonra devam edememiş, ilerleyememiş. Şimdi birlikte Beyza'nın kaldığı yerden devam etmeye çalışalım. Beyza'nın cebirsel olarak aldığı sayılara tekrar bakalım, [tahtaya x, x+1 ve 2x+1 yazar] bu sayılardan hiç biri 3'e bölünür gözükmüyor. Aslında bu ifadeleri 3 ile ilişkilendirmek zor. Beyza da o yüzden devam edemedi. Şimdi, 2 haftadır konuştuğumuz konuyu bir düşünün. Ne yapıyorduk sayıları durumlarına göre ayırmayı öğrenmiştik. Şimdi bu soruda sizce sayıyı hangi şekilde durumlarına ayırmak işimize yarar? Bir düşünelim, tek ve çift gibi mi yoksa 3'e bölünebilme durumuna göre mi ayırmalı sizce?*

Berk: *3'e bölünüp bölünemediğine göre ayırmalı soruda onu istiyor çünkü.*

Araştırmacı: *Tamam, peki 3'e bölünebilme durumuna göre sayıları kaç duruma ayırıyorduk?*

Berk: *Hmm, bir saniye, sanırım 3'tü. İlki 3'e tam bölünen sayılardı.*

Araştırmacı: *Burada şimdilik dur Berk, ispatı hadi birlikte yapalım. [sınıfa yönelerek] Şimdi Beyza ne yapmıştı cebirsel olarak sayıyı tüm tamsayıları temsil eden bir sembol olarak, x olarak almıştı. Ama bu şekilde devam edemedi. Şimdi Berk ise bu aldığımız sayıyı tek bir şekilde değil de 3 ayrı durumda inceleyelim diyor. İlk durum olarak aldığımız sayı 3'e tam bölünsün dedi. Peki, bu durumda sayıyı nasıl gösteriyorduk?*

[Sınıftan 3x sesi gelir ve araştırmacı tahtaya " 1. Durum 3x yazar]

Araştırmacı: *Peki tuttuğumuz sayı 3x ise, hadi birlikte yazalım ardışığı ne olur? 3x+1, toplamları ise 6x+1. Peki bu durumda bu 3 sayıdan birisi 3'ün katı çıktı mı?*

Selda: *Evet öğretmenim ilk aldığımız sayı 3'ün katı zaten.*

Araştırmacı: *1. durumumuz ifadeyi doğruladı buraya bir tik atalım. Şimdi ikinci durum, 2. durum ne olabilir?*

Berk: *Bu sefer kalan 1 olsun öğretmenim. 3x+1 yazarız bu sefer.*

[başarılı öğrencilerden birisi olan Berk hemen atılarak cevap verir, ama sınıfın büyük çoğunluğu bu tartışmaya aktif katılım sergilemez, bazıları sadece tahtayı izlemekte, bazıları ise tahta ile hiç ilgilenmemektedir]

Araştırmacı: *[söylenen sayıyı tahtaya yazar] ardışığı ne olur? ... [sınıftan birileri 3x+2 der] 3x+2, toplamları ise ... 6x+3. Peki buradaki üç sayıdan birisi 3'ün katı mı?*

[öğrenciler bir süre yazılan sayılara bakar, cevap veren olmaz, daha sonra Sidar söz alır]

Sidar: *Evet bu sefer de toplamları 3'ün katı öğretmenim, 6x+3 3'e tam bölünür.*

Araştırmacı: *Bu 2. duruma da tik atabiliriz o zaman. Geldik son duruma, bunu kim söyleyecek?*

Selda: *3x+2 olur tuttuğumuz sayı. 3'e bölündüğünde 2 kalanını verir yani.*

Araştırmacı: *Devamını da söyle Selda, ben de tahtaya yazayım söylediklerini.*

Selda: *Bir sonraki sayı 3x+3 olur. toplamları ise 6x+5. ııı ... Burada ise 3x+3 3'ün katı olur.*

Araştırmacı: *Bakın her 3 durumda da elimizdeki sayılardan birisi muhakkak 3'ün katı çıktı. O zaman ne diyoruz? İfade doğrudur. İspatını da bu şekilde yapmış olduk. Bakın ne yapmış olduk, cebir kullanarak ispat yapmaya çalıştık ama bir yerde tıkandık. İşte ilerleyemediğimiz o noktada x olarak ele aldığımız sayıyı durumlarına ayırdık. Soruda bize*

3'e bölünebilme ile ilgili bir şey sorulmuştu o yüzden işimizi kolaylaştırmak için ele aldığımız sayıyı 3'e böldüğünde kalan sayıya bakarak üç ayrı durumda inceledik.

İspatın anlaşılıp anlaşılmadığını sorup, anlaşılmayan yerleri tekrarladıktan sonra araştırmacı öğrencilere yeni bir önerme verdi. Yalnız sınıfın önemli bir bölümü ispatı anlamadığını belirtmese de yapılanlarla pek ilgilenir gibi gözükmemekteydiler. Araştırmacı öğrencilerden ***"n tam sayı ise n^2-n her zaman 2'ye bölünebilen bir sayıdır."*** önermesini öncelikle defterlerinde ispatlamalarını ister. O esnada şu hatırlatmada bulunur; *"Bakın bu soruda da şu an n^2-n 2'ye bölünür mü bilememekteyiz. İşte ispatı yaparken devam edemediğiniz böyle anlarda size verilen sayıyı durumlara ayırmayı düşünün. Burada n tamsayısı hangi şekilde durumlarına ayrılırsa işinize yarar, onu düşünün."*.

Öğrencilerin bir kısmı araştırmacıya danışarak n sayısını tek ve çift sayı olarak iki ayrı durumda inceleyeceklerini fark eder. Yalnız bu öğrencilerin sayısı her iki şubede de az olmuştur. Öğrencilerin önemli bir bölümü ise ispat ile ilgilenmemek veya örnek deneyerek önermenin doğru olup olmadığına kontrol etme eğilimindeydi. Bu önermenin ispatında öğrencilerin cebirsel ifadeleri kullanmaktan kaçınmalarına ek olarak, 2x+1 ifadesinin karesini almakta da zorlandıkları gözlenmiştir. Öğrenciler anlamadıkları veya zorlandıkları anlarda dersi dinlememe, başka şeylerle uğraşma eğilimi göstermektedir. Bu tüm uygulama boyunca araştırmacının zaman zaman karşılaştığı ve zorlandığı olumsuz anlar yaratmıştır. Yalnız durum yolu ile ispat uygulamasında bu durumla diğer uygulamalara göre daha sık karşılaşılmış, araştırmacı büyük oranda dersi sadece ilgili öğrencilerle devam ettirmek durumunda kalmıştır.

Böyle bir anda araştırmacı defterinde cebrisel ifadeleri kullanarak ispat yapmaya çalışan İlayda'yı (B şubesi) tahtaya kaldırır ve tüm sınıfın kendilerini dinlemesini ister. Bu önermenin ispatında n sayısını tek ve çift sayı olarak iki ayrı durumda ayrı ayrı inceleyeceklerini sınıfa belirtir ve İlayda'dan tek tek bu durumları yazarak ispatı devam ettirmesini ister. Takıldığı noktada İlayda'ya yardımcı olan araştırmacı özellikle de 2x+1 sayısının karesini alırken, bu sayıyı parantez içinde yan yana yazıp terimleri tek tek çarparak işlemleri yapmasını söyler. İspat tamamlandıktan sonra da kendisi 3x+2 teriminin karesini öğrencilere bu tür işlemleri nasıl yapmaları gerektiğini anlatarak gerçekleştirir. Ders bu şekilde tamamlanır.

13. ve 14. Hafta: Uygulamada ele alınacak ispat yöntemleri tamamlanmıştır. Bunun üzerine son iki hafta bu yöntemlere yönelik hatırlatmalarda bulunmaya ayrılmıştır. 13. haftada uygulama 2 ders saatine yayılmıştır ve doğrudan ispat ve karşı örnek vererek ispat yöntemleri ile ilgili şu örnekler ele alınmıştır;

- "Ardışık iki tek sayının toplamı her zaman 4'ün katıdır." (Doğrudan ispat)
- "a ve b rakam olsun, bu durumda ab+ba sayısı her zaman 11'in katıdır" (Doğrudan ispat – bu ispat derste ele alınırken iki basamaklı sayılar üzerinden sayıları basamak değerlerine göre ayrıştırma alıştırmaları da yapıldı)
- "Bir tek sayı, iki çift sayının çarpımına eklenirse sonuç daima çift sayı olur." (Karşı örnek vererek ispat)
- "Bir sayının karesi o sayının kendisinden daima büyüktür." (Karşı örnek vererek ispat)

Bu ispat uygulamaları sırası ile sınıfta uygulanmış ve bu sefer derste gerçekleştirilen ispatların ardından ispat yöntemlerinin adlandırmalarından da bahsedilerek yapılan ispatlar isimlendirilmiştir.

14. hafta da ise tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat örneklerine yer verilerek bu yöntemlere dair hatırlatmalarda bulunulmuştur. 14. hafta uygulama 1 ders saati sürmüştür. Yapılan ispatların ardından bu yöntemlere dair adlandırmalar da öğrencilere verilmiştir. Derste şu uygulamalar yer almıştır;

- "n $\in$ {-2, -1, 0, 1} ise $0 < 2^n \leq 2$ dir" (tüketerek ispat örneği).
- "Ardışık iki sayının toplamı 4'e bölündüğünde her zaman ya 1 ya da 3 kalanını verir" (durum yolu ile ispat örneği).
- " a, b tam sayı ve $a > |b|$ ise $a - b > 0$ ' dır" (durum yolu ile ispat örneği).

3.5. Veri Toplama Araçları

Araştırmacı tarafından veri toplama araçları olarak kullanılan başarı testi, hazır bulunuşluk testi, ispat testi 1, ispat testi 2, ispat testi 3 ve yarı yapılandırılmış görüşme formu 6 öğretim üyesi ve 2 ortaokul matematik öğretmeninden oluşan uzmanlara sunularak, onların eleştiri ve önerileri doğrultusunda son şeklini almıştır. Aşağıda veri toplama araçlarına yönelik ayrıntılar sunulmuştur.

3.5.1. Başarı Testi

Uygulamanın gerçekleştiği şubeleri daha iyi betimleyebilmek amacı ile her iki şubeye de 15 soruluk başarı testi uygulanmıştır. Uygulama 7. sınıfın ilk aylarında başlayacağı için öğrencilere 6. sınıf müfredatını içeren bir test hazırlamak uygun bulunmuştur. Bu doğrultuda 2008, 2009 ve 2010 yıllarına ait 6. sınıf SBS sorularından konu dağılımı dengesi dikkate alınarak, 15 soruluk seçme bir sınav oluşturulmuştur.

Başarı testinin oluşturulma sürecinde ilk olarak Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı, Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nden 6. sınıf seviye belirleme sınavları matematik testine yönelik analizler alınmıştır. 2008, 2009 ve 2010 yıllarında gerçekleşmiş olan 6. sınıf seviye belirleme sınavlarının matematik testi madde analizleri, özellikle madde ayırt edicilik indeksi dikkate alınarak 15 maddelik test oluşturulmuştur. Seçilen soruların yer aldıkları sınavlar içerisindeki madde ayırt edicilik indeksleri şu şekildedir;

1. soru	0,8	6. soru	0,67	11. soru	0,74
2. soru	0,38	7. soru	0,42	12. soru	0,43
3. soru	0,71	8. soru	0,28	13. soru	0,57
4. soru	0,44	9. soru	0,56	14. soru	0,65
5. soru	0,42	10. soru	0,40	15. soru	0,48

Soru seçiminde sadece 8. soru madde ayırt edicilik indeksi düşük olmasına rağmen, öğrencilerin işlem bilgisini ölçmesi amacı ile sınava dâhil edilmiştir.

Başarı testi A şubesinde 25, B şubesinde 23 olmak üzere toplam 48 öğrenciye uygulanmıştır. Testin analizi ITEMAN programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Testin uygulandığı öğrenci sayısı az olduğu için madde analizlerinde, her bir maddenin madde ayırıcılık değerlerine göre ağırlıklandırıldığı çift serili korelasyon sayısına bakılacaktır (Birnbaum, 1968).

Başarı testinde yer alan 15 sorunun biserial korelasyon katsayısı (çift serili korelasyon katsayısı) .42 ile .88 arasında değişmektedir. A şubesinin 15 soru üzerinden başarı ortalaması 11.2 iken, B şubesinde ortalama 9.47'de kalmıştır. Başarı testi sonuçları için hesaplanan Cronbach α güvenilirlik katsayısı 0,638 çıkmıştır. Yapılan madde analizi ile testin ortalama madde güçlük ve ayırt edicilik endeksleri sırasıyla 0,692 ve 0,415 olarak hesaplanmıştır. Başarı testinin sonuçlarının madde analizine dair bazı istatistiki veriler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 3.2. Başarı Testi İstatistikleri

Soru Sayısı	**15**
Uygulanan Kişi Sayısı	48
Ortalama	10,375
Standart Sapma	2,666
Cronbach Alpha	0,638
Ortalama Madde Güçlüğü	0,692
Ortalama Madde Ayırtediciliği	0,415

3.5.2. Hazır Bulunuşluk Testi

2012-2013 eğitim öğretim yılının Kasım ayında, "İspat öğretimi" uygulamasına geçilmeden önce her iki şubeye de 4 sorudan oluşan bir hazır bulunuşluk testi uygulanmıştır. Öğrenciler o sürece kadar ispat kavramıyla matematik dersi bünyesinde hiç karşılaşmamışlardır. Bu verili durum ışığında bu test ile öğrencilerin ispata yönelik ilk algılarının ve performanslarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Öğrenciler için herhangi bir matematiksel önermenin ispatını yapmak yeni ve bilinmeyen bir durum olduğu için sınav esnasında öğrencilere, onlardan istenilenin okudukları matematiksel önermenin her zaman doğru ya da yanlış olduğunu göstermeleri olduğu belirtilmiştir.

Matematiksel önermeler, öğrencilerin 6. sınıfı yeni bitirmiş olmaları da dikkate alınarak seçilmiştir. Bu seçimde, sayılarla ilgili en temel ve basit yargıların içerilmesine ve literatürde benzer yaş kuşağına uygulanan matematiksel önermelerle uyumlu olmasına dikkat edilmiştir. Sorular uzman görüşüne sunularak son şeklini almıştır.

İlk üç soruda öğrencilere matematiksel bir önerme verilmiş ve onlardan bu önermelerin doğruluğunu / yanlışlığını ispatlamaları istenmiştir. 1. ve 3. soru doğru bir önermenin ispatının yapılmasını gerektirirken, 2. soruda öğrencilere yanlış bir önerme sunulmuş ve öğrencilerden bu önermeyi karşı örnek vererek ispatlamaları beklenmiştir. 4. soruda ise öğrencilere önerme ile birlikte bu önermenin ispatı olduğu savunulan 4 seçenek sunulmuştur. Öğrencilerden verilen bu seçeneklerden hangisinin önermenin ispatı olduğunu seçmeleri ve nedenlerini açıklamaları istenmiştir. Hazır bulunuşluk testi Ek 2'de yer almaktadır.

3.5.3. İspat Testi 1

Bu soru formunda dört soru bulunmaktadır. Öğrencilerin ispat kavramını algılayış biçimlerini betimleyebilmek amacıyla düzenlenmiştir. Her bir soru farklı birer amaç üzerine kurgulanmıştır. İspat testi 1, Ek 3'te yer almaktadır.

Birinci soru ile öğrencilerin ispat yapmak ile örnek vererek doğrulamak arasındaki ayrımın farkında olup olmayışları betimlenmek istenmiştir. Bu doğrultuda öğrencilere matematiksel bir önerme (***Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır***.) ile bu önermenin ispatı olduğu savunulan üç seçenek sunulmuştur. Bu seçeneklerden hangisinin önermenin ispatı olduğu sorulmaktadır. Bu örneklerden birisinde önerme tek bir örnek ile doğrulanırken (Ayşe'nin cevabı), bir diğerinde bir, iki ve üç basamaklı sayılar kullanılarak 3 çeşit örnek ile önerme doğrulanmıştır (Belma'nın cevabı). Son cevapta ise sembolik ifadeler kullanılarak ispat yapılmıştır (Mert'in cevabı).

Ayşe'nin cevabı	**Mert'in cevabı**
Bence ***doğru***; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. 3 + 4 + 5 = 12 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Bence ***doğru***. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a, (a + 1) ve (a + 2) olur. Sonra toplayalım a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3 olur 3a + 3 = 3 (a + 1) Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Belma'nın cevabı Bence ***doğru***; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. 2 + 3 + 4 = 9 9 = 3. 3 Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. 21 + 22 + 23 = 66 66 = 3. 22 Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. Daha büyük sayılar denediğimde ise, 101 + 102 + 103 = 306 306 = 3 . 102 Üç ayrı deneme yaptım üçünde de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.	

Şekil 3.4. İspat testi 1, 1. soruda yer alan cevaplar

Örnek vererek doğrulama eğilimindeki öğrencilerin kullandığı örneklerin niceliği ve niteliği bugün literatürde farklı adlandırmalar ve düzeyler altında değerlendirilebilmektedir (Balacheff, 1988; Waring, 2000). Bu nedenle bu araştırma kapsamında, öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğilimlerindeki farklılıklar da ele alınmış, örnek vererek doğrulama eğilimini içeren iki farklı yanıt bu soruya dâhil edilmiştir.

İkinci soruda ise öğrencilere verili önermenin (***Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp, çarpıma 6 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz.***) karşı örnek verilerek çürütüldüğü bir ispatı (Ceyhun'un yanıtı), bir de sembolik ifadelerin çarpımı sırasında yaptığı işlem hatası sonucunda yanlış bir sonuca ulaşan ve bu hatalı sonuca bakarak önermeyi ispatladığını savunan bir yanıt (Canan'ın yanıtı) sunulmuştur. Cevaplardan birisi önermenin yanlış olduğunu savunurken, diğeri doğru olduğunu savunmaktadır ve bu soru ile öğrencilerin matematiksel bir önermenin aynı anda doğru ve yanlış olamayacağına dair farkındalıkları ölçülmek istenmektedir.

Ceyhun'un yanıtı;	**Canan'ın yanıtı;**
Bu ifade ***yanlıştır***, çünkü tek sayı olarak 17'yi alırsam ve verilen işlemi yaptığımda; (3 . 17) + 6 = 57 çıkar 57 sayısı 6'nın katı olan bir sayı değildir. Bu nedenle de verilen ifade yanlıştır	Bu ifade ***doğudur***; tek sayı olarak (2n + 1) sayısını alırsan verilen işlemleri yaptığımda; 3 . (2n + 1) + 6 = 6n + 6 + 6 = 6n + 12 = 6 (n + 2) Görüldüğü üzere işlemin sonunda elde ettiğim 6 (n + 2) sayısı 6'nın katıdır. Bu nedenle de ifade doğrudur.

Şekil 3.5. İspat testi , 2. soruda yer alan yanıtlar

Üçüncü soruda öğrencilere verili önermeye (***İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.***) yönelik 3 cevap sunulmuştur. Bunlardan birisi cebir kullanarak yapılan ispat (Cem'in cevabı), bir diğeri anlatım yolu ile yapılan ispat (Buse) ve son olarak da örnek vererek yapılan doğrulama (Mehmet'in cevabı) idi. Bu soruda öğrencilere verili cevapların hangisi ya da hangilerinin ispat olduğu sorulmuştur ve bir önermenin birden fazla yolla ispatlanabileceğinin ve ispat ile genellenebilir bir yargı sunma arasındaki ilişkinin farkında olup olmadıkları ölçülmeye çalışılmıştır.

Buse'nin cevabı

Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruplandırdığımızda her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruplandırırsam;

II II II I

şeklinde bir tanesi gruplandırmamın dışında kalır.
Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1'ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruplandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz.
Bu nedenle de elde etiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruplandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.

Cem'in cevabı

Bence ***doğru***; tüm tek sayılar, 2n + 1 şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun).
İki ayrı tek sayı alırsam birisi 2n + 1, diğeri ise 2m + 1 olur.
Bu iki sayıyı topladığımda
(2n + 1) + (2m + 1) = (2n + 2m) + (1 + 1)
= 2n + 2m + 2
= 2 (n + m + 1)
Şeklinde bir çift sayı elde ederim.
Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.

Mehmet'in cevabı

Bence ***doğru***; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım.
11+ 13 = 24
135 + 379 = 514
24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.

Şekil 3.6. İspat testi 1, 3. Soruda yer alan cevaplar

Dördüncü soruda da öğrencilere verili önermeye (***Her tek sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir***.) yönelik 3 cevap sunulmuştur. Bunlardan birisi cebir kullanarak yapılan ispat (Sedat'ın cevabı), bir diğeri verili önermenin tersinin cebir yolu ile ispatı (Deniz) ve son olarak da örnek vererek yapılan doğrulama (Berk'in cevabı) idi. Bu soruda öğrencilere verili cevapların hangisinin ispat olduğu sorulmuştur ve örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki ayrımın farkındalığına ek olarak, iki cebirsel ispat arasındaki ayrımı ortaya koyup koyamadıklarına bakılmıştır.

Sedat'ın cevabı

Soruda tek sayı verilmiş, bu nedenle bu sayıyı 2n + 1 olarak alabilirim.
2n + 1 sayısı 2 tane n ve 1 sayısının toplamıdır. Yani;
2n + 1 = n + n + 1 olarak yazılabilir.
Bu durumda 2n + 1 sayısı n ile (n + 1) in toplamı olarak da yazılabilir.
2n + 1 = n + n + 1 = n + (n+1)
n ve (n+1) ise ardışık iki sayıdır çünkü (n+1) sayısı n sayısından 1 fazladır.
Bu durumda 2n + 1 'i yani tek bir sayıyı iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazmış oldum.
Bu nedenle ifade ***doğrudur***.

Deniz'in cevabı

Ardışık iki sayı alalım, bu sayılar x ve (x+1) olur.
Bu iki sayıyı topladığımda;
x + (x+1) = 2x + 1 olur.
2x+1 ise tek sayıların sembolik gösterimi olduğu için verilen ifade ***doğrudur***.

Berk’in cevabı

İspatlamak için birkaç sayı denerim.
1 = 0 + 1 (0 ve 1 ardışık sayılardır)
3 = 1+ 2 (1 ve 2 ardışık sayılardır)
17 = 8 + 9 (8 ve 9 ardışık sayılardır)
3 tek sayı aldım, bu üç tek sayıyı da ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazabildim. Bu nedenle verilen ifade doğrudur.

Şekil 3.7. İspat testi 1, 4. soruda yer alan cevaplar

3.5.4. İspat Testi 2

Bu soru formunda dört grup bulunmaktadır. Her grupta iki matematiksel önerme verilmiştir. Öğrenciden istenen bu önermelerden sadece birini seçerek, altı çizili olarak belirtilen yöntemle seçtiği önermeyi ispatlamalarıdır. Bu soru grubunun uygulanmasındaki amaç, öğrencilerin öğretilen ispat yöntemlerini ne derece uyguladıklarını ölçmektir. Soru formunda yer alan önermelere ve soru formunun şablonuna 8 öğretim üyesi ve 2 ortaokul matematik öğretmeninden oluşan uzman görüşüne başvurularak (uzman görüşü formu ve birebir yapılan görüşmelerle) son şekli verilmiştir. Soru formu Ek 4'te yer almaktadır.

Birinci grupta yer alan matematiksel önermeler doğrudan ispat yöntemiyle, ikinci grupta yer alan önermeler karşı örnek vererek ispat yöntemiyle, üçüncü gruptaki önermeler tüketerek ispat yöntemiyle, dördüncü gruptaki önermeler ise durum yolu ile ispat yöntemiyle ispatlanabilir önermelerdir. Soru formunda a şıkkında, öğrenciler bu ispat yöntemlerini kullanmaları için yönlendirilmektedir. Öğrencileri bu ispat yöntemleri ile sınırlandırmamak ve ürettikleri her türlü yanıtı alabilmek amacı ile soru formunda bir b şıkkı da oluşturulmuştur. b şıkkında öğrencilerden verili ispat yöntemini kullanamamaları durumunda kendi geliştirecekleri ispat yöntemini kullanarak önermeyi ispatlamaları istenmektedir. Bu şekilde öğrencinin geliştirdiği her türlü yanıtın toplandığı varsayılmıştır.

Grup 1: Aşağıda verilen ifadelerden **birisini seçiniz.**

1. Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır.
2. ab, ba, aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun. Bu durumda ab + ba = aa + bb dir.

   a. Seçtiğiniz ifadeyi **doğrudan ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

   b. İspatı yaparken doğrudan ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

Şekil 3.8. İspat testi 2, soru örneği

3.5.5. İspat Testi 3

Bu soru formunda 8 adet matematiksel önermeye yer verilmiştir. Öğrencilerden bu önermelerden sadece dört tanesini seçerek ispatlamaları istenmiştir. Her matematiksel önermenin yanında bu önermenin ispatında kullanılabilecek bir ispat yöntemi parantez içinde verilmiştir. İspat testi 3'ün uygulanmasındaki amaç öğrencilerin ispat performanslarını betimleyebilmekle birlikte, onların tercih hakları olduklarında hangi ispat yöntemlerini tercih ettiklerini de belirlemektedir. Soru formunda yer alan önermelere ve soru formunun şablonuna da son şekli 8 öğretim üyesi ve 2 ortaokul matematik öğretmeninden oluşan uzman görüşüne başvurularak (uzman görüşü formu ve birebir yapılan görüşmelerle) verilmiştir. Soru formu Ek 5'te yer almaktadır.

3.5.6. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu

Gerçekleştirilen derinlemesine görüşme, öğrencilerin son testlerde verdikleri yanıtları ayrıntılandırmak, ne düşündüklerini betimleyebilmek, ispat ve ispat yöntemlerine yönelik düşüncelerini almak ve sınavlarda ispatlayamadıkları bazı önermeleri, görüşmecinin desteği ile yapıp yapamayacaklarını ortaya koyabilmek amacı ile kurgulanmıştır. Görüşme formu son testlere verilen yanıtların analizinin ardından, öğrencilerin verdikleri yanıt çeşitliliğini kapsayabilecek şekilde araştırmacı ve doktora tez danışmanı tarafından geliştirilmiştir. Formda, tek tek tüm ispat testlerinde yer alan sorular üzerinden kurgulanan görüşme sorularına ek olarak, ispata ve gerçekleştirilen uygulamaya yönelik genel sorular da bulunmaktadır. Yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme formu Ek 6'da yer almaktadır.

3.6. Veri Analizi

Nitel araştırmalarda veri analizi araştırmanın başından sonuna kadar tüm sürecini kapsayan ve bu sürecin veri toplama gibi diğer basamaklarından ayrıştırılamayacak bir işlem basamağıdır (Creswell, 2005). Bir nevi veri oluşturma süreci ile birlikte örülen bir süreçtir (Kümbetoğlu, 2005). Nitel araştırmalarda aslolarak betimsel ve içerik analizi olmak üzere iki veri analiz süreci bulunmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada betimsel analiz kullanılmıştır. Betimsel analizde elde edilen veriler özgün biçimlerine sadık kalınarak düzenlenip, doğrudan alıntılar yapılarak sunulur. Daha önceden araştırma problemine uygun olarak belirlenen temalar şeklinde gruplandırılan veriler özetlenerek yorumlanır. Bulgular arasında neden- sonuç ilişkisi kurulurken, olgular arasında karşılaştırmalar veya benzetmeler de yapılır. Tanımlayıcı bir analiz yapılmaktadır (Kümbetoğlu, 2005).

Kullanılan ölçme araçlarıyla elde edilen veriler nitel yöntemlere ek olarak nicel yöntemler kullanılarak da analiz edilmiştir. Örneğin başarı testinin analizinde ITEMAN programı kullanılmış, uygulama sonrası gerçekleştirilen ispat testlerinde öğrencilerin yanıtları kodlanarak, bu kodların yüzde ve frekans dağılımına bakılmıştır.

Hazır bulunuşluk testi ve ispat testlerin analizinde her bir soru öğrencilerin verdikleri yanıtlar ve kullanılan ispat yönteminin özellikleri dikkate alınarak ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu nedenle birden fazla kod sistemi geliştirilerek kullanılmış ve bu kodlar oluşturulurken literatürde yer alan örneklerden yola çıkılmıştır. Waring (2000), Knuth vd. (2012) ve Küchemann vd. (2012) gerçekleştirdikleri çalışmalarında öğrencilerin ispat performansını öğrencilerin verdikleri yanıtlar üzerinden çeşitli düzeylere ayırmışlardır. Miyazaki (2000) ise öğrencilerin tümevarımsal veya tümdengelimsel muhakeme sitilleri ile ispatı gerçekleştirirken kullandıkları dil ve stratejilerini içeren bir düzey sistematiği geliştirmiştir.

Bu çalışmada ise öğrencilerin verdikleri yanıtlar ile önermenin ispatında kullanılan ispat yöntemi doğrultusunda bir kodlama sistemi geliştirilmiş, kodların kapsam gerçerliğinin sağlanması için uzman görüşüne başvurulmuştur. Öğrenci yanıtlarının kodlanmasının güvenirliği açısından ise, araştırmacıya bir ortaokul matematik öğretmeni, bir tane de ispat üzerine çalışmaları bulunan öğretim elemanı yardımcı olmuş, tüm kâğıtların % 20’si bu kişilerce ayrı ayrı okunarak değerlendirilmiştir. Farklılaşılan noktalar üzerine yürütülen tartışmanın ardından kodlama sistemi ve değerlendirme kriterleri son şeklini almış ve tüm testlerin değerlendirmesi tamamlanmıştır.

Verilerin aktarımında ise yüzde ve frekans değerleri hesaplanmış, yüzde ve frekans dağılımı tablolaştırılarak sunulmuştur.

Bu çalışmada gerek hazır bulunuşluk testinde, gerekse uygulama sonrası gerçekleştirilen sınavlarda iki çeşit soru formatı yer almaktadır. İlkinde öğrencilerden ispat yapmaları istenmemiş, verili yanıtlardan hangisi / hangilerinin ispat olduğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Diğer formatta yer alan sorularda ise öğrencilerden ispat yapmaları istenmektedir. Bu iki grupta yer alan sorular farklı tür kod sistematikleri geliştirilerek incelenmiştir.

Araştırmada kullanılan kod sistematiği şu şekildedir:

3.6.1. Verili İspatı Değerlendirme Sorularına İlişkin Kodlar

Bu grupta öğrencilere verili bir önerme ile bu önermenin ispatı olduğu savunulan seçenekler sunulmuş, öğrencilerden bu seçeneklerden birisini önermenin ispatı olarak seçmeleri istenmiştir. İspat testi 1’de yer alan sorular ile hazır bulunuşluk testinde yer alan 4. soru bu soru grubuna girmektedir. Bu sorular öğrencilerin verili yanıtlardaki seçimlerine göre kodlanmıştır. Kodları soruda verilen yanıtlar oluşturmaktadır.

Örneğin, İspat testi 1’de, 1. soruda öğrencilere matematiksel bir önerme ile bu önermenin olası üç ispatı (Ayşe, Belma ve Mert’in yanıtları) sunulmuş ve öğrencilerin yanıtları seçtikleri yanıta bakarak; "tek bir örnek ile doğrulama", “çok sayıda örnek ile doğrulama” ve "cebirsel gösterim ile ispat" olarak üç ayrı tanımlama ile kodlanmıştır.

1. Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;

"***Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır***." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı	**Mert'in cevabı**
Bence ***doğru***; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. 3 + 4 + 5 = 12 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	Bence ***doğru***. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a, (a + 1) ve (a + 2) olur. Sonra toplayalım a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3 olur 3a + 3 = 3 (a + 1) Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.

Belma'nın cevabı
Bence ***doğru***; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. 2 + 3 + 4 = 9 9 = 3. 3 Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. 21 + 22 + 23 = 66 66 = 3. 22 Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. Daha büyük sayılar denediğimde ise, 101 + 102 + 103 = 306 306 = 3 . 102 Üç ayrı deneme yaptım üçünde de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Sizce verilen cevaplardan hangisi bu ifadenin ispatıdır? Neden?

Şekil 3.9. İspat Testi 1, 1. soru

Yanıtlardan da görüldüğü üzere Ayşe'nin önermeyi tek bir örnek ile doğruladığı yanıtı seçenler Kod 1 (Tek bir örnek ile doğrulama), Belma'nın bir, iki ve üç basamaklı olmak üzere 3 farklı örnek ile önermeyi doğruladığı yanıtını seçenler Kod 2 (Çok sayıda örnek ile doğrulama), Mert'in cebirsel ifadeler kullanarak gerçekleştirdiği ispatı seçenler Kod 3 (Cebirsel gösterim ile ispat) olarak kodlanmıştır. Bulgular kısmında yer alan tablolarda bu kodlar içerikleri ile birlikte yer almaktadır.

Diğer sorularda da bu soruya benzer bir şekilde, öğrencilerin seçtikleri yanıtları içeren bir kodlama sistematiği kullanılmıştır.

3.6.2. İspat Performansına İlişkin Kodlar

İspat testi 2 ve 3 ile hazır bulunuşluk testinin ilk 3 sorusu öğrencilerin ispata yönelik performanslarını belirlemek amacıyla düzenlenmiştir ve bu sorularda öğrencilerden ispat yapmaları istenmiştir. Öğrencilerin bu sorulara verdiği yanıtlar her bir soruda işaret edilen ispat yönteminin özellikleri ve öğrencinin verdiği yanıtın içeriği dikkate alınarak kodlanmıştır. Bu soru grubunda kullanılan kodlamalar ispat yöntemlerine göre ayrışmaktadır ve bu nedenle 4 başlık altında incelenebilir;

3.6.2.1. Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Kodlama

Bu soru türünde öğrencilerin verdikleri yanıtlarda aşağıdaki eğilimler gözlenmektedir:

- Soru boş bırakılmış ve ya soru ile alakasız işlemler yapılmış.
- Soru sadece “doğru” diyerek geçiştirilmiş, bir açıklama sunulmamış.
- Soru örnek vererek doğrulanmış.
- Verilen yanıtta bir genellemeye ulaşmak amaçlanmış ama işlem hatası gibi çeşitli hatalar nedeni ile ispat tamamlanamamış.
- Doğrudan ispat yapılmış.

Öğrencilerin verdikleri bu yanıtlar da dikkate alınarak aşağıdaki kod sistemi geliştirilerek kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.

Kod 3: İspat fikri var ama çeşitli hatalar nedeniyle ispat tamamlanamamış.

Kod 4: Doğrudan ispat yapılmış.

3.6.2.2. Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine Sorulara İlişkin Kodlama

Bu ispat türünde öğrencilerin verdikleri yanıtlar ise aşağıdaki eğilimleri taşımakta idi:

- Öğrenciler soruyu boş bırakmış.
- İfadenin doğru olduğunu örnek vererek savunmuşlar.
- İfadeyi yanlış olduğunu gösteren bir örnek kullanarak önermenin yanlış olduğunu savunmuşlar.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar dikkate alınarak bu ispat türü için aşağıdaki kod sistemi geliştirilerek kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfadenin doğru olduğu düşünülerek çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: Karşı örnek vererek ispat yapılmış.

Yalnız hazır bulunuşluk testinin ikinci sorusunda öğrencilerin hiç biri örnek yardımı ile önermenin doğruluğunu savunmamıştır. Bu nedenle bu soruda, var olan bu kod sisteminden Kod 2 çıkarılarak, kodlama 2'li kod sistemine dönüştürülerek kullanılmıştır;

Kod1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade karşı örnek vererek ispatlanmış.

3.6.2.3. Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Kodlama

Bu ispat türünde öğrencilerin verdikleri yanıtlar aşağıdaki eğilimleri taşımaktadır:

- Öğrenciler soruyu boş bırakmış.
- Soruyu sadece "doğru" diyerek geçiştirmişler, gerekçe sunmamışlar.
- Bir ya da iki sayı deneyerek önermeyi doğrulamışlar.

- Tüketilecek kümenin tüm elemanlarını denemiş, yalnız yaptığı işlem hatası nedeniyle denemelerinin birisi önermeyi yanlışlamakta.
- Tüketilecek kümenin tüm elemanlarını denemiş, yalnız önermeyi kağıda yanlış aktardığı için başka bir önermenin ispatını tamamlamış.
- Tüketerek ispatı eksiksiz yapmış.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar dikkate alınarak bu ispat türü için aşağıdaki kod sistemi geliştirilerek kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: Sadece birkaç sayı denenmiş, kümedeki tüm elemanlar denenerek tüketilmeyerek örnekle doğrulama yapılmış.

Kod 3: Tüketerek ispat yöntemi uygulanmış ama önermenin hatalı geçirilmesi veya işlem hatası gibi nedenlerle yanlış sonuca ulaşılmış, başka bir önerme ispatlanmış.

Kod 4: Tüketerek ispat yapılmış.

3.6.2.4. Durum Yolu İle İspat Yöntemine İlişkin Kodlama

Bu soru türünde öğrencilerin verdikleri yanıtlarda aşağıdaki eğilimler gözlenmektedir:

- Soru boş bırakılmış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.
- Soruyu sadece “doğru” diyerek geçiştirmişler, gerekçe sunmamışlar.
- Yapılan işlem hataları veya bölüm ile kalan kavramlarını karıştırmaları nedeniyle önermenin yanlış olduğu savunulmuş.
- Örnek vererek önerme doğrulanmış.
- Durum yolu ile ispat yapılmış.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar dikkate alınarak bu ispat türü için aşağıdaki kod sistemi geliştirilerek kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade'nin yanlış olduğu çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: İfade örnek vererek doğrulanmış.

Kod 4: Durum yolu ile ispat yapılmış.

3.7. Geçerlik – Güvenirlik

Geçerlik ve güvenirlik nitel veya nicel tüm ölçümlerde etkin olan bir meseledir ama farklı bağlamlarda ele alınır. Nitel araştırmalarda araştırma sonuçlarının tekrar edilebilirliği olarak ele alınabilecek olan güvenirlikten ziyade araştırma sonuçlarının doğruluğunun yani geçerliğinin önem kazandığı görülmektedir (Topkaya, 2006).

Bu araştırma kapsamında geçerlik ve güvenirliğin sağlanması açısından araştırmacı tarafından alınan önlemler şu şekildedir;

- Tüm uygulama süreci video kaydına alınmıştır.
- Araştırma sürecinde farklı veri toplama araçları yardımı ile farklı türde veriler (nitel & nicel) toplanarak veri çeşitlemesi yapılmıştır.
- İspat sınavlarının hazırlanmasında 8 kişiden oluşan uzman görüşüne başvurulmuş, uygulama sürecinin ve görüşme sorularının hazırlanmasında ise birisi tez danışmanı olmak üzere 2 alan uzmanı öğretim üyesinin görüşü alınmıştır.
- Veri analizinde kullanılan kodlamalar yine birisi tez danışmanı olmak üzere 2 alan uzmanı öğretim üyesinin katılımı ile birlikte geliştirilmiş, verilerin kodlanmasında ise araştırmacı üçgenlemesi ("Investigator Triangulation" - Guion (2002)) yöntemi kullanılmıştır. Tüm sınav kağıtlarının %20'si birisi araştırmacı, diğerleri ortaokul matematik öğretmeni ve ispat alanında çalışması bulunan bir akademisyen tarafından ayrı ayrı okunmuş, yanıtlara verdikleri kodlar birbirleri ile karşılaştırılmış ve verilen farklı kodlar üzerinde tartışma yürütülerek bu kodlarda ortaklaşılmıştır.
- Bulguların raporlaştırılmasında veriler açık, net ve ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır.

- Verilerin yorumlanmasında kaynaklardan doğrudan alıntılar yapılmıştır.
- Farklı veri toplama araçlarından elde edilen veriler arasındaki tutarlılık, benzerlik kontrol edilmiştir.
- Farklı veri toplama araçlarından elde edilen sonuçlar birbirleriyle ve ilgili literatürle ilişkilendirilerek raporlaştırılmıştır.

4. BULGULAR VE YORUM

7. sınıf öğrencilerinin formel ispata yakın bir bağlamda, ispat kavramını ne oranda kavrayabileceği ile onların ispata yönelik performanslarının betimlendiği bu çalışmada, ispat testleri ve görüşme sonucu elde edilen veriler birlikte ele alınmıştır. Bulgular ispat öğretimi uygulaması öncesi ve sonrası olarak iki ana başlık altında sunulmuştur. Uygulama öncesine ilişkin bulgular hazır bulunuşluk testi ile, sonrasına ilişkin bulgular ise ispat testleri ve görüşme ile elde edilen veriler ışığında değerlendirilip yorumlanmıştır.

4.1. Uygulama Öncesinde İspat Algısı ve Becerisine İlişkin Bulgular

Hazır bulunuşluk testinde ilk üç soru öğrencilerin ispata yönelik becerilerini, dördüncü soru ise ispata yönelik algılarını betimlemek amacı ile kurgulanmıştır. Hazır bulunuşluk testinin 1 ve 3. sorularında öğrencilerden verilen önermelerin doğruluğunun ispatlanması, 2. soruda ise önermenin yanlışlığını göstermeleri beklenmektedir. 4. soruda ise öğrencilere matematiksel bir önerme; ***"Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır."*** ve bu önermenin ispatı olarak değerlendirilebilecek 4 seçenek verilmiştir. Öğrencilere verili bu seçeneklerden hangisinin önermenin ispatı olduğu sorulmuştur. A şubesinde 28, B şubesinde 23 öğrenci bu teste dâhil olmuştur.

Öğrencilerin büyük kısmı örnek vererek önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını sınama eğilimindeyken sadece A şubesinden 1 öğrenci cebirsel gösterimleri kullanmaya çalışmış, yine aynı şubeden başka bir öğrenci de sözel anlatım yolu ile önermenin doğruluğunu genelleştirmeye çalışan bir anlatımda bulunmuştur. Ne var ki bu öğrencilerin genellemeye ulaşma çabaları eksikli kalmış, verdikleri yanıtlar ispat olarak değerlendirilmemiştir. Buna karşın hazır bulunuşluk testinin 2. sorusunda öğrencilerin önemli bir kısmı verilen önermeyi karşı örnek vererek çürütmüşlerdir. Bu testte yer alan soruları ayrıntılı incelemek gerekirse;

Hazır bulunuşluk testinin 1. ve 3. sorularının analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır;

Kod1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.

Kod 3: Genel bir yargıya ulaşılmaya çalışılmış ama eksik kalmış.

Kod 4: İspat yapılmış.

Tablo 4.3. Hazır bulunuşluk testi 1. soruya ilişkin bulgular; "Bir tek ve bir çift sayının toplamı tek sayıdır."

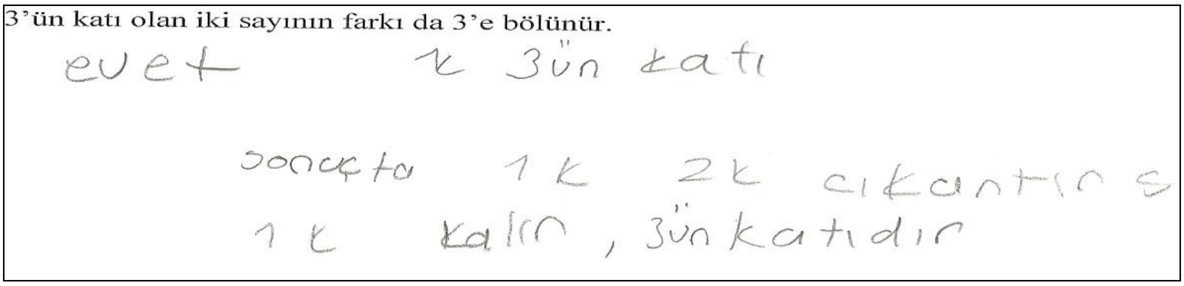
Çözüme ilişkin kodlar		*A Şubesi (n = 28)*		*B Şubesi (n = 23)*		*Toplam (n=51)*	
		f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1		10	35,7	9	39,1	19	37,3
Kod 2	Tek bir örnek	7	25	5	21,7	12	23,5
	Çok örnek	11	39,3	9	39,1	20	39,2
Kod 3		-	-	-	-	-	-
Kod 4		-	-	-	-	-	-

Her iki şubede de öğrencilerin büyük bir kısmı, % 62,7’si soruyu örnek vererek doğrulama eğilimindedir, tüm öğrencilerin % 37,3'ü ise soru ile ilgilenmek istememiş, ya yanıt vermemişler ya da verdikleri yanıtlarlar soru ile ilişkili olmamıştır. Bu soruda Kod 2’de yer alan öğrenciler yoğunluklu olarak birden çok sayıda örnek kullanarak önermeyi doğrulamışlardır. Bu soruda ispat yapan veya herhangi bir şekilde genellenebilir bir yargı sunmaya çalışan öğrenci olmamıştır.

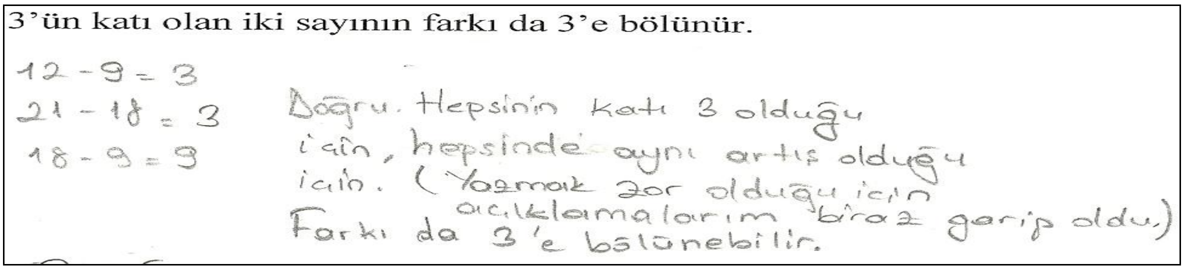
Tablo 4.4. Hazır bulunuşluk testi 3. soruya ilişkin bulgular; "Üçün katı olan iki sayının farkı üçe bölünür."

Çözüme ilişkin kodlar		*A Şubesi (n = 28)*		*B Şubesi (n = 23)*		*Toplam (n=51)*	
		f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1		15	53,6	15	65,2	30	58,8
Kod 2	Tek bir örnek	3	10,7	5	21,7	8	15,7
	Çok örnek	8	28,6	3	13	11	21,6
Kod 3		2	7,1	-	-	2	4
Kod 4		-	-	-	-	-	-

Bu soruda ilk soruya göre örnek vererek doğrulama eğiliminde bir düşüş, verilen yanıtı gerekçelendirmeme (sadece doğru veya yanlış diye belirtme) ya da soruyu boş bırakma eğiliminde bir artış yaşanmıştır. Buna karşın iki öğrenci, birisi cebirsel ifadeleri kullanmaya çalışarak, diğeri de sözel anlatım yolu ile bir genellemeye ulaşmaya çalışmış ama eksikli bir açıklama getirmişlerdir. Berk , 3'ün katı olan sayıları sembolik olarak göstermeye çalışırken, Gülin 3'ün katı olan iki sayı arasında yine 3'ün katı oranında bir artış olacağını sözel olarak anlatmaya çalışmıştır. Bu çabalarına karşın ispatı tamamlayamamışlardır.


3'ün katı olan iki sayının farkı da 3'e bölünür.
evet k 3ün katı
sonuçta 1k 2k cıkartırsak
1k kalır, 3ün katıdır

Şekil 4.10: A Şubesinden Berk - Kod 3


3'ün katı olan iki sayının farkı da 3'e bölünür.
12 - 9 = 3
21 - 18 = 3
18 - 9 = 9
Doğru. Hepsinin katı 3 olduğu için, hepsinde aynı artış olduğu için. (Yazmak zor olduğu için açıklamalarım biraz garip oldu.)
Farkı da 3'e bölünebilir.

Şekil 4.11: A Şubesinden Gülin - Kod 3

Hazır bulunuşluk testinin 2. sorusunda ise öğrencilere yanlış bir önerme verilmiş ve onlardan bu önermeyi ispatlamaları istenmiştir. Bu soru ile elde edilen verilerin analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır;

Kod1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

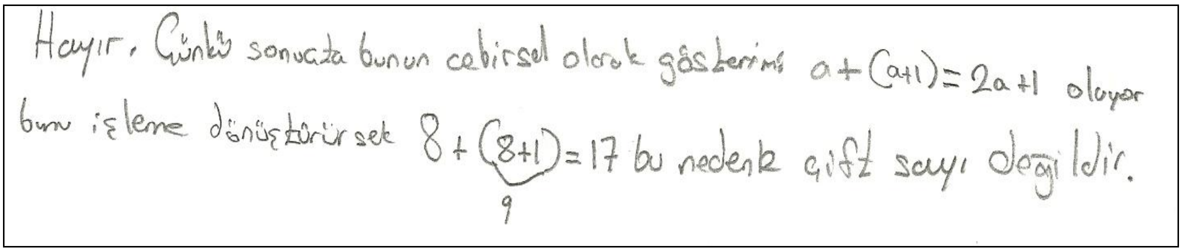
Kod 2: İfade karşı örnek vererek ispatlanmış.

Tablo 4.5. Hazır bulunuşluk testi 2. soruya ilişkin bulgular; " Ardışık iki sayının toplamı çift sayıdır."

Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 28)*		*B Şubesi (n = 23)*		*Toplam (n=51)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	10	35,7	14	60,9	24	47
Kod 2	18	64,3	9	39,1	27	53

Bu soruda tüm öğrencilerin % 53'ü önermeyi karşı bir örnek vererek çürütmüştür. B şubesindeki öğrencilerin önemli bir kısmı soru ile ilgilenmezken önermeyi ispatlayanların oranı % 39,1'de kalmıştır. Bu oran A şubesinde ise % 64,3'e çıkmıştır.

A şubesinden Nilay diğer sorularda cebrisel gösterimleri kullanmadığı halde, bu soruda karşı örnek vermeden önce önermeyi cebirsel olarak da göstermiştir.



Şekil 4.12: A Şubesinden Nilay - Kod 2

Hazır bulunuşluk testinde yer alan bu ilk 3 soru, öğrencilerin ispata yönelik hiç bir ön bilgilerinin olmadığı durumdaki eğilimlerini ortaya koymaktadır. Öğrenciler bu aşamada cebirsel ifadeleri kullanamamakta, önermeleri örnek vererek doğrulama veya boş bırakma / gerekçelendirmeme eğilimindedirler. Yanlış olan bir önerme kendilerine sunulduğunda ise öğrencilerin çoğu (% 53'ü) karşı örnek vererek önermeyi çürütebilmişlerdir. A şubesinin %64,3'ü, B şubesinin ise %39,1'i önermenin yanlışlığını ispatlayabilmiştir.

Hazır bulunuşluk testinde ter alan son soruda ise öğrencilere matematiksel bir önerme ***(Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.)*** ve dört seçenek verilmiştir. Öğrencilere bu seçeneklerden hangisinin önermenin ispatı olduğu sorulmuştur.

Verilen ilk seçenekte Ayşe önermeyi tek bir örnek deneyerek doğrulamış ve doğrulamanın ispat olduğunu savunmuştur. İkinci seçenekte ise Belma iki ayrı sayı grubu denemiş ve bu yolla önermeyi doğrulamış, bunun ispat olduğunu savunmuştur. Berk'in bulunduğu seçenekte ise cebirsel ifadeler kullanılmıştır ve önerme bu yolla ispatlanmıştır. Son seçenek olan Zeki'nin yanıtında ise Zeki işlem hatası yaparak yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Bu yanlış sonucu dikkate alarak da önermenin yanlış olduğunu savunmuştur. Öğrencilerin verdiği yanıtlar ispat olarak kabul ettikleri "örnekle doğrulama" , "cebirsel gösterim" ve "karşı örnek verme" yanıtları baz alınarak kodlanmıştır. Örnekle doğrulama ise kendi içerisinde "tekil örnek" ve "çok sayıda örnek" olarak ayrışarak iki alt grup oluşturmaktadır. Ayşe'nin yanıtını ispat olarak seçen öğrenciler Kod 1: "örnekle doğrulama - tek bir örnek" , Belma'nın yanıtını ispat olarak seçen öğrenciler Kod 2: "örnekle doğrulama - çok sayıda örnek", Mert'in yanıtını seçenler Kod 3: "cebirsel gösterim ile ispat", Zeki'nin yanıtını seçenler ise Kod 4: "karşı örnek verme" kodu altında değerlendirilmiştir.

Bu soruda ile ilgili elde edilen verilerin şubelere göre dağılımı şu şekildedir;

Tablo 4.6. Hazır bulunuşluk testi 4. soruya ilişkin bulgular

Cevaplara dair kodlar	*A Şubesi (n=28)*		*B Şubesi (n=23)*		*Toplam (n=51)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	7	25	10	43,4	17	33,3
Kod 2	12	42,8	6	26	18	35,3
Kod 3	3	10,7	3	13	6	11,8
Kod 4	6	21,4	4	17,3	10	19,6

Uygulamanın en başında her iki şubede de öğrencilerin önemli bir bölümü (A şubesi % 67,8 , B şubesi % 69,4) örnekle doğrulamanın ispat olduğu düşüncesindedir (kod 1 + Kod 2). A şubesinde çok sayıda örnek vermenin ispat olduğunu savunan öğrenci sayısı daha çok iken B şubesinde tek bir örnek vererek doğrulama ile yetinen öğrenci sayısı daha çoktur. Her iki şubede de sadece 3’er öğrenci doğru olan yanıtı yani cebirsel gösterimi ispat olarak belirtmiştir.

Tüm öğrencileri dikkate aldığımızda öğrencilerin %68,6'sı örnekle doğrulamayı ispat olarak kabul ederken, sadece %11,8'i cebirsel gösterimi ispat olarak değerlendirmişlerdir.

Bir bütün olarak hazır bulunuşluk testinde öğrencilerin verdikleri yanıtlar dikkate alındığında, öğrencilerden doğru bir matematiksel önermeyi ispatlamaları istendiğinde öğrenciler ya verilen soruyu yanıtlarını gerekçelendirmeden doğru ya da yanlış diyerek geçiştirmiş, soruyu boş bırakmış ya da örnek vererek önermeyi doğrulama eğiliminde olmuşlardır. Doğru bir önermenin ispatını yapamamışlardır. 4. soruda da öğrenciler örnek vererek doğrulamayı ispat olarak seçme eğilimini sürdürmüşleridir. Yanlış bir önermenin kendilerine sunulduğu durumda ise öğrenciler karşı örnek vererek önermenin yanlışlığını ispatlamışlardır. Tüm öğrencilerde bu oran yüzde 53'tür.

4.2. Uygulama Sonrasında İspat Algısı ve Becerisine İlişkin Bulgular

4.2.1. Öğrencilerin İspat Kavramını Algılayışlarına İlişkin Bulgular

İspat Testi 1’de yer alan sorular öğrencilerin ispat kavramını, ispat ile doğrulama arasındaki farka yönelik farkındalıklarını betimleyebilmek amacı ile kurgulanmıştır. Elde edilen veriler soru formunda yer alan sorular bazında analiz edilmiştir. Bu bölümde öncelikle bu sorular ile amaçlanan anlatılmaya çalışılacak, ardından da soru bazında elde edilen verilere geçilecektir. Her bir soru görüşme sırasında elde edilen verilerle de desteklenerek aktarılacaktır.

İspat testi 1’de bulunan dört soru öğrencilerin verdikleri cevaplar dikkate alınarak kodlanmıştır ve öğrencilerin verdikleri yanıtların yüzde ve frekans dağılımı tablolaştırılmıştır.

4.2.1.1. İspat mı Doğrulama mı?

İspat testi 1'de yer alan ilk soru öğrencilerin ispat ile örnek vererek doğrulama arasındaki ayrımın ne oranda farkında olduklarını betimleyebilmek amacıyla kurgulanmıştır. Öğrencilerin verdiği yanıtlar ispat olarak seçtikleri yanıtlar baz alınarak kodlanmıştır. Yanıtlar Kod 1: "tek bir örnek ile doğrulama" - Ayşe'nin yanıtı, Kod 2: “çok sayıda örnek ile doğrulama” - Belma'nın yanıtı ve Kod 3: "cebirsel gösterim ile ispat" - Mert'in yanıtı olmak üzere üç ayrı kod altında incelenmiştir. Bu soruya ilişkin elde edilen bulgular şu şekildedir:

Tablo 4.7. İspat testi 1, 1. soruya ilişkin bulgular

Cevaplara dair kodlar	*A Şubesi (n=30)*		*B Şubesi (n=24)*		*Toplam (n = 54)*	
	F	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	3	10	6	25	9	16,7
Kod 2	14	46,6	12	50	26	48,1
Kod 3	12	40	5	20,8	17	31,5

A ve B şubelerinden birer öğrenci tek bir örnek verilen yanıt ile çok sayıda örnek vererek gerçekleştirilen doğrulama arasında tercihte bulunmamış, her ikisini de ispat olarak kabul etmişlerdir.

Öğrencilerin önemli bir bölümü, % 68,5'i (B şubesinde % 79,2, A şubesinde % 60) örnek vererek doğrulamayı (Kod 1 + Kod 2) ispat olarak kabul etmişlerdir. Hazır bulunuşluk testinden farklı olarak her iki şubede de tek bir örnek vermeyi değil de, birden çok sayıda örnek vererek önermeyi doğrulamayı ispat kabul edenlerin oranı bu sınavda daha yüksek çıkmıştır. Öğrencilerin seçtikleri yanıta sınavda getirdikleri açıklamalar incelendiğinde, tek bir örnek ile doğrulamayı ispat olarak kabul eden 9 öğrenciden 7'si gerekçesini belirtmiştir. Bu öğrencilerin 4'ü Ayşe'nin verdiği yanıtı "anlaşılır" veya "mantıklı" bulduklarını belirtirken, 3 öğrenci bu yanıtı "kolay" olduğu için ispat olarak seçtiklerini belirtmişlerdir; *"Bence Ayşe'nin ifadesi doğrudur çünkü tek rakamlı sayıları kullanarak kolayca ispatlamıştır.”* (Ayşe - B şubesi)

Çok sayıda örnek deneyerek gerçekleştirilen doğrulamayı ispat kabul eden öğrenciler önermenin ispatına daha şüpheci yaklaşmış, tek bir örnek ile yetinmemişlerdir. Denenen örnek sayısı arttıkça ispatın "inandırıcılığının arttığını", "doğruluğun güçlendirildiğini" savunmuşlardır. Belma'nın verdiği yanıtı ispat olarak kabul eden 26 öğrencinin 21'i gerekçesini belirtmiş, bu öğrencilerin 4'ü Belma'nın yanıtını "anlaşılır" bulurken, 17'si bu yanıtı "daha kesin" veya "daha doğru" olarak değerlendirmişlerdir.

> *“Bence Belma'nın cevabı doğrudur. Çünkü birden fazla deneme yapmıştır. Ayrıca hem tek, hem çift hem de üç basamaklı örnekler vererek ispatını güçlendirmiştir.”* (Nur - *B şubesi)*

> *“Bana göre Belma'nın cevabı ispattır, çünkü Belma 3 deneme de kanıtlamış ve sayılar gittikçe büyümüş. 1 basamaklıyla Ayşe de kanıtlamış ama bence tek kanıt yeterli değil. Ben tek kanıtla ispatlandığı zaman inanmıyorum ve 2 örnek daha yapıyorum. O yüzden bence bir şey ispatlamada 3 örnek gerekiyor."* (Beyza - *A şubesi)*

B şubesindeki öğrencilerin %20,8'i doğru yanıtı (Mert'in yanıtını - Kod 3) ispat olarak kabul ederlerken, A şubesindeki öğrencilerde bu oran %40'a çıkmıştır. Cebirsel ifadeyi ispat olarak seçen 10 öğrenci örnek vermenin tüm sayılar için genellenebilecek bir gösterim olmadığına, cebirsel ifade ile "kesin" ve "evrensel" yargıya ulaşıldığına değinmişlerdir.

> *"Mert'in cevabıdır çünkü cebirsel ifade daha evrenseldir.”* (Berk - *A şubesi)*
>
> *“Mert'in cevabı bence kesin ispattır. Çünkü sayıları kullanmak bazen insanları yanıltabilir.”* (Gülin - *A şubesi)*
>
> *“Bence Mert'in cevabı doğru, çünkü isterse 10 tane sayı denesin, yine de belki diğer sayı da çıkmayabilir. Emin olmamız lazım. Mert'in cevabı kanıtsal, bu yüzden Mert dedim.”* (Sultan - *B şubesi)*

Öğrencilerle yapılan görüşmelerde onlardan bu soruya verdikleri yanıtı daha ayrıntılı olarak gerekçelendirmeleri istenmiştir. Örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrencilere örnek vermenin genellemeye ulaşmak için yeterli olup olmayışı da sorularak verdikleri yanıtlar sorgulatılmaya çalışılmıştır. B şubesinden Tuna, Belma'nın yanıtını ispat olarak seçtiği sınavda gerekçesini *"Ben Belma'nın cavabını doğru seçerdim. Çünkü aynı kuralı Ayşe de gerçekleştirmiştir ama Belma üç ayrı deneme yapmıştır. Hem bir basamaklı, hem iki basamaklı, hem de üç basamaklı sayılarla yapmış ve inandırıcı olmuş."* şeklinde belirtmiştir. Görüşmede örnek vererek gerçekleştirilen doğrulamanın ispat olup olmayışı sorgulatıldığında ise *" ... Mert’in cevabı şekillerle, örneklerle vermiş, pek anlaşılır değil, herkes anlayamaz. Ayşe ise tek bir örnek vermiş, ama Belma baya örnek vermiş. Bu yüzden daha ikna edici geliyor bana çok sayıda olunca."* açıklamasında bulunarak verdiği cevabın ispat olduğu noktasında ısrar etmiştir. Buna karşın aynı şubeden Yeliz aşağıda yaşanan diyalogda görüldüğü üzere ispat ile örnekle doğrulama arasındaki farka değinildiğinde verdiği yanıtı değiştirebilmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *Sen "Bence Ayşe'nin ifadesi doğrudur, çünkü tek rakamlı sayıları kullanarak kolayca ispatlamıştır" demişsin. Niçin Ayşe'yi seçtin, onu sormak istiyorum.*
>
> ***Yeliz:*** *Hani çünkü çok sayılar kullanarak zorlanmak değil de küçük sayılarla yaparak hemen ispatlayabiliriz, daha basit olur.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Mesela niçin Belma değil de Ayşe'yi seçtin?*
>
> ***Yeliz:*** *Onun ki çok uzundu, belki zaman kaybı olmasın diye düşünmüşümdür.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki şimdi tekrar bakmanı istesem şu üç yanıta...*
>
> ***Yeliz:*** *Aslında en önemlisi cebirsel ifade, çünkü o şekilde gösterim bütün sayılar için geçerli. Mert'in ki aslında biraz doğruydu ama Ayşe'nin ki daha yakın geldi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki Mert'in yanıtına bir baksan, Mert'in ne yaptığını anlayabiliyor musun?*
>
> ***Yeliz:*** *Yani evet, ardışık 3 sayı olarak a, a+1, a+2 almış. 3a+3 olmuş, onu da 3'e bölünce a+1 çıkınca o da katı oluyor. 3e bölünür, sorunun doğru olduğunu gösterir.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Anladım, peki cebirsel ifadeleri anlamak örneğe göre daha mı kolay ya da zor geliyor sana?*
>
> ***Yeliz:*** *Cebir... Cebir de kolay aslında ama diğeri daha yakın geliyor.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Bu soru ile ilgili son olarak sana bu üç yanıttan hangisi ispattır diye sorsam, son kararın ne olur?*
>
> ***Yeliz:*** *Bu sefer Mert'inki derim çünkü cebirsel.*

Görüşme sırasında verdiği yanıtı tekrar değerlendirmesi istendiğinde Yeliz, Mert'in cebirsel ifadeleri kullanarak gerçekleştirdiği ispatı da doğru bulduğuna değinmiştir. Buna rağmen örnek vererek yapılan doğrulamayı kendine yakın bulduğunu da yinelemiştir. Bunun üzerine araştırmacı kullanılan sembolik dili anlayıp anlamadığını sorgular. Mert'in gerçekleştirdiği ispatı basamak basamak anlatarak ispatı anladığını belirten Yeliz, araştırmacının yönlendirmesi ile diyalogun sonunda Mert'in yanıtını ispat olarak belirtse de örnek vererek doğrulamayı kendisine yakın bulduğunu sürekli tekrarlamıştır.

Sınav esnasında Belma'nın yanıtını seçerek örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrencilerden birisi de Sude'dir. A şubesinde öğrenci olan Sude de görüşme esnasında, soruyu tekrar incelemiş ve yanıtını değiştirmiştir. Cebirsel anlatımı anladığını da belirten Sude ile aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> ***Araştırmacı:*** *Niçin Belma'yı seçtin, şu an yeniden seçme şansın olsa yine Belma mı dersin?*
>
> ***Sude:*** *Aslında şu an aynı düşünmüyorum, Mert'in cevabı bana daha kanıtlayıcı geldi. cebirsel ifade kullandığı için a'nın yerine hangi sayıyı koyarsanız koyun doğru çıkacak.*

Araştırmacı: Şu an Mert'in yaptığına baktığında ne yaptığını, sembolik dili ne için kullandığını anlıyor musun?

Sude: Evet, önce bir sayı almış a, sonra ardışık olarak devam etmiş. Toplamı da 3a + 3 olmuş. Onu da anladım. Bu da zaten 3 katına eşit oluyor. Evet anladım.

Her ne kadar sınav esnasında öğrencilerin sadece % 31,5'i, ispat içeren yanıtı seçmiş olsalar da görüşme yapılan öğrencilerin büyük çoğunluğu verdikleri yanıt sorgulatıldığında doğru olan yanıta, ispata ulaşabilmiştir. Örnekle doğrulamanın ispat olduğunda ısrar eden öğrenciler ise genel olarak cebirin anlaşılır olmadığını düşünmektedir. Öğrenci ya kendisi cebiri anlamamakta ya da A şubesinden Dicle'de görüldüğü üzere cebirsel gösterimi açıklayabilmesine rağmen anlaşılır olmaması nedeni ile o yanıtı seçmemektedir. Bu öğrenciler bir şekilde cebirsel ifadelerden kaçınmaktadırlar.

Araştırmacı: Peki niçin Ayşe değil de Belma'yı seçtin?

Dicle: ıı, [Ayşe'nin yanıtını okumakta] 3, 4, 5 denemiş. Ama tek örnek denemiş. Hani bunu kanıtlamak, ispatlamak için tek bir örnek yeterli değil bence.

Araştırmacı: O zaman ispat yapmak için çok sayıda örnek mi denemeli?

Dicle: Evet. O yüzden Belma'nın ki ispat. Çünkü diyelim ki tek bir örnekle her şeyi anlatamayız ama birden fazla örnekle karşımızdakini ikna edebiliriz bence.

Araştırmacı: Peki, Mert'in cevabına dair ne düşünüyorsun?

Dicle: Mert bir sayı vermiş, bu sayıyı bilmiyoruz. Ardışığı bu sayının bir fazlası, diğer sayı da bu sayının iki fazlası, dolayısıyla 3a+3 olmuş. 3a+3'de bu a+1'in 3 katı. Bu da doğru ama bence Belma daha iyi. Çünkü bu sembollerde, Mert'in verdiği sembolleri herkes anlayamıyor. Herkes bilmiyor. Dolayısıyla ben Belma'yı seçtim, o daha anlaşılır.

4.2.1.2. Önerme Hem Doğru Hem de yanlış Olabilir mi?

İkinci soruda öğrencilere yanlış bir önerme ile bu önermenin karşı örnek verilerek çürütüldüğü ispatı, bir de cebirsel ifadeler kullanılırken yapılan işlem hatası nedeniyle önermeyi doğrulayan bir yanıt sunulmuştur. Öğrencilerden verili önermenin ispatı istenirken, sunulan yanıtlara dair ayrı ayrı değerlendirme yapmaları da istenmiştir.

Sunulan yanıtlardan birisi önermenin yanlış olduğunu savunurken, diğeri doğru olduğunu savunmaktadır. Bu soru ile öğrencilerin matematiksel bir önermenin aynı anda doğru ve yanlış olamayacağına dair farkındalıkları ölçülmek istenmektedir. Ayrıca yanıtların birisinde yapılan işlem hatasını ne oranda fark edeceklerine de bakılacaktır. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar; Kod 1: "Ceyhun ispatlamış", Kod 3:

"Canan ispatlamış" ve Kod 2: "her ikisi de ispat" kodları altında incelenmiştir. Bu soruya ilişkin elde edilen bulgular şu şekildedir; (Ceyhun; karşı örnek vererek önermeyi doğru bir şekilde ispatlamıştır. Canan; cebir kullanmış, işlem hatası yaparak yanlış bir ispat yapmıştır.)

Tablo 4.8. İspat testi 1, 2. soruya ilişkin bulgular

Cevaplara dair kodlar	*A Şubesi (n=30)*		*B Şubesi (n=24)*		*Toplam (n=54)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	25	83,3	13	54,2	38	70,4
Kod 2	2	6,6	4	16,6	6	11,1
Kod 3	2	6,6	7	29,2	9	16,7

A Şubesinden bir öğrenci soruya yanıt vermemiştir.

B şubesindeki öğrencilerin % 54,2'si bu soruya doğru yanıt (Kod 1) verirken, A şubesinde bu oran % 83,3'e yükselmiştir. Bu soruya doğru yanıt veren 38 öğrenciden 11'i Canan'ın işlem hatası yaptığını fark ederek, onun yanıtının bu nedenle yanlış olduğunu belirtmiştir. Ceyhun'un yanıtını ispat olarak kabul eden 38 öğrenciden 13'ü ise Canan'ın yanıtını anlamadıklarını belirtmişlerdir. Bu gruptan sadece 5 öğrenci Canan'ın yanıtını değerlendirirken Ceyhun'un bu önermeyi ispatladığı gerekçesi üzerinden, Canan'ın yanlış bir yanıt verdiğini belirtmişlerdir. Onlara göre Ceyhun önermenin yanlış olduğunu zaten ispatlamıştır, bu nedenle Canan'ın yanıtı hatalı olmalıdır. Bu ifadeleri örneklendirmek gerekirse:

> *"Ceyhun yanlış olduğunu kanıtlamış, Canan'ın yanıtı yanlış çünkü hep 6'nın katı çıkmaz bunu Ceyhun kanıtlamıştı." (Eda Nur - A Şubesi)*
>
> *" Ceyhun'un cevabı doğrudur, çünkü ne kadar örnekle sayı denesek de çıkmıyor. Canan'ın ne demek istediğini tam olarak anlayamadım." (Gülin - A Şubesi)*

B şubesindeki öğrencilerin % 16,6'sı her iki ispatı da doğru kabul ederek, verili matematiksel önermenin hem doğru hem de yanlış olduğunu savunurken (Kod 2), bu oran A şubesinde % 6,6'ya düşmüştür. Cebirsel ifade ile yapılan doğrulamanın genellenebilir bir yargı içerdiği bu nedenle de Canan'ın yanıtının da doğru olduğu gerekçesi, bu hatalı yanıtı veren öğrencilerin tamamında görülen bir eğilimdir. Ceyhun'un yanıtını incelediklerinde önermenin yanlışlığını kabul eden bu öğrenciler, Canan'ın yanıtındaki cebirsel anlatımı gördüklerinde bu yanıtın da ispat olduğunu düşünmüşlerdir. Soruda verilen önermenin aynı anda hem doğru hem de yanlış olduğunu savunarak, doğruluğun ispatı ile karşı örnek vererek ispatın aynı önerme için bir arada olabileceğine yönelik bir kavram yanılgısına sahip olmuşlardır. Her iki şubede de bu kavram yanılgısına sahip öğrencilerin sayısı genele oranla düşük çıkmıştır. Bu hataya düşen B şubesinin başarılı öğrencilerinden olan İlayda her iki yanıtın da doğruluğunu sınavda şu cümleler ile açıklamıştır:

> *"Ceyhun'un yanıtı verdiği örneğe göre doğrudur. Fakat Ceyhun'un verdiği örneği Canan'ın yanıtına göre uyarlarsak yanlış çıkar. Canan'ın yanıtı ise doğrudur. Çünkü tüm tek sayıları formüle göre uyarlarsak yanıtı doğru çıkar." (İlayda - B şubesi)*

Gerçekleştirilen görüşme sırasında bu soruya verdiği yanıtı ayrıntılandırması istendiğinde ise;

> ***İlayda:*** *Bence her ikisi de doğru gibi geliyordu bana, orada tam ifade edemedim sanırım ama her ikisi de doğru geliyor. Çünkü nasıl diyeyim Canan'ın verdiği yanıt, genel olarak göstermiş, formül gibi, ama Ceyhun'un verdiği yanıt o formüle göre bile yaparsak yanlış çıkıyor. Aslında Ceyhun daha yakın gibi bana ama her ikisi de doğru yapmış, ispatlamış.*

aktarımında bulunmuştur. Görüşmenin devamında İlayda'ya matematiksel bir önermenin aynı anda hem doğru hem de yanlış olup olamayacağı sorgulatıldığında ise;

> ***Araştırmacı:*** *Peki, şöyle desem, Ceyhun diyor ki "bu matematiksel ifade yanlış", Canan ise doğru diyor. Verdikleri yanıta hiç bakma şimdi, bu matematiksel ifade sence doğru mudur yanlış mı? Sen de deneyebilirsin, işlem yapabilirsin…*
>
> *[İlayda kâğıt ve kaleme yönelir, örnek vererek ifadeyi sınar]*
>
> ***İlayda:*** *Evet doğru, o zaman 21 olsun, 21 ile 3 ü çarparsam, bir de 6 ekleyeceğim 69 oldu. 69, 6'ya bölünür mü? Mmm bölünmez. İfade yanlış o zaman.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Tekrar soruya bakalım Ceyhun ifadeye yanlış demiş, Canan doğru demiş. Aynı ifade hem doğru hem yanlış olabilir mi?*
>
> ***İlayda:*** *Hem doğru hem yanlış? … Verdikleri ifadeye göre değişebilir ama nasıl diyeyim bu ifade bence yanlış, bu ifade hem doğru hem de yanlış olamaz.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Mesela tekrar bu soruya dönersek, iki yanıt var birisi doğru demiş diğeri yanlış, ikisi birden doğru olabilir mi?*
>
> ***İlayda:*** *Hayır, aslında Ceyhun doğruyu söylemiş gibi, ben de denemiştim az önce.*

aktarımında görüldüğü üzere yaşadığı ikilemi bir miktar aşmaya başlamıştır. Bu diyalogun ardından daha ayrıntılı olarak Canan'ın yanıtını inceleyen İlayda Canan'ın işleminde yaptığı hatayı da fark etmiştir.

İlayda: *Canan ne yapmış bir bakayım… [der ve elinde kalem işlemleri tek tek incelemeye başlar, birkaç saniye sonra] aa, hayır doğru yapmamış.*

Araştırmacı: *Nerde hata yapmış?*

İlayda: *3 ile +1'i çarparken +6 yazmış, yanlış… Sınavda fark etmemiştim.*

Yine B şubesinden Orhan ise "Bence Ceyhun yanlış cevap vermiştir, çünkü Ceyhun örnekleme yaparak cevap vermiş ve örnekleme her zaman doğru çıkmayabilir. Canan doğru cevap vermiştir. Çünkü Canan bu problem de formüllerden yola çıkmıştır ve formüller her zaman doğru yanıt verir." şeklinde gerekçesini açıkladığı yanıtında, var olan önermenin aksini gösteren bir örneğin, önermenin yanlışlığını ispatlamada yeterli olmadığına yönelik düşüncesini ortaya koymuştur. Yapılan görüşmede ise Orhan bu hatasını hemen farketmiş, cebirsel ifadeyi gördüğü için yanıtları ayrıntılı olarak incelemediğini ve cebirsel gösterimin ispat olduğunu düşünerek yanıtını verdiğini açıklamıştır.

Ceyhun'un yanıtının değil de Canan'ın yanıtının ispat olduğunu savunan 9 öğrenciden 4'ü sınav kağıdında, Orhan'ın ifade ettiğine benzer bir şekilde, tek bir örneğin önermenin yanlış olduğunu savunmada yetersiz olacağını belirtmişlerdir. Bu öğrenciler bir önermenin doğruluğunu ispat ederken kullanılan örneklerin ispat için yetersiz olacağı fikrinden yola çıkarak, Ceyhun'un kullandığı örneği değerlendirmişlerdir. Benzer bir içerikte yanıt veren B şubesinden Gizem'le görüşme sırasında bir önermenin yanlışlığının ispatlanması üzerine konuşulmuş, sınavda verdiği yanıt sorgulatılmıştır. Bunun üzerine Gizem de verdiği yanıtı aşağıdaki diyalogda aktarıldığı şekilde değiştirmiştir:

Araştırmacı: *Şimdi, ikinci soruya geçersek, ikinci sorudaki ifade "herhangi bir sayıyı 3 ile çarpıp, çarpıma 6 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz" idi. Şimdi sen burada Ceyhun'un yanıtına yanlış demişsin, Ceyhun niçin yanlış? Soruyu ve yanıtını bir incele istersen.*

[Gizem soruyu okumakta, sessizce inceliyor, kendisi de Ceyhun'un yaptığı işlemi kağıda tekrarlıyor]

Gizem: *Ben de böldüm 6'nın katı değil.*

Araştırmacı: *Evet, Ceyhun'da aynı işlemi yapmış ve bulduğu sayı senin de gördüğün üzere 6'nın katı değil. Bu nedenle bu ifade her zaman doğru değildir demiş. Doğru mu, yanlış mı söylemiş sence?*

Gizem: *Bence bu yaptığına göre doğru söylemiş. Bir işlem yapmış ve bu işlem ile aslında ifadenin doğru olmadığını göstermiş. Ceyhun sayılardan giderek genelleme yapmamıştır ama denediği sayı doğru olmadığını göstermiştir.*

Araştırmacı: *Peki yanlış olduğunu göstermek için tek bir örnek kullanmış bu sence yeterli olur mu?*

__Gizem:__ Değil, mesela başka bir tek sayı bulabilirdi, bu sayı ile bu işlemleri yaptığında bu sefer 6'nın katı çıkabilirdi.

__Araştırmacı:__ Ne olurdu o zaman? O denediğin örnek doğrulamış olurdu ama ifade de ne diyor "her zaman 6'nın katı olur" diyor. İki örnek var mesela elimizde birisini denedin doğru çıktı, diğerinde yanlış. Ne olur o zaman? Her zaman doğru olur mu?

__Gizem:__ Olmazdı ama ben olsaydım bir kaç tane daha örnek yapardım.

__Araştırmacı:__ Hadi bir örnek daha yaptın, ikisinde doğru çıktı birinde yanlış. O zaman ne olurdu, ifade yanlış mı doğru mu olurdu?

__Gizem:__ Ben sanırım yine yanlış derdim öğretmenim, çünkü 2 işlem bile olsaydı biri 6'nın katı çıktı, diğeri çıkmadı yanlış gibi olur. ... Birisinde bile yanlışsa, hepsi için doğru olmaz.

Buradaki aktarımlardan da görüldüğü üzere öğrencilerin bir bölümü karşı örnek vererek bir önermenin ispatlanmasında, tek bir örneğin yeterli olacağı fikrinin kabulünde sorun yaşamıştır. Öğrencilerin bir kısmı ise örnekle doğrulamanın ispat olmadığı fikri üzerinden Ceyhun'un yanıtına şüpheci yaklaşabilmiş veya cebirsel gösterimin her zaman ispat olacağı genellemesi üzerinden yanlış sonuca ulaşabilmiştir. Buna karşın gerçekleştirilen görüşmede bu hatalar üzerine de durulmuş, öğrencilerin yanılgıları verdikleri yanıtlar kendilerine sorgulatılarak büyük oranda giderilebilmiştir.

4.2.1.3. Önermenin Birden Fazla İspatı Olabilir mi?

Üçüncü soruda öğrencilere verili önermeye yönelik 3 seçenek sunulmuştur. Bunlardan birisi cebir kullanarak yapılan ispat (Cem'in yanıtı), bir diğeri anlatım yolu ile yapılan ispat (Buse) ve son olarak da örnek vererek yapılan doğrulama (Mehmet'in yanıtı) idi. Bu soruda öğrencilere verili cevapların hangisi ya da hangilerinin ispat olduğu sorulmuştur. Bir önermenin birden fazla yolla ispatlanabileceğinin ve ispat ile genellenebilir bir yargı sunma arasındaki ilişkinin farkında olup olmadıkları ölçülmeye çalışılmıştır.

Bu soruda öğrenciler birden çok sayıda yanıtı ispat olarak seçebilmiştir. Mehmet'in yanıtı Kod 1, Buse'nin yanıtı Kod 2, Cem'in yanıtı Kod 3 ile kodlanmıştır. Bu soruda ulaşılmak istenen yanıt Kod 2 ve Kod 3, yani Cem ve Buse'nin yanıtlarının ispat olduğudur. Buna karşın öğrencilerin verdikleri yanıtların analizinde, sadece örnekle doğrulamayı ispat olarak kabul edenler, örnekle doğrulamayı da verdikleri yanıt içerisine dâhil eden öğrenciler ile verdikleri yanıtta sadece ispatlara yer veren öğrencilerin genele oranı da tablo içerisinde sunulmuştur. Bu soruya ilişkin elde edilen bulgular şu şekildedir;

Tablo 4.9. Ispat testi 1, 3. soruya ilişkin bulgular

	Cevaplara dair kodlar *Kod 1; örnek vererek doğrulama ispattır* *Kod 2; sözel anlatım ispattır* *Kod 3; cebirsel gösterim ispattır*	*B Şubesi (n=24)*		*A Şubesi (n=30)*		*Toplam (n=54)*	
		f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Sadece örnekle doğrulamayı seçenler	1	2	8,3	10	33,3	12	22,2
İspat olarak doğru yanıtları veya yanıtlardan birini seçmesine rağmen örnekle doğrulamayı da seçenler	1,2	2	8,3	2	6,6	4	7,4
	1,3	4	16,6	3	10	7	13
	1,2,3	3	12,5	3	10	6	11,1
	Toplam	9	37,5	8	26,7	17	31,5
Sadece verili ispatları seçenler	2	3	12,5	1	3,3	4	7,4
	3	5	20,8	6	20	11	20,4
	2,3	3	12,5	2	6,6	5	9,3
	Toplam	11	45,8	9	30	20	37

B şubesinden 1, A şubesinden 3 öğrenci soruya yanıt vermemiş, B şubesinden 1 öğrenci ise verilen tüm yanıtların yanlış olduğunu belirttiği için tabloda yer almamaktadır.

Bu soruda sadece örnek vererek doğrulamayı ispat olarak seçen öğrencilerin oranı diğer sorulara göre daha düşük çıkmıştır. B şubesinde bu oran % 8,3 'de kalırken, A şubesinde % 33,3'tür. Buna karşın ispat olarak seçtiği yanıtlar içerisine var olan ispatlarla birlikte, örnek vererek doğrulamayı da dâhil eden öğrencilerin oranı tüm öğrenciler dikkate alındığında % 31,5'dir. Bu durum sadece örnek vererek yapılan doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrencilerle birlikte düşünüldüğünde, öğrencilerin yarısının ispat ile doğrulama arasındaki ayrımın hala net olarak farkında olmadıklarını ortaya koymaktadırlar.

Buna karşın gerek cebirsel, gerekse anlatım yolu ile yapılan ispatları yanıt olarak ileten öğrencilerin oranı % 37 iken, her iki ispatı da belirterek doğru yanıt veren öğrencilerin oranı % 9,3'te kalmıştır. Bu öğrencilerden B şubesinde okuyan Orhan gerekçesini *“Bence Cem ve Buse doğru cevap vermiştir, çünkü Cem problemde formüllerden gitmiş, Buse ise tek sayıların özelliklerinden yola çıkmıştır.”* ifadesi ile açıklarken yine aynı şubeden İlayda benzer bir aktarımsa bulunmuştur; *“Bu verilen cevaplardan Buse ve Cem'in verdikleri yanıtlar doğrudur. Bu öğrenciler verdikleri cevaplarda formül ya da kanıt olarak açıklama yaptıkları için her ikisinin yöntemini kullandığımızda bu ifadenin doğru olduğunu görürüz.”*.

İspat testi 1'de yer alan 1. ve 3. soru birlikte dikkate alındığında, ilk soruda örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrencilerin önemli bir bölümünün bu soruda genelleme içeren yanıtları da ispat olarak seçtiği gözlenmiştir. İlk soruda Belma'nın yanıtını (çok sayıda örnekle doğrulama) ispat olarak seçen Sude (A şubesi) ile Ayşe'nin yanıtını (tek bir örnek ile doğrulama) ispat olarak seçen Yeliz (B şubesi) bu soruda Cem'in yanıtı olan cebirsel gösterimi ispat olarak seçmişlerdir. Görüşme sırasında yanıtlarındaki bu farklılığın gerekçesi kendilerine sorulmuş, her ikisi de benzer bir yaklaşımla ilk soruda istenilene çok dikkat etmediklerini şu şekilde belirtmişlerdir;

> ***Araştırmacı:*** *Üçüncü soruya geldiğimizde ise bu sefer 3 yanıt vardı, hangisi ispattır diye sorduğumda sen cebir kullanılan cevabı seçmişsin. İlk soruda niçin cebiri seçmedin de bu soruda cebirsel ifadenin kullanıldığı yanıtı ispat olarak seçtin?*
>
> ***Yeliz:*** *Bilmem ilk soruydu ya sorulara alışmamıştım belki de. Daha ayrıntılı inceledim diğer soruları.*
>
> ....
>
> ***Araştırmacı:*** *Üçüncü soruya geçtiğimizde ise şu dikkatimi çekti, ilk soruda örnekle doğrulamayı ispat olarak kabul ederken bu soruda cebirsel ifade kullanılan yanıtı, Cem'i seçmişsin. Bu bana ilginç geldi, niçin iki soru arasında bu fark var sence?*
>
> ***Sude:*** *Bilmem diğeri ilk soruydu ya orada hemen bana en anlaşılır geleni seçmiştim sanırım.*

Görüşme sırasında öğrencilere Buse'nin yanıtının nasıl bir genelleme içerdiği de sorulmuştur. Gerek sınav esnasında, gerekse görüşme sırasında, 1. soru için Belma'nın yanıtını ispat olarak değerlendiren ve cebirsel ifadelerin "anlaşılmaz" olduğunu belirten B şubesinden Tuna, bu soruda Buse'nin yanıtını seçen öğrencilerden birisidir. Bu soruda örnek vererek doğrulamanın ispat için yeterli olmadığına değinen Tuna, Buse'nin yanıtının ifadeyi tüm sayılar için doğruladığını söylemiştir. Buna karşın aynı değerlendirmeyi ilk soruda yapmadığı görülmektedir.

> ***Tuna:*** *Aslında sayılar sonsuzdur, belki öyle bir sayı çıkacaktır ki yanlış çıkacak sonuç. Buse ise örnek vermemiş, şekil de çizmiş, anlatmış. Daha anlaşılır olmuş bence. Tek sayıyı anlatmış ikişerli gruplandırdığımızda diyerek. Tüm sayılar için tanımlamış yani. Tüm sayılar için doğru olur dediği.*

Buse ve Cem'in yanıtlarının verili önermenin ispatları olduğunu söyleyen Beyza (A şubesi) ise Buse'nin aktarımının içerdiği genellemeyi şu şekilde ifade etmiştir:

> ***Beyza:*** *Bu sanırım diğeriyle aynı, yani yine bütün sayılar için ispat [Cem'in yanıtını kastetmekte]. Bu ise cebir kullanmamış [Buse'yi kastetmekte], cebir kullanmak yerine onu anlatmış gibi bir şey olmuş. Sayılarla göstermemiş, anlatarak cebirsel ifadeyi anlatmış gibi bir şey.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki, Buse'nin yaptığında da bir genelleme var mı sence?*
>
> ***Beyza:*** *Bence, hmm, her zaman doğrudur ama burada yine bir örnek vermiş ya, ... ama onu da anlatmak için kullanmış. Yani genelleme yapmış aslında, evet.*

4.2.1.4. Hangi Cebirsel Gösterim Önermenin İspatıdır?

Dördüncü soruda öğrencilere verili önermeye yönelik 3 yanıt sunulmuştur. Bunlardan birisi cebir kullanarak yapılan ispat (Sedat'ın yanıtı), bir diğeri verili önermenin tersinin ("Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır") cebir yolu ile ispatı (Deniz) ve son olarak da örnek vererek yapılan doğrulama (Berk'in yanıtı) idi. Bu soruda öğrencilere verili cevapların hangisinin ispat olduğu sorulmuştur. Örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki ayrımın farkındalığına ek olarak, iki cebirsel ispat arasındaki ayrımı ortaya koyup koyamadıklarına bakılacaktır.

Bu soruda örnek vererek yapılan doğrulama yanıtı Kod 1, önermenin ispatını içeren yanıt (Sedat'ın yanıtı) Kod 2 ve diğer cebirsel gösterimi içeren yanıt (Deniz'in yanıtı) Kod 3 ile kodlanmıştır. Soruya ilişkin elde edilen bulgular şu şekildedir;

Tablo 4.10. İspat testi 1, 4. soruya ilişkin bulgular

Cevaplara dair kodlar	*A Şubesi (n=30)*		*B Şubesi (n=24)*		*Toplam (n=54)*	
	f	*%*	*F*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	7	23,3	8	33,3	15	27,8
Kod 2	12	40	9	37,5	21	38,9
Kod 3	8	26,6	6	20,8	14	25,9

A şubesinden 2, B şubesinden 1 öğrenci soruya yanıt vermemiş, A şubesinden 1 öğrenci ise her üç yanıtı da ispat olarak değerlendirdiği için tabloda yer alan değerlendirmeye dahil edilmemiştir.

Bu soruya verilen yanıtlar incelendiğinde örnek vererek doğrulamayı ispat olarak değerlendiren öğrencilerin oranında diğer sorulara göre düşüş gözlenmektedir.

Berk'in yanıtını ispat olarak seçen öğrenciler Berk'in yanıtını basit ve anlaşılır bulurken, hepsinin sundukları gerekçede gözlenen ortak eğilim cebirsel ifadeleri anlamamış olmalarıdır. Sınav kâğıdında gerekçelerini şu şekilde sunmuşlardır;

> *"Berk'in cevabı hem anlatılmış hem de ispatlanmıştır, daha detaylı. Diğer cevapları anlamadım." (Deniz, A şubesi)*
>
> *"Berk'in cevabı doğrudur çünkü basit ve açıklayıcıdır. Sedat'ın cevabı fazla karmaşıktır, Deniz'in cevabı yanlıştır, çünkü x sayıları ile ispat fazla belli değil." (Ünal, A şubesi)*

Yapılan görüşmelerde de örnek ile doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrenciler, cebirsel ifadeleri anlama ve uygulamada zorlandıklarını belirtmişlerdir.

Bu soruya doğru yanıt veren öğrencilerin oranı her iki şubede de en yüksek olandır (Sedat'ın yanıtı). Buna karşın diğer cebirsel ifadeyi içeren yanıtı (Deniz'in yanıtı) ispat olarak kabul eden öğrenciler Sedat'ın yanıtını uzun ve anlaşılmaz bulduklarını belirtmişlerdir. Yine de cebirsel gösterimin ispat olduğu düşüncesi üzerinden, Deniz'in yaptığı işlemleri daha anlaşılır buldukları için Deniz'in yanıtını önermenin ispatı olarak seçmişlerdir. Sınavda öğrenciler şu aktarımlarda bulunmuşlardır;

> *"Sedat'ın cevabından hiç bir şey anlamadım. Ama bir öğretmen olsa idim Deniz'in cevabını ispat olarak seçerdim." (Nur - B şubesi)*
>
> *"Deniz'in cevabı doğru ve gayet basit bir dille açıklamış. Sedat'ın cevabını anlamadım ve mantıksız geldi." (Selda - A şubesi)*
>
> *"Sedat'ın cevabı çok uzun doğru olmayabilir, Deniz'in cevabı ispattır işlemleri doğru" (Sidar - A şubesi)*

Görüşmede daha kısa ve anlaşılır olduğu gerekçesi ile Deniz'in yanıtını verilen önermenin ispatı olarak seçen öğrencilere de yer verilmiştir. Onlara bu sorudan bağımsız olarak, başka bir kağıtta Deniz'in yaptığı ispat sunulmuş ve verili ispatın hangi matematiksel önermenin ispatı olabileceği sorulmuştur. Bu sorunun yöneltildiği öğrencilerin hepsi verili ispatın "ardışık iki sayının toplamı her zaman tek sayıdır" önermesinin ispatı olduğunu belirtmişlerdir. Verdikleri bu cevabın ardından soruyu tekrar incelemeleri istenen öğrenciler, seçtikleri yanıtın soruda verilen önermenin ispatı olmadığını kolaylıkla farketmişlerdir. B şubesinden Orhan yaptığı hatayı hızla farkederek, iki cebirsel gösterim (Sedat ve Deniz'in yanıtları) arasındaki farkı aşağıdaki diyalogda geçtiği şekilde ifade etmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *Son soruya geçmeden önce, önce şuna bakmanı istiyorum [sadece Deniz'in yapmış olduğu cevap sunulur] Deniz'in yanıtına bak, sence Deniz hangi matematiksel ifadenin ispatını yapmış bu yanıtı ile?*
>
> *[Orhan Deniz'in yanıtını okumakta]*
>
> ***Orhan:*** *Hmm... Ardışık iki sayının toplamı, toplamının ... ııı her zaman tek sayı olacağını bulmuş.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet çok doğru, soruda verilen ifadeye bakmanı istesem. O ifade ne idi?*
>
> ***Orhan:*** *Her tek sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Sence bu ikisi aynı şey mi?*
>
> ***Orhan:*** *Hayır değil, bu tersten gibi.*

Bu soruda doğru yanıtı seçen öğrenciler ise A şubesinden Berk'in; *“Sedat'ın cevabı bence, çünkü tek sayının formülüyle ulaşmış ve her şekilde doğrudur."* cümlesiyle ifade ettiği şekliyle cebirsel ifadeyi, yani Sedat'ın yanıtını anladıklarını belirtmişlerdir. Bazı öğrenciler de yine aynı şubeden Recep'in *"Sedat’ın cevabı doğrudur, çünkü 30. sayıda böyle bir şey oluyor, 4’te de aynı şekilde öyle oluyor."* diyerek gerekçelendirdiği şekilde Sedat'ın yanıtının genellenebilir bir yargı sunduğuna da değinmişlerdir. Sedat'ın yanıtını seçen 21 öğrencinin sınavda seçimine yönelik yazdığı değerlendirmeler incelendiğinde; 2 öğrenci gerekçe bildirmemiştir. 7 öğrencinin gerekçesinde ise Sedat ve Deniz'in yanıtlarına yönelik ayrıntılı değerlendirmeler bulunmamakta, bu nedenle de seçimlerinde ispata yönelik farkındalıkları net olarak gözlenememektedir. A şubesinden Öykü bu öğrencilerdendir ve gerekçesini *"Daha bilimsel ve daha zor olduğu için Sedat'ın yanıtı ispattır."* şeklinde ifade ederek Deniz'in yanıtına yönelik bir değerlendirmede bulunmamıştır. 12 öğrenci ise net bir şekilde Sedat'ın ispatını doğru olan ispat, Deniz'in yanıtını ise ispat olarak yanlış bulduklarını belirtmişlerdir. Yine A şubesinden Aleyna *"Sedat’ın yanıtı doğru ispattır ama Deniz’in ne yaptığını anlamadım, soruya uymuyor gibi"* şeklinde bir gerekçe sunarak, Deniz'in ispatını verili önerme ile ilişkilendirememiştir. Yanıtlar incelendiğinde, doğru seçeneği seçen öğrencilerin % 57,1'inin seçimlerini bilinçli olarak yaptıkları net olarak söylenebilmektedir.

4.2.1.5. Özet

Her ne kadar ispat testi 1'in ilk sorusunda öğrencilerin önemli bir bölümü, % 68, 5'i, örnek vererek yapılan doğrulamayı ispat olarak kabul etmiş olsa da bu eğilim diğer sorularda düşüş göstermiştir. Öğrenciler gerçekleştirilen görüşmelerde de tümdengelimsel muhakemeleri içeren yanıtlara yönelmiş, ispatın verilen önermenin olası tüm durumlarını kapsaması gerektiğine yönelik vurgularda bulunmuşlardır. Sınavın ileriki sorularında sadece cebirsel ifadelere değil, tümdengelimsel muhakeme içeren diğer temsillere de yönelebilmişlerdir. Yanlış bir önermenin ispatında ise öğrenciler çoğunlukla (% 70,4'ü) sunulan karşı örneği önermenin ispatı olarak değerlendirmişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin ispat ile bir kaç durumun denendiği doğrulama arasındaki farkı kavrayarak, yanlış önermelerde ise verilen karşı örneğin ispat olduğunu vurgulayarak, ispat kavramına yönelik farkındalıklarının geliştiği söylenebilir. Ayrıca düşük oranlarda da olsa şu bulgulara ulaşılmıştır; öğrenciler tümdengelimsel yaklaşımların muhakkak ispat olduğu düşüncesi üzerinden hatalı yanıtları ispat olarak değerlendirebilmiştir, önermenin doğruluğunun ispatı ile karşı örnek verilerek yanlışlandığı ispatın birlikte geçerli olduğunu savunabilmiştir, yanlış bir önermenin ispatında tek bir örneğin verilmesinin yeterli olmadığını düşünebilmişlerdir. Sonuç olarak; uygulamaya dahil edilen 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algılarında bir ilerleme yaşanmıştır.

4.2.2. Öğrencilerin İspat Becerilerine İlişkin Bulgular

İspat öğretimi uygulaması sırasında derslerde doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemleri ele alınmıştır. Öğrencilerin bu ispat yöntemlerinden hangilerini yapabildikleri, hangi noktalarda zorlandıklarını ve ispat yapmaya yönelik becerilerini belirleyebilmek amacı ile ispat testi 2 ve ispat testi 3 olmak üzere iki tane ispat testi geliştirilmiştir. İspat testi 2'de dört soru grubu altında öğrencilerden bu ispat yöntemlerini içeren ispatlar yapmaları istenmiştir. İspat testi 3'te ise öğrencilere kullanabilecekleri ispat yöntemleri ile birlikte 8 matematiksel önerme verilmiş ve dördünü seçerek ispatlamaları istenmiştir. Bu ikinci testte öğrencilerin ispat performanslarına ek olarak hangi ispat yöntemlerini tercih ederek ispatlamaya çalıştıklarına da bakılmıştır. Daha sonra gerçekleştirilen görüşmelerde öğrencilere bu tercihlerinin nedeni ayrıntılı olarak da sorulmuştur.

İspat Testi 2’de dört grup soru bulunmaktadır. Her grupta iki matematiksel önerme verilmiştir. Öğrencilerden bu önermelerden sadece birini seçerek, altı çizili olarak belirtilen yöntemle veya bu yöntemi bilmiyorsa kendi seçtiği bir yöntemle, seçtiği önermeyi ispatlamaları istenmiştir. Bu soru formundaki sorular soru bazında değil, her bir grup bazında analiz edilmiştir. Gruplar, o grupta yer alan ispat yönteminin özellikleri ve öğrencilerin verdikleri cevaplar dikkate alınarak kodlanmış ve öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekans dağılımı tablolaştırılmıştır.

İspat Testi 3'de ise öğrencilerden sekiz matematiksel önermeden dördünü seçerek ispatlamaları istenmiştir. Her önermenin ispatı için önerilen ispat yöntemleri parantez içinde belirtilmiştir. Bu testte amaçlanan, öğrencilerin ispata yönelik performansları ile öğrencilere ispat yöntemlerini seçme şansı verildiğinde hangi ispat yöntemlerini seçeceklerini belirlemektir. İspat testi 3'de yer alan sorular ve soruları seçen öğrenci sayısının şubelere göre dağılımı şu şekildedir:

Tablo 4.11. İspat testi 3'de yer alan sorular ve öğrencilerin bu soruları seçme oranları

	Öğrenci Sayısı		
	A Şubesi (n=25)	*B Şubesi (n=22)*	*Toplam (n=47)*
1. Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz. (Doğrudan İspat)	21	18	39
2. Bir tek ve bir çift sayıyı topladığınızda her zaman tek sayı elde edersiniz. (Doğrudan İspat)	23	20	43
3. n, {1,2,3,4} kümesinin bir elemanıdır, bu durumda her zaman $(n+2)^2 \geq 32$ dir. (Tüketerek İspat)	6	9	15
4. n, {4,6,8,10,12} kümesinin bir elemanı olsun, bu koşulu sağlayan tüm n sayıları iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir. (Tüketerek İspat)	6	6	12
5. İki sayının karelerinin toplamı her zaman çift sayıdır. (Karşı Örnek Vererek İspat)	21	20	41
6. a sayısı (b + c)'yi tam bölen bir sayı olsun. Bu durumda a sayısı hem b, hem de c sayısını tam olarak bölen bir sayıdır. (Karşı Örnek Vererek İspat)	2	8	10
7. Bir tam sayı tutun ve daha sonra bu sayının karesini alın, elde ettiğiniz sayının 4'e bölümünden kalan her zaman 0 veya 1'dir. (Durum Yolu ile İspat)	15	5	20
8. x tam sayı olsun. Bu durumda $x - \lvert x \rvert \leq 0$ dır. (Durum Yolu ile İspat)	3	1	4

Uygulama öncesinde öğrencilerin ele alınan ispat yöntemlerinden karşı örnek verme ile tüketerek ispatı kolay bulacakları, bu sınavdaki soru seçimlerinde de bu yöntemlerin belirtildiği önermeleri seçecekleri düşünülmekteydi. Elde edilen bulgular, şaşırtıcı bir sonuç ortaya çıkarmıştır. Tablodan öğrencilerin yoğunluklu olarak 1, 2 ve 5. ve 7. soruları seçtikleri gözlenmiştir. sadece 5. sorunun seçimi araştırmacının beklentisi ile uyumludur. Öğrencilerle yapılan görüşmede onlara bu tercihlerinde neye dikkat ettikleri de sorulmuştur. Öğrencilerin büyük bir kısmı soru tercihinde ispat yönteminden ziyade verilen matematiksel ifadeyi anlayıp anlamadıklarına ve ifadenin kolay olup olmayışına dikkat ettiklerini söylemişlerdir. Görüşülen 16 öğrenciden 11'i seçimlerinde önermeye dikkat ettiklerini belirtirken sadece 2 öğrenci verili ispat yöntemlerine bakarak seçimlerini yaptıklarını, 3 öğrenci ise verilen önermeyle birlikte ispat yöntemlerine de bakarak seçimlerini yaptığını belirtmiştir. Öğrenciler özellikle matematiksel sembolleri (cebirsel ifadeler, büyük / küçük işaretleri, küme işareti vb.) içeren önermeleri seçmemiş, yapılan görüşmede bu tercihlerini de açık olarak belirtmişlerdir. Öğrencilerin ispat testi 2'deki soru seçimleri de bu eğilime uygundur. İspat testi 2'de de bilinmeyen terim ve matematiksel sembollerin yoğunluklu olduğu sorular yerine, düz anlatımları içeren sorular daha çok tercih edilmiştir.

Gerçekleştirilen görüşmede B şubesinden Derya ile seçimini etkileyen faktörler seçtiği sorular üzerinden konuşulmuştur:

> ***Derya:*** *Ben burada seçerken şuna dikkat ettim, daha çok mesela ... Şu tür sorularda zorlandığımı düşünüyorum. [8. soruyu göstermekte]*
>
> ***Araştırmacı:*** *Ha anladım bilinmeyen ifadeleri içeren sorularda zorlanıyorsun yani. Bu sorulardaki sembolik gösterimler mi zor geldi sana?*
>
> ***Derya:*** *Evet hem x'ler, hem de büyük küçük işaretleri var ya o zor geldi. Bir de karışık bir ifade gibi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Üçüncü soruya bir bakalım, o da mı sana zor geldi, o yüzden mi onu seçmedin?*
>
> ***Derya:*** *Evet, soru basit aslında ama bu ifade [eşitsizlik] biraz karışık geliyor.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki, niçin 7. soruyu seçtin, verilen ispat yöntemine değil de ifadeye mi dikkat ettin?*
>
> ***Derya:*** *Soruyu okudum, ifade kolay geldi, yöntemi düşünmedim o an, ifadeyi okudum ve bir şekilde yapabileceğimi düşündüm, ifade kolay geldi, yaparım diye düşündüm.*

Verili ispat yöntemlerine dikkat ederek soruyu seçen öğrenciler ise gerekçelerini şu şekilde belirtmiştir:

> ***Beyza:*** *İfadeler de kolay geldi ama ispat yöntemini görünce ne yapacağımı bildim, mesela tüketerek ispat, ne yapacağımı biliyordum o yüzden onu tercih ettim. Yöntemi biliyordum çünkü.*
>
> ***Berk:*** *Hiç bir yöntem bana zor gelmedi ve hepsini denemek istedim. En kolay gelenleri seçebilirdim ya da daha hızlı yaparım diye karşı örnekleri seçebilirdim sadece ama hepsini denemek istedim.*

İspat testi 2 ve 3'de yer alan sorular, içerdikleri ispat yöntemleri ile ilgili başlıklar altında incelenecektir.

4.2.2.1. Öğrencilerin Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

Bu başlık altında ispat testi 2 Grup 1'de yer alan soru ile ispat testi 3'de yer alan 1 ve 2. sorular incelenecektir.

İspat Testi 2'de, Grup 1 başlığı altında öğrenciler önermeyi doğrudan ispat yöntemi ile ispatlamaları doğrultusunda yönlendirilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar aşağıdaki kod sistemi kullanılarak değerlendirilmiştir:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.

Kod 3: İspat fikri var ama çeşitli hatalar nedeniyle ispat tamamlanamamış.

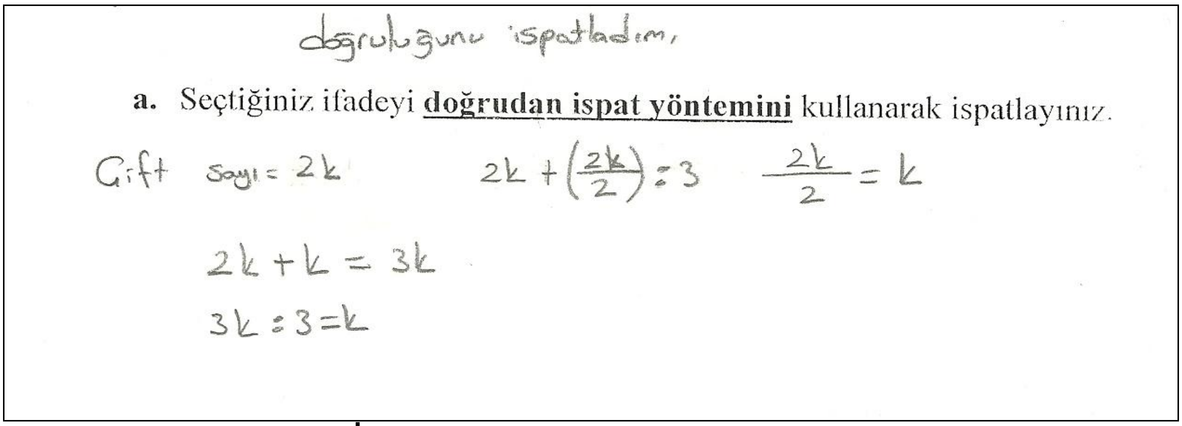
Kod 4: Doğrudan ispat yapılmış.

Tablo 4.12. İspat testi 2, 1. Gruba ilişkin bulgular

Çözüme ilişkin kodlar		***A Şubesi (n = 27)***		***B Şubesi (n = 21)***		***Toplam (n=48)***	
		f	***%***	***F***	***%***	***f***	***%***
Kod 1		-	-	10	47,6	10	20,8
Kod 2	Tek bir örnek	7	25,9	2	9,5	9	18,8
	Çok örnek	11	40,7	4	19	15	31,2
Kod 3		3	11,1	-	-	3	6,2
Kod 4		6	22,2	5	23,8	11	23

Her iki şubede de öğrencilerin büyük bir kısmı 1. soruyu seçerek ispatlamaya çalışmıştır. Verili sorular içerisinden A şubesinden 23 öğrenci 1. soruyu, 4 öğrenci 2. soruyu; B şubesinden ise 14 öğrenci 1. soruyu, 5 öğrenci 2. soruyu seçmiş, 2 öğrenci de seçim yapmayarak soruyu boş bırakmıştır.

Bu gruptaki soruları ispatlayan öğrencilerin tamamının cebirsel gösterimleri kullanarak doğrudan ispat yöntemi ile seçtiği önermeyi ispatladığı gözlenmiştir. İspat yapan öğrencilerin (Kod 4) yüzdesi her iki şubede de birbirine yakındır ve tüm öğrencilerin % 23'ünü oluşturmaktadırlar. Örneğin B şubesinden bir öğrenci seçtiği önermeyi (***Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır***.) aşağıdaki şekilde ispatlamıştır:


doğruluğunu ispatladım,

a. Seçtiğiniz ifadeyi **doğrudan ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

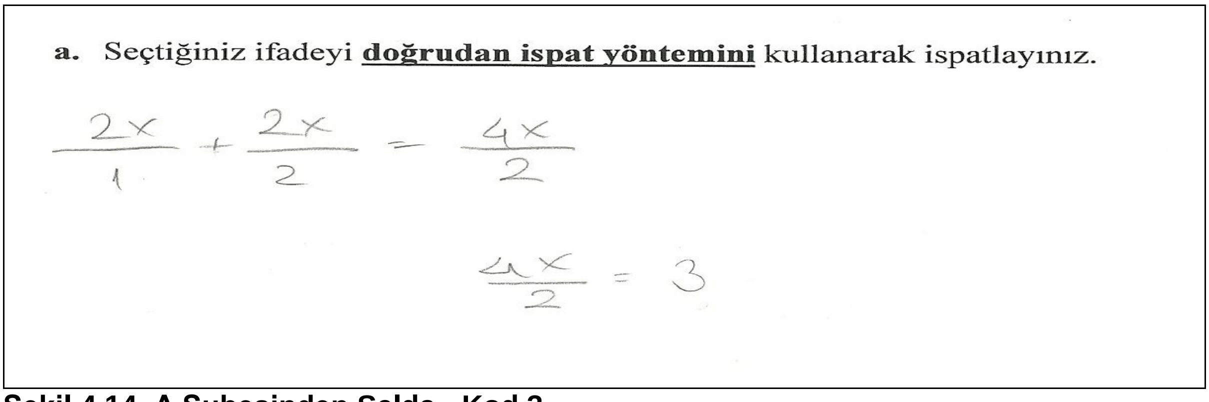
Çift sayı = $2k$ $\quad 2k + \left(\frac{2k}{2}\right) : 3 \quad \frac{2k}{2} = k$

$2k + k = 3k$

$3k : 3 = k$

Şekil 4.13. B şubesinden İlayda - Kod 4

Buna ek olarak A şubesinde öğrencilerin % 11,1'i ispat fikrine sahip olarak yanıt üretmeye başlamış ama çeşitli hatalar nedeni ile ispatı tamamlayamamıştır. Kod 3 ve Kod 4'ü bir arada düşündüğümüzde, A şubesindeki öğrencilerin % 33,3'ünde doğrudan ispat yöntemine ilişkin bir farkındalığın olduğu söylenebilir. Bu öğrencilerden birisi olan A şubesinden Selda yine aynı önermeyi seçmiş, cebirsel ifadeleri kullanarak ispat yapmaya çalışmış ama yaptığı işlem hatası nedeniyle ispatı tamamlayamamıştır:

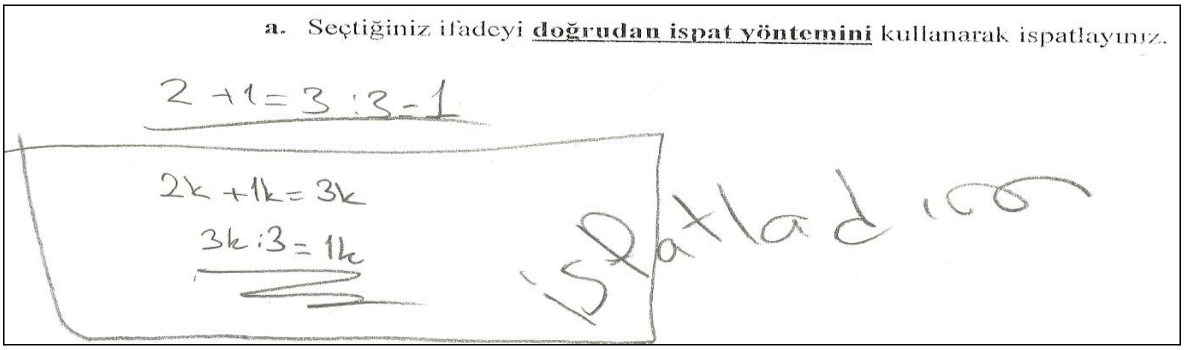

a. Seçtiğiniz ifadeyi **doğrudan ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

$\frac{2x}{1} + \frac{2x}{2} = \frac{4x}{2}$

$\frac{4x}{2} = 3$

Şekil 4.14. A Şubesinden Selda - Kod 3

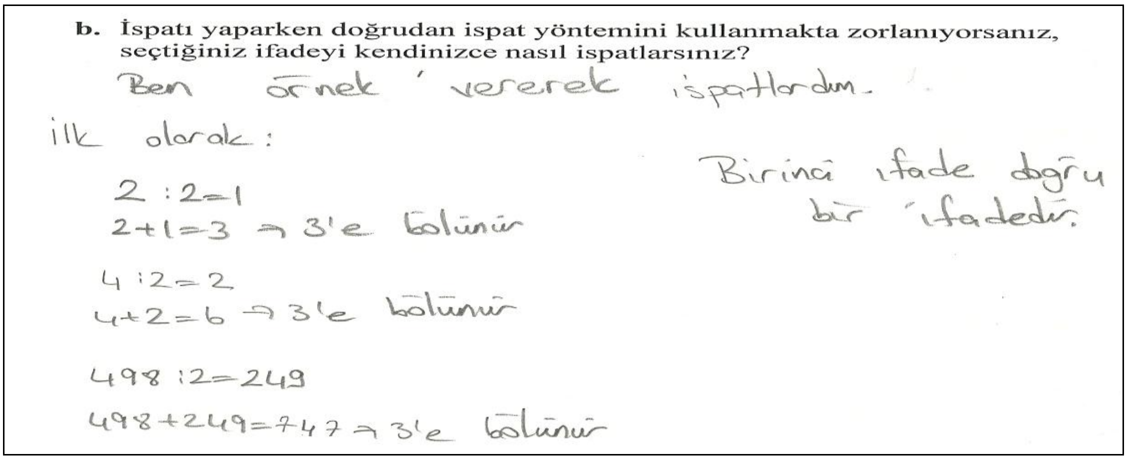
İspat yapan öğrencilerin gerek bu grupta yer alan sorularda, gerekse diğer sorularda ortaya koyduğu ortak bir eğilim cebir kullanarak yaptıkları ispata ek olarak, verili önermeyi örnekle de doğrulamalarıdır. B şubesinden Derya seçtiği önermeyi (***Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır***.) önce örnek vererek doğrulamış, ardından cebir kullanarak ispatı tamamlamıştır. Örnek vermesinin nedenini ise; "*Öncelikle örnek verme ihtiyacı duyuyorum. Önce onu kendi kafamda canlandırabilmek istiyorum. Onu yaptıktan sonra doğru ya da yanlış olduğuna karar veriyorum ve ondan sonra ispatlama yoluna geçiyorum*." şeklinde ifade etmiştir.



Şekil 4.15. B Şubesinden Derya - Kod 4

B şubesindeki öğrencilerin yarıya yakını (% 47,6) soruyu ya boş bırakmış, ya sadece önermenin doğru olduğunu belirtip başka bir açıklama getirmemiş ya da soru ile alakasız gösterimlerde bulunmuşlardır. Buna karşın A şubesindeki öğrencilerin hepsi verili önermelerden birisini seçerek yanıtlarını gerekçeleri ile sunmuşlardır. Bu şubedeki öğrencilerin önemli bir bölümü (% 66,6) önermeyi örnek vererek doğrulamışlardır.

Tüm öğrenciler dikkate alındığında öğrencilerin % 50'si (% 18,8'i tek bir örnek, % 31,2'si birden fazla sayıda örnek deneyerek) önermeyi örnek vererek doğrulamıştır. Bu öğrencilerden birisi olan ve A şubesinde okuyan Sude, sınavda seçtiği önermeyi (***Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır***.) çok sayıda örnek deneyerek doğrulamıştır.



b. İspatı yaparken doğrudan ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

Ben örnek vererek ispatladım.

ilk olarak:

2 : 2=1
2+1=3 → 3'e bölünür

4 : 2=2
4+2=6 → 3'e bölünür

498 : 2=249
498+249=747 → 3'e bölünür

Birinci ifade doğru bir ifadedir.

Şekil 4.16. A Şubesinden Sude - Kod 2

Daha sonra kendisi ile yapılan görüşmede bu soru üzerinde de durulmuştur. Gerçekleştirilen görüşmede sınavlar sırası ile ele alınmış, bu nedenle de ispat testi 2'den önce ispat testi 1'de yer alan sorular üzerine konuşulmuştur. İspat testi 1 ile ilgili geçen diyaloglarda, örnekle doğrulamanın ispat olup olmayışı sorgulanmıştı. Bu tartışmaların ışığında Sude bu soruyu tartışmaya örnekle doğrulamanın ispat olmadığı kanaati ile başlamıştır. Doğrudan ispatı *"Doğrudan ispat deyince benim aklıma ilk olarak, net olarak ispatlamak geliyor. Mesela cebirsel ifade geliyor. Hani o ilk sınavda Mert'in yaptığı ya da Sedat'ın yaptığı gibi. Verilen ifadeye uygun olarak, o sıraya uygun olarak cebirle yapılan ispat."* olarak tanımlayan Sude, sorunun ispatı için sembolik gösterimleri kullanmak istediğini belirtir. Çift sayının sembolünü kolaylıkla hatırladıktan sonra araştırmacının ufak yönlendirmeleri ile ispatı tamamlayabilmiştir. Görüşmede yaşananlar ve Sude'nin verdiği cevap şu şekildedir;

> ***Araştırmacı:*** *Peki, soruya tekrar dönelim, 1'i seçmişsin ya bu ifadeyi birlikte ispatlamaya çalışsak. Mesela soruda da verilmiş ya çift sayı, tek sayı. Bu gösterimleri birlikte hatırlayalım önce. Sana şunu sorsam çift sayıyı biz cebirsel olarak nasıl gösteriyorduk?*
>
> ***Sude:*** *2x*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki, tek sayıyı?*
>
> ***Sude:*** *2x+1*
>
> ***Araştırmacı:*** *Tamam, bunları hatırlıyorsun, peki şimdi kalemi eline alsan bu ilk soruyu bana nasıl ispatlarsın, çünkü sen burada ispat yapmamışsın değil mi?*
>
> ***Sude:*** *Evet örnek vermişim.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Şimdi ispat yapmanı istesem. Soruyu tekrar oku istersen...*
>
> *[Sude soruyu okuyor]*

Sude: *2x 'in yarısını eklememiz lazım. İstenileni yazayım ben. Sayıyı sembolik olarak yazarsam 2x artı 2x bölü 2 olacak. Bunun her zaman 3e bölünebilen bir sayı olması gerek. Her zaman 3'e bölünen bir sayı ... [bir müddet düşünür]*

Araştırmacı: *İstersen şu yazdığın işlemi bir tamamla, bakalım ne çıkacak?*

[Yazdığı işlemi devam ettirir]

Sude: *2x 'i ikiye bölücem. 2 tane x yani. Bölersem sadece x olur. O zaman bu da 2x + x olur yani 3 tane x.*

Araştırmacı: *İşlemi yapınca sen ne buldun?*

Sude: *3x*

Araştırmacı: *Peki, ifade de ne diyordu, bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünebilen bir sayıdır. Doğru mu sence bu bulduğuna göre?*

Sude: *Evet, çünkü 3x. 3x deyince düz mantık yapayım, 2x deyince genelde 2nin katı oluyordu. 3x'de 3'ün katı olur. 3 çarpı bir sayı. Bunun yerine sayı koyarak da görebiliriz. Ama 3 çarpı x olduğu için 3'ün katıdır.*

Görüşmelerde örnek vererek doğrulamanın ispat olup olmayışı üzerine gerçekleştirilen tartışmaların ardından, öğrencilerden örnek vererek doğruladıkları önermeleri yeniden ispatlamaları da istenmiştir. Bazıları yaptıkları doğrulamanın ispat olduğu noktasında ısrarcı olurken, bazıları da Sude gibi ufak destek ve yönlendirmelerle ispatı tamamlayabilmiştir.

B şubesinden Ömer görüşme boyunca cebirsel ifadeleri anlamadığını ve sevmediğini belirten, uygulama boyunca da dersle çok ilgili olmayan bir öğrencidir. İlk sınavda yer alan cebir içeren yanıtlara yönelik yaklaşımını *"Bu cebirli yanıtlara hiç bakmadım, baksam belki anlardım ama cebiri görünce hiç bakmıyorum. Cebiri gördüm, öbürlerine baktım, öbürlerinde cevabı bulunca cebire hiç bakmadım zaten."* şeklinde açıklayarak cebirden kaçındığını belirtmektedir. Ömer ile de aynı önerme üzerinde durulmuş, önermenin ispatını yapmadan önce cebirsel gösterimlere yönelik ayrıntılı bir tartışma yürütülmesi gerekmiştir.

Araştırmacı: *Şimdi ilk gruptaki yanıtına bakalım. Bir ifade seçmişsin ve örnek vererek doğrulamışsın. Ama bu yaptığın sence ispat mı?*

Ömer: *ıı, sanırım değil, çünkü benim yaptığım tüm sayılar için doğru olduğunu göstermiyor.*

Araştırmacı: *Peki, bu ifade nasıl ispatlanır sence?*

Ömer: *Ya tüm sayıları deniycez ki o mümkün değil sanırım, ya da harfli kullanıcaz.*

Araştırmacı: *Gel cebir kullanarak bu ifadeyi birlikte ispatlayalım.*

Ömer: *Bir çift sayı tutalım. a + 2 mi olur?*

Araştırmacı: *Sence?*

Ömer: *Olabilir.*

Araştırmacı: *Çift sayı ne idi?*

Ömer: *2, 4, 6, 8 diye gider.*

Araştırmacı: *Ben şuraya yazayım, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 diye sayılar gidiyor. Çift sayılar hangileri, yuvarlak içine alabilir misin?*

Ömer: *2, 0 da var, 4, 6*

Araştırmacı: *Peki, bu sayılar niçin çift sayı?*

Ömer: *2 bölünebiliyor, 4 de bölünebiliyor, 6 da bölünebiliyor.*

Araştırmacı: *Neye bölünebiliyor?*

Ömer: *Başka sayılara bölünüyor. 6, 3'e bölünüyor, 4, 2'ye bölünüyor.*

Araştırmacı: *9 da 3'e bölünüyor. 9 da mı çift sayı?*

Ömer: *Yok değil.*

Araştırmacı: *O zaman 2, 4, 6 sayılarının ortak özelliği ne? Niçin bu sayılara çift sayı diyoruz?*

Ömer: *Kendisine bölünüyorlar.*

Araştırmacı: *Her sayı kendisine bölünür. Tek sayılar da. Bak bu sayılar üzerinden düşün 2, 4, 6, 8, bu sayıların ortak özelliği ne olabilir?*

Ömer: *2 olabilir. 2'ye bölünüyor. Hıı hepsi 2'ye bölünebildiği için çift sayı diyoruz.*

Araştırmacı: *Gel birlikte yazalım. 2, 2 çarpı 1; 4, 2 çarpı 2; 6, 2 çarpı 3; 0, 2 çarpı 0. O zaman çift sayıların ortak özelliği ne?*

Ömer: *2'nin katı olmaları.*

Araştırmacı: *Çift sayılara tekrar bakalım, 2'yi 0'la çarpmışsın. 2'yi 2 ile çarpmışsın. 2'yi 3 ile çarpmışsın. Bu böyle gidiyor. Şimdi sembolik gösterim formül gibi idi. Ben öyle bir formül bulayım ki bütün çift sayıları kapsasın. Nasıl bulabiliriz?*

[Ömer yanıt vermez]

Araştırmacı: *Çift sayıların ortak özelliğine bakabiliriz. Ondan yola çıkalım. Ortak özellikleri ne idi?*

Ömer: *2'nin katı olmaları.*

Araştırmacı: *Tamam dediğini yazalım o zaman. Hangi sembolü kullanalım, 2'nin katı demişsen 2k olur mu?*

Ömer: *Olur.*

Araştırmacı: *Bak yukarıda yazdığımızı buluruz yine, k yerine 0 koy, k yerine 1 koy, k yerine 2 koy. k yerine hangi sayıyı koyarsan koy çift sayı çıkıyor. Tamam mı?*

Ömer: *Tamam.*

Araştırmacı: *Peki, tek sayılara bakalım bir de. Tek sayılar hangileri?*

Ömer: *1, 3, 5, 7*

Araştırmacı: *Bunların ortak özelliği ne sence?*

Ömer: *Bunlar da 3'e mi bölünüyor? Yok bölünmüyor.*

Araştırmacı: *Çift sayıyı nasıl göstereceğimizi bulduk ya, çift sayılar üzerinden düşünelim bunu da mesela.*

Ömer: *Bunlar 2'ye bölünemiyorlar.*

Araştırmacı: *Evet, doğru 2'ye bölünemeyen sayılar tek sayılar, bir de şu dikkatimi çekti. Sayılar tek çift tek çift diye ilerliyor. Yani tek sayılar çift sayılardan 1 sonra geliyor bu dizilişe göre. O zaman tek sayılar için çift sayılardan 1 fazla olan sayılar da diyebiliriz. Şimdi ben çift sayılara 2k demişsem, tek sayılar da onlardan bir sonra gelen sayılar olduğu için 2k+1 olur mu?*

Ömer: *Evet olur.*

> ***Araştırmacı:*** *k yerine istediğin sayıyı koy şimdi, 1 koy, 2k 2 olur, 2k+1 3. Şimdi de 4 koy mesela, 2k 4, 2kt1 5 olur. Yani k'ya hangi sayıyı verirsen ver 2k hep çift, 2k+1 hep tek çıkar. Tek ve çift sayının gösteriminde bir sorun var mı şimdi?*
>
> ***Ömer:*** *Yok. Formülleri bu imiş anladım şimdi.*

Tek ve çift sayıların gerek özelliklerine, gerekse sembolik gösterimlerine yönelik yürütülen bu tartışmanın ardından Ömer ifadede verilenleri takip ederek ispatı tamamlamıştır. Gerçekleştirilen uygulamada cebirsel gösterimlerin sık sık tekrar edilmesine karşın dersi dinlemeyip, derse katılım göstermeyen öğrenciler sınavlarda ve görüşme sırasında da cebirsel ifadeleri kullanmada zorlanmaya devam etmişlerdir. Gerçekleştirilen birebir görüşmede cebirsel ifadelere yönelik bir anlatım gerçekleştirildiği takdirde, bu anlatımın ardından öğrenciler ispatı yapabilmiş ama görüşmenin ilerleyen kısımlarında başka sorular üzerine konuşulurken cebirsel ifadelerde tekrar zorlanabilmiş, gösterimleri unutabilmişlerdir.

İspat testi 3'de yer alan 1 ve 2. sorularda da öğrenciler doğrudan ispat yöntemini kullanmaları doğrultusunda yönlendirilmişlerdir, bu sorulara verilen yanıtların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız/yanlış olan işlemler yapılmış.

Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.

Kod 3: İspat fikri var ama çeşitli hatalar nedeniyle ispat tamamlanamamış.

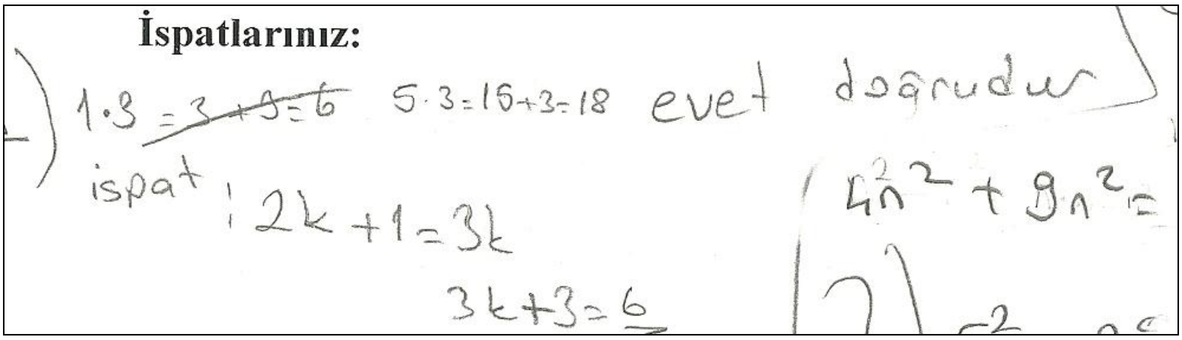
Kod 4: Doğrudan ispat yapılmış.

Tablo 4.13. İspat testi 3, 1. soruya ilişkin bulgular

Çözüme ilişkin kodlar		*A Şubesi (n = 21)*		*B Şubesi (n = 18)*		*Toplam (n=39)*	
		f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1		2	9,5	1	5,5	3	7,7
Kod 2	Tek bir örnek	10	47,6	7	38,8	17	43,6
	Çok örnek	3	14,3	6	33,3	9	23,1
Kod 3		1	4,8	2	11,1	3	7,7
Kod 4		5	23,8	2	11,1	7	17,9

Tablodan da görüldüğü üzere 1. soruyu seçen öğrenciler arasından A şubesindekilerin % 23,8'i, B şubesinin % 11,1'i ispatı eksiksiz olarak tamamlamıştır. A şubesinden % 28,6, B şubesinden % 22,2'sinde ise önermenin ispatının nasıl yapılacağına dair fikir ve uygulama görülmektedir (Kod 3 + Kod 4).

B şubesinden Derya önce örnek vererek doğruladığı önermeyi (***Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz***.) ispatlamaya çalışmış, cebirsel olarak tek sayının gösterimini yazabilmesine rağmen aşağıda görüldüğü üzere ispatı devam ettirememiştir.



Şekil 4.17. B Şubesinden Derya - Kod 3

Görüşme sırasında aynı önermeyi yeniden ispatlayan Derya daha sonra sınav kâğıdında yer alan eksiği de fark eder:

> ***Araştırmacı:*** *Şimdi nasıl yaptığına bakalım birlikte, önce örnek vermişsin, sonra cebirsel gösterime geçmişsin ama burada ufak bir hata var. Yaptığın hatayı fark edebiliyor musun?*
>
> *[Derya cevabını incelemekte]*
>
> ***Araştırmacı:*** *Ben senden bu ifadeyi yeniden ispatlamanı istesem şuraya [beyaz bir kâğıdı göstermekte], bana yeniden ispatlar mısın?*
>
> ***Derya:*** *Cebrisel olarak tek sayıyı, 2k+1 olarak gösteriyorduk.*

***Araştırmacı:** Evet, doğru, bu dediğini yaz istersen.*

***Derya:** Bunu 3 ile çarpıcam, bir de +3. ... Önce şunları çarparım 3 çarpı, 6k olur, +3, bir de + 3. Önce şunları toplarım, 6k+6 olur.*

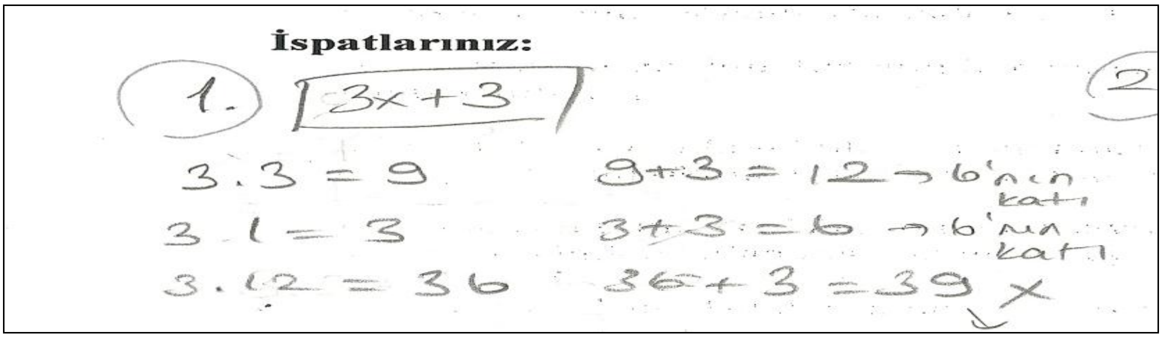
***Araştırmacı:** Şimdi bu bulduğun sayı 6'nın katı mı? Yani bu sayı 6'ya bölünür mü?*

***Derya:** Evet*

***Araştırmacı:** Niçin?*

***Derya:** 6k, çift sayı ve 6'ya bölünür, +6 var o da 6'ya bölünür. [sonra kendi yaptığına, asıl soru formuna bakar] Aaa burada devam etmemişim, 2k+1 i 3 ile çarpıp devam etmem gerekirdi, yapmamışım.*

A şubesinden Beyza ise 1. sorunun cevabına öncelikle cebirsel gösterimle başlamış, tek sayıyı x olarak alarak verili işlemi yazmış ama bu şekilde devam edememiştir. Daha sonra önermeyi örnekle sınama yoluna geçen Beyza çift bir sayı (12) deneyerek önermenin yanlış olduğuna kanaat getirmiştir.



Şekil 4.18. A Şubesinden Beyza - Kod 1

Gerçekleştirilen görüşme sırasında kendisine bu soru sorulmuş ve vermiş olduğu yanıtı tekrar incelemesi istenmiştir. Yapmış olduğu hatayı fark eden Beyza aşağıdaki diyalogda geçtiği üzere, önermenin ispatını da şu şekilde tamamlamıştır:

***Araştırmacı:** Şimdi sorulara biraz ayrıntılı bakarsak, 1. soruda takılmışız. Birlikte bir inceleyelim istersen; soruyu ve cevabını bir incele, nerede takıldığını görebilecek misin bakalım?*

[Beyza kâğıdını inceler]

***Beyza:** Ben burada sanırım karşı örnek vermeye çalışmışım.*

***Araştırmacı:** Kullandığın örnekleri bir incele*

***Beyza:** 3 demişim, 1 ve 12 demişim.*

***Araştırmacı:** Aldığın örnekler uygun mu ifadeye? İfade ne diyor, nasıl başlıyor? "her hangi bir tek sayıyı ..."*

***Beyza:** Ama ben çift almışım, bu da katı olmadığı için yanlış olmuş.*

***Araştırmacı:** Peki, bu birinci soruyu şimdi senden ispatlamanı istesem, yapar mısın?*

Beyza: *Tabii, doğrudan ispat yöntemini kullanıcam. [der ve kâğıda yazmaya başlar] Her hangi bir tek sayı, o zaman 2n+1 derim. 3 ile çarpıp, 3 çarpı 2n+1, bu çarpıma 3 ekle... Eşittir 6'nın katı olan bir şey, 6n gibi mi olur? Sanırım.*

Araştırmacı: *Sana söylenen işlemi bir yap bakalım.*

Beyza: *6n+ 3 yine +3 oluyor, 6n + 6 oldu.*

Araştırmacı: *İfade bu bulduğun sayının 6'nın katı olduğunu iddia ediyor, 6'nın katı mı?*

Beyza: *Evet.*

Araştırmacı: *Niçin?*

Beyza: *Çünkü hem 6n var, hem de ona 6 eklemişiz. Tamam, ikisi de 6'nın katı, o yüzden ifade doğru.*

Araştırmacı: *Evet, işte doğrudan ispatı yapmış oldun bu şekilde. Peki, aslında burada cebir kullanmaya çalışmışsın ama devam edememişsin, bir yerde ufak bir hata olmuş, sonra örneğe geçmişsin. Yaptığını bir incele istersen, nerede hata yapmışsın?*

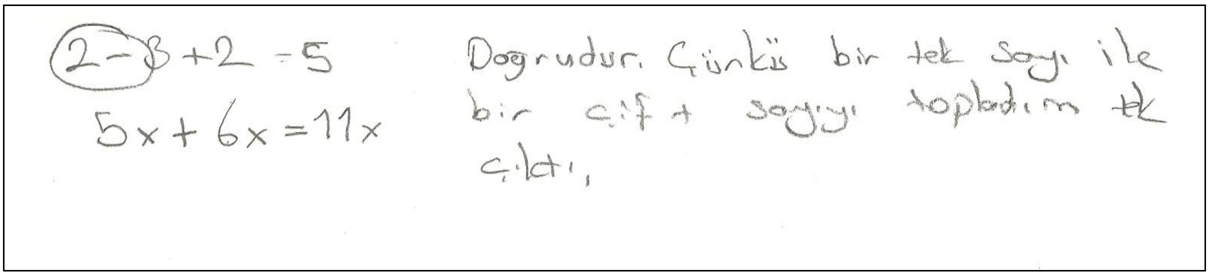
Beyza: *Tek sayıyı gösterememişim, o yüzden de devam edemedim. 3x+3 çıkmıştı o da 6'ya bölünür mü belli değildi.*

İspat testi 3, 2. soruda da öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğilimleri devam etmiştir.

Tablo 4.14. İspat testi 3, 2. soruya ilişkin bulgular

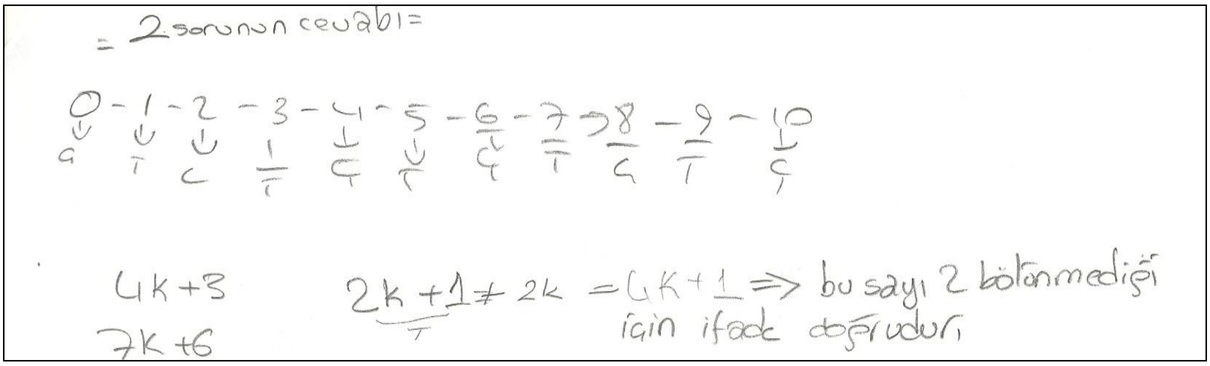
Çözüme ilişkin kodlar		***A Şubesi (n = 23)***		***B Şubesi (n = 20)***		***Toplam (n=43)***	
		f	***%***	***f***	***%***	***f***	***%***
Kod 1		2	8,7	-	-	2	4,7
Kod 2	Tek bir örnek	7	30,4	5	25	12	27,9
	Çok örnek	5	21,7	8	40	13	30,2
Kod 3		-	-	3	15	3	7
Kod 4		9	39,1	4	20	13	30,2

Bu soruyu seçen ve örnek vererek doğrulayan öğrencilerle yapılan görüşmede bu öğrencilerin önemli bir kısmının örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul ettikleri ve cebiri anlama ve uygulamada sorun yaşadıkları gözlenmiştir. Örneğin B şubesinden Aynur, tek bir örnek vererek doğruladığı önermeyi cebirsel olarak da ifade etmeye çalışmış ama doğru sembolik gösterimleri seçemediği için sadece kullandığı örneğe bağlı kalarak önermenin doğruluğunu savunmuştur.



Şekil 4.19. B Şubesinden Aynur - Kod 2

Bu soruyu seçen 43 öğrencinin % 30,2'si önermenin ispatını eksiksiz olarak yaparken, ispat fikrine sahip (Kod 4 ve Kod 3) öğrencilerin oranı % 37,2'ye çıkmaktadır. A şubesinden ispatı eksiksiz gerçekleştiren öğrencilerden birisi olan Deniz tek ve çift sayıların cebirsel gösterimini anımsayabilmek için sayıları sıralayarak tek ve çift sayılar arasındaki ilişkiyi öncelikle düşünmüş ardından da ispatı aşağıdaki şekilde tamamlamıştır.



Şekil 4.20. A Şubesinden Deniz - Kod 4

Sınavda örnek vererek doğrulama yapan ve yanıtı Kod 2'de yer alan Gizem (B şubesi) ile örnekle doğrulama ve ispat arasındaki fark görüşmenin ilk kısımlarında tartışılmıştı. Bu soruya gelindiğinde Gizem önceki tartışmaların etkisi ile soruya genellenebilir bir yargıya ulaşmak üzerinden yaklaşmıştır:

> ***Gizem:*** *Yine genelleştirmeden gideriz cebirsel olarak. Mesela bir tek ve bir çift sayıyı topladığımızda her zaman tek sayı elde ederiz. Tek sayı dediğimizde mesela, 3a olsa, yok…*
>
> ***Araştırmacı:*** *Nasıl gösteriyorduk tek sayıları? Çift sayılar üzerinden düşün.*
>
> ***Gizem:*** *Çift sayılardan her zaman 1 fazla olan sayılar olabilir.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet. 3a demiştin ya, onu bir düşünelim mesela. a yerine 2 verelim, ne oldu 3 çarpı 2, 6 eder, çift sayı oldu.*
>
> ***Gizem:*** *Hı, evet olmaz. 2a çift olur, bir fazlası da 2a+1. Buraya öyle mi yazayım?*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet, yaz bakalım.*
>
> ***Gizem:*** *2a [kağıda da yazar]*

Araştırmacı: *Peki, bu yazdığın ne oldu?*

Gizem: *Çift sayı.*

Araştırmacı: *Bir de senden tek sayı yazmanı istiyor değil mi?*

Gizem: *O da 2a+1 olur [yazar].*

Araştırmacı: *Soru bize bir tek sayı bir de çift sayı al diyor, sen bu sayıları aldın, bunları topla diyor, bir topla bakalım.*

Gizem: *3a, yok ne yaptım ben…*

Araştırmacı: *Aldığın tek ve çift sayıyı yan yana düzgünce yazarak topla istersen. Nasıl topluyorduk benzer terimleri toplayıp, benzemeyenleri yan yana yazıyorduk artı işareti ile değil mi?*

Gizem: *4a artı 1 olur.*

Araştırmacı: *Tamam, peki bu sayı sence tek sayı mıdır? Çift sayı mıdır?*

Gizem: *Tek.*

Araştırmacı: *Niçin?*

Gizem: *1 verdim mesela 5 çıkıyor.*

Araştırmacı: *İfadenin savunduğu şeyi bulmuş olduk mu?*

Gizem: *Evet her zaman tek sayıdır diyordu, tek sayı bulduk biz de.*

Cebirsel gösterimleri kullanmakta ilk etapta bir miktar bocalayan Gizem ufak bir yönlendirme ile ispatı tamamlayabilmiştir. Buna karşın 4a+1 sayısının tek ya da çift sayı olup olmadığını yine a sembolüne sayısal örnek verip deneyerek bulmuştur.

İspat testi 2 Grup 1'de yer alan sorular ile ispat testi 3'te yer alan 1. ve 2. sorular birlikte değerlendirildiğinde öğrencilerin önemli bir bölümünün örnek vererek doğrulama eğiliminde olduğu gözlenmektedir. Bu öğrenciler cebiri anlama ve uygulamada sorun yaşamaktadırlar. Bu eğilime karşın öğrenciler % 17,9 ile % 30,2 arasında değişen bir oranda verilen önermeleri eksiksiz olarak ispatlayabilmiştir. Bu oran çeşitli hatalar nedeniyle ispatı tamamlayamayan ama doğrudan ispata yönelik fikri olan öğrencileri de hesaba kattığımızda % 25,6 ile % 37,2 düzeylerine çıkabilmiştir.

4.2.2.2. Öğrencilerin Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

Bu başlık altında ispat testi 2 Grup 2'de yer alan soru ile ispat testi 3'de yer alan 5 ve 6. sorular incelenecektir.

İspat Testi 2'de, Grup 2 başlığı altında öğrenciler önermeyi karşı örnek vererek ispatlamaları doğrultusunda yönlendirilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar aşağıdaki kod sistemi kullanılarak değerlendirilmiştir:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfadenin doğru olduğu düşünülerek çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: Karşı örnek vererek ispat yapılmış.

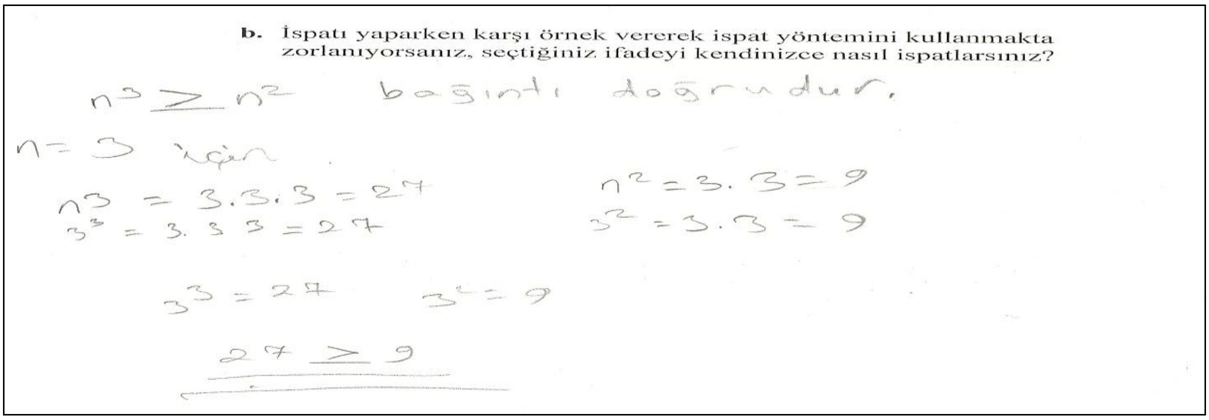
Tablo 4.15. İspat testi 2, 2. Gruba ilişkin bulgular

Çözüme ilişkin kodlar	***A Şubesi (n = 27)***		***B Şubesi (n = 21)***		***Toplam (n = 48)***	
	f	***%***	***f***	***%***	***f***	***%***
Kod 1	5	18,5	7	33,3	12	25
Kod 2	4	14,8	4	19	8	16,7
Kod 3	18	66,6	10	47,6	28	58,3

Her iki şubede de öğrencilerin büyük bir kısmı 2. soruyu seçerek ispatlamaya çalışmıştır. Verili sorular içerisinden A şubesinden 21 öğrenci 2. soruyu, 5 öğrenci 1. soruyu seçmiş, bir öğrenci soruyu boş bırakmıştır. B şubesinden ise 16 öğrenci 2. soruyu, 4 öğrenci 1. soruyu seçmiş, bir öğrenci ise soruyu boş bırakmıştır.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar incelendiğinde, her iki şubede de öğrencilerin önemli bir bölümünün karşı örnek vererek seçtikleri önermeyi ispatladıkları görülmektedir, bu oran tüm öğrenciler dikkate alındığında % 58,3'dür. Yalnız bu oran A şubesinde kayda değer bir şekilde daha yüksektir.

Diğer taraftan bazı öğrenciler (her iki şubede de dörder öğrenci) denedikleri tek bir örnek önermeyi doğruladığı için seçtikleri önermenin doğru olduğunu savunmuşlar, soruda seçtikleri önermeyi karşı örnek vererek ispatlamaları istendiği halde bu yönteme yönelik bir uygulama gerçekleştirmemişlerdir. Örneğin B şubesinden Tuna seçtiği önermenin (***Tüm n tamsayıları için,*** $n^3 \geq n^2$ ***dir.***) doğru olduğunu aşağıdaki gibi savunmaktadır:



b. İspatı yaparken karşı örnek vererek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

$n^3 \geq n^2$ bağıntı doğrudur.

$n = 3$ için

$n^3 = 3.3.3 = 27$ $\quad$ $n^2 = 3.3 = 9$

$3^3 = 3.3.3 = 27$ $\quad$ $3^2 = 3.3 = 9$

$3^3 = 27$ $\quad$ $3^2 = 9$

$27 \geq 9$

Şekil 4.21. B Şubesinden Tuna - Kod 2

Sınavda tek bir örnek deneyerek önermeyi doğrulayan Tuna görüşme sırasında ilk anda verdiği yanıtın doğru olduğunu savunmuş, ardından da başka bir örnek denemesi doğrultusunda yönlendirilmiştir. Bu yönlendirme ile soruda ifade edilen ispat yöntemi kendisine aşağıdaki şekilde sorgulatılmıştır:

Araştırmacı: *Şimdi başka bir sayı daha denesen, mesela -1. -1'in üçüncü kuvvetini alsan, nasıl yaparsın?*

Tuna: *Üç tane -1 çarparım. -1 olur.*

Araştırmacı: *-1'in ikinci kuvvetini alsan bir de, ne olur?*

Tuna: *1 olur.*

Araştırmacı: *Peki, bu yaptığına göre ifade doğru mu?*

Tuna: *Yok, yanlış.*

Araştırmacı: *Sen sınavda 3'ü denemişsin ifade doğru çıkmış, şimdi -1'i denedin yanlış çıktı. Bu durumda ifade doğru mu yanlış mı sence?*

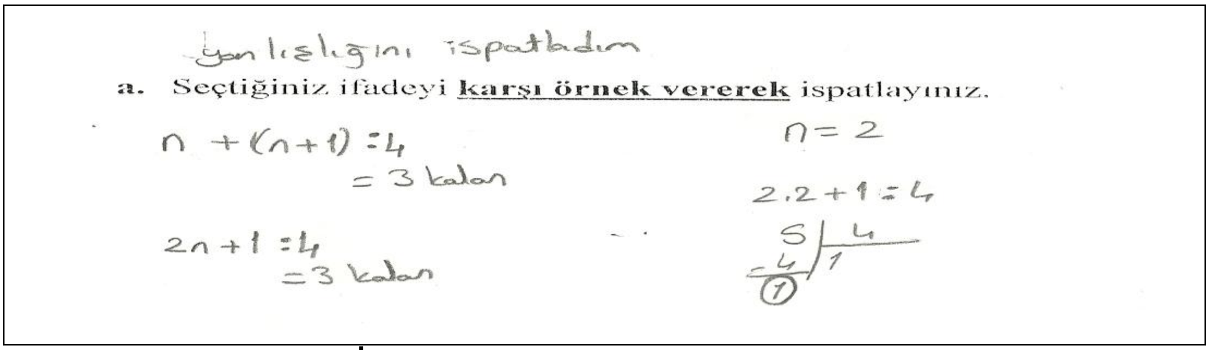
Tuna: *Yanlış, bu son örnek her zaman doğru olmadığını gösterdi.*

Araştırmacı: *Peki, sana en başta karşı örnek vermek ne demek diye sormuştum, sen de o doğru diyorsa yanlış olduğunu gösteren bir örnek vermek demiştin. Bu soruyu yaparken bunun farkında mıydın? Çünkü yanlış olduğunu göstermeye çalışmamışsın.*

Tuna: *Yok o an aklıma gelmedi. O yüzden b şıkkına yaptım sanırım.*

Genel olarak sınav esnasında soruda verilen ispat yöntemlerine yönelik bir farkındalık ortaya koymayan Tuna, görüşme sırasında daha başarılı bir performans ortaya koymuş, görüşmeci ile tartışarak yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere doğru sonuca ulaşabilmiştir. Gerek uygulama sonrası girdikleri sınavlar, gerekse gerçekleştirilen bu görüşmeler de ispat öğretim sürecinin birer bileşeni şeklinde etki yaratmıştır.

Karşı örnek vererek yapılan ispatlarda bazı öğrencilerin seçtikleri önermeyi önce cebirsel olarak ifade ettikleri, önermede yer alan ifadeyi bu şekilde gösterdikten sonra örnek vererek önermeyi çürüttükleri de gözlenmiştir. B şubesinden İlayda bu öğrencilerden birisidir:



Şekil 4.22. B Şubesinden İlayda - Kod 3

Bu eğilimde olan öğrencilerde de sınav esnasında ispat yönteminin adına yönelik bir farkındalık olmadığı gözlenmektedir. Görüşme sırasında kendisine ispat yaparken niçin ilk önce cebir kullandığı sorulan İlayda, *“Cebirle denedim, çünkü cebirle bütün sayılar için genel bir yargıya ulaşıyorduk. Örnek çok da doğru olmaz diye cebir kullandım. Ama bulduğum sonucu 4’e bölemedim. Sonra örnek üzerinden düşündüm ve yanlış olduğunu gördüm.”* şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. İlk olarak önermenin doğruluğunu ispatlayacağını düşünen İlayda, cebir kullanarak ispata başlamış, ilerleyememiş, daha sonra denediği örnek üzerinden önermenin yanlış olduğunu fark etmiştir. Soruda "karşı örnek vererek ispat yöntemi" adlandırmasını gördüğünde önermenin yanlış olacağı çıkarımında bulunmamış, önermeyi doğru ya da yanlış olduğunu görmek için ispata başlamıştır. Sınavlar sırasında öğrencilerin ispat yöntemlerinin adlarına yönelik farkındalıklarının düşük olduğu gözlenmiştir. Bu da ispat yöntemlerine yönelik adlandırmanın uygulamanın son haftalarında, yöntemlere yönelik hatırlatmalarda bulunulurken yapılmış olmasının etkili ve öğretici bir tercih olmadığını göstermektedir. Yöntemlere yönelik adlandırma daha erken süreçlerde, ispat yöntemleri sınıfta ilk ele alındığı anlarda yapılabilirdi.

İspat testi 3’de yer alan 5 ve 6. sorularda da öğrenciler karşı örnek vererek ispat yöntemini kullanmaları doğrultusunda yönlendirilmişlerdir. Bu sorular için aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfadenin doğru olduğu düşünülerek çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: Karşı örnek vererek ispat yapılmış.

Tablo 4.16. İspat testi 3, 5. soruya ilişkin bulgular; " İki sayının karelerinin toplamı her zaman çift sayıdır."

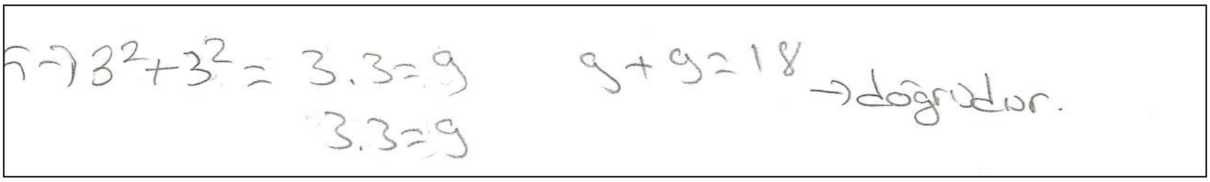
Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 21)*		*B Şubesi (n = 20)*		*Toplam (n = 41)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	1	4,8	2	10	3	7,3
Kod 2	-	-	4	20	4	9,8
Kod 3	20	95,2	14	70	34	82,9

Tablo 4.17. İspat testi 3, 6. soruya ilişkin bulgular; " a sayısı (b + c)'yi tam bölen bir sayı olsun. Bu durumda a sayısı hem b, hem de c sayısını tam olarak bölen bir sayıdır."

Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 2)*		*B Şubesi (n = 8)*		*Toplam (n = 10)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	-	-	1	12,5	1	10
Kod 2	-	-	-	-	-	-
Kod 3	2	100	7	87,5	9	90

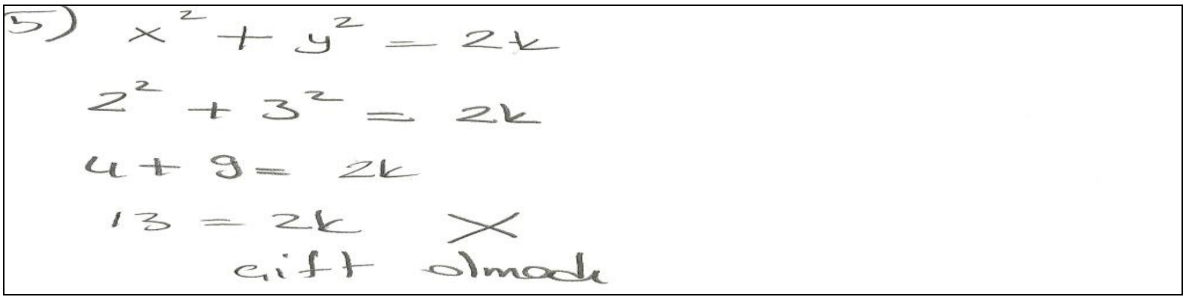
Her iki şubenin karşı örnek vererek yapılan ispatlardaki başarı düzeyi oldukça yüksektir. Bu oran bu soruları seçen tüm öğrencilerde 5. soruda % 82,9, 6. soruda % 90'dır. Aynı ispat yöntemi ile ispatlanacak bu iki soru içerisinden öğrenciler 5. soruyu yoğunluklu olarak seçmiş, buna karşın 6. soruyu seçen öğrenci sayısı oldukça az olmuştur. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde onlara bu sekiz önermeden dördünü seçerken neye dikkat ettikleri de sorulmuştur. Öğrencilerin çoğu soruları seçerken önermenin kolay ve anlaşılır oluşuna, üslü sayılar, eşitsizlik gibi önermeyi zorlaştırdığını düşündükleri matematiksel gösterimleri içerip içermediğine dikkat ettiklerini söylemişlerdir. Bu iki sorunun seçimini belirleyen temel etken de ispatlanacağı yöntem değil, önermenin öğrencilere kolay ve anlaşılır gelip gelmeyişi olmuştur.

B şubesinden 5. soruda verilen önermenin doğruluk değerinin yanlış olmasına rağmen, önermeyi doğru olarak kabul eden 4 öğrenci önermeyi tek bir örnekle deneyerek doğrulamışlardır. Ayşe denediği tek bir örneğin genellenebilir bir yargı sunacağını düşünerek bu hataya düşen öğrencilerden birisidir.



Şekil 4.23. B Şubesinden Ayşe - Kod 2, 5. soru

A Şubesinden Sude ise aynı önermeyi önce cebirsel olarak ifade ederek, şu şekilde ispatlamıştır:



Şekil 4.24. A Şubesinden Sude - Kod 3, 5. soru

Sude'nin bu yanıtında da gözlendiği üzere hazır bulunuşluk testinde sembolik gösterimleri kullanmayan öğrenciler, gerçekleştirilen uygulamanın ardından cebirsel ifadeleri daha çok kullanmaya başlamıştır.

Karşı örnek vererek ispat yönteminin kullanıldığı sorularda öğrencilerin ispatı yapma oranları oldukça yüksektir. Buna karşın bazı sorularda, soruda kullanılacak ispat yönteminin verilmesine rağmen öğrenciler karşı örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri bir örneğin ifadeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin doğru olduğunu savunmuşlardır. Bu oran oldukça düşüktür, % 0 ile % 16,7 arasında değişmektedir. Bu öğrencilerde ispat yönteminin ismine yönelik bir farkındalık olmadığı gözlenmektedir.

4.2.2.3. Öğrencilerin Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

Bu başlık altında ispat testi 2 Grup 3'te yer alan soru ile ispat testi 3'te yer alan 3 ve 4. sorular incelenecektir.

İspat testi 2'de, Grup 3 başlığı altında öğrenciler önermeyi tüketerek ispat yöntemini kullanarak ispatlamaları doğrultusunda yönlendirilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar aşağıdaki kod sistemi kullanılarak değerlendirilmiştir:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: Sadece birkaç sayı denenmiş, kümedeki tüm elemanlar denenip tüketilmemiş, örnekle doğrulama yapılmış.

Kod 3: Tüketerek ispat yöntemi uygulanmış ama önermenin hatalı geçirilmesi veya işlem hatası gibi nedenlerle yanlış sonuca ulaşılmış, başka bir önerme ispatlanmış.

Kod 4: Tüketerek ispat yapılmış.

Tablo 4.18. İspat testi 2, 3. Gruba ilişkin bulgular

Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 27)*		*B Şubesi (n = 21)*		*Toplam (n= 48)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	4	13,8	10	47,5	14	29,2
Kod 2	13	48,1	7	33,3	20	41,7
Kod 3	4	14,8	-	-	4	8,3
Kod 4	6	22,2	4	19	10	20,8

Grup 3 içerisinde yer alan sorulardan A şubesinden 17 öğrenci 1. önermeyi, 8 öğrenci 2. önermeyi seçmiş, 2 öğrenci soruyu boş bırakmıştır. B şubesinde ise 11 öğrenci 1. önermeyi, 7 öğrenci 2. önermeyi seçmiş, 3 öğrenci soruyu boş bırakmıştır.

Kodların frekans dağılımına bakıldığında, tüketerek ispat yöntemini uygulamış ama çeşitli nedenlerle ispatı tamamlayamamış öğrencileri de (Kod 3) dâhil ettiğimizde, A Şubesi öğrencilerinin B Şubedeki öğrencilere oranla tüketerek ispat mantığını daha çok uyguladıkları gözlenmektedir. A şubesindeki öğrencilerin %

37'si, B şubesindeki öğrencilerin % 19'ü tüketerek ispat yöntemi mantığını uygulamışlardır.

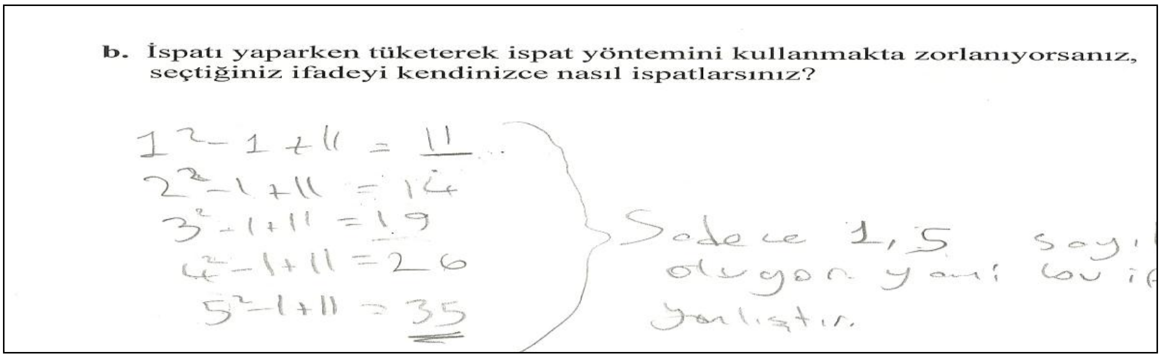
A şubesinden Berk, 2. önermeyi (***Bir sayının karesinin birler basamağındaki rakam, her zaman {0,1,4,5,6,9} kümesinin bir elemanıdır***.) seçerek ispatlayan tek öğrenci olmuştur. Görüşme sırasında gerçekleştirdiği ispatı anlatması istenmiş, bu anlatım sırasında her hangi bir sayının karesinin birler basamağını, o sayının birler basamağının karesinin belirleyeceğini şu şekilde belirtmiştir:

> **Berk:** *Şöyle bir düşünceye sahiptim aslında, bir sayının birler basamağı zaten bu rakamlardan oluşur. Tek tek onlarda denesem, 1028'in karesini alsam zaten oradaki 8 rakamı ona etki edecek, sonucun birler basamağına yani. O yüzden sadece birler basamağına baktım.*

Berk'in birler basamağını oluşturan rakamların karelerini tek tek inceleyerek gerçekleştirdiği tüketerek ispat şu şekildedir:

Şekil 4.25. A Şubesinden Berk - Kod 4

Yine A şubesinden Eylem ise tüketerek ispat yöntemi mantığına uygun olarak kümedeki elemanları tek tek denemiş, buna karşın seçtiği önermede (***A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman asal sayıdır.***) yer alan matematiksel gösterimi kendi yanıtına yanlış aktardığı için ("$n^2 - n + 11$" yerine "$n^2 - 1 + 11$" yazmıştır) ispatı doğru olarak tamamlayamamış, önermenin yanlış olduğunu savunmuştur.



b. İspatı yaparken tüketerek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

$1^2 - 1 + 11 = 11$

$2^2 - 1 + 11 = 14$

$3^2 - 1 + 11 = 19$

$4^2 - 1 + 11 = 26$

$5^2 - 1 + 11 = 35$

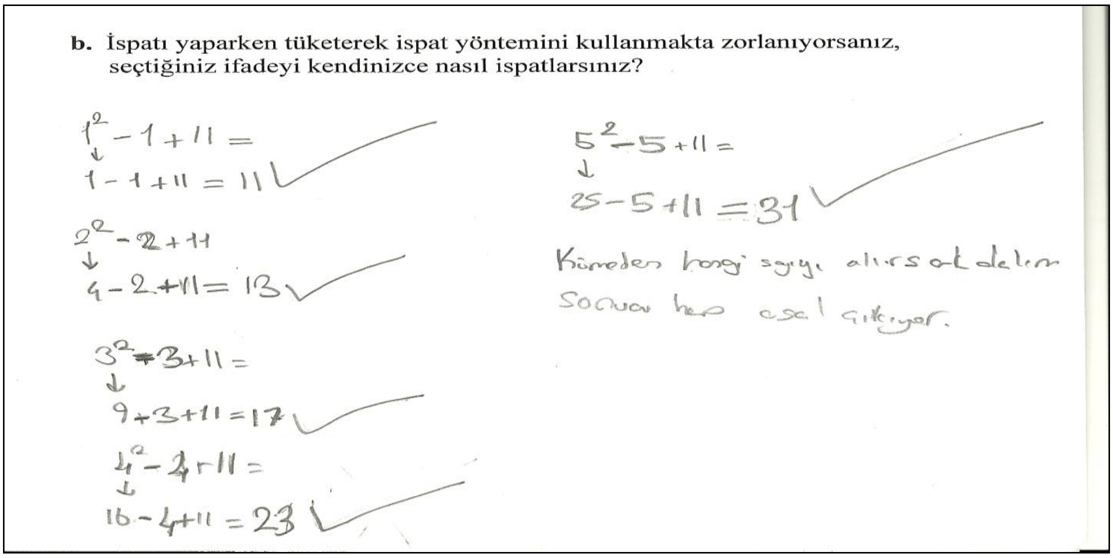
Sadece 1,5 sayı olduğu yani bu i yanlıştır.

Şekil 4.26. A Şubesinden Eylem - Kod 3

Yapılan görüşmede bu soruya geçilmeden önce öğrencilere "tüketerek ispat" denildiğinde akıllarına ne geldiği de sorulmuştur. Bu soruya verdiği cevap dikkate alındığında, sınav esnasında da adı geçen ispat yöntemine yönelik bir farkındalık taşımadığını ifade eden A şubesinden Ömer seçtiği önermenin (***A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman asal sayıdır.***) ispatını eksiksiz olarak tamamlamıştır. Buna karşın verdiği yanıtın tüketerek ispat olup olmadığından emin olmadığı için yanıtını b şıkkına yapmıştır. Görüşme sırasında bu durum da kendisine sorulmuştur:

> ***Ömer:*** *Hocam ben burada, hani siz tüketerek ispat demişsiniz ya onu çok bilemeden yaptım. O yüzden b şıkkına yaptım.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Ama acaba senin burada yaptığın tüketerek ispat olabilir mi? Evet sen tüketerek ispatı bilmeden yapmışsın ama gel birlikte yaptığını inceleyelim. Soruda bir A kümesi verilmiş ve n sayısı bu kümenin bir elemanı demiş.*
>
> ***Ömer:*** *Ben de o yüzden o kümedeki sayıları denedim. n sayısı bu kümedekiler olabilirdi ancak. Tek tek o sayıları denedim ben de. Aslında evet deneyerek tüketmiş oldum bu kümeyi. Ama bu da biraz örnekleme gibi ben o yüzden emin olamadım ispat mı diye.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet, ama bu soruda kullanacağın küme sana verilmiş zaten. Artık ifadede iddia edilen şey tüm sayılar için doğru olmak durumunda değil. Soru ne diyor bu küme için doğru diyor. O yüzden tüm sayılar genellemeye ulaşmamıza gerek yok.*
>
> ***Ömer:*** *Doğru. O zaman bu da ispat.*

Ömer'in seçtiği önerme için gerçekleştirdiği ispat şu şekildedir;


b. İspatı yaparken tüketerek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

$1^2 - 1 + 11 =$
$\downarrow$
$1 - 1 + 11 = 11$ ✓

$2^2 - 2 + 11$
$\downarrow$
$4 - 2 + 11 = 13$ ✓

$3^2 - 3 + 11 =$
$\downarrow$
$9 - 3 + 11 = 17$ ✓

$4^2 - 4 + 11 =$
$\downarrow$
$16 - 4 + 11 = 23$ ✓

$5^2 - 5 + 11 =$
$\downarrow$
$25 - 5 + 11 = 31$ ✓

Kümeden hangi sayıyı alırsak alalım sonuç her asal çıkıyor.

Şekil 4.27. A Şubesinden Ömer - Kod 4

Öğrencilerin önemli bir bölümü (% 41, 7'si) önermeyi küme içerisinden 1 ya da 2 örnek deneyerek (Kod 2) doğrulama eğilimi göstermiştir. Görüşmede bu öğrencilerle verdikleri yanıt üzerine konuşulmuş, yönteme yönelik bir farkındalık görüşme sırasında geliştirilmeye çalışılmıştır. B şubesinden Derya verdiği yanıtta sadece 3 sayı örneği deneyerek önermenin doğru olduğunu savunmuştur. Bu soru dışında, sınavlarda yer alan hiçbir tüketerek ispat sorusunu yanıtlama tercihinde bulunmayan Derya ile önermenin (***A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman asal sayıdır.***) ispatına geçilmeden önce yönteme ve önermenin içerdiği anlama yönelik bir tartışma yürütülmüştür. Bu tartışma ve tartışmanın ardından Derya'nın yönteme ilişkin geliştirdiği yaklaşım şu şekildedir:

> ***Araştırmacı:*** *n sayısı A kümesinin bir elemanı olsun deniyor soruda. A kümesi nelerden oluşuyor?*
>
> ***Derya:*** *1, 2, 3, 4, 5*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki, bu durumda sence n sayısı 10 olabilir mi?*
>
> ***Derya:*** *Hayır.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Niçin?*
>
> ***Derya:*** *Çünkü burada [A kümesini gösteriyor] 10 yok.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet, doğru, peki bu durumda n hangi sayılar olabilir?*
>
> ***Derya:*** *A kümesindeki, 1 - 5 arasındaki sayılardan olabilir.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Tamam, ne demiş olduk, n bu kümenin bir elemanı olsun. Daha sonra şu işlemi yaptırıyor; n'in karesini al, kendisini çıkar ve 11 ekle. Bu işlemi yaptığında bulduğun sayı her zaman asal sayıdır demiş. Sanırım soruyu anladık.*
>
> ***Derya:*** *Evet.*

Araştırmacı: *Peki, bu ifade için tüketerek ispat ne demek olabilir? Biz neyi tüketebiliriz ispat yaparken?*

Derya: *Bu soruda sadece 1 - 5 arasındaki sayıları deneyeceğim. Her zaman dediği için n yerine A kümesindeki tüm sayıları koyacağım. Öyle yapacağım ispatı. Şimdi anladım.*

Yine aynı şubeden Gizem ise tek bir örnek deneyerek önermenin doğruluğunu savunmuştur. Soruya ilişkin tartışmaya geçmeden önce kendisine tüketerek ispatın ne demek olduğu sorulduğunda, yöntemin adından ve Grup 3'de yer alan sorulardan yola çıkarak *"Sırayla giden, yani sırayla elenen, biten... Sınırlı bir kümemiz var, o kümeyi sırayla deniyoruz. Hani buradaki soruda da küme verilmiş mesela."* tanımlamasında bulunmuştur. Onunla da verdiği yanıt üzerinden bir tartışma yürütülmüştür:

Araştırmacı: *Senin yaptığına bakıyorum da sen sadece bu küme içerisinden 3'ü denemişsin burada. 1, 2, 4 veya 5'i niye denemedin?*

Gizem: *O an tek bir örneğin yeteceğini düşündüm. Sorunun doğruluğunu bu şekilde ortaya çıkarmaya çalıştım.*

Araştırmacı: *Peki, şimdi bu ispatı yapmanı istesem, sen yine 1 ya da 2 örnek mi denerdin?*

Gizem: *Yok tüketerek ispat dedik ya, o yüzden hepsini denerdim.*

Görüşme sırasında yukarıdaki örneklerden de görüldüğü üzere Kod 2'de yer alan bazı öğrenciler kolaylıkla yönteme ilişkin doğru yanıtlar üretebilmiş ve ispatı tamamlayabilmiştir. Sınavda niçin bu performansı göstermedikleri sorulduğunda ise o an çok ayrıntılı düşünmedikleri gerekçesini sunmuşlardır. Buna karşın bu grupta yer alan öğrencilerin bazılarında ise yönteme ilişkin farkındalığa daha zor ulaşılabilmiştir. Bu sorudan önce gerek İspat Testi 1, gerekse daha önceki sorulara dair gerçekleştirilen tartışmaların etkisi ile Tuna (B şubesi) tek bir örnek kullanmaya en başta şüpheci yaklaşmış ama daha sonra başka bir yaklaşım geliştiremediği için örnekle doğrulama ısrarını sürdürmeye devam etmiştir:

Araştırmacı: *Grup 3'te 1. ifadeyi seçmişsin, burada hangi sayıları vermiş sana?*

Tuna: *1, 2, 3, 4, 5.*

Araştırmacı: *Tamam, bu kümeye göre n sayısı 6 olabilir mi mesela?*

Tuna: *Yok olmaz, kümede yok.*

Araştırmacı: *Sen bu ifadenin ispatında kümede yer alan tek bir örneği denemişsin. 2'yi denemişsin. Bu denemene göre ifade doğrudur demişsin. Bu tek bir deneme ispat için yeterli mi sence?*

Tuna: *Bence değil. Belki tek sayıda yanlış çıkabilirdi.*

Araştırmacı: *Peki, bu ifadeyi şimdi ispatlamanı istesem senden, nasıl yaparsın?*

Tuna: *Bu yaptığım gibi, ya da 2 değil de 3'ü denerdim.*

Araştırmacı: *3'ü denemen yeterli olur mu peki?*

Tuna: *Yeterli bence.*

Araştırmacı: *Peki ya 5'i denediğinde doğru çıkmazsa, ya da 4'ü...*

Tuna: *O zaman bir çift bir de tek sayı denerim. Yeterli olur.*

Araştırmacı: *Ama yine hep aynı noktaya geliyoruz, elimizde içinde sonlu sayıda eleman bulunan bir küme var ve verilen ifadedeki iddia bu kümenin tüm elemanları için geçerli olmalı diyor. Sen kümenin hepsini değil de birkaç elemanını denersen tüm küme için bir genellemeye ulaşmış olur musun?*

Tuna: *Bilmem, belki olur.*

Araştırmacı: *Ama bu durumda da belki ifadeyi yanlışlayacak örneği denememiş olma ihtimalin kalıyor geride. Yani tüm küme için bir genellemeye ulaşmış olmuyorsun aslında çünkü senin denemediğin elemanlar için ne sonuç çıkacak bilmiyorsun.*

Tuna: *Doğru.*

Araştırmacı: *Bu yüzden tüketerek ispatta aslolarak yapılması gereken şey tek tek tüm elemanları denemek, deneyerek kümeyi tüketmek...*

Tuna: *Deneyeyim mi şimdi?*

Araştırmacı: *Olur.*

[Tuna tek tek denemeye başlar ve hepsinde ifade doğrulanır]

Araştırmacı: *Peki, emin olmak için sence hepsini denemek gerekir mi?*

Tuna: *Gerekli, yapılabilirmiş aslında.*

Tüketerek ispatı daha sonra *"sorunun verdiği sayıları, kümede olanları eleyerek, azaltarak"* yapılan ispat olarak tanımlayan Tuna örneğinde görüldüğü üzere, bazı öğrencilerde ispat ve ispat yöntemlerine yönelik farkındalık daha yavaş ve zor gelişebilmiştir.

İspat testi 3'de yer alan 3 ve 4. sorularda da öğrenciler tüketerek ispat yöntemini kullanmaları doğrultusunda yönlendirilmişlerdir. Bu soruların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: Sadece birkaç sayı denenmiş, kümedeki tüm elemanlar denenerek tüketilmemiş.

Kod 3: Tüketerek ispat yöntemi uygulanmış ama önermenin hatalı geçirilmesi veya işlem hatası gibi nedenlerle yanlış sonuca ulaşılmış, başka bir önerme ispatlanmış.

Kod 4: Tüketerek ispat yapılmış.

Tablo 4.19. İspat testi 3, 3. soruya ilişkin bulgular; " n, {1,2,3,4} kümesinin bir elemanıdır, bu durumda her zaman $(n + 2)^2 \geq 3^2$ dir."

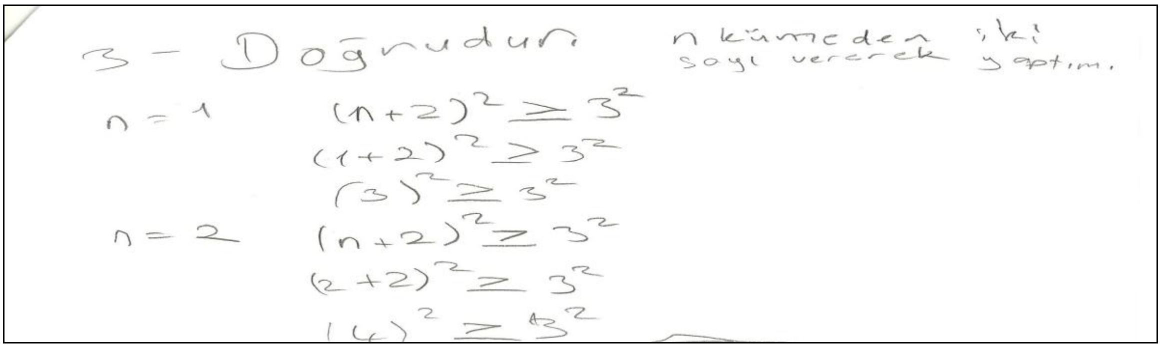
Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 6)*		*B Şubesi (n = 9)*		*Toplam (n=15)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	1	16,6	2	22,2	3	20
Kod 2	-	-	2	22,2	2	13,3
Kod 3	-	-	2	22,2	2	13,3
Kod 4	5	83,3	3	33,3	8	53,3

Tablo 4.20. İspat testi 3, 4. soruya ilişkin bulgular; " n, {4,6,8,10,12} kümesinin bir elemanı olsun, bu koşulu sağlayan tüm n sayıları iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir."

Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 6)*		*B Şubesi (n = 6)*		*Toplam (n=12)*	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	1	16,6	3	50	4	33,3
Kod 2	-	-	-	-	-	-
Kod 3	-	-	1	16,6	1	8,3
Kod 4	5	83,3	2	33,3	7	58,3

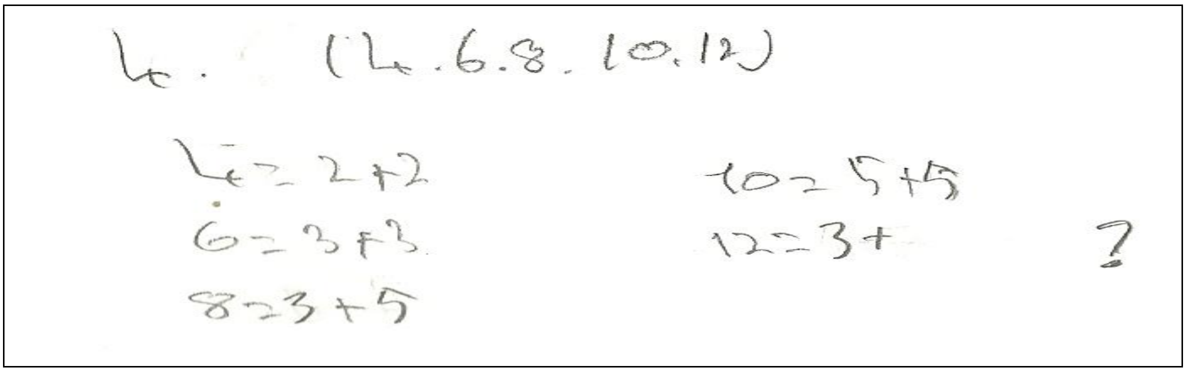
Tüketerek ispat yönteminin yer aldığı sorular genel olarak az sayıda öğrenci tarafından seçilmiştir. Buna karşın A şubesindeki öğrencilerin gerek 3, gerekse 4. sorudaki ispat yapma düzeyleri oldukça yüksektir (% 83,3). B şubesinde ise tüketerek ispat fikrinin kullanıldığı yanıtlar %50'ye ulaşmaktadır.

İspat testi 2'deki tüketerek ispatın yer aldığı sorulara benzer bir şekilde Kod 2'de yer alan öğrenciler, bir ve ya iki sayı örneği deneyerek, kümedeki tüm elemanları denemeden önermenin doğruluğuna ulaştıklarını düşünmüşlerdir. B şubesinden Tuna bu öğrencilerden birisidir:



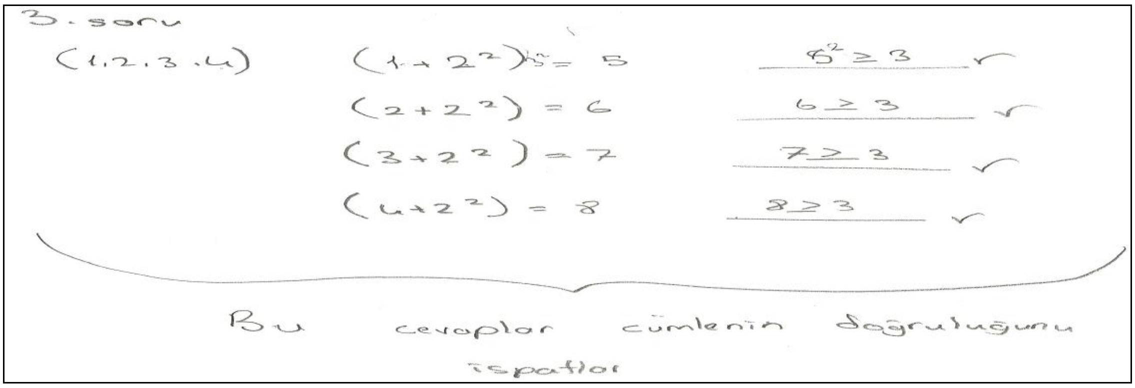
Şekil 4.28. B Şubesinden Tuna - Kod 2, 3. soru

Kod 3'te yer alan öğrenciler ise tüketerek ispat mantığını kullanmalarına rağmen ya 3. sorudaki önermeyi kâğıda yanlış geçirdikleri için başka bir önermenin ispatını yapmışlardır, ya da 4. soruda kümedeki sayıları asal iki sayının toplamı şeklinde yazmakta zorlandıkları için ispatı tamamlayamamışlardır. Özer ispatı bu nedenle tamamlayamayan öğrencilerden birisidir;



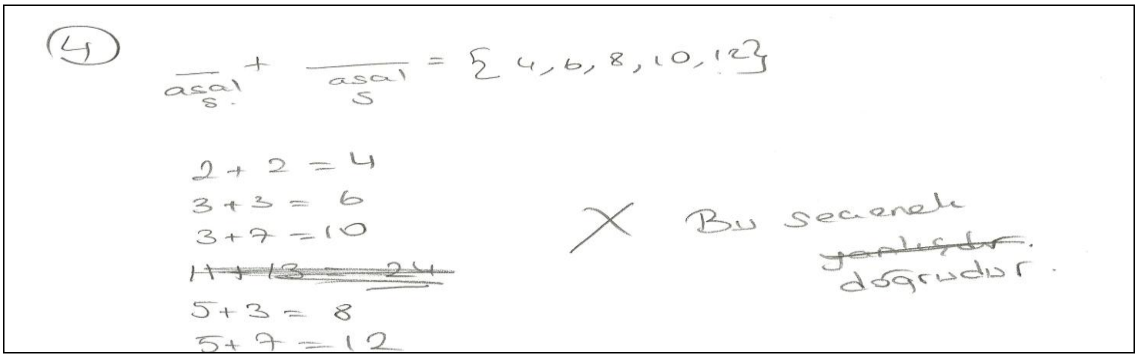
Şekil 4.29. B Şubesinden Özer - Kod 3, 4. soru

B şubesinden Yeliz ise aynı kümede geçerli olmak üzere $(n + 2)^2 \geq 3^2$ eşitsizliğinin değil, $(n+ 2^2) \geq 3$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamıştır. Gerçekleştirilen görüşmede yanıtını inceleyen Yeliz, önermeyi sayfaya aktarırken yaptığı hatayı fark etmiş ve hemen ardından doğru olan önermenin ispatını gerçekleştirmiştir.



Şekil 4.30. B Şubesinden Yeliz - Kod 3, 3. Soru

Tüketerek ispatı eksiksiz olarak tamamlayan Beyza ise 4. soruya aşağıdaki gibi bir yanıt üretmiştir:



Şekil 4.31. A Şubesinden Beyza - Kod 4, 4. soru

Tüketerek ispat yöntemi kullanılarak ispat yapılan sorular birlikte değerlendirildiğinde öğrencilerin tüketerek ispat yöntemi ile ilgili soruları tercih etme ve ispatlama oranları düşük olduğu gözlenmiştir. İlk soruda tüketerek ispat mantığını kullanan öğrencilerin oranı (Kod 3 + Kod 4) % 29,1 iken bu oran diğer sorularda artsa da bu mantığa sahip öğrencilerde sayıca bir artış yaşanmamıştır.

4.2.2.4. Öğrencilerin Durum Yolu İle İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

Bu başlık altında ispat testi 2 Grup 4'te yer alan soru ile ispat testi 3'te yer alan 7 ve 8. sorular incelenecektir.

İspat testi 2'de, Grup 4 başlığı altında öğrenciler önermeyi durum yolu ile ispat yöntemini kullanarak ispatlamaları doğrultusunda yönlendirilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtların değerlendirilmesinde kullanılan kod sistemi şu şekildedir:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade'nin yanlış olduğu çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: İfade örnek vererek doğrulanmış.

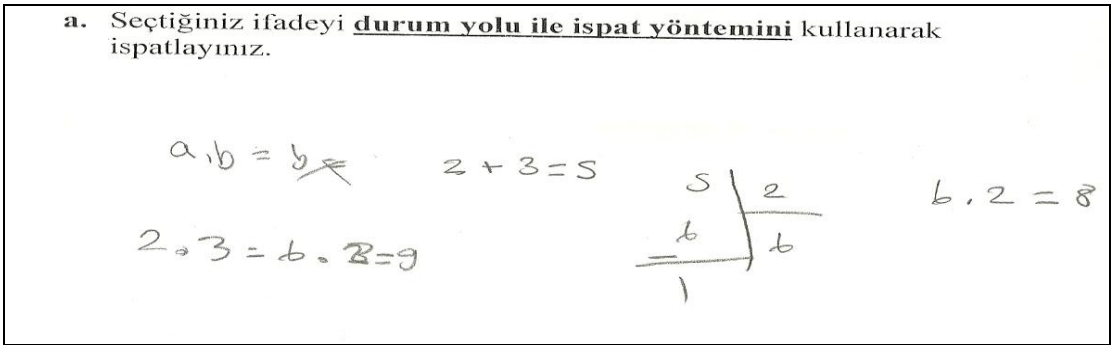
Kod 4: Durum yolu ile ispat yapılmış.

Tablo 4.21. İspat testi 2, 4. Gruba ilişkin bulgular

Çözüme ilişkin kodlar		***A Şubesi (n = 27)***		***B Şubesi (n = 21)***		***Toplam (n=48)***	
		f	***%***	***f***	***%***	***f***	***%***
Kod 1		13	48,1	11	52,3	24	50
Kod 2		3	11,1	4	19	7	14,6
Kod 3	Tek bir örnek	2	7,4	3	14,3	5	10,4
	Çok örnek	8	29,6	3	14,3	11	22,9
Kod 4		1	3,7	--	--	1	2,1

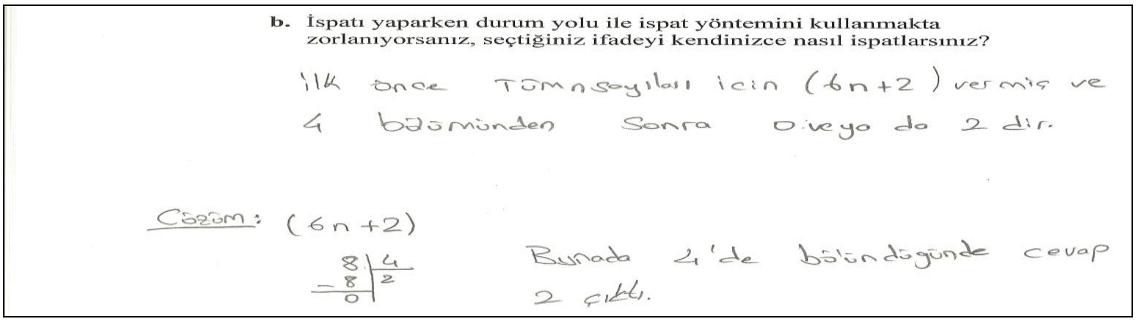
Grup 4 içerisinde yer alan sorulardan A şubesinde 13 öğrenci 1. soruyu, 7 öğrenci 2. soruyu seçmiş, 7 öğrenci ise soruyu boş bırakmıştır. B şubesinde ise 9 öğrenci 1. soruyu, 6 öğrenci 2. soruyu seçmiş, 6 öğrenci soruyu boş bırakmıştır. Bu soruda öğrencilerin bu soruyu boş bırakma oranı (toplamda 13 öğrenci) diğer sorulara göre daha çoktur.

Son test 2 içerisinde öğrencilerin en çok zorlandığı soru bu olmuştur. Her iki şubede de öğrencilerin önemli bir bölümü, tüm öğrencilerin % 50'si bu soruyu ya boş bırakmış, ya önermeyle ilgisi olmayan işlemler yapıp soruyu geçiştirmiş, ya da seçtikleri önermenin neden doğru olduğuna yönelik bir gerekçe sunamamışlardır (Kod 1). B şubesinden Bahar bu öğrencilerden birisidir. **" a ve b tam sayı olsun. Bu durumda** $a \, . \, b \leq |a| \, . \, |b|$ **dir."** önermesini seçen Bahar verilen ifade ile ilişkili olmayan işlemler yapmış, önermenin doğru ya da yanlış olduğuna yönelik bir yargı bildirmemiştir.



Şekil 4.32. B Şubesinden Bahar - Kod 1

Buna ek olarak öğrencilerin bir kısmı örnek vererek doğrulama yolunu kullanırken yaptıkları işlem hataları veya A şubesinden Mehmet'te görüldüğü üzere kalan ve bölüm kavramlarını karıştırmaları nedeni ile önermenin yanlış olduğunu savunmuşlardır (Kod 2). **"Tüm n tamsayıları için, 6n+2 sayısının 4'e bölümünden kalan her zaman ya 0'dır ya da 2'dir."** önermesinin ispatı için Mehmet'in verdiği yanıt şu şekildedir:



Şekil 4.33. A Şubesinden Mehmet - Kod 2

Uygulama sonrası gerçekleştirilen tüm sınavlarda başarılı bir performans sergileyen İlayda (B şubesi), Mehmet ile aynı önermeyi seçmiştir. İlayda yanıtında ispatı cebirsel olarak devam ettirmeye çalışmış ama devam edemeyip yanıtını tamamlamadan bırakmıştır (Kod 1). İspatı nasıl yapacağına dair bir fikrinin olmadığını belirten İlayda ile gerçekleştirilen görüşmede 6n+2 ifadesini 4'e bölemeyişi üzerinden ispat tartışılmaya başlanmış ve devam edemediği noktadan yola çıkarak yönteme ilişkin yönlendirmelerde bulunulmuştur. Bu yönlendirmelerin sonunda İlayda ispatı kolaylıkla tamamlayabilmiştir.

> ***Araştırmacı:*** *Senin yaptığına bir bakalım, sen önce cebir ile göstermeye çalışmışsın. Ama 6n+2 sayısını 4'e bölmeye çalışsan bölebilir misin?*

İlayda: *Bölemem.*

Araştırmacı: *Cebir kullanarak doğrudan ispat yapmaya çalışırken burada tıkandık değil mi? O zaman gel senle bu n sayısının durumlarını inceleyelim. n bir tamsayı idi, bir tamsayının kaç durumu olabilir sence?*

İlayda: *Birden çok basamaklı olabilir, basamak sayıları farklı olabilir yani.*

Araştırmacı: *Tamam peki bu durumu bu ispatta kullanabilir misin?*

İlayda: *Sanırım zor olur, yani nasıl gösterebilirim bilmiyorum.*

Araştırmacı: *Zorlanıyorsak onu bir kenara bırakalım. Başka hangi durumlar olabilir?*

İlayda: *Tek ya da çift olabilir.*

Araştırmacı: *Mesela evet basamak sayısı farklı olabilir de demiştin ama onu da sınırlandıramayız değil mi? Bu seçtiğin soruda işimizi kolaylaştırmaz gibi ama tek ve çift sayı olma durumları incelenebilir mi ayrı ayrı?*

İlayda: *Evet onu rahat gösteririm sembolik olarak hem sadece iki ayrı durumu incelemiş olurum.*

Araştırmacı: *Şimdi bir toparlayalım konuştuklarımızı, bu soruda doğrudan ispatı denedik ama ilerleyemedik, şimdi kalemi sana versem ve tek, çift demiştin bu iki ayrı durumda soruyu incelesek.*

İlayda: *6n + 2 sayımız. n tek olsa [bu esnada kağıda yazmakta] 6 çarpı (2n+1) olur artı 2. 12n artı 6 artı 2. Topladığımda 12n + 8 çıkar.*

Araştırmacı: *Peki, sence bu sayı 4'e bölünür mü?*

[İlayda bir miktar düşünür]

İlayda: *Bölünür çünkü n hangi tek sayı olursa olsun 12 ile çarpılıyor bir de 8 ekleniyor, bu iki sayı da 4'ün katı. O yüzden bölünür.*

Araştırmacı: *Kalan ne olur bu durumda?*

İlayda: *Sıfır olur.*

Araştırmacı: *İkinci durum, n çift olsa ne olur?*

İlayda: *2n yazarım bu durumda, 6 çarpı 2n artı 2. 12n+2 olur.*

Araştırmacı: *Aynı soruyu sorucam, 12n+2 dörde bölünür mü?*

İlayda: *4'e … bu bölünür [12n'i kastetmekte] bölüm 3 olur ama burası bölünmez kalır. [+2'yi kastetmekte]*

Araştırmacı: *Peki, bu sayı demek ki tam bölünmeyecek dörde, kalanın ne olur bu durumda?*

İlayda: *İşte 2 kalır.*

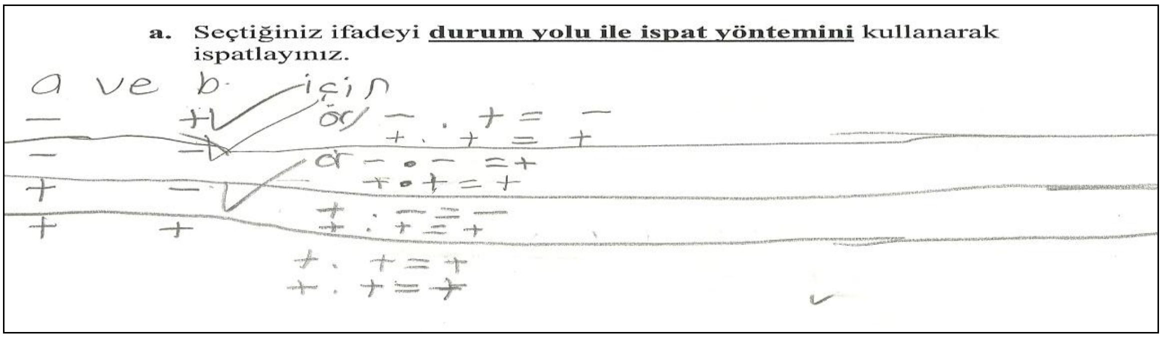
Araştırmacı: *Soruda sana verilenlere ulaşmış olduk bu şekilde, o zaman bu ifade doğru muymuş?*

İlayda: *Doğruymuş.*

Sınavda önermeyi ispatlayamayan, görüşmenin başında da ispata yönelik adım atamayan İlayda, araştırmacının yönlendirmesi ile derste yaptıkları uygulamalara benzer bir şekilde ispatı gerçekleştirmiştir. Yanıtı Kod 2'de yer alan Beyza (A şubesi) ise 2, 3, 20 ve 33 sayılarını deneyerek önermenin doğruluğunu savunmuştur. Görüşmede verdiği örnekler ile elde ettiği kalan sayı arasındaki ilişki üzerinden bir sorgulama yaratılarak, durum yolu ile ispat mantığı kendisine kazandırılmaya çalışılmıştır. Aşağıda gerçekleşen diyalogun ardından Beyza da İlayda gibi ispatı tamamlayabilmiştir.

> ***Araştırmacı:*** *Örnek vermişsin, örneklerine baktığımda 2, 3, 20 ve 33. Niye bu sayıları denedin?*
>
> ***Beyza:*** *Bir bakabilir miyim? [yaptıklarına bakar ve bir miktar düşünür] Sanırım öylesine aklıma gelmiş.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Benim dikkatimi ise şu çekti, iki tek iki tane de çift sayı denemişsin.*
>
> ***Beyza:*** *Ya aslında, tüm n tamsayılarında demiş ya, ben de büyüklü küçüklü tek ve çift sayıları deneyeyim demiştim.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Bu dört örneğe bakıp genelleme yapabilir miyiz?*
>
> ***Beyza:*** *Yok yapamayız.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki, bu sayıları denediğinde, tekleri denediğinde ve çiftleri denediğinde ne çıkmış kalan olarak? Bir yorum yapabiliyor musun?*
>
> *[Beyza kağıdını incelemekte]*
>
> ***Beyza:*** *Şey galiba, tekleri bölünce kalansız çıkmış, çiftleri bölünce kalanlı çıkmış.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Kalansız çıkmak* demek ne demek?
>
> ***Beyza:*** *Kalan 0 yani, teklerde kalan 0 çıkmış.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Çiftlerde kalan kaç?*
>
> ***Beyza:*** *2 bulmuşum. Teklerde 0, çiftlerde 2 gibi.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Acaba durum dediğimiz şeyler bunlar olabilir mi sence? Sayının durumları, çift olma durumu ve tek* olma durumu...
>
> ***Beyza:*** *Haa… Evet, olabilir aslında. Peki, bunu cebirsel mi deniycez, çift ve teki?*

Her iki şube içerisinden sadece tek bir öğrenci, A şubesinden Berk gösteriminde eksiklikler ve hatalar olsa da durum yolu ile ispat yöntemini kullanarak seçtiği önermeyi ***(a ve b tam sayı olsun. Bu durumda a . b ≤ | a | . | b | dir.***) ispatlamıştır.



Şekil 4.34. A Şubesinden Berk – Kod 4

Görüşme sırasında gerçekleştirdiği bu ispatı Berk şu şekilde anlatmıştır:

> **Berk:** *Burada a ve b tam sayı olsun demiş. Tam sayı olduğu için eksi de artı da olabilirler. Bu durumda eksi ile artıyı çarptığımızda sıfırdan küçük veya eşitliğine bakıcaz. Ya işte zaten kafadan düşündüğümüz zaman mutlak değerde iki artı işaretlinin çarpımı olacak, burada ise [eşitsizliğin ilk kısmını kastetmekte] ya eksi eksi ya da artı artı olduğunda eşit olabilir. Diğer durumlarda küçük olacağı kesin. Ben de burada bunu gösterdim, eksi artı verdim tüm durumları yazdım.*

Görüşmenin devamında kendisine bu grupta yer alan ilk önerme de sorulmuş, bu önermeyi ispatlaması istenmiştir. İspatı yaparken ilk etapta doğrudan, cebir kullanmaya devam ederek 6n+2'yi 4'e bölmeye çalışan Berk, bir müddet bu ısrarında devam etmiştir. 6n+2 ifadesini farklı şekillerde ele almaya çalışarak ispatı devam ettirmeye çalışmıştır. Daha sonra bu yöntem ile devam edemediğini gördüğü anda önceden bu önermede kullanılabileceğini belirttiği çift ve tek sayı olma durumlarını deneyerek önermeyi ispatlamıştır. Sorunun çözümüne yönelik diyalog şu şekilde yaşanmıştır:

> **Araştırmacı:** *Mesela senin seçtiğin soruda mutlak değer vardı ve sen pozitiflik negatiflik durumlarını denedin sayıların. Bu soruda sayının hangi durumlarına bakasın?*
>
> **Berk:** *Burada nasıl bir durumda incelerim? n'in hem artı hem de eksi durumu olma durumu var. Ama ıı...*
>
> **Araştırmacı:** *Bu şekilde sayının işaretlerini incelemen soruda sana yardımcı olur mu? Seni bir yere götürür mü?*
>
> **Berk:** *Götürmez aslında.*
>
> **Araştırmacı:** *Peki tam sayıları başka nasıl ayırabiliriz? Hangi durumları incelemek bu soruda işimize yarar sence?*
>
> **Berk:** *Tam sayıları ... Tek sayı olarak çift sayı olarak ayırabiliriz.*
>
> **Araştırmacı:** *Evet olabilir.*
>
> **Berk:** *Şimdi 6n+2 sayısının 4 ile bölümünden kalan ya 0 ya 2 demiş. Aslında duruma hiç gitmeden de... Şöyle biraz düşünürsem. Bu 6n dediği 2'ye bölünür, biz n e hangi sayıyı verirsek verelim çift bir sayı olacak bu. 2 eklenmiş o da çift bir sayı olur. Onun 4'e bölümünden kalan ya 0 dır ya da 2 demiş. O zaman şöyle gösterebilirim, bir çift sayının 2 ile toplanıp 4'e bölümünden kalan 0 ya da 2dir. Onu göstermeye çalışabiliriz. Aslında bu sayı yerine 2x desek de olur. Çift bir sayının 4'e bölümünden kalanın 0 ya da 2 olması bu durum.*
>
> **Araştırmacı:** *Tamam onu nasıl gösterirsin ispatlarsın peki?*
>
> **Berk:** *Bunu, 2x'i 4'e bölersek ... [işlem yapmaya çalışıyor] kalan ... bölemedim.*
>
> **Araştırmacı:** *Tamam cebir kullanarak ilerlemeye çalıştın ama burada o sayıyı 4'e bölemedin ve tıkandın değil mi? Devam edemedin. İşte bu noktada o sayıyı x'i veya n'i olduğu gibi ele almasak da durumlara ayırsak, bu soru için tek sayı ve çift sayı olma durumu mesela. Mesela soruda n verilmiş, n sayısını biz çift sayı olarak ele alsak nasıl yazarız?*
>
> **Berk:** *Çift sayı ise 2x olarak yazarım.*
>
> **Araştırmacı:** *Tamam öyle yazıp işlemi devam ettirmeye çalış.*
>
> **Berk:** *12x olur bir de artı 2'si var, 12x + 2 olur.*

Araştırmacı: *Peki bu sayıyı 4'e bölsen, tam mı bölünür, bölünmüyor ise kalan ne olur?*

Berk: *Evet şimdi işlemi daha rahat yapıyorum, bölersem 3x olur buradan ama artı 2 kalır. Kalanımız 2 olur.*

Araştırmacı: *Tamam n tek olsaydı ne olurdu?*

Berk: *Tek olsa idi 2x+1 olarak verecektim. 12 x + 6 olacaktı, artı 2 de var. 12x + 8 olacak. Bunu 4'e böldüğümüzde 3x + 2 olur, kalan olmaz. 0 yani. Hem kalan 2 bulduk ya da 0 bulduk şimdi.*

Araştırmacı: *Başta ne olmuştu 6n+2 sayısı üzerinden ilerleyememiştik, daha sonra n sayısının çift ve tek sayı olma durumlarını ayrı ayrı inceledik ve elde ettiğimiz sayıları 4'e bölme işlemini rahatça yapabildik ve bu şekilde ispatı tamamladık.*

Sınav sırasında sadece tek bir öğrenci ispatı gerçekleştirmiş olsa da görüşme sırasında 9 öğrenci ile bu grupta yer alan önermeler üzerine konuşulmuştur ve görüşmecinin çeşitli yönlendirmeleri ile tüm öğrenciler ispatı durum yolu ile ispat yöntemini kullanarak tamamlayabilmiştir.

İspat testi 3'de yer alan 7 ve 8. sorularda da öğrenciler durum yolu ile ispat yöntemini kullanmaları doğrultusunda yönlendirilmişlerdir. Bu soruların analizinde de aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade'nin yanlış olduğu çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: İfade örnek vererek doğrulanmış.

Kod 4: Durum yolu ile ispat yapılmış.

Tablo 4.22. İspat testi 3, 7. soruya ilişkin bulgular; " Bir tam sayı tutun ve daha sonra bu sayının karesini alın, elde ettiğiniz sayının 4'e bölümünden kalan her zaman 0 veya 1'dir."

Çözüme ilişkin kodlar		***A Şubesi (n = 15)***		***B Şubesi (n = 5)***		***Toplam (n=20)***	
		f	***%***	***f***	***%***	***f***	***%***
Kod 1		4	26,7	1	20	5	25
Kod 2		4	26,7	-	-	4	20
Kod 3	Tek bir örnek	3	20	2	40	5	25
	Çok örnek	4	26,6	2	40	6	30
Kod 4		-	-	-	-	-	-

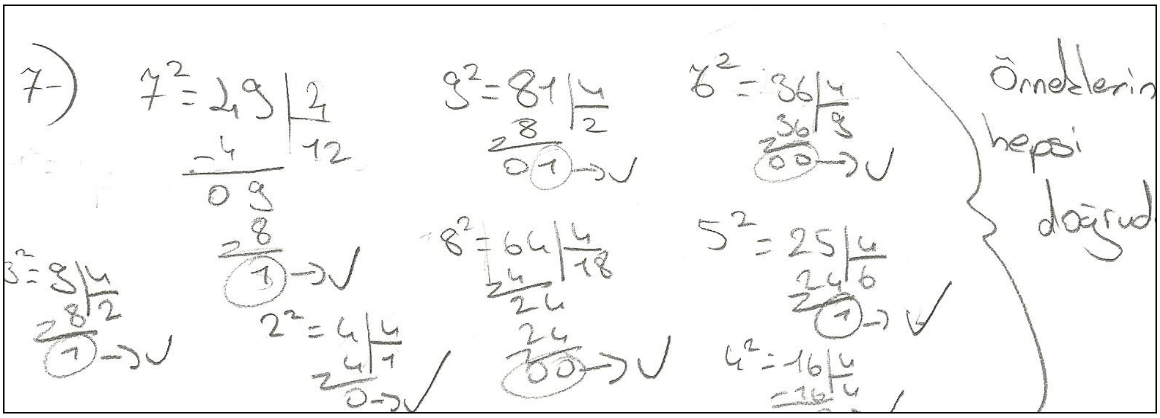
Tablo 4.23. İspat testi 3, 8. soruya ilişkin bulgular; " x tam sayı olsun. Bu durumda x - |x| $\leq$ 0 dır."

Çözüme ilişkin kodlar	*A Şubesi (n = 3)*		*B Şubesi (n = 1)*		*Toplam (n=4)*	
	f	*%*	*F*	*%*	*f*	*%*
Kod 1	-	-	1	100	1	25
Kod 2	-	-	-	-	-	-
Kod 3 (birden çok örnek deneyenler)	3	100	-	-	3	75
Kod 4	-	-	-	-	-	-

7. ve 8. soruların seçiminde de öğrenciler verili ispat yöntemini temel alarak değil (sadece A şubesinden Berk 7. soruyu seçme nedenini, tüm ispat yöntemlerinden birer tane yapmak istediğini ve buna göre soruları seçtiğini belirterek açıklamıştır) önermenin kolay ve anlaşılır olmasına dikkat ederek seçimlerini yaptıklarını belirtmişlerdir. İki şubede de sınav esnasında hiç bir öğrenci durum yolu ile ispat yapamamıştır.

A şubesinden 7. soruyu seçen 4 öğrenci sorunun ispatı için örnek denemiş, bölüm ve bölen kavramlarını karıştırdıkları için yaptıkları işlemin sonunda önermenin yanlış olduğunu savunmuşlardır. Tüm öğrencilerden 5 tanesi ise Kod 1'de yer almıştır. Bu öğrencilerin bir kısmı soruyu sadece doğru veya yanlış diyerek geçiştirmiştir. Diğer kısmı ise soru ile alakasız işlem ve açıklamalarda bulunmuştur.

Birden çok örnekle önermeyi doğrulayan öğrenciler her ne kadar önermenin ispatında yer alan durumları örneklendirmiş olsalar da kullandıkları örnekler üzerinden de bir genellemeye varamamışlardır. Bu öğrencilerden birisi olan Dicle 7. soruyu seçmiş ve önermenin ispatı için çok sayıda örnek denemiştir. Denediği sayılardan tek sayı olanlarının bölümünden kalan sayının 1, çift sayıların bölümünden kalanının 0 olduğu genellemesine denediği örnekler üzerinden ulaşamamış, sadece örneklerin sonucuna bakarak önermenin doğru olduğuna kanaat getirmiştir.



Şekil 4.35. A Şubesinden Dicle - Kod 3, 7. soru

Durum yolu ile ispat yönteminin kullanıldığı tüm sorular birlikte dikkate alındığında öğrencilerin en başarısız olduğu yöntem bu olmuştur. Diğer yöntemlerin yer aldığı sorulara göre bu sorularda öğrenciler soru ile ilgilenmeme, soruyu boş bırakma eğiliminde daha çok olmuşlardır. Tüm öğrenciler içerisinde sadece tek bir öğrenci durum yolu ile ispat mantığını sınavlarda uygulayabilmiştir. Gerçekleştirilen görüşmelerde 9 öğrenci ile bu yöntem üzerinde durulmuştur. Öğretim sürecinin bir bileşeni olarak ele alınabilecek bu görüşmelerde öğrenciler bazen kolaylıkla bazen de zorlanarak ama araştırmacının yönlendirmeleri ile bu yöntemi kullanarak ispatı tamamlamışlardır. Öğrencilerin bu yöntemi kullanırken zorlandıkları nokta önermeyi hangi durumlarda inceleneceklerini bulmak olmuştur.

4.2.2.5. Özet

Öğrenciler doğru bir önermenin ispatında yoğunluklu olarak örnek vererek doğrulama eğiliminde olmuşlardır. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin bu eğiliminin ya ispat kavramının mantığını anlamamış olmalarından ya da örnekle doğrulamanın ispat olmadığını bilmelerine karşın başka bir yöntem geliştirememelerinden kaynaklı olduğu görülmüştür. Örnekle doğrulamanın ispat olmadığının farkında olan yine de örnek vererek önermeyi doğrulayan öğrenciler cebiri anlama ve uygulamada sorun yaşamış, cebirsel gösterim dışında başka tümdengelimsel muhakeme içeren temsiller de geliştirememişlerdir. Bu eğilime karşın öğrenciler doğrudan ispat yöntemini içeren sorularda % 20 ile % 30 arasında değişen bir oranda verilen önermeleri eksiksiz olarak ispatlayabilmiştir. Bu oran doğrudan ispat yöntemi mantığını uygulayan ama çeşitli hatalar nedeniyle ispatı tamamlayamayan öğrenciler de dahil edildiğinde % 40'a yaklaşabilmektedir. Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili sorularda da benzer bir eğilim gözlenmiş tüketerek ispat mantığının kullanan öğrencilerin oranı % 30'u geçebilmiştir. Öğrencilerin en başarısız olduğu ispat yöntemi ise durum yolu ile ispat yöntemi olmuş, sadece 1 öğrenci yapılan sınavda durum yolu ile ispatı gerçekleştirebilmiştir. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin önermeyi hangi durumlara göre inceleyeceklerini bulmakta zorlandıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin en başarılı olduğu ispat yöntemi karşı örnek vererek ispat yöntemi olmuştur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın bulgu ve yorumlarına dayalı olarak ulaşılan sonuçların özetine ve bu sonuçlardan yola çıkarak geliştirilen önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuçlar

5.1.1. Uygulama Öncesi Öğrencilerin İspat Algısı ve Becerisine İlişkin Sonuçlar

Matematiksel ispat matematiğin ileri düzeyde matematik bilgisi gerektiren bir konusu olarak görülmekten çıkmış, anaokulundan itibaren her yaş kuşağının bir düzeyde gerçekleştirebileceği, matematik öğretimine katkı sağlayan bir araç olarak görülmeye başlanmıştır. Bu doğrultuda bazı ülkelerde lise öncesi müfredatlarında ispata yönelik vurgu artmakta, lise çağından küçük öğrencilerin ispata yönelik algı ve performansları pek çok çalışmaya konu edilmektedir. Bu araştırmada da 7. sınıf öğrencilerinin matematik dersi kapsamında yabancı oldukları ispat kavramına yönelik algı ve performanslarının ne oranda geliştirilebileceği sorusuna odaklanılmıştır. Bu bağlamda örneklem olarak seçilen sınıflara toplamda 14 hafta süren bir ispat öğretimi uygulanmıştır.

Bu uygulamanın öncesinde öğrencilerin ispat performanslarına bakıldığında, doğru bir önermenin ispatında öğrenciler soruyu ya boş bırakmış, soru ile uğraşmama eğiliminde olmuş ya da önermeyi örnek vererek doğrulamışlardır. Bu sonuç literatürde yer alan pek çok çalışma (Chazan, 1993; Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998, Knuth vd., 2012) ile uyumludur. Buna ek olarak araştırmada ispat performansına yönelik literatürle uyumlu olmayan bir sonuca da ulaşılmıştır. Hazır bulunuşluk testinde yer alan yanlış bir önermenin ispatında öğrencilerin başarı düzeyi oldukça yüksek çıkmıştır. Tüm öğrencilerin % 53'ü verilen önermeyi karşı bir örnek sunarak çürütebilmişlerdir. Bu sonuç Zaimoğlu'nun (2012) 8. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmanın, "öğrenciler yanlış bir ifadeyi çürütmede başarısızdırlar" bulgusuyla çelişmektedir. İspata yönelik algılarının değerlendirildiği soruda da öğrenciler örnek vererek yapılan doğrulamanın ispat olduğu düşüncesini sürdürmüşlerdir, öğrencilerin sadece % 11,8'i ispat içeren seçeneği doğru yanıt olarak seçmiştir.

5.1.2. Uyulama Sonrası Öğrencilerin İspat Algısına İlişkin Sonuçlar

Öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirmek üzere uygulanan öğretimin ardından öğrencilerin bir bölümünde ispata yönelik algılarında bir gelişme gözlenmiştir. İspat öğretimi sadece öğretime yönelik sürdürülen derslerle sınırlı kalmamış, öğrencilerle yapılan birebir görüşmelerde de öğrencilerin algı ve performansını geliştirmeye yönelik müdahalelerde bulunulmuştur. Bu sürecin sonunda bazı öğrenciler örnekle doğrulama ile ispat arasındaki farkı algılayabilmiş, ispat için tümdengelimsel muhakemeyi içeren yanıtlara yönelmiş, yanlış bir önermenin ispatında karşıt bir örneğin sunulmasını ispat için yeterli görmüş, kendilerine sunulan tümdengelimsel muhakemeleri önerme ile ilişkilendirerek önermenin ispatını ayırt edebilmişlerdir.

Öğrencilerin ispata yönelik algılarını betimlemek amacıyla düzenlenen sınavda, ispat testi 1, dört soru bulunmaktadır. İlk soruda öğrencilerin büyük çoğunluğu (% 68,5'i) örnek verilerek yapılan doğrulamayı ispat olarak değerlendirirken, bu oran sınavın ileriki sorularında düşmüş, öğrenciler tümdengelimsel muhakemeyi içeren yanıtlara daha çok yönelmişlerdir. Yine de tüm sınav dikkate alındığında öğrencilerin önemli bir bölümü birkaç durumu denemenin ispat olduğunu düşünmeye devam etmişlerdir. Buna karşın sınav sonrası gerçekleştirilen görüşmelerde bu eğilimdeki öğrencilere de yer verilmiştir. Bu öğrencilerle yapılan görüşmede, öğrencilerin bazen zorlanarak ve uzunca tartışarak, bazen de kolaylıkla ispat ile örnekle doğrulama arasındaki farkı algılayabildikleri gözlenmiştir.

Öğrencilere hatalı cebirsel işlemler içeren, bu nedenle de yanlış bir sonuca ulaşan bir cevap ispat olarak sunulduğunda öğrenciler bu cevabı ispat olarak kabul edebilmektedirler. Bu araştırmada öğrencilerin sadece % 16,7'si hatalı tümdengelimsel bir yaklaşımı ispat olarak kabul etmişlerdir. Soruda öğrencilere yanlış bir önerme ile bu önermenin ispatı olarak 2 ayrı seçenek sunulmuştur. Bu seçeneklerden birisinde önerme karşı örnek verilerek çürütülmüştür. Diğerinde ise cebirsel ifadeler kullanılarak başlanan ispatta işlem hatası yapılmış, sonuç olarak da önermenin doğru olduğu savunulmuştur. Öğrencilerin % 16,7'si sembolik gösterimin daha matematiksel olduğu ve ispat gibi görünmesi nedeniyle bu soruya yanıt verirken hemen bu seçeneğe yönelmişlerdir. Martin ve Harel (1989) ile Healy ve Hoyles'un (2000) gerçekleştirdiği çalışmalarda da bu eğilime değinilmektedir. Yalnız bu araştırmada bu eğilim bahsedilen çalışmalara oranla düşük çıkmıştır.

Aynı soruda öğrencilerin % 11,1'i ise benzer bir yaklaşım sergilemiş, ek olarak karşı örnek verilerek yapılan ispatı da mantıklı buldukları için her iki seçeneğin de ispat olduğunu savunmuşlardır. Öğrenciler bu yanıtları ile önermenin aynı anda hem doğru, hem de yanlış olduğunu savunmuş, aynı önerme için doğrudan ispat ile, karşı örnek vererek yapılan ispatın birlikte geçerli olabileceğini savunmuşlardır. Stylianides ve Al-Murani (2010), gerçekleştirdikleri bir çalışmada öğrencilerin doğruluğun ispatı ile çürütme arasındaki ilişkiye yönelik algılarına değinmişlerdir. Çalışmalarında ispat testi 1'de yer alan 2. soruya benzer nitelikte bir soru ve bu sorunun analizine yer vermişlerdir. Uygulamalarında öğrencilerin % 45,6'sının bu kavram yanılgısına sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bu araştırmada öğrencilerin bu yanılgıya düşme oranları, Stylianides ve Al-Murani'nin bulgusuna oranla daha düşük çıkmıştır. Yine de öğrencilerin ispat öğrenimi sürecinde bu yanılgıya düşme ihtimalleri mümkündür ve dikkate alınmalıdır. Sınav esnasında gelişen bu hatalı yaklaşım, görüşmede de ele alınmış, öğrencilerle birebir kurulan diyaloglarla giderilebilmiştir.

Araştırmada dikkati çeken bir diğer bulgu ise bazı öğrencilerin yanlış bir önermenin ispatında tek bir örneğin yeterli olmayacağını savunmalarıdır. Galbraith (1981), 12-17 arası yaş kuşağındaki öğrencilerle yaptığı çalışmasında öğrencilerin % 18'inin tek bir karşı örneğin önermeyi çürütmede yeterli olmadığını düşündükleri sonucuna ulaşmıştır. Bu çalışmada ise öğrencilerin bu doğrultudaki eğilimi daha az olmakla birlikte (Canan'ın yanıtının ispat olduğunu vurgulayan 4 öğrenci, tüm öğrencilerin % 7,4'ünü oluşturmakta), bu eğilim öğrencilerin yanlış bir önermenin ispatında cebirsel ifadelere yönlenmesine neden olabilmiştir.

Bu çalışma kapsamında öğrencilerle bir önermenin karşıtının nasıl kurulacağı veya önerme doğru ise karşıtının doğru olmak durumunda olmadığı şeklindeki mantık kuralları paylaşılmamıştır. Buna rağmen araştırma sonunda uygulanan sınavda bir önermenin karşıtının ispatına da yer verilmiştir. Öğrencilere cebirsel gösterim içeren iki ayrı tümdengelimsel yaklaşım sunulmuş (önermenin ispatı ile önermenin karşıtının ispatı), gerek sınavda gerekse görüşme sırasında verili iki cebirsel gösterim arasındaki farka yönelik düşünceleri sorgulanmıştır. Öğrencilerin % 38,9'u doğru yanıtı ispat olarak seçerken kendilerine sunulan tümdengelimsel muhakemeleri ayırt edebilmişlerdir. Görüşme sırasında gerek bu öğrencilere, gerekse diğer tümdengelimsel muhakeme içeren yanıtı ispat olarak seçen öğrencilere önermenin karşıtının ispatı ayrı bir kağıda yazı olarak sunulmuş, bu ispatın hangi önermenin ispatı olduğu sorulmuştur. Bu öğrencilerin hepsi kağıtta ispatlanan önermeyi doğru ifade edebilmiştir. İfade ettikleri bu önerme ile soruda verilen önermeyi karşılaştırmaları istendiğinde ise öğrenciler iki önermenin farklı olduğunu belirtmiş, hatta "ifadenin tersi gibi" şeklindeki tanımlamalarla önermeler arsındaki karşıt olma ilişkisinin farkına varabilmişlerdir.

5.1.3. Uygulama Sonrası Öğrencilerin İspat Beceri ve Performanslarına İlişkin Sonuçlar

Öğrencilerin ispata yönelik performanslarında dikkati çeken ilk nokta öğrencilerin % 20 ile 50 arasında değişen bir oranda soruyu yanıtlamama eğiliminde olduklarıdır. Bu oran doğrudan ispat yöntemi ile ilgili sorularda en az iken, durum yolu ile ispatla ilgili sorularda yüksek çıkmıştır. Bu durum sınıf içerisindeki öğrencelerin bazılarında ispata yönelik kayda değer bir ilerleme yaşanırken, bazılarının ispat yapmaya yönelik ortaya koymuş olduğu isteksizlik sınıfın bütününde ispat yapmaya yönelik bir ilginin yaratılamadığını göstermektedir.

Öğrencilerin ispat testi 2 ile elde edilen bulgular ışında yöntemlere göre ispatı eksiksiz yapma oranları şu şekildedir; doğrudan ispat yöntemini öğrencilerin % 23'ü; karşı örnek vererek ispatı % 58,3'ü; tüketerek ispatı % 20,8'i; durum yolu ile ispatı ise tüm öğrencilerin ancak % 2,1'i yapabilmiştir. Uygulanan ispat yönteminin mantığının uygulandığı tüm yanıtlar dikkate alındığında doğrudan ispat ile tüketerek ispat yöntemlerinde bu oran yaklaşık % 29'a çıkmıştır. Öğrenciler beklendiği üzere karşı örnek vererek ispat yönteminde başarılı olmuştur. Araştırmanın başında öğrencilerin tüketerek ispat yönteminde de başarılı olacakları beklenmekteydi. Ne var ki öğrenciler tüketerek ispat ile ilgi sorularda, küme içerisinde verilen tüm elemanları denememiş, bir kaç örnek ile doğrulama eğiliminde olmuşlardır.

Öğrencilerin ispata yönelik performanslarında da örnek vererek doğrulama eğilimi baskındır. Önermeyi baskın olarak tek bir örnek ile mi, yoksa birden çok sayıda örnek deneyerek mi doğruladıkları sorulara göre değişmektedir. Bazı sorularda yoğunluklu olarak tek örnek denenirken (ispat testi 3, 1. soru gibi), bazı sorularda da çok sayıda örnek denenerek (ispat testi 2, grup 1 gibi) doğrulama yapılmıştır. Öğrencilerin ispat yaparken örnek vererek doğrulamayı tercih etme oranları, sınıfın önemli bir bölümünün tercih ettiği sorularda % 30 ile 70 arasında değişmektedir.

Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerde onların örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul etme eğilimleri de sorgulanmıştır. Onlarla ispatın ne olduğu, denenen örnekler ile genellemeye ulaşılıp ulaşılmayacağı ve ispat yöntemlerine yönelik tartışmalar yürütülmüştür. Gerçekleştirilen bu tartışmalarda öğrenciler gerektiğinde yönlendirilerek, ufak yönlendirmeler ile doğru bir ispata ulaştırılmaya çalışılmıştır. Görüşülen 16 öğrencinin sadece 2 tanesi bu yönlendirmelere rağmen, ispatları tamamlayamamıştır. Geri kalan tüm öğrenciler sınavlarda yapamadıkları ispatları, araştırmacının yönlendirmesi ile tamamlayabilmiştir. Vygotsky (1978) bireyin kendi başına problem çözmesi ile belirlenen gerçek gelişim düzeyi ile yetişkin veya kendisinden daha başarılı olan bir akranının desteği yardımıyla problem çözmesi ile belirlenen gelişim düzeyi arasında fark olduğunu vurgular. Çocuğun mevcut düzeyinin hemen üstündeki bu gelişim düzeyini yakınsal gelişim düzeyi (ZPD - Zone of Proximal Development) olarak adlandırır. Tudge (1990) burada yetişkin desteğini, bilgisi ve rehberliği sayesinde çocuğun öğrenme potansiyelini artıran bir bileşen olarak tanımlar. Gerçekleştirilen görüşmede araştırmacının rolü bu işlevi taşımış, öğrencilerin ders uygulaması ve sınavlar sonrasında ulaştıkları gelişim düzeyini ilerleten bir etki yaratmıştır. Bu durum öğrencilerin ispata yönelik algı ve performanslarının sınıfta gerçekleştirilen uygulama sonrası ulaştıkları düzey ile sınırlı olmadığını, daha da ilerletilebileceğini ortaya koymaktadır.

Araştırmada elde dilen tüm bulgular öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlama ve uygulamada sorun yaşadığını ortaya koymaktadır. İspata yönelik performanslarını olumsuz etkileyen faktörlerden birisi de budur. Arslan (2007) öğrencilerin cebir kullanarak genellemeye ulaşma eğiliminin düşük olduğunu ortaya koyarken, Zaimoğlu (2012) öğrencilerin cebirsel ispatı tercih etmediğini belirtmiştir. Cooper ve diğerlerinin (2011) gerçekleştirdikleri bir çalışmanın sonucuna göre ise öğrenciler ispat yaparken öncelikle görsel ve anlatımsal yöntemleri, en son olarak da cebirsel ifadeleri kullanmaktadırlar. Buna karşın öğrencilerin sınıf düzeyi ilerledikçe (6. sınıftan 8'e doğru) cebir kullanarak doğru sonuca ulaşma eğiliminde, beklenen düzeyde olmasa da bir artış yaşanmaktadır (Arslan, 20007; Çalışkan, 2012). Tüm bu çalışmalar cebir öğrenme alanına yeni giriş yapan bu yaş kuşağının bu alanla ilgili yaşadıkları sorunu ortaya koymuştur.

Bu araştırmada da öğrenciler anlaşılır bulmadıkları için cebirsel ifadelerden kaçınmışlardır. Cebirsel gösterimler yerine örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul eden öğrencilerle yapılan görüşmelerde örnek vererek doğrulamanın ispat olup olmayışı da sorgulatılmıştır. Ayrıca bu öğrencilerden örnek vererek doğruladıkları önermeleri yeniden ispatlamaları da istenmiştir. Az sayıdaki öğrenci yaptıkları doğrulamanın ispat olduğu noktasında ısrarcı olurken, öğrencilerin büyük kısmı ufak destek ve yönlendirmelerle ispatı tamamlayabilmiştir.

Öğrencilerin algılayıp uygulamakta en çok zorlandığı ispat yöntemi durum yolu ile ispat yöntemi olmuştur. Sınavlarda bu ispat yöntemine ilişkin sorularda sadece bir öğrencinin ispat yöntemini anlayarak uyguladığı görülmektedir. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde bu yöntemi içeren sorular da ele alınmıştır. Öğrenciler araştırmacının yönlendirmesiyle bu ispatları da yapabilmiştir. Yalnız ispatı yaparken diğer ispat yöntemlerine göre daha çok zorlandıkları da gözlenmiştir. Öğrenciler durum yolu ile ispat yöntemini zorlansalar da yapabilmişlerdir.

Araştırma kapsamında gerçekleştirilen uygulamada ispat yöntemlerine yönelik adlandırma, uygulamanın sonunda ele alınmıştı. Elde edilen bulgular öğrencilerin ispat yöntemlerinin adlandırmasına yönelik farkındalıklarının yeterince gelişmediğini ortaya koymuştur. Sınav sırasında bir öğrenci "karşı örnek vererek ispat" ifadesini gördüğünde karşı örnek sunarak önermeyi çürüteceğini, "tüketerek ispat" adlandırmasını gördüğünde ise kümedeki tüm elemanları tek tek deneyerek tüketeceğini fark edememiştir. Öğrenciler bu durumu görüşmede ifade etmişlerdir. Görüşmede bu yöntemler üzerine yürütülen tartışmaların ardından ise farkındalıklarının arttığı gözlenmiştir. Tüm bu veriler ispat yöntemine yönelik adlandırmanın, uygulamanın son haftalarında öğrencilere sunulmasının yanlış ve öğretici olmayan bir tercih olduğunu ortaya koymuştur. Görüşmede ispat testi 3'de yer alan sorulara geçilmeden önce öğrencilere, bu testteki soru tercihlerini neye göre yaptıkları sorulmuştur. Belki de ispat yöntemlerinin adlandırmasına yönelik sahip oldukları eksikliklerin de etkisiyle seçimlerinde yönteme yönelik adlandırmadan ziyade, matematiksel ifadenin kolay ve anlaşılır olmasına dikkat ettiklerini belirtmişlerdir.

5.2. Öneriler

Bu çalışma ile elde edilen bulgular ışığında aşağıdaki öneriler sunulmaktadır:

- Bu araştırmada öğrencilerle formel ispat uygulamaları yapılmış, öğrencilerin ispatı algılayıp uygulayabildikleri gözlenmiştir. Ele alınan ispat yöntemlerinden durum yolu ile ispat yönteminde diğer yöntemlere göre daha çok zorlanmış olsalar da, öğrenciler doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemlerini yapabilmişlerdir. Bu yöntemler ve bu yöntemleri içeren akıl yürütme süreçlerinin müfredata dahil edilebilmesi amacıyla, bu yöntemlere yönelik sorgulamaları içeren etkinlik ve uygulamaların geliştirilmesine yönelik araştırmalar yapılabilir.
- 7. sınıf öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında, sembolik gösterimleri 6. sınıf öğrencilerine göre daha yoğun kullanmaktadırlar. Buna rağmen öğrencilerin önemli bir bölümünün cebirsel ifadeleri kullanma ve anlamada zorlandıkları görülmüştür. Cebir alanına yönelik yaşadıkları bu zorluk onların ispata yönelik algılarını ve ispat becerilerinin gelişimini de etkilemiştir. Bu bağlamda bu araştırmada cebir ve ispat ilişkisine odaklanılmamakla birlikte aralarında birbirlerinin gelişimini etkileyen diyalektik bir ilişkinin var olduğu gözlenmiştir. Bu ilişki daha derinlemesine araştırılabilir, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir konu alanına ilişkin yeterlikleri ile ispat becerileri arasındaki ilişkinin karşılaştırılması yeni araştırmaların konusu olabilir.
- Bu araştırma kapsamına çelişki yoluyla ispat yöntemi bir dizi nedenle dahil edilememiştir. Ne var ki 7. sınıf öğrencilerinin bu ispat yöntemine yönelik becerilerinin geliştirilebileceği düşünülmektedir. Başka çalışmalarda bu ispat yöntemini içeren uygulamalar, çalışma kapsamına alınabilir.
- Bu araştırmanın ispat öğretimi uygulama sürecine yönelik gözlemler, ispat öğretimi uygulamalarına yönelik bir dizi önerinin geliştirilmesine kaynaklık

edebilmektedir. Araştırmacının sınıfın matematik öğretmeni olmayışı ve görece sınıf için yabancı birisi oluşu, sınırlı süreç içerisinde gerçekleştirilen uygulamada tüm sınıfın ispat uygulamasına aktif bir şekilde dahil edilemeyişinde önemli bir etken olmuştur. Okuldaki matematik öğretmenleri ile gerçekleştirilecek çalışmalar daha etkili sonuçlar ortaya koyabilecektir. Ayrıca uygulama sürecinde yapılan ara değerlendirmeler ve bu değerlendirmelerin öğrencilerle de paylaşılması öğretim sürecini daha etkin kılacaktır. Örneğin uygulanan sınavlar öğretici birer süreç olarak ele alınabilir, uygulanan sınavın sonuçları öğrencilerle paylaşılarak, ispata yönelik eksiklikleri veya yanlış öğrenmeleri bu sınavların sonuçlarının öğrencilerle birlikte değerlendirilmesi ile giderilmeye çalışılabilir.

- Bu araştırmada uygulanan öğretim sürecinin etkililiği araştırılmamış, daha temel bir mesele olan 7. sınıf öğrencilerinin ispat yapıp yapamayacağı sorusuna yanıt aranmıştır. İspat öğretiminin nasıl gerçekleştirilebileceği veya ispat öğretiminde etkin stratejilerin belirlenmesi başka bir çalışmanın konusu olarak ele alınabilir.

KAYNAKÇA

Aksoy, N. (2003). Eylem Araştırması: Eğitimsel Uygulamaları İyileştirme ve Değiştirmede Kullanılacak Bir Yöntem, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 36, 474-489.

Aktaş, Y. (2002). Okul öncesi dönemde matematik eğitimi. Adana: Nobel Tıp kitap evi.

Albayrak Bahtiyari, Ö. (2010). 8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat Ve Muhakeme Kavramlarının Ve Önemlerinin Farkındalığı, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Almedia, D. (1996). Justifying and the Proving in the Mathematics Classroom, Philosophy in Mathematics Education, Exeter University, *Philisoph of Mathematical Education Journal*, 9.

Almedia, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of the mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (4), 479-488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (20005). Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6 (1), 25-37.

Arslan, Ç. (2007). İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar, *Eğitim ve Bilim*, 35 (156), 17-31.

Balacheff, N. (1988). "Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics" in D. Pimm, Mathematics, Tecahers and Children. Hodder & Stoughton, London. 216-230.

Balcı, A. (2005). Sosyal Bilimlerde Araştırma. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Ed. L.I.Tatsien)*, Vol. III, Higher Education Press, Beijing, 907–920.

Bell, A. W. (1976). A Study Of Pupıls' Proof-Explanatıons In Mathematıcal Sıtuatıons, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Beverly, J.(1993). Teacher as Researcher. ERIC Digest. (ERIC Clearinhouse on Teacher Education, Washington DC, No: ED355205).

Birnbaum, A. (1968). Some latent models and their use in inferring an examinee's ability. In F.M. Lord & M. R.Novick (Eds.), *Statistical Theories of Mental Test Scores. Reading*, MA: Addison-Wesley.

Blum, W., Kirsch, A. (1991). Preformal Provıng: Examples And Reflectıons, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1992). Qualitative Reseach for Education. *An Introduction to Theory and Methods (2th Ed)*. Allyn and Bacon.

Brousseau, G.(2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers: New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

Cain, J. S. (2002). An Evaluation of the Connected Mathematics Project, *The Journal of Educational Research*, 95 (4), 224-233.

Calhoun, E. F. (2002). Actian Research for School Improvement. *Educational Leadership*, 59 (6), March, 18-24.

Carpenter, T.P, Franke, M., and Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating algebra and arithmetic in the elementary school. Portsmith, NH: Heinemann.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students Justification For Their Views Of Empirical Evidence And Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 359-387.

Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B. & Knuth, E. J. (2011). Adolescent Reasoning in Mathematics: Exploring Middle School Students' Strategic Approaches in Empirical Justifications, *In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA., http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/Proceedings/2011/cogsci11_proceedings.pdf adresinden 13 Eylül 2013 tarihinde indirilmiştir.

Creswell, J. W. (2005). Educational research: planning, condacting, and evaluating quantitative and qualitative research (2nd ed.). Upper Saddle River, New Jersey, Pearson Education, Inc.

Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Rzeszów, Poland , http://iep.univalle.edu.co/archivos/CENDOPU/CERME%207%202011%20TABLA%20DE%20CONTENIDO.pdf adresinden 13 Şubat 2013 tarihinde indirilmiştir.

Çalışkan, Ç. (2012), 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarıyla İspat Yapabilme Seviyelerinin İlişkilendirilmesi, Yayınlanmamış Yükseklisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Çelik, B. (2010). Soyut Matematik, Bursa: Dora Yayınları.

Demir, F. (2011), Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

DFE (Department for Education), (1995), Mathematics in the National Curriculum. London: HMSO.

DfEE (Department for Education and Employment), (2001). Key stage 3 national strategy: Framework for teaching mathematics: Year 7,8 and 9. London:DfEE.

Ekiz, D. (2003). Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş. Ankara: Anı Yayıncılık.

Elliot, J. (1991). Action Research for Educational Change. Buckingham : Open University Press.

Erdoğan, A., Özdemir Erdoğan, E., Garan, O. & Güler, M. (2012). Matematiğin Popüleştirilmesine Yönelik Tasarlanan Bir Eğitim-Öğretim Ortamının Değerlendirilmesi. *İlköğretim Online*, 11(1), 51-74.

Erdoğan, A., Özdemir Erdoğan, E. (2013). Didaktik Durumlar Teorisi Işığında İlköğretim Öğrencilerine Matematiksel Süreçlerin Yaşatılması, *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14 (1), 17-34.

Ferrance, E. (2000). Themes in Education. Action Research. LAB. A Program of the Education Alliance. Northeast and Islands Regional Educational Laboratory at Brown University.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For The Learning of Mathematics*, 3 (2), 9-18.

Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2006). How to design and evaluate research in education (6th Ed.). New York: Mac Graw Hill, Inc.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of Proving: A Clinical Investigation of Process. *Educational studies of Mathematics*, 12(1), 1-28.

Gardner, M. (2011). Hah, Buldum!. Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

Gossett, E. (2003). Discrete Mathematics With Proof. Pearson Education, Inc, USA.

Guion, L.A. (2002). Triangulation: Establishing the Validity of Qualitative Studies. FCS6014 Department of Family, Youth and Community Sciences, Florida Cooperative Extension Service, Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida. (http://ils.indiana.edu/faculty/hrosenba/www/Research/methods/guion_triangulation.pdf)

Hale, M. (2003). Essentials of Mathematics : Introduction to Theory, Proof, and the Professional Culture, The Mathematical Association of America, USA.

Halıcı, E. (2005). Zeka Oyunları 2, 200 Zeka matematik Mantık Sorusu. Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

Hanna, G. (1983). Rigorous Proof in Mathematics Education, *Curriculum Series 48*, Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1995). Challanges to the İmportance of Proof, *For he Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

Hanna, G.; Jahnke, H. N. (1996), Proof and proving. *International Handbook of Mathematics Education* (Ed. A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde), Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, s. 877 – 908.

Hanna, G. (2000). A Critical Exemination of Three Factors in the Decline of Proof, *Interchange*, 31 (1), 21-33.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, (234 - 283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.

Houdement, C. & Kuzniak, A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 11, 175-193, IREM Strasbourg.

Irmak, H. (2008). Soyut Matematik, Ankara: Pegem Akademi.

İlhan, B. (2006). Türkiye'de Genel Ortaöğretim Kurumları 9. Sınıf Matematik Eğitim Programının Değerlendirilmesi, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Malatya.

İlköğretim ve Eğitim Kanununun Bazı Maddelerinin Değiştirilmesine İlişkin Kanun (2012). T. C. Resmi Gazete, 28261,11 Nisan 2012.

Johnson, A. P. (2002). A short guide to action research. Boston: Allyn&Bacon.

Jones, K. (1997). Student-Teachers’ Conceptions of Mathematical Proof, *Mathematics Education Review*, 9, 16-24.

Karaçay, T. (2009). Soyut Matematiğe Giriş, Ankara: Başkent Üniversitesi Yayınları.

Kitcher, P. (1984), The nature of mathematical knowledge. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers’ conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 5, 61 – 88.

Knuth, E. J., Chopin, J. M. & Bieda, K. N. (2012), Middle School Students’ Production of Mathematical Justification, *Teaching and Learning Proof Across the Grades A K-16 Perspective (Ed. Stylianou, D. A.; Blanton, M. L.; Knuth, E. J.)*, London - New York: Routledge.

Knuth, E. & Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 561-567. http://labweb.education.wisc.edu/~knuth/mathproject/papers/Knuth_PMENA04.pdf adresinden 13 Şubat 2013 tarihinde indirilmiştir.

Kock, N. F., Jr. (1997). Myhts in Organizational Action Research: Reflections on a Study of Computer-Supperted Process Redesign Groups. *Organizations & Society*, 4 (9), 65-91.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary schol mathematics. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 29, 1-10.

Kuş, E. (2009). Nicel- Nitel Araştırma Teknikleri (3. baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.

Kuzu, A. (2009). Öğretmen Yetiştirme ve Mesleki Gelişimde Eylem Araştırması. *The Journal of International Social Research*, 2(6), 425-433.

Küchemann, D. & Hoyles, C. (2001-03). Longitudinal Proof Project (Technicals Reports For Year 8-10 Surveys). London: Institute of Education.

Küchemann, D. & Hoyles, C. (2012). From Emprical to Structoral Reasoning İn Mathematics, *Teaching and Learning Proof Across the Grades A K-16 Perspective (Ed. Stylianou, D. A.; Blanton, M. L.; Knuth, E. J.)*, London - New York: Routledge.

Kümbetoğlu, B. (2005). Sosyolojide ve Antropolojide Niteliksel Yöntem ve Araştırma. İstanbul : Bağlam Yayıncılık.

Lakatos, I. (1978). Mathematics, science and epistemology. Cambridge, NJ: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem is not the Question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29–63.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education*, 16.

Lester, K. F. (1975). Developmental Aspects of Children's Ability to Understand Mathematical Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*. 6, 14-25.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 194-214.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). Thinking Mathematically. London: Addison-Wesley.

M.E.B. (2011). Orta Öğretim Matematik (9.10.11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

M.E.B. (2013a). Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

M.E.B. (2013b). Orta Öğretim Matematik (9.10.11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), 41-51.

Mills, G. E. (2003). Action Research. A Guide for the Teacher Researcher. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lover Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 41, 47-68. Kulwer Academic Publishers.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (2000). Principles and standards for school mathematics, www.nctm.org

Nelsen, R. B. (1993). Proof Without Words, Exercise in Visual Thinking, Washington: The Mathematical Association of America.

O'Brien, R. (2003). An Overview of the Methodological Approach of Action Resaerch. (On-line). http://www.web.ca/~robrien/papers/xx%20ar%20final.htm

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin kanıt yapabilme düzeyleri. *V. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiriler Kitabı*. http://www.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/b_kitabi/PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf adresinden 13 Temmuz 2013 tarihinde edinilmiştir.

Polya, G. (1981), Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving . New York: Wiley.

Reid, D. A. (2001). Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Proof, Paper based on a Short Oral Presentation at the Twentieth-Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, Netherlands. http://ace.acadiau.ca/~dreid/publications/proof/proof.htm adresinden indirilmiştir.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010), Proof in Mathematics Education Research, *Learning and Teaching*, Sense Publishers: Rotterdam.

Rosen, K. H. (1995), Discrete Mathematics and Its Applications, Boston, USA : McGraw Hill.

Rossi, R. J. (2006), Theorems, Corollaries, Lemmas and Methods of Proof, Wiley-Interscience, USA.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007), Üniversite Öğrencilerinin Analiz Dersi Kapsamında Matematiksel Kanıtlama Süreçleri: Örnek Olay Çalışması, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (2), 295-319.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stylianides, A. J. (2007a), Proof and Proving in School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1–20.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3).

Stylianides, A. J. (2009). Breaking the Equation "Emprical Argument = Proof". *Mathematics Teaching*. 213, 9-14.

Stylianides, A. J. & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation, *Research in Mathematics Education*, 12(1), 21-36.

Stylianides, A.J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, 32(1), 1-10.

Tall, D. (1999), The Cognitive Development of Proof:Is Mathematical Proof for Al lor for Some? , *Development in School Mathematics Education Around the World*, 4, 117-136.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics, Mathematics Education *Research Journal*, 20 (2), 5-24.

Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. (2006). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof, presented at the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Essen, Germany.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. & Cheng, Y. (2012). Cognitive development of proof. In: *Proof and proving in mathematics education. New ICMI Study* (15). New York, NY. United States : Springer Science + Business Media, 13-49.

Topkaya, E.Z. (2006). Yıldırım, Ali ve Şimşek, Hasan. Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri Güncelleştirilmiş Geliştirilmiş 5. baskı, Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2005, 366s. ISBN 97502000 [Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri kitabının incelemesi]. *Eğitimde Kuram ve Uygulama,* 2 (2), 113-118.

Tudge, J. (1990). Vygotsky, the zone of proximal development, and peer collaboration: Implications for classroom practice. In L.C. Moll (Ed.), *Vygotsky and education: Instructional ımplications and applications of sociohistorical psychology (155-174)*. Cambridge: Cambridge University Press.

TÜBİTAK Bilim Teknik Dergisi, http://www.biltek.tubitak.gov.tr/gelisim/matematik/aletkutusu.htm#ergi

Uğurel, I.; Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıf içi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135 – 154.

Umay, A. (2007). Eski Arkadaşımız Okul Matematiğinin Yeni Yüzü, Ankara.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. Orlando, Florida: Academic Press.

Vygotsky, L S. (1978). Educational implications. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds.), *Mind in society: The development of higher psychological processes (79-153)*. Cambridge: Harvard University Press.

Waring, S. (2000). Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools. Leicester, UK: The Mathematical Association.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (5. Baskı), Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yıldırım, C. (1996). Matematiksel Düşünme (2. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Zack, V. (1999). Everyday and mathematical language in children's argumentation about proof. *Educational Review*, 51(2), 129-146.

Zaimoğlu, Ş. (2012), 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

EKLER DİZİNİ

EK 1 : İspat Öğretim Dersinde Kullanılan Akıl ve İspat Oyunları

EK 2: Hazır Bulunuşluk Testi

EK 3: İspat Testi 1

Ek 4: İspat Testi 2

EK 5: İspat Testi 3

EK 6: Görüşme Formu

EK 7: Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğü’nden Alınan Araştırma İzni

EK 1: İspat Öğretim Dersinde Kullanılan Akıl ve İspat Oyunları

Tatile Giderken

Ahmet tatile giderken yolda, küçük bir kasabada otomobili arızalanır. Otomobilinin tamir edilmesini beklerken Ahmet saç traşı olmaya karar verir.
Kasabada yalnız iki berber dükkânı olduğunu öğrenir; Berber Nuri ve Berber Nihat'ın dükkânları.
Ahmet en yakınında bulunan Berber Nuri'nin dükkânından içeri baktığında gördüklerine inanamaz. " Ne kadar kirli bir dükkân. Aynanın temizlenmesi gerek. Yerler saç kılları ile dolu. Berberin ise hem sakal traşına ihtiyacı var hem de saçları çok kötü kesilmiş." diye düşünür. Hızla oradan uzaklaşır ve Berber Nihat'ın dükkânına gider.
Nihat'ın dükkânının penceresinden içeri baktığında ise, " Burası ne kadar da farklı. Ayna, yerler tertemiz. Berberin saçları ise ne kadar düzgün kesilmiş." der. Fakat Ahmet içeri girmez ve "Bu kasabanın en iyi berberi Nuri'dir" diyerek Berber Nuri'nin dükkânına gider.
Sizce Ahmet doğru karar mı verdi? Neden?

Dön Dolaş Aynı Yerdeyim

Aradığım arsayı bulmak için elimdeki yol tarifi ile yola koyuldum.
Tarifte bulunduğum noktadan 100 metre güneye gitmem, daha sonra 200 metre doğu yönünde ilerlemem, son olarak da 100 metre kuzeye çıkmam söyleniyordu.
Denileni aynen uyguladığımda başladığım noktada olduğumu gördüm.
Sizce bu mümkün mü? Mümkünse nasıl mümkün olur?

Çember ve Nokta

Bir çember çizin ve bu çemberin üzerinde farklı sayıda nokta alın. Çember üzerindeki her iki noktayı bir doğru ile birleştirin. Bu doğruların çemberi en fazla kaç bağımsız bölgeye ayırdığını sayın ve bu sayıyı not edin. Çember üzerindeki nokta sayısı ile çizilen doğruların ardından oluşan bölge sayısı arasında sizce nasıl bir ilişki vardır?

Çember üzerinde 15 nokta alındığında, bu noktaların birleştirilmesinin ardından oluşan bağımsız bölge sayısını bulmanın kolay bir yolu var mı sizce? Nasıl?

Güreşçiler

Güreş seçme kampında 200 güreşçi, her birinde 20 sandalye bulunan 10 sıra halinde oturmaktadırlar.
Önce her sıranın en ağır güreşçisi seçilip, bu seçilen 10 güreşçi arasından en hafif olanı belirleniyor. Bu güreşçinin adı Ali olsun.
Sonra da her kolonun en hafif güreşçisi seçilip, bu seçilen 20 hafif güreşçinin en ağır olanı belirleniyor. Bu güreşçinin adı da Mehmet olsun.
Belirlenen iki güreşçi kıyaslandığımda Ali'nin, Mehmet'ten daha ağır olduğunu iddia ediyorum. Sizce bu iddiam doğru mu? Neden?

5 Kart Oyunu

1 – 2 , 3 – 4 , 5 – 6 , 7 – 8 , 9 – 10 ardışık sayıları sırası ile 5 kartın ön ve arka yüzlerine yazılıyor.
Daha sonra bu kartlar havaya atılarak kartların boş bir zemine düşmesi sağlanıyor.
Yerdeki kartların görünen yüzlerinden ikisi çift sayı ise, tüm görünen yüzlerin toplamının 27 olduğunu iddia ediyorum.
Sizce bu iddiam doğru mu? Neden?

EK 2: Hazır Bulunuşluk Testi

Aşağıdaki matematiksel ifadeler sizce her zaman doğru mudur? Cevabınızı açıklayın.

1. Bir tek ve bir çift sayının toplamı tek sayıdır.

2. Ardışık iki sayının toplamı çift sayıdır.

3. 3'ün katı olan iki sayının farkı da 3'e bölünür.

4. Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;

"***Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır***." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık dört öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

Ayşe'nin cevabı Bence ***doğru***; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım. 3 + 4 + 5 = 12 12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.	**Mert'in cevabı** Bence ***doğru***. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a, (a + 1) ve (a + 2) olur. Sonra toplayalım a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3 olur 3a + 3 = 3 (a + 1) Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.
Zeki'nin cevabı Bence ***yanlış***, 15, 16 ve 17 sayılarını alalım. 15 + 16 + 17 = 47 47, 16'nın 3 katı değil. Bu yüzden ifade yanlıştır.	**Belma'nın cevabı** Bence ***doğru***; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım. 2 + 3 + 4 = 9 9 = 3. 3 Yani ortadaki sayının 3 katı. Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım. 21 + 22 + 23 = 66 66 = 3. 22 Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım. İki ayrı deneme yaptım ikisi de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

Hangi öğrencinin cevabı sizce bu soruya verilecek en uygun ispattır? Neden?

EK 3: İspat Testi 1

1. Bir öğretmen matematik sınavında öğrencilerine şu soruyu sorar;

"***Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır***." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki cevapları vermiştir.

<table>
<tr>
<td>Ayşe'nin cevabı

Bence doğru; ben şu örneği denedim, 3, 4 ve 5 sayılarını aldım.

3 + 4 + 5 = 12

12, ortadaki sayının, yani 4'ün 3 katı olduğu için ifade doğrudur.</td>
<td>Mert'in cevabı

Bence doğru. Üç ardışık sayı alalım, bu sayılar, a, (a + 1) ve (a + 2) olur. Sonra toplayalım

a + (a+1) + (a + 2) = 3a + 3 olur

3a + 3 = 3 (a + 1)

Sonuçta toplayınca ortadaki sayının 3 katını elde ettim, bu nedenle doğru.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Belma'nın cevabı

Bence doğru; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım.
2 + 3 + 4 = 9
9 = 3. 3
Yani ortadaki sayının 3 katı.

Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım.
21 + 22 + 23 = 66
66 = 3. 22
Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım.

Daha büyük sayılar denediğimde ise,
101 + 102 + 103 = 306
306 = 3 . 102
Üç ayrı deneme yaptım üçünde de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.</td>
</tr>
</table>

Sizce verilen cevaplardan hangisi bu ifadenin ispatıdır? Neden?

2. ***"Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp, çarpıma 6 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz ."*** ifadesi her zaman doğru mudur? Niçin?

Ceyhun ve Canan öğretmenlerinin sınavda sorduğu bu soruya aşağıdaki yanıtları vermişlerdir.

Ceyhun'un yanıtı;	**Canan'ın yanıtı;**
Bu ifade ***yanlıştır***, çünkü tek sayı olarak 17'yi alırsam ve verilen işlemi yaptığımda; (3 . 17) + 6 = 57 çıkar 57 sayısı 6'nın katı olan bir sayı değildir. Bu nedenle de verilen ifade yanlıştır	Bu ifade ***doğudur***; tek sayı olarak (2n + 1) sayısını alırsan verilen işlemleri yaptığımda; 3 . (2n + 1) + 6 = 6n + 6 + 6 = 6n + 12 = 6 (n + 2) Görüldüğü üzere işlemin sonunda elde ettiğim 6 (n + 2) sayısı 6'nın katıdır. Bu nedenle de ifade doğrudur.

Öğrencilerin verdikleri bu cevaplara dair ne söyleyebilirsiniz, siz öğretmen olsa idiniz bu cevapları nasıl değerlendirirdiniz? (Doğru mu yanlış mı? Neden?)

Ceyhun'un cevabı:

Canan'ın cevabı:

3. Aynı öğretmen aşağıdaki soruyu da sınavda öğrencilerine sorar;

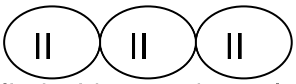
“ İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Bu soruya karşılık üç öğrenci aşağıdaki yanıtları vermiştir.

<table>
<tr>
<td>

Buse’nin cevabı

Doğrudur; çünkü tek sayılar ikişerli gruplandırdığımızda her zaman 1 kalanını veren sayılardır. Örneğin 7 sayısını ikişerli gruplandırırsam;



şeklinde bir tanesi gruplandırmamın dışında kalır.

Eğer iki tek sayıyı toplarsam, bu sayıların sonunda açıkta kalan 1’ler de bir ikili grup oluşturur ve bu iki sayıyı topladığımda tüm sayılar ikili gruplandırıldığı için açıkta kalan 1 olmaz.

Bu nedenle de elde etiğim sayı her zaman çift sayı olur, çünkü ikişerli gruplandırılabilen bir sayı elde etmiş olurum.

</td>
<td>

Mehmet’nin cevabı

Bence ***doğru***; ben şu örnekleri denedim, 11 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 135 ve 379 sayılarını topladım.

11+ 13 = 24

135 + 379 = 514

24 ve 514 sayıları çift sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de çift sayıya ulaştım.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Cem’in cevabı

Bence ***doğru***; tüm tek sayılar, 2n + 1 şeklinde gösterilebilen sayılardır (n tam sayı olsun).
İki ayrı tek sayı alırsam birisi 2n + 1, diğeri ise 2m + 1 olur.
Bu iki sayıyı topladığımda

$$\begin{aligned}(2n + 1) + (2m + 1) &= (2n + 2m) + (1 + 1)\\ &= 2n + 2m + 2\\ &= 2\,(n + m + 1)\end{aligned}$$

Şeklinde bir çift sayı elde ederim.
Bu nedenle iki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.

</td>
</tr>
</table>

Bu verilen cevaplardan hangisi / hangileri verilen ifadeyi sizce ispatlar? Nedeninizi açıklayın.

4. Üç arkadaş sınavdan çıktıktan sonra sınavdaki bir soru üzerine konuşurlar. Üçü de soruya farklı cevap vermiştir. Soru ve öğrencilerin verdikleri cevaplar şu şekildedir:

"Her tek sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını ispatlayınız?

<table>
<tr>
<td>Sedat'ın cevabı

Soruda tek sayı verilmiş, bu nedenle bu sayıyı 2n + 1 olarak alabilirim.

2n + 1 sayısı 2 tane n ve 1 sayısının toplamıdır. Yani;

2n + 1 = n + n + 1 olarak yazılabilir.

Bu durumda 2n + 1 sayısı n ile (n + 1) in toplamı olarak da yazılabilir.

2n + 1 = n + n + 1 = n + (n+1)

n ve (n+1) ise ardışık iki sayıdır çünkü (n+1) sayısı n sayısından 1 fazladır.

Bu durumda 2n + 1 'i yani tek bir sayıyı iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazmış oldum.

Bu nedenle ifade doğrudur.</td>
<td>Deniz'in cevabı

Ardışık iki sayı alalım, bu sayılar x ve (x+1) olur.

Bu iki sayıyı topladığımda;

x + (x+1) = 2x + 1 olur.

2x+1 ise tek sayıların sembolik gösterimi olduğu için verilen ifade doğrudur.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Berk'in cevabı

İspatlamak için birkaç sayı denerim.

1 = 0 + 1 (0 ve 1 ardışık sayılardır)
3 = 1+ 2 (1 ve 2 ardışık sayılardır)
17 = 8 + 9 (8 ve 9 ardışık sayılardır)

3 tek sayı aldım, bu üç tek sayıyı da ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazabildim. Bu nedenle verilen ifade doğrudur.</td>
</tr>
</table>

Hangi öğrencinin verdiği cevap sizce bir ispattır? Siz öğretmen olsa idiniz bu cevapları nasıl değerlendirirdiniz? Niçin?

Sedat'ın cevabı

Deniz'in cevabı

Berk'in cevabı

Ek 4: İspat Testi 2

Ad Soyad:

Grup 1: Aşağıda verilen ifadelerden **birisini seçiniz.**

1. Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır.
2. ab, ba, aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun. Bu durumda ab + ba = aa + bb dir.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **<u>doğrudan ispat yöntemini</u>** kullanarak ispatlayınız.

b. İspatı yaparken doğrudan ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

Grup 2: Aşağıda verilen ifadelerden **birisini seçiniz.**

1. Tüm n tamsayıları için, $n^3 \geq n^2$ dir.

2. Ardışık iki sayının toplamı 4'e bölündüğünde her zaman 3 kalanını verir.

a. Seçtiğiniz ifadeyi <u>**karşı örnek vererek**</u> ispatlayınız.

b. İspatı yaparken karşı örnek vererek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

Grup 3: Aşağıda verilen ifadelerden **birisini seçiniz.**

1. $A = \{1,2,3,4,5\}$ ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman asal sayıdır.

2. Bir sayının karesinin birler basamağındaki rakam, her zaman {0,1,4,5,6,9} kümesinin bir elemanıdır.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **<u>tüketerek ispat yöntemini</u>** kullanarak ispatlayınız.

b. İspatı yaparken tüketerek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

Grup 4: Aşağıda verilen ifadelerden **birisini seçiniz.**

1. Tüm n tamsayıları için, 6n+2 sayısının 4'e bölümünden kalan her zaman ya 0'dır ya da 2'dir. **2.** a ve b tam sayı olsun. Bu durumda $a \, . \, b \leq |a| \, . \, |b|$ dir.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **durum yolu ile ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

b. İspatı yaparken durum yolu ile ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

EK 5: İspat Testi 3

Ad Soyad:

Aşağıda sekiz adet matematiksel ifade verilmiştir. Her ifadenin ispatı için önerilen ispat yöntemi parantez içinde belirtilmiştir.

Verilen ifadelerden <u>**sadece dört tanesini seçerek**</u> ispatlayınız.

1. Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz. **(Doğrudan ispat yöntemi)**

2. Bir tek ve bir çift sayıyı topladığınızda her zaman tek sayı elde edersiniz. **(Doğrudan ispat yöntemi)**

3. n, {1,2,3,4} kümesinin bir elemanıdır, bu durumda her zaman $(n + 2)^2 \geq 3^2$ dir. **(Tüketerek ispat yöntemi)**

4. n, {4,6,8,10,12} kümesinin bir elemanı olsun, bu koşulu sağlayan tüm n sayıları iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir. **(Tüketerek ispat yöntemi)**

5. İki sayının karelerinin toplamı her zaman çift sayıdır. **(Karşı örnek vererek ispat yöntemi)**

6. a sayısı (b + c)'yi tam bölen bir sayı olsun. Bu durumda a sayısı hem b, hem de c sayısını tam olarak bölen bir sayıdır. **(Karşı örnek vererek ispat yöntemi)**

7. Bir tam sayı tutun ve daha sonra bu sayının karesini alın, elde ettiğiniz sayının 4'e bölümünden kalan her zaman 0 veya 1'dir. **(Durum yolu ile ispat yöntemi)**

8. x tam sayı olsun. Bu durumda $x - |x| \leq 0$ dır. **(Durum yolu ile ispat yöntemi)**

İspatlarınız:

EK 6: Görüşme Formu

Görüşmede ilk olarak soru formlarına dair sorular sorulur, en sonunda genel sorulara geçilir.

Test 1

1. soru

(Ayşe'yi seçenlere)

- Ayşe'nin yanıtını niçin seçtin?
- Peki sence bu yanıtın Belma'nınkinden farkı ne?
- Ayşe bu kullandığı tek örnek ile verilen ifadeyi tüm sayı kümesi iç,n doğrulamış mıdır sence?

- Ayşe'nin verdiği tek bir örneği ispat olarak kabul etmişsin, peki karşı örnekle çürütülebilecek bir soru versem sana (o sırada böyle bir soru öğrenciye verilir - Ardışık iki sayının toplamı 4'e bölündüğünde her zaman 3 kalanını verir.), bu soruda önce sayı olarak 3 ve 4'ü alsan sonuç ne olur? (işlemi yaptıktan sonra) peki şimdi de 4 ve 5'i alsan sonuç ne olur? Bu durumda karşı örnekle ispatlanabilecek bir soruda tek bir örnek ile, yani ilk denediğin örnek ile yetinsek ne olurdu?

(Belma'yı seçenler)

- Niçin Belma'nın yanıtını seçtin?
- Bu yanıtın Ayşe'nin yanıtından farkı ne?
- Belma bu cevabı ile verilen ifadeyi tüm sayı kümesi iç,n doğrulamış mıdır sence?

2. soru

(1. soruda Mert'i seçip, 2. soruda da Canan'ı seçenler)

- Bu soruda niçin Canan'ın yanıtını ispat olarak kabul ettin? Sence her cebirsel ifade ispat mıdır?

(Ceyhun yanlış diyen ama Canan'ın cevabına dair yorum yapmayanlar)

- Bu soruda Canan'ın yanıtına dair bir açıklamada bulunmamışsın. Soruya tekrar bakmanı istesem sence Canan'ın yanıtı da ispat mıdır?

(Ceyhun ve Canan'ın yanıtlarının ikisini de ispat olarak değerlendirenler)

- Bu soruda her iki yanıtı da ispat olarak değerlendirmişsin. Ceyhun ifadenin yanlış olduğunu, Canan ise doğru olduğunu söylemiş. peki bu durumda matematiksel bir ifade aynı zamanda hem doğru hem de yanlış olabilir mi?

3. soru

(Buse'nin yanıtını da ispat olarak belirtenler)

- Buse'nin yanıtını da ispat olarak belirtmişsin. Buse sence bu yanıtında nasıl bir genelleme yapmış?

4. soru

öğrencinin önüne ayrı bir kağıtta yazılı olarak Deniz'in cevabı konulur ve "sana bu ispatı versem, sence kağıtta yazılı olan bu ispat nasıl bir matematiksel ifadenin ispatıdır?"

Test 2

Grup 1

1. gruptaki sorularda doğrudan ispat yöntemini kullanmanız istenmişti. Doğrudan ispat yöntemi deyince ne geliyor aklına?

(örnek vererek doğrulayanlar)

- Bu soruda örnek vererek verilen ifadeyi doğrulamışsın. Sence örnekle doğrulamak ispat mı?
- Peki ispat yaparken tüm sayı kümesi için bir genellemeye ulaşıyor idik, sen verdiğin bu örnek / örnekler ile bu ifadenin tüm sayı kümesi için doğru olduğunu söyleyebilir misin?
- (yanıtı hayır ise) peki genellemeye ulaşmak için yani ispat yapmak için ne yapmak / neleri kullanmak gerekir bu durumda?

(doğrudan ispatı b şıkkına yapanlar)

- bu yaptığın ispat yönteminin bir adı var mı?
- (doğrudan ispat der ise) peki bu ispatı niçin b şıkkına yaptın, yaptığın ispattan emin değil misin?

Grup 2

Bu soruda karşı örnek vererek ispat yapmanız istenmiş. Karşı örnek vererek ispat yapmak ne demek sence?

Doğru bir ifade sence bu yöntemle ispatlanır mı? (karşı örnek vererek ispat dediğimizde bu ifadenin yanlış bir ifade olduğu anlaşılıyor mu?)

(tek bir örnekle ifadeyi doğrulayanlar)

- birkaç örnek daha deneyebilir misin bu soruda?
- (ifadeyi yanlışlayan bir örnek bulduğunda) peki bu son yaptığını da dikkate alırsan bu soruyu doğru mu yapmışsın sence?

Grup 3

Bu soruda tüketerek ispat yöntemini kullanman istenmiş, sence tüketerek ispat yöntemi ne tür sorularda / ifadelerde kullanılır?

(sadece küme içerisindeki birkaç sayıyı deneyenler)

- ispat yapmak için verilen kümeden bir kaç sayıyı denemek sence yeterli mi?
- (yeterli derse) peki ya diğer sayılar ifadeyi doğrulamasaydı?
- emin olmak için kümedeki tüm elemanları denemeyi düşünmez misin?

Grup 4

Bu soruda durum yolu ile ispat yöntemini kullanman istenmiş, durum yolu ile ispat denince aklına ne geliyor?

(soruyu yapamayanlara)

- Bu yöntem diğerlerine göre daha mı zor geldi sana?
- Soruyu verilen ispat yöntemi yüzünden mi yoksa matematiksel ifadeler sana zor geldiği için mi yapamadın?

(soruyu bir ya da iki örnek vererek doğrulayanlar)

- bu soruda örnek vererek doğrulamışsın. Sence bu sorunun 1. gruptaki sorulardan bir farkı var mı? Oradaki soruları da örnek vererek doğrulamışsın.
- (fark yok diyorsa) peki sence niye bu soruyu doğrudan ispat yöntemi ile değil de durum yolu ile ispat yöntemi ile ispatlaman istenmiş olabilir?

(soruda incelenecek durumlara uygun örneklerle deneme yapanlar)

- niçin bu örnekleri, örneğin bir tek ve bir çift sayıyı denedin?
- (tek ve çift sayılar olarak iki durumdan bahsederse) peki örnek vererek değil de cebirsel ifadeleri kullanmanı istesem bu durumları nasıl ifade edersin ve ispatı nasıl yaparsın?

Test 3

- Bu soru formunda en kolay ispat yöntemi sence hangisi idi?
- (bahsettiği yöntemden sadece 1ini seçmiş ise) niçin bu yöntemle ispatlanan diğer ifadeyi seçmedin?
- Peki sence en zor ispat yöntemi hangisi?
- (bu yöntemi seçmiş ise) zor bulduğun bu yöntemi niçin seçtin?
- bu verilen dört ispat yöntemini kolaydan zora sıralamanı istesem nasıl sıralarsın?
- peki soruları seçerken neye dikkat ettin? verilen yöntemlerin isimleri mi yoksa verili soruların içeriği mi seçiminde etkili oldu?

daha sonra bu soru formu ile ilgili öğrencilerin ispat uygulamalarına geçilecek.

Görüşmenin en sonunda da genel sorulara geçilir

Genel Sorular

- İspat yapmak sana zor geldi mi?
- Nerde zorlandın?
- Sembolik dili kullanmak zor mu?
- Peki sence niçin ispat yapıyoruz?
- İspat matematikte gerekli mi sence?
- İspat yapmaktan zevk aldın mı?
- Son olarak ispatlanması istenen her matematiksel ifade doğru mudur?

EK 7: Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan Araştırma İzni

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.0.06.20.01-60599/ 78258 — 18 /10/2012
Konu : Araştırma İzni
Ebru AYLAR

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİNE
(Sosyal Bilimler Enstitüsü)

İlgi: a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 2012/13 nolu genelgesi.
b) Üniversitenizin 12/10/2012 tarih ve 4870 sayılı yazısı.

Üniversiteniz Sosyal Bilimler Enstitüsü doktora öğrencisi Ebru AYLAR' ın **"İlköğretim 6. ve 7. sınıf öğrencilerinde ispat kavramının öğretilebilirliğinin irdelenmesi"** konulu tezi ile ilgili çalışma yapma isteği Müdürlüğümüzce uygun görülmüş ve araştırmanın yapılacağı İlçe Milli Eğitim Müdürlüğüne bilgi verilmiştir.

Mühürlü anketler (9 sayfadan oluşan) ekte gönderilmiş olup, uygulama yapılacak sayıda çoğaltılması ve çalışmanın bitiminde iki örneğinin (CD/disket) Müdürlüğümüz Strateji Geliştirme Bölümüne gönderilmesini rica ederim.

İlhan KOÇ
Müdür a.
Şube Müdürü

EKLER :
Anket (9 sayfa)

ETTEPE ÜNİVERSİTESİ
yal Bilimler Enstitüsü
Beytepe / ANKARA
: 912-5716
Tarih: 31.10.2012

Hasan Bey

İl Milli Eğitim Müdürlüğü-Beşevler — Tel : 221 02 17
Bilgi İçin:Nermin ÇELENK — istatistik06@meb.gov.tr

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Ebru Aylar
Doğum Yeri	Çorum
Doğum Yılı	1981

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Çorum Anadolu Lisesi	1992-1999
Lisans	ODTÜ - Matematik	1999-2004
Yüksek Lisans	Ankara Üniversitesi - E.B.F. - Eğitim Ekonomisi ve Planlaması	2004-2007
Yabancı Dil	İngilizce	
İş Deneyimi	Ankara üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi, Araştırma Görevlisi	2006 - ...
e-mail	eaylar@ankara.edu.tr	