



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

GERÇEL SAYILARIN TAMLIK ÖZELLİĞİNİN APOS TEORİSİNE DAYALI ZİHİNSEL YAPILANDIRILMASI

Özgün ŞEFİK

Doktora Tezi

Ankara, 2024

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye ... En iyiye ...



Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

GERÇEL SAYILARIN TAMLIK ÖZELLİĞİNİN APOS TEORİSİNE DAYALI ZİHİNSEL
YAPILANDIRILMASI

MENTAL CONSTRUCTION OF COMPLETENESS PROPERTY OF REAL NUMBERS
BASED ON APOS THEORY

Özgün ŞEFİK

Doktora Tezi

Ankara, 2024

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼rl¼đ¼ne,

zg¼n ŞEFİK'in hazırladığı "Gerçel Sayıların Tamlık zelliğinin APOS Teorisine Dayalı Zihinsel Yapılandırılması" başlıklı bu çalışma j¼rimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

J¼ri BaŐkanı	Prof. Dr. Ahmet ARIKAN	İmza
J¼ri Üyesi (Danışman)	Prof. Dr. Şenol DOST	İmza
J¼ri Üyesi	Prof. Dr. AyŐeg¼l ALTAY UğUR	İmza
J¼ri Üyesi	Prof. Dr. Yılmaz ZENGİN	İmza
J¼ri Üyesi	Doç. Dr. Yasemin SAğLAM KAYA	İmza

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisans¼st¼ Eğitim, ğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki j¼ri üyeleri tarafından 03 / 06 / 2024 tarihinde uygun gr¼lm¼Ő ve Enstit¼ Yönetim Kurulunca / / tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Hakkı MİRİCİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼r¼

Öz

Bu tez çalışmasında modern matematiğin bir alanı olan Analizin en temel yapısı olan gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik öğrenci kavrayışları bağlamında bir araştırma yapılmıştır. Bu bağlamda APOS teorisine bağlı olarak kavramın tarihsel gelişimi incelenmiş, kavrama yönelik alan yazında yer alan öğrenme güçlükleri ortaya konulmuş, öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin kavrayışları belirlenmiş ve araştırmacıların deneyimlerinden yararlanılarak tamlık özelliğine ilişkin genetik ayrışım oluşturulmuş ve bu genetik ayrışımın doğrulanması ve inceltilmesi çalışması yürütülmüştür. Bunun için varsayımsal genetik ayrışımına bağlı bir kavramsal anlama testi oluşturulmuş ve pilot uygulama olarak matematik eğitimi programında öğrenim gören öğrencilere uygulanmıştır. İncelenmiş genetik ayrışım doğrultusunda matematiksel görevler oluşturulmuş ve bu matematiksel görevlere dayalı olarak bir problem durumu ortaya konulmuş ve ACE öğretim döngüsüne bağlı olarak bir öğretim uygulaması gerçekleştirilmiştir. Öğretimin uygulanması sonucunda öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları incelenmiş ve sonuçlar ortaya konulmuştur. Buna göre öğrencilerin zihinsel yapılarının gelişiminde grup içi tartışmaların dışsal uyaran rolünün önemli olduğu, rasyonel sayıların yoğun yapısının gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin şemalarda temel rol oynadığı, zihinsel yapıların ve mekanizmaların matematiksel gerekçelerin sağlamlaşması için önemli olduğu gibi temel sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar sözcükler: tamlık özelliği, matematik eğitimi, analiz öğretimi, apos teorisi, kavramsal anlama

Abstract

In this study, the research was conducted in the context of student conceptions of the completeness property of real numbers, which is the most basic structure of analysis, a field of modern mathematics. In this context, the historical development of the concept was examined based on the APOS theory, the learning difficulties in the literature related to the concept were revealed, students' conceptions of the completeness property were determined, and a genetic decomposition of the completeness property was created by utilizing the experiences of the researchers, and a study was conducted to verify and refine this genetic decomposition. For this purpose, a conceptual understanding test based on the hypothetical genetic decomposition was created and applied to students studying in the mathematics education program as a pilot intervention. Mathematical tasks were created in line with the refined genetic decomposition, a problem situation was posed based on these mathematical tasks, and an instructional application was carried out based on the ACE instructional cycle. As a result of the implementation of the instruction, students' mental constructions related to the property of completeness were examined and the results were revealed. Accordingly, it was concluded that the role of group discussions as external stimuli was important in the development of students' mental structures, the dense structure of rational numbers played a fundamental role in the schemas related to the completeness property of real numbers, and mental structures and mechanisms were important for the consolidation of mathematical justifications.

Keywords: completeness property, mathematics education, calculus teaching, apos theory, conceptual understanding

Teşekkür

Lisans ve lisansüstü öğrenim hayatım boyunca yoluma ışık tutan, akademik gelişimime en büyük katkıyı sunan, bana akademi kültürünü öğreten değerli akıl hocam ve danışmanım Prof. Dr. Şenol Dost' a çok teşekkür ederim.

Tez izleme komitesinde yer alarak araştırma sürecinde her türlü desteği veren hocalarım Prof. Dr. Ahmet Arıkan ve Doç. Dr. Yasemin Sağlam Kaya' ya teşekkürlerimi sunarım. Tez yazma sürecinde her türlü soruma içtenlikle cevap veren ve tezime önemli katkılar sunan jüri üyesi Prof. Dr. Yılmaz Zengin'e ve tez savunmasında verdiği kıymetli dönütler için jüri üyesi Prof. Dr. Ayşegül Altay Uğur'a teşekkürü borç bilirim.

Uzun ve zorlu bu süreçte her türlü desteğini yanımda hissettiğim, akademik olarak birlikte büyüdüğüm, yol arkadaşım, can dostum Doç. Dr. Selin Urhan' a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca akademik yaşantımı kolaylaştıran Hacettepe Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Programı'nda yer alan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Başarı gözetmeksizin beni her şartta kucaklayan sevgili ailemin en değerli üyesi annem Satı Şefik'e, muhabbetiyle her zaman ufkumu açan babam Osman Şefik'e, daima gurur duyduğum ikiz kardeşlerim Pınar ve Umutcan Şefik'e çok teşekkür ederim. Süreçte her ayağım takıldığında dayandığım, beni her zaman ayağa kaldıran, varlığı bile mutluluk kaynağım, biricik eşim Özge Şefik'e teşekkür ederim.

İçindekiler

Kabul ve Onay.....	ii
Öz.....	iii
Abstract.....	iv
Teşekkür.....	v
İçindekiler.....	vi
Tablolar Dizini.....	ix
Şekiller Dizini.....	x
Simgeler ve Kısaltmalar Dizini.....	xi
Bölüm 1 Giriş.....	1
Problem Durumu.....	2
Araştırmanın Amacı ve Önemi.....	10
Araştırma Problemi.....	10
Alt Problemler.....	10
Sayıtlılar.....	11
Sınırlılıklar.....	11
Tanımlar.....	11
Bölüm 2 Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar.....	13
APOS Teorisi.....	13
APOS Teorisinin Temelleri: Yansıtıcı Soyutlama.....	13
Yansıtıcı Soyutlamadan APOS Teorisine Geçiş.....	15
APOS Teorisinin Prensipleri.....	18
Genetik Ayırışım.....	24
Matematik Öğretiminde APOS Teorisi.....	26
Bölüm 3 Yöntem.....	29
Araştırmanın Türü.....	30
Araştırmanın Katılımcıları.....	32
Öğrenci Kavrayışlarına Yönelik Yapılan Pilot Çalışmanın Katılımcıları.....	32
Genetik Ayırışımın Doğrulanmasına Yönelik Pilot Çalışmanın Katılımcıları....	33

Öğretim Uygulamasının Katılımcıları	34
Veri Toplama Araçları	34
Kavramsal Anlama Testi	35
Matematiksel Görevler	37
Uygulama Problemi	39
Veri Toplama Süreci.....	40
Öğrenci Kavrayışlarına Yönelik Yapılan Pilot Uygulamanın Veri Toplama Süreci.....	41
Genetik Ayrışımın Doğrulanmasına Yönelik Pilot Uygulamanın Veri Toplama Süreci.....	42
Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Veri Toplama Süreci	42
Öğretimin Uygulanması Süreci	44
Verilerin Analizi	46
Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerden Elde Edilen Verilerin Analizi	46
Kavramsal Anlama Testinden Elde Edilen Verilerin Analizi	48
Öğretimin Uygulanmasından Elde Edilen Verilerin Analizi.....	49
Geçerlik ve Güvenirlik	51
Bölüm 4 Bulgular, Yorumlar ve Tartışma.....	52
Genetik Ayrışımın Teorik Analizi	52
Analiz Derslerinde Tamlık Özelliği	52
Tamlık Özelliğinin Analiz Kitaplarındaki Yeri.....	54
Tamlık Özelliğine Yönelik Öğrenci Kavrayışları	59
Tamlık Özelliğinin Tarihsel Gelişimi	68
Araştırmacıların Deneyimleri.....	70
Genetik Ayrışımın Tasarımı	70
Genetik Ayrışımın Doğrulanması ve İnceltilmesi.....	73
Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Bulgular	78
Görev-1'e Yönelik Grup İçi Tartışmalar.....	86
Görev-1'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar	96
Görev-2'ye Yönelik Grup İçi Tartışmalar	99
Görev-2'ye Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar	107
Görev-3'e Yönelik Grup İçi Tartışmalar.....	111
Görev-3'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar	113

Görev-4'e Yönelik Grup İçi Tartışmalar.....	115
Görev-4'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar	117
Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Bulgulara İlişkin Tartışma ve Yorumlar.....	118
Bölüm 5 Sonuç ve Öneriler.....	123
Kaynaklar	129
EK-A: Araştırma Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu/ Araştırma Etik Komisyonu Onay Bildirimi	137
EK-B: Etik Beyanı	138
EK-C: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu	139
EK-Ç: Thesis/Dissertation Originality Report.....	140
EK-D: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı.....	141

Tablolar Dizini

Tablo 1	<i>Gerçel Sayıların Tamlık Özelliğine İlişkin Kavramsal Anlama Testi</i>	35
Tablo 2	<i>Öğretim Tasarımında Yer Alan Matematiksel Görevler</i>	38
Tablo 3	<i>Öğrenci Kavrayışlarına İlişkin Verilerin İçerik Analizi</i>	47
Tablo 4	<i>Kavramsal Anlama Testinden Elde Edilen Verilerin Analizi Örneği</i>	48
Tablo 5	<i>Varsayımsal Genetik Ayrışımın İnceltilmesine İlişkin Analiz</i>	49
Tablo 6	<i>Öğretim Uygulamasından Elde Edilen Verilerin Örnek Analizi</i>	50
Tablo 7	<i>Analiz Derslerinde Tamlık Özelliğinin Kullanımı</i>	53
Tablo 8	<i>Tamlık Özelliğine İlişkin Cebirsel Yaklaşım</i>	55
Tablo 9	<i>Tamlık Özelliğine İlişkin Topolojik Yaklaşım</i>	56
Tablo 10	<i>Tamlık Özelliğine İlişkin Kalkülüs Yaklaşımı</i>	58
Tablo 11	<i>Gerçel Sayıların Dedekind Kurulumu</i>	69
Tablo 12	<i>Rasyonel Sayıların Doğru Üzerinde Temsil Edilmesi Sürecine Yönelik Bulgular</i>	73
Tablo 13	<i>Rasyonel Sayıların Doğru Üzerinde Temsil Edilme Sürecine Yönelik İnceltme</i>	74
Tablo 14	<i>Rasyonel Sayı Kümeleri Kullanılarak Işın Nesnesinin Oluşumuna Yönelik Bulgular</i>	75
Tablo 15	<i>Rasyonel Sayı Kümeleri Kullanılarak Işın Nesnesinin Oluşumuna Yönelik İnceltme</i>	76
Tablo 16	<i>Dedekind Işınlarının Gerçel Sayı Nesnesine Dönüştürülmesine Yönelik İnceltme</i>	78
Tablo 17	<i>Gruplara Göre Öğrencilerin Dağılımları</i>	79
Tablo 18	<i>Görev-1'e İlişkin Öğrencilerin Zihinsel Yapıları</i>	94
Tablo 19	<i>Görev-2'ye İlişkin Öğrencilerin Zihinsel Yapıları</i>	106

Şekiller Dizini

Şekil 1 APOS Teori (Asiala ve diğerleri, 1996)	19
Şekil 2 İdeal Genetik Ayırışım Döngüsü	26
Şekil 3 ACE Öğretim Döngüsü Bileşenleri ve Genetik Ayırışım İlişkileri	27
Şekil 4 APOS Teorisi ile Araştırma Döngüsü (Asiala ve diğerleri, 1996)	29
Şekil 5 APOS Teorisi Metodolojisi	30
Şekil 6 Çalışmanın Akış Şeması.....	31
Şekil 7 Para Atma Oyunu	40
Şekil 8 ACE Öğretim Döngüsüne Bağlı Öğretim Uygulamasının Tasarımı	43
Şekil 9 Ö1 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü	86
Şekil 10 Ö1 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü	88
Şekil 11 Ö7 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü	93
Şekil 12 Ö7 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü	94
Şekil 13 Grup-1'in Görev-2'de İkinci Soruya Yönelik Çözümü	100
Şekil 14 Grup-2'nin Görev-2'de Üçüncü Soruya Yönelik Çözümü	104
Şekil 15 Grup-2'nin Görev-2'de Birinci Soruya Yönelik Çözümü.....	104
Şekil 16 Grup-2'nin Görev-2'de İkinci Soruya Yönelik Çözümü	105
Şekil 17 Grup-2'nin Görev-2'de Üçüncü Soruya Yönelik Çözümü	106
Şekil 18 Ö3'ün Görev-3'de Birinci Soruya Yönelik Çözümü.....	112
Şekil 19 Tamlik Özelliğine İlişkin Öğrenci Kavrayışları: Kavramın Epistemolojisi	124
Şekil 20 Tamlik Özelliğine İlişkin Öğrenci Kavrayışları: Kavrama İlişkin Şemalar	124
Şekil 21 Varsayımsal Genetik Ayırışımın Temel Yapıları.....	125

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

ACE: Activities, Classroom Discussions, Examples

APOS: Action, Process, Object, Schema

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

Bölüm 1

Giriş

Matematiğin, Thales (M.Ö. 624-547)'in Mısır'a yaptığı seyahatlerden elde ettiği gözlemleri kullanarak oluşturduğu Yunanca'da yer ölçümü anlamına gelen geometri ile başladığı düşünülmektedir (Bell, 1999). Daha sonra bu kavram Pisagor (M.Ö. 572-497) tarafından "bilgi" ve "öğrenme" terimlerinin kökeninden türetilen "matematik" kelimesiyle ifade edilmeye başlanmıştır. Matematiğe yönelik olarak MÖ 300'lü yıllara kadar yapılan çalışmaların sistematik bir derlemesi olan Öklid'in Elementler Kitabı'nda kullanılan postulatlar sayesinde aksiyomatik yöntemin kullanımı evrensel bir model haline gelmiştir (Bell, 1999).

17. yüzyılın matematikçileri, hareket analizinde ortaya çıkan problemlerin, uzun süredir çözülemeyen bazı geometrik problemlerle yakından ilişkili olduğunu ve bu problemlerin genel olarak iki sınıfa ayrılabilceğini keşfetmişlerdir (Bell, 1999). Bunlardan ilkinde, düzgün olmayan bir hareketin herhangi bir anındaki hızı belirleme problemi ya da daha genel olarak, sürekli değişen bir büyüklüğün değişim oranını bulma problemi ve bununla bağlantılı olarak, verilen bir eğriye üzerindeki bir noktada teğet oluşturma geometrik problemi yer almaktadır. Bu tür problemleri çözme çabaları, bugün diferansiyel hesap olarak bilinen olgunun ortaya çıkmasına neden olmuştur. İkincisi, belirli bir kapalı eğrinin alanını hesaplama ve düzgün olmayan bir harekette kat edilen mesafeyi bulma veya daha genel olarak, sürekli değişen bir büyüklüğün etkisinin toplam etkisini belirleme gibi kinematik problemleri içermektedir. Bu problemler, günümüzde integral hesap olarak bilinen yöntemin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) tarafından teğet ve alan hesabı olmak üzere bu iki temel problemin belli bir anlamda birbirinin tersi olduğu gösterilmiştir. Böylece diferansiyel ve integral hesap, o zamandan beri "Kalkülüs" olarak bilinen tek bir matematik disiplini içinde ele alınmaktadır.

Bir fonksiyonun türevi bir oranın limiti ve belirli integral bir toplamın limiti olduğundan hem diferansiyel hem de integral hesapta limit kavramı merkezi bir rol oynar. Limit

kavramının karakteristik bir özelliği, sonsuz bir süreç fikrini içermesidir. Örneğin limit durumunda bir x değişkeninin değeri sıfıra yaklaştıkça, x 'in gerçekten sıfır olmadan sonsuza kadar küçüldüğü hayal edilir. Sonsuz süreçlerin kullanımı, “Matematiksel Analiz” veya kısaca “Analiz” olarak bilinen matematiğin en geniş alanının ayırt edici özelliğidir. Genel olarak Analiz, bağımsız değişkenin sonsuz küçük olmasına karşılık fonksiyonun davranışının incelendiği bir alandır.

16 ve 17. yüzyıllarda bir doğrunun sonsuz küçük noktalardan oluşan bir yapı olarak ele alınması matematikçiler arasında ciddi tartışmalara yol açsa da, 19. Yüzyılın ilk yarısında Cauchy (1789-1857) tarafından kurulan aksiyomatik bir inşa ile sonsuz küçük yapısı modern matematiğin temelinde yer almaktadır (Laugwitz, 1997). Bu sayede gerçel sayılar inşa edilmiş ve Analiz kavramları gerçel sayıların tamlık özelliği ile birlikte incelenmeye başlamıştır.

Bu tez çalışmasında Analizin en temel yapısı olan gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik öğrencilerin zihinsel yapıları incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda bir problem durumu oluşturulmuş ve problem durumunun gerektirdiği teorik bir çerçeve sunulmuştur. Bu bağlamda araştırma yöntemi belirlenmiş ve yöntemle bağlı olarak analizler yapılmıştır. Daha sonra analizlerden elde edilen bulgular sunulmuş ve tartışılmıştır.

Problem Durumu

Bir matematiksel kavram, matematikçiler tarafından üzerinde uzlaşma sağlanmış olan bir soyut nesnenin tanımıdır (McDonald, Mathews & Strobel, 2000). Kavramın bireyde uyandırdığı çağrışımlar ve tüm içsel temsiller kümesi bireyin kavrayışı olarak tanımlanır (Sfard, 1991). Kavramsal anlama bireyin kavrayışı ile matematiksel kavramın çakıştığı zaman gerçekleşir. Kavram inşası somut durumlar, prosedürler ve süreçler aracılığıyla gerçekleşir ve matematiksel kavramların soyutlanmasına, sembollerin ve zihinsel kavramların anlaşılmasına doğru ilerler (Dubinsky, 1991; Gray & Tall, 1994; Pantziara & Philippou, 2012). Matematik öğretimi, matematiksel kavramları anlama ve kavramlar arası

ilişkilerin farkında olma, mantıklı sonuçlara ulaşabilme, karşılaşılan problemlerin çözümünde matematiksel kavramları kullanabilme yeteneklerini geliştirir (Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi [NCTM], 2000).

Öğretim müfredatlarında belirtildiği gibi sayı sistemlerinin kavramsallaştırılması matematiğin tüm alanlarının anlaşılması bakımından önemlidir (NCTM, 2006). Buna rağmen öğrencilerin sayı sistemlerini anlamalarına yönelik birçok araştırma rasyonel, irrasyonel ve gerçel sayı kavramlarının anlaşılmasının zor olduğuna vurgu yapmaktadır (Fischbein ve diğerleri, 1995; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Gerçel sayılar kümesi genellikle iki düzeyde kavramsallaştırılır (Berge, 2008). Bu düzeylerin ilkinde, tamsayıların oranları (yani rasyonel sayılar) dışındaki sayıların kullanılması gerekliliğine odaklanılır. Burada tamsayıların karekökleri, " π ve e " gibi bazı özel irrasyonel sayıların sayı doğrusundaki gösterimi ele alınır. Bu düzeyde, gerçel sayıların varlığı incelenecek bir problem olarak görülmemektedir. İkinci düzeyde, R gerçel sayılar kümesi Analiz derslerinin doğal alanı olarak görülen aritmetik, sıralama ve tamlik özelliklerine sahip bir küme olarak kavramsallaştırılır (Berge, 2008). Gerçel sayıların ilk kavramsallaştırma düzeyi genellikle ortaokul ve lise matematik öğretiminde ve bazı Kalkülüs derslerinde yeterli olarak kabul edilir. Öte yandan Analiz derslerinde yapılan matematiksel uygulamalar ikinci seviyeye yöneliktir.

Matematik eğitiminde yapılan araştırmalar genellikle gerçel sayılar kümesinin birinci düzeyine odaklanmaktadır. Bunun yanında okul matematiği de gerçel sayılar kümesinin yapısal özelliklerine vurgu yapmamaktadır (Fischbein ve diğerleri, 1995). Gerçel sayıların ilk düzeyde kavramsallaştırılmasına ilişkin yapılan çalışmalarda öğrencilerin anlamalarında irrasyonel sayıların ölçülemezliği ve gerçel sayıların numaralandırılmazlığı şeklinde iki temel engel olduğu öne sürülmektedir (Fischbein ve diğerleri, 1995). Ayrıca yapılan diğer çalışmalar öğrencilerin ve öğretmen adaylarının rasyonel sayıların yoğun yapısını anlamasının önünde doğal sayıların ayrıklığının da bir engel olduğunu göstermiştir (Malara, 2001; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Gerçel sayılar kavramının öğretimine yönelik çalışmalarda genellikle rasyonel ve irrasyonel sayılar arasındaki farklılık esas alınmaktadır (Fischbein ve diğerleri, 1995; Sirotic & Zazkis, 2007; Voskoglou, 2013; Zachariades ve diğerleri, 2013; Zazkis & Sirotic 2010). Bu çalışmalar, rasyonel/irrasyonel ayrımının ötesinde, gerçel sayıların öğretilmesi ve öğrenilmesinde temsil biçimlerindeki dönüşümün (Duval 1995, 2006) önemini vurgulamaktadır (Oktaç & Vivier, 2016).

Rasyonel sayıların öğretiminde ondalıklı gösterim ve kesirli gösterim şeklinde iki farklı temsil biçimi söz konusudur. Matematik eğitiminde genellikle rasyonel sayıların temsilinde kesirli gösterim, ondalıklı gösterime tercih edilir (Oktaç & Vivier, 2016). Buradan hareketle, “ a, b tamsayı olmak üzere $\sqrt{2}$ sayısının $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilemeyeceği” şeklindeki klasik kanıt irrasyonel sayıların inşasının temelini oluşturur. Buna karşın Bronner (1997, 2005) gerçel sayıların, ondalıklı olarak ifade edilen sayıları karakterize eden sonlu ondalık açılım ile ondalıklı olarak ifade edilemeyen sayıları karakterize eden sonsuz açılım arasındaki ayrım yoluyla da algılanabileceğini iddia etmektedir. Bu bakış açısının cebirsel yerine analitik olması ve sayıların tek bir şekilde temsil edilmesi nedeniyle öğretimde etkili olduğu düşünülmektedir (Oktaç & Vivier, 2016). Nümerik temsillerin yanı sıra, gerçel sayıların öğretiminde bir referans noktası ile oluşturulmuş, sayı doğrusu olarak isimlendirilen bir doğru ile temsil edildiği geometrik temsil kullanılmaktadır. Bu temsilin özellikle rasyonel/irrasyonel sayı ayrımına ilişkin yapılan çalışmalarda, olumlu etkilere sahip olduğu görülmektedir (Sirotic & Zazkis, 2007; Voskoglou, 2013). Buna karşın Castela (1996), geometrik doğru ile gerçel sayılar kümesinin topolojisi arasındaki bağlantıya odaklandığı çalışmasında, özellikle sürekli bir sayı kümesine geçişin, nokta-sayı uyumuna güvenilemeyecek karmaşık bir öğrenme süreci oluşturduğunu ifade etmektedir.

Oktaç ve Vivier (2016)'e göre ileri matematiksel düşünme (Tall, 1991) gerektiren Analiz perspektifinden gerçel sayıların incelenmesi, rasyonel/irrasyonel sayı ayrımından başka bakış açıları gerektirir. Çünkü irrasyonel sayı kavramı sadece rasyonel sayı kümesinin geometri ve cebir için yetersizliğini gösterir ve bu bakış açısı Analiz için çok

sınırlıdır. Daha genel olarak, gerçel sayıların özelliklerinin ele alındığı araştırmaların genellikle gerçel sayı kümesine özgü olmadığı gözlenmektedir (Oktaç & Vivier, 2016). O halde “gerçel sayıların özü nedir?”, “gerçel sayılara ne zaman ihtiyaç duyulur?” gibi soruların ele alındığı Analiz dersleri için, gerçel sayıları diğer sayı kümelerinden ayıran en temel özellik olan tamlık özelliğinin vurgulanmasının önemli olduğu düşünülmektedir.

Berge (2006, 2008) çalışmalarında Kalkülüsü bir tür cebirselleştirilmiş Analiz olarak ele almaktadır ve Kalkülüsten Analize geçişte gerçel sayıların tamlık özelliğinin temel unsur olduğunu iddia etmektedir. Diğer yandan gerçel sayılara ilişkin ikinci düzey kavramsallaştırılmanın öğretildiği Analiz derslerini diğer matematik derslerinden ayıran önemli bir faktör bir noktanın komşuluğu gibi yerel özelliklerin kavramsallaştırılmasıdır (Maschietto, 2002). Tamlık özelliği de bir sayının değil sayı kümelerinin bir özelliği olduğundan bir çeşit yerel özelliktir.

Gerçel sayılar kümesinin tamlık özelliğini karakterize eden birbirine denk aksiyomlar aşağıda verilmiştir.

- R gerçel sayılar kümesinin boş olmayan ve üstten (veya alttan) sınırlı olan her alt kümesinin R içinde en küçük üst sınırı (veya en büyük alt sınırı) vardır (en küçük üst sınır özelliği).
- R gerçel sayılar kümesinin her sınırlı ve sonsuz alt kümesi R 'de yığılma noktasına sahiptir (Bolzano Sürekliliği).
- R gerçel sayılar kümesindeki her Cauchy dizisi yakınsaktır (Cauchy sürekliliği).
- R gerçel sayılar kümesinin A, B gibi her kesimi¹ için; her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır (Dedekind sürekliliği).

¹ Q rasyonel sayılar kümesinin boş olmayan bir $A \subset Q$ alt kümesine, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bir kesim denir.

- i) $r \in A, p < r$ ve $p \in Q$ ise $p \in A$ olur.
- ii) $r \in A$ ise $r < p$ olan bir $p \in A$ vardır.

Matematikte tamlık özelliğinin kullanımı, en azından Öklid'in Elementlerine, dolayısıyla MÖ 300 civarına kadar uzanır (Awodey & Reck, 2002). Öklid'in Elementler kitabının ilk önermesinde iki çemberin iki noktada kesiştiği, kesim noktalarının varlığı açık bir şekilde ifade edilmeden, tanımlar, postülatlar, varsayımlar kullanarak kanıtlanmaktadır (Berge & Sessa, 2003). İki çemberin, bir çember ve bir doğrunun veya iki doğrunun arakesitinden söz edebilmek için doğrunun sürekliliğinin yani tamlığının kabulüne ihtiyaç vardır. Bu durumda Öklid'in tamlık özelliğini örtük bir biçimde kabul ettiği söylenebilir.

Tamlık özelliği ile ilgili bir diğer örtük kullanım Girolamo Cardano'nun $x^3 + q = px^2$ kübik denkleminin çözümünün varlığını kanıtlarken $x^3 + q < px^2$ ve $x^3 + q > px^2$ eşitsizliklerini sağlayan x değerlerinin çözüm kümelerinin arakesitini, x değerlerinin varlığını kanıtlamadan, ele almasıdır (Awodey & Reck, 2002).

17. ve 18. yüzyıllarda, incelenen problemler tamlık özelliğinin açık hale getirilmesini gerektirmediğinden, matematiğin geliştirilmesinde tamlık özelliği dolaylı olarak kullanılmıştır. Tamlık özelliğinin açık hale getirilmesinin ilk olarak Cauchy ve Bolzano'nun çalışmalarıyla başladığı kabul edilmektedir (Berge & Sessa, 2003). İlk başta aritmetikleştirme olarak başlayan bu süreç 19. yüzyılda Dedekind ve Cantor'un çalışmalarıyla açık hale getirilmektedir (Awodey & Reck, 2002).

Dedekind (1963) ilk kez doğrunun tamlığı kavramını tanımlayarak tamlık özelliğini açık bir şekilde kullanmıştır. Dedekind, geometrik doğruyu nümerik bir sistemin inşası için bir eksen olarak alarak doğrunun sürekliliğini karakterize etmek için bir yol ortaya atmış ve sayılar için de benzer bir karakterizasyon geliştirmiştir. Buna göre doğrunun tamlığı veya Dedekind sürekliliği olarak adlandırılan bu karakterizasyon, geometrik kanıtların ötesinde o zamana dek hiçbir zaman gerekçelendirilmeyen veya doğal olarak kabul edilen Analiz teoremlerini kanıtlamak için bir yol sunmaktadır.

Öte yandan Cantor (1871), bir sistemde yer alan Cauchy dizilerinin bu sisteme ait bir limiti olacak şekilde tek bir sayısal sistemin oluşturulmasından söz etmektedir. Cantor,

trigonometrik seriler için fonksiyon geliştirmede katsayıların tekliğini kanıtlamak için böyle bir sisteme (kümeye) ihtiyaç duymuştur (Cantor 1871). Yani Cantor'un amacı Analiz'deki diğer teoremleri kanıtlamak için iyi tanımlanmış bir küme inşa etmektir. Buna bağlı olarak " R gerçel sayılar kümesi üzerindeki dizilerin elemanlarından oluşan her sonsuz i içe geçmiş kümelerin arakesiti boştan farklıdır" şeklinde Cantor sürekliliği olarak bilinen karakterizasyon ortaya çıkmıştır (Awodey & Reck, 2002).

Dedekind ve Cantor'un bakış açılarıyla, süreklilik ve tamlık, iki farklı ancak yakından ilişkili kavram olarak ayrılmaktadır. Süreklilik, doğru ile ilişkilendirilirken; tamlık, sayılar kümesi için formüle edilir. Süreklilik ve tamlık, David Hilbert'in (1862-1899) alışmalarında aksiyomlar aracılığıyla kavramsallaştırılmıştır. Hilbert 1902 yılında "Foundations of Geometry" eserinde geometri için süreklilik aksiyomlarını ve 1899 yılında "Über den Zahlbegriff" eserinde gerçel sayıları tanımlamak için tamlık aksiyomunu içeren iki aksiyomatik sistem oluşturmuştur. Bu dönemde grafik temsillerine dayalı argümanlar sorgulanmış ve matematik tümüyle aritmetiksel olarak tanımlanmaya çalışılmıştır. Özellikle "Ara Değer Teoremi" gibi sonuçlar "tamlık özelliğinin" açıkça ifade edildiği durumlar olmuştur (Berge & Sessa, 2003). Ayrıca dizilerin yakınsaklığı, sınırlı monoton dizilerin limitinin varlığı ya da en küçük alt sınırının varlığı gibi yeni formlarda ve limiti tanımlarken kullanılan sonsuz küçükler gibi kavramlarda tamlık özelliği kendini göstermektedir.

Modern matematiğin aksiyomatik yapısında temel rol oynayan "tamlık özelliğinin" kavramsallaştırılmasının, bu yapının nasıl ve neden kurulduğuna yönelik önemli bir veri sunacağı düşünölmektedir. Analiz derslerinin limit, dizi gibi hemen her kavramıyla ilişkili olan bu özelliğin bireyin zihninde nasıl yapılandırıldığı ve bireyin zihnindeki diğer matematiksel kavramlarla nasıl bir ilişkide olduğunun belirlenmesi gerekmektedir.

Berge (2008) Kalköüsten Analize geçerken öğrencilerin başarısızlıklarındaki artışın nedenlerini ortaya koymak için yaptığı çalışmada Kalköüs ve Analiz derslerinde verilen R gerçel sayılar kümesi ve bu kümenin tamlık özelliği hakkındaki ilişkileri, farklılıkları ve bu kavramların derslerdeki dönüşümünü belirlemeye çalışmıştır. Buna göre Kalköüs

derslerinde geometrik sezgi ve gözleme dayalı gerekçelendirmeler yeterlidir. Analiz derslerinin erken safhalarında öğrenciden kendisi için açık olan bazı ilişkilerin kanıtlandığı, daha sonraki aşamalarda ise açık olmayan ilişkilerin kanıtlanması istendiği gözlenmiştir. Bu bağlamda Berge (2008)'ye göre teorik gerekçelendirmelere çok az önem veren Kalkülüs derslerinde tamlik özelliğinin araştırma konusu yapılmasına gerek yoktur. Ancak matematiksel çalışmaların doğrulanmasının konu olduğu Analiz derslerinde bu kavram önem kazanır.

Berge (2010) öğrencilerin gerçel sayılar kümesinin tamlik özelliği hakkındaki algılarını incelediği çalışmasında üniversite öğrencilerinin tamlığı yeni kavramları tanımlamak için bir araç olarak gördüğünü gözlemlemiştir. Çalışmada Analiz derslerinin ilerleyen aşamalarında öğrencilerin tamlik özelliğinin hangi problemleri çözdüğünü bilmediği ortaya çıkmıştır. Berge (2010)'ye göre bu durum derslerin ilerleyen aşamalarında daha ileri teoremlerin kullanılmasından ve öğrencilerin bu aşamalarda tamlik özelliğiyle karşılaşmamlarından kaynaklanmaktadır. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin çoğu için, supremum (en küçük üst sınır) içeren tipik alıştırmalar yapmak, R 'nin üstten sınırlı alt kümelerinin tüm üst sınırlarını içeren küme olduğunu anlamaya yol açmamaktadır.

Öte yandan Durrand-Guerrier ve diğerlerinin (2019) yaptıkları çalışmada üniversite öğrencilerinin “her iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı olması” şeklinde tanımlanan yoğunluk kavramı ve tamlik özelliği arasındaki ilişkiyi ve farkları anlamada yaşadıkları zorlukları incelemişlerdir. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin çoğunluğunun yoğunluk kavramını doğru anladıklarını, ancak bu kavramın tamlik özelliği kavramıyla olan ilişkisini ve farklarını kavramakta zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Durrand-Guerrier ve diğerleri (2019)'ne göre bu iki kavram arasındaki farkın belirlenmesine yönelik çalışmalar yapılmasının önemli olduğu düşünülmektedir.

Artigue (1999) Analiz dersine ilişkin kavramların öğrenciler tarafından kavramsallaştırılmasının matematik eğitimcileri için özellikle hayati bir öneme sahip olduğunu vurgulamaktadır. Analiz dersinin en temel kavramı olan gerçel sayılar, matematik

eğitimi araştırmacıları tarafından en çok yatırım yapılması gereken kavram olarak görülmektedir (Artigue, 2006). Bu bağlamda “gerçel sayılar bilgisinin Analizdeki kavramların kavramsallaştırılması üzerinde nasıl bir etkisi vardır” gibi hala geçerliliğini koruyan sorulara ilişkin çalışmalar devam etmektedir (Oktaç & Vivier, 2016).

Çoğu Kalkls dersinde gerçel sayılar kümesi açıkça tanımlanmaz; bunun yerine, sayı doğrusu imajından hareketle gerçel sayılar “tüm olası sayılar” olarak ele alınır (Berge, 2010). Bu fikir, genellikle bu derslerde yer alan kavramlar üzerinde yapılan işlemlerle uyumludur ve eğitmenlerin müfredatta oldukça hızlı bir şekilde ilerlemesine olanak tanır. Analiz derslerinde ise gerçel sayılar kümesi fonksiyonların doğal tanım kümesi haline geldiğinden, gerçel sayıların diğer özellikleri önem kazanır. Bu durumda gerçel sayılar tam sıralı bir cismin aksiyomlarını sağlayan işlemler ile tanımlanır. Daha sonra gerçel sayılar üzerinde bir kümenin sınırları oluşturularak tamlık özelliği aksiyom olarak verilir.

Genel olarak Kalkls ve Analiz derslerinde gerçel sayıların öğretimine yönelik akışa ve gerçel sayıların öğretimine yönelik çalışmalara bakıldığında; kavramın anlamasına yönelik ortaya çıkan ğrenci güçlükleri ve rasyonel/irrasyonel sayıların yapılandırılmasında karşılaşılan zorluklar bu kavramın öğretilmesinde bakış açısı değişikliğine gidilebileceğini işaret etmektedir. Bu bağlamda ele alındığında, gerçel sayı kümesini diğer sayı kümelerinden ayıran temel özellik olan tamlık özelliğinin öğretimine yönelik alan yazında az sayıda çalışma yer almaktadır. Bu çalışmaların ana fikrinin, tamlık özelliği kavramının öğretimine yönelik farklı bakış açılarıyla çalışılabileceği ve bu çalışmaların nicelik olarak artırılabilceği vurgusu olduğu görülmektedir. Özellikle Kalklsten Analize geçişte en temel özellik olan tamlığın yalnızca aksiyom olarak verilerek Analiz kavramlarının inşa edilmesinin, alan yazında yer alan öğrenme güçlüklerine sebep olduğu düşünülmektedir.

Bu tez çalışması niversite ğrencilerinin gerçel sayıların tamlık özelliği kavramını zihinsel yapılandırılmasının nasıl olduğu olgusunu ele almaktadır. Buna bağlı olarak Analiz derslerinde gerçel sayıların tamlık özelliğinin kavramsallaştırılması için bir yol haritası ortaya konulmasının gerekli olduğu düşünülmektedir. Buradan hareketle tamlık özelliği kavramına

ilişkin öğrencilerin zihinsel yapıları, kavramsal anlamaya bağlı bir öğrenme teorisi olan APOS teorisi (Dubinsky, 1991) bağlamında ortaya konularak bu kavramın bir genetik ayrışımı oluşturulmuş ve bu genetik ayrışım kullanılarak bir matematiksel görev tasarlanmıştır.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu tez çalışmasının amacı üniversite öğrencilerinin gerçel sayıların tamlık özelliği kavramına yönelik zihinsel yapılarını, APOS teorisi bağlamında, ortaya çıkararak Analiz dersleri için bir matematiksel görev yoluyla kavramın zihinsel yapısını oluşturmaktır. Alan yazın göz önüne alındığında bu çalışma; tamlık özelliği kavramına ilişkin APOS teorisi bağlamında bir yol haritası ortaya koyması açısından, öğrencilerin tamlık özelliği kavramının zihinsel inşası sürecinin analiz edilmesi bakımından önemli olduğu düşünülmektedir. Diğer yandan alan yazında gerçel sayıların inşası bakımından; rasyonel/irrasyonel sayılar arasındaki farklılıklara yönelik yapılan çalışmalar dışında, gerçel sayıların özünü yansıtan tamlık özelliğinin öğretime yönelik az sayıda çalışma yer almaktadır. Bu bağlamda Analiz derslerinde yer alan kavramların birçoğuyla bağlantılı olan tamlık özelliğinin kavramsal anlamasına yönelik yapılan bu tez çalışmasının alan yazına katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

Araştırma Problemi

Bu tez çalışmasının araştırma problemi “Üniversite öğrencilerinin gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları/mekanizmaları APOS teorik çerçevesi bakımından nasıldır?” şeklindedir.

Alt Problemler

Araştırma problemine bağlı olarak alt problemler aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

- 1) Gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik APOS teorisi bağlamında bir genetik ayrışım nasıl olmalıdır?

- 2) Tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları ortaya çıkaran genetik ayrışımaya bağlı bir matematiksel görev nasıl olmalıdır?
- 3) APOS teorisi çerçevesinde tasarlanan matematiksel görev sonucunda öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları nasıl değişmektedir?

Sayıtlılar

Çalışmaya katılan öğrencilerin kavramsal anlama testinde yer alan sorulara, görüşme sorularına, matematiksel görevlerde yer alan sorulara ve sınıf içi etkinliklerine gerçek durumlarını yansıtacak şekilde cevap verdikleri varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

Bu çalışma,

- katılımcıları bağlamında Analiz dersini almış olan belli sınıf düzeyinde matematik öğretmen adaylarıyla,
- kavramsal anlama bağlamında APOS teorik çerçevesiyle,
- öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin kavrayışları bağlamında oluşturulan genetik ayrışımaya,

sınırlandırılmıştır.

Tanımlar

Dedekind Kesimi: Q rasyonel sayılar kümesinin boş olmayan bir $A \subset Q$ alt kümesine, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bir kesim denir.

(i) $r \in A, p < r$ ve $p \in Q$ ise $p \in A$ olur.

(ii) $r \in A$ ise $r < p$ olan bir $p \in A$ vardır.

Gerçel Sayı: Q rasyonel sayılar kümesinin bütün kesimlerinin ailesi R olmak üzere, R 'nin her elemanına bir gerçel sayı ve R 'ye de gerçel sayılar kümesi denir.

En Küçük Üst Sınır: Gerçel sayıların üstten sınırlı boştan farklı bir A kümesi için;

(i) M sayısı A kümesinin bir üst sınırıdır.

(ii) A kümesinin herhangi bir b üst sınırı için $M \leq b$ koşulu sağlanır.

koşullarını sağlayan bir M gerçel sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı denir.

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

APOS Teorisi

APOS teorisi Eylem (Action), Süreç (Process), Nesne (Object) ve Şema (Schema) kelimelerinin baş harflerinden oluşan, matematiksel kavramların nasıl öğrenilebileceğine ilişkin bir öğrenme teorisidir (Arnon ve diğerleri, 2014). APOS Teorisi, bir bireyin matematiksel bir kavramı öğrenmeye çalışırken zihninde neler olup bittiğine dair modellere odaklanır ve bu modelleri öğretim materyalleri tasarlamak ve/veya öğrencilerin matematiksel problem durumlarıyla başa çıkmadaki başarı ve başarısızlıklarını değerlendirmek için kullanır (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu teori, gelişimsel bir perspektif bağlamında öğretim metodu olarak (Breidenbach ve diğerleri, 1992); analitik bir değerlendirme aracı olarak (Dubinsky ve diğerleri, 2013) veya her iki şekilde de (Weller ve diğerleri, 2011) kullanılabilir.

Kökleri Jean Piaget'in çalışmalarına dayanan ve yapılandırmacı paradigmadan etkilenen APOS teorisi, 1980'lerin başında Dubinsky (1986) tarafından ortaya atılmış ve o zamandan bu yana araştırmacılar tarafından geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

APOS Teorisinin Temelleri: Yansıtıcı Soyutlama

APOS teori Jean Piaget'in yansıtıcı soyutlama kavramını temel almaktadır. Piaget'e göre bilgi birey ile nesnelere arasındaki etkileşimin bir ürünüdür (Kamii, 1985). Zihinsel veya fiziksel bir nesne hakkındaki bilginin gelişimi hem nesne hem de nesne üzerinde faaliyet gösteren bir özne gerektirir. Bu bağlamda nesne ve birey birbirinden bağımsız düşünülemez. Piaget (1980) bilginin öğrenilmesi için nesne üzerinde birtakım soyutlamalar yapmak gerektiğini ifade etmektedir. Piaget'e göre üç temel soyutlama türü vardır: Deneysel soyutlama, yarı-deneysel soyutlama ve yansıtıcı soyutlama.

Deneysel soyutlama bilgiyi nesnelere özelliklerinden elde eden bir soyutlama türüdür (Beth & Piaget, 1966). Bu tür bir soyutlama, nesnelere ortak özelliklerinin

belirlenmesine ve genelleme yapılmasına, yani özelden genele geçişe yol açar (Piaget & Garcia, 1989). Nesnenin özelliklerinin soyutlanması öznenin bağımsız yani dışsal gibi görünse de; özelliklerin bilgisi içseldir ve özne tarafından içsel yapılandırmaların sonucu ortaya çıkar (Dubinsky, 1991). Örneğin bir nesnenin rengi ve ağırlığı düşünüldüğünde, bu özellikler nesneye aitmiş gibi görünür, ancak özne nesneye belli bir ışıkta bakarak veya nesneyi kaldırması sonucu bunlar hakkında bilgi sahibi olabilir. Farklı koşullar altında farklı bireyler bu özellikler hakkında farklı sonuçlar elde edebilir.

Yarı-deneysel soyutlama, deneysel ve yansıtıcı soyutlama arasında yer alır ve öznenin eylemlerinin nesnelere kazandırdığı özellikleri ortaya çıkarır (Piaget, 1985). Yarı-deneysel soyutlamayı açıklamak için Piaget (1985) eserinde, özne tarafından aynı hizaya getirilen aralarında birebir uyumun gözlemlendiği iki nesne kümesi örneğini vermiştir. Bu durumun bilgisi nesnelere ilgili olduğundan deneysel olarak kabul edilebilir, ancak söz konusu olan nesnelere uzaydaki yapısı ve bunun yol açtığı ilişkilerdir. Bu gözlem öznenin nesnelere hizalaması eyleminden kaynaklanmaktadır. Yine bu iki küme arasında birebir ilişki olduğunun anlaşılması da öznenin yaptığı içsel kurguların sonucudur.

Yansıtıcı soyutlama, Piaget tarafından bilişsel gelişim sürecinde bireyin mantıksal-matematiksel yapıları nasıl inşa ettiğini tanımlamak için ortaya atılan bir kavramdır (Dubinsky, 1991). Bireyin nesnelere üzerine müdahalesi ile gerçekleşen yansıtıcı soyutlama, hem düşüncenin geliştirilmesinde zihinsel yapılar için ana mekanizma hem de bireyin zihninde tüm mantıksal-matematiksel yapıların geliştirildiği zihinsel mekanizma olarak tanımlanmıştır (Piaget, 1965). Tüm mantıksal-matematiksel yapıların türetildiği zihinsel mekanizmalar yansıtıcı soyutlama olarak düşünülmektedir (Piaget, 1971). Piaget'in psikolojik bakış açısına göre, yeni matematiksel yapılar yansıtıcı soyutlama yoluyla ilerler (Beth & Piaget, 1966). Bu bağlamda Piaget (1985), bireyin zihnindeki bilişsel yapıların gelişiminin yansıtıcı soyutlamadan kaynaklandığını belirtmektedir.

Yansıtıcı soyutlama yansıtma ve soyutlama şeklinde iki kısımdan oluşur. İlk kısım, Piaget'in içerik (content) ve içerik üzerindeki işlemler (operation on content) olarak

adlandırdığı ve bu içerik ve işlemleri daha düşük bir bilişsel seviyeden daha yüksek bir seviyeye taşımak anlamında yansıtmayı içerir. İkinci kısım, bu yüksek seviyedeki içerik ve işlemlerin yeniden yapılandırılması ve yeniden organize edilmesinden oluşan soyutlamayı içerir. Bu durum, işlemlerin kendi üzerine yeni işlemler uygulanarak içerik haline gelmesine yol açar (Piaget, 1973). Örneğin fonksiyonlar, tanım kümesindeki elemanları görüntü kümesindeki elemanlara dönüştüren işlemler olarak ele alınabilir. Daha yüksek seviyelerde ise bir fonksiyon uzayının elemanları olarak fonksiyonlar içerik haline gelir. Bir başka örnek olarak tamsayılar başlangıçta bir kümedeki özdeş nesnelere saymak ve sıralamak için bir işlem iken; daha yüksek seviyelerde üzerinde aritmetik işlemlerin yapıldığı bir içerik haline gelir (Piaget, 1965).

Piaget, ileri matematiksel düşünmede yansıtıcı soyutlamanın rolüne ilişkin bir dizi önemli matematiksel kavramı açıklamaya çalışmıştır (Dubinsky, 1991). Bunlar arasında Gödel'in eksiklik teoremi (Beth & Piaget, 1966), soyut grup kavramı (Piaget, 1980), Bourbaki'nin tüm matematiği üç ana yapı içinde kapsama girişimi (Piaget, 1970), genel kategori teorisi (Piaget 1970), tüm kümelerin kümesini oluşturmanın imkansızlığı (Piaget, 1970) ve matematiksel fonksiyon kavramı (Piaget, 1977) yer almaktadır. Daha genel olarak Piaget (1973), sürecin içerikten ayrıldığı ve süreçlerin matematikçinin zihninde içerik nesnelere dönüştürüldüğü matematiksel düşünmeye yol açan fenomenin yansıtıcı soyutlama olduğunu düşünmektedir.

Yansıtıcı Soyutlamadan APOS Teorisine Geçiş

Piaget'ye göre, yansıtıcı soyutlamanın ilk kısmı, belirli bir düşünce düzeyinde zihinsel veya fiziksel eylemlerden özellikler çıkarmaktan oluşur (Beth & Piaget, 1966). Bu şekilde "soyutlanan" şey, daha güçlü düşünce düğümlerinin yanı sıra başka eylemlerin de mevcut olduğu daha yüksek bir düşünce düzlemine yansıtılır (Piaget, 1985). Dubinsky (1991)' e göre, Piaget'in kurduğu bu yapı matematiksel gelişimin özüdür ve aynı zamanda bu sürece bağlı olarak matematiksel düşünmenin doğasına ilişkin felsefi soruyu ele almak için analiz aracı olarak kullanılabilir.

Dubinsky, üst düzey matematiksel yapılar inşa etmek için kullanılabilir özel inşa süreçlerinin küçük çocukların düşüncelerinde zaten bulunabileceğini iddia etmektedir (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu durum, biyolojik gelişimin yanı sıra zihinsel gelişimle de ilgili tek bir süreç veya süreçler dizisi arayışının bir parçası olarak Piaget'in gelişimin sürekliliği konusundaki ısrarı nedeniyle önemlidir (Dubinsky, 1991). Bu bağlamda Piaget' in erken yaşlarda mantıksal-matematiksel düşünmedeki yansıtıcı soyutlama örneklerinden toplamanın değişme özelliğine bakıldığında; bir koleksiyondaki nesnelerin sayısının nesnelerin yerleştirilme sırasından bağımsız olduğunun keşfedilmesi, öncelikle çocuğun nesnelere saymasını, yeniden sıralamasını, tekrar saymasını, yeniden sıralamasını ve saymasını gerektirir. Bu eylemlerin her biri içselleştirilir ve bir şekilde içsel olarak temsil edilir. Böylece çocuk bunlar üzerinde düşünebilir, bunları karşılaştırabilir ve hepsinin aynı sonucu verdiğini fark edebilir (Piaget, 1970). Bu toplama örneği; çocuğun fiziksel nesnelere iki küçük küme oluşturarak fiziksel eylem yapmasını, birinci kümeyi sayıp daha sonra ikinci kümeyi sayarak bunları birbirine ekleme ve devamında önce ikinci kümeyi sayıp daha sonra birinci kümeyi sayarak ekleme ve sonucun aynı olduğunu görme işlemini içerir. Burada nesnelere sayıdır. Yani tamsayılar, fiziksel nesnelere kümesi tarafından temsil edilmektedir. Eylem ise, bu nesnelere üzerinde yapılan toplama işlemi ve toplama işleminin değişme özelliğinin görülmesidir.

Bir başka örnek olarak sayı kavramı; sınıflandırma, yani öğeleri birbirinden ayırt edilemeyen birimlerden oluşan bir küme oluşturma ve yukarıda sözü edildiği gibi ikili, üçlü vb. çeşitli eylemlerin bir koordinasyonunu içeren sıralama şemalarının koordine edilmesiyle oluşturulur (Piaget, 1965). Diğer yandan toplama işlemi, daha önce belirtildiği gibi, bir şeye uygulanan bir işlem olmasına rağmen; matematiksel olarak toplamaların toplanması olan çarpma işleminin soyutlanması sürecinde birbirine eklenen nesnelere dönüşür. Dolayısıyla, çarpma yapmak için öncelikle toplama işleminin zihinsel eyleminin, toplamanın uygulanabileceği bir nesne ya da nesnelere kümesine sarmalanması gerekir (Piaget, 1985).

Dubinsky (1991), Piaget'in erken çocuklukta yansıtıcı soyutlama örneklerini matematiksel kavramların inşası bağlamında, matematiksel düşünme için önemli olan beş farklı yansıtıcı soyutlama mekanizmasını ele almıştır.

- Toplamanın değişme özelliği örneğinde görüldüğü gibi; bireyin sembolleri, dili, resimleri ve zihinsel imgeleri kullanma becerisinin ortaya çıkmasıyla birlikte, algılanan olgulardan anlam çıkarmanın bir yolu olarak içsel süreçler inşa edilir (Dubinsky, 1991). Piaget (1980) bunu içselleştirme olarak adlandırmış ve "bir dizi fiziksel eylemin içselleştirilmiş işlemler sistemine dönüştürülmesi" olarak ifade etmiştir (Beth & Piaget, 1966).
- Piaget (1977) bir tahterevallinin iki tarafındaki nesnenin her iki taraftaki eylemlerin bir kombinasyonu ile dengelenmesi, aynı anda iki şeyi akılda tutmaktan daha fazlasını içerdiğini söylemektedir. Bu bağlamda Piaget bir çocuğun dengeyi kurabildiği zaman ile bunu nasıl yaptığını anladığı zaman arasında kayda değer bir gecikme gözlemlediği için, bu durumu iki eylemin tek bir sistem içinde koordinasyonu olarak görmüştür. Piaget'in tahterevalli örneği yeni bir süreç oluşturmak için iki veya daha fazla sürecin bileşimini veya koordinasyonunu içerir (Dubinsky, 1991). Bu çıkarım Dubinsky (1991) tarafından, Piaget'in yeni eylemler veya nesnelere oluşturmak için bir veya daha fazla eylemi kullanmanın tüm yollarını ifade eden "eylemlerin genel koordinasyonları" ifadesi göz önüne alınarak ortaya konulmuştur.
- Çarpma kavramının inşası örneğine bakıldığında, dinamik bir sürecin sarmalanması ya da durağan bir nesneye dönüştürülmesi söz konusudur (Dubinsky, 1991). Piaget'in (1985) ifade ettiği gibi burada eylemler ya da işlemler düşüncenin temalaştırılmış nesnelere haline gelir. Piaget (1973) bu durumu, "Bu nedenle matematiğin tamamı yapıların inşası olarak düşünülebilir... 'Matematiksel varlıklar' bir seviyeden diğerine geçer, bu 'varlıklar' üzerindeki bir işlem, sırası geldiğinde, teorinin bir nesnesi haline gelir ve bu süreç dönüşümlü olarak 'daha güçlü' yapılara

ulaşana kadar tekrarlanır" şeklinde ifade etmektedir. Felsefi bir bakış açısıyla Piaget, "...önceki formlara dayanan ve onları içerik olarak ele alan yeni formlar inşa etmek" ve "yeni formlar inşa etmek için kullanılan unsurları daha temel formlardan alan yansıtıcı soyutlamalar" ifadeleriyle sarmalama fikrini form ve içerik arasındaki görece farklılık olarak değerlendirmektedir (Dubinsky, 1991).

- Bir özne mevcut bir şemayı daha geniş bir olguya uygulamayı öğrendiğinde, şemanın genelleştirildiği söylenebilir (Dubinsky, 1991). Örneğin bir süreç toplama nesnesine sarmalandığında bireyin toplama şemalarından söz edilebilir ve böylece toplama şemaları daha sonra çarpmayı elde etmek için çarpma olgusuna uygulanabilir. Şema, daha geniş bir uygulanabilirliğe sahip olması dışında aynı kalır ancak nesne genişletilmiş şema tarafından özümsemeye dönüşebilir. Piaget (1973) bu genelleştirici özümseme örneğini vurgulayarak bu durumu genellemeyi genişletici olarak adlandırır (Piaget & Garcia, 1989).
- Piaget'in verilen dört yansıtıcı soyutlama türüne ek olarak Dubinsky (1991), bir sürecin bir kez içsel olarak var olduğunda, öznenin bunu sürecin tersine çevrilmesinden elde edilen yeni bir süreci inşa etme aracı olarak tersleme mekanizmasını ele almaktadır.

Piaget ileri matematiksel kavramlar için yansıtıcı soyutlamanın önemini vurgulasa da daha çok çocukların mantıksal düşüncülerinin gelişimi üzerinde durmuştur. Dubinsky ileri matematiksel kavramlar için yansıtıcı soyutlamanın nasıl olduğu ile ilgilenmiş ve APOS teorisini geliştirmiştir. APOS teorisi matematiksel nesnelerin içselleştirme, sarmalama, tersleme, koordine etme, temalaştırma gibi yansıtıcı soyutlama kullanılarak yapılandırılmasını açıklayan bir modeldir.

APOS Teorisinin Prensipleri

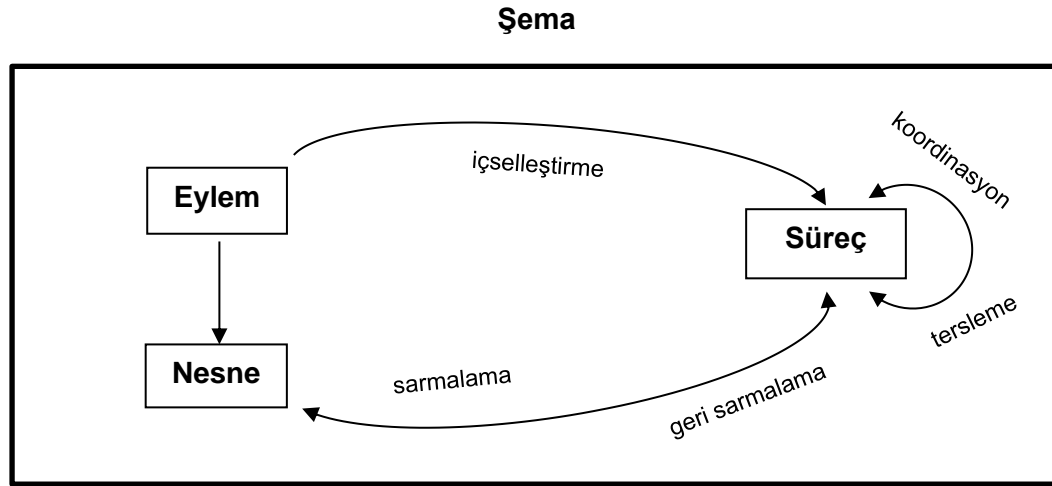
Bireyin matematiksel bilgisi, sosyal bir bağlamda problemler ve çözümleri üzerinde düşünerek ve matematiksel eylemleri, süreçleri ve nesnelere yapılandırarak bunları problem

durumlarıyla başa çıkmak için kullanmak üzere şemalarda düzenleyerek, algılanan matematiksel problem durumlarına yanıt verme eğilimidir (Asiala ve diğerleri, 1996). APOS teorisi bileşenlerini bu eğilime bağlı olarak ele almaktadır (Font Moll ve diğerleri, 2016).

APOS teorisi zihinsel yapılar ve zihinsel mekanizmalar olmak üzere iki ana bileşenden meydana gelir (Arnon ve diğerleri, 2014). Zihinsel yapılar, gelişime açık olsa da görece sabit yapılardır (Stenger ve diğerleri, 2008). Birey zihinsel yapıları matematiksel durumlarda algı oluşturmak için kullanır. Zihinsel mekanizmalar ise bireyin zihninde oluşan yapıyı geliştirebildiği yansıtıcı soyutlamalardır. Zihinsel yapılar durağan iken zihinsel mekanizmalar dinamiktir (Arnon ve diğerleri, 2014). APOS teorisi Eylem, Süreç, Nesne ve Şema zihinsel yapıları ile içselleştirme, sarmalama, koordinasyon, tersleme, geri sarmalama ve temalaştırma zihinsel mekanizmalarından oluşur.

Şekil 1

APOS Teori (Asiala ve diğerleri, 1996)



APOS teorisinin genel prensipleri Şekil 1'de verilmiştir. Burada eylem yapısı, zihinsel nesnelerin dışsal uyarılar tarafından belirlenmiş, açık bir algoritmaya göre herhangi bir dönüşümdür (Font ve diğerleri, 2016). Birey zihinsel nesnelere üzerinde eylem(ler)i tekrar ederek yansıtır ve süreç yapısına içselleştirir (Dubinsky, 1991). Süreç eylemlerin tekrarlanarak dışsal uyarıcılara dayanmaktan uzaklaşması ve eylemler üzerinde içsel

kontrol sağlanmasıdır (Arnon ve diğerleri, 2014). Süreç yapısında tersleme ve koordinasyon mekanizması ile yeni süreçler meydana getirilebilir (Asiala ve diğerleri, 1996). Birey süreç yapısının bir bütün olarak farkına vardığında ve süreç üzerinde yeni bir eylem uygulayabildiğinde, süreç nesne yapısına sarmalanır (Dubinsky ve diğerleri, 2005). Nesne yapısı bir matematiksel kavrama ilişkin süreçlerin farkında olma ve dönüşümlerin yapılandırılabilirliğini kavrama anlamına gelir. Bir zihinsel nesne üzerinde dönüşümler yapılırken geri sarmalama mekanizması ile nesneyi oluşturan sürece geri dönülebilir. Şema, bireyin matematiksel kavramlar üzerine inşa ettiği zihinsel yapıların tanımlarını, organizasyonunu ve örneklerini içeren yapılar olarak tanımlanır (Arnon ve diğerleri, 2014). Bir şema, üzerinde eylemler uygulanabilmesi için, temalaştırılarak nesneye dönüştürülebilir (Font ve diğerleri, 2016).

Aşağıda APOS teorisini oluşturan zihinsel yapılar ve mekanizmalar örnekleriyle birlikte detaylı olarak açıklanmıştır.

Eylem. Eylem olarak düşünülen bir kavram, var olan nesne ya da nesnelerin dışsal olarak dönüşümüdür. Bir eylem, dönüşümün her bir adımında birey tarafından açıkça düşünölmeye ve dışsal bir uyarıcının rehberliğine ihtiyaç duyar (Arnon ve diğerleri, 2014). Her adım bir diğerini izler ve eylemin adımları birey tarafından henüz hayal edilemez ve hiçbir adım atlanmaz. Örneğin, fonksiyon kavramı için fonksiyonun açık ifadesine ihtiyaç duyan, ifadede değeri yerine koymaktan biraz fazlasını yapabilen bir birey fonksiyon kavramını anlamada eylem aşamasındadır (Dubinsky ve diğerleri, 2005). Burada bireyin dışsal bir uyarıcı olarak fonksiyonun açık ifadesine ihtiyaç duyması ve ifadede verilen değerleri adım adım yerine koyması eylem durumunu ortaya koymaktadır.

Kavrayışı eylem düzeyinde olan bir birey, dışsal uyarıcılara ihtiyaç duyar. Örneğin, iki fonksiyonun bileşkesi kavramı için eylem kavrayışında olan bir birey iki fonksiyonun da açık ifadesine ihtiyaç duyar ve bileşke işlemini yalnızca verilen sayısal değerler için gerçekleştirebilir (Breidenbach ve diğerleri, 1992). Bir diğer örnek olarak belirli integral kavramı için bir eğrinin altında kalan alanı bulmaya yönelik birtakım eylemler yapılması

gerekir. Verilen aralığı alt aralıklara bölme, her bir alt aralık için eğrinin altında bir dikdörtgen oluşturma, dikdörtgenin alanını hesaplama, dikdörtgenlerin alanlarının toplamını bulma eylemleri bu duruma örnektir (Arnon ve diğerleri, 2014).

Eylem yapısı en ilkel yapı olsa da, APOS teorisinin temelini oluşturmaktadır. Diğer yapıların geliştirilebilmesi için eylem yapısına ihtiyaç vardır. Özellikle eylemlerin içselleştirilmesiyle süreç yapısının ve zihinsel nesnelerin oluşması için eylemlerin uygulanması bu teorisinin temelinde eylem yapısının olduğunu göstermektedir.

İçselleştirme ve Süreç. Süreç, zihinde içselleştirme ve koordinasyon zihinsel mekanizmaları kullanılarak yapılır (Arnon ve diğerleri, 2014). Birey eylemleri tekrarlayarak dışsal uyarıcılara dayanmaktan uzaklaşır ve eylemler üzerinde içsel kontrol sağlar. Bu durum adımları atlayabilme ve açıkça her bir adımı düşünmek zorunda olmadan hayal edebilme yeteneğidir. Bu zihinsel değişimi mümkün kılan mekanizma içselleştirmedir. İçselleştirme, kişinin bir eylemden haberdar olmasını, onun üzerinde düşünmesini ve diğer eylemlerle birleştirmesini sağlar (Dubinsky, 1991). Örneğin, fonksiyon kavramını anlamada süreç kavrayışında olan bir birey, verilen fonksiyon için zihinsel bir süreç oluşturacak, açıkça belirtilmemiş girdileri ve girdilerin çıktılar üreten dönüşümlerini düşünecektir (Dubinsky ve diğerleri, 2005).

Bireyin eylem için hem fiziksel hem de zihinsel dönüşüm yapması gerekirken, süreç için her bir adımı kontrol etmeye ihtiyaç duymadan dönüşümü uygulayabilmesi eylem ve süreci birbirinden ayıran en temel özelliktir (Arnon ve diğerleri, 2014). Örneğin, belirli integralde bir birey için özel bir bölüntünün Riemann toplamını bulmak bir eylem iken; herhangi bir bölüntü için Riemann toplamını belirleme eylemini içselleştirip, bölüntünün alt aralıklarının sayısı arttıkça Riemann toplamlarını hayal edebilmesi bir süreçtir.

Sarmalama ve Nesne. Bireyin bir sürece bir eylem uygulamasına sarmalama denir (Arnon ve diğerleri, 2014). Burada dinamik bir yapı olan sürece, eylem uygulanarak, durağan bir yapı elde edilir. Eğer birey bir bütün olarak sürecin farkındaysa, dönüşümlerin bir bütünü etkileyebildiğini ve dönüşümleri yapılandırabildiğini kavrar (Dubinsky ve diğerleri,

2005). Bu durumda birey süreci sarmalayarak, zihinsel nesneye dönüştürür. Örneğin, fonksiyon kavramını sarmalayarak nesneye dönüştüren bir birey fonksiyonlar kümesini düşünebilir, bu küme üzerinde aritmetik işlemler tanımlayabilir hatta fonksiyonları topolojik uzaylarda kullanabilir.

Kapalı aralıkta bir fonksiyon için eğrinin altında kalan alanın Riemann toplamlarının limiti olması, Riemann toplamı sürecine uygulanan bir eylemdir. Bu limitin varlığını belirleyerek veya limit değerini hesaplayarak birey, Riemann toplamı sürecini bir nesneye sarmalar.

Geri Sarmalama, Koordinasyon ve Tersleme. Bir süreç bir nesneye sarmalanırken ihtiyaç halinde geri sarmalanarak sürece dönüş yapılabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Diğer bir deyişle, birey nesneyi oluşturduğu sürece geri sarmalama mekanizması ile dönüş yapabilir.

Koordinasyon mekanizması bileşke fonksiyon gibi bazı nesnelerin yapılarında zorunludur. Bu durumda iki nesne geri sarmalanarak sürece dönüştürülür, bu süreçler koordine edilir ve son durumda oluşan süreç yeni bir nesneye sarmalanabilir. Örneğin, f ve g iki fonksiyon ve $f \circ g$ bu iki fonksiyonun bileşkesi olsun. Burada $f \circ g$ bileşke fonksiyonunu elde edebilmek için, her iki fonksiyon nesnesi sürece geri sarmalanır. Bileşke fonksiyonun elemanlarını elde etmek için, bu süreçler g fonksiyonunun sürecine f fonksiyonu uygulanarak koordine edilir. Elde edilen süreç sarmalanarak $f \circ g$ bileşke fonksiyon nesnesi oluşturulur.

Dubinsky (1991) tersleme mekanizmasını ters fonksiyon nesnesinin yapılandırılması örneği ile açıklamaktadır. Dubinsky (1991)' e göre, birey fonksiyon sürecinin tamamını yansıtarak örten olan bir fonksiyon fikri oluşturur. Birey fonksiyon sürecini yansıtarak ve bu süreci tersleyerek birebir olan fonksiyon fikrini düşünebilir. Böylece birebir-örten fonksiyon zihinsel olarak yapılır ve tersleme mekanizması uygulanarak ters fonksiyon elde edilir. Bir başka örnek olarak, Analiz dersi alan bir öğrenci fonksiyonun türevini alma eylemini içselleştirebilir ve çok sayıda örnekle başarılı şekilde

türev alma eylemini gerçekleştirebilir. Eğer bu süreç sarmalanırsa, öğrenci türevi verilmiş bir fonksiyonun ilkelini bulmak için tersleme yapabilir.

Temalaştırma ve Şema. Şemalar, bireyin matematiksel kavramlar üzerine inşa ettiği zihinsel yapıların tanımlarını, organizasyonunu ve örneklerini içeren yapılardır (Arnon ve diğerleri, 2014). Bir Şema, öznenin belirli matematiksel durumlardaki matematiksel etkinliği tarafından belirlenen dinamizmi ve sürekli yeniden yapılandırılması ile karakterize edilir (Dubinsky, 1991). Şema yapısı zihinsel nesnelere temalaştırma mekanizmasıyla oluşturulur. Bu mekanizma bireyin şema yapısına dönüşümler uygulamasına olanak tanır. Bir şemanın tutarlılığı, bireyin özel bir matematiksel durumla başa çıkıp çıkamayacağını tayin edebilme yeteneği tarafından belirlenir. Şemalar, zihinsel yapıların tutarlı koleksiyonu olarak yapılandırıldığında ve bu yapılar üzerinde bağlantı kurulduğunda; statik yapıya dönüşebilir veya diğer ilgili nesnelere ya da şemalarla bağlantı kurularak dinamik bir yapı halinde kullanılabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Örneğin, vektör uzaylar için bir şema; nesne olarak matrisleri, süreç olarak fonksiyonları ve polinomları içerebilir. Bütün bu yapılar vektör uzayı tanımlayan aksiyomları sağladığı için ortak özelliklere sahiptir. Bu şemanın tutarlılığı, bireyin verilen durumda şemanın geçerli olup olmadığını belirlemek için kullandığı vektör uzay tanımına bağlıdır (Parraguez & Oktaç, 2010).

Matematiksel kavramlar doğrudan inşa edilmediğinden, bireyin bunları anlamlandırabilmesi için zihinsel yapılar inşa etmesi gerekmektedir (Piaget & Garcia, 1989). APOS Teorisine göre, bireyler matematiksel kavramları anlama çabalarında zihinsel yapılar inşa ederek ve bu yapıları uygulayarak matematiksel problem durumlarıyla başa çıkarlar (Arnon ve diğerleri, 2014). APOS Teorisi, bir bireyin herhangi bir matematiksel kavramı, bu kavramları anlamak için gerekli yapıların inşa edilmiş olması koşuluyla öğrenebileceği önermesine dayanır (Dubinsky 1991).

APOS teori, zihinsel yapılar ve mekanizmaların yapılandırılarak, var olan yapıların rol oynayıp yeni yapılar oluşturduğu sarmal bir yaklaşım içerir (Stenger ve diğerleri, 2008). Nesnelere yapılandırılırken daha yüksek seviye eylemlere ve süreçlere dönüştürülebilir. Bu

durum sonsuza kadar sürebilir. Her eylem, süreç veya nesne yeniden yapılandırılabilir. Daha karmaşık eylemlerin içselleştirildiği ve daha zengin süreçlerin sarmalandığı yüksek seviyedeki yeni problem durumlarının deneyimlenmesi sonucunda; daha düşük seviye yapılar kaybolmaz, zenginleştirilmiş kavramın bir parçası olarak kalır (Dubinsky, 1997).

APOS teorisinde matematiksel kavramlara ilişkin zihinsel yapıların ve mekanizmaların belirlenmesi için genetik ayrışım olarak adlandırılan varsayımsal bir model kullanılır. Bu modele ilişkin detaylı açıklamalar sıradaki kesimde verilmiştir.

Genetik Ayrışım

Bilimsel araştırmanın nihai hedefi, farklı olguları açıklamak ve tahmin etmek için teorilerin veya modellerin geliştirilmesidir (Woodward 2003). Öğrencilerin matematik öğrenmelerine yönelik araştırmalar, belirli bir matematiksel kavram ve bu öğrenmenin gerçekleştiği koşullar hakkında neler öğrenebileceklerini tahmin etmeye yardımcı olur. Bu, matematik eğitiminin bir araştırma alanı olarak önemli bir parçasıdır ve APOS Teorisinin rollerinden biridir.

Teori yapıları tanımlandıktan sonra bu yapıların nasıl ilişkili olduğunu gösteren modeller geliştirilir. Modeller deneysel olarak test edilebilen çalışma hipotezlerinin temeli olarak hizmet eder. APOS Teorisi, araştırmalara ve öğretime uygulanmasının bir parçası olarak, ilgilenilen kavram veya konuyu yapılandırmanın olası bir yolunu tanımlayan genel bir model içerir (Font Moll ve diğerleri, 2016). Bu modele genetik ayrışım adı verilir.

Bir genetik ayrışım, bireylerin belirli matematiksel içerikle ilgili eylemleri, süreçleri, nesnelere veya bilişsel şemaları nasıl oluşturabileceklerinin ayrıntılı açıklamasından oluşur (Bosch ve diğerleri, 2017). Genetik ayrışımın başlangıcı bir hipotez olarak;

- kavramın öğretimi ve öğreniminde araştırmacının deneyimlerine ve matematiksel bilgisine,
- kavram üzerinde önceki araştırmalara,
- kavramın tarihsel gelişimine ve

- öğrencilerin kavram hakkındaki düşüncelerine ilişkin önceki araştırmalara

dayanır (Arnon ve diğerleri, 2014).

Deneysel olarak test edilene kadar, genetik ayrışım bir hipotezdir ve varsayımsal genetik ayrışım olarak adlandırılır. Bir genetik ayrışım, bireyin mevcut zihinsel nesnelere üzerinde gerçekleştirmesi gereken eylemlerin tanımından oluşur ve bu eylemlerin süreçlere nasıl içselleştirildiğine ve süreçlerin nesnelere nasıl sarmalandığına dair açıklamaları içerir (Arnon ve diğerleri, 2014). Ek olarak bu yapıların nasıl ilişkili olduğuna ve şema adı verilen daha büyük bir zihinsel yapıda nasıl organize edildiğine dair açıklamaları da barındırır. Bu bağlamda kavramın zihinsel olarak yapılandırılmasına ilişkin APOS teorisinde yer alan bileşenleri ve bileşenler arasındaki ilişkileri açıklayan bir yol haritası olarak düşünülebilir.

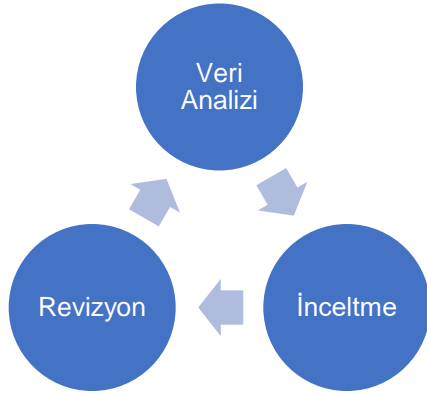
Genetik ayrışım bir kavramın zihinsel olarak nasıl inşa edilebileceğini tanımlamanın yanı sıra, bir bireyin daha önce inşa etmiş olması gereken önkoşul yapıların bir tanımını içerebilir ve bireyin matematiksel performansına bağlı gelişimsel farklılıkları açıklayabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Dolayısıyla, genetik ayrışım matematiksel bir kavramın epistemolojisi ve bilişinin bir modelidir (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Varsayımsal genetik ayrışım, bir öğretim uygulamasının geliştirilmesine rehberlik edebilir (Martínez-Planell & Trigueros, 2012). Uygulama sonucunda elde edilen verilere bağlı olarak genetik ayrışım gözden geçirilir ve test edilen genetik ayrışım artık varsayımsal genetik ayrışım olarak kabul edilmez (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu noktada uygulamanın sonuçlarına bağlı olarak genetik ayrışım inceltme adı verilen bir süreç ile gözden geçirilir ve revize edilir. Revize edilen genetik ayrışımına bağlı öğretim uygulaması yeniden yapılır ve süreç döngüsel olarak tekrar eder. İdeal olarak, inceltme, revizyon ve veri analizi döngüsü, birçok birey için kavramın bilişini yansıtan ve bireyin öğrenmesini olumlu yönde etkileyen, öğretimin tasarımında kullanılacak bir genetik ayrışım ortaya çıkarır (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu şekilde genetik ayrışım, sınıf etkinliklerinin tasarlanmasının yanı sıra, genetik ayrışım ile tasarlanan problem çözme etkinliğinden veya diğer öğretim önerilerinden

öğrencilerin hangi zihinsel yapılarının çıkarılabileceğini analiz etmek için *a priori* bir modelin temelini oluşturur (Bosch ve diğerleri, 2017).

Şekil 2

İdeal Genetik Ayırışım Döngüsü



Matematik Öğretiminde APOS Teorisi

APOS Teorisi genetik ayırışma bağlı olarak öğretim materyallerinin ve ortamlarının tasarımı ve uygulanması için bir gelişimsel çerçeve olarak düşünülebilir (Arnon ve diğerleri, 2014). APOS teorisi, öğretimin tasarımı ve uygulanması için, genetik ayırışımın gerektirdiği zihinsel yapıların gelişimini destekleyen ve işbirlikli öğrenme tekniklerini içeren ACE öğretim döngüsü olarak adlandırılan bir yaklaşım önerir.

ACE Öğretim Döngüsü. APOS teorisinin önerdiği bir öğretim yaklaşımı olan ACE Öğretim Döngüsü üç bileşenden oluşan pedagojik bir stratejidir: Etkinlikler (Activities), Sınıf Tartışması (Classroom Discussion) ve Alıştırmalar (Exercises).

Döngünün ilk adımını oluşturan etkinlik aşamasında öğrenciler, genetik ayırışımın önerdiği zihinsel yapıları oluşturmalarına yardımcı olmak üzere tasarlanmış görevler üzerinde ekipler halinde işbirliği içinde çalışırlar (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu görevlerin odak noktası, doğru cevaplar elde etmekten ziyade yansıtıcı soyutlamayı teşvik etmektir.

Döngünün ikinci kısmı olan sınıf tartışması, öğrencilerin etkinlik aşamasında tamamlanan görevler üzerinde öğretmen liderliğinde küçük gruplar halinde sınıf içi tartışmalarını içerir. Bu süreçte öğretmen tartışmaya rehberlik ederken, öğrencilerin

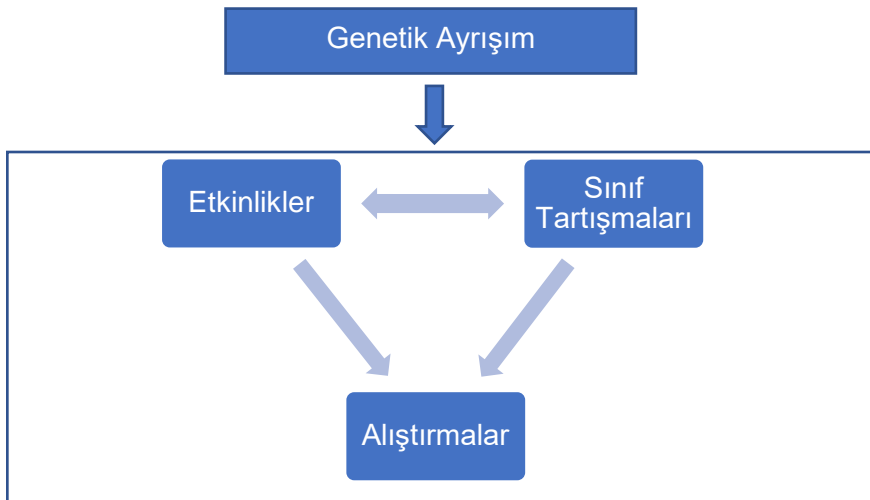
düşüncelerini ve üzerinde çalıştıkları görevleri birbirine bağlamak için tanımlar verebilir, açıklamalar sunabilir ve/veya genel bir bakış sunabilir (Arnon ve diğerleri, 2014).

Döngünün üçüncü kısmı olan ev ödevi alıştırmaları, etkinlikleri ve sınıf içi tartışmaları pekiştirmek için tasarlanmış standart problemlerden oluşmaktadır. Alıştırmalar, genetik ayrışım tarafından önerilen zihinsel yapıların sürekli gelişimini desteklemeye yardımcı olur. Ayrıca öğrencileri öğrendiklerini uygulamaya ve ilgili matematiksel fikirleri değerlendirmeye yönlendirir (Arnon ve diğerleri, 2014).

Aşağıda ACE öğretim döngüsünün bileşenlerinin ve genetik ayrışım ile ilişkilerinin verildiği şekil yer almaktadır.

Şekil 3

ACE Öğretim Döngüsü Bileşenleri ve Genetik Ayrışım İlişkileri



Burada genetik ayrışımın ACE öğretim döngüsünün her bir bileşenini etkilediğini göstermektedir. Yani öğretim döngüsünde yer alan her aşama genetik ayrışımın rehberliğinde yapılmaktadır. Etkinlikler ve sınıf tartışmaları arasındaki çift yönlü ok, bir yandan etkinliklerin sınıf tartışmalarının ana konusu olduğunu, diğer yandan da sınıf tartışmalarının öğrencilerin etkinlikler üzerinde düşünmeleri için fırsat sağladığını göstermektedir. Etkinlikler ve sınıf tartışmalarından alıştırmalara giden oklar, alıştırmaların temel amacının öğrencilerin etkinlikler üzerinde çalışırken ve sınıf

tartışmalarına katılırken yaptıkları veya yapmaya başladıkları zihinsel yapıları pekiştirmek olduğunu yansıtmaktadır (Arnon ve diğerleri, 2014).

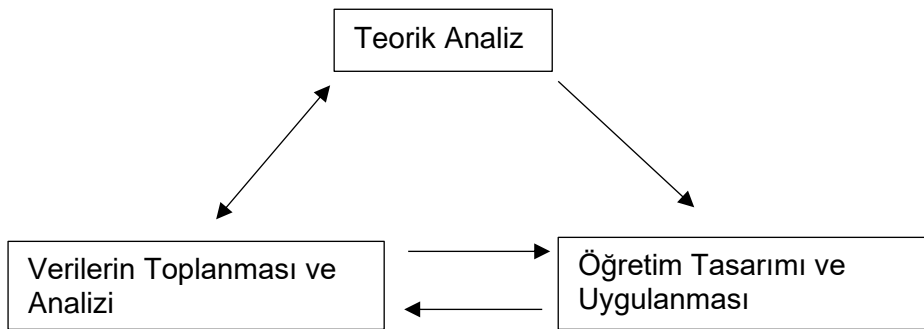
Bölüm 3

Yöntem

Bu tez çalışmasında APOS teorisi temel alınarak gerçel sayıların tamlık özelliğinin öğrenciler tarafından zihinsel yapılandırılması araştırılmaktadır. APOS tabanlı araştırmalar teorik analiz, öğretim tasarımı ve uygulanması, verilerin toplanması ve analizi şeklinde üç temel bileşen içerir (Asiala ve diğerleri, 1996). Aşağıdaki şekilde bu bileşenlerin ilişkisi gösterilmektedir.

Şekil 4

APOS Teorisi ile Araştırma Döngüsü (Asiala ve diğerleri, 1996)

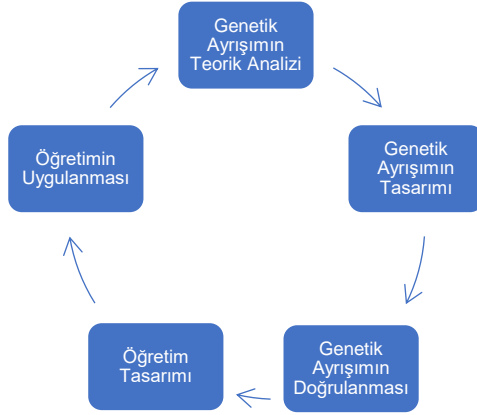


Buna göre araştırma, ele alınan matematiksel kavramın bilişinin teorik bir analizi ile başlar. Teorik analiz, veri analizinin gerektirdiği zihinsel yapıları oluşturmayı amaçlayan etkinlikler aracılığıyla öğretimin tasarımını ve uygulanmasını yönlendirir. Öğretimin uygulanması, APOS teorik merceği kullanılarak gerçekleştirilen verilerin toplanması ve analizi için bir fırsat sağlar. Deneysel kanıtlar ve teorik analiz aynı zihinsel yapıları işaret edene kadar döngü devam eder. Sonuç olarak, her çalışma uygulanması için pedagojik öneriler ve gelecekteki araştırmalar için yönergeler sunar (Arnon ve diğerleri, 2014).

Bu paradigma doğrultusunda, APOS Teorisi ile araştırma metodolojisi aşağıdaki aşamalardan oluşan bir döngüyü takip eder: Bir genetik ayrışımın teorik analizi ve tasarımı, genetik ayrışımın doğrulanması, öğretim tasarımı ve öğretim deneyi.

Şekil 5

APOS Teorisi Metodolojisi (Arnon vd. (2014)'nin kitabından uyarlanmıştır.)



Bu çalışmada gerçel sayıların tamlik özelliğinin genetik ayrışımının teorik analizine yönelik;

- Analiz kitapları incelenmiş,
- alan yazında yer alan kavrama ilişkin öğrenme güçlükleri belirlenmiş,
- kavramın tarihsel gelişimi ortaya konulmuş,
- Analiz dersi veren deneyimli öğretim elemanlarının deneyimleri göz önüne alınmıştır.

Buna bağlı olarak gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin varsayımsal genetik ayrışım oluşturulmuştur. Varsayımsal genetik ayrışımına bağlı olarak bir kavramsal anlama testi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Bu doğrultuda genetik ayrışım revize edilerek doğrulanmıştır. Gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin oluşturulan genetik ayrışım doğrultusunda matematiksel görevler tasarlanmış ve öğretim ortamında uygulanmıştır.

Araştırmanın Türü

Bu çalışmada gerçel sayıların tamlik özelliğinin zihinsel yapılandırılmasının nasıl olduğu problemi APOS teorisi metodolojisine bağlı olarak araştırılmıştır. Bu bağlamda

çalışmada APOS metodolojisinin doğasına uygun olacak şekilde nitel araştırma kullanılmıştır. Creswell (2012)'e göre nitel araştırmalar;

- Bir problemin keşfedilmesi ve bir olguya ilişkin ayrıntılı bir anlayış geliştirilmesi,
- Alanyazın taramasının problemi gerekçelendirmesi,
- Amacın ve araştırma sorularının katılımcıların deneyimlerini de kapsayacak şekilde genel ve geniş bir şekilde ifade edilmesi,
- Katılımcıların görüşlerinin alınması için az sayıda bireyin sözlerine dayalı veri toplanması,
- Metne bağlı verilerin analiz edilmesi ve bulguların daha geniş anlamının yorumlanması,
- Araştırmacıların öznel fikirleri ile birlikte ortaya çıkan yapıların ve değerlendirme kriterlerinin kullanılarak, esnek bir şekilde raporun yazılması

biçiminde karakterize edilir. Buna dayalı olarak çalışmada gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin zihinsel yapılandırılması durumu araştırılmıştır. Bunun için çalışmada aşağıdaki akış izlenmiştir.

Şekil 6

Çalışmanın Akış Şeması

Problem Durumu

- Matematik eğitiminde gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik alanyazın taraması yapılmıştır
- Gerçel sayıların tamlık özelliğinin matematik eğitimi için önemi ortaya konulmuştur
- Alanyazındaki boşluğa bağlı olarak problem cümlesi belirlenmiştir.

Genetik Ayrışımın Teorik Analizi

- **Analiz Derslerinde Tamlık Özelliği:** Analiz derslerinde tamlık özelliği ve bu kavramın diğer kavramlarla olan ilişkisi araştırılmıştır.
- **Tamlık Özelliğinin Analiz Kitaplarındaki Yeri:** Tamlık özelliğinin esas alındığı "gerçel sayıların kurulumu" konusunda Analiz kitapları incelenerek nasıl bir yol izlendiği belirlenmiştir.
- **Tamlık Özelliğine Yönelik Öğrenci Kavrayışları:** Öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin kavrayışlarını belirleyebilmek için yarı-yapılandırılmış görüşme formu hazırlanmış ve öğrencilerle görüşme yapılmıştır.
- **Tamlık Özelliğinin Tarihsel Gelişimi:** Tamlık özelliğinin tarihsel gelişimi incelenmiştir.
- **Araştırmacıların Deneyimleri:** Analiz derslerini veren deneyimli öğretim elemanlarının görüşleri dikkate alınmıştır.

Genetik Ayrışımın Tasarımı

- Genetik ayrışımın teorik analizi doğrultusunda tamlık özelliğine ilişkin varsayımsal genetik ayrışım oluşturulmuştur.

Genetik Ayrışımın Doğrulanması

- Varsayımsal genetik ayrışımına bağlı olarak kavramsal anlama testi geliştirilmiştir.
- Kavramsal anlama testi öğrencilere uygulanmış ve uygulama sonucu elde edilen veriler analiz edilmiştir.
- Analizler doğrultusunda varsayımsal genetik ayrışım incelenmiştir.

Öğretim Tasarımı

- Genetik ayrışımın merkezde yer aldığı ACE öğretim döngüsüne bağlı bir öğretim tasarımı yapılmıştır.
- Genetik ayrışımına bağlı olarak öğretimde kullanılacak matematiksel görevler oluşturulmuştur.
- Matematiksel görevlere bağlı olarak bir problem (uygulama sorusu) oluşturulmuştur.
- Uygulama sürecinde öğretmenin rolü belirlenmiştir.

Öğretimin Uygulanması

- Öğretim tasarımına bağlı olarak bir uygulama yapılmış ve elde edilen veriler analiz edilmiştir.
- Analiz edilen veriler bulgu olarak sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Araştırmanın Katılımcıları

Bu tez çalışmasında; genetik ayrışımın teorik analizi bağlamında

- tamlık özelliğine ilişkin öğrenci kavrayışlarının belirlenebilmesi için bir pilot çalışma,
- genetik ayrışımın doğrulanması bağlamında bir pilot çalışma,
- tamlık özelliğinin zihinsel yapılandırılması bağlamında bir öğretim uygulaması

yapılmıştır. Her bir çalışma için ayrı katılımcı grubu belirlenmiştir.

Öğrenci Kavrayışlarına Yönelik Yapılan Pilot Çalışmanın Katılımcıları

Gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin kavrayış düzeylerinin incelenmesi amacıyla yapılan pilot çalışma 2019-2020 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi'nde matematik öğretmenliği programı dördüncü sınıfta öğrenim gören üç öğrenciyle yapılmıştır. Burada program müfredatında tamlık özelliği kavramının geçtiği tüm dersleri almış

öğrencilerin kavrayışlarını belirlemek amacıyla dördüncü sınıf öğrencileri ile çalışılmıştır. Öğrencilerin gerçel sayıların tamlık özelliğine ve bu kavramla ilişkili diğer kavramlara yönelik zihinlerindeki matematiksel bağlantıların ortaya çıkarılabilmesine yönelik zengin veri sağlanabilmesi için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme ile belirlenmiştir. Burada amaç maksimum çeşitlilik örnekleme ile görece küçük bir örneklem oluşturularak olabildiğince çok çeşitlilik yaratmaktır (Patton, 1987; Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu bağlamda katılımcılar aşağıdaki kriterlere göre belirlenmiştir.

i. Çalışmada oluşturulan yarı-yapılandırılmış görüşme sorularında yer alan; tamlık özelliği, bir kümenin sınırı, en küçük üst sınır (eküs) ve en büyük alt sınır (ebas) gibi kavramları içeren Analiz 1-2-3-4 derslerini almış ve bu derslerde başarılı olmuş öğrenciler seçilmiştir.

ii. Analiz 1-2-3-4 derslerini veren öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda zengin veri sağlayabilecek, düşüncelerini kolayca ifade edebilen öğrenciler belirlenmiştir.

iii. Maksimum çeşitliliğin sağlanabilmesi için ilk iki kriteri sağlayan öğrenciler arasından genel akademik ortalamaları görece düşük (ort:2.00-2.50), orta (ort:2.50-3.00) ve yüksek (ort:3.00-4.00) olan birer öğrenci çalışmaya dahil edilmiştir.

Genetik Ayırışımın Doğrulanmasına Yönelik Pilot Çalışmanın Katılımcıları

Genetik ayırışımın doğrulanmasına yönelik yapılan pilot çalışmada varsayımsal genetik ayırışımına bağlı oluşturulan kavramsal anlama testi 2020-2021 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 8 adet son sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Burada amaç tamlık özelliğine ilişkin oluşturulan genetik ayırışımın doğrulanması olduğundan katılımcılar amaçlı örneklem yöntemine göre belirlenmiştir. Bu bağlamda genel akademik ortalamaları düşük (ort:2.00-2.50), orta (ort:2.50-3.00) ve yüksek (ort:3.00-4.00) düzeyden öğrenciler çalışmaya dahil edilmiştir.

Öğretim Uygulamasının Katılımcıları

Bu tez çalışmasının evreni, çalışmanın konusu bağlamında, Analiz dersi alan öğrenciler olarak belirlenmiştir. Bu bağlamda çalışmanın katılımcılarını 2023-2024 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi'nde Matematik Öğretmenliği Programı 2. sınıfta öğrenim gören 20 adet öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın evreni göz önüne alınarak katılımcıların Analiz 1-2 dersini almış olmaları ve araştırmacıların Matematik Öğretmenliği Programında öğretim elemanları olması bakımından erişim kolaylığı dikkate alınmıştır. Öğrencilere öncelikle tamlik özelliği ve ilişkili kavramların tanımlarına ve uygulamalarına yönelik bir test uygulanmış ve bu testten başarısız olan 10 öğrenci öğretim uygulamasına dahil edilmiştir. Öğrencilerin öğretim uygulaması sürecinde tamlik özelliği kavramına ilişkin zihinsel yapılarının nasıl değiştiği gözlenmek istendiğinden testten başarısız olan öğrenciler uygulamaya dahil edilmiştir. Öğretim uygulamasına dahil edilen 10 öğrenci 3 kişilik 3 gruba (bir grup 4 kişilik) ayrılmıştır. Gruplar Analiz 1-2 dersini veren öğretim elemanının görüşleri doğrultusunda; düşüncelerini birbirlerine iyi ifade edebilen, grup içi tartışmalarda birbirleriyle iyi anlaşabilen ve bu bağlamda grup dinamikleri içerisinde zengin veri üretebilecek öğrenciler bir araya getirilerek oluşturulmuştur.

Veri Toplama Araçları

Bu tez çalışmasının temel veri toplama araçları;

- Genetik ayrışımın teorik analizi bağlamında öğrenci kavrayışlarını belirlemek için kullanılan yarı yapılandırılmış görüşmeler,
- Genetik ayrışımın doğrulanması bağlamında oluşturulan tamlik özelliğine ilişkin kavramsal anlama testi,
- Öğretimin uygulanması esnasında sınıf içi etkinlikler bağlamında genetik ayrışım esas alınarak oluşturulmuş matematiksel görevler ve uygulama sorusu

şeklindedir.

Gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin öğrencilerin kavrayışlarını belirlemek için yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir.

- Tam olmak deyince ne anlıyorsun?
- R gerçel sayılar kümesinin tam olması ne demektir?
- Bir doğru tam mıdır?
- Doğrunun tam olması ile R gerçel sayılar kümesinin tam olması aynı şey midir?
- Bir kümenin sınırı, eküsü-ebası ne demektir?
- “ R gerçel sayılar kümesinde boştan farklı üstten sınırlı bir kümenin en küçük üst sınırının olması” ile “ R gerçel sayılar kümesindeki herhangi iki nokta arasında en az bir gerçel sayı olması” arasındaki ilişki nedir?
- R gerçel sayılar kümesi tam olmasaydı ne olurdu?

Görüşmelerde öğrencilerin verdiği cevaplara bağlı olarak, ifadeleri netleştirmek amacıyla “bunu mu demek istedin?”, “peki az önce sözünü ettiğin teoreme doğrunun tamlığı arasında bir ilişki var mıdır?” gibi ek sorular da sorulmuştur.

Kavramsal Anlama Testi

Çalışmanın veri toplama araçlarından biri APOS teorik çerçevesi bağlamında gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin varsayımsal genetik ayrışımına bağlı olarak oluşturulan kavramsal anlama testidir. Varsayımsal genetik ayrışımı deneysel olarak test edebilmek için genetik ayrışımın her bir zihinsel yapısına yönelik soruları içeren bir kavramsal anlama testi aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

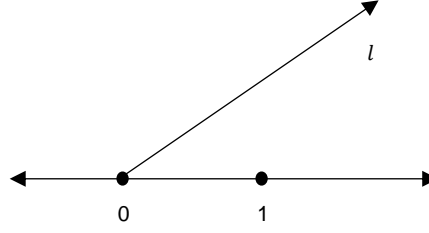
Tablo 1

Gerçel Sayıların Tamlık Özelliğine İlişkin Kavramsal Anlama Testi

Zihinsel Yapılar	Sorular
------------------	---------

Elinizde bir birim olduğu düşünölen bir silgi ve yardımcı l doğrusunu kullanarak $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısını aşğıdaki doğru üzerinde bir noktaya karşılık getiriniz.

1.a. Rasyonel sayılar kümesindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eylemi



0'dan küçük -2 'den büyük rasyonel sayılar kümesini bir doğru üzerinde gösteriniz.

1.b. Rasyonel sayıların bir alt kümesinin bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemi

Bir pergel 45 derece açılarak bir ucu bir sayı doğrusu üzerine yerleştirilip diğeri ucuna sayı doğrusu üzerinde karşılık getirilen nokta rasyonel sayı mıdır? (Pergelin bir ayağının uzunluğu bir birim kabul edilsin). Bu sayıdan daha küçük olan rasyonel sayılar kümesi bu sayı doğrusu üzerinde nasıl temsil edilir?

1.c. Bu iki eylemin (1.a. ve 1.b.) içselleştirilerek rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi süreci

Rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerindeki temsili doğrunun bütün noktalarını içerir mi? Neden?

2.a. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemanın üst sınırlar kümesini bulma ve doğru üzerinde temsil etme eylemi

$\frac{3}{2}$ rasyonel sayısının üst sınırlar kümesini bir sayı doğru üzerinde gösteriniz.

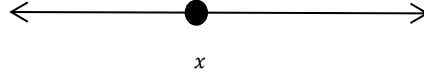
2.b. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemana belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarını doğru üzerinde temsil etme ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi

0 sayısını bir doğru üzerinde bir noktaya karşılık getiriniz. 0 sayısına karşılık getirilen noktadan sola doğru gidilerek elde edilen bütün rasyonel sayıların oluşturduğu kümenin üst sınırlar kümesini ve bu kümenin en küçük elemanını doğru üzerinde gösteriniz.

2.c. Verilen 2.b. eyleminin, rasyonel sayılar kümesinde verilen herhangi bir elemana dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarının o noktadan büyük rasyonel sayılar kümesi ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanının verilen nokta olduğu sürecine içselleştirilmesi

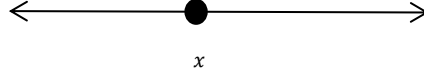
Bir x rasyonel sayısı için doğru üzerinde o noktanın solunda olan bütün rasyonel sayıların oluşturduğu kümenin üst sınırlar kümesini ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulunuz.

2.d. Doğru üzerinde verilen rasyonel sayı olmayan herhangi bir noktaya dönüşüm uygulanarak elde edilen noktalar kümesinin üst sınırlarını ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi



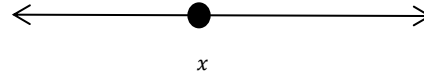
x karesi 2 olan sayı olmak üzere x 'in solunda yer alan bütün rasyonel sayıların kümesini yazarak bu kümenin üst sınırlar kümesini belirleyiniz. Bu kümenin en küçük elemanı var mıdır?

2.e. Verilen 2.d. eyleminin genelleştirilerek doğru üzerinde rasyonel olmayan hangi nokta alınırsa alınsın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı olmadığı sürecine içselleştirilmesi



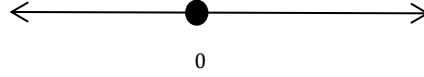
x verilen doğru üzerinde alınan herhangi bir rasyonel sayıya karşılık gelmeyen nokta olsun. Bu noktanın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı var mıdır? Neden?

2.f. Verilen 2.c ve 2.e süreçlerinin koordine edilerek doğru üzerinde verilen bir noktanın rasyonel sayı olup olmadığının belirlenmesi süreci



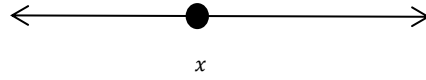
Doğru üzerinde verilen x noktasının üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı vardır. O halde x bir rasyonel sayı mıdır? Neden?

3.a. Doğru üzerinde temsil edilen bir rasyonel sayıya belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğruya temsil edilmesi eylemi



0 noktasına bir dönüşüm uygulayalım. Bu dönüşüm 0 noktasından daha küçük olan rasyonel sayılar kümesini, bu doğru üzerindeki üst sınırlar kümesinin en küçük elemanına karşılık getirsin. Bu yeni dönüşümden elde edilen noktayı yeni bir doğru üzerinde gösteriniz.

3.b. Doğru üzerinde temsil edilen rasyonel olmayan bir sayıya dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğruya temsil edilmesi eylemi



x karesi 2 olan sayı olmak üzere bu x noktasına yukarıdaki dönüşüm uygulansın. Bu yeni dönüşümden elde edilen noktayı yeni bir doğru üzerinde gösteriniz.

3.c. Verilen 3.a. ve 3.b. eyleminin genelleştirilerek herhangi bir nokta için yapılan dönüşümün doğrunun tüm noktalarını içerdiği sürecine içselleştirilmesi

Doğru üzerinde alınan herhangi bir x noktasına yukarıdaki dönüşüm uygulansın. Elde edilen noktalar kümesinin geometrik temsili ne olur?

Matematiksel Görevler

Görev belirli bir ortamda işin ve bilişin düzenlenmesini ve yapılandırmasını içeren ve belirli formlarda düşünmeye/hareket etmeye yönelik talimatlar içeren ve öğretim ortamında kullanılan yapılardır (Doyle, 1983). APOS teorisine göre, bir öğrencinin belirli bir

matematiksel kavramı içeren çeşitli matematiksel görevlerdeki problem durumlarıyla başa çıkma konusundaki genel eğilimi, öğrencinin ilgilenilen kavram veya konuyla ilgili bir Eylem, Süreç veya Nesne kavramı oluşturup oluşturmadığına veya öğrencinin yaklaşımını içeren bir Şemaya sahip olup olmadığına bağlıdır (Trigueros & Oktaç, 2019).

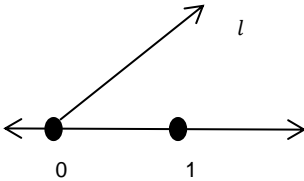
Bu çalışmada gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin elde edilen doğrulanmış genetik ayrışımın zihinsel yapılarını içerecek şekilde matematiksel görevler oluşturulmuştur. Bu görevler,

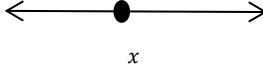
- Matematiksel düşünmede ilerlemeyi motive etmek için bilişsel bir çatışma yaratmayı (Aguilar ve Oktaç, 2004),
- Tartışmayı teşvik etmeyi (Schwarz & Linchevski, 2007),
- Bilginin inşasına tanık olmak amacıyla ortam yaratmayı (Oktaç, 2019),
- Öğrencilerin yaratıcılığını teşvik etmeyi (Lithner, 2017)

amaçlamaktadır. Bu görevler genetik ayrışımın inceltilmesi sürecinde, daha önce oluşturulmuş kavramsal anlama testinin revize edilmesi ile aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Tablo 2

Öğretim Tasarımında Yer Alan Matematiksel Görevler

Görev No	Görevler	Zihinsel Yapılar
Görev-1	<p>Elinizde bir birim olduğu düşünülen bir silgi ve yardımcı l doğrusunu kullanarak $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısını aşağıdaki doğru üzerinde bir noktaya karşılık getiriniz.</p> 	1.a.R.
Görev-2	0'dan küçük -2 'den büyük rasyonel sayılar kümesini bir doğru üzerinde gösteriniz.	1.b.R.

	Bir pergel 90 derece açılarak bir kenarı bir sayı doğrusu üzerine yerleştirilip diğer ucuna sayı doğrusu üzerinde karşılık getirilen nokta rasyonel sayı mıdır? (Pergelin bir ayağının uzunluğu bir birim kabul edilsin.) Bu sayıdan daha küçük olan rasyonel sayılar kümesi bu sayı doğrusu üzerinde nasıl temsil edilir?	1.c.R.	
	Rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerindeki temsili doğrunun bütün noktalarını içerir mi? Neden?	1.d.R.	
	$\frac{3}{2}$ rasyonel sayısının üst sınırlar kümesini bir sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.	2.a.R.	
	0 sayısını bir doğru üzerinde bir noktaya karşılık getiriniz. 0 sayısına karşılık getirilen noktadan sola doğru gidilerek elde edilen bütün rasyonel sayıların oluşturduğu kümenin üst sınırlar kümesini ve bu kümenin en küçük elemanını doğru üzerinde gösteriniz.	2.b.R1. 2.b.R2.	ve
	Bir x rasyonel sayısı için doğru üzerinde o noktanın solunda olan bütün rasyonel sayıların oluşturduğu kümenin üst sınırlar kümesini ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulunuz.	2.c.R1. 2.c.R2.	ve
Görev-3	x karesi 2 olan sayı olmak üzere x 'in solunda yer alan bütün rasyonel sayıların kümesini yazarak bu kümenin üst sınırlar kümesini belirleyiniz. Bu kümenin en küçük elemanı var mıdır?	2.d.R1. 2.d.R2.	ve
		2.e.R1. 2.e.R2.	ve
	x verilen doğru üzerinde alınan herhangi bir rasyonel sayıya karşılık gelmeyen nokta olsun. Bu noktanın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı var mıdır? Neden?	2.f.R1. 2.f.R2.	ve
	0 noktasına bir dönüşüm uygulayalım. Bu dönüşüm 0 noktasından daha küçük olan rasyonel sayılar kümesini, bu doğru üzerindeki üst sınırlar kümesinin en küçük elemanına karşılık getirsin. Bu yeni dönüşümden elde edilen noktayı yeni bir doğru üzerinde gösteriniz.	3.a.R.	
Görev-4	x karesi 2 olan sayı olmak üzere bu x noktasına yukarıdaki dönüşüm uygulansın. Bu yeni dönüşümden elde edilen noktayı yeni bir doğru üzerinde gösteriniz.	3.b.R.	

Oluşturulan görevlere bağlı olarak bir bağlam içerisinde verilen bir uygulama sorusu hazırlanmıştır.

Uygulama Problemi

Sierpinska (2004) bir görevin, onu tamamlamak için yalnızca gerekli olan minimum çabayı içermesi nedeniyle bir görevin problemden farklı olduğunu düşünürken; bir problemi çözmekle meşgul olan bir kişi bağımsız bir entelektüelin tavrını sergilediğini söylemektedir. Bu bağlamda çalışmada oluşturulan matematiksel görevlere bağlı olarak, öğretim döngüsünde yer alan etkinlik ve sınıf tartışmalarının gerçekleştirilebilmesi için bir problem oluşturulmuştur. Bu problemin çözüm sürecinde matematiksel görevler kullanılmış ve buna

bağlı olarak katılımcıların gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapılarının nesne kavrayışına ulaşması amaçlanmıştır. Aşağıda oluşturulan problem durumu verilmiştir.

“Son Nokta” Problemi. Dünyanın gelmiş geçmiş en iyi basketbolcusu olarak gösterilen Micheal Jordan’ın spor kariyerini anlatan “The Last Dance” belgeselinde, Jordan’ın bir maç öncesi stat güvenlik görevlisiyle bir oyun oynadığı görülmektedir. Oyuna göre bir bozuk parayı karşıdaki duvara en yakın noktaya atan oyunu kazanmaktadır. Buna göre ilk parayı atacak olan güvenlik görevlisi parayı hangi noktaya atarsa Jordan’ın para atmasına gerek kalmadan oyunu kazanır? Öyle bir nokta var mıdır?

Şekil 7

Para Atma Oyunu



Veri Toplama Süreci

Bu çalışma,

- Analiz kitapları ve dersleri,
- Analiz dersi alan öğrencilerle yapılmış yarı yapılandırılmış görüşmeler,
- kavramsal anlama testinde yer alan sorular,
- öğretim uygulamasında yapılan etkinlikler,

- gözlem notları

gibi birçok kaynaktan veri elde edilerek yürütülmüştür.

Tez çalışmasında tamlık özelliğinin kavramsal anlamasına yönelik olarak APOS teorisi bağlamında bir genetik ayrışım oluşturabilmek için öncelikle Analiz dersleri incelenmiş ve tamlık özelliğinin Analizde yer alan diğer kavramlarla olan ilişkisi belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için Hacettepe Üniversitesi Bologna Bilgi Paketi'nde yer alan Matematik Öğretmenliği Bölümü ve Matematik Bölümü Analiz-I ve Analiz-II derslerinin içeriği incelenmiştir. Bununla birlikte 2019-2020 öğretim yılında söz konusu dersler araştırmacı tarafından takip edilmiştir. Ayrıca tamlık özelliğine bağlı olarak gerçel sayıların kurulumunun Analiz kitaplarında nasıl ele alındığı incelenmiştir. Bu bağlamda farklı ülkelerden çeşitli üniversitelerin Analiz derslerinde kaynak olarak gösterdiği Analiz kitapları incelenmiştir.

Öğrenci Kavrayışlarına Yönelik Yapılan Pilot Uygulamanın Veri Toplama Süreci

APOS teorisine göre bir kavramın kavramsal anlamasına ilişkin genetik ayrışım bireyin kavrayışlarından bağımsız düşünülemez (Arnon ve diğerleri, 2014). APOS teorisi bağlamında, tamlık özelliğinin kavramsallaştırılmasına yönelik olarak genetik ayrışım oluşturma çalışmasının adımlarından biri olan öğrencilerin kavrama ilişkin kavrayışlarının ortaya çıkarılması gerekmektedir. Bu bağlamda bir pilot çalışma yapılarak, tamlık özelliğine ilişkin uzman görüşü doğrultusunda hazırlanan görüşme soruları ile kavramın genetik ayrışımının ortaya çıkmasına katkı sağlayacak öğrenci kavrayışlarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Çalışmada katılımcıların tamlık özelliğine ve bu özellikle ilişkili diğer kavramlara yönelik kavrayış düzeylerinin ortaya konulması amacıyla bir yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda bir görüşme formu oluşturulmuştur. Görüşme formu yaklaşık 20 yıldır Analiz 1-2 derslerini okutan bir uzman tarafından oluşturulmuş ve tezin araştırmacısı tarafından görüşme formu incelenmiş ve düzeltmeler yapılmıştır. Görüşme formu doğrultusunda üç öğrenci ile ayrı ayrı yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Görüşmeler bire bir şekilde yapılmış ve ortalama 20 dakika sürmüştür. Öğrencilerle yapılan görüşmeler kayıt altına alınmış ve transkript edilmiştir.

Genetik ayrışımın teorik analizine bağlı olarak yapılan birinci pilot çalışma sonunda varsayımsal bir genetik ayrışım oluşturulmuştur.

Genetik Ayrışımın Doğrulanmasına Yönelik Pilot Uygulamanın Veri Toplama Süreci

Bir genetik ayrışım tasarlandıktan sonra bunun deneysel olarak test edilmesi gerekmektedir. Varsayımsal genetik ayrışım deneysel olarak test edildikten sonra elde edilen veriler analiz edilerek genetik ayrışım üzerinde inceltme yapılır (Arnon ve diğerleri, 2014).

Bu tez çalışmasında oluşturulan varsayımsal genetik ayrışımı deneysel olarak test etmek için öncelikle gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin oluşturulan genetik ayrışımına bağlı olarak bir kavramsal anlama testi geliştirilmiştir. Kavramsal anlama testi uygulanarak veri toplanmış ve toplanan veriler analiz edilmiştir.

Covid-19 pandemi dönemi sebebiyle uygulama sanal ortamda Zoom programı üzerinden yapılmış ve ortalama 90 dakika sürmüştür. Öğrencilerden kavramsal anlama testinin cevaplarını bir kağıda yapmaları istenmiş ve çözüm kağıdını taratarak mail yoluyla göndermeleri talep edilmiştir. Öğrenci kağıtları APOS teorisi bağlamında genetik ayrışım doğrultusunda analiz edilmiş ve cevap kağıtlarındaki yanıtların anlaşılacağı durumlar için 3 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler ortalama 20 dakika sürmüş ve cevap kağıtlarında yer alan çözümlerin açıklanması istenmiştir. Görüşmeler sanal ortamda Zoom programı üzerinden yapılmıştır. Elde edilen veriler transkript edilmiştir.

Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Veri Toplama Süreci

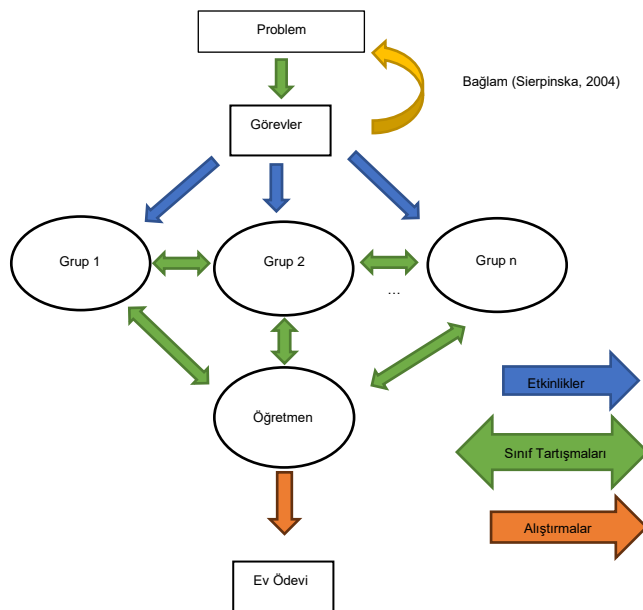
Bu tez çalışmasında gerçel sayıların tamlik özelliğine yönelik zihinsel yapıların inşa edilmesi için APOS teorisinin önerdiği ACE öğretim döngüsü kullanılmıştır. Bunun için doğrulanmış genetik ayrışım doğrultusunda matematiksel görevler oluşturulmuştur. Bu görevlere bir bağlam kazandırılarak, matematiksel görevleri içerecek şekilde "Son Nokta

Problemi” isimli bir problem oluşturulmuştur. Sınıf ortamında problem durumu sunulmuş ve matematiksel görevler yardımıyla problemin çözümüne yönelik etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Matematiksel görevler üzerinde çalışılması için katılımcılar gruplara ayrılmış ve ACE öğretim döngüsünün ilk aşaması olan Etkinlikler süreci başlamıştır. Daha sonra Sınıf Tartışması aşamasında gruplar kendi içlerinde ve gruplar arasında matematiksel görevlerin çözüm süreçlerini öğretmen rehberliğinde tartışmışlardır. Son olarak Alıştırmalar aşamasında, problemin çözümü tamamlanmış ve katılımcılara tamlık özelliğine ilişkin rutin problemlerden oluşan ev ödevleri verilmiştir.

Gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin çalışmada oluşturulan öğretim uygulamasının tasarımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Şekil 8

ACE Öğretim Döngüsüne Bağlı Öğretim Uygulamasının Tasarımı



Öğretim Uygulaması Sürecinde Öğretmenin Rolü. APOS teorisine göre sınıf tartışmaları esnasında öğretmen tartışmaya rehberlik ederken, öğrencilerin düşündükleri ve üzerinde çalıştıkları konuları birbirine bağlamak için tanımlar verebilir, açıklamalar yapabilir

ve konuya ilişkin genel bir bakış sunabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Bu bağlamda tez çalışmasında öğretimin uygulanması sürecinde öğretmenin rolü,

- Problem durumunun sınıf ortamında sunulması ve problemin anlaşılmasına ilişkin yönergeler ve sorular sorulması,
- Matematiksel görevler yapılırken grup içi tartışmalarına rehberlik edilmesi,
- Matematiksel görevlerin gruplar arasında tartışılması esnasında yönlendirici sorular sorulması,
- Her bir matematiksel görev sonunda matematiksel görevin problem durumuyla ilişkisini ortaya koyacak şekilde sınıf tartışması başlatması,
- Matematiksel görevlerin bitiminde problem durumunun çözülebilmesi için sınıf içi tartışmalara rehberlik edilmesi,

şeklinde tanımlanmıştır.

Öğretimin Uygulanması Süreci

Katılımcılar belirlenen 3 grup aralarında boşluk olacak şekilde ve grupların her biri kendi içlerinde yuvarlak bir oturma düzeninde yerleştirilmiştir. Uygulama 2023-2024 güz döneminde, her biri yaklaşık 50 dakika süren ve birer gün arayla yapılan 3 oturumdan oluşmaktadır. Uygulamayı tezin araştırmacısı yürütmüş ve önceden belirlenen öğretmenin rolü çerçevesinde hareket etmiştir.

Birinci oturumda, "Son Nokta Problemi" öğrencilere sunulmuştur. Burada öncelikle öğrencilere Micheal Jordan'ı tanıyıp tanımadıkları, "The Last Dance" belgeselini izleyip izlemedikleri gibi ısınma soruları sorularak öğrenciler problem durumunun çözümüne hazırlanmıştır. Daha sonra "The Last Dance" belgeselinde yer alan para atma oyunu bölümü öğrencilere izletilmiştir. Video izleme esnasında Micheal Jordan'ın ne kadar rekabetçi bir basketbolcu olduğu ve oynadığı tüm oyunları kazanmak istediği konuşulmuştur ve para atma oyunu hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra ekrana "Son Nokta Problemi"

yansıtılmıştır. Bu esnada öğrencilerin problem durumunu anlamalarına yönelik fikirleri sorulmuş ve bu fikirler üzerinden sınıf içi tartışma yapılmıştır. Burada üç boyutlu uzayda olmak ve gerçek dünya ile matematik arasındaki farklılıklar gibi konular tartışılmıştır. Öğrencilere “eğer bu problem iki boyutta bir doğru üzerinde gerçekleşseydi ne olurdu” gibi sorular sorulmuştur. Görev-1 verilmeden önce probleme ilişkin “atıcının bulunduğu bir nokta ve duvar dışında kalan yerlerin boşluk olduğunu düşünelim. Zemini taşlarla doldurmak istiyoruz. Elimizde bir birimlik çubuk var. Duvardan itibaren bu çubukla ölçüm yaparak boşluğu taşlarla dolduruyoruz. Atıcının parayı duvara en yakın atacağı nokta neresidir?” sorusu sorulmuş ve tartışmaya açılmıştır. Bunun üzerine her gruba Görev-1 verilmiş ve öğrencilerin her birinin öncelikle soru üzerinde düşünmesi ve daha sonra grup içinde sorunun çözümüne yönelik tartışma yapmaları istenmiştir. Bu esnada öğretmen grup tartışmalarından notlar almıştır. Görev-1’e ilişkin grup içi tartışmalardan sonra sorunun çözümüne yönelik gruplar arası tartışma başlatılmıştır. Görev-1’deki çözüm kullanılarak “Zemindeki boşluğu taşlarla doldurduğumuzu düşünelim. Bu durumda öğrencilere atıcının parayı boşluğa atma ihtimali var mıdır?” sorusu sorulmuş ve tartışmaya açılmıştır. Grupların kendi arasında bunu tartışması istenmiştir. Bu tartışmanın sonucunda birinci oturum sona erdirilmiştir.

İkinci oturumda gruplara Görev-2 verilmiştir. Birinci oturumda olduğu gibi burada da benzer süreç devam ettirilerek öğrenci cevaplarının gruplar arasında tartışılması istenmiştir. Daha sonra “görevde yer alan sorular yardımıyla oluşturulan zeminde atıcı parayı duvara en yakın hangi noktaya atabilir?” sorusu tartışmaya açılmıştır. Daha sonra “zeminde boşluk kalan yerler nasıl doldurulabilir?” sorusu sorulmuş ve bu tartışma süreciyle ikinci oturum sonlandırılmıştır.

Üçüncü oturumda Görev-3 öğrencilere verilmiştir ve grup içi tartışmalar ile görevde yer alan soruların çözülmesi istenmiştir. Daha sonra gruplar arası tartışmalar ile çözümlerin karşılaştırılması ve soruların çözümlerine ilişkin fikirler yürütülmesi sağlanmıştır. Daha sonra Görev-4 verilmiş benzer süreç işlemiştir. Son olarak bu görevler aracılığı ile “zeminin

dolup dolmadığı” sorulmuş ve tartışmaya açılmıştır. “Bu haliyle zeminde duvara en yakın nokta belirlenebilir mi?” sorusu sorulmuş ve problem durumunun çözüme ulaştırılması istenmiştir. Bu aşamadan sonra problemin çözümüne yönelik olarak gerçel sayıların tamlik özelliği verilmiş ve problemin çözümü sınıf ortamında tartışılmıştır. Problem çözüme ulaştırıldıktan sonra öğrencilere rutin problemlerden oluşan alıştırmalar ev ödevi olarak verilmiş ve problemlerin çözümlerinin taranarak mail aracılığı ile araştırmacıya ulaştırılması istenmiştir.

Uygulama süreci sınıf ortamını tamamen görecektir şekilde yerleştirilmiş bir video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Ayrıca 3 grubun her biri için birer ses kayıt cihazı konulmuş ve grup içi ve gruplar arası tartışmalar ses kayıt cihazları aracılığıyla kaydedilmiştir. Video kamera ve ses kayıt cihazlarından elde edilen veriler transkript edilmiştir. Ek olarak görev kağıtlarında yer alan sorular öğrencilere kağıt-kalem aracılığıyla çözdürülmüş ve çözüm kağıtları toplanmıştır. Verilen ev ödevi sorularının çözümleri yine kağıt-kalem ile çözülmüş ve yazıcı ile taratılmış, taratılan belgeler mail aracılığıyla toplanmıştır.

Verilerin Analizi

Çalışmada yarı yapılandırılmış görüşmelerden, kavramsal anlama testinden ve öğretimin uygulanması sürecinde matematiksel görevlerden, uygulama sorusuna bağlı olarak sınıf içi etkinliklerden elde edilen veriler ayrı ayrı analiz edilmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerden Elde Edilen Verilerin Analizi

Birinci pilot çalışmadan yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile incelenmiştir. Bu yöntemle göre veriler belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır (Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu amaçla yarı yapılandırılmış görüşmeler sonucunda elde edilen veriler APOS teorisinde yer alan zihinsel yapılara göre neden-sonuç ilişkisine bağlı olarak incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Verilerin analizi doğrultusunda kavramın epistemolojisi ve kavramla ilişkili şemalar şeklinde iki ana tema belirlenmiştir. Kavramın epistemolojisi teması içerisinde semantik

farklılıklar ve kavramlar arası ilişkiler alt temaları; kavramla ilişkili şemalar temasına yönelik ilişkili kavram tanımları ve gerçel sayı nesnesi alt temaları oluşturulmuştur. Bu temalar altında APOS teorisine bağlı olarak gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapılar ortaya konulmuştur.

Aşağıda verilerin analizine ilişkin ana ve alt temaları, zihinsel yapıları ve alıntı örneklerini gösteren bir tablo sunulmuştur.

Tablo 3

Öğrenci Kavrayışlarına İlişkin Verilerin İçerik Analizi

Ana Temalar	Alt Temalar	Zihinsel Yapılar	Alıntı Örnekleri
Kavramın Epistemolojisi	Semantik Farklılıklar		<i>“tam olmak bir şeyin eksiksiz olması.”</i>
			<i>“bir yeri tam kaplaması, tam olarak örtmesi”</i>
		Süreçlerin koordine edilmesi	<i>“ama doğru üzerinde bir dizi nasıl alırız ki... ikisi arasında bir bağlantı kuramıyorum şu anda.”</i>
	Kavramlar Arası İlişkiler	Kavramın tanımına yönelik eylemler	<i>“matematiksel olarak düşünürsek R'nin tam olmasıyla ilgili hatırladığım bazı teoremler var.”</i>
Kavramla İlişkili Şemalar	İlişkili Kavram Tanımları	Sayı doğrusu nesnesi	<i>“bir sayı doğrusu olarak düşünecek olursam içerisinde tüm reel sayılar zaten oluyor sayı doğrusunun dolayısıyla aslında bir noktada benzerliklerden dolayı evet diyebilirim buna.”</i>
		Üst sınır kavramına yönelik eylemler ve eylemlerin sürece içselleştirilmesi	<i>“mesela (0,1) açık aralığını düşünecek olursak, yani düşününce mantıken 1 üst sınırdır ama içermez. Yani bir epsilon komşuluğunda ondan daha büyük bir içerisine sayı dahil etmiyorsak olur.”</i>
		Eküs-ebas kavramına yönelik eylemlerin sürece içselleştirilmesi	<i>“evet, -1 de alt sınır aslında. En büyük alt sınır geldi de aklıma.”</i>

Gerçel Sayı Nesnesi	Bir kümenin sınırı, supremumu-infinumu ile ilgili süreçlerin koordine edilmesi	<i>"her kümenin vardır. Çünkü küme üstten sınırlı ise üst sınırları kümesi oluşturulabilecektir. Çünkü muhakkak üstten bir değerle sınırlı ve ondan büyüklerin hepsi o kümeye dahil. Kümenin en küçük elemanını seçtiğimde eküsü bulurum."</i>
	Gerçel ve rasyonel sayı kümeleri süreçlerinin koordine edilmesi	<i>"İşte R'deki tüm değerlerin alınması durumu yani tüm reel sayıların ama arada rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsini kapsadığı için bir boşluk oluşmuyor. Yani tam olduğu için."</i>

Kavramsal Anlama Testinden Elde Edilen Verilerin Analizi

Varsayımsal genetik ayrışım doğrultusunda oluşturulan kavramsal anlama testinin uygulamasından elde edilen veriler genetik ayrışımın inceltmesi bağlamında analiz edilmiştir. Analiz sürecinde öğrencilerin APOS teorisi bağlamında gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapılarının genetik ayrışım ile uyumuna bakılmıştır. Bunun için öncelikle öğrencilerin zihinsel yapıları analiz edilmiş ve daha sonra genetik ayrışımında yer alan zihinsel yapılar ile uyumuna bakılmıştır.

Burada öncelikle kavramsal anlama testine bağlı sorulara öğrencilerin verdikleri yazılı yanıtlar ve görüşmelerden elde edilen transkriptler APOS teorisi bağlamında analiz edilmiştir. Aşağıda 2.b sorusuna ilişkin öğrenci yanıtlarının analiz örneği sunulmuştur.

Tablo 4

Kavramsal Anlama Testinden Elde Edilen Verilerin Analizi Örneği

Sorular	Öğrencinin Çözümüne İlişkin Görüşmeler	APOS Teorisi Bağlamında Analiz
2.b.	<p>A: Üst sınırlar kümesi nedir peki? Ö1: Buna emin olamadım. A: Peki kümeyi bilmeden üst sınırlar kümesinin en küçüğünü nasıl belirliyorsun? Ö1: Çizmeye çalışayım. Şimdi sayı doğrusu bu (bir doğru çiziyor). 0 burada (Doğru üzerinde bir nokta işaretliyor). Buradan sola doğru gittikçe (0 noktası olarak işaretlediği noktanın solunda noktalar işaretliyor). Buradan sola doğru gittikçe bu nokta için (0'ın solunda bir nokta için konuşuyor) üst</p>	<p>Transkriptler incelendiğinde öğrencilerin verilen kümenin üst sınırlar kümesini belirleme eylemini yapamadığı görülmektedir. Buna rağmen, yandaki örnekte görüldüğü üzere, öğrenciler verilen noktanın üst sınırlarının en küçük elemanını 0 olarak belirlemiştir. Öğrenci 0'ın solundaki rasyonel sayılar için tek tek üst sınırlar kümesi belirlemeye çalışmış ve bunu yaparken de "her rasyonel sayıdan büyük ilk eleman" ifadesini kullanmıştır. Bu durum rasyonel sayıların yoğun yapısının öğrencilerin</p>

sınır tam dibinden çekersek sağa doğru zihinsel yapıları arasında yer almadığını bundan sonrası bu nokta için her zaman üst göstermektedir. sınırır. Bunun için de bu olacak (bir başka nokta için aynısını yapıyor). Hep bi şeyinden başlayıp devam edecek.

A: Neyinden başlayıp devam edecek?

Ö1: Bi üstünden diyeyim.

A: Bir üstü ne demek?

Ö1: Bir üst olarak ifade edebiliyorum. Yani... Sayıdan büyük ilk eleman gibi diyeyim.

Öğrenci yanıtlarından hareketle varsayımsal genetik ayrışımaya yönelik eksiklikler ve hatalar olup olmadığı analiz edilmiştir. Bu bağlamda varsayımsal genetik ayrışımın inceltilmesine ilişkin aşağıdaki örnek analiz sunulmuştur.

Tablo 5

Varsayımsal Genetik Ayrışımın İnceltilmesine İlişkin Analiz

Varsayımsal Genetik Ayrışım	İnceltilmiş Genetik Ayrışım
2.b. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemana belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarını doğru üzerinde temsil etme ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma işlemi	2.b.R1. Verilen 2.a.R1. eyleminin içselleştirilerek Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın üst sınırlar kümesini belirleme ve bir doğru üzerinde temsil etme süreci
	2.b.R2. Verilen 2.a.R2. eyleminin içselleştirilerek Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın alt sınırlar kümesini belirleme ve bir doğru üzerinde temsil etme süreci

Burada öncelikle öğrencilerin kavramsal anlama testinde yer alan soruya ilişkin ilgili zihinsel yapıya sahip olup olmadığı belirlenmiştir. Örnekte görüldüğü gibi ilgili zihinsel yapı bağlamında öğrenciler 0'ın solundaki rasyonel sayılar için tek tek üst sınırlar kümesi belirlemeye çalışmış ve bunu yaparken de "her rasyonel sayıdan büyük ilk eleman" ifadesini kullanmıştır. Bu durum rasyonel sayıların yoğun yapısının öğrencilerin zihinsel yapıları arasında yer almadığını göstermektedir. Yapılan varsayımsal genetik ayrışımında rasyonel sayıların yoğun yapısının zihinsel yapılarda yer alması ve buna bağlı olarak eküs ve ışın nesnelere oluşturulması gerekliliği görülmektedir. Bu bağlamda varsayımsal genetik ayrışım Tablo 5'te gösterildiği gibi inceltirilmiştir.

Öğretimin Uygulanmasından Elde Edilen Verilerin Analizi

İnceltilmiş genetik ayrışım doğrultusunda öğretim sürecinden elde edilen veriler analiz edilmiştir. Veriler analiz edilirken her bir grupta yer alan öğrencilerin grup içi tartışmaları, gruplar arası tartışmalar ve problem durumuna bağlı sınıf tartışmaları göz önüne alınmıştır. Bu bağlamda her bir öğrenciye ilişkin APOS teorisine bağlı oluşturulan genetik ayrışım doğrultusunda öğrencilerin zihinsel yapılarının neler olduğu ve bu zihinsel yapıların nasıl oluştuğuna ilişkin gerekçeler sınıf içi tartışmaların transkriptine bağlı olarak analiz edilmiştir. Aşağıda Görev-1'e ilişkin Grup-1'de yer alan öğrencilerin genetik ayrışım bağlamında zihinsel yapıları ve zihinsel yapılarla ilişkin APOS teorisi bağlamında gerekçelerin sunulduğu örnek analiz tablosu verilmiştir.

Tablo 6

Öğretim Uygulamasından Elde Edilen Verilerin Örnek Analizi

Grup	Öğrenci	Zihinsel Yapı	Gerekçe
Grup-1	Ö1	Eylem 1.a.R	Araştırmacının yardımcı l doğrusunu ve tamsayıları kullanması gerektiği uyarısı ile birlikte bu süreci Thales teoremi süreci ile koordine ederek rasyonel sayıları bir doğru üzerinde temsil etmiştir. Burada dışsal uyarılar, grup içi tartışmalarda Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencilerin matematiksel gerekçeyi yeterli bulmaması ve bunun üzerine araştırmacının yardımcı doğruyu ve tamsayıları kullanarak ölçeklendirme yapabileceği fikrini belirtmesidir.
	Ö2, Ö3	Eylem Öncesi	1.a.R eylemi öncesindeki şemalarda yer alan tamsayılar sürecinde yaşanan problemler nedeniyle, ilgili eylem gerçekleştirilememiştir. Burada yaşanan problem tamsayıların yardımcı doğru üzerinde temsil edilmesine rağmen ölçeklendirme ile içselleştirilerek bir süreç haline getirilememesidir.

Burada Görev-1 esnasında Grup-1'de yer alan öğrencilerin grup içi tartışmalarının transkriptleri incelenmiş ve Görev-1'de yer alan sorulara ilişkin çözümleri değerlendirilmiştir. Buna bağlı olarak genetik ayrışımında yer alan zihinsel yapılar ve mekanizmalara ilişkin öğrenci kavrayışları belirlenmiş ve gerekçelendirilmiştir.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, bulguların inandırıcılığı ve çalışmanın başka durumlara aktarılabilir olması ile açıklanmaktadır (Miles ve diğerleri, 2014). Bu tez çalışmasında geçerliğin sağlanması için aşağıdakiler yapılmıştır:

- Teorik çerçeve bağlamında oluşturulan genetik ayrışım bir teorik analiz sonucunda oluşturulmuştur ve doğrulaması yapılmıştır.
- Veriler APOS teorisiyle uyumlu bir şekilde analiz edilmiş ve sunulmuştur. Bulgular teorik çerçeveye ilişkilendirilmiştir.
- Birçok kaynaktan veri toplanmış ve toplanan veriler birbiriyle tutarlı bir şekilde analiz edilmiştir.
- Bulgular açık, tutarlı ve sistematik bir şekilde sunulmuştur.

Nitel araştırmalarda güvenirlik, çalışma sürecinin tutarlı olması; çalışmanın zaman içinde farklı araştırmacılar ve yöntemler ile yapıldığında makul ölçüde istikrarlı olması ile açıklanır (Miles ve diğerleri, 2014). Bu tez çalışmasında güvenirliliği sağlamak için aşağıdakiler yapılmıştır:

- Araştırma soruları açık ve net şekilde yazılmıştır. Ayrıca çalışmanın tasarımı araştırma sorularına uygun olarak yapılmıştır.
- Araştırmacıların rolü açıkça ifade edilmiştir.
- APOS teorisinin çerçevesi detaylı olarak verilmiştir ve teorik çerçeveye uygun şekilde bir yapı oluşturulmuştur.
- Veriler, araştırma sorularının önerdiği şekilde, uygun ortam ve zamanda uygun katılımcılarla toplanmıştır.
- APOS teorisinin önerdiği genetik ayrışım doğrultusunda veriler analiz edilmiştir. Arnon vd. (2014)'ye göre genetik ayrışım kullanmak güvenirliliği artırmaktadır.

Bölüm 4

Bulgular, Yorumlar ve Tartışma

Bu bölümde üniversite öğrencilerinin tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapılarını ortaya koymak amacıyla yapılan verilerin analizinden elde edilen bulgular;

- genetik ayrışımın teorik analizi,
- genetik ayrışımın tasarımı,
- genetik ayrışımın doğrulanması ve incelenmesi,
- öğretimin uygulanmasına ilişkin bulgular

olarak dört ana başlık altında sunulmuştur.

Genetik Ayrışımın Teorik Analizi

Bu tez çalışmasında gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin APOS teorisi metodolojisine göre genetik ayrışımın teorik analizi; kavramın müfredatlardaki yerinin belirlenmesi ve ders kitaplarının incelenmesi, alan yazında kavrama yönelik öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi, kavramın tarihsel gelişiminin göz önüne alınması ve araştırmacıların deneyimlerine dayalı olarak yapılmıştır.

Analiz Derslerinde Tamlık Özelliği

Tez çalışmasında tamlık özelliğinin kavramsal anlamasına yönelik olarak APOS teorisi bağlamında bir genetik ayrışım oluşturabilmek için öncelikle Analiz dersleri incelenmiş ve tamlık özelliğinin Analiz derslerinde yer alan diğer kavramlarla olan ilişkisi belirlenmiştir. Bunun için Analiz derslerinde tamlık özelliğine ilişkin yer alan matematiksel görevler saptanmış, bu görevlerin nasıl yapılacağı ve hangi matematiksel kavramların kullanılacağı belirlenmiştir. Bu bağlamda tamlık özelliği ve tamlık özelliği ile ilişkili kavramların Analiz derslerinde nasıl kullanıldığı aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 7

Analiz Derslerinde Tamlik Özelliğinin Kullanımı

Görev	Nasıl	Yöntem	Konu alanı
Gerçel sayılar kümesinin bazı alt kümelerinin alttan veya üstten sınırlı olup olmadığına karar vermek	Kümeyi bir çizimle temsil ederek cevabı bulmak	Gerçel sayıların bir alt kümesinin üstten veya alttan sınırlı olma tanımları	Gerçel sayılar
Gerçel sayılar kümesinin bazı alt kümelerinin en küçük/büyük elemanını, en büyük alt sınırını (ebas), en küçük üst sınırını (eküs), alt sınırını, üst sınırını belirlemek	Kümeyi bir çizimde veya zihinsel bir imgede temsil etmek ve gözlemlerle eküs ve ebas bulmak. Bu sayıların kümeye ait olup olmadığını görmek.	eküs, ebas tanımları	Gerçel sayılar
Eğer A ve B sınırlı kümeler ve $A \subseteq B$ ise $eküsA$, $eküsB$ ve $ebasA$, $ebasB$ arasındaki sıralamayı belirlemek	Altküme ilişkisi olan iki kümeyi sayı doğrusunda temsil etmek (tipik olarak aralıkları kullanarak) ve ebas-eküs ilişkisini gözlemek	eküs, ebas tanımları	Gerçel sayılar
Monoton ve sınırlı bir dizinin limitinin varlığını bulmak ve gerekçelendirmek.	Hipotezi kontrol etmek ve bu tür dizilerin limitinin varlığını garanti eden teoremleri kullanmak.	Monoton ve sınırlı dizilerin limitinin varlığını garanti eden teoremler ve sıkıştırma teoremi	Diziler
Bir denklemin bir aralıkta çözüme sahip olduğunu belirlemek	Ara Değer Teoreminin kullanılması	Ara Değer Teoremi	Limit ve süreklilik
Gerçel sayılar kümesinin belirli alt kümelerinin sınırsız olduğunu kanıtlamak	Herhangi bir M sayısı için kümenin M 'den daha büyük elemanlarının var olduğunu gösterilmesi	Arşimet prensibi	Gerçel sayılar, eküs özelliği
$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ kümesinin rasyonel sayılar kümesinde eküsünün olmadığını kanıtını yapmak	Farklı yolları var	Farklı kullanımları var	Gerçel sayılar, eküs özelliği

Bazı dizilerin yakınsaklığının analiz edilmesi	Dizinin monoton ve sınırlı olup olmadığının kontrol edilmesi ya da iki yakınsak dizi arasında sıkıştırma teoremi uygulanması	Her monoton ve sınırlı gerçel sayı dizisinin gerçel sayılar kümesinde limiti vardır teoremi ve sıkıştırma teoremi	Gerçel sayı dizileri
Bazı fonksiyonların örten olduğunu Ara Değer Teoremi kullanarak kanıtlamak	Ters görüntü kümesinde belirli bir değer için bir ters görüntünün varlığını iddia etmek için limit tanımını ve Ara Değer Teoremini kullanmak.	Limit tanımı, süreklilik, Ara Değer Teoremi	Sürekli fonksiyonlar
Polinom veya trigonometrik bir denklemin verilen bir aralıkta veya gerçel sayılar kümesinde herhangi bir çözüme sahip olduğunun kanıtlanması	Ara Değer Teoreminin şartlarının sağlanması ve kullanılması	Ara Değer Teoremi	Sürekli fonksiyonlar

Tabloda Analiz derslerinde yer alan konu alanlarına bağlı olarak verilen matematiksel görevlerin tamlık özelliği ile ilişkisi ve tamlık özelliğinin matematiksel görevlerin çözümünde nasıl kullanıldığı başlıklar halinde verilmektedir.

Tamlık Özelliğinin Analiz Kitaplarındaki Yeri

Çalışmanın bu bölümünde gerçel sayıların kurulumunun yerli ve yabancı çeşitli Analiz kitaplarında nasıl ele alındığına ilişkin analizlerin sonuçları sunulmuştur. Çalışmada elde edilen verilere göre Analiz kitaplarında, “Gerçel Sayılar Sistemi”; Cebirsel, Topolojik ve Kalkülüs olmak üzere üç farklı yaklaşım ele alınmıştır. Cebirsel yaklaşım, bazı denklem çözümlerinin köklerine bağlı olarak rasyonel sayıların elde edilmesini ve rasyonel sayılar kullanılarak Dedekind kesimleri ile gerçel sayıların oluşturulmasını içerir. Bu yaklaşımda gerçel sayıların tamlık özelliği, kesimlerin elde edilmiş biçiminin bir sonucu olarak verilmektedir. Topolojik yaklaşımda noktanın komşuluklarına vurgu yapılarak sayı doğrusu ile birlikte gerçel sayıların oluşturulması akışı yer almaktadır. Kalkülüs yaklaşımında ise

tamlık özelliğinin gerçel sayıların kurulumunda yer alan cebirsel özelliklerle birlikte aksiyoym olarak sunulması söz konusudur. Aşağıda bu yaklaşımlara ilişkin tablolar verilmiştir.

Tablo 8

Tamlık Özelliğine İlişkin Cebirsel Yaklaşım

Kavram	Tanım-Özellik	Kavramlar Arası İlişki
Doğal Sayılar	Peano Aksiyomları	1,2,3 ... olarak tarif edilen sayılar ve küme kavramı
	Toplama ve çarpma işlemi üzerindeki kapalılık, değişme, birleşme özelliği	Peano aksiyomları ve toplama, çarpma işlemi tanımı ilişkisi
Doğal Sayılar Üzerindeki İşlemler (Toplama-Çarpma)	Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılıma özelliği	İyi sıralılık için: $A \subseteq N$ olmak üzere her $a \in A$ için $p \leq a$ olacak şekilde bir $p \in A$ vardır. Yani doğal sayılar kümesinin her alt kümesi bir ilk elemana sahiptir.
	Sıralama tanımı	
	İyi sıralılık	
	$S = \{(m, n): m, n \in N\}$ kümesi içerisinde tanımlanan $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ denklik bağıntısı için S kümesinin bu bağıntıya göre denklik sınıfları kümesine tamsayılar kümesi denir.	Doğal sayılar kümesinde $n + x = m$ denkleminin sadece $n < m$ durumunda bir çözümünün olması yani doğal sayıların bir genişlemesi ile tamsayıların elde edilmesi
Tamsayılar		
	Tamsayıların toplama ile grup olma özelliği	Tamsayıların denklik bağıntısı ile tanımı ve çarpma-toplama işlemi tanımı ilişkisi
Tamsayılar Üzerindeki İşlemler	Çarpma işleminin özellikleri ve tamsayılar üzerindeki sıralama	
	$T = \{\frac{a}{b}: a, b \in Z, b \neq 0\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ bağıntısı olmak üzere T ile bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfları kümesine denir.	Tamsayılar kümesinde $x \cdot a = b$ denkleminin çözümünün örneğin $a = 2, b = 1$ için bulunmuyor olması. Yani tamsayıların bir genişlemesi olarak rasyonel sayıların elde edilmesi
Rasyonel Sayılar		
	Rasyonel sayıların sıralı cisim olması	Toplama ve çarpma işlemi tanımı ile tanımlanan denklik sınıfları kümesi ilişkisi
Rasyonel Sayılar Üzerindeki İşlemler		
Gerçel Sayılar	Dedekind kesimlerinin oluşturduğu kümeye denir. Rasyonel sayılar kümesi	Kenarları birer metre olan karenin köşegen uzunluğunun rasyonel sayılar içerisinde

	<p>içerisindeki bir kesim; $A \subset Q$ boş olmayan alt kümesi;</p> <p>$x \in A$ ve $y > x$ ise $y \in A$ olur.</p> <p>A'nın ilk elemanı yoktur.</p> <p>özelliklerini sağlar.</p>	<p>olmaması yani rasyonel sayıların bir genişlemesi</p>
Kesimlerin (Gerçel Sayıların) özellikleri	<p>Kesimin tümleyeni, kesimlerin çarpımı, toplamı, tersi, birim elemanı, R'nin cisim olma özelliği</p>	<p>Kesim tanımı ve kesimlerin toplama, çarpma, tümleyen tanımları ilişkisi</p>
Gerçel Sayıların Tamlığı	<p>R'de tanımlanan her A kesimi için A'nın R'ye göre tümleyeninin bir en büyük elemanı vardır.</p>	<p>R'nin cisim olması, kesimlerin özellikleri ve sıralama özelliği ilişkisi</p>
En Küçük Üst Sınır (Eküs) Özelliği	<p>R'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin eküsü vardır.</p>	<p>Eküs tanımı, gerçel sayıların tamlığı ilişkisi Dedekind Teoremi ile eküs özelliğinin denk olması</p>
Arşimet Özelliği, her iki gerçel sayı arasında bir rasyonel sayı dolayısıyla sonsuz çoklukta rasyonel sayı olması	<p>$a > 0, b > 0$ olmak üzere $n \cdot a > b$ olacak şekilde bir n doğal sayısının var olması</p>	<p>Eküs özelliğinin bir sonucu</p>
Sayı Ekseni (Sayı Doğrusu)- Gerçel Sayıların gösterimi	<p>Üzerinde başlangıç eksenini, ölçü birimi ve pozitif yön tanımlanmış doğruya sayı eksenini denir.</p> <p>Cantor Dedekind Aksiyomu: Gerçel sayılar sayı eksenini olan doğrunun noktaları ile bire bir eşleştirilebilir.</p>	<p>Cantor Dedekind Aksiyomu ile Tamlık ilişkisi</p>
Aralık	<p>$a < x < b$ koşulunu sağlayan tüm x noktalar kümesine aralık denir.</p>	<p>Sayı eksenini ile gerçel sayıların birebir eşlenmesi ilişkisinin ve tamlık aksiyomunun sonucu olarak ortaya çıkar.</p>
Komşuluk	<p>Bir x noktasını içine alan her bir aralığa denir.</p>	<p>Aralık-Tamlık ilişkisi</p>

Tablo 9

Tamlık Özelliğine İlişkin Topolojik Yaklaşım

Kavram	Tanım-Özellik	Kavramlar Arası İlişki
Doğal Sayılar	1,2,3, ..., n, ... sayılarına denir.	Sayılar sayma sonuçları ve ölçme sonuçları olmak üzere iki kaynaktan elde edilebilir. Doğal sayılar eşyaları sayma ihtiyacından doğmuştur. İki doğal sayı verildiğinde sayma sonucunda ortaya çıkan bir üçüncü sayı vardır.
Doğal Sayılar Üzerindeki İşlemler (Toplama-Çarpma)	Toplama ve Çarpmanın tanımı	Öte yandan çok büyük toplamaların kısaltması için çarpma işlemi ortaya çıkmıştır. Ölçme sonucu ortaya çıkan sayılardır.
Rasyonel Sayılar	$T = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ bağıntısı olmak üzere T ile bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfları kümesine denir.	
İrrasyonel Sayılar	$\frac{m}{n}$ şeklinde gösterilemeyen sayılardır.	Sonlu ondalık kesirler ve sonsuz fakat periyodik ondalıklı kesirler rasyonel sayıları tespit ederken virgülden sonra sonsuz sayıda ondalıklı rakam bulunduran kesirler irrasyonel sayıları temsil eder. Doğru üzerinde oluşan koordinat sistemi yardımıyla tanımlanır. Bu koordinat sistemi ile reel sayıların birebir eşlemesi ilişkisi kurulur. Doğru üzerinde herhangi bir nokta seçilir ve bu noktaya başlangıç noktası denir. Daha sonra herhangi bir uzunluk birim olarak seçilir ve başlangıç noktasından itibaren sağa doğru her birim doğal sayılara karşılık getirilir. Sol tarafa doğru benzer işlemler yapıldığında negatif tamsayılarla bir eşleme söz konusudur. Bu birimlerin $\frac{1}{100}$ gibi oranları dikkate alınarak rasyonel sayılar eşlenir. Öte yandan kenarları 1 birim olan bir dik üçgenin hipotenüsü eksen üzerinde bir noktaya karşılık getirilerek irrasyonel sayıların eşlemesi yapılır.
Gerçel Sayılar	$R = Q \cup I$	Gerçel sayıların karakterizasyonları
Gerçel Sayıların özellikleri	Sıralama, Toplama, Çarpma Özellikleri	Gerçel sayıların karakterizasyonları
Arşimet Özelliği	Her $a \in R$ için öyle bir $n \in N$ vardır ki $n > a$ olur.	$c = \frac{a+b}{2}$ kullanılarak tespit edilir.
Tamlık Özelliği	Keyfi $a \neq b$ sayıları arasında en az bir dolayısıyla sonsuz çoklukta gerçel sayı vardır.	

Aralık	$\{x \in R: a < x < b\}$ şartını sağlayan x noktalarının kümesine denir.	Doğru üzerindeki koordinat sistemi gerçel sayılar ilişkisi ve tamlık
Komşuluk	Bir x noktasını içine alan her bir aralığa denir.	Aralık-Tamlık ilişkisi
Limit Noktası	Bir $E \subseteq R$ için $a \in R$ noktasının her komşuluğunda E kümesinin a 'dan farklı en az bir elemanı varsa a noktasına E kümesinin bir limit noktası denir.	Gerçel sayılar özelinde limit noktaları ile yığılma noktaları tamlık nedeniyle aynıdır.
Bolzano Weierstrass teoremi	Her sonsuz ve sınırlı kümenin en az bir limit noktası vardır.	a noktası limit noktası ise a 'nın her komşuluğunda E kümesinin a 'dan farklı sonsuz tane elemanı vardır teoremi tamlık özelliğinden kaynaklanmaktadır. (Cantorun iç içe aralıklar prensibi)

Tablo 10*Tamlık Özelliğine İlişkin Kalkülüs Yaklaşımı*

Kavram	Tanım-Özellik	Kavramlar Arası İlişki
Doğal Sayılar, Tamsayılar, Rasyonel Sayılar	$N = \{1,2,3, \dots\}$	Doğal sayıların negatifleri ile genişletilmesi ile tamsayılar tamsayıların genişletilmesi ile rasyonel sayılar
Gerçel Sayılar	$R = Q \cup I$	Bir kenarı bir birim olan karenin köşegeninin uzunluğu gibi ihtiyaçlardan doğan rasyonel sayıların genişlemesi Cisim olma özellikleri
Gerçel Sayıların özellikleri Gerçel sayı eksenini	Toplama, Çarpma Özellikleri Gerçel sayıların bir doğru üzerindeki noktalar ile birebir eşlemesi sonucu oluşur.	
Sıralama Özelliği	İki gerçel sayı arasında kurulan sıralama bağıntısı	Gerçel sayı eksenini ile ilişkisi
Aralık	$\{x \in R: a < x < b\}$ şartını sağlayan x noktalarının kümesine denir.	Doğru üzerindeki koordinat sistemi reel sayılar ilişkisi ve tamlık
Tamlık Özelliği	R 'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük üst sınırı (eküs) vardır.	Sınırlı küme kavramı, en büyük eleman, eküs tanımı, $\{x \in Q: x^2 < 2\}$ kümesinin eküsünün olmaması ilişkisi ile R ile Q kümelerinin farkını ortaya koymak Aralık-tamlık ilişkisi
Eküsün özellikleri	Bir I açık aralığı ve $\sup I = a$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için $a - \varepsilon < x < a$ olacak şekilde en az bir dolayısıyla sonsuz çoklukta $x \in I$ vardır.	
Arşimet özelliği	Her $a \in R$ için öyle bir $n \in N$ vardır ki $n > a$ olur.	Tamlık özelliğinin sonucu olarak

Tam Değer

Herhangi bir $x \in R$ için x 'den küçük en büyük tamsayıya x 'in tam değeri denir.

Gerçel sayıların tamlık özelliği ile ortaya çıkan Arşimet prensibi yardımıyla herhangi $x \in R$ için $-m < x < n$ olacak biçimde m, n doğal sayıları vardır. $-m < x < n$ durumunda sonlu adet tamsayı var ve bu tamsayıların $k \leq x$ özelliğini sağlayan en büyük olanına tam değer denir.

Tamlık Özelliğine Yönelik Öğrenci Kavrayışları

Bu bölümde öğrencilerin tamlık özelliği kavramına yönelik kavrayışlarını belirlemek için yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucunda ortaya çıkan verilerin analizinden elde edilen bulgular yer almaktadır. Bulgular verilerin analizine bağlı olarak belirlenen iki ana temaya göre, gerçel sayıların tamlık özelliği kavramının epistemolojisi ve gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin şemalarda yer alan zihinsel yapılar şeklinde iki başlıkta verilmiştir. Bulgular transkript edilen verilerin doğrudan alıntılar ile sunulmasıyla desteklenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeden elde edilen alıntılar sunulurken üç öğrenci Ö1, Ö2, Ö3 ve araştırmacı A şeklinde kodlanmıştır. Ayrıca bu bölümde bulgular ve bulgulara ilişkin tartışmalar eş zamanlı gözlemlenebilmesi bakımından birlikte verilmiştir.

Gerçel Sayıların Tamlık Özelliği Kavramının Epistemolojisi. Öğrencilerin gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin şemalarında yer alan zihinsel yapıların ortaya çıkarılabilmesi için tamlık özelliğinin epistemolojik yapısına ilişkin sorular sorulmuştur. Görüşmelerde öncelikle semantik olarak tamlık kavramının ne anlama geldiği tartışılmıştır.

A: Tam olmak deyince ne anlıyorsun?

Ö1: Eğer kelime anlamı olarak bakacak olursak tam olmak bir şeyin eksiksiz olması.

Ö2: Bir yeri tam kaplaması, tam olarak örtmesi...

Ö3: Matematiği bir kenara bıraktığımda tam olmak eksikliklerden uzak olmak aklıma geliyor.

Öğrenciler kavramın etimolojisine uygun olarak tam olmayı “eksiksiz olmak” (Ö1,Ö3) ve “bir yeri örtmek, kaplamak” (Ö2) biçiminde açıklamışlardır. Bu iki söylem farkı bir doğrunun tamlığı ile gerçel sayıların tam olmasına yönelik verilen cevaplarla paralellik göstermektedir.

A: Bir doğru tam mıdır?

Ö2: Doğru sonsuza kadar giden bir şey ve yani hangi uzayda bakacak olursak olalım belli bir değer için içerisinde bir nokta var sonuç olarak. Tam olduğunu düşündüm. Ama yani şimdi gerçi R^2 'yi düşününce mesela içerisinde olmayan noktalar da var. Bilemedim o yüzden şu an.

Ö3: Evet tamdır. Çünkü noktaların boşluksuz bir araya gelmesiyle doğru oluşur ve tam bir şekilde oluşmuş olur.

A: Peki, gerçel sayılar tam mıdır sence? Ya da gerçel sayıların tam olması ne demektir?

Ö1: Yani bir şeyin eksiksiz olması demek. Gerçel sayılar... Yani karmaşık sayıları görmezden gelecek olursak tam... Tamdır derim.

Ö2 kodlu öğrencinin doğrunun tam olup olmadığı sorusuna ilişkin yanıtına bakıldığında, doğrunun noktalarının sonsuz olması ve bulunduğu uzayı “örtmesi” bağlamında tam olduğunu düşündüğü görülmektedir. Ö1 kodlu öğrencinin noktaların boşluk olduğu yani doğrunun “eksiksiz” olduğu gerekçesiyle tam olduğunu verdiği gözlemlenmektedir. Diğer yandan Ö1’in gerçel sayıların tam olup olmadığı sorusuna “eksiksiz bir yapıda” olduğu için tam olduğunu verdiği görülmektedir. Tamlık kavramına iki farklı semantik yaklaşıma rağmen doğrunun R^2 uzayını “örtmediği” ve gerçel sayıların R^2 uzayına izomorf olan karmaşık sayılar kümesinde “eksik kaldığı” düşüncesi paralellik göstermektedir.

Ö3 kodlu öğrenci gerçel sayıların tamlık özelliğini Cauchy dizileri ile açıklamıştır. Diğer yandan tam olma kavramı ile tamlık özelliği arasında bir ilişki olup olmadığı sorusu

üzerine öğrencinin kavramın etimolojisi ile gerçel sayıların tamlık özelliğinin tanımı arasında “eksiksiz” olma durumu ilişkisi kurduğu gözlenmektedir.

A: R 'nin tam olması ne demektir?

Ö3: Matematiksel olarak düşünürsek R 'nin tam olmasıyla ilgili hatırladığım bazı teoremler var. R 'den seçilen her dizinin Cauchy dizisi olması ve her Cauchy dizisinin de yakınsak olması bu çift gerektirmenin sağlanması gerekir.

A: Tam olmak ile sözünü ettiğin teorem arasında bir ilişki var mıdır?

Ö3: Aslında ilişki vardır. Alacağım her yakınsak dizi Cauchy dizisi olacağından ve bu eksiksiz bir şekilde olacağından bağlantı kurulabilir.

Diğer yandan Ö3 kodlu öğrencinin doğrunun tam olması ile gerçel sayıların tam olması arasında bağlantı kuramadığı görülmüştür.

A: Peki bir doğru tam mıdır?

Ö3: Evet tamdır çünkü noktaların boşluksuz bir araya gelmesiyle doğru oluşur ve tam bir şekilde oluşmuş olur.

A: Peki az önceki teoremle doğrunun tamlığı arasında bir ilişki var mıdır?

Ö3: Eğer teoremi doğru hatırlıyorsam olması gerekir. Doğru üzerinde alacağımız bir dizinin yakınsak olması gerekir.

A: Doğru üzerinde alacağımız bir dizi mi?

Ö3: Ama doğru üzerinde bir dizi nasıl alırız ki... İkisi arasında bir bağlantı kuramıyorum şu anda.

Öğrencinin gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin tanımında yer alan teorem ile doğrunun tam olması arasında ilişki kuramaması, bu iki süreci koordine edememesinden kaynaklı olabilir. Diğer yandan tamlık özelliğinin Cauchy dizilerinin yakınsak olması ile açıklanması dizisel bir yaklaşım olup, tamlık özelliğine ilişkin zihinsel şemada küme ve dizi kavramlarının nesne haline gelmiş olması gerekmektedir. Öğrencinin tamlık özelliğine ilişkin

teoremi hatırlaması ancak doğru kavramına ilişkin süreçlerle koordine edememesi bu kavramın tanımına ilişkin kavrayışının eylem düzeyinde olduğunu göstermektedir.

Doğrunun ve gerçel sayıların tam olması arasındaki ilişkinin sorulduğu Ö1 ve Ö2 kodlu öğrencilerin verdiği cevaplar aşağıda verilmiştir.

A: Doğrunun tam olmasıyla R 'nin tam olması aynı şey midir sence?

Ö1: Yani aslında olabilir. Evet. Bir sayı doğrusu olarak düşünecek olursam içerisinde tüm reel sayılar zaten oluyor sayı doğrusunun dolayısıyla aslında bir noktada benzerliklerden dolayı evet diyebilirim buna. R için.

Ö2: Evet, zaten reel sayılarla bir doğruyu aynı görüyorduk, eş görüyorduk öyle bir şey vardı.

İki öğrencinin de cevaplarına bakıldığında sayı doğrusu ile gerçel sayıları eşleştirerek tamlık kavramına ilişkin bir zihinsel yapı ortaya koydukları görülmektedir. Dikkat edilirse öğrencilerin gerçel sayılar kümesi ile bir doğruyu oluşturan noktalar kümesinin bire bir eşleme yöntemiyle elde edilen sayı doğrusu nesne yapısına sahip olmadığı söylenebilir. Sayı doğrusu nesnesini oluşturan eylemlerin öğrenciler tarafından içselleştirilemediği görülmektedir. Buna rağmen gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin şemalarında doğru ile gerçel sayıların eş kabul edilmesine yönelik zihinsel bir yapıya sahip oldukları gözlenmektedir. Bu yapının araştırmacı tarafından sorulmasından kaynaklı olarak, dışsal bir uyarıcı etkisi bağlamında eylem yapısı olduğu söylenebilir.

Gerçel Sayıların Tamlık Özelliğine İlişkin Şemalarda Yer Alan Zihinsel Yapılar.

Gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik şemaların belirlenebilmesi için öğrencilere bir kümenin sınırı ve eküs-ebas kavramlarına yönelik zihinsel yapıları ortaya çıkaracak sorular sorulmuştur. Öncelikle Ö1 kodlu öğrencinin bir kümenin üst sınırına ilişkin kavrayışını belirlemek için sorulan sorulara verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.

A: Bir kümenin üst sınırı ne demektir?

Ö1: Hmm... Bir kümenin üst sınırı demek, o kümenin içerisinde ondan başka, yani en büyük sayının o olması demek kısaca. Ondan daha büyük bir sayı olmaması demek o kümede, tüm sayıların en büyüğü.

Ö1 kodlu öğrenci bir kümenin üst sınırını küme içerisindeki en büyük sayı olarak açıklamıştır. Bunun üzerine araştırmacı dışsal bir müdahalede bulunarak kümenin üst sınırının kümeye dahil olup olmaması gerektiğini sormuştur.

A: O küme içinde mi olmalı?

Ö1: Hmm... O küme içinde olmayabilir.

A: Anladım.

Ö1: Mesela $(0,1)$ açık aralığını düşünecek olursak, yani düşününce mantıken 1 üst sınırdır ama içermez. Yani bir epsilon komşuluğunda içerisine ondan daha büyük bir sayı dahil etmiyorsak olur. Kapalı olmasına gerek yok yani. İçermesine gerek yok.

Görüldüğü gibi Ö1 kodlu öğrenci $(0,1)$ açık aralığını örnek vererek kümenin sınırına yönelik gerçel sayılar üzerinde verilen bir kümenin üst sınırlarını belirleme eylemi yapmıştır. Bu eylem üzerinde yansıtımlar yaparak bir kümenin üst sınırının kümeye dahil olmak zorunda olmadığı sürecine içselleştirmiştir. Dikkat edilirse Ö1 sınır kavramı sürecinde komşuluk kavramını kullanmıştır. Buradan hareketle araştırmacı Ö1'e epsilon komşuluğu derken ne demek istediğini sormuştur.

A: Epsilon komşuluğunda dahil etmiyorsak derken neyi kastediyorsun?

Ö1: Yani mesela eğer o sayıdan, diyelim ki $(0,1)$ açık aralığı olsun. 1 sayısını aldım, 1 dahil değil. Ama mesela $(0,1)$ birleşim 2 deseydim, burada bir üst sınırı 1 olarak belirleyemedim mesela. Onu demek istedim. Çünkü 2 daha büyük.

Burada Ö1'in $(0,1)$ açık aralığında en küçük üst sınırı belirlemeye çalıştığı görülmektedir. Benzer bir durum Ö3 kodlu öğrenci ile yapılan görüşmede de gözlemlenmiştir.

A: Bir kümenin sınırı ne demektir? R' 'de düşünebilirsin.

Ö3: Bir kümenin alt sınırı tüm elemanları ondan daha küçük olmaması demektir. a bir sınır olsun. Kümenin tüm elemanları a 'nın herhangi bir epsilon komşuluğu içinde kalması gerekir.

A: Kümenin tüm elemanlarının mı komşuluk içerisinde kalması gerekir? Mesela $(1,2)$ açık aralığını düşünelim 0 bir alt sınır mıdır?

Ö3: Evet.

A: 0'ın herhangi bir komşuluğunda kümenin elemanları kümenin içerisinde kalır mı?

Ö3: 0'ın 3 komşuluğunu alırsam sağlar.

A: Ama herhangi bir komşuluk dedin.

Ö3: O zaman düşündüğüm tanım olmuyor.

Görüldüğü gibi Ö3 bir kümenin alt sınırının tanımını verirken en büyük alt sınır tanımını vermeye çalışmıştır. Dikkat edilirse en büyük alt sınır kavramı yani ebas sayısının her epsilon komşuluğunda kümenin tüm elemanlarının komşuluk içerisinde kalması gerektiği tanımı yapılmıştır. Ö3 kodlu öğrenci araştırmacının müdahalesi ile bu tanımın kümenin tüm elemanlarının komşuluk içerisinde kalmaması gerektiği sürecini yansıtabilmiştir.

Benzer şekilde Ö2 kodlu öğrencinin de bir kümenin sınırı kavramını en küçük üst sınır veya en büyük alt sınır kavramıyla açıkladığı gözlemlenmektedir.

A: Bir kümenin sınırı ne demek hatırlıyor musun?

Ö2: Evet. Tüm elemanlarından daha küçük olan bir sayı varsa ya da bir değer varsa o değer.

A: Örnek verebilir misin?

Ö2: Doğal sayıların alt sınırı var 0, üst sınırı yok.

A: 0 alt sınır -1 alt sınır değil mi mesela?

Ö2: Evet, -1 de alt sınır aslında. En büyük alt sınır geldi de aklıma.

Üç öğrencinin de bir kümenin sınırı kavramını ebas-eküs kavramlarıyla açıklaması öğrencilerin bir kümenin sınırına ilişkin kavrayışlarının eylem düzeyinde olduğunu göstermektedir. Bu durumda kavrama ilişkin tanımın bir sürece içselleştirilmesi söz konusu değildir. Buna bağlı olarak görüşme sorularında yer alan “üstten sınırlı bir kümenin boştan farklı her alt kümesinin eküs’ünün olması” ile ilgili zihinsel nesne soruları bu öğrencilerin kavrayışları için üst seviyede olduğundan sorulara doğru cevaplar veremedikleri görülmektedir. Aşağıda buna bir örnek olarak Ö3 ile yapılan görüşmelerden alıntılar sunulmuştur.

A: R 'de üstten sınırlı her kümenin eküs’ü var mıdır?

Ö3: Her kümenin vardır. Çünkü küme üstten sınırlı ise üst sınırları kümesi oluşturulabilecektir. Çünkü muhakkak üstten bir değerle sınırlı ve ondan büyüklerin hepsi o kümeye dahil. Kümenin en küçük elemanını seçtiğimde eküsü bulurum.

A: Aynı mantıkla Q için düşünelim. Q 'nun üstten sınırlı “karesi 2 den küçük sayılar” kümesini düşünelim. Üstten sınırlı mıdır?

Ö3: Evet üstten sınırlıdır alttan sınırlı değildir.

A: Eküsü nedir bu kümenin?

Ö3: $\sqrt{2}$ kümenin eküsü olur.

A: $\sqrt{2}$ rasyonel mi?

Ö3: Hayır. Değil.

A: Senin dediğin olmadı o zaman.

Ö3: Evet olmadı.

A: Peki ne farkı var. R ile Q arasında bu farklılığın sebebi nedir?

Ö3: R tamdır çünkü.

A: Niçin öyle düşündün? Q tam değil mi?

Ö3: Bilemiyorum hocam.

A: Gerçel sayı nedir? Gerçel sayı neden var? Rasyonel sayı varken gerçel sayıya neden ihtiyaç duyulmuştur?

Ö3: Çünkü irrasyonel sayılar var onları rasyonel sayılarla ifade edemiyoruz. Bu iki sayı kümesini birleştirerek R 'yi oluşturuyoruz.

Ö3 kodlu öğrenci gerçel sayıların boştan farklı üstten sınırlı her kümesinin eküsünün var olduğunu söylediği görülmektedir. Buna rağmen Ö3'ün eküs kavramına ilişkin nesne kavrayışında olmadığı için ilgili önermenin rasyonel sayılar kümesi için de gerçekleşeceğini ifade ettiği gözlemlenmektedir. Araştırmacı müdahalesi ile verilen rasyonel sayıların bir alt kümesi örneği üzerinde eylemler yaparak rasyonel sayıların üstten sınırlı bir alt kümesinin eküse sahip olamayacağını yansıtmıştır. Buradan hareketle gerçel sayılarla rasyonel sayılar arasındaki farklılığın tamlık özelliğinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Buna rağmen rasyonel sayılar kümesinin tam olup olmadığını bilmediğini belirtmiştir. Tamlık kavramını bir kümenin üstten sınırlı boştan farklı her alt kümesinin eküsünün olması ile ilişkilendirememiştir. Bir kümenin sınırı, eküs-ebas kavramlarına yönelik kavrayışlarının eylem düzeyinde olması ve bu ilişkinin kurulabilmesi için bu kavramların süreçlerinin koordine edilmesi gerekliliğinin bu sonuca sebep olduğu düşünülmektedir.

Ö2 kodlu öğrenciyle yapılan görüşmelerde, Ö2'nin tamlık özelliğine ilişkin şemalarda yer alan nesnelere yönelik bir ayrışım yaparak ilişkilendirdiği görülmüştür.

A: ... R 'nin her alt kümesinin böyle eküsü var mıdır?

Ö2: Yoktur. Yani mesela \mathbb{N} ... Reel sayıların yoktur. Reel sayılar gibi sonsuza giden kümelerin...

A: Nasıl olursa vardır?

Ö2: Üstten sınırlıysa üst sınırı vardır alttan sınırlıysa alt sınırı vardır

A: Eküsü vardır diyorsun üstten sınırlıysa? Reel sayıların üstten sınırlı olan her kümesinin eküsü var mıdır yani?

Ö2: Vardır. Çünkü bir sınırı var, bittiği bir yer var, devamına gidemiyor.

A: Eküsü olmasını gerektiriyor mu bu?

Ö2: Bence olması gerekiyor.

A: Peki, aynı şeyi rasyonel sayılar için düşünelim. Rasyonel sayıların da üstten sınırlı bir alt kümesini alalım. Yine eküsü var mıdır?

Ö2: Vardır. Ama rasyonel sayılar içinde olmak zorunda değil.

A: R' 'de vardır dedin. Neden? İkisi arasında ne fark var?

Ö2: İşte R' 'deki tüm değerlerin alınması durumu yani tüm reel sayıların ama arada rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsini kapsadığı için bir boşluk oluşmuyor. Yani tam olduğu için. Tamlığa gidiyor yine olay ama.

Görüldüğü gibi Ö2 bir kümenin sınırı ve eküs kavramlarına ilişkin süreçleri gerçel ve rasyonel sayı kümeleri süreçleri ile koordine ederek, tamlık özelliği ile bir kümenin boştan farklı üstten sınırlı alt kümelerinin eküsünün olması nesnesini oluşturmuştur.

Bulgulara bakıldığında, öğrencilerin tam olma kavramına ilişkin söylemlerinde “eksiksiz olma” ve “bir şeyi örtme” gibi semantik farklılıklar gözlemlenmiştir. Bu farklılığın gerçel sayıların tam olmasına yönelik kavrayışlarını etkilediği görülmektedir. Örneğin, tam olmayı “eksiksiz olma” şeklinde ifade eden bir katılımcının gerçel sayıların tamlığını sayıların eksiksiz bir dizilime sahip olması ile açıklamaktadır. Diğer yandan tam olmayı “bir şeyi tamamen örtme” şeklinde ifade eden diğer bir katılımcı doğrunun tam olmasını, noktalarının sonsuza kadar gitmesinden kaynaklı olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda kavrama yönelik semantik farklılıkların kavramın zihinsel yapılarını etkilediği söylenebilir. Örneğin, “eksiksiz olma” ifadesi rasyonel sayılar ile gerçel sayılar arasındaki farkın ortaya

konulabilmesi bakımından; “bir şeyi örtme” ifadesi ise rasyonel sayıların gerçel sayılar üzerinde yoğun olması ve sayı doğrusu ile gerçel sayıların tam olmasının inşa edilmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda çalışmanın ilgili kavrama yönelik oluşturulacak genetik ayrışmada,

- rasyonel sayıların bir doğru üzerinde temsil edilmesine ilişkin zihinsel yapıların ve
- rasyonel sayıların gerçel sayılar üzerinde yoğun olmasına ilişkin zihinsel yapıların

yer almasının gerekliliğini ortaya koyduğu söylenebilir. Bu sonucun Durand-Guerrier vd. (2019)'nin çalışmasında ortaya koyduğu yoğunluk ve tamlık arasındaki farkın ortaya konulmasında öğrencilerin yaşadığı güçlüklerin giderilmesi bakımından da önemli olduğu düşünülmektedir.

Diğer yandan bir başka katılımcının gerçel sayıların tamlığını Cauchy dizilerinin yakınsak olması ile açıkladığı ancak doğrunun tam olması ile gerçel sayıların tam olması arasında bu açıklamaya bağlı bir ilişki kuramadığı görülmüştür. Bu bağlamda oluşturulacak genetik ayrışım için tamlık özelliğinin tarihsel gelişimi bağlamında; diziler kavramının, Dedekind kesimlerinin, Eküs-Ebas kavramlarının ve bunlar arasındaki ilişkilerin ortaya konulması önemlidir. Bu sonucun Berge (2010)'nin çalışmasında öğrencilerin Analiz kavramlarıyla tamlık özelliği arasında ilişki kuramamasının Analiz derslerinin devamında tamlık özelliği ile yüzleşmemesinden kaynaklandığı sonucuyla paralellik göstermektedir.

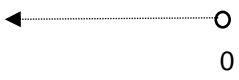
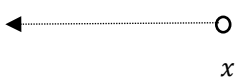
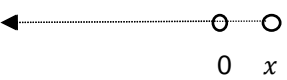
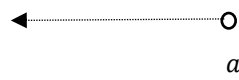
Tamlık Özelliğinin Tarihsel Gelişimi

Problem durumu kesiminde söz edildiği gibi, ilk olarak tamlık özelliğinin açık hale getirilmesi Cauchy ve Bolzano'nun çalışmalarıyla başladığı kabul edilmektedir (Berge & Sessa, 2003). İlk başta aritmetikleştirme olarak başlayan bu süreç 19. Yüzyılda Dedekind ve Cantor'un çalışmalarıyla açık hale getirilmiştir (Awodey & Reck, 2002). Dedekind (1963) doğrunun sürekliliği kavramını Dedekind kesimleri (ışınları) ile tanımlayarak tamlık özelliğini açık bir şekilde kullanmıştır. Dedekind kesimlerine bağlı olarak gerçel sayıların kuruluşu

aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Burada kesimler geometrik temsilleri açısından ışın olarak adlandırılmıştır.

Tablo 11

Gerçel Sayıların Dedekind Kurulumu

Tanımlar	Örnek	Geometrik Temsil
Q rasyonel sayılar kümesi içerisindeki bir A ışını; $x \in A$ ve $y < x$ ise $y \in A$ olur.	$0 = \{x \in Q : x < 0\}$ kümesi "0" sayısını temsil eder. Bu kümeye 0 ışını denir.	
A kümesinin ilk elemanı yoktur. özelliklerini sağlar.	$x = \{y \in Q : y^2 < 2\}$ kümesi karesi 2 olan sayıyı temsil eder.	
x ve y birer ışın olmak üzere, $x \subset y \Leftrightarrow x < y$ elde edilir.	x karesi 2 olan sayı olmak üzere, $0 \subset x$ olduğundan, $0 < x$ denir.	
Işınların oluşturduğu kümeye gerçel sayılar kümesi denir.		
Gerçel sayıların üstten sınırlı alt kümeleri tek bir ışın ile temsil edilebilir.	a ve b gerçel sayı ve $b < a$ olmak üzere, (b, a) açık aralığı a ışını ile temsil edilir.	
Gerçel sayıların üstten sınırlı bir alt kümesinin en küçük üst sınırının varlığı o sayının varlığı anlamına gelmektedir.		

Dedekind kurulumuna göre rasyonel sayılar kümesi içerisinde oluşturulan ışınlar gerçel sayılar olarak düşünülmektedir. Bu bağlamda her bir gerçel sayı, belirli rasyonel sayı kümeleridir. Rasyonel sayı kümeleri ile elde edilen gerçel sayılar geometrik olarak bir doğrunun bütün noktalarını içermektedir. Buna bağlı olarak gerçel sayıların (yani Dedekind kesimlerinin) boştan farklı, üstten sınırlı her alt kümesinin bir üst sınırının olduğu doğal bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Gerçel sayıların kurulumunda "en küçük üst sınır özelliği" olarak verilen aksiyomun, Dedekind kesimleri ile oluşturulan gerçel sayıların doğal bir sonucu olduğu görülmektedir.

Bu bağlamda Dedekind kesimleri sonucu oluşan gerçel sayıların tamlık özelliğinin genetik ayrışımında yer alması, en küçük üst sınır özelliğinin kavramsal anlaması için önemlidir.

Araştırmacıların Deneyimleri

Tezin araştırmacısı yaklaşık on yıldır Matematik Öğretmenliği Programı'nda Analiz derslerinin uygulamasını yürütmektedir. Ayrıca teze danışmanlık yapan öğretim üyesi doktorasını pür matematik alanında yapmış olup, yirmi yılın üzerinde Analiz derslerini vermektedir. Bunun yanı sıra genetik ayrışımın pedagojik yönünü güçlendirmek amacıyla matematik eğitimi alanında çalışan bir öğretim üyesinden uzman görüşü alınmıştır.

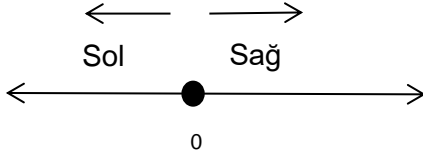
Genetik Ayrışımın Tasarımı

Çalışmanın bu bölümünde genetik ayrışımın teorik analizine bağlı olarak bir varsayımsal genetik ayrışım oluşturulmuştur. Yapılan analize bağlı olarak öğrenci kavrayışlarında yaşanan güçlükler doğrultusunda, öncelikle rasyonel sayıların kavramsal inşası göz önüne alınmıştır. Bu bağlamda rasyonel sayıların bir doğru ile temsil edilmesi sürecinin genetik ayrışımında yer alması gerektiği düşünülmektedir. Ayrıca Duval (2006) kavramsal anlamayı temsiller arası geçiş yapabilme olarak tanımlamaktadır. Bu bağlamda düşünüldüğünde rasyonel sayıların geometrik temsillerinin kavramsal anlamaya yardımcı olacağı öngörülmektedir.

Tamlık özelliğinin tarihsel gelişimine bakıldığında, doğrunun sürekliliğinden hareketle Dedekind kesimlerinin oluşturulduğu görülmektedir. En küçük üst sınır özelliği olarak adlandırılan ve gerçel sayıların tamlık özelliği olarak Analiz kitaplarında gerçel sayıların kurulumunda aksiyom olarak verilen bu özellik, Dedekind kesimlerinin (ışınlarının) bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda Analiz derslerinde en küçük üst sınır özelliği olarak verilen bu aksiyomun kavramsallaştırılması bağlamında Dedekind ışınlarının verilmesinin etkili olduğu düşünülmektedir.

Varsayımsal genetik ayrışım verilmeden önce genetik ayrışımında yer alan birtakım bilgiler aşağıda verilmiştir.

Yatay bir doğru üzerinde herhangi bir nokta "0" olarak belirlensin. Doğruya ilişkin bilgiler aşağıda verilsin.



Doğru üzerinde sıfırdan farklı bir x noktası sıfırın sağındaysa $x > 0$ yazılır ve " x sıfırdan büyüktür" diye okunur. Tersine x noktası sıfırın solundaysa $x < 0$ yazılır ve " x sıfırdan küçüktür" diye okunur. Buna göre rasyonel sayılar kümesi üzerinde "<" bağıntısı yukarıdaki gibi tanımlanır.

Doğru üzerinde alınan bir x noktasının kendisi de dahil olmak üzere sağında yer alan noktalar kümesine "üst sınırlar kümesi" denir. Tersine doğru üzerinde alınan bir x noktasının kendisi de dahil olmak üzere solunda yer alan noktalar kümesine alt sınırlar kümesi denir.

Bir x noktasının üst sınırlar kümesinin en solunda yer alan noktaya üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı denir. Tersine bir x noktasının alt sınırlar kümesinin en sağında yer alan noktaya alt sınırlar kümesinin en büyük elemanı denir.

Genetik ayrışımın teorik analizi doğrultusunda varsayımsal genetik ayrışım; rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesine ilişkin zihinsel yapılar, rasyonel sayı kümeleri kullanılarak ışınların oluşumuna ilişkin zihinsel yapılar, Dedekind ışınlarının gerçel sayılara dönüştürülmesine ilişkin zihinsel yapılar şeklinde üç aşamalı olarak ele alınmıştır.

İlk aşama,

1.a. Rasyonel sayılar kümesindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eylemi

1.b. Rasyonel sayıların bir alt kümesinin bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemi

1.c. Bu iki eylemin (1.a. ve 1.b.) içselleştirilerek rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi süreci

zihinsel yapılarını içermektedir. İkinci aşamada,

2.a. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemanın üst sınırlar kümesini bulma ve doğru üzerinde temsil etme eylemi

2.b. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemana belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarını doğru üzerinde temsil etme ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi

2.c. Verilen 2.b. eyleminin, rasyonel sayılar kümesinde verilen herhangi bir elemana dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarının o noktadan büyük rasyonel sayılar kümesi ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanının verilen nokta olduğu sürecine içselleştirilmesi

2.d. Doğru üzerinde verilen rasyonel sayı olmayan herhangi bir noktaya dönüşüm uygulanarak elde edilen noktalar kümesinin üst sınırlarını ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi

2.e. Verilen 2.d. eyleminin genelleştirilerek doğru üzerinde rasyonel olmayan hangi nokta alınırsa alınsın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı olmadığı sürecine içselleştirilmesi

2.f. Verilen 2.c ve 2.e süreçlerinin koordine edilerek doğru üzerinde verilen bir noktanın rasyonel sayı olup olmadığının belirlenmesi süreci

zihinsel yapıları yer almaktadır. Burada sözü edilen dönüşüm “kümenin elemanının bir doğru üzerinde belirtilmesi ve belirtilen noktanın solunda yer alan rasyonel sayıların oluşturduğu sayı kümesinin bulunması” olarak tanımlıdır. Üçüncü aşamada ise,

3.a. Doğru üzerinde temsil edilen bir rasyonel sayıya belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğruda temsil edilmesi eylemi

3.b. Doğru üzerinde temsil edilen rasyonel olmayan bir sayıya dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğruda temsil edilmesi eylemi

3.c. Verilen 3.a. ve 3.b. eyleminin genelleştirilerek herhangi bir nokta için yapılan dönüşümün doğrunun tüm noktalarını içerdiği sürecine içselleştirilmesi

zihinsel yapıları oluşturulmuştur. Üçüncü aşamada sözü edilen dönüşüm “doğru üzerinde verilen bir noktanın solunda yer alan rasyonel sayılar kümesini noktanın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanına karşılık getirmek” şeklinde tanımlıdır.

Varsayımsal genetik ayrışım ilk olarak rasyonel sayılar kümesinin zihinsel yapılandırılmasını içerir. Daha sonra rasyonel sayıların geometrik temsilleri üzerinden rasyonel sayıların doğrunun bütün noktalarını içermeyeceğinden hareketle, en küçük üst sınır kavramı kullanılarak Dedekind ışınlarının zihinsel inşası yapılır. Son bölümde Dedekind ışınlarına bağlı olarak gerçel sayıların tamlik özelliği ortaya çıkarılır.

Genetik Ayrışımın Doğrulanması ve İnceltilmesi

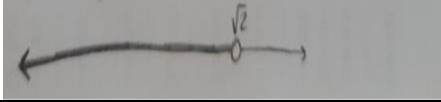
Varsayımsal genetik ayrışım doğrultusunda oluşturulan kavramsal anlama testinin uygulamasından elde edilen veriler genetik ayrışımın inceltmesi bağlamında analiz edilmiştir. Analiz sürecinde öğrencilerin APOS teorisi bağlamında gerçel sayıların tamlik özelliğine ilişkin zihinsel yapılarının genetik ayrışım ile uyumuna bakılmıştır. Bunun için öncelikle öğrencilerin zihinsel yapıları analiz edilmiş ve daha sonra genetik ayrışımında yer alan zihinsel yapılar ile uyumuna bakılmıştır. Bu bağlamda verilerden bazı örnekler sunularak, veriler doğrultusunda genetik ayrışımında inceltmeler yapılmıştır.

Sunulan transkript örneklerinde araştırmacı A ile; öğrenciler Ö1, Ö2, ..., şeklinde kodlanmıştır. Burada ilk olarak rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine yönelik verilerin analizinden elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 12

Rasyonel Sayıların Doğru Üzerinde Temsil Edilmesi Sürecine Yönelik Bulgular

Sorular	Veri Örnekleri	APOS Teorisi Bağlamında Bulgular
1.a.		Öğrencilerin bazılarının rasyonel sayıların alt kümelerinin bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemini doğru yapamaları da bu eylemin içselleştirilmesi sonucu rasyonel sayıların bir doğru üzerinde temsil edilmesi sürecini gerçekleştirdikleri görülmektedir.
1.b.	Ö2: Sayı doğrusunda gösterilen nokta $\sqrt{2}$ olur. Çünkü pergeli açtığımızda aradaki uzunluk Pisagor bağıntısından dolayı $\sqrt{2}$ birim olur. $\sqrt{2}$ sayısından küçük sayılar sayı doğrusunda şöyle gösterilir.	Genetik ayrışımında yer alan rasyonel



1.c.

Ö2: Hayır içermez. Çünkü sayı doğrusunda irrasyonel sayılar da vardır. Gerçek değerini tam bilemesek de irrasyonel sayılar da sayı doğrusu üzerindedir. Haliyle rasyonel sayılar kümesi doğrunun tüm noktalarını içermez.

sayıların bir doğru üzerinde gösterilme eyleminin içselleştirilerek rasyonel sayıların bir doğru üzerinde gösterilmesi sürecinin farklı zihinsel yapıları olduğu görülmektedir. Burada sayı doğrusu kavramının ve rasyonel sayılar kavramının birlikte bu zihinsel yapılar içerisinde yer alması gerekliliği, genetik ayrışımın bu doğrultuda incelenmesi gerektiği gözlenmektedir.

Buna göre varsayımsal genetik ayrışımına bağlı kavramsal anlama testi oluşturularak öğrenciler üzerinde uygulanması sonucunda; sayı doğrusu kavramının ve rasyonel sayılar kavramının birlikte bu zihinsel yapılar içerisinde yer alması gerekliliği, genetik ayrışımın bu doğrultuda incelenmesi gerektiği gözlenmektedir. Bu bağlamda genetik ayrışımın incelenmesine yönelik aşağıdaki tablo sunulmuştur.

Tablo 13

Rasyonel Sayıların Doğru Üzerinde Temsil Edilme Sürecine Yönelik İnceltme

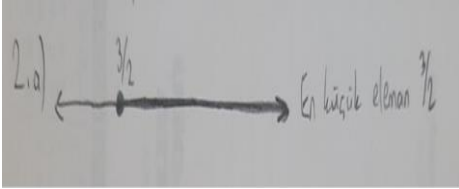
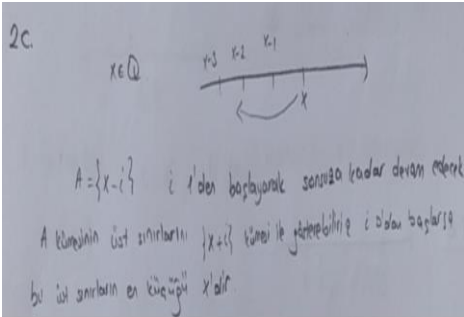
Varsayımsal Genetik Ayrışım	İnceltilmiş Genetik Ayrışım
1.a. Rasyonel sayılar kümesindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eylemi	1.a.R. Yardımcı bir doğru ve tamsayıları kullanarak Thales teoremi ile Q rasyonel sayılar kümesi içerisindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eylemi
1.b. Rasyonel sayıların bir alt kümesinin bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemi	1.b.R. Rasyonel olmayan sayıları Pisagor teoreminden yararlanarak bir doğru üzerinde temsil etme eylemi
1.c. Bu iki eylemin (1.a. ve 1.b.) içselleştirilerek rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi süreci	1.c.R. 1.a. ve 1.b. eylemlerinin içselleştirilerek Q rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi süreci 1.d.R. 1.c.R. sürecinin Q rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme eylemi ile sarmalanarak Q rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesi

Varsayımsal genetik ayrışımın uygulanması sonucu elde edilen bulgulara bakıldığında 1.a. eyleminin dışsal uyarılardan bağımsız olmadığı gözlenmektedir. Bu bağlamda 1.a.R ve 1.b.R eylemlerinden sonra öğrencilerin yansıtma yapması gerektiği yönünde inceltme yapılmıştır. Öte yandan bulgular doğrultusunda 1.b. eyleminin içselleştirme mekanizması olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda inceltilmiş genetik ayrışımına 1.c.R basamağı eklenmiştir.

Aşağıda rasyonel sayı kümeleri kullanılarak ışınların oluşumuna ilişkin zihinsel yapılarla yönelik verilerin analizinden elde edilen bulgular sunulmuştur.

Tablo 14

Rasyonel Sayı Kümeleri Kullanılarak Işın Nesnesinin Oluşumuna Yönelik Bulgular

Sorular	Veri Örnekleri	APOS Teorisi Bağlamında Bulgular
2.a		<p>Öğrencilerin bu soruyu yapamamasının nedeninin, 1.b. numaralı soruda olduğu gibi, rasyonel sayıların bir alt kümesinin sayı doğrusu üzerinde temsil edilmesi eylemini yapamadığından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bağlamda bu sorunun inceltilmiş genetik ayrışımında rasyonel sayıların doğru temsili nesnesinin geri sarmalanarak, rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine uygulanan bir eylem sorusu olduğunu düşündürmektedir.</p>
2.b.	<p>A: Üst sınırlar kümesi nedir peki? Ö1: Buna emin olamadım. A: Peki kümeyi bilmeden üst sınırlar kümesinin en küçüğünü nasıl belirliyorsun? Ö1: Çizmeye çalışayım. Şimdi sayı doğrusu bu (bir doğru çiziyor). 0 burada (Doğru üzerinde bir nokta işaretliyor). Buradan sola doğru gittikçe (0 noktası olarak işaretlediği noktanın solunda noktalar işaretliyor). Buradan sola doğru gittikçe bu nokta için (0'ın solunda bir nokta için konuşuyor) üst sınır tam dibinden çekersek sağa doğru bundan sonrası bu nokta için her zaman üst sınırdır. Bunun için de bu olacak (bir başka nokta için aynısını yapıyor). Hep bi şeyinden başlayıp devam edecek. A: Neyinden başlayıp devam edecek? Ö1: Bi üstünden diyeyim. A: Bir üstü ne demek? Ö1: Bir üst olarak ifade edebiliyorum. Yani... Sayıdan büyük ilk eleman gibi diyeyim.</p>	<p>Transkriptler incelendiğinde bazı öğrencilerin verilen kümenin üst sınırlar kümesini belirleme eylemini yapamadığı görülmektedir. Buna rağmen, yandaki örnekte görüldüğü üzere, öğrenci verilen noktanın üst sınırlarının en küçük elemanını 0 olarak belirlemiştir. Öğrenci 0'ın solundaki rasyonel sayılar için tek tek üst sınırlar kümesi belirlemeye çalışmış ve bunu yaparken de "her rasyonel sayıdan büyük ilk eleman" ifadesini kullanmıştır. Bu durum rasyonel sayıların yoğun yapısının öğrencilerin zihinsel yapıları arasında yer almadığını göstermektedir.</p>
2.c.		<p>Örnek çözüme bakıldığında x rasyonel sayısından küçük rasyonel sayılar kümesinin tamsayılar olarak ifade edildiği görülmektedir. Aynı öğrencinin 2.b. numaralı soruyu yapmasına karşın verilen kümenin üst sınırlar kümesini bulma ve en küçük üst sınırını belirleme eylemini ilgili süreçte içselleştiremediğini göstermektedir. Bu durumun varsayımsal genetik ayrışımında eküs nesnesinin oluşumunun yer almamasından kaynaklandığı ve genetik ayrışımın bu doğrultuda inceltilmesi gerektiği düşünülmektedir.</p>

- 2.d. A: Şimdi 2.d ye bakalım.
 Ö1: Şimdi karesi 2 ise sayımız kök 2'dir dedim. Kök 2 tam çıkmayacak.
 A: Peki kök 2 ye karşılık gelen rasyonel sayı demişsin.
 Ö1: Yani yaklaşık olarak karşılık gelen...
 A: Ne demek bu?
 Ö1: Şimdi kök 2 kökten çıkamadığı için...
 Mesela 4ü kökten çıkardığımızda 2 diyebiliriz. Ama kök 2 için tam bir değer söyleyemiyoruz ya.
 A: Tam bir değer derken ne demek istiyorsun?
 Ö1: Mesela kök 2 için 1.3 diyemiyoruz. Ama onun da bir karşılığı var yani. Ama onun virgülden sonraki kısmını tam bilmiyoruz.

Verilen transkripte bakıldığında öğrencinin üst sınır bulmak isterken irrasyonel bir sayıyı bir rasyonel sayıya karşılık getirmeye çalıştığı görülmektedir. Bu durumun öğrencinin sayı kümelerine ilişkin nesne kavrayışında olmamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu genetik ayrışımın hedefi rasyonel sayı nesne yapısı ile reel sayı nesnesini oluşturmak ve reel sayıların tamlık özelliği yapısını elde etmektir. Bunu yaparken doğrunun sürekliliğinden faydalanılmaktadır. Bu bağlamda düşünüldüğünde bir sayı doğrusu üzerinde rasyonel olmayan noktaların varlığının inşası ile birlikte gerçel sayıların tamlık özelliğinin vurgusu genetik ayrışım için önemlidir.

Elde edilen bulgulara göre 2.a. eylem sorusunun inceltilmiş genetik ayrışımında rasyonel sayıların doğru temsili nesnesinin geri sarmalanarak, rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine uygulanan bir eylem sorusu olduğu görülmektedir. Öte yandan öğrenciler 0'ın solundaki rasyonel sayılar için tek tek üst sınırlar kümesi belirlemeye çalışmış ve bunu yaparken de "her rasyonel sayıdan büyük ilk eleman" ifadesini kullanmıştır. Bu durum rasyonel sayıların yoğun yapısının öğrencilerin zihinsel yapıları arasında yer almadığını göstermektedir. Yapılan varsayımsal genetik ayrışımında rasyonel sayıların yoğun yapısının zihinsel yapılarda yer alması ve buna bağlı olarak eküs ve ışın nesnelerinin oluşturulması gerekliliği görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin çoğunluğunun 2.e. ve 2.f. sorularını yapamadığı görülmüştür. Bu bağlamda genetik ayrışımın rasyonel sayı kümeleri kullanarak ışın nesnesinin oluşturulması zihinsel yapısına, yukarıdaki analizlerin sonucu olarak eklenecek ara yapıların eklenmesinin 2.e. ve 2.f.'de yer alan süreç yapılarının oluşturulmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bulgular doğrultusunda genetik ayrışımın inceltilmesine yönelik aşağıdaki tablo sunulmuştur.

Tablo 15

Rasyonel Sayı Kümeleri Kullanılarak Işın Nesnesinin Oluşumuna Yönelik İnceltme

Varsayımsal Genetik Ayrışım	İnceltilmiş Genetik Ayrışım
2.a. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemanın üst sınırlar kümesini bulma ve doğru üzerinde temsil etme eylemi	2.a.R1. Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın üst sınırlarını bulma eylemi

2.b. Rasyonel sayılar kümesinde verilen bir elemana belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarını doğru üzerinde temsil etme ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi

2.c. Verilen 2.b. eyleminin, rasyonel sayılar kümesinde verilen herhangi bir elemana dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktalar kümesinin üst sınırlarının o noktadan büyük rasyonel sayılar kümesi ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanının verilen nokta olduğu sürecine içselleştirilmesi

2.d. Doğru üzerinde verilen rasyonel sayı olmayan herhangi bir noktaya dönüşüm uygulanarak elde edilen noktalar kümesinin üst sınırlarını ve üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma eylemi

2.e. Verilen 2.d. eyleminin genelleştirilerek doğru üzerinde rasyonel olmayan hangi nokta alınırsa alınsın üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı olmadığı sürecine içselleştirilmesi

2.f. Verilen 2.c ve 2.e süreçlerinin koordine edilerek doğru üzerinde verilen bir noktanın rasyonel sayı olup olmadığının belirlenmesi süreci

2.a.R2. Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın alt sınırlarını bulma eylemi

2.b.R1. Verilen 2.a.R1. eyleminin içselleştirilerek Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın üst sınırlar kümesini belirleme ve bir doğru üzerinde temsil etme süreci

2.b.R2. Verilen 2.a.R2. eyleminin içselleştirilerek Q rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın alt sınırlar kümesini belirleme ve bir doğru üzerinde temsil etme süreci

2.c.R1. Verilen 2.b.R1. sürecindeki kümenin en küçük elemanını bulma eylemi uygulanarak eküs nesnesinin elde edilmesi

2.c.R2. Verilen 2.b.R2. sürecine en küçük elemanı bulup kümeden çıkarma eylemi uygulanarak ışın nesnesinin elde edilmesi

2.d.R1. Doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde bir üst sınırını bulma eylemi

2.d.R2. Doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde bir alt sınırını bulma eylemi

2.e.R1. 2.d.R1. eyleminin içselleştirilerek doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde üst sınırlar kümesini bulma ve doğru üzerinde temsil etme süreci

2.e.R2. 2.d.R2. eyleminin içselleştirilerek doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde alt sınırlar kümesini bulma süreci

2.f.R1. 2.e.R1. sürecine en küçük elemanı bulma eylemi uygulanarak doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde eküs'ünün olamayacağını belirlenmesi süreci

2.f.R2. 2.e.R2. sürecinin en büyük elemanın bulunamayacağı süreciyle koordine edilerek ışın nesnesinin oluşturulması

Kavramsal anlama testinde 2.f. sorusuna kadar doğru yanıtlar veremeyen öğrencilerin Dedekind ışınlarının gerçel sayılara dönüştürülmesine ilişkin zihinsel yapılarla yönelik soruları (3.a., 3.b. ve 3.c.) yapamadıkları gözlenmiştir. Yapılan uygulama sonucunda yalnızca 2 öğrencinin verilen rasyonel sayı kümelerinin en küçük üst sınırına karşılık geldiği dönüşümün doğrunun tüm noktalarını içerdiği yani gerçel sayıları oluşturduğu sürecinde oldukları görülmüştür.

Buna bağılı olarak aşağıda gerçel sayı nesnesinin oluşturulmasına ilişkin genetik ayrışımda yapılan inceltme sunulmuştur.

Tablo 16

Dedekind Işınlarının Gerçel Sayı Nesnesine Dönüştürülmesine Yönelik İnceltme

Varsayımsal Genetik Ayrışım	İncelti miş Genetik Ayrışım
<p>3.a. Doğru üzerinde temsil edilen bir rasyonel sayıya belirli bir dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğrudaki temsil edilmesi eylemi</p>	<p>3.a.R. Verilen 2.c.R2. ve 2.f.R2. işın nesnesinin 2.b.R2. ve 2.3.R2. sürecine geri sarmalanıp, 2.b.R1. süreciyle koordine edilerek işın nesnesinin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma süreci</p>
<p>3.b. Doğru üzerinde temsil edilen rasyonel olmayan bir sayıya dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni noktanın bir doğrudaki temsil edilmesi eylemi</p>	<p>3.b.R. Verilen 3.a.R. sürecine işını eküsüne götüren dönüşüm eylemi uygulanarak gerçel sayı nesnesinin elde edilmesi</p>
<p>3.c. Verilen 3.a. ve 3.b. eyleminin genelleştirilerek herhangi bir nokta için yapılan dönüşümün doğrunun tüm noktalarını içerdii sürecine içselleştirilmesi</p>	

Bu yapılar işın ve eküs nesnelерinin geri sarmalama mekanizması ile elde edilen süreçlerin koordine edilerek gerçel sayı nesnesinin oluşturulmasını içermektedir. Böylelikle gerçel sayıların tamlık özelliği göz önünde bulundurularak reel sayı nesnesinin elde edilmesi söz konusudur.

APOS teorisi araştırma metodolojisine göre varsayımsal genetik ayrışımın doğrulanması için yapılan bu araştırma sonucunda incelti miş genetik ayrışım elde edilmiş ve öğretim tasarımı için uygun hale getirilmiştir.

Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Bulgular

Bu bölümde incelti miş genetik ayrışıma bağılı olarak oluşturulan matematiksel görevler ve bu görevleri içeren problem durumundan oluşan öğretim uygulaması sonucunda elde edilen bulgular sunulmuştur. Bunun için öncelikle problem durumuna ilişkin sınıf tartışmalarından elde edilen bulgular verilmiştir. Daha sonra dört ayrı matematiksel görev için grup içi ve gruplar arası tartışmalardan elde edilen bulgular sunulmuştur.

Sunulan transkript örneklerinde araştırmacı öğretmen A ile, öğrenciler Ö1, Ö2, Ö3... şeklinde ve tüm sınıfın aynı anda verdiği cevaplar S ile kodlanmıştır. Oluşturulan üç grupta yer alan öğrenci kodları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 17

Gruplara Göre Öğrencilerin Dağılımları

Grup-1	Grup-2	Grup-3
Ö1, Ö2, Ö3	Ö4, Ö5, Ö6	Ö7, Ö8, Ö9, Ö10

Uygulama başlangıcında araştırmacı tarafından sınıf ortamında öğrencilere problem durumuna ilişkin ısındırma soruları sorulmuştur. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

A: Şimdi arkadaşlar resimdeki kişiyi tanıyor musunuz?

Ö10: Micheal Jordan.

A: Micheal Jordan'ın kim olduğunu biliyor muyuz?

Ö10: Gelmiş geçmiş en iyi basketbolcu.

A: Basketbolcu olduğunu biliyoruz yani. Evet muhtemelen gelmiş geçmiş en iyi basketbolcu.

A: Micheal Jordan'a ait bir belgesel vardı "The Last Dance". İzlediniz mi?

S: Hayır.

A: O belgeselde Jordan'ın hayatı anlatılıyor. Micheal Jordan çok rekabetçi bir kişilik ve her oynadığı oyunu kazanmak istiyor. Çok hırslı bir insan ve maç öncesinde... Bakın şu maç yaptığı stadın bir güvenlik görevlisi. Bu da Micheal Jordan ve maç öncesinde bir para atma oyunu oynuyorlar. Videoyu izleyelim isterseniz.

Verilen ön bilgi sonrasında öğrencilere “The Last Dance” belgeselinin problem durumunu oluşturan bölümü izletilmiştir. Video izletildikten sonra öğrencilere problem durumunun ne olabileceği sorulmuştur. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

A: Evet bir para... Madeni bir para. Parayı sırayla atıyorlar arkadaşlar. Dikkat ederseniz parayı duvara en yakın atan kazanıyor. Tamam mı? Anladık mı durumu?

S: Evet.

A: Ne düşünüyorsunuz? Buradan nasıl bir problem üretilebilir?

Ö4: Günlük hayat problemi gibi bir şey mi?

A: Fark etmez yani... Aklınıza bir problem geliyor mu bu durumla ilgili?

Ö5: Bana limit geliyor hocam biraz. Limitle ilgili bir problem geliyor.

A: Neden öyle düşündün?

Ö5: Hani bir yere ne kadar çok yaklaşırsak... gibi bir şey geliyor.

A: Başka fikri olan var mı?

Ö6: Benim aklıma olasılık geldi. Hangisi daha yakına atacak şeklinde yarışma. İkisinin de belli başlı uzaklıklara atma olasılıkları var sonuçta. Nasıl ifade edeceğimi bilemedim ama.

A: Başka fikri olan?

Ö2: Hocam belki hız ve ivmeyi kullanarak türev problemi yapabiliriz.

Transkriptlere bakıldığında videonun izletilmesinden sonra probleme ilişkin tahminlerde öğrencilerin zihninde limit, olasılık, türev gibi kavramların olduğu görülmektedir. Burada video içeriğinde “paranın duvara en yakın olması” durumu limit kavramını, “para atma ile ilgili bir yarışma” durumu olasılık kavramını, “paranın duvara en yakın atılması” olayının hız ile ilişkilendirilmesi sonucu öğrencilere türev kavramını çağrıştırdığı görülmektedir.

Problem durumu öğrencilere sunulduktan sonra, problemin anlaşılması için yapılan sınıf tartışmalarına ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir. Burada ilk olarak problemin doğru anlaşılmasına yönelik tartışmalar sunulmuştur.

Ö1: Paranın belirli bir noktası duvara... Paranın duvara, yere tamamıyla temas etmeyecek şekilde bir kısmı duvarda bir kısmı yerde olacak şekilde atarsa güvenlik görevlisi Jordan'ın atmasına gerek kalmaz.

Ö2: Ama o zaman güvenlik görevlisi oyunu kazanmış olur.

Ö1: Tamam öyle demiyor mu zaten? Tam tersi mi anladım?

Ö3: Hayır doğru anladın.

Ö1: Doğru anlamışım zaten.

A: Soru şunu diyor. İlk parayı atacak olan kişi...

Ö2: Haa tamam ben Jordan...

A: Parayı attığı zaman oyunu kazandığı belli olsun. Jordan bıraksın yani oyunu.

Ö5: Hocam tam duvara teğet bir şekilde durursa ve diğer kişi de attığı zaman o da teğet bir şekilde durursa ikisi de kazanacak.

Ö1: Berabere olur.

Ö5: Berabere olur. Hani kazanacağını bilemeyiz ki.

A: Yani ikincinin atmasına gerek var diyorsun.

Ö5: Evet.

A: En iyi ihtimalle eşitlik mi olur peki?

Ö5: Evet.

Görüldüğü gibi öğrenciler başlangıçta parayı ilk atan kişinin oyunu kazanacağı durumun var olup olmadığını anlayamamışlardır. Bunun sonrasında ilk atan kişinin "paranın duvarla temas etmesi" durumunda oyunu kazanabileceğini öne sürmüşlerdir. Tartışmalar

sonucunda “her iki yarışmacının da duvara temas edecek şekilde parayı atması” durumunda yarışmanın beraberlikle biteceği fikri ortaya çıkmıştır. Görüldüğü gibi hiçbir öğrenci “bir noktaya en yakın nokta” fikrini temel alan bir düşünce ortaya koymamıştır.

Öğrencilerden biri (Ö9), problemi tam ters şekilde anlayarak, ilk atanın kesin kaybettiği bir durum ortaya koymuştur. Problem durumu yanlış anlaşılabilir olsa da, fikrin temelinde “bir noktadan sonraki ilk nokta”nın var olması durumu söz konusudur. Aşağıda buna ilişkin transkript verilmiştir.

Ö9: Hocam bence yani... Önce atacak kişi kendi başlangıç hizasına atarsa eğer... Yani başlangıç hizasına atmak demek oyunu zaten baştan kaybetmek demektir. Yani o zaman ondan sonra gelecek kişi bir atış gerçekleştirirse bile zaten başlangıç noktasına attığı için kazanmış olacak.

A: Başlangıç noktasından kastın nedir?

Ö9: Atan kişinin durduğu nokta. Durdukları noktada ayakların dibine o parayı bırakmış olursa zaten elenmiş olur. En uzak nokta orası çünkü.

Ö10: Ama amaç kazanmaya çalışmak...

A: Soruyu anlamaya çalışalım. Duvara en yakın noktaya atan oyunu kazanır.

Ö10: Amaç şu an kazanmak.

Ö9: İşte hocam yani ilk atan kişi... güvenlik görevlisi zaten bunu yaparsa zaten direkt olarak kaybetmiş olacak o zaman Micheal Jordan'ın para atmasına gerek yok. Zaten kazanır.

A: Peki nasıl kazanır güvenlik görevlisi? Para atmasına gerek kalmadan... Sen kaybetmesi ile ilgili fikir yürüttün.

Ö10: Evet.

A: Kazanması ile ilgili bir fikrin var mı?

Ö9: Hocam duvara değerse para kazanmış olur. Çünkü değdiği için en yakın o atmış olur.

Dikkat edilirse Ö9 kodlu öğrenci “paranın atan kişinin ayaklarının dibine atılması” durumunda paranın “duvara en uzak nokta”ya atılmış olduğunu iddia etmektedir. Bu durumda araştırmacı duvara en yakın noktanın var olup olmadığını sorgulamak için “güvenlik görevlisi nasıl kazanır” şeklinde soru sormuştur. Buna bağlı olarak Ö9 kodlu öğrenci “duvara en yakın noktanın var olduğunu” iddia etmiştir.

Diğer yandan bazı öğrenciler paranın duvara “teğet” olması durumunda oyunun kazanılabileceğini veya berabere bitebileceğini söylemiştir.

Ö4: Diğeri attığında berabere kalma ihtimali var ama.

Ö2: En kötü ihtimalle de eşit olur.

A: Duvara değmek ne demek?

Ö2: Temas etmesi.

Ö4: Teğet olacak şekilde durmak.

Ö1: Duvara paralel bir şekilde eğer teğet olursa...

Ö3: O zaman yine o noktaya teğet bir şekilde atarsa ilk atan kişi... Micheal Jordan'ın atmasına gerek kalmaz çünkü o dibine bile atsa güvenlik görevlisinin attığı paranın dibine bile atsa bir arkasında olacak.

A: Teğet olmak ne demek?

Ö3: Uç noktasına değmesi demek. Uç noktasının o noktaya değmesi demek.

Buna göre Ö3 kodlu öğrencinin teğet kavramını “uç noktaya değmek” olarak belirttiği gözlemlenmektedir. Bu bağlamda öğrencinin “teğet” kavramını matematiksel bir kavram olarak kullanmadığı söylenebilir. Diğer yandan öğrencilerin birçoğu “teğet” olarak sözünü ettikleri duvara değme noktalarının birden fazla olması halinde oyunun beraberlikle biteceğini söylemişlerdir.

Ö4: Diğeri attığında berabere kalma ihtimali var ama.

Ö2: En kötü ihtimalle de eşit olur.

Ö5: Hocam tam duvara teğet bir şekilde durursa ve diğer kişi de attığı zaman o da teğet bir şekilde durursa ikisi de kazanacak.

Ö1: Berabere olur.

Ö5: Berabere olur. Hani kazanacağını bilemeyiz ki.

Bunun üzerine araştırmacı problem durumunu iki boyutlu düzlem üzerine modellemiştir. Oyunun iki boyutlu düzlemde bir doğru üzerinde oynanması durumunda sonucun ne olacağını sınıfa sormuştur.

A: Şimdi size şöyle bir soru sorayım. Bir doğru üzerindeyiz. Yani tek noktayız. Jordan ile güvenlik görevlisinin durduğu bir nokta var. Diğer bütün her yer boşluk. Zemin yok ve karşıda bir duvar var. Tek boyutta düşünürseniz bir nokta var karşıda. O noktanın üzerinde durmuyor para. Parayı da nokta olarak düşünün. Parayı attığınızda ne olacaktır?

Ö1: Boşluğa düşer.

A: Peki şimdi yavaş yavaş bu boşluğu doldurmaya çalışalım. Amacımız bu olsun. Bu boşluğu taşlarla dolduracağız. Taşlar da noktalar olacak tabii. Elinizde bir birimlik bir çubuk var. Bir birim olarak ölçülmüş bir çubuk var. Bu çubuğu kullanarak taşları yerleştiriyorsunuz. Yani çubuğu bulunduğumuz yere koyarak ucuna taşı yerleştiriyorsunuz. Bu şekilde bulunduğumuz yerden itibaren son noktaya kadar taşları yerleştirdik. Soruyu güncelledik. Şu anda taşlar var. Boşluğa düşerse kimse kazanamaz. İlk atışı yapan kişi hangi noktaya atarsa kazanır?

Ö6: Duvarın önündeki taşa atarsa.

Ö6: Parayı attıkları yerden duvara kadar olan mesafeyi bir sayı doğrusu olarak düşünüyoruz. Tamsayılar... bir, iki, üç dört... Onları taşları koyduğumuz yerler olarak mı düşündük sizin dediğimize göre?

Ö6: Elimizdeki bir birimlik çubukla koyduğumuz noktaları düşündüm sayı doğrusunda. Aklımda bu canlandı benim.

A: Peki bu durumda kim kazanır? Ya da kazanır mı?

Ö10: 0'a atan kazanır.

Ö6: İşte duvarın dibine konulan taşın atan kazanır.

Burada araştırmacı tarafından tamsayıların sayı doğrusu üzerinde inşası söz konusudur. Buna karşın Ö6 ve Ö10 kodlu öğrencilerin tamsayıların sayı doğrusundaki noktaların tamamını içermediğini bildikleri gözlemlenmektedir. Bunu tüm sınıfın bildiği aşağıdaki transkriptte görülmektedir.

A: Şimdi bir doğru üzerindeyiz. Tek boyutta düşünüyoruz. Duvar olarak işaretlediğimiz bir nokta var. O noktaya atış yapamıyoruz. Para o noktada durmuyor. O noktaya en yakın atışı yapan kazanacak. O noktadan itibaren bir birimlik çubuğu alıyorum ve ölçmeye başlıyorum. İşaretliyorum ucunu ve orayı dolduruyorum. Bir birimlik çubukla ne kadar işaretleme yapabilirseniz o kadar dolduruyorsunuz. O doldurduğumuz yerleri artık taş olarak düşünebilirsiniz. Şimdi parayı atıyorum. Boşluğa düşebilir mi?

S: Evet.

Buradan hareketle araştırmacının “bu durumda duvara en yakın nokta var mıdır?” sorusunu incelemek için sorduğu “Peki paranın boşluğa düşmediğini düşünelim. Parayı ilk atan kişinin kazanma durumu var mıdır? Varsa hangi noktaya atarsa kazanır?” sorusuna verilen cevaplar aşağıdaki gibidir.

Ö6: Duvarın önündeki ilk taşın bile atsa parayı diğerinin onun önüne atma ihtimali var.

Ö7: İki kişi aynı noktaya para atamaz diye düşünüyorum. Birisi illa ki kazanacak sonuç olarak.

Ö7: Duvara en yakın taşa atarsa kazanacak.

Ö5: Bence yoktur öyle bir nokta.

A: Neden?

Ö5: Çünkü ilk atan kişi nereye atarsa atsın ikinci atan kişi mutlaka onun bir adım önüne atabilir. (Sınıftan itiraz geliyor)

A: Yani duvara en yakın nokta yoktur diyorsun?

Ö5: Aynen.

Görüldüğü gibi Ö5 kodlu öğrenci “ilk atıcı parayı nereye atarsa atsın bir sonraki atıcının bir sonraki noktaya atabileceğini” iddia etmektedir. Bu durum öğrencinin tamsayıları bir nesne olarak problem durumunda kullanamadığını göstermektedir. Sınıftaki diğer tüm öğrenciler bu duruma itiraz etmiş ve “tamsayıların sayı doğrusu üzerindeki inşası” sürecini problem durumu ile koordine ederek nesne olarak kullanmışlardır.

Problem durumunun anlaşılması için yapılan sınıf tartışmasının ardından Görev-1’e ilişkin grup içi tartışmalara yönelik bulgular sunulmuştur.

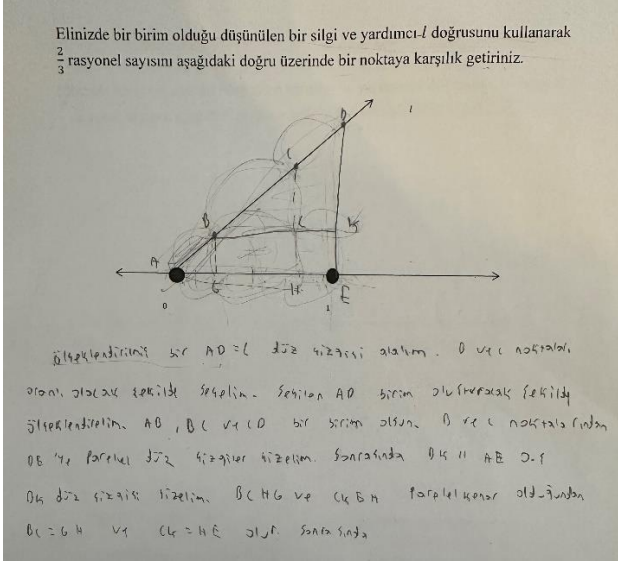
Görev-1’e Yönelik Grup İçi Tartışmalar

Bu kesimde ACE öğretim döngüsünün etkinlikler bölümünde Görev-1’e ilişkin üç grubun kendi arasında tartışmalarına yönelik bulgular sırasıyla verilmiştir.

Grup-1 için Görev-1’e yönelik çözümlerde iki farklı yol izlendiği gözlenmektedir. Bunlardan ilki Ö1 kodlu öğrencinin önerdiği yardımcı doğruyu kullanarak paraleller çizip sayı doğrusunda rasyonel sayının temsil edilmesidir.

Şekil 9

Ö1 Kodlu Öğrencinin Görev-1’e Yönelik Çözümü



Görüldüğü gibi Ö1 kodlu öğrenci silgi yardımıyla yardımcı doğru üzerinde aralarında birer birim olacak şekilde B , C ve D noktalarını işaretlemiştir. Daha sonra ilgili noktalardan aynı doğruya üzerine paralel olacak şekilde doğru parçaları çizmiştir. Bunun üzerine grup içinde doğru parçalarının paralel olduğunu kabul etmenin bir varsayım olduğu tartışması yapılmıştır.

Ö1: Bence şöyle yapalım. Burada AD doğru aldık yukarıdaki bize verilen l yi kullanarak. AD dedim. 2 tane nokta seçtim B ve C . Bunları ölçeklendirdim aynı ölçek olduğu için.

Ö3: Eşit böldüğümüzü varsayalım.

Ö1: Tamam evet. AB BC CD kendi içinde oranlı. B yi E ye paralel olacak şekilde AE ile birleştirirsek... Anladın mı?

Ö2: Nasıl birleştiriyorsun?

Ö1: Varsayım üzerinden yapacağız bunu. Bunu yapabiliriz diye düşünüyorum.

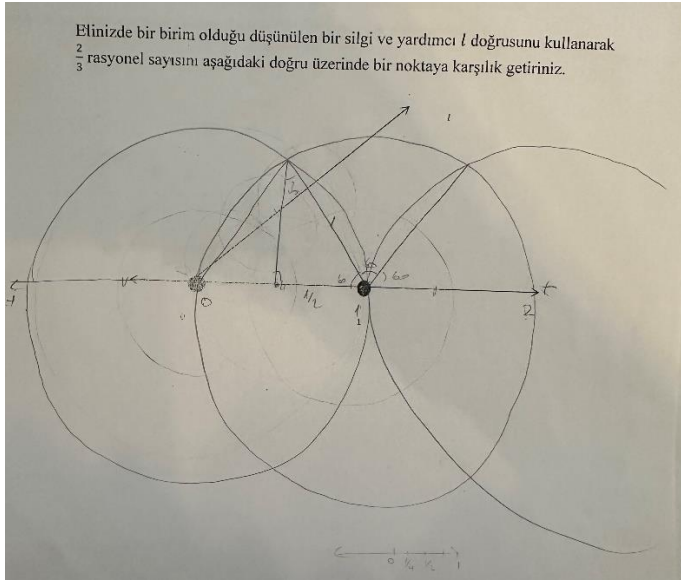
Ö2: Bilmiyorum bence varsayım üzerinden gitmemeliyiz.

Görüldüğü gibi Ö1 kodlu öğrenci BG doğru parçasını DE doğru parçasına paralel olacak şekilde ele almıştır. Burada öğrencinin bu varsayımı kendi amacına hizmet etmesi için kullandığı görülmektedir. Bunun üzerine Ö2 kodlu öğrencinin bu çözümde varsayım

yapılmaması gerektiği yönünde itirazı söz konusudur. Buradan hareketle öğrencilerin Thales teoremini kullanmak için “iki doğru arasında eşit oranlı noktalardan oluşan doğru parçalarının paralel olduğu” kabulünü kullanamadıkları görülmektedir. Matematiksel gerekçelendirmenin yetersizliği sonucunda Ö1 kodlu öğrencinin Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencileri ikna edemediği söylenebilir. Bunun üzerine Ö2 çember oluşturarak ilgili rasyonel sayıyı sayı doğrusunda işaretleme yoluna gitmiştir.

Şekil 10

Ö1 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü



Buna göre Ö2 kodlu öğrenci yalnızca bir birimlik silgi ve yardımcı doğru kullanmak yerine varsayımlara dayalı şekilde çemberler çizmiştir. Bu duruma ilişkin grup içi tartışma aşağıda verilmiştir.

Ö2: Çemberi de nasıl kullansak ya? Üçe bölmemiz gerekiyor yarıçapı mesela. Yarıçapı üçe bölmek için farklı kaç tane çember kullanmamız gerekiyor?

Ö3: Ama diyelim ki 3r olsun mesela.

Ö2: Ama varsayım üzerinden değerlendirsen buradan seçtiğin herhangi bir şey varsayım olarak değerlendirip de yapabilirsin.

Ö3: 3r diyelim mesela kafamızdan tamam mı?

Ö1: Tamam ama onu ölçeklendirelim yeter.

Ö3: Varsayımdan ötürü 3r olsun tamam mı?

Görüldüğü gibi Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenci varsayıma dayanarak çemberler yardımıyla sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayıyı bulma yolunu izlemişlerdir. Ö1 kodlu öğrencinin “ölçeklendirme” yapmak gerektiği vurgusu, varsayımsal olarak $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısının bulunmaması gerektiğine yönelik bir dışsal uyarı olarak değerlendirilebilir. Buna karşın Ö1 bu çözümün matematiksel gerekçelerinin yetersiz olduğunu yalnızca “ölçeklendirme” üzerinden ifade etmeye çalışması, Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencilerin dışsal uyarıyı dikkate almadan çözümlerine devam ettiğini göstermektedir.

Ö2: Açı düşünebilir miyiz? Acaba l doğrusunu burası 60 derecelik açı desem. Eşkenar üçgen...

Ö1: Şuna varsayım diyorsun (kendi çözümü için) senin yaptığın ne?

Ö2: Ama elimizde açıölçer var mı?

Görüldüğü gibi Ö2 kodlu öğrenci 60 derecelik bir açı olduğunu varsaymıştır. Buna karşın Ö1 kodlu öğrenci kendi çözümünde doğru parçalarının paralel olduğunu kabul edilmesine varsayım olması nedeniyle karşı çıkan grup arkadaşlarına bu örnek üzerinden gerekçe göstermiştir.

Öğrencilerin daha güçlü matematiksel gerekçelere ihtiyaç duyduğu, araştırmacı öğretmenin grup içi tartışmaya dahil olmasıyla birlikte, aşağıdaki transkriptlerde gözlemlenmektedir.

A: Elimizde açığı ölçecek bir şey de yok.

Ö2: Açığı ölçecek bir şey değil mi? Benim düşüncem olmadı o zaman.

Ö1: Hocam biz şöyle bir şey düşündük de. Ölçeklendirilmiş bir AB seçersek. Buradan paralel olacak şekilde... Zaten bunlar orantılı.

A: Bu AB , BC bunların uzunlukları nedir? Onlarla ilgili bir şey söyleyebiliyor musunuz? Çünkü elimde bir birimlik silgi var. Onunla ölçebilirsiniz.

Ö1: Ölçeklendirilmiş bir AB varsaydık.

A: Silgiyi kullanarak ölçebilirsiniz.

Burada Ö1 kodlu öğrencinin doğru parçalarının neden paralel olması gerektiğine yönelik varsayımla hareket etmesine gerek olmadığı araştırmacı tarafından dışsal bir uyarın olarak verilmiştir. Benzer şekilde silgi kullanarak ölçüm yapabileceğinin söylenmesi Ö1'in varsayımdan uzaklaşarak matematiksel gerekçelendirmelerini güçlü hale getirmiştir. Ayrıca araştırmacının silgi ile yapılan ölçümlerin sınırlılığını vurgulaması Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenci için çember çizemeyeceklerini anlamalarına sebep olmuştur. Diğer yandan Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencinin kendi çözümlerinden vazgeçtikleri ve matematiksel gerekçesi daha güçlü hale gelen Ö1 kodlu öğrencinin çözümüne yöneldikleri aşağıdaki transkriptlerde gözlemlenmektedir.

Ö1: Burayı herhangi değil de 1 birimin ölçebileceği şekilde ayarlamaya çalışıyorum şu anda.

Ö1: Şimdi $\frac{1}{2}$ 'yi bulduk ya. Aklıma ne geldi... Öklid geometrisinden gideceğiz diye düşünüyorum yine. Hani bir teorem vardı. Bir doğru aldığımızda, o doğruyu ölçeklendirebiliyorsak alttaki doğruyu da ölçeklendirebiliriz gibi bir şeydi.

Ö2: Az önce yaptığın şey değil mi bu?

Ö1: 1 birim alırız.

Buradan hareketle dışsal uyarın yoluyla öğrenciler yardımcı bir doğru ve tamsayıları kullanarak Thales teoremi ile Q rasyonel sayılar kümesi içerisindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eylemini gerçekleştirmişlerdir.

Grup-2'de yer alan öğrencilerin (Ö4, Ö5, Ö6) Grup-1'e benzer şekilde doğru üzerindeki noktaları ölçeklendirme sorunu yaşadıkları görülmektedir.

Ö5: l doğrusu üzerinde de bir birim işaretleyelim. Çünkü elimizde silgi var.

Ö4: Tamam önce onu işaretleyelim.

Ö4: Ya da burasına 1 desek. Bunları birleştirek.

Ö5: Burada üçgen çıkıyor o zaman. İkizkenar üçgen...

Ö4: Buna ikizkenar üçgen desem. Daha sonra burada tabanı eşit parçaya bölssem.

Ö5: Burası dik olur.

Ö6: O zaman burası 1, burası 1, burası da $\sqrt{2}$ olacak. O zaman buralara 45 derece diyebiliriz.

Ö5: Burayla burası eşit olduğunda dik mi oluyor? Onu kesin söyleyebiliyor musun?

Ö6: Onu ben oluşturdum.

Ö5: Dik indirdik ama 1 birim olduğunu nasıl biliyoruz?

Ö6: Burası zaten 0'dan 1'e bir birim. Silgi de bir birim ya.

Ö5: Orası 1 birim olsa bile dik olmak zorunda mı?

Görüldüğü gibi Ö5 kodlu öğrenci ikizkenar üçgen yardımıyla sayı doğrusu üzerindeki oranları bulmaya çalışmaktadır. Daha sonra Ö4 ve Ö6 kodlu öğrenciler ikizkenar üçgenden bir dik indirerek, ölçüm yapmadan, kenarı eşit böldüğünü varsaymıştır. Bu noktada Ö5 kodlu öğrenci inilen dikmenin silgi ile ölçülemeyeceğini belirtmiştir. Bu durumda öğrenciler ölçeklendirme ile ilgili matematiksel gerekçelendirmelerin yetersiz kalması nedeniyle, problemin ikizkenar üçgenler oluşturularak çözülmesinden vazgeçmişlerdir. Ek olarak öğrenciler $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısı özelinde çözümler üretmeye çalışmış ve eşkenar üçgenlerin, çemberin ve ikizkenar üçgenlerin açı ve uzunluk ilişkilerini kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmışlardır.

Ö4: Burada ikizkenar üçgen yerine bir eşkenar üçgen yapsak? Biz eşkenar üçgeni nasıl oluşturuyorduk Öklid geometrisinde?

Ö6: Çember çiziyorduk.

Ö4: Burada nasıl bir çember çizebiliriz?

Ö6: Bence çember çizmek yerine...

Ö4: Eşkenar üçgeni çizeceğiz ya. Çizdikten sonra daha sonra onu iki parçaya bölebiliriz. Ya da üç kenara da bölebiliriz.

Ö5: Hem şu doğruyu hem de şu doğruyu kullanarak eşkenar üçgen mi çizelim?

Ö4: Aynen. Çizdiğimiz şu kenarın da bu ikisine eşit olduğunu gösterelim.

Ö6: Ya da silgiyi mesela burayla bura arasına koyup eşit olduğunu gösterebiliriz.

Ö4: İşte onu ispatlamamız gerekecek.

Ö4: Burası eşit olursa burası 60 derece olacak. 30-60-90.

Ö6: Peki buradan buraya bir şey çizsek...

Ö4: Ama $\frac{2}{3}$ diyor. Biz böyle $\frac{1}{2}$ ' yi buluruz.

Burada üretilen çözümlerin $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısı özelinde işe yaraması durumunda dahi, rasyonel sayılar kümesi içerisindeki noktaları bir doğru üzerinde temsil etme eyleminin gerçekleştirildiğinden söz edilemez. Burada amaç farklı rasyonel sayılar için aynı çözümün genelleştirilerek kullanılması, yani ilgili eylemin içselleştirilerek rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi zihinsel sürecine ulaşılmasıdır. Bu bağlamda Grup-2'de yer alan öğrencilerin genelleştirilebilir bir çözüme ulaşamadıkları görülmektedir.

Çözüm sürecinin bir bölümünde Ö6 kodlu öğrencinin Thales teoremini kullanmak gerekliliğini söylediği gözlenmiştir.

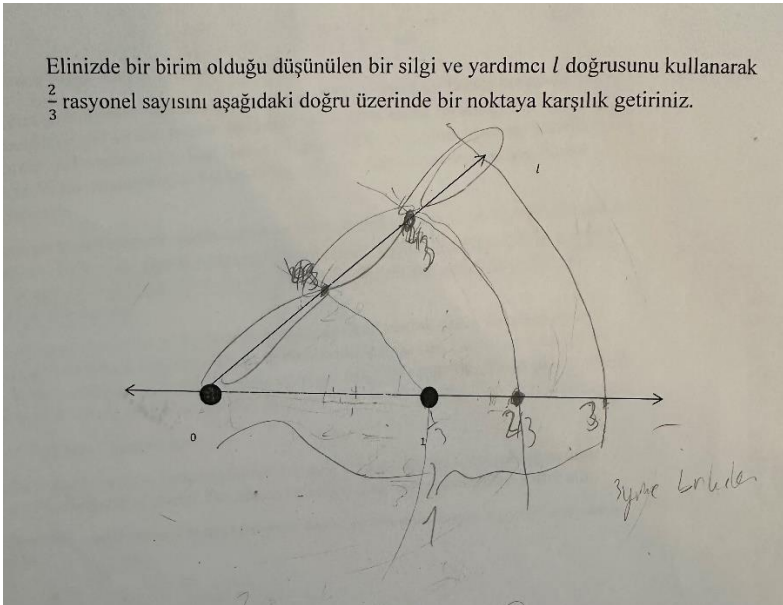
Ö6: Biz Öklid Geometrisinde bir doğruyu tam ortadan ikiye nasıl ayırıyorduk? Bence biz silgiyi kullanarak doğru üzerinde benzerlik yapmamız gerekiyor.

Buna karşın Ö6 kodlu öğrencinin daha alt düzeyde yer alan Thales teoremi süreçlerinin problemin çözüm süreciyle koordine edilememesinden kaynaklı rasyonel sayının sayı doğrusu üzerinde temsil edilmesi eylemini yapamadığı görülmektedir.

Grup-3'te yer alan Ö7 kodlu öğrenci ise Ö6'nın aksine ölçeklendirme sürecine Thales teoremi eylemini uygulayamamıştır. Aşağıda Ö7 kodlu öğrencinin çözümü yer almaktadır.

Şekil 11

Ö7 Kodlu Öğrencinin Görev-1'e Yönelik Çözümü



Çözüme bağlı olarak tartışmalardan elde edilen transkriptler aşağıda sunulmuştur.

Ö7: Benim aklıma bir şey geldi. 2 bölü 3, 2 bölü 3... 6 ya kadar kaç tane oluyor.

Tamsayıya tamamlasak. Silgiyle onu ölçsek?

Ö7: Yani bakın şunu demeye çalışıyorum işte. Şuradan iki tane silgi kullandık.

Bununla bir çember çizdik. Sonra burayı üç parçaya bölmemiz gerekiyor.

Ö9: Bence çember çizmek mantıklı.

Ö10: Bu silgiyi l doğrusu üzerinde kullansak.

Grup	Öğrenci	Zihinsel Yapı	Gerekçe
Grup-1	Ö1	Eylem 1.a.R	Araştırmacının yardımcı l doğrusunu ve tamsayıları kullanması gerektiği uyarısı ile birlikte bu süreci Thales teoremi süreci ile koordine ederek rasyonel sayıları bir doğru üzerinde temsil etmiştir. Burada dışsal uyarılar, grup içi tartışmalarda Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencilerin matematiksel gerekçeyi yeterli bulmaması ve bunun üzerine araştırmacının yardımcı doğruyu ve tamsayıları kullanarak ölçeklendirme yapabileceği fikrini belirtmesidir.
	Ö2, Ö3	Eylem Öncesi	1.a.R eylemi öncesindeki şemalarda yer alan tamsayılar sürecinde yaşanan problemler nedeniyle, ilgili eylem gerçekleştirilememiştir. Burada yaşanan problem tamsayıların yardımcı doğru üzerinde temsil edilmesine rağmen ölçeklendirme ile içselleştirilerek bir süreç haline getirilememesidir.
	Ö4, Ö5	Eylem Öncesi	Öğrencilerin 1.a.R eyleminde rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil etmesi eylemine ilişkin genelleştirilebilir bir çözüm üretmedikleri gözlenmiştir. Çözüm süreçleri yalnızca $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısının elde edilmesine yöneliktir. Bu durumun tamsayılar süreci ile tamsayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecinin koordine edilememesinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir.
Grup-2	Ö6	Eylem Öncesi	Öğrencinin Thales teoremi süreçlerini problem durumuyla koordine edememesinden kaynaklı 1.a.R eylemini yapamadığı görülmüştür.
	Ö7	Eylem Öncesi	Ö6 kodlu öğrencinin aksine, yardımcı doğruları tamsayılar sürecini kullanarak ölçeklendiren Ö7 kodlu öğrenci bu sürece Thales teoremi eylemini uygulayamadığı için 1.a.R eylemini gerçekleştirilememiştir.
Grup-3	Ö8, Ö9, Ö10	Eylem 1.a.R	Grup içi tartışmalarda dışsal uyarı olarak Ö10 kodlu öğrencinin yardımcı doğrunun kullanılması gerekliliğini belirtmesi ve Ö7 kodlu öğrencinin tamsayılar sürecini yardımcı doğruyu ölçeklendirmek için kullanması üzerine Ö8 kodlu öğrencinin bu iki süreci koordine ederek ilgili eylemi gerçekleştirdiği gözlenmiştir.

Görev-1'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar

Burada Görev-1'e ilişkin çözümlerini tamamlayan grupların araştırmacı öğretmen rehberliğinde gruplar arası tartışmalara ilişkin bulgular verilmiştir.

Grup içi tartışmalar sonucunda Grup-2 göreve ilişkin çözümü yapamamasına karşın gruplar arası tartışma sonucunda Grup-1'in çözümüne bağlı olarak rasyonel sayıları doğru üzerinde temsil etme eylemini gerçekleştirmiştir. Aşağıda buna ilişkin transkript verilmiştir.

Ö1: (Çözüm sürecini anlatıyor).

A: Ne diyorsunuz?

Ö5: Mantıklı.

A: Nedir mantıklı olan.

Ö5: Paraleller çizmek.

Ö6: Silgiyi nasıl kullandınız?

Ö1: Silgiyi şu üstteki uzunluğu ölçeklendirmek için kullandık.

Dikkat edilirse grup içi tartışmalarda Ö6 kodlu öğrenci Thales teoremi kullanarak benzerlik yapılması gerektiğini söylemiştir. Buna karşın bu durumu tamsayıların yardımcı doğru üzerinde temsil edilmesi süreci ile koordine edemediği gözlenmiştir. Burada Ö6 kodlu öğrencinin, gruplar arası tartışma esnasında, Ö1 kodlu öğrenciye silgiyi nasıl kullandığını sorması üzerine; Ö1 kodlu öğrenci, tamsayıları yardımcı doğru üzerinde temsil etmek için kullandıklarını söylemiştir. Buna bağlı olarak Ö6 kodlu öğrenci bu dışsal uyarana ile tamsayıların doğru üzerinde temsil edilmesi süreçlerine Thales teoremi eylemini uygulayarak rasyonel sayıları doğru üzerinde temsil etme eylemini yaptığı gözlenmiştir.

Gruplar arası tartışmalar sonucu bütün gruplar Görev-1'e ilişkin 1.a.R eylemini gerçekleştirmişlerdir. Bunun üzerine araştırmacı bu eylemi tekrarlayarak herhangi bir rasyonel sayının doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine ilişkin bir soru sormuştur.

A: Aynı soruyu aynı yöntemle $\frac{2}{5}$ i bulacak şekilde yapabilir misiniz mesela?

S: Evet.

Ö6: l doğrusu üzerinde silgiyle 5 nokta yapacağız. Sonra o l doğrusunun bittiği yerden 1'e çizgi çekeceğiz. Sonra ona paralel olacak şekilde her silgi boylarını uzatacağız. Böylece 5 parçaya bölünmüş olacak.

A: Peki bu yöntemle $\frac{a}{b}$ tipinde b sıfırdan farklı olmak üzere, bütün sayıları elde edebilir miyiz?

S: Evet.

Ö10: Sonuç olarak oradaki payda bir birimlik silgiyle ölçülebiliyorsa hepsini yapabiliriz.

Görüldüğü gibi öğrencilerin, 1.a.R eylemini tekrarlayarak, $a, b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ tipinde tüm rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine içselleştirdikleri gözlemlenmektedir. Bunun üzerine araştırmacı problem durumuna geri dönerek, Görev-1'deki matematiksel çözüme bağlı olarak problemin çözüm sürecine yönelik sorular sormuştur.

A: Şimdi arkadaşlar sizden istediğim şu. Sorumuza geri dönüyoruz. Bizim burada boşluklarımız vardı. Taşlarla doldurmaya devam ediyoruz. Bu Görev-1 deki yöntemle buralara taş doldurmaya devam etsek, bu durumda ilk kişi parayı attığında kazanması için hangi noktaya atması lazım? Öyle bir nokta var mıdır?

Ö1: Hocam burada biz yaptığımız yöntemle rasyonel sayıları ölçeklendirdik. Ama bu doğru reel sayı doğrusu. İçerisinde sadece rasyonel sayılar yok ki.

Ö1: İşte biz rasyonel sayıları koyduğumuzda her türlü boşluk oluyor arada.

A: Parayı attığımda boşluğa düşme olasılığı var mıdır yani?

S: Vardır.

Ö6: Çünkü rasyonel sayıların arasında boşluklar vardır.

Görüldüğü gibi problem durumunda “para atıldığında boşluğa düşebilir mi?” sorusuna öğrenciler rasyonel sayıların doğrunun tamamını temsil etmediğinden düşebilir cevabını vermişlerdir. Bu durum rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsil sürecine içselleştirilmesine bağlı olarak rasyonel sayıların tam olmadığına anlaşılmasından kaynaklanmaktadır. Buna karşın Ö2 kodlu öğrenci yalnızca rasyonel sayıların temsil ettiği bir doğru üzerinde oynanan para oyununda ilk atan kişinin yarışmayı kazanabileceği bir nokta olduğunu iddia etmiştir.

Ö2: Hiçbir zaman tam dolduramadığımız için... Her zaman boşluklar oluşacağı için. Birisinin kazanma ihtimali yine en yakın taş atmış olduğunda gerçekleşir. Boşlukları hiçbir zaman tam olarak dolduramadığımız için en yakın koyduğumuz taş atan yine kazanmış olur çünkü daha fazlası yine boşluğa denk geldiği için oraya atamaz yani.

A: Kazanır mı diyorsun yani hala?

Ö2: Evet.

Ö2 kodlu öğrencinin cevabına bakıldığında rasyonel sayıların bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemini tekrarlayarak rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsil sürecine içselleştiremediği için rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini inşa edemediği görülmektedir. Buna karşın Ö1, Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler parayı ilk atanın kazanamayacağını söylemişlerdir. Aşağıda buna ilişkin transkript verilmiştir.

Ö1: Hocam aksiyomla söyleyebilir miyim bunu? İki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Buna göre baktığımızda en yakın taş olmuyor. Yani kazanamıyor. Sürekli ondan yakın taş var.

A: Teşekkürler. Başka fikri olan?

Ö7: Bence sonsuz sayıda taş dizebiliriz bu yöntemle.

A: Ne demek istedin?

Ö7: Yani bu birimleri küçültebiliriz, büyütebiliriz. Mesela $\frac{1}{3}$ lük birim de alabiliriz. $\frac{1}{4}$ lük birim de... O yüzden sonsuz sayıda taş koyabiliriz. O yüzden kazanan olmaz.

Ö6: Ben de öyle düşünüyorum.

Dikkat edilirse Ö1 kodlu öğrenci “iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır” ifadesini aksiyom olarak ele almış ve buradan hareketle duvara en yakın nokta olamayacağını iddia etmiştir. Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler de rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecini problem durumuna uyarlayarak, ilk atananın yarışmayı kazanamayacağını belirtmiştir.

Görev-1’e yönelik gruplar arası tartışmanın ardından Görev-2’ye ilişkin grup içi tartışmalara ilişkin bulgular sunulmuştur.

Görev-2’ye Yönelik Grup İçi Tartışmalar

Burada ACE öğretim döngüsünün etkinlikler bölümünde Görev-2’ye ilişkin üç grubun kendi arasında tartışmalarına yönelik bulgular sırasıyla verilmiştir. Grup-1’in Görev-2’de yer alan ilk soruya ilişkin tartışmaları aşağıda verilmiştir.

Ö2: Bu ne tam doğru ne de kesikli doğru.

Ö1: Şey işte. Tek tek tek nokta nokta. Arası çok az ama.

Ö2: Evet. Şöyle düşünelim. İki rasyonel sayı arasında muhakkak bir tane daha rasyonel sayı olduğundan aslında arasının dolu olması gerekiyor. İrrasyonel sayılar olduğundan aynı zamanda boş olması gerekiyor.

Ö1: Mesela bu aralıkta yok. Dolayısıyla böyle yapacağız. Şurası da 0 olsun. Sen ne düşünüyorsun?

Ö3: Sizin gibi.

Ö2: Nokta nokta şeklinde mi yoksa çizik çizik mi?

Dikkat edilirse Ö2 kodlu öğrencinin “iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır” düşüncesini kullanarak rasyonel sayıların bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil

edilmesi sürecinde boşluk olmaması gerektiğini iddia etmektedir. Aynı zamanda doğru üzerinde irrasyonel sayıların da temsil edilmesi gerektiği için rasyonel sayılar arasında boşluk olması gerektiğini söylemektedir. Buna karşın “nokta nokta mı yoksa çizgi çizgi mi” şeklinde bir soru sormuştur. Bu durum Ö2 kodlu öğrencinin rasyonel sayıların bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecini, irrasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi süreci ile koordine edemediği için rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini elde edemediğini göstermektedir. Bunun dışında öğrencilerin Görev-2’de yer alan ilk soruyu doğru şekilde yaptıkları görülmüştür.

Diğer yandan Görev-2’de yer alan ikinci soruya ilişkin Grup-1’in çözümü aşağıda verilmiştir.

Şekil 13

Grup-1’in Görev-2’de İkinci Soruya Yönelik Çözümü

Bir pergeli 90 derece açı olarak bir kenarı bir sayı doğrusu üzerine yerleştirilip diğer ucuna sayı doğrusu üzerinde karşılık getirilen nokta rasyonel sayı mıdır? (Pergelin bir ayağının uzunluğu bir birim kabul edilsin.) Bu sayıdan daha küçük olan rasyonel sayılar kümesi bu sayı doğrusu üzerinde nasıl temsil edilir?

$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere...

$\sqrt{t^2+1} \in \mathbb{Q}$ ise pergelin ucu rasyonel sayıya gelebilir.

$t = \sqrt{3}$ seçilirse $|AB| = 2$ olduğundan pergelin ucu rasyonel sayıya gelebilir.

$t = 1$ seçilirse $|AB| = \sqrt{2}$ olduğundan pergelin ucu rasyonel sayıya gelemez.

Buna göre öğrenciler soruda pergelin ayaklarını bir birim kabul etmeyerek soruyu çözmeye çalışmışlardır. Buna ilişkin grup içi tartışmalardan elde edilen transkript aşağıda sunulmuştur.

Ö2: Ben de şuraya t dedim. t kare artı 1’in karekökü rasyonel sayının elemanı ise nokta rasyonel sayıya denk gelir. Ama kök dışına çıkmazsa...

Ö1: $t = 1$ alırsak zaten... Ters örnekle kanıt yapılmış olur.

Ö2: $t = 1$ olursa rasyonel olmadığını göstermiş oluruz.

Ö3: Aaa... Hiçbir sayının 1 ile toplamı hiç kök dışına çıkamıyor ki.

Ö2: Aynen. O zaman asla olamaz.

Ö3: $\sqrt{3}$ alalım. $\sqrt{3}$ alırsak karesi 3'tür.

Ö2: $\sqrt{3}$ alabiliyoruz doğru. Rasyonel sayı olmak zorunda değil. O zaman $t \in R$

Öğrenciler pergelin ayak uzunluğunu 1 birim almamış olsa dahi, t olarak aldıkları uzunluğa bağlı olarak işaretledikleri noktanın rasyonel olmak zorunda olmadığını göstermişlerdir. Buna bağlı olarak Grup-1'de yer alan öğrencilerin rasyonel olmayan sayıları Pisagor teoreminden yararlanarak bir doğru üzerinde temsil etme eylemini gerçekleştirdikleri söylenebilir.

Görev-2'de yer alan son soruya ilişkin Grup-1'de yer alan öğrencilerin tamamının soruyu doğru yapmasına karşın, rasyonel sayıların sayı doğrusunda temsiline yönelik sayı doğrusunun türü ile ilgili tartışmaları aşağıda verilmiştir.

Ö3: Hocam doğru üzerindeki temsili doğru ne demek?

A: Doğru üzerinde rasyonel sayıların temsil edilmesi.

Ö3: Kendimiz mi seçeceğiz o temsili?

Ö3: Bir reel sayılar doğrusu seçeceğiz. Onun üzerindeki rasyonel sayılar...

Ö1: Bütün noktaları içermez. İçermiyor değil mi?

Ö3: Sonuç olarak bu temsili doğruyu rasyonel sayı olarak alırsak içerir.

Dikkat edilirse Ö3 kodlu öğrencinin doğrunun tanımına yönelik şemalarında eksiklik olduğu görülmektedir. Buna bağlı olarak doğruyu rasyonel sayılardan oluşan noktalar olarak alabileceğini ifade etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı doğrunun ne demek olduğunu sormuştur. Buna ilişkin tartışmalar aşağıda sunulmuştur.

A: Şimdi soru şöyle diyor. Rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsili... Bu temsil, doğrunun bütün noktalarını içerir mi?

Ö2: Bu R doğrusu mu?

A: Doğrudan ne anlıyorsan.

Ö1: O zaman içermiyor.

Ö2: Yani kesiksiz çizgi olan doğru.

A: Doğru deyince ne anlıyorsun?

Ö2: Doğru dediğimizde... R' yi düşünürsem. R' nin elemanları Q' da olmadığı için... İçermez.

Burada öğrencilerin doğruya ilişkin şemalarında eksiklik olduğu görülmektedir. Öğrenciler doğruyu gerçel sayıların elemanları ile oluşturmaktadır. Öğrenciler doğruyu sayı doğrusu olarak kabul etmiş ve bu sayının türüne göre doğrunun şeklini belirlemişlerdir. Burada doğrunun tanımına yönelik şemalar eksik olsa dahi öğrencilerin soruyu doğru yaptıkları görülmektedir. Buna rağmen Ö2 kodlu öğrencinin doğrunun türünü bilmediği için soruya vereceği cevabı netleştiremediği görülmektedir.

Ö2: Ama irrasyonel sayılar doğrusu da olabilir. Ya da tamsayılar doğrusu... İçinden temsili olarak seçtiğim doğru parçası olmuş oluyor. Çünkü iki ucu açık olduğunda zaten aynı doğru olmuş olur. Çakışık olmuş olur.

Ö1: Ben içermez diyeceğim.

Ö3: İçermez onu biliyorum. Çünkü irrasyonel sayılar da var bunun içerisinde.

Burada Ö1 ve Ö3 kodlu öğrencinin rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecinin rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme işlemi ile sarmalanarak rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini oluşturduğu görülmüştür. Buna karşın Ö2 kodlu öğrencinin doğrunun tanımına ilişkin şemalarında yaşadığı problem nedeniyle ilgili süreci rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesine sarmalayamadığı gözlenmiştir.

Grup-2'nin Görev-2'de yer alan ilk soruya ilişkin tartışmaları aşağıda verilmiştir.

Ö6: Sayı doğrusu çizeceğiz değil mi?

Ö4: Evet. Sayı doğrusu.

Ö6: Bir şey diyeceğim. Araları boşluk olacak.

Ö4: Aralar boşluk olacak.

Ö5: İrrasyoneller de var bunun içinde. Ama çok sıkı bir boşluk olabilir.

Ö4: Çok da önemli değil o bizim için. Önemli olan boşluklu olduğunu göstermek.

Ö6: Aynen.

Ö5: Ama ben çok sıkı boşluklu yaptım.

Öğrencilerin hepsinin (Ö4, Ö5, Ö6) bu soruyu doğru yaptıkları görülmüştür. Burada dikkat çeken nokta Ö5 kodlu öğrencinin boşlukların çok sıkı olması gerektiği vurgusudur. Bu durum Ö5 kodlu öğrencide rasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin zihinsel yapının nesne düzeyinde olduğunu göstermektedir.

Diğer yandan Grup-2'de yer alan öğrencilerin ikinci soruda pergelin bir ayağının 1 birim alınmamasından kaynaklı olarak ilgili noktanın rasyonel olup olmadığını bilmediklerini belirttiği görülmüştür.

Ö5: Bu noktanın rasyonel mi olup olmadığını bilmiyoruz. Boşluğa da denk gelebilir.

Ö6: İrrasyonel de olabilir orası rasyonel de olabilir. Biz sadece şuranın kesikli olduğunu biliyoruz. Rasyonel sayı dediği için.

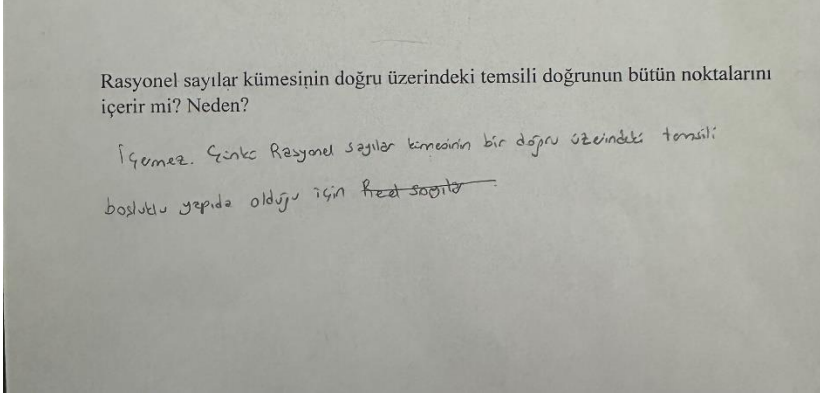
Görev-2'de yer alan ikinci soru rasyonel olmayan sayıların varlığına ilişkin bir yapı oluşturma amacına hizmet etmemiş olsa da, öğrencilerin genetik ayrışımında yer alan rasyonel olmayan sayıları Pisagor teoreminden yararlanarak bir doğru üzerinde temsil etme eylemini gerçekleştirdikleri görülmektedir.

Öte yandan Grup-2'de yer alan öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecini rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme eylemi ile sarmalayarak, rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil

nesnesi yapısını oluşturdıkları görülmektedir. Buna ilişkin Görev-2'de yer alan üçüncü sorunun çözümü aşağıda verilmiştir.

Şekil 14

Grup-2'nin Görev-2'de Üçüncü Soruya Yönelik Çözümü

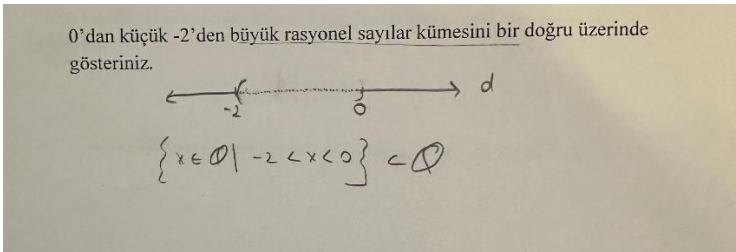


Görüldüğü gibi öğrenciler rasyonel sayıların boşluklu yapıda olmasından dolayı rasyonel sayıların doğrunun bütün noktalarını içermediğini ifade etmiştir. Bu bağlamda rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesi yapısı, rasyonel sayıların tam olmadığı durumunu içermektedir.

Grup-3'te yer alan öğrencilerin Görev-2'ye yönelik birinci soruyu doğru yaptıkları gözlenmiştir. Aşağıda öğrencilerin birinci soruya ilişkin çözümü verilmiştir.

Şekil 15

Grup-2'nin Görev-2'de Birinci Soruya Yönelik Çözümü



Burada Grup-3'te yer alan öğrenciler ilgili kümeyi hem cebirsel olarak hem de doğru üzerinde temsili olarak göstermişlerdir.

Görev-2'de ikinci soru için Ö10 kodlu öğrencinin pergelin ucu hangi nokta alınırsa alınsın diğer ucunun rasyonel sayı olamayacağını iddia etmiştir. Bu fikre diğer arkadaşlarının da katıldığı gözlenmiştir.

Ö10: Herhangi bir noktaya getirdiğinde rasyonel sayı değildir. Çünkü $45 - 45 - 90$ üçgeni olduğunda a noktasından başlasak, kenar uzunlukları $a - a - a\sqrt{2}$ olur. Sonuç olarak $a\sqrt{2}$ olacak. Dolayısıyla irrasyonel sayı olur.

Ö7: Bir kenarının rasyonel sayı olduğunu nereden biliyorsun? Onu bilemeyiz. Rasyonel olabilir de olmayabilir de.

Ö10: Pergelin kenarları eşittir. O zaman rasyonel sayı mıdır?

Ö7: Değildir.

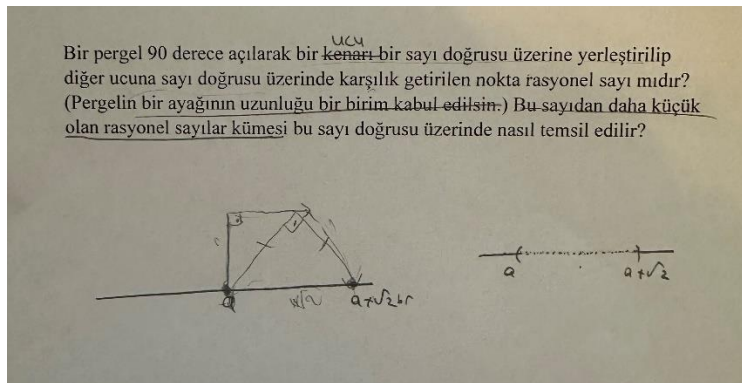
Ö10: Başlangıç noktasını hangi sayı kabul edersen et, ona $\sqrt{2}$ eklediğinde irrasyonel olacaktır.

Ö9: Buraya a birim dersek pergelin ucu $a + \sqrt{2}$ birim olacaktır. Yani irrasyonel.

Görüldüğü gibi Ö10 kodlu öğrenci irrasyonel sayıların toplama işlemine göre kapalı olduğunu iddia etmiştir. Benzer şekilde Ö9 kodlu öğrenci de bu fikre katılmıştır. Grup olarak ikinci soruya yönelik yaptıkları çözüm aşağıda verilmiştir.

Şekil 16

Grup-2'nin Görev-2'de İkinci Soruya Yönelik Çözümü

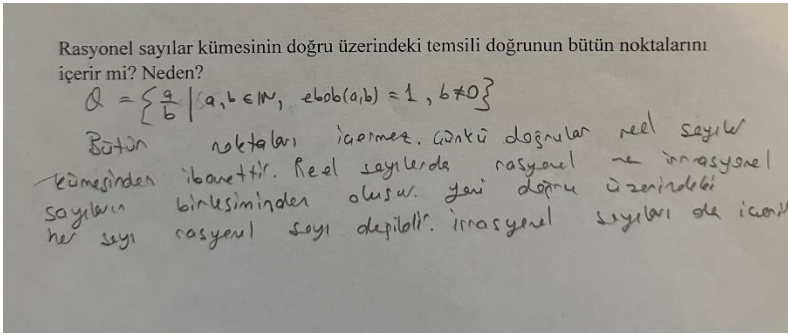


Burada irrasyonel sayılarla yapılan işlemlere yönelik şemalarda eksiklik olduğu söylenebilir. Bu durum iki irrasyonel sayı sürecinin koordine edilememesinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir.

Diğer yandan Görev-2'de yer alan üçüncü soru için Grup-3'teki öğrencilerin çözüm süreçleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 17

Grup-2'nin Görev-2'de Üçüncü Soruya Yönelik Çözümü



Grup-3'te yer alan öğrenciler rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerindeki temsiline doğrunun bütün noktalarını içermediğini söylemektedir. Gerekçe olarak da gerçel sayıların sayı doğrusu ile eşlendiğini ve gerçel sayıların yalnızca rasyonel sayılardan oluşmadığını belirtmişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini zihinsel yapılarında oluşturdukları söylenebilir.

Üç grupta yer alan öğrencilerin grup içi tartışmalarda Görev-2'ye ilişkin zihinsel yapılarını ve gerekçelerini gösteren tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 19

Görev-2'ye İlişkin Öğrencilerin Zihinsel Yapıları

Grup	Öğrenci	Zihinsel Yapı	Gerekçe
Grup-1	Ö1, Ö3	Nesne 1.d.R	Doğrunun tanımına yönelik eksik şemalara rağmen, rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecinin rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme eylemi ile sarmalanarak rasyonel

			sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini oluşturmuşlardır.
	Ö2	1.a.R ve 1.b.R eylemlerinin içselleştirilerek rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi süreci	Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesini sürecini doğrunun tanımına ilişkin eylemle sarmalayamamış ve rasyonel sayı sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini oluşturamamıştır. Burada problem, öğrencinin doğrunun tanımına yönelik şemalarında eksiklik olmasından kaynaklanmaktadır. Ek olarak, rasyonel sayıların bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesini sürecini, irrasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi süreci ile koordine edemediği için rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini elde edemediği de gözlenmiştir.
	Ö4, Ö6	Nesne 1.d.R	Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesini sürecinin rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme eylemi ile sarmalanarak rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini oluşturmuşlardır.
Grup-2	Ö5	Nesne 1.d.R ve Rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesi	Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesini sürecinde iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır eylemini uygulayarak öğrencinin noktalar arası boşlukların çok az olacağını iddia etmesiyle sarmalayarak rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini oluşturması söz konusudur.
	Ö8	Nesne 1.d.R	Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesini sürecinin rasyonel sayıların alt kümelerini birleştirme eylemi ile sarmalanarak rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesini oluşturmuştur.
Grup-3	Ö7, Ö9, Ö10	Nesne 1.d.R	Her ne kadar 1.d.R nesnesine ilişkin soruyu çözmüş olsalar da, Ö10 kodlu öğrencinin irrasyonel sayıların toplama işlemine göre kapalı olduğunu iddia etmesi ile birlikte iki irrasyonel sayı sürecinin koordine edemedikleri gözlenmiştir.

Görev-2'ye Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar

Burada Görev-2'ye ilişkin çözümlerini tamamlayan grupların araştırmacı öğretmen rehberliğinde gruplar arası tartışmalara ilişkin bulgular verilmiştir.

Görev-2'nin ilk sorusunu bütün öğrenciler yaptığı için gruplar arası bir tartışma olmamıştır. Görev-2'nin ikinci sorusunda Ö10 kodlu öğrencinin iki irrasyonel sayının toplamının irrasyonel olacağı düşüncesi Ö2 kodlu öğrenci tarafından ters örnekle çürütülmüştür. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

Ö10: [...]Şimdi burada 0'dan da başlatsak başka bir a sayısından da başlatsak sonuç olarak şu aradaki değer irrasyonel sayı oluyor.

Ö2: Ama başlattığımız nokta $1 - \sqrt{2}$ olursa...

Ö10: Mesela şu an bittim ben.

Bunun dışında öğrencilerin pergelin iki ayağını da 1 birim kabul ettikleri ve başlangıç noktasını 0 olarak aldıkları takdirde bir irrasyonel sayının elde edilmesi eylemini gerçekleştirdikleri görülmektedir.

Görev-2'nin üçüncü sorusuna ilişkin rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecinde öğrencilerin doğru tanımını yapamadıkları görülmüştür.

Ö2: Kesiksiz çizgi olarak düşündüğümüzde öyle. Rasyonel sayılar doğrusu dediğimizde üzerinde rasyonel sayıların işaretli olduğu doğruları seçmiş oluyoruz. Tamsayılar dediğimizde farklı oluyor ama doğru dediğimizde direkt kesiksiz çizgi anlamında reel sayılar düşündük. O yüzden karşılaştırmayı tamamen buna göre yaptık.

A: Bu noktada şu soruyu sormam lazım. Doğru nedir?

Ö3: Sonsuza giden şeye doğru diyoruz. Reel sayılar da eksi sonsuz artı sonsuz arasında olduğu için aynı şey oluyor. Yani doğru reel sayıdır.

Ö1: Doğru sonsuza kadar gittiği için...

Ö2: Doğrudan kastımız irrasyonel sayılar kümesiye...

Burada öğrencilerin doğru kavramına ilişkin tanımı yapamadıkları gibi, doğrunun sürekliliğini aksiyom olarak düşünmedikleri görülmektedir. Burada Ö10 kodlu öğrencinin doğrunun sürekli olması gerektiği yönünde görüş bildirdiği görülmektedir.

Ö10: Peki hocam şöyle bir şey var. Rasyonel sayılar doğrusu diye bir şey olamaz. O zaman doğru nokta nokta olur. Öyle bir doğru olamaz.

Ö2: Rasyonel sayılar kümesini temsili olarak düşündüğümde iki ucu yine sonsuza giden ama bütün noktaları kapsamayan...

Ö10: İşte o zaman nokta nokta oluyor. Doğru diyemiyoruz o zaman.

Görev-2'ye yönelik gruplar arası tartışma sonucunda araştırmacı problem durumuna geri dönerek Görev-2'de yapılan matematiksel sonuçlara bağlı olarak sınıf tartışması başlatmıştır. Buna göre araştırmacı Görev-2'de rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsiline bağlı olarak problem durumunda zeminin taşlarla doldurulmasına devam edildiğini söylemiştir. Buradan hareketle zeminin tamamının taşlarla doldurulup doldurulamayacağı tartışmaya açılmıştır. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

A: Şu ana kadar yaptık? 1 birimlik çubuklarla taş yerleştirdik. Paralel doğrularla rasyonel sayıları buldunuz. Onlarla da doldurduk dediniz. En son soruda rasyonel sayılar bunun tamamını içermez diye konuştunuz. Şu anda atıcı parayı attığında boşluğa düşebilir mi hala?

S: Evet.

A: Tersini düşünen var mı?

S: Yok.

A: Peki o boşluklar nasıl doldurulabilir?

Ö2: Bence doldurulamaz.

Ö6: Şimdi rasyonel sayıları koymuştuk. O boşluklar bizim dediğimize göre irrasyonel sayılar.

Ö2: Rasyonel sayıları nasıl doldurduk ki?

Ö6: Az önce yaptığımız etkinlikle işte.

Ö10: İlk başta yaptığımız etkinlikle rasyonel sayıları doldurduk. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ filan diye.

Görüldüğü gibi Ö6 ve Ö10 kodlu öğrenci rasyonel sayıların Görev-1 ve Görev-2'de yapılan etkinliklerle doldurulduğunu söylemiştir. Bunun üzerine Ö2 rasyonel sayıların hepsinin elde edilemeyeceğini iddia etmiştir.

Ö2: Hocam çünkü tamamen doldurulamaz. Somut bir şeyden bahsediyoruz. Belli bir uzunluğu olan bir şey. Orayı doldurmaya çalışıyoruz ama her zaman arada başka sayılar da olduğu için.

A: Nedir o başka sayılar?

Ö2: Mesela hocam, 0 ile 1 arasında birçok rasyonel sayı var. Biz mesela $\frac{1}{2}$ ile mi hepsini doldurduk. Tamamen kapatmıyor. Nasıl kapatabiliyoruz?

A: Sen bütün rasyonel sayıları belirleyemeyiz iddiasında mısın?

Ö2: Evet.

A: Neden?

Ö10: Çünkü sonsuz sayıda rasyonel sayı var diyorsun.

Ö2: Evet.

Ö10: O nedenle belirleyemeyiz diyorsun. Haklısın.

Burada Ö2 rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi eylemini içselleştiremediği gözlemlenmektedir. Bu duruma Ö10 kodlu öğrencinin de katıldığı görülmektedir. Burada rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesine ilişkin şemalarda yaşanan problem olduğu düşünülmektedir. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

Ö10: Hocam 0 ile 1 arasında sonsuz tane rasyonel sayı var.

Ö2: Orayı nasıl kapatacağız mesela. Her zaman boşluk olmaya devam eder. Boşlukları azaltırız sadece.

Ö10: En azından bir tane kalır değil mi?

Ö2: Evet.

Görüldüğü gibi Ö2 ve Ö10 kodlu öğrencilerin iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı olması eylemini rasyonel sayıların yoğun yapısı sürecine içselleştiremedikleri görülmektedir. Bu bulguyu destekleyen transkripte aşağıda yer verilmiştir.

Ö6: O zaman irrasyonel ve rasyonel sayıların varlığı gerçel sayıları oluşturuyor ve gerçel sayılar da bir doğru demek. Bu durumda Ö2 çelişkiye düşüyor. Gerçel sayılarda da mı boşluklar var o zaman?

Ö2: Rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların birleşim kümesi olduğu için arada hiç boşluk olmuyor gerçel sayılarda. Ama rasyonel sayılarda boşluk var.

Ö6: Ben de dolduramayız diye düşünüyorum. Çünkü seçtiğimiz iki rasyonel sayı arasında tekrardan bir rasyonel sayı var. Rasyonel sayıların yoğunluğu ile alakalı bir şey öğrenmiştik. Her türlü tekrardan bir taş koyabileceğimiz bir boşluk olacak.

Burada Ö6 kodlu öğrenci gerçel sayılarda “boşluk olmaması” üzerinden Ö2 kodlu öğrencinin fikrinin çeliştiğini söylemektedir. Buna karşın Ö2 gerçel sayılarda boşluk olmadığını, ancak rasyonel sayılarda boşluk olduğunu bu nedenle taşlarla doldurulamayacağını iddia etmektedir. Bu durum yukarıda sözü edilen iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı olması eylemini rasyonel sayıların yoğun yapısı sürecine içselleştiremedikleri iddiasını güçlendirmektedir.

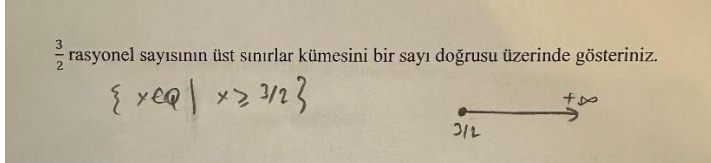
Görev-3'e Yönelik Grup İçi Tartışmalar

Bu kesimde grup içi tartışmalardan elde edilen bulgular üç grup için ayrı ayrı sunulmuştur. İlk olarak Grup-1'in Görev-3'e yönelik tartışmalarının analizinden elde edilen bulgular verilmiştir.

Burada ilk soruda yalnızca Ö3 kodlu öğrencinin ilgili rasyonel sayılar kümesinin üst sınırlar kümesini rasyonel sayılar üzerinde gösterdiği gözlemlenmiştir. Aşağıda Ö3 kodlu öğrencinin soruya ilişkin çözümü verilmiştir.

Şekil 18

Ö3'ün Görev-3'de Birinci Soruya Yönelik Çözümü



Burada Ö3 kodlu öğrenci cebirsel olarak küme temsilinde elemanların rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir. Buna rağmen kümenin doğru üzerindeki temsilini sürekli olarak çizmiştir. Transkriptlere bakıldığında Ö3 kodlu öğrencinin doğru temsiliyi çözüm olarak kullandığı görülmektedir.

Ö1: 3 bölü 2 dahil ve üstü.

Ö3: Dahil. Kesik kesik mi yaptınız?

Ö1: Yok. Kesik kesik değil.

Ö2: Kesik kesik değil ya.

Transkriptlere bakıldığında üç öğrencinin de (Ö1, Ö2, Ö3) üst sınırlar kümesini gerçel sayılar üzerinde temsil ettikleri görülmektedir.

Grup-1'deki öğrencilerin üst sınırlar kümesini gerçel sayılarda temsil etmesine rağmen dördüncü soruda tereddüt yaşadıkları görülmüştür. Buna ilişkin transkriptler aşağıda verilmiştir.

Ö1: En küçük üst sınır var mıdır ya?

Ö3: Bence yok. Analiz dersinde yok diye kabul ettik.

Ö1: Ama en küçük elemanı yoktur dedik.

Ö3: En küçük elemanı yok. O zaman bunu eşit değildir diye kabul edeceğiz.

Ö1: En küçük üst sınır yok demedik. En küçük elemanı yok dedik.

Ö3: Tamam işte bunu yapacağız o zaman. Açık aralık alacağız.

Ö1: Kapalı almamız gerekmiyor mu?

Ö3: İyi de biz x 'i rasyonel sayı olarak kabul edeceğiz.

Ö1: Tamam.

Ö3: Rasyonel sayı $\sqrt{2}$ olamaz ki.

Öğrencilerin üst sınırlar kümesini gerçel sayılar olarak kabul etmesine rağmen, Ö3 kodlu öğrencinin $\sqrt{2}$ sayısını en küçük üst sınır olarak kabul etmediği görülmektedir. Burada Ö3 kodlu öğrenci Analiz dersinde bu şekilde gördüklerini söylemiştir. Burada dışsal uyarın olarak öğrencinin Analiz dersinde yaptıkları örneği hatırladığı düşünülürse, doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde bir üst sınırını bulma eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir. Bunun üzerine Ö1 kodlu öğrenci kümeyi belirtmediği için gerçel sayılar kümesinin alınması gerektiğini söylemiştir.

Ö1: Vardır kendisidir. Çünkü burada küme belirtmemişse reel sayıları kabul ediyoruz. En küçüğü de kendisi olur zaten. Bu sayı kendisinden küçük veya eşittir.

Bu haliyle öğrencilerin üst kümeyi gerçel sayılar kümesi olarak düşündüğü ele alınır, en küçük üst sınır nesnesini oluşturdukları söylenebilir. Burada üç grubun da grup içi tartışmalarına bakıldığında üst sınırlar kümesinin gerçel sayılarda incelendiği gözlemlenmiştir. Bu bağlamda gruplar arası tartışmada araştırmacı üst sınırlar kümesine rasyonel sayılarda bakıldığında ne olduğunu tartışmaya açmıştır.

Görev-3'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar

Görev-3'e yönelik birinci soruyu nasıl çözdüklerini ilk olarak Ö9 kodlu öğrenci anlatmıştır. Bütün grupların soruları gerçel sayılar üzerinde incelediği anlaşılınca araştırmacı soruyu rasyonel sayılar üzerinde değerlendirmek gerektiği uyarısını yapmıştır.

Ö9: [...] $\frac{3}{2}$ ile sonsuz arasındaki bütün sayılar üst sınırlar kümesidir.

S: Biz de öyle yaptık.

Ö9: Bunda hem fikiriz ilk soruda.

A: Tüm sayılar derken neyi kastediyorsunuz?

Ö10: Gerçel sayılar.

A: Peki bunu şu ana kadar niye her defasında gerçel sayılar kümesinden alıyorsunuz? Üst sınırlar kümesi diyince...

Ö4: Aksini belirtmediği sürece gerçel sayılar alıyoruz.

S: Aynen.

A: Rasyonel sayılar kümesi içerisinde bu soruları çözmeye çalışsaydınız ne olurdu?

Buna bağlı olarak öğrenciler üçüncü soruya kadar doğru yanıtlar vermişlerdir.

Dördüncü soruya ilişkin gruplar arası tartışmalar aşağıda verilmiştir.

A: Bu kümenin en küçük elemanı var mıdır? Rasyonel sayılar kümesi içerisinde.

Ö1: Bence vardır. Arkadaşlarımızın dediği gibi o zaman yukarıda yaptığımız x 'den sonsuza kadar. O zaman buraya da rasyonel deriz. Ama biz gerçel sayılarda... O zaman $\sqrt{2}$ de olamıyor.

Ö2: Hocam rasyonel sayılarda dediği için $\sqrt{2}$ de rasyonel sayı olmadığı için rasyonel sayılar kümesi içerisinde yok.

Ö10: $\sqrt{2}$ ' den büyük en küçük rasyonel sayıyı bulamayacağımız için...

Ö6: Yoktur.

Ö1: $\sqrt{2}$ bu sayılardan daha büyük.

Ö10: Ama rasyonel sayı değil.

Burada Ö1 kodlu öğrenci karesi 2 olan sayıdan daha küçük olan rasyonel sayılar kümesinin üst sınırlarına $\sqrt{2}$ sayısını da dahil etmiştir. Gerekçe olarak oluşturulan kümedeki

tüm elemanlardan daha büyük olduğunu söylemiştir. Burada Ö1 kodlu öğrencinin doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın bir üst sınırını bulma eylemini yaptığını, ancak bu eylemi doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde üst sınırlar kümesini bulma sürecine içselleştiremediği görülmektedir. Bunun üzerine Ö6 kodlu öğrencinin açıklaması Ö1 kodlu öğrenciyi ikna etmiştir.

Ö6: Bak biraz öncekilerde kapalı aralık almıştık. x ve 0 ' ı dahil etmiştik. Bunda açık aralık almamız gerekiyor çünkü $\sqrt{2}$ rasyonel sayı değil irrasyonel sayı. Biz $\sqrt{2}$ ' nin sağındaki en küçük rasyonel sayıyı bulamayacağımız için bu kümenin en küçük elemanını söyleyemeyiz.

Ö6 kodlu öğrencinin açıklamasında rasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi sürecine doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın bir üst sınırını bulma eylemini uygulayarak, doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde üst sınırlar kümesini bulma sürecini elde ettiği gözlemlenmektedir.

Görev-4'e Yönelik Grup İçi Tartışmalar

Burada ilk olarak Grup-1'in Görev-4'e yönelik grup içi tartışmaları verilmiştir.

Ö3: bunun üst sınırları nereye gidiyor? 0 dan sonsuza. En küçük elemanı 0 oluyor. Geçen görevde yaptığımız gibi. 0 dan eksi sonsuza giden bir doğru olmalı ki...

Ö1: Bunun üst sınırlarının en küçüğünü soruyor ya.

Ö3: 0 bu olacak diyor. Üst sınırlar kümesinin en küçük elemanı 0 olacak diyor. Yani eküs 0 olacak.

Ö1: Tamam.

Görüldüğü gibi öğrenciler ışın nesnesini sürece geri sarmalayarak rasyonel sayılar kümesinde verilen bir noktanın üst sınırlar kümesini belirleme ve bir doğru üzerinde temsil etme süreci ile koordine etmiş ve ışın nesnesinin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını

bulma sürecini elde etmişlerdir. Buna karşın ikinci soruda verilen nokta rasyonel olmadığı için sorunun çözümünde zorluk yaşamışlardır. Buna ilişkin transkriptler verilmiştir.

Ö3: Şurada yine altta $\sqrt{2}$ ' yi kabul edeceğiz. Aynı mantık ya bunda da.

Ö1: Son soruda o zaman $\sqrt{2}$ ' nin yine üst sınırlar kümesini $\sqrt{2}$ ' den sonsuza

Ö3: Aynen bu sefer...

Ö1: Ama bu defa bu nokta yok.

Ö3: Şunu açık yaparsın. Yanına noktalar koyarsın.

Ö1: Tamam işte bu noktayı bilemiyorsun diyorum ben de sana.

Burada yaşanan problemin dönüşümde ifade edilen “doğru üzerindeki üst sınırlar kümesi” durumunun anlaşılabilmesi olduğu görülmektedir. Öğrenciler bir önceki görevde olduğu gibi rasyonel sayılar kümesi içerisinde karesi 2 olan sayıyı düşünmüşlerdir. Bu bağlamda ilgili dönüşümü yaparak irrasyonel $\sqrt{2}$ sayısını elde edememişlerdir. Bu durumun doğrunun sürekli olması sürecinin ışın nesnesinin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma süreci ile koordine edilememesinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Benzer sorunun Grup-2'deki öğrencilerde de yaşandığı gözlenmiştir.

Ö5: Hatta üst sınırlar diye $\sqrt{2}$ mi alacağız?

Ö4: Gerçel sayılar diye belirtmemiş.

Ö5: O zaman alabiliyor muyuz?

Ö4: Aksini belirtmemiş.

Ö6: Bizim amacımız ne şu an?

Ö4: Dönüşümü yapmak.

Ö6: Sonra ne yapıyoruz? Bir önceki görevde yaptıklarımızdan farkı nedir?

Burada Ö4 kodlu öğrenci aksinin belirtilmediği için gerçel sayılar üzerinde çalışılabileceğini söylediği görülmektedir. Benzer şekilde Ö6 kodlu öğrencinin bir önceki

görev ile bu görev arasında bir farkın olmadığını söylediği gözlemlenmektedir. Bu bağlamda bakıldığında doğru üzerindeki noktalardan hareketle üst sınırların belirlenemediği söylenebilir.

Grup-3'te yer alan Ö7 kodlu öğrenci doğru üzerindeki üst sınırlar kümesi ifadesini tartışmaya açmıştır.

Ö7: Ben çok anlayamadım. Bu doğru üzerindeki üst sınırlar kümesi dediği ne?

Ö8: Bunların oluşturduğu kümenin üst sınırlar kümesini alacağız.

Ö10: Bu doğru üzerinde ne demek?

Ö9: Bu sefer doğrunun elemanlarını alacağız.

Ö10: E o zaman 0.

Görüldüğü gibi Ö7 ve Ö10 kodlu öğrenciler doğru üzerindeki üst sınırlar kümesi ifadesinin ne olduğunu anlamadıklarını belirtmişlerdir. Bunun üzerine Ö9 kodlu öğrenci doğrunun noktalarını ışın süreçleri ile koordine ederek gerçel sayı nesnesini oluşturmuştur. Buna bağlı olarak Grup-3'te yer alan öğrenciler soruyu çözmüşlerdir.

Görev-4'e Yönelik Gruplar Arası Tartışmalar

Bu kesimde Görev-4 sonrasında gruplar arası tartışmalara ilişkin bulgular sunulmuştur. Bu aşamada öncelikle Ö4 kodlu öğrenci söz alarak çözüm sürecini anlatmıştır.

Ö4: Sifırdan eksi sonsuza gidiyor. Buradaki rasyonel sayılar. Daha sonra bunun üst sınırlar kümesini bulacağız. Bunlar da 0' dan sonsuza bütün reel sayılar.

Ö10: Aynen.

Ö4: Daha sonra bunun en küçük elemanını bulacağımıza göre o da 0. Bunu da yeni bir doğru üzerinde göstereceksek... Onu da 0' dan sonsuza olan bir doğru gibi düşünelim. 0'ı da bu doğruya yerleştirmiş oluruz işte.

Ö1 kodlu öğrenci bu çözüm sürecine bağlı olarak üst sınırlar kümesinin gerçel sayılar üzerinde olduğunu fark etmiştir. Bu bağlamda Görev-4'ün ikinci sorusunda $\sqrt{2}$ sayısının elde edildiğini söylemiştir.

Ö3: Hocam x 'in karesi 2 ise $\sqrt{2}$. Geçen yaptığımız gibi $\sqrt{2}$ kısmından alacağız. Gerçel sayılar kısmından bakarsak $\sqrt{2}$ 'den sonsuza gider. Eküs $\sqrt{2}$ oldu.

Ö1: Haa şu an $\sqrt{2}$ 'yi elde ettik.

Burada Ö1 kodlu öğrenci problem durumunda irrasyonel sayıların elde edildiğini fark etmiştir. Buradan hareketle ışın nesnesinin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanını bulma sürecine ışını eküsüne götüren dönüşüm eylemi uygulanarak gerçel sayı nesnesinin elde edilmesi zihinsel yapısı oluşturulmuştur.

Öğretimin Uygulanmasına Yönelik Bulgulara İlişkin Tartışma ve Yorumlar

Burada ilk olarak problem durumunun anlaşılmasına ilişkin bulgulara bakıldığında, öğrencilerin günlük hayat probleminin çözümüne ilişkin yanlış cevaplar verdikleri gözlenmiştir. Örneğin, araştırmacının tamsayıları inşa sürecinde sorduğu “Peki paranın boşluğa düşmediğini düşünelim. Parayı ilk atan kişinin kazanma durumu var mıdır? Varsa hangi noktaya atarsa kazanır?” sorusuna verilen cevaplar incelendiğinde, Ö5 kodlu öğrencinin “ilk atıcı parayı nereye atarsa atsın bir sonraki atıcının bir sonraki noktaya atabileceğini” iddia ettiği gözlemlenmiştir. Oysaki öğrencilerin tamsayıların sayı doğrusundaki noktaların tamamını içermediğini bildikleri gözlemlenmektedir. Burada problem durumu günlük hayat probleminin zihinsel nesnelere dönüştürüldüğünde öğrencilerin doğru yanıtı verdikleri görülmektedir. Bu durum APOS teorisi bağlamında “tamsayıların sayı doğrusu üzerindeki inşası” sürecini problem durumu ile koordine ederek bir nesne yapısının oluşturulamaması şeklinde açıklanabilir.

Bir matematiksel problem çözme etkinliğinde öğrenciler nesnelere manipüle ederek ve başkalarıyla iletişim kurarak eylemler gerçekleştirir. Bu süreçte öğrenciler temsiller inşa

eder ve problem çözüme sürecinde hedefe ulaşmak için, verilen problem bağlamında temsiller veya işlemler arasındaki dönüşümleri ve dönüşümler için yaptıkları girişimleri gerekçelendirirler (Hitt & González-Martin, 2015). Öğretim uygulamasının bulgularına bakıldığında Görev-1 esnasında Ö1 kodlu öğrenci ilgili doğru parçalarını paralel olacak şekilde ele almıştır. Burada öğrencinin bu varsayımı kendi amacına hizmet etmesi için manipüle ettiği görülmektedir. Bunun üzerine Ö2 kodlu öğrencinin bu çözümde varsayım yapılmaması gerektiği yönünde itirazı söz konusudur. Buradan hareketle öğrencilerin Thales teoremini kullanmak için “iki doğru arasında eşit oranlı noktalardan oluşan doğru parçalarının paralel olduğu” kabulünü kullanamadıkları görülmektedir. Matematiksel gerekçelendirmenin yetersizliği sonucunda Ö1 kodlu öğrencinin Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencileri ikna edemediği söylenebilir. Bu bağlamda grup içi iletişimde matematiksel gerekçelendirmelerin yetersizliğinin çözüm süreci için iknayı zorlaştırdığı sonucu çıkarılabilir.

Alan yazında grup çalışmalarının etkili öğrenme ortamları sağladığına ilişkin birçok çalışma görülmektedir (Slavin, 1988). Bu çalışmanın bulguları bağlamında ise alan yazından farklı olarak grup içi tartışmaların dışsal uyaran etkisi gözlenmiştir. Örneğin Görev-1'e ilişkin grup içi tartışmalarda Ö1 kodlu öğrencinin “ölçeklendirme” yapmak gerektiği vurgusu, varsayımsal olarak $\frac{2}{3}$ rasyonel sayısının bulunmaması gerektiğine yönelik bir dışsal uyaran olarak değerlendirilebilir. Benzer şekilde silgi kullanarak ölçüm yapabileceğinin söylenmesi Ö1 kodlu öğrencinin varsayımdan uzaklaşarak matematiksel gerekçelendirmelerini güçlü hale getirmiştir. Ek olarak Ö7 kodlu öğrenci çember ve silgiyi kullanarak birtakım oranlar bulmuş ancak bu sürece Thales teoremi eylemini uygulayamamıştır. Buna karşın Ö10 kodlu öğrenci silgiyi l doğrusu üzerinde kullanmayı önermiştir. Bu iki dışsal uyarana bağlı olarak Ö8 kodlu öğrenci rasyonel sayının sayı doğrusu üzerinde temsil edilmesi eylemini gerçekleştirmiştir. APOS teorisi bağlamında bakıldığında grup içi tartışmalar birtakım matematiksel eylemler için dışsal uyaran etkisi oluşturabilmektedir.

Öte yandan Görev-3'e ilişkin çözümlerde bütün grupların soruları gerçel sayılar üzerinde incelediği ortaya çıkmış ve bu durum üzerine araştırmacı soruyu rasyonel sayılar üzerinde değerlendirmek gerektiği uyarısını yapmıştır. Benzer şekilde gruplar arası tartışmalarda aynı soruya ilişkin Ö1 kodlu öğrenci karesi 2 olan sayıdan daha küçük olan rasyonel sayılar kümesinin üst sınırlarına $\sqrt{2}$ sayısını da dahil etmiştir. Bu durum üzerine Grup-2'de yer alan Ö6 kodlu öğrenci $\sqrt{2}$ sayısının sağ tarafında en küçük rasyonel sayının bulunamayacağı gerekçesiyle üst sınırlar kümesinin en küçük elemanının olmadığını söylemiştir. Bu matematiksel gerekçe Ö1 kodlu öğrenciyi ikna etmiştir. Bu durumun Hitt ve Gonzalez-Martin (2015)'in grup çalışmalarına ilişkin gruplar arası tartışmanın problemin çözümüne yönelik çeşitlendirilmiş düşüncelerini sağlaması bakımından önemini vurgulaması ile paralellik göstermektedir. Ayrıca yapılan gruplar arası tartışmanın Ö1 kodlu öğrencinin doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın rasyonel sayılar içerisinde üst sınırlar kümesini bulma sürecine içselleştirmesine yol açtığı görülmektedir. Bu bağlamda gruplar arası tartışmanın Ö1 kodlu öğrenci için doğru üzerinde rasyonel olmayan bir noktanın bir üst sınırını bulma eylemi yapısını yansıtarak bir üst seviye soyutlama yapmasına yardımcı olduğu söylenebilir. Bu durumda grup içi tartışmalar dışsal uyarın etkisi gösterirken, öğrencilerin grup içi tartışmalarda oluşturdukları zihinsel eylem yapısını gruplar arası tartışmalar ile süreç yapısına yansıttıkları sonucuna ulaşılabilir.

Diğer yandan çalışmanın sonuçlarına göre öğrenciler tarafından rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsil sürecine içselleştirilmesine bağlı olarak rasyonel sayıların tam olmadığını anlaşıldığı görülmüştür. Bu sonuç Durrand-Guerrier ve diğerlerinin (2019) yaptıkları çalışma sonuçları ile farklılık göstermektedir. Durrand-Guerrier ve diğerlerinin (2019) yaptıkları çalışma sonuçlarına göre öğrencilerin çoğunluğunun yoğunluk kavramını doğru anladıklarını, ancak bu kavramın tamlık kavramıyla olan ilişkisini ve farklarını kavramakta zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Oysaki bu çalışmada örneğin Ö1 kodlu öğrenci "iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır" ifadesini aksiyom olarak ele almış ve buradan hareketle duvara en yakın nokta olamayacağını iddia etmiştir. Yani

rasyonel sayıların yoğun yapısını kullanarak tam olmadığı sonucuna varmıştır. Yine bu çalışmada rasyonel sayıların yoğun yapısına ilişkin zihinsel yapılar ortaya çıkarılmıştır. Örneğin Ö2 kodlu öğrencinin rasyonel sayıların bir doğru üzerinde temsil edilmesi eylemini tekrarlayarak rasyonel sayıların doğru üzerindeki temsil sürecine içselleştiremediği için rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini inşa edemediği görülmektedir. Ö2 kodlu öğrencinin rasyonel sayıların bir alt kümesinin doğru üzerinde temsil edilmesi sürecini, irrasyonel sayıların doğru üzerinde temsil edilmesi süreci ile koordine edemediği için rasyonel sayıların yoğunluğu nesnesini elde edemediğini göstermektedir.

Bir diğer bulgu olarak öğrencilerin doğruya ilişkin şemalarında eksiklik olduğu görülmektedir. Öğrenciler doğruyu gerçel sayıların elemanları ile oluşturmaktadır. Öğrenciler doğruyu sayı doğrusu olarak kabul etmiş ve bu sayının türüne göre doğrunun şeklini belirlemişlerdir. Örneğin Ö2 kodlu öğrencinin doğrunun tanımına ilişkin şemalarında yaşadığı problem nedeniyle ilgili süreci rasyonel sayılar kümesinin doğru üzerinde temsil nesnesine sarmalayamadığı gözlenmiştir. Burada genetik ayrışma ilişkin sayı doğrusunun gerçel sayılarla birebir eşlenmesine yönelik zihinsel yapıların eklenmesi gerektiği düşünülmektedir. Ayrıca bu durum, Berge (2010)'nin sözünü ettiği, doğrudan gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin kavramsallaştırma çalışmalarının yapılması gerekliliğini ortaya koymaktadır. Analiz derslerinde gerçel sayıların inşa sürecinde tamlık özelliğinin kavramsallaştırılmadan yalnızca aksiyom olarak verilmesi, öğrenciler tarafından gerçel sayılar ile bir doğru arasındaki topolojik ilişkinin kurulamamasına yol açmaktadır. Bu tez çalışması Oktaç ve Vivier (2016)'in de belirttiği nümerik ve geometrik bakış açıları arasında bir köprü kurmak bağlamında gerçel sayıların tamlık özelliğinin inşasının önemini ortaya koymaktadır.

Genetik ayrışma zihinsel yapıların eklenmesine bir diğer örnek teşkil edebilecek bulgu Ö10 kodlu öğrenci irrasyonel sayıların toplama işlemine göre kapalı olduğunu iddia etmesidir. Benzer şekilde Ö9 kodlu öğrenci de bu fikre katılmıştır. Bu durumun iki irrasyonel sayı sürecinin koordine edilememesinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Buna bağlı

olarak ilgili genetik ayrışma irrasyonel sayı süreçlerinin zihinsel yapı olarak eklenmesinin gerekli olduğu savunulabilir.

Bölüm 5

Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıların inşasına yönelik yapılan çalışmadan elde edilen bulguların sonuçları sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında problem durumuna bağlı olarak “Üniversite öğrencilerinin gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları/mekanizmaları APOS teorik çerçevesi bakımından nasıldır?” araştırma sorusu ele alınmıştır. Buradan hareketle ilk alt problem “Gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik APOS teorisi bağlamında bir genetik ayrışım nasıl olmalıdır?” şeklinde belirlenmiştir. Bu probleme yanıt vermek için APOS teorik metodolojisi bağlamında Analiz kitapları incelenmiş, alan yazında tamlık özelliği kavramına ilişkin öğrenme güçlükleri belirlenmiş, kavramın tarihsel gelişimi ortaya konulmuş ve Analiz dersi veren deneyimli öğretim elemanlarının deneyimleri göz önüne alınmıştır. Burada Analiz kitaplarının incelenmesi sonucunda;

- Cebirsel Yaklaşım
- Topolojik Yaklaşım
- Kalkülüs Yaklaşımı

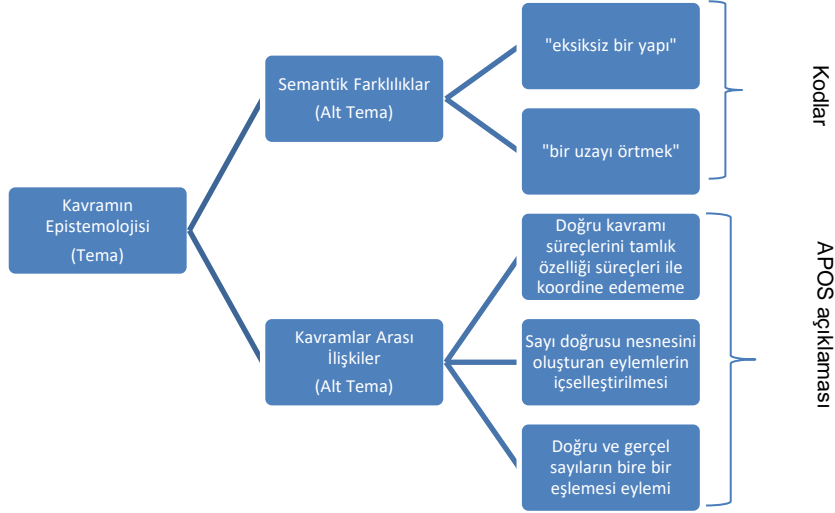
şeklinde üç temel yaklaşım belirlenmiştir. Yaklaşımlar genel olarak gerçel sayıların kurulumuna yönelik farklılık gösterse de, bu yaklaşımların hiçbirinde gerçel sayıların tamlık özelliği kavramsal olarak ele alınmamıştır. Genel olarak tamlık özelliğinin “iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır” gibi doğal sonuçlarının uygulamalarına yönelik araştırmalar göze çarpmaktadır.

Diğer yandan genetik ayrışımında yer alması gereken yapıları belirlemek için öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin kavrayışlarını belirlemeye yönelik bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin kavrayışları iki temel bağlamda ele alınmıştır. Bunlardan ilki kavramın epistemolojisine yönelik kavrayışlara ilişkin yapılarıdır.

Aşağıda bu kavrayışa ilişkin yapılar, yapıları oluşturan kodlar ve APOS açıklamalarını içeren şekil sunulmuştur.

Şekil 19

Tamlık Özelliğine İlişkin Öğrenci Kavrayışları: Kavramın Epistemolojisi

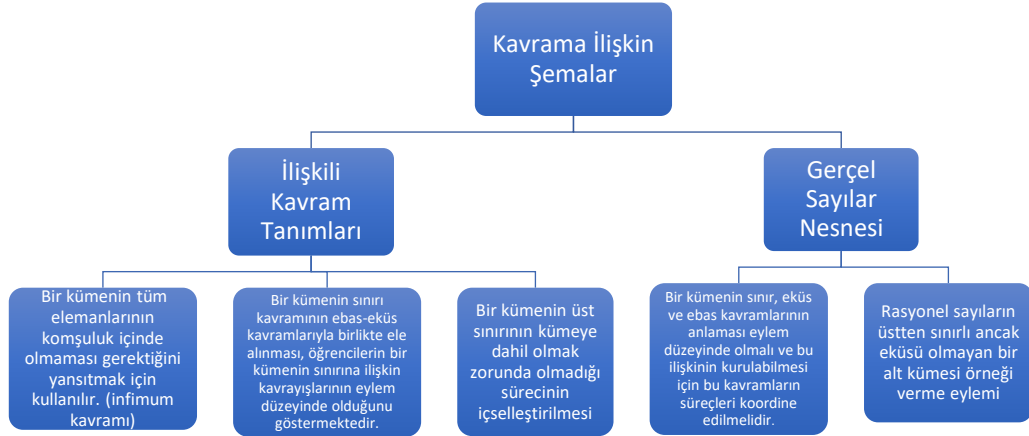


Bu sonuçlar tamlık özelliği kavramına yönelik semantik farklılıkların kavramın zihinsel yapılarını etkilediğini göstermektedir. Bu bağlamda genetik ayrışım oluşturulurken, “eksiksiz bir yapı” ifadesi rasyonel sayılar ile gerçel sayılar arasındaki farkın ortaya konulabilmesi bakımından; “bir uzayı örtme” ifadesi de rasyonel sayıların gerçel sayılar üzerinde yoğun olması ve sayı doğrusu ile gerçel sayıların tam olmasının inşa edilmesi açısından dikkate değer bulunmuştur.

Tamlık özelliğine ilişkin öğrenci kavrayışlarına yönelik ikinci yapı olarak kavrama ilişkin şemalar belirlenmiştir. Burada yer alan alt yapılar ve bu yapılara ait APOS teorisine yönelik açıklamalar aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Şekil 20

Tamlık Özelliğine İlişkin Öğrenci Kavrayışları: Kavrama İlişkin Şemalar



Öğrencilerin tamlık özelliği kavramına ilişkin şemalarında temel olarak eküs-ebas nesne yapısına yönelik eksiklikler, rasyonel sayıların bir doğru üzerinde temsil edilmesine ilişkin zihinsel yapılarda ve buna bağlı olarak rasyonel sayıların gerçel sayılar üzerindeki yoğun yapısının anlamasında güçlükler saptanmıştır.

Tamlık özelliği kavramının tarihsel gelişimi incelendiğinde, doğrunun sürekliliğinin kabulüne bağlı olarak gerçel sayıların inşasında en küçük üst sınır özelliği doğal sonuç olarak ortaya çıkmaktadır. Daha sonra yapılan çalışmalarda gerçel sayıların kurulumunda en küçük üst sınır özelliği aksiyom olarak kabul edilmiştir. Bu bağlamda kavramın inşası ve kavramsallaştırılması için tamlık özelliğine ilişkin genetik ayrışım tasarlanırken gerçel sayıların en küçük üst sınır özelliğinin zihinsel inşası temel yapıyı oluşturmaktadır

Yapılan teorik analiz sonucunda elde edilen verilere bağlı olarak tamlık özelliğine ilişkin varsayımsal genetik ayrışım ortaya konmuştur. Varsayımsal genetik ayrışım aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi üç temel yapı üzerine oluşturulmuştur.

Şekil 21

Varsayımsal Genetik Ayrışımın Temel Yapıları



Varsayımsal genetik ayrışım ilk olarak doğrunun sürekliliğinden hareketle rasyonel sayılar kümesinin zihinsel yapılandırılmasını içermektedir. Daha sonra rasyonel sayıların geometrik temsilleri üzerinden, en küçük üst sınır kavramı kullanılarak Dedekind ışınlarının zihinsel inşası ele alınmaktadır. Son bölümde Dedekind ışınlarına bağlı olarak gerçel sayıların tamlık özelliği ortaya çıkarılmaktadır.

Varsayımsal genetik ayrışımın test edilmesi için genetik ayrışımına bağlı bir kavramsal anlama testi hazırlanmış ve öğrenciler üzerinde uygulanmıştır. Uygulama sonucunda;

- Sayı doğrusu kavramının ve rasyonel sayılar kavramının birlikte bu zihinsel yapılar içerisinde yer alması gerekliliği, genetik ayrışımın bu doğrultuda incelenmesi gerektiği,
- Rasyonel sayıların yoğun yapısının zihinsel yapılarda yer alması ve buna bağlı olarak eküs ve ışın nesnelere oluşturulması gerekliliği,
- Rasyonel sayı kümeleri kullanarak ışın nesnesinin oluşturulması zihinsel yapısına, yukarıdaki analizlerin sonucu olarak eklenecek ara yapıların eklenmesinin bazı süreç yapılarının oluşturulmasına katkı sağlayacağı düşüncesi,
- Işın ve eküs nesnelere geri sarmalama mekanizması ile elde edilen süreçlerin koordine edilerek gerçel sayı nesnesinin oluşturulması yapısının eklenmesi gerektiği

gözlenmiştir. Bu bağlamda varsayımsal genetik ayrışım incelenmiştir.

Araştırmanın ikinci alt problemi olan “Tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları ortaya çıkaran genetik ayrışıma bağlı bir matematiksel görev nasıl olmalıdır?” sorusuna yanıt vermek için çalışmada incelenmiş genetik ayrışıma bağlı olarak matematiksel görevler hazırlanmıştır. Bu matematiksel görevleri içerecek şekilde bir problem durumu oluşturulmuş ve öğretim etkinliği yapabilmek için öğretim etkinliği tasarımı oluşturulmuştur. Bu tasarım için APOS teorisinde pedagojik yaklaşım olarak önerilen ACE öğretim döngüsü kullanılmıştır. Bu öğretim döngüsüne bağlı olarak bir sınıf metodolojisi oluşturulmuş ve öğretimin uygulanması için genetik ayrışım merkezli bir model tasarlanmıştır. Bu model uygulanarak araştırmanın üçüncü alt problemi olan “APOS teorisi çerçevesinde tasarlanan matematiksel görev sonucunda öğrencilerin tamlık özelliğine ilişkin zihinsel yapıları nasıl değişmektedir?” sorusuna yanıt aranmıştır.

Öğretim uygulaması sonuçlarına göre;

- Öğrencilerin zihinsel yapılarının gelişiminde grup içi tartışmaların dışsal uyarın rolünün önemi,
- Rasyonel sayıların yoğun yapısının gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin şemalarda temel rol oynadığı,
- Gerçek yaşam durumlarının matematikteki zihinsel nesnelere mükemmel yapısıyla açıklanmasının getirdiği kavramsal anlama güçlükleri,
- Zihinsel yapıların ve mekanizmaların matematiksel gerekçelerin sağlanması için önemli olduğu,

temel sonuçları elde edilmiştir.

Yapılan tez çalışmasında gerçel sayıların tamlık özelliğine yönelik öğrencilerin kavramsal anlamasına yönelik bir yol haritası ortaya konulmuştur. Bu bağlamda çalışmada ortaya çıkan tamlık özelliğine ilişkin genetik ayrışım ve genetik ayrışıma bağlı öğretim uygulaması analiz derslerinde kullanılabilir şekilde test edilmiştir. Bu sayede çalışmada, genetik ayrışım ve öğretim uygulamasına bağlı olarak analiz derslerinin merkezinde yer

alan gerçel sayıların kurulumu konusu bir öğretim metodolojisine bağlı olarak verilebilecek şekilde bir yol önerilmiştir. Buna bağlı olarak çalışmada sunulan metodolojik yolun, analiz dersi alan üniversite öğrencilerinin gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin kavramsal anlamalarına yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak tamlık özelliğinin genetik ayrışımı bağlamında, doğru kavramının inşasını içeren zihinsel yapıların genetik ayrışımına eklenmesi önerilebilir. Benzer şekilde rasyonel sayıların yoğun yapısına yönelik ara zihinsel basamaklar genetik ayrışımında yer alabilir.

Analiz dersi bağlamında yürütölen bu çalışma, daha alt dönemlerde Kalkölüs dersleri için yürütölerek öğretimsel anlamda Kalkölüs ve Analiz arasındaki temel farklar belirlenebilir. Ayrıca farklı sınıf düzeylerinde, farklı bölümlerde benzer çalışma yürütölerek çeşitlilik artırılabilir ve genetik ayrışımın sağlamlştırılması sağlanabilir.

Kaynaklar

- Aguilar, P., & Oktaç, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2), 117–144.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level: Crucial questions for contemporary research in education. *Notices of the American Mathematical Society*, 46, 1377–1385.
- Artigue, M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire: ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 269–288.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In *Research in Collegiate mathematics education II. CBMS issues in mathematics education (Vol. 6, pp. 1–32)*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Awodey, S., & Reck, E. H. (2002). Completeness and categoricity, part I: 19th century axiomatics to 20th century metalogic. *History and Philosophy of Logic*, 23, 1–30.
- Bell, L. J. (1999). *The Art of the Intelligible: An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*. Springer Dordrecht.
- Bergé, A. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de completud del conjunto de los números reales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 31–64.

- Berge, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis, *Educational Studies in Mathematics*. 67, 217–235. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9101-5>
- Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217-227. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207390903399638>
- Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 6(3), 163–197.
- Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *General psychological problems of Logico-mathematical thought in Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht: Springer.
- Bosch, M., Gascon, J., & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 39–52. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-016-9734-3>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.
- Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels: Idécimalité et racine carré*. Doctoral thesis, Université de Grenoble I, France.
- Bronner, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires. In *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques, Ste Livrade, 18–26 August 2005*.
- Cantor, G. (1871). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen V*, 123–132.

- Castela, C. (1996). *La droite des réels en seconde: Point d'appui disponible ou enjeux clandestin?* IREM de Rouen.
- Creswell, J. W. (2012). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage Publications.
- Dedekind, J. W. R. (1963). *Essays on the theory of numbers: I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers*. New York: Dover Publications.
- Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, 53, 159–199.
- Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, 2, 41–47.
- Dubinsky, E. (Eds.) (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra (Vol. 42, pp. 85–106)*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A., Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An Apos-Based Analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-2531-z>
- Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232–258.
- Durand-Guerrier, V., Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2019). Real exponential in discreteness-density-completeness contexts. *Calculus in upper secondary and*

beginning university mathematics, University of Agder, Kristiansand, Norway, August 6-9, 2019.

- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing. In Sutherland R. & Mason J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142–157), Springer: Berlin.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
- Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational number in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*. 9, pp. 29–44. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01273899>
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107–122. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-015-9639-6>
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115–141. <https://www.jstor.org/stable/749505>
- Hitt, F., & Gonzalez-Martin, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201–219.
- Kamii, C. K. (1985). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.
- Laugwitz, D. (1997). On the Historical Development of Infinitesimal Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 104(7), 654-663.
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM – Mathematics Education*, 49(6), 937-949.

- Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education* (pp. 35–46). Praga: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Faculta.
- Martinez-Planell, R., & Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365–384.
- Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*. Doctoral Thesis, Université Paris VII.
- McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in collegiate mathematics education IV*, 8, 77-102.
- Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.) *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, (pp. 233-258). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Miles, M. B., Huberman A. M., & Saldana, J. (2014). *Qualitative Data Analysis: A Method Sourcebook (Edition 3)*. Sage Publication.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2006). *Curriculum focal points*. Reston, VA: Author.
- Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 51(7), 1043–1054. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9>.
- Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition in research about analysis. In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J. B. Lagrange (Eds.), *The didactics of mathematics:*

- approaches and issues. A homage to Michèle Artigue (pp. 87–122).* New York: Springer.
- Pantziara, M. & Philippou, G. N. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61–83. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9338-x>
- Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.
- Patton, M. K. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: SAGE publications.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. New York: W. W. Norton.
- Piaget, J. (1970). *Structuralism*. New York: Basic Books.
- Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education (pp. 79–87)*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Piaget, J. (1977). Problems of equilibration. In M. Appel & L. Goldberg (Eds.), *Equilibration: Theory, Research, and Application (pp. 3–13)*, Plenum Press, New York.
- Piaget, J. (1980). *Adaptation and intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J., & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.

- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89–112.
- Schwarz, B. B., & Linchevski, L. (2007). The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning. *Learning and Instruction*, 17(5), 510-531.
- Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302715>
- Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *For the learning of mathematics*, 24(2), 7–15.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.
- Slavin, R. E. (1988). Cooperative learning and student achievement. *Educational Leadership*, 46(2), 31–33.
- Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa-Relime*, 11(1), 93-125.
- Tall, D. O. (1991). *Advanced mathematical thinking*. London: Kluwer.
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *AIEM - Avances De Investigación En Educación Matemática*, 15, 43–55.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007). How Many Numbers are there in a Rational Numbers Interval? Constrains, Synthetic Models and the Effect of the Number Line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.) *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 265-282). The Netherlands: Elsevier.

- Voskoglou, M. G. (2013). An application of the APOS/ACE approach in teaching the irrational numbers. *Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education*, 8(1), 30–47.
- Weller, K., Arnon, I. & Dubinski, E. (2011). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(2), 129-159.
- Woodward, J. (2003). *Making things happen: A theory of causal explanation*. New York: Oxford University Press.
- Yıldırım, A., Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zachariades, T., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 5–22.
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 7, 1–27.

**EK-A: Araştırma Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu/ Araştırma Etik Komisyonu Onay
Bildirimi**



**T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Rektörlük**

Sayı : E-35853172-399-00002245203
Konu : Özgün ŞEFİK (Etik Komisyon İzni)

20.06.2022

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: 07.06.2022 tarihli ve E-51944218-399-00002217898 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi doktora programı öğrencisi **Özgün ŞEFİK'in, Prof. Dr. Şenol DOST** sorumluluğunda yürüttüğü "**Matematik Öğretmen Adaylarının Reel Sayılar Kümesinin Tamlık Özelliği Kavramına İlişkin Anlamalarının Apos Teorisi Bağlamında İncelenmesi**" başlıklı tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **14 Haziran 2022** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Vural GÖKMEN
Rektör Yardımcısı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu: 9124656D-6E5A-4667-AF83-FAC5DABB07FE

Belge Doğrulama Adresi: <https://www.turkiye.gov.tr/hu-ebys>

Adres: Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara

Bilgi için: Çağla Handan GÜL

E-posta: yazimd@hacettepe.edu.tr İnternet Adresi: www.hacettepe.edu.tr Elektronik

Bilgisayar İşletmeni

Ağ: www.hacettepe.edu.tr

Telefon: 03123051008

Telefon: 0 (312) 305 3001-3002 Faks: 0 (312) 311 9992

Keş: hacettepeuniversitesi@hs01.kep.tr



EK-B: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- * tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- * görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- * başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- * atıfta bulunduğum eserlerin bütününe kaynak olarak gösterdiğimi,
- * kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- * bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/07/2024

Özgün ŞEFİK

EK-C: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu

01/07/2024

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı : Gerçel Sayıların Tamlık Özelliğinin Apos Teorisine Dayalı Zihinsel Yapılandırılması

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
01/07/2024	147	200510	03/06/2024	%6	2411119327

Uygulanan filtreler:

- Kaynaklar hariç
- Alıntılar dâhil
- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı: Özgün ŞEFİK

Öğrenci No.: N17144078

Ana Bilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

İmza

Programı: Matematik Eğitimi

Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Şenol DOST

EK-Ç: Thesis/Dissertation Originality Report

01/07/2024

HACETTEPE UNIVERSITY
Graduate School of Educational Sciences
To The Department of Mathematics and Science Education

Thesis Title: Mental Construction Of Completeness Property Of Real Numbers Based On Apos Theory

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
01/07/2024	147	200510	03/06/2024	%6	2411119327

Filtering options applied:

1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname: Özgün ŞEFİK

Student No.: N17144078

Department: Mathematics and Science Education

Program: Mathematics Education

Status: Masters Ph.D. Integrated Ph.D.

Signature

ADVISOR APPROVAL

APPROVED
Prof. Dr. Şenol DOST

EK-D: Yayınlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü/Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. ⁽¹⁾
- Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren ... ay ertelenmiştir. ⁽²⁾
- Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. ⁽³⁾

..... / /

Özgün ŞEFİK

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

- (1) Madde 6.1. Lisansüstü teze ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezinerişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.
- (2) Madde 6.2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internette paylaşılması durumunda 3 şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.
- (3) Madde 7.1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.
Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir
*Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.

