

**LEGENDRE DÜĞÜMLERİNİN
SINIFLANDIRILMASI**

CLASSIFICATION OF LEGENDRIAN KNOTS

BERNA PEKAVCILAR

Doç. Dr. Sinem ONARAN
Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2017

BERNA PEKAVCILAR'nın hazırladığı "**Legendre Düğümlerinin Sınıflandırılması**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr. Rıza ERTÜRK)



Danışman

(Doç. Dr. Sinem ONARAN)



Üye

(Doç. Dr. Ferihe ATALAN OZAN)



Üye

(Prof. Dr. Mustafa KORKMAZ)



Üye

(Doç. Dr. Filiz YILDIZ)



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açıklaabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etmeniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açıklaabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

15\08\2017



Berna PEKAVCILAR

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada:

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

11/08/2017



Berna PEKAVCILAR

ÖZET

LEGENDRE DÜĞÜMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

BERNA PEKAVCILAR

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sinem ONARAN

Ağustos 2017

3-manifold üzerindeki bir kontakt yapı, manifold üzerine dağılmış maksimal integral-lenemeyen 2-düzlem alanıdır. 3-manifolds üzerinde tayt ve aşırı dönen olmak üzere iki tip kontakt yapı vardır. Kontakt düzlemlere her yerde teğet olan düğümlere Legendre düğümleri denir. Bu tez çalışmasında, Legendre düğümlerinin sınıflandırılmasında kullanılan temel teknikler ele alınacaktır. Tezin amacı, tayt kontakt manifoldların içerisindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırma teknikleri ile aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki tümleyen tayt olan Legendre düğümlerinin sınıflandırılma tekniklerini çalışmaktır. Bu amaçla, bu tez çalışmasında kontakt 3-küre S^3 içerisindeki çözümlük düğümlerin sınıflandırılması detaylı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontakt yapı, tayt kontakt yapı, aşırı dönen kontakt yapı, Legendre düğümü

ABSTRACT

CLASSIFICATION OF LEGENDRIAN KNOTS

BERNA PEKAVCILAR

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Sinem ONARAN

August 2017

A contact structure on a 3-manifold is a maximally non-integrable 2-plane field distributed all over the 3-manifold. There are two types of contact structures on 3-manifolds: tight and overtwisted. Knots that are everywhere tangent to the contact planes are called Legendrian knots. In this thesis, we study basic techniques used in the classification of Legendrian knots. The aim of this thesis is to examine the techniques used in the classification of Legendrian knots in tight contact manifolds and the techniques used in the classification of Legendrian knots that have tight complements in overtwisted contact manifolds. For this purpose, in this thesis we study the classification of Legendrian unknots in contact 3-sphere S^3 in detail.

Keywords: Contact structure, tight contact structure, overtwisted contact structure, Legendrian knot

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında değerli bilgi ve deneyimlerini sabır ve anlayışla esirgemenin paylaştığı; motivasyonunu ve içtenliğini her zaman hissettiğim, onunla çalışmaktan mutlu olduğum, onur duyduğum çok değerli hocam Doç. Dr. Sinem ONARAN'a;

desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na;

varlıklarıyla bana güç veren, sevgi ve desteklerini hiç eksik etmeyen canım aileme, kardeşime, babam Mehmet PEKAVCILAR'a ve sevgili annem Ülker PEKAVCILAR'a;

umutsuzluğa kapıldığım her anımda bana destek olan, tüm samimiyet ve iyi niyetleriyle benimle her duyguyu paylaşan, zorlu zamanlarımda yardımına koşan çok değerli arkadaşlarım Hülya KORKMAZ ve Esra KORKMAZ'a

sonsuz teşekkürler...

Bu tez, 3501 Kariyer Geliştirme Programı kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK, Proje No:112T994) tarafından desteklenmiştir.

İçindekiler

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1 Kontakt Manifold Tanımı	4
2.2 Topolojik Düğümler	9
2.2.1 Kıvrılma Sayısı ve Bağlanma Sayısı	11
2.2.2 Seifert Yüzeyler	12
2.2.3 Bir Düğümün Seifert Çatısı	15
2.3 Legendre Düğümleri	15
2.3.1 Bir Legendre Düğümün Kontakt Çatısı	18
2.4 Klasik Değişmezler	19
2.4.1 Düğüm Tipi	19
2.4.2 Thurston-Bennequin Değişmezi	20
2.4.3 Dönme Sayısı	21
2.5 Stabilizasyon Operasyonu	23
2.6 Sınıflandırma Çeşitleri	24
2.7 Tayt ve Aşırı Dönen Kontakt Manifold	25
2.8 Konveks Yüzey Teorisi ve Bölen Eğrileri	26
2.8.1 Konveks Yüzeyler	27
2.8.2 Standart Konveks Torus	28
2.8.3 Katı Torus Üzerindeki Tayt Kontakt Yapılar	28
2.9 Ameliyatlar ve Kirby Hesapları	29

2.9.1	Dehn Ameliyatları	29
2.9.2	Kirby Hareketleri	30
2.9.3	Kontakt Ameliyatlar	33
2.10	Kontakt Yapıların Homotopi Değişmezleri	35
2.11	Aşırı Dönen Kontakt Yapılar İçerisindeki Legendre Düğümleri	36
3	GELİŞME	38
3.1	Standart tayt kontakt 3-küre S^3 içerisindeki Legendre çözümlerinin sınıflandırılması	38
3.2	Aşırı dönen kontakt 3-küre S^3 içerisindeki Legendre çözümlerinin sınıflandırılması	39
3.3	Teorem 3.1.1'in ve Teorem 3.2.1'in ispatı	39
4	SONUÇ	50
	KAYNAKLAR	51
	ÖZGEÇMİŞ	54

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	3-manifold
TM	M ' in teğet demeti
α	M üzerinde kontakt 1-form
ξ	M üzerinde bir kontakt yapı
\mathbb{R}^3	3-boyutlu Öklit uzayı
ξ_{st}	Standart kontakt yapı
ξ_{sm}	Simetrik kontakt yapı
ξ_a	Aşırı dönen kontakt yapı
Φ	Kontaktomorfizma
K	Herhangi bir düğüm
S^3	3-küre
U	Çözümlü düğüm
Σ	Seifert yüzey
$\partial\Sigma$	Σ yüzeyinin sınır
L	Legendre düğümü
$\Theta(L)$	L düğümünün ön izdüşüm diagramı
$KS(L)$	L düğümünün kıvrılma sayısı
$bl(K_1, K_2)$	K_1 ve K_2 düğümlerinin bağlanma sayısı
$K(L)$	L düğümünün tipi
$tb(L)$	L düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi
$BS(L)$	L düğümünün boynuz sayısı
$r(L)$	L düğümünün dönme sayısı
$S(L)$	L düğümünün stabilizasyonu
∂D	D diskinin sınırı
Γ_Σ	Konveks yüzey Σ' nın bölen eğri kümesi
$N(K)$	Katı torus komşuluğu
$H(M)$	M uzayının homoloji sınıfı
f	L düğümünün topolojik diagramda çatısı
$d_2(\xi)$	ξ kontakt yapı için manifoldun 2-iskeleti üzerinde homotopi değişmezi
$d_3(\xi)$	ξ kontakt yapı için manifoldun 3-iskeleti üzerinde homotopi değişmezi

Şekil Listesi

1	\mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde standart kontakt yapı.	5
2	\mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde simetrik kontakt yapı.	7
3	\mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde aşırı dönen kontakt yapı.	8
4	Çözük düğüm.	10
5	Trefoil düğümü.	10
6	Sekiz düğümü.	10
7	Yönlü düğüm örnekleri.	11
8	Yönlü Hopf link.	11
9	Pozitif ve negatif çaprazlama.	12
10	Kompakt, sınır bileşeni olmayan yüzey örnekleri.	12
11	1-sınır bileşeni olan bir yüzey örneği.	13
12	2-sınır bileşeni olan bir yüzey örneği.	13
13	Yönlendirilebilen bir yüzey örneği.	14
14	Yönlendirilemeyen bir yüzey örneği.	14
15	D^2 disk sınır bileşeni $\partial D^2 = U$ olan çözük düğümün Seifert yüzeyidir. .	15
16	Ön izdüşüm ile Legendre düğümüne dönüşmüş, bilinen birkaç düğüm örneği.	17
17	Herhangi bir topolojik düğümü Legendre düğümüne dönüştürme yolları.	18
18	Trefoil düğüm tipinin bir Legendre düğümü temsili.	18
19	Topolojik düğüm tipi çözük düğüm.	19
20	Topolojik düğüm tipi trefoil.	19
21	Legendre çözük düğüm L , $tb(L) = -3$	20
22	Legendre çözük düğüm L ve paralel itmesi L' , $tb(L) = -3$	21
23	Çözük düğüm örnekleri.	22
24	Pozitif stabilizasyon $S_+(L)$ ve negatif stabilizasyon $S_-(L)$	23
25	Legendre çözük düğümünün pozitif stabilizasyonu ve negatif stabilizasyonu.	24
26	Tayt(soldaki) ve aşırı dönen(sağdaki) kontakt manifold şekilleri.	26
27	S^2 yüzeyinin (\mathbb{R}^3, ξ_{sm}) içerisindeki karakteristik yapraklanması.	27
28	Bölen eğri kırmızı çizgi ile belirtilmiştir.	28
29	Dehn ameliyatı ile S^3 3-küre elde etme.	30
30	Kirby hareketleri- $K1$	31

31	Kirby hareketleri- $K2$	31
32	(± 1) söndürme/ patlatma.	31
33	(± 1) söndürme/ patlatma.	32
34	(± 1) söndürme/ patlatma genel durum.	32
35	Söndürme işlemi.	32
36	Aşırı dönen kontakt S^3	34
37	Kontakt ameliyat.	34
38	Thurston-Bennequin değişmezi 0 olan Legendre düğümü.	35
39	Gevşek olmayan bir Legendre düğümü örneği.	37
40	Legendre çözükle düğümlerin Legendre izotopiye göre tam listesi.	39
41	$tb(L) = -1$ ve $r(L) = 0$	41
42	$tb(L) = -2$ ve $r(L) = \pm 1$	41
43	$tb(L) = -3$ ve $r(L) = \pm 2, r(L) = 0$	42
44	$(tb, r) = (1, 0)$ olan gevşek olmayan Legendre çözükle düğümü.	44
45	Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişmezinin hesaplanması, $tb = 1$	45
46	$(tb, r) = (2, \pm 1)$ olan gevşek olmayan Legendre çözükle düğümleri.	46
47	Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişmezinin hesaplanması, $tb = 2$	46
48	$(tb, r) = (n, \pm(n - 1))$ olan gevşek olmayan Legendre çözükle düğümleri, $n \geq 3$	47
49	Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişmezinin hesaplanması, $tb \geq 3$	48

1 GİRİŞ

Kontakt yapılar manifoldlar üzerinde tanımlanan doğal yapılardır. 3-manifold düzleminde bir kontakt yapı manifold üzerine dağılmış maksimal integrallenemeyen 2-düzlem alanıdır. Üzerinde kontakt yapı bulunan bir manifoldda kontakt manifold denir. Kontakt 3-manifoldların topolojisini çalışmak amacı ile alt manifoldları ve alt manifoldların komşuluğundaki kontakt yapılar çalışılabilir. Özel olarak kontakt manifoldlar içerisindeki düğümler çalışılabilir. Kontakt 3-manifoldlar içerisinde kontakt düzlemlere her yerde teğet olan düğümler ve kontakt düzlemlere her yerde dik olan düğümler olmak üzere iki tip düğüm vardır.

Kontakt düzlemlere her yerde teğet olan düğüme Legendre düğümü denir. Bu tez çalışmasında, Legendre düğümleri çalışılacaktır. Legendre düğümlerinin üç adet klasik değişmezi vardır. Bu değişmezler sırası ile düğüm tipi, Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısıdır. Bu tez çalışmasında, aynı klasik değişmezlere sahip Legendre düğümlerinin sınıflandırılması çalışılmıştır.

Her 3-manifold üzerinde mutlaka bir kontakt yapı vardır, [1]. Kontakt yapılar tayt ve aşırı dönen olmak üzere ikiye ayrılır, [2], [3]. Her 3-manifold üzerinde her zaman aşırı dönen kontakt bir yapı bulunabilir, [3]. Öte yandan bazı 3-manifoldlar üzerinde hiç tayt kontakt yapı olmayabilir, [4]. Etnyre ve Honda, [4] makalesinde üzerinde tayt kontakt yapı olmayan kontakt bir 3-manifold inşa etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, en basit kontakt 3-manifold olan 3-küre S^3 içerisindeki en temel düğüm tipi olan çözükle düğümler ele alınmıştır.

Standart tayt kontakt S^3 içerisindeki çözükle düğümlerinin sınıflandırılması ilk olarak Eliashberg-Fraser tarafından [5] makalesinde yapılmıştır. Eliashberg-Fraser aynı makalede homotopi değişmezi $d_3 = \frac{1}{2}$ 'ye sahip aşırı dönen kontakt S^3 içerisindeki tümleyeni tayt olan çözükle düğümleri sınıflandırmışlardır. Ayrıca, Eliashberg-Fraser aynı makalede S^3 uzayının üzerindeki tüm aşırı dönen kontakt yapılar içerisinde sadece homotopi değişmezi $d_3 = \frac{1}{2}$ olan aşırı dönen kontakt yapı içerisinde tümleyeni tayt olan çözükle düğümlerinin olabileceği, diğer aşırı dönen kontakt yapılar içerisinde ise var olmadığını göstermişlerdir.

Çözükle düğümlerinin sınıflandırılmasından sonra Legendre torus düğümlerinin ve Legendre Sekiz düğümünün standart kontakt S^3 içerisindeki sınıflandırılması Etnyre-Honda tarafından [6] makalesinde yapılmıştır.

Son yıllarda standart tayt kontakt S^3 manifoldu dışındaki tayt kontakt 3-manifoldlar içerisindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırılması da çalışılmıştır. Literatürde bu çalışmalara örnek vermek gerekirse tayt kontakt lens uzaylar içerisindeki rasyonel çözümlük düğümlerinin sınıflandırılması Geiges-Onaran tarafından [7] makalesinde yapılmıştır. Geiges-Onaran herhangi bir p tamsayısı için $L(p, 1)$ lens uzayı içerisindeki rasyonel çözümlük düğümlerinin sınıflandırılmasını yapmış ve çözümlük düğümlerinin açık listesini vermiştir, [7]. Aynı sınıflandırma sadece p tek tam sayıları için $L(p, 1)$ uzaylarında Baker-Etnyre tarafından [8] makalesinde yapılmış sınıflandırma için sadece sayı verilmiştir, düğümlerinin açık listesi verilmemiştir. Geiges-Onaran yine aynı [7] makalesinde aşırı dönen kontakt lens uzayları içerisindeki tümleyeni tayt olan rasyonel çözümlük düğümlerinin sınıflandırılmasını yapmışlardır. Geiges-Onaran, Eliashberg-Fraser'ın tümleyeni tayt olan çözümlük düğümlerinin sadece homotopi değişmezi $d_3 = \frac{1}{2}$ olan aşırı dönen S^3 içerisinde var olması durumuna benzer şekilde tümleyeni tayt olan rasyonel çözümlük düğümlerinin tüm aşırı dönen lens uzayları içerisinde sadece iki tanesi içerisinde var olabileceğini göstermişlerdir.

Lens uzayları dışında kontakt 3-torus T^3 uzayı içerisindeki Legendre lineer eğrilerinin sınıflandırılması Ghiggini tarafından [9] makalesinde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında, Legendre düğümlerinin sınıflandırılma tekniklerinin öğrenilmesi amacı ile Legendre çözümlük düğümlerinin sınıflandırılması çalışıldı. Standart tayt S^3 içerisindeki çözümlük düğümler ve aşırı dönen kontakt S^3 içerisindeki tümleyeni tayt olan çözümlük düğümlerinin sınıflandırılması detaylı olarak verildi.

Tezin temel tanım ve kavramlar bölümünde kontakt 3-manifold tanımı verildi ve çeşitli kontakt yapı örnekleri ayrıntılı olarak incelendi. Yine aynı bölümde Legendre düğümleri, Legendre düğümlerinin klasik değişmezleri tanımlandı ve değişmezler çeşitli Legendre düğümü örnekleri için hesaplandı. Sınıflandırılmada kullanılan en temel teknik olan konveks yüzey teorisi tanıtıldı. Ayrıca yine aynı bölümde ameliyat teknikleri ve bu tekniklerin kontakt ameliyatları verildi.

Tezin gelişme bölümünde kontakt S^3 manifoldu içerisindeki çözümlük düğümlerinin sınıflandırılması sırası ile tayt kontakt S^3 içerisinde ve daha sonra aşırı dönen kontakt S^3 içerisinde detaylı olarak verildi.

Tezin son bölümü olan sonuç bölümünde ise tayt kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümleri sınıflandırılma teknikleri ile aşırı dönen kontakt manifoldlar içeri-

sindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırılma teknikleri karşılaştırılarak analiz edildi. Son olarak çözümler dışında düğüm tipine sahip düğümlerin sınıflandırılmasında çıkabilecek sorunlar listelendi.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileri bölümlere temel oluşturacak bazı bilgilere yer verilecektir. İlk olarak kontakt yapı ve kontakt manifold tanımı verilerek, pekiştirmek amaçlı bazı 3-boyutlu manifoldlar içinde kontakt yapılar örneklendirilecektir. Topolojik düğümler tanımlandıktan sonra Legendre düğümü ve bir Legendre düğümünün ön izdüşümü tanımlanacaktır. Daha sonra bir Legendre düğümün klasik değişmezleri tanımlanarak örnekler üzerinde klasik değişmezler hesaplanacaktır. Bir Legendre düğüme uygulanan ve yeni bir Legendre düğüm elde etmemizi sağlayan stabilizasyon operasyonu tanımlanacaktır. Legendre düğümlerinin sınıflandırılması ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Yine bu bölümde, çözümlü düğümlerin sınıflandırılmasında kullanılacak olan konveks yüzey teorisi ve ameliyat teknikleri konuları ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Bu konularda daha detaylı bilgi sahibi olmak için [10] kitabına ve [11], [12] makalelerine bakınız.

2.1 Kontakt Manifold Tanımı

3-boyutlu manifoldlar üzerine dağılmış integrallenebilen 2-düzlem alanları ya da integrallenemeyen 2-düzlem alanları vardır. Kapalı, yönlü bir 3-manifold'un üzerinde bir kontakt yapı manifold üzerine dağılmış integrallenemeyen 2-düzlem alanı olarak tanımlanır. Verilen bir M 3-manifoldu ve $p \in M$ noktası için, M 'nin p noktasındaki teğet uzayı T_pM ile gösterilsin. M 'nin teğet demeti ise $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ ile gösterilsin. Daha açık bir ifade ile kontakt yapıyı tanımlayalım:

Tanım 2.1.1 [11] M yönlü 3-boyutlu bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde 1-form $\alpha : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\text{Çek}\alpha = \{v \in TM | \alpha(v) = 0\}$ kümesi α 'nın çekirdeği olsun. Eğer M üzerine 1-form α , $\alpha \wedge (d\alpha) \neq 0$ ve lokal olarak $\xi = \text{Çek}\alpha$ koşulunu sağlıyor ise α 'ya M üzerinde *kontakt 1-form*, 2-düzlem alanı ξ 'ye M üzerinde bir *kontakt yapı* denir.

Tanım 2.1.2 [10] [11] Üzerinde bir kontakt yapı ξ bulunan 3-manifold M 'ye kontakt 3-manifold denir ve (M, ξ) ile gösterilir.

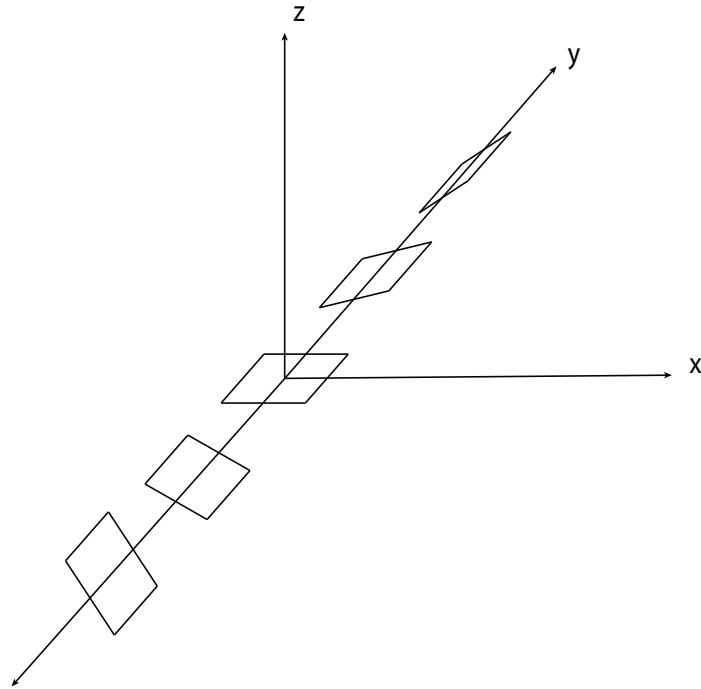
Örnek 1 [10] [11] \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde *standart kontakt yapı*; 1-form $\alpha = dz - ydx$ olmak üzere $\xi_{st} = \text{Çek}\alpha$ dir. $\alpha = dz - ydx$ olduğunda $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ olduğunu görelim:

$$d\alpha = d(dz) - [dy \wedge dx + yd(dx)] = -dy \wedge dx = dx \wedge dy$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge d\alpha &= (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= dz \wedge dx \wedge dy - \underbrace{ydx \wedge dx \wedge dy}_0 \\
&= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan ξ_{st} , \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde bir kontakt yapıdır. Kontakt ξ_{st} yapısı bir (x, y, z) noktasında $\left\{ \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ kümesi ile üretilir.



Şekil 1: \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde standart kontakt yapısı.

Örnek 2 [10] [11] \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde 1-form $\alpha = dz + xdy$ olmak üzere, $\xi_2 = \text{Çek}\alpha$ bir kontakt yapısıdır. Gerçekten de

$$d\alpha = \underbrace{d(dz)}_0 + dx \wedge dy + x \underbrace{d(dy)}_0 = dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge d\alpha &= (dz + xdy) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= dz \wedge dx \wedge dy + \underbrace{xdy \wedge dx \wedge dy}_0 \\
&= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan ξ_2 , \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde bir kontak yapıdır ve bir (x, y, z) noktasında $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, -x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ kümesi ile üretilir.

Örnek 3 [11] \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde 1-form $\alpha = dz - ydx + xdy$ kontakt form olmak üzere, $\xi_{sm} = \text{Çek}\alpha$ bir kontakt yapıdır. \mathbb{R}^3 manifoldu üzerindeki bu kontakt yapıya *simetrik kontakt yapı* denir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d(dz) - [dy \wedge dx + yd(dx)] + dx \wedge dy + xd(dy) \\
&= -dy \wedge dx + dx \wedge dy = 2dx \wedge dy
\end{aligned}$$

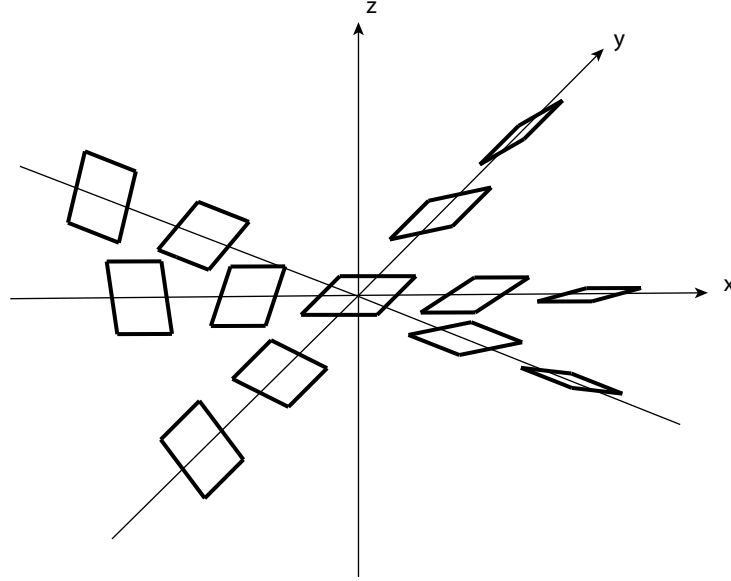
olur. O halde;

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge d\alpha &= (dz - ydx + xdy) \wedge (2dx \wedge dy) \\
&= dz \wedge 2dx \wedge dy - 2ydx \wedge dx \wedge dy + 2xdy \wedge dx \wedge dy \\
&= 2dx \wedge dy \wedge dz \neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan ξ_{sm} , \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde bir kontakt yapıdır. \mathbb{R}^3 manifoldu üzerindeki ξ_{sm} kontakt yapısı

$$\begin{aligned}
y \neq 0 \text{ iken } &\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \text{ kümesi ile,} \\
x \neq 0 \text{ iken } &\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right\} \text{ kümesi ile,} \\
x = y = 0 \text{ iken } &\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \text{ kümesi ile}
\end{aligned}$$

üretilir. Polar koordinatlar kullanarak kontakt 1-form α ; $\alpha = dz - ydx + xdy = dz + r^2 d\theta$ olacak şekilde yazılır.



Şekil 2: \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde simetrik kontakt yapı.

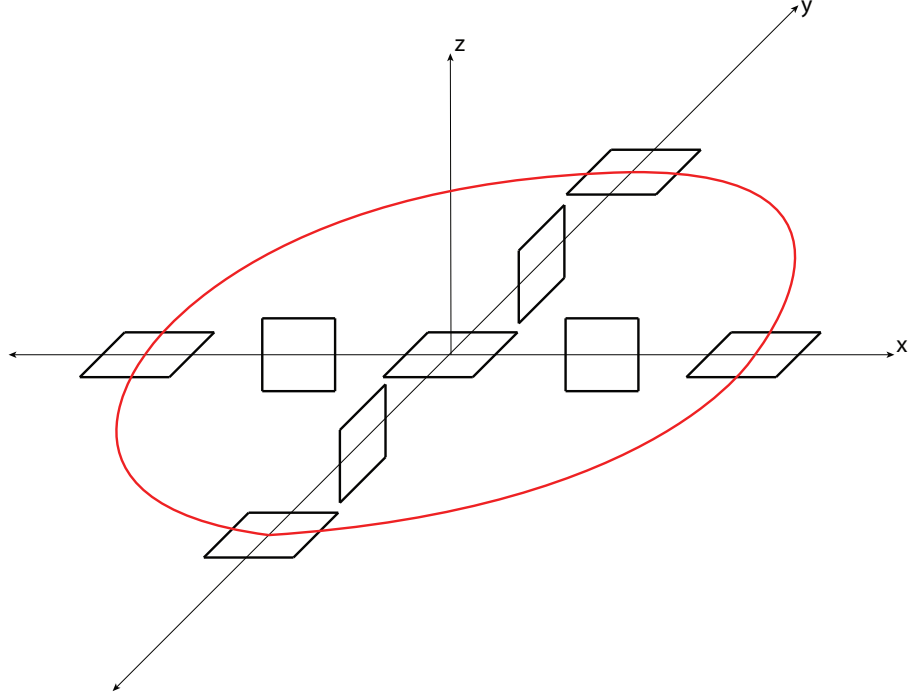
Örnek 4 [10] [11] \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde, 1-form $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\theta$ olmak üzere $\xi_a = \text{Çek}\alpha$ bir kontakt yapısıdır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\sin r dr \wedge dz + \cos r d(dz) + \underbrace{d(r \sin r)}_{(\sin r + r \cos r)dr} \wedge d\theta + r \sin r d(d\theta) \\ &= -\sin r dr \wedge dz + (\sin r + r \cos r)dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha &= (\cos r dz + r \sin r d\theta) \wedge (-\sin r dr \wedge dz + \sin r dr \wedge d\theta + r \cos r dr \wedge d\theta) \\ &= \cos r \sin r dr \wedge d\theta \wedge dz + r dr \wedge d\theta \wedge dz \\ &= \left(\frac{\cos r \sin r}{r} + 1\right) r dr \wedge d\theta \wedge dz \neq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$r > 0$ için $\left(\frac{\cos r \sin r}{r} + 1\right) > 0$ olduğundan; ξ_a , \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde kontakt yapısıdır ve (r, θ, z) noktasında $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, -r \sin r \frac{\partial}{\partial z} + \cos r \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ kümesi ile üretilir.



Şekil 3: \mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde aşırı dönen kontakt yapı.

Tanım 2.1.3 [10] (M, ξ) ve (M', ξ') iki kontakt 3-manifold olsun. Eğer $\Phi : M \rightarrow M'$ $\forall p \in M$ için $d\Phi_p(\xi_p) = \xi'_{\Phi(p)}$ eşitliğini sağlayan bir difeomorfizma ise, Φ difeomorfizmasına M manifoldundan M' manifolduna *kontaktomorfizma* denir. Bu durumda (M, ξ) ve (M', ξ') kontakt manifoldlarına *kontaktamorfik* kontakt manifoldlar denir.

Örnek 5 Örnek 1'de verilen (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) ve Örnek 2'de verilen (\mathbb{R}^3, ξ_2) kontakt 3-manifoldları kontaktamorfik manifoldlardır.

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^3, \xi_{st}) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_2) \\ (x, y, z) &\mapsto (y, x, -z) = (x', y', z') \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa ξ_{st} kontakt yapısını üreten $\left\{ \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ vektörlerini, ξ_2 kontakt yapısını üreten $\left\{ \frac{\partial}{\partial x'}, -x' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y'} \right\}$ vektörlerine götüren bir difeomorfizma tanımlanmış olur. Φ difeomorfizması $d\Phi(\xi_{st}) = \xi_2$ eşitliğini sağlayan bir kontaktomorfizmadır.

$$\begin{aligned} d\Phi : T\mathbb{R}^3 &\rightarrow T\mathbb{R}^3 \\ \xi_{st_p} &\mapsto d\Phi_p(\xi_{st}) = \xi_{2_{\Phi(p)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\Phi_{(x,y,z)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x'}
\end{aligned}$$

ve $(y, x, -z) = (x', y', z')$ eşitliğini, özel olarak $y = x'$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
d\Phi_{(x,y,z)}\left(y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -y \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial y'} - y\frac{\partial}{\partial z'} \\
&= \frac{\partial}{\partial y'} - x'\frac{\partial}{\partial z'}
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.4 (Darboux Teoremi, [13]) (M, ξ) kontakt 3-manifold olsun. Her $p \in M$ noktasının M 'de, (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) içindeki $(0, 0, 0)$ noktasının bir V komşuluğuna kontakto-morfik olacak şekilde bir U komşuluğu vardır.

Darboux Teoremi lokal olarak tüm kontakt manifoldların aynı görüldüğünü söyler.

2.2 Topolojik Düğümler

Bu bölümde topolojik düğümler ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Daha fazla bilgi için [14] ve [15] kitaplarına bakınız.

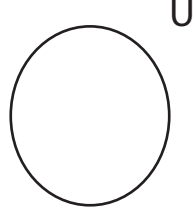
Tanım 2.2.1 [14] 3-boyutlu \mathbb{R}^3 manifoldunun (ya da 3-küre S^3 manifoldunun) birim çember S^1 'e homeomorfik olan alt kümelerine *düğüm* denir.

Genel olarak 3-manifoldlar içerisindeki düğümler de tanımlanabilir.

Tanım 2.2.2 [14] 3-boyutlu M manifoldu içerisinde birim çember S^1 'in gömmesi $g : S^1 \hookrightarrow M$ 'nin görüntüsü $g(S^1)$ 'e *düğüm* denir.

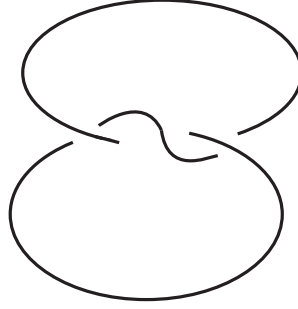
Düğümler 1-manifold örnekleridir. Düğümleri kendi kendisini kesmeyen kapalı eğriler olarak da düşünebiliriz.

Örnek 6 En basit düğüm örneği çözüktür, Şekil 4'te verilmiştir.



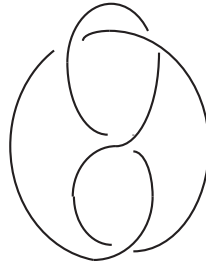
Şekil 4: Çözüktür.

Örnek 7 Çözüktürden sonra verilebilecek ilk düğüm örneği trefoil adı verilen düğümdür ve Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5: Trefoil düğümü.

Örnek 8 Diğer bir düğüm örneği Sekiz düğümdür, Şekil 6'da verilmiştir.

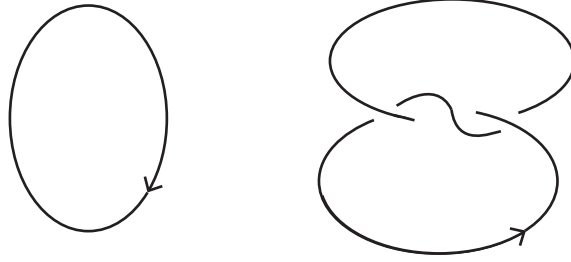


Şekil 6: Sekiz düğümü.

Düğümlere yön verebiliriz.

Tanım 2.2.3 [14] [15] Bir düğümün yönü, düğümün etrafında gideceğimiz yönü seçmek olarak tanımlanır. Yön verilmiş düğüme *yönlü düğüm* denir.

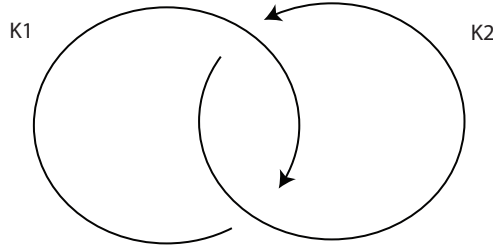
Örnek 9 Yönlü bir çözüük düğüm ve yönlü bir trefoil düğümü Şekil 7’de verilmiştir.



Şekil 7: Yönlü düğüm örnekleri.

Tanım 2.2.4 [14] [15] Düğümlerin ayrık birleşimlerine link denir.

Örnek 10 K_1 ve K_2 çözüük düğümlerinin birleşiminden oluşan Hopf link Şekil 8’de verilmiş bir link örneğidir.



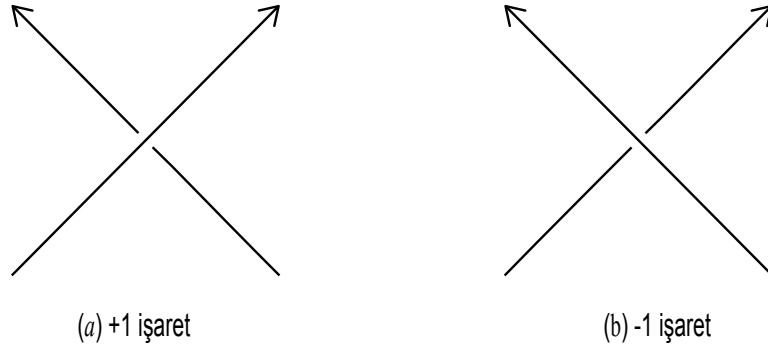
Şekil 8: Yönlü Hopf link.

2.2.1 Kıvrılma Sayısı ve Bağlanma Sayısı

Verilen yönlü düğüm ya da yönlü link diyagramının her bir çaprazlaması için bir sayı verilebilir.

Tanım 2.2.5 [14] Şekil 9(a)’da gördüğümüz düğüm çaprazlamasına *pozitif* çaprazlama denir ve işareti $+1$ ’dir. Şekil 9(b)’de gördüğümüz düğüm çaprazlamasına *negatif* çaprazlama denir ve işareti -1 ’dir.

Tanım 2.2.6 [14] Yönlü bir K düğümünde pozitif ile negatif çaprazlamaların işaretlerinin toplamına düğümün *kıvrılma sayısı* (writhe) denir ve $KS(L)$ ile gösterilir.



Şekil 9: Pozitif ve negatif çaprazlama.

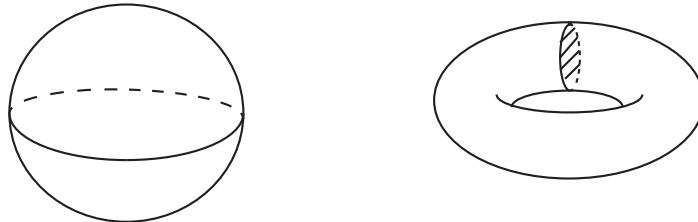
Tanım 2.2.7 [14] K_1 ve K_2 olmak üzere iki yönlü düğüm verilsin. Sadece K_1 ve K_2 düğümlerinin birbirleri arasındaki çaprazlamalardan gelen $+1$ ve -1 işaretlerin toplamının yarısına K_1 ve K_2 düğümlerinin *bağlanma sayısı* denir ve $bl(K_1, K_2)$ ile gösterilir.

Örnek 11 Şekil 8’de verilen K_1 ve K_2 çözükle düğümlerinin bağlanma sayısı $bl(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$ ’dir.

2.2.2 Seifert Yüzeyler

Tanım 2.2.8 [14] Bağlantılı 2-manifoldlara yüzey denir.

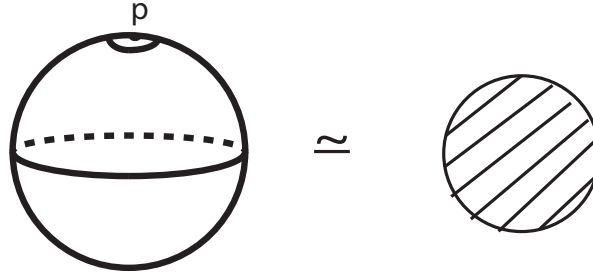
Örnek 12 Şekil 10’da verilen 2-küre ve torus yüzeyleri kompakt ve sınır bileşeni olmayan yüzeylere örnektir.



Şekil 10: Kompakt, sınır bileşeni olmayan yüzey örnekleri.

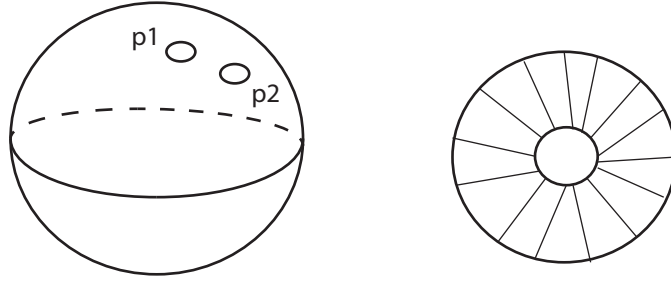
Disk ve halka sınır bileşeni olan yüzeylere birer örnektir.

Örnek 13 p noktası S^2 üzerinde bir nokta olmak üzere, 1-sınır bileşeni olan 2-küre $S^2 - \{p\}$ disk D^2 'ye homeomorftir.



Şekil 11: 1-sınır bileşeni olan bir yüzey örneği.

Örnek 14 p_1, p_2 noktaları S^2 üzerinde iki nokta olmak üzere, 2-sınır bileşeni olan 2-küre $S^2 - \{p_1, p_2\}$ halkaya homeomorftir.

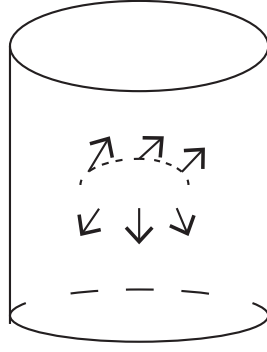


Şekil 12: 2-sınır bileşeni olan bir yüzey örneği.

Yüzeyin üzerindeki herhangi bir noktada normal vektörü düşünüldüğünde normal vektörü ya yüzeyin içine doğru ya da yüzeyin dışına doğru işaret eder. Bir yüzeyin her noktasında her zaman içe doğru ya da her zaman dışa doğru olacak şekilde normal vektörü seçilebiliyorsa yüzeye yön verilmiş olunur.

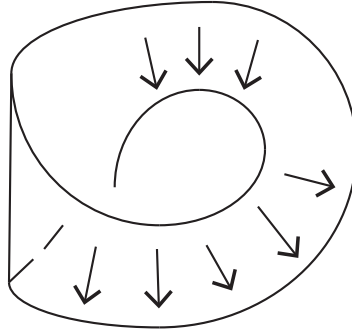
Tanım 2.2.9 [15] Her noktası için tutarlı bir normal vektörü seçebildiğimiz yüzeylere *yönlendirilebilen yüzey* denir. Aksi halde *yönlendirilemeyen yüzey* olarak adlandırılır.

Örnek 15 İki sınır bileşenine sahip olan silindir yüzeyinin her noktasında normal vektörü dışa doğru seçilebilir, bu nedenle silindir yüzeyi sınırı olan yönlendirilebilen bir yüzeye örnektir, Şekil 13'te verilmiştir.



Şekil 13: Yönlendirilebilen bir yüzey örneği.

Örnek 16 Şekil 14’te verilen Möbius bandı üzerinde bazı noktalarda normal vektörü dışa doğru, bazı noktalarda ise içe doğrudur. Her zaman içe doğru ya da her zaman dışa doğru olacak şekilde tutarlı bir seçim yapamadığımız için Möbius bandı yönlendirilemeyen bir yüzeye örnektir.

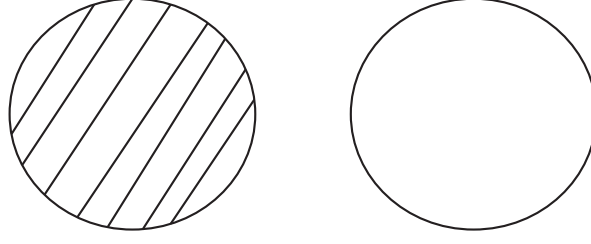


Şekil 14: Yönlendirilemeyen bir yüzey örneği.

Teorem 2.2.10 (Seifert, 1934)[14][15] 3-küre S^3 manifoldunun içerisindeki her yönlü düğüm yönlendirilebilen sınır bileşeni olan bir yüzeyin sınır bileşenidir. Yani, S^3 içerisinde verilen herhangi bir K düğümü için $\partial\Sigma = K$ olacak şekilde, yönlendirilebilen bir Σ yüzeyi vardır.

Tanım 2.2.11 [14][15] Yönlendirilebilen ve $\partial\Sigma = K$ koşulunu sağlayan Σ yüzeyine K düğümünün Seifert yüzeyi denir.

Örnek 17 Şekil 15’te verilen çözükle düğümün Seifert yüzeyi diskidir.



Şekil 15: D^2 disk sınır bileşeni $\partial D^2 = U$ olan çözükle düğümün Seifert yüzeyidir.

Herhangi bir 3-manifold içerisinde bir düğümün homolojik olarak aşikar olması demek, bu düğümün sınır bileşeni olduğu bir Seifert yüzeyin bulunabilmesi demektir. Bu durumda Teorem 2.2.10'un sonucu olarak 3-küre S^3 manifoldu içerisindeki tüm düğümler homolojik olarak aşikardır.

2.2.3 Bir Düğümün Seifert Çatısı

Tanım 2.2.12 [14] K topolojik düğümü bir M 3-manifoldu içinde homolojik olarak aşikar bir düğüm ve Σ yüzeyi, K düğümü için bir Seifert yüzey olsun. K düğümünün Σ yüzeyi boyunca itilerek elde edilen paralel eğrisine karşılık gelen NL normal demetinin aşikarlamasına *Seifert yüzey çatısı* denir. Başka bir ifade ile; K düğümüne dik olacak ve Seifert yüzey üzerinde kalacak şekilde olan itilerek oluşturulan K' paralel kopyaları içerisinde bağlanma sayısı $bl(K, K') = 0$ olan paralel itmesi K düğümünün *Seifert yüzey çatısı* olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.13 [14] K bir düğüm olmak üzere, K' 'ya dik olacak ve Seifert yüzey üzerinde kalacak şekilde itilerek oluşturulan, K' paralel kopyaları içerisinde bağlanma sayısı $bl(K, K') = n$ olan paralel itmesine K düğümünün n *çatısı* denir.

2.3 Legendre Düğümleri

Tanım 2.3.1 [10] [12] (M, ξ) bir kontakt 3-manifold olsun. (M, ξ) manifoldu içindeki bir L düğümü eğer kontakt düzlemlere her yerde teğet ise, L düğümüne *Legendre düğümü* denir. Başka bir ifade ile; $\forall x \in L$ için $T_x L \in \xi_x$ ise L düğümüne Legendre düğümü denir.

L düğümü, (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) içerisinde bir Legendre düğüm olsun. L düğümünün bir parametrisasyonu

$$\begin{aligned}\Theta : S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\mapsto (x(\theta), y(\theta), z(\theta))\end{aligned}$$

olarak verilsin. Legendre L düğümünün ξ_{st} kontakt yapısına teğet olma durumu;

$$\Theta'(\theta) \in \xi_{\Theta(\theta)}$$

şeklinde ifade edilir. $\xi_{st} = \text{Çek}(dz - ydx)$ olduğundan,

$$z'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) = 0 \quad (2)$$

\mathbb{R}^3 manifoldu üzerinde bulunan standart kontakt yapı içindeki Legendre düğümlerini resmetmenin bir yolu ön izdüşüm yöntemidir.

Tanım 2.3.2 [10] [12] L düğümü (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) içerisinde bir Legendre düğümü olsun.

$$\begin{aligned}\Pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, z)\end{aligned}$$

izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, Π altında L düğümünün görüntü kümesi $\Pi(L)$, L düğümünün *ön izdüşüm diyagramı* olarak adlandırılır.

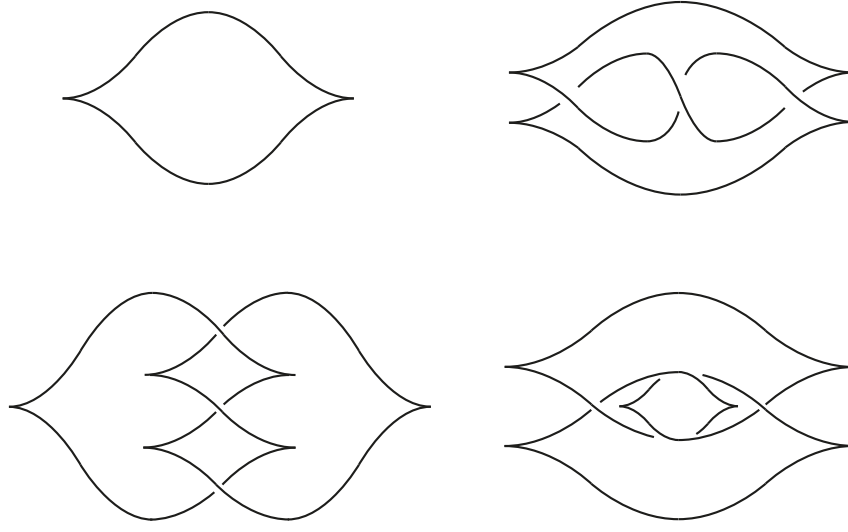
O halde yukarıdaki L 'nin parametrisasyonunu kullanarak, $\Theta(L)$ 'nin parametrisasyonu,

$$\begin{aligned}\Theta_{\Pi} : S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (x(\theta), z(\theta)) \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

$$z'(\theta) = y(\theta)x'(\theta) \quad [(2) \text{ eşitliğinden}]$$

Biliyoruz ki Θ_{Π} bir daldırma fonksiyonudur. Yani Θ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi her yerde birebir olan bir fonksiyondur. Daha açık bir ifade ile $\Theta_{\Pi} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ türevlenebilir ve her $p \in S^1$ için $d_p\Theta_{\Pi} : T_pS^1 \rightarrow T_p\mathbb{R}^2$ birebirdir. Legendre düğüm olma koşulundan elde edilen eşitliğe göre $z'(\theta) = y(\theta)x'(\theta)$ olmalıdır ve bu eşitliğe göre $x'(\theta) = 0$ olduğu her durumda $z'(\theta) = 0$ olmalıdır. Bu durumda Θ_{Π} bir daldırma fonksiyonu ve $y(\theta) = \frac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$ olduğundan $x'(\theta) = 0$ olduğu noktalarda Legendre düğümünün ön izdüşümünün dikey teğetleri vardır. Dikey teğeti olan bu noktalara Legendre düğümünün diyagramının *boynuzları* denir, [12]. Bir Legendre düğümün toplam boynuzlarının sayısı $BS(L)$ ile gösterilir.

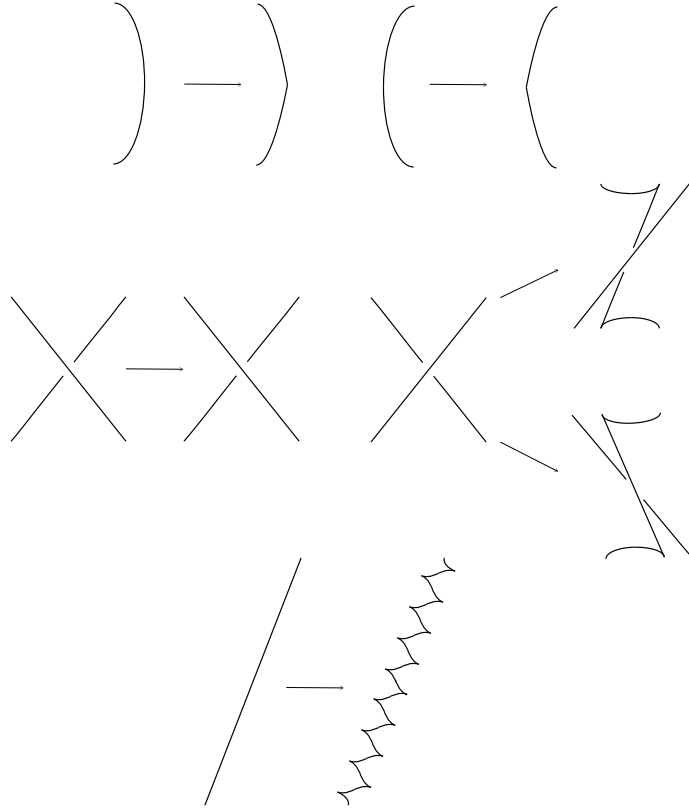
Örnek 18 Legendre çözükle düğüm, Legendre sağ trefoil, Legendre sol trefoil ve Legendre Sekiz düğümü örnekleri Şekil 16'de verilmiştir.



Şekil 16: Ön izdüşüm ile Legendre düğüme dönüşmüş, bilinen birkaç düğüm örneği.

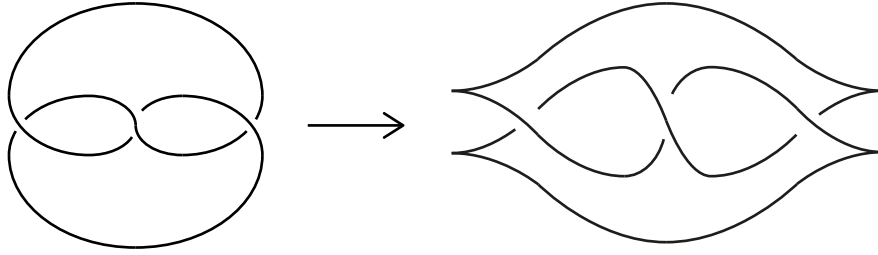
Teorem 2.3.3 [12] *Herhangi bir K topolojik düğümünün, kendi düğüm tipinde bir Legendre düğümü temsili vardır.*

Kanıt 2.3.4 *Verilen herhangi bir düğüm tipinin Legendre versiyonu Şekil 17'de verilen düğüm diyagramlarına yapılan değişiklikler uygulanarak bulunabilir.*



Şekil 17: Herhangi bir topolojik düğümü Legendre düğümüne dönüştürme yolları.

Örnek 19 \mathbb{R}^3 3-manifoldu içerisinde verilen bir trefoil topolojik düğümün, (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) içerisinde bir Legendre trefoil düğümü temsili Şekil 18’de verilmiştir.



Şekil 18: Trefoil düğüm tipinin bir Legendre düğümü temsili.

2.3.1 Bir Legendre Düğümün Kontakt Çatısı

Tanım 2.3.5 [16] Bir L Legendre düğümünün *kontakt çatısı*, Legendre L düğümüne dik olacak şekilde ve kontakt düzlemler üzerinde kalacak şekilde alınan sıfırdan farklı bir vektör alanı boyunca paralel itmesi olarak tanımlanır.

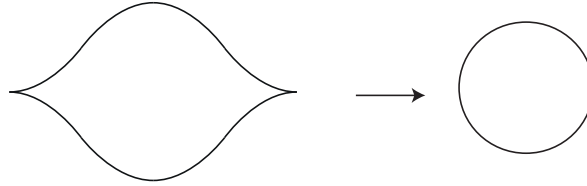
2.4 Klasik Değişmezler

L herhangi bir düğüm olmak üzere, $S^3 \setminus L$ topolojik uzayında bazı deformasyonlar yapılsa bile bazı özellikleri değişmiyor ve aynı sınıfa ait oluyorsa bu tip özelliklere değişmezler denir. Legendre düğümlerinin üç adet klasik değişmezi vardır: düğüm tipi, Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısı. Thurston-Bennequin değişmezi homolojik olarak aşık Legendre düğümleri için, rotasyon sayısı ise hem homolojik olarak aşık hem de yönlü Legendre düğümleri için tanımlanmıştır.

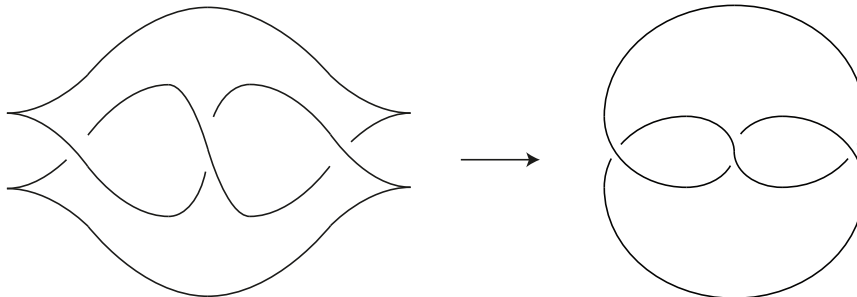
2.4.1 Düğüm Tipi

Bir Legendre düğümü için tanımlanabilecek en açık değişmez onun topolojik düğüm tipidir, [12].

Örnek 20 Şekil 19’da verilen Legendre çözükle düğümü ile Şekil 20’de verilen Legendre trefoil düğümünün düğüm tipi değişmezleri farklı olduğundan bu iki Legendre düğümü birbirinden farklıdır.



Şekil 19: Topolojik düğüm tipi çözükle düğümü.

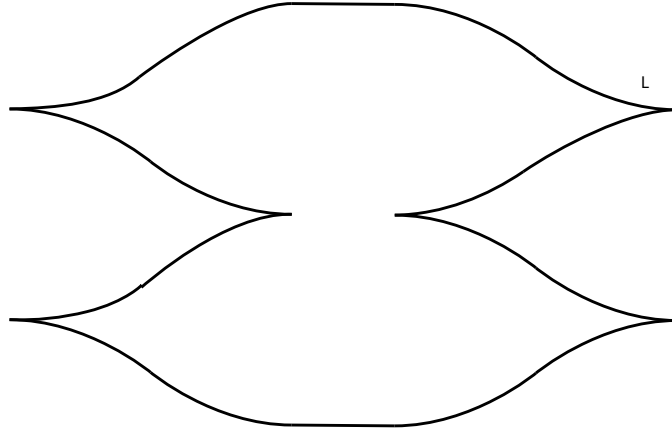


Şekil 20: Topolojik düğüm tipi trefoil.

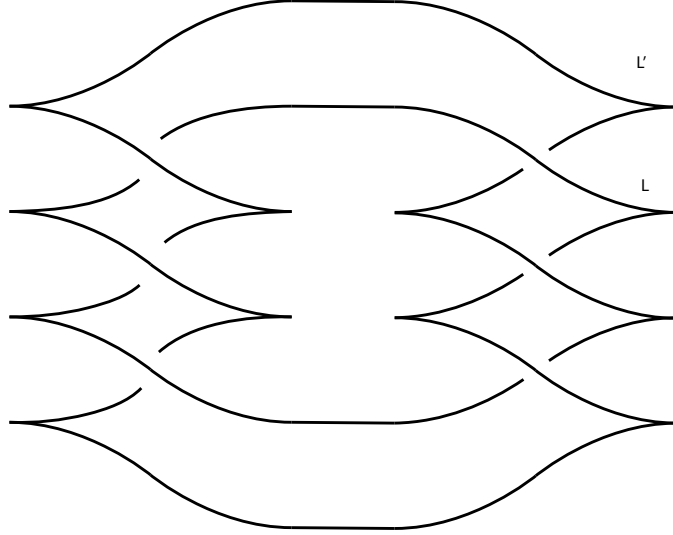
2.4.2 Thurston-Bennequin Değişmezi

Tanım 2.4.1 [12] [16] L düğümü (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içinde homolojik olarak aşık bir Legendre düğümü olsun. Legendre L düğümünün *Thurston-Bennequin değişmezi*, L 'nin Seifert yüzey çatısı (Tanım 2.2.12) ile kontakt çatısının (Tanım 2.3.5) birbirine göre dönmesinin hesaplanması olarak tanımlanır ve $tb(L)$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle, eğer Legendre L düğümü boyunca kontakt düzlem ξ 'ye dik bir vektör alanı seçersek ve bu vektör alanı boyunca L 'yi iterek L 'nin paralel itmesi L' alırsak, Legendre L düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L)$, L ile L' arasındaki bağlanma sayısı olan $bl(L, L')$ 'a eşittir.

Örnek 21 (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde bir Legendre L çözümlü düğümünün ön izdüşümü Şekil 21'de verilmiştir. $\frac{\partial}{\partial z}$ vektörü, standart kontakt düzlemlere, $\xi_{st} = \ker(dz - ydx)$ 'ye, her yerde diktir. L çözümlü düğümünü Şekil 22 gibi $\frac{\partial}{\partial z}$ vektörü yönünde iterek L düğümünün paralel itmesi L' elde ederiz. Böylece L düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = bl(L, L') = -3$ olarak hesaplanır.



Şekil 21: Legendre çözümlü düğüm L , $tb(L) = -3$.



Şekil 22: Legendre çözükle düğüm L ve paralel itmesi L' , $tb(L) = -3$.

(\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde verilen bir Legendre L düğümünün Thurston-Bennequin değışmezi verilen Legendre düğümün öz izdüşüm diyagramı kullanılarak hesaplanabilir.

Önerme 2.4.2 [10] [12] L düğümü (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde bir Legendre düğüm, $BS(L)$ bu düğümün ön izdüşüm diyagramındaki toplam boynuz sayısını ve $KS(L)$ de kıvrılma sayısını ifade etmek üzere, L düğümünün Thurston-Bennequin değışmezi,

$$tb(L) = KS(L) - \frac{1}{2}BS(L)$$

eşitliği ile verilir.

2.4.3 Dönme Sayısı

Tanım 2.4.3 [10] [12] L düğümü (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içinde homolojik olarak aşikar yönlü bir Legendre düğümü olsun. Yönlü Σ yüzeyi Legendre L düğümünün Seifert yüzeyi, yani $L = \partial\Sigma$ olsun. Kontakt düzlemlerin Σ yüzeyine kısıtlanması, $\xi|_{\Sigma}$, 2 boyutlu aşikar bir tanjant demetidir. Bu durumda $\xi|_{L} = L \times \mathbb{R}^2$ 'dir. L 'nin yönlü olduğunu bildiğimizden L ile aynı yönde L düğümüne teğet olan bir ν vektör alanı alalım. $\nu \in \xi|_{L} = L \times \mathbb{R}^2$ aşikar olduğundan ν 'yi \mathbb{R}^2 içinde sıfırdan farklı vektörler olarak düşünebiliriz ve bu vektörler \mathbb{R}^2 içinde bir dönme sayısına sahiptir. Bu dönme sayısı Legendre L düğümünün dönme sayısı olarak tanımlanır ve $r(L)$ ile gösterilir.

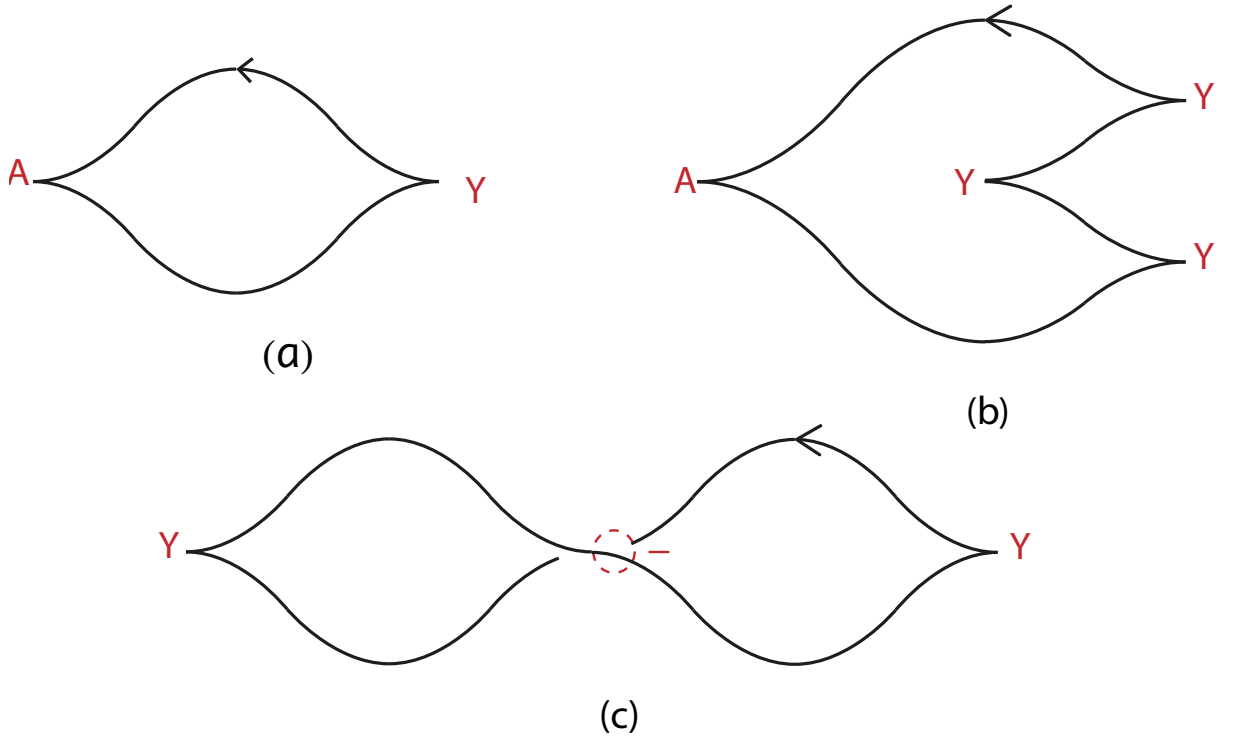
(\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde verilen bir Legendre L düğümünün dönme sayısı değişmezi verilen Legendre düğümün ön izdüşüm diyagramı kullanılarak hesaplanabilir.

Önerme 2.4.4 [10] [12] L düğümü, (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde bir Legendre düğüm olsun. Legendre L düğümünün ön izdüşüm diyagramında $BS_A(L)$ aşağı boynuzların toplam sayısını ve $BS_Y(L)$ yukarı boynuzların toplam sayısını ifade etmek üzere, Legendre L düğümünün dönme sayısı,

$$r(L) = \frac{1}{2}(BS_A(L) - BS_Y(L)) \quad (3)$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 22 Aşağıda verilen birkaç çözükle düğüm örneklerinin Thurston-Bennequin değişmezini ve dönme sayısı değişmezini hesaplayalım.



Şekil 23: Çözükle düğüm örnekleri.

(a) Herhangi bir çaprazlama olmadığı için $KS(L) = 0$ ve $BS(L) = 2$ ve böylece $tb(L) = \frac{-1}{2}(2) = -1$ olur. Bir adet aşağı bir adet de yukarı boynuz olduğundan $r(L) =$

0'dır.

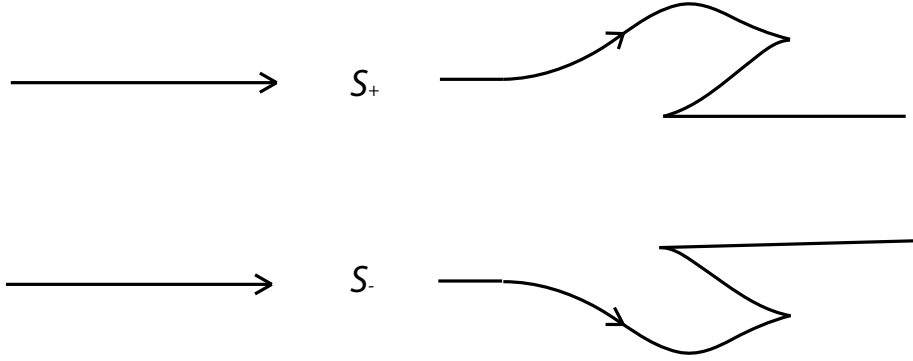
(b) Burada da $KS(L) = 0$ ve $BS(L) = 4$ olduğundan $tb(L) = \frac{-1}{2}(4) = -2$ olur. 3 yukarı, 1 aşağı topuk olduğundan $r(L) = \frac{1}{2}(1 - 3) = -1$ olur.

(c) Bu düğümdeki geçiş negatiftir ve $KS(L) = -1$, $BS(L) = 2$ ' dir. O halde $tb(L) = -1 - \frac{1}{2}(2) = -2$ olur. Aşağı boynuz yok ve yukarı boynuz sayısı 2 olduğundan $r(L) = \frac{1}{2}(0 - 2) = -1$ olur.

2.5 Stabilizasyon Operasyonu

Legendre düğümleri için stabilizasyon operasyonu lokal olarak (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kontakt 3-manifoldu içerisinde tanımlanır. Tüm kontakt 3-manifoldlar Darboux'un Teoreminden (Teorem 2.1.4) (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) 'ye kontaktomorfik olduğundan her kontakt 3-manifolda genellenir.

Tanım 2.5.1 [12] Herhangi bir Legendre düğümü diyagramına lokal olarak Şekil 24'deki değişiklikler yapılarak başka bir Legendre düğümüne dönüştürme işlemine *stabilizasyon* denir. Eğer Legendre düğümü diyagramına aşağı boynuz ekleniyorsa bu işleme *pozitif stabilizasyon* denir ve $S_+(L)$ ile gösterilir. Eğer Legendre düğümü diyagramına yukarı boynuz ekleniyorsa bu işleme de negatif *stabilizasyon* denir ve $S_-(L)$ ile gösterilir.



Şekil 24: Pozitif stabilizasyon $S_+(L)$ ve negatif stabilizasyon $S_-(L)$.

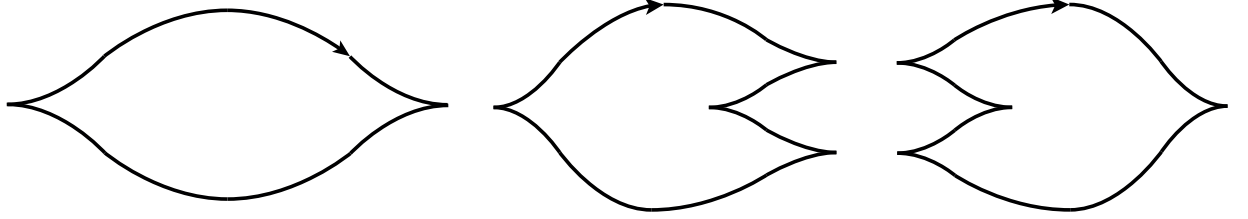
Bu stabilizasyon işlemi sonunda klasik değişmezler,

$$tb(S_+(L)) = tb(S_-(L)) = tb(L) - 1$$

$$r(S_+(L)) = r(L) + 1 \quad \text{ve} \quad r(S_-(L)) = r(L) - 1$$

şeklinde değişir.

Örnek 23 Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = -1$ ve dönme sayısı değişmezi $r(L) = 0$ olan Şekil 25'te verilen Legendre çözükle düğümün pozitif ve negatif stabilizasyonu sırasıyla yine Şekil 25'te verilmiştir. Legendre L çözükle düğümüne pozitif stabilizasyon yapıldığında değişmezleri $tb(S_+(L)) = -2$ ve $r(S_+(L)) = 1$ olur. Negatif stabilizasyon yapıldığında ise değişmezleri $tb(S_-(L)) = -2$ ve $r(S_-(L)) = -1$ olur.



Şekil 25: Legendre çözükle düğümünün pozitif stabilizasyonu ve negatif stabilizasyonu.

2.6 Sınıflandırma Çeşitleri

Legendre düğümleri iki şekilde sınıflandırılır.

Tanım 2.6.1 [12] L_1 ve L_2 düğümleri (M, ξ) kontakt 3-manifold içerisinde aynı klasik değişmezlere sahip iki Legendre düğümü olsun. Eğer L_1 düğümünü L_2 düğümüne götürecek bir kontaktomorfizma bulunabiliyorsa, L_1 ve L_2 düğümlerine *Legendre kontaktomorfik* düğümler denir. Daha açık bir ifade ile, eğer $\Phi(L_1) = L_2$ koşulunu sağlayan bir $\Phi : (M, \xi) \rightarrow (M, \xi)$ kontaktomorfizması bulunabiliyorsa L_1 ve L_2 düğümlerine *Legendre kontaktomorfik* düğümler denir.

Tanım 2.6.2 [12] L_1 ve L_2 düğümleri (M, ξ) kontakt 3-manifold içerisinde aynı klasik değişmezlere sahip iki Legendre düğümü olsun. Eğer L_1 düğümünü L_2 düğümüne götürecek ve birim fonksiyona izotopik bir kontaktomorfizma bulunabiliyorsa, L_1 ve L_2 düğümlerine *Legendre izotopik* düğümler denir. Daha açık bir ifade ile, eğer $\Phi(L_1) = L_2$ koşulunu sağlayan ve birim fonksiyona izotopik bir $\Phi : (M, \xi) \rightarrow (M, \xi)$ kontaktomorfizması bulunabiliyorsa L_1 ve L_2 düğümlerine *Legendre izotopik* düğümler denir.

Tanım 2.6.3 [12] Bir topolojik düğüm tipinin Legendre temsilleri klasik değişmezleri tarafından belirleniyorsa bu düğüm tipine *Legendre basit* denir. Yani aynı düğüm tipine sahip iki Legendre düğüm aynı klasik değişmezlere sahip olduğunda Legendre izotopik ise bu düğüm tipine *Legendre basit* denir.

2.7 Tayt ve Aşırı Dönen Kontakt Manifold

3-boyutlu kontakt manifoldlara özel olarak, kontakt yapılar iki önemli kategoriye ayrılır. Bu bölümde aşırı dönen disk tanımı yapılacak ve sonrasında aşırı dönen ve tayt kontakt manifold tanımlanacaktır.

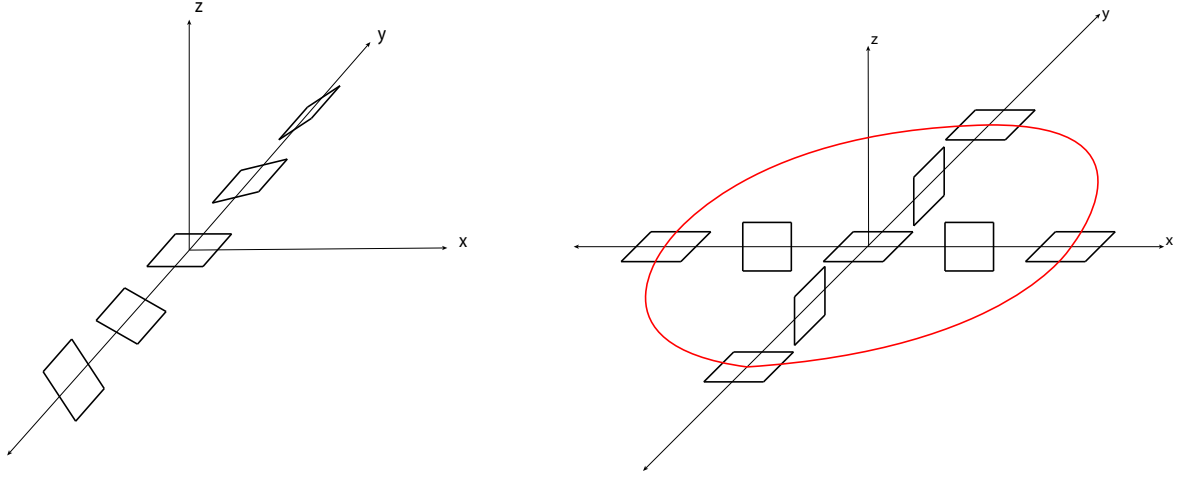
Tanım 2.7.1 [10] [11] Bir kontakt 3-manifold içerisinde gömülü, sınırı kontakt düzlemlere teğet ve sınırının diskten gelen Seifert çatısı, kontakt düzlemden gelen çatıya eşit olan diske *aşırı dönen disk* denir.

Aşırı dönen disk D 'nin sınırı $\partial D = L$ kontakt düzlemlere her yerde teğet olduğundan bir Legendre çözükle düğümdür ve Seifert yüzey çatısı ile kontakt çatısı eşit olduğundan $\partial D = L$ Legendre çözükle düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = 0$ dır.

Tanım 2.7.2 [10] [11] Eğer (M, ξ) kontakt 3-manifoldu aşırı dönen bir disk içeriyorsa bu kontakt manifoldda *aşırı dönen* kontakt manifold; eğer aşırı dönen disk içermiyorsa bu kontakt manifoldda *tayt* kontakt manifold denir.

Örnek 24 Örnek 1'de \mathbb{R}^3 3-manifoldu üzerinde tanımlanan standart kontakt yapı tayt bir kontakt yapıdır.

Örnek 25 Örnek 4'te \mathbb{R}^3 üzerinde $\alpha = \cos rdz + r \sin rd\theta$ ve $\xi_a = \text{Çek}(\alpha)$ kontakt yapısı ile verilen (\mathbb{R}^3, ξ_a) kontakt manifoldu standart aşırı dönen kontakt manifolddur. $D = \{(r, \theta, z) \mid z = 0, r \leq \pi\}$ diski yarıçapı π olan aşırı dönen bir disk. Bu diskin sınırı ∂D , kontakt düzlemlere ξ_a 'ya her yerde teğet olan Legendre çözükle düğümdür ve Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = 0$ 'dır. Şekil 26'da verilen kırmızı eğridir.



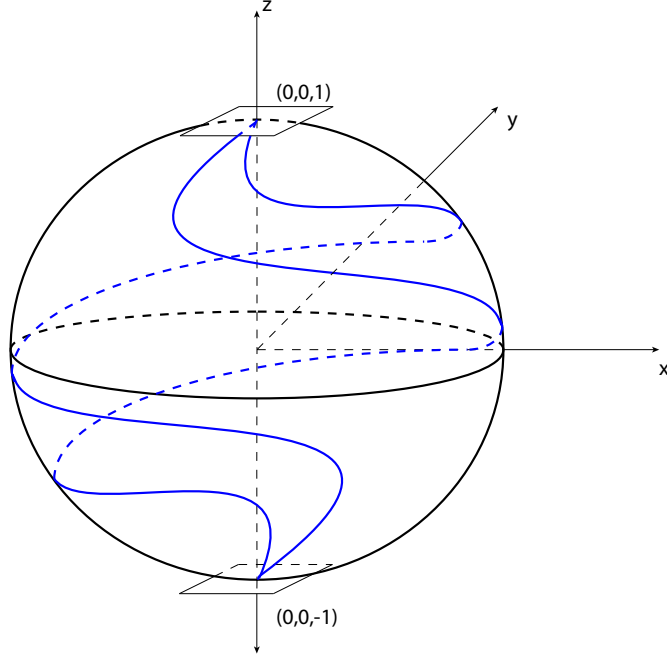
Şekil 26: Tayt(soldaki) ve aşırı dönen(sağdaki) kontakt manifold şekilleri.

2.8 Konveks Yüzey Teorisi ve Bölen Eğrileri

Bir manifoldu daha küçük boyutlu paralel alt manifoldların birleşimi olacak şekilde bir ayrışımını manifoldun yapraklanması olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.8.1 [10] Σ yüzeyi (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içerisinde gömülmüş kompakt bir yüzey olsun. Yüzey Σ 'nın kontakt düzlemlere teğet olduğu noktalar ($\xi \cap T\Sigma = \xi = T\Sigma$ olduğu noktalar) dışında $\xi \cap T\Sigma$ bir doğru alanıdır. $\xi \cap T\Sigma$ 'ın integralini alırsak tekil noktaları kontakt düzlemlere teğet olduğu noktalar olan Σ yüzeyinin bir yapraklanması elde ederiz. Bu yapraklanmaya Σ yüzeyinin karakteristik yapraklanması denir ve Σ_ξ şeklinde gösterilir.

Örnek 26 [10] $(\mathbb{R}^3, \xi_{sm} = \ker(dz + r^2 d\theta))$ kontakt 3-manifoldu içerisinde birim küre S^2 'yi alalım. Kontakt düzlemler z -ekseni boyunca yataydır ve kontakt düzlemler S^2 yüzeyine $(0, 0, \pm 1)$ noktalarında teğettir. Bundan dolayı bu noktalar S^2 yüzeyinin karakteristik yapraklanmasının $S^2_{\xi_{sm}}$ tekil noktalarıdır. Kontakt düzlemler z -eksenine dik olan her bir doğru boyunca döner, bu nedenle karakteristik yapraklanmanın her bir yaprağı küre boyunca iki tekil noktayı birleştirecek şekilde Şekil 27'de olduğu gibi spiral bir yol izler.



Şekil 27: S^2 yüzeyinin (\mathbb{R}^3, ξ_{sm}) içerisindeki karakteristik yapraklanması.

2.8.1 Konveks Yüzeyler

Tanım 2.8.2 [17] (M, ξ) kontakt 3-manifold olsun. M üzerindeki bir v vektör alanının akışı ϕ_t , kontakt yapı ξ 'yi koruyorsa v vektör alanına kontakt vektör alanı denir. Diğer bir deyişle, $\phi_t : M \rightarrow M$ vektör alanı v 'nin t -zaman akışı ise $\frac{d\phi_t}{dt}(x) = v(\phi_t(x))$ ve $(\phi_t)_* \xi = \xi$ dir.

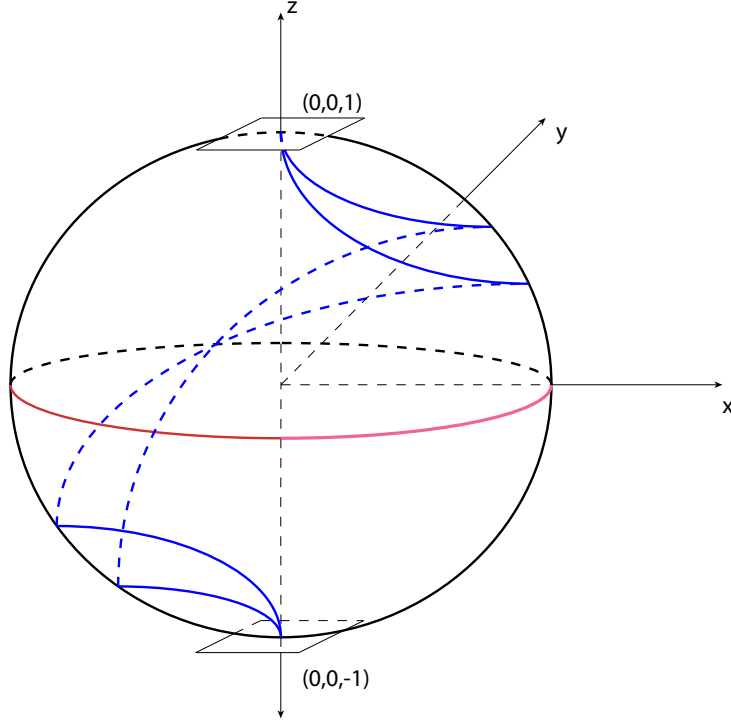
Tanım 2.8.3 [17] $\Sigma \subset (M, \xi)$ kontakt 3-manifoldu içerisinde bir yüzey olsun. Eğer Σ yüzeyine her noktasında dik olan bir kontakt vektör alanı bulunabiliyorsa Σ yüzeyine konveks yüzey denir.

Tanım 2.8.4 [17] (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içerisinde v vektör alanına sahip bir Σ konveks yüzeyi verilsin. Konveks yüzey Σ 'nın bölen eğri kümesi

$$\Gamma_\Sigma = \{x \in \Sigma | v(x) \in \xi_x\}$$

olacak şekilde tanımlanır.

Örnek 27 S^2 'nin (\mathbb{R}^3, ξ_{sm}) kontakt manifoldu içindeki bölen eğri kümesi Şekil 28'de verilmiştir.



Şekil 28: Bölen eğri kırmızı çizgi ile belirtilmiştir.

2.8.2 Standart Konveks Torus

Aralarında asal olan a, b tam sayıları için torus üzerinde alınan herhangi bir (a, b) -eğrisinin eğimi $\frac{b}{a}$ olarak tanımlanır. Standart konveks torus; r, s rasyonel sayı olmak üzere karakteristik yapraklanması s eğimine sahip $2n$ tekil doğrulardan oluşan ve yapraklanmanın geri kalan kısmı $r \neq s$ eğimine sahip tekil olmayan doğrulardan oluşan torustur, [18].

2.8.3 Katı Torus Üzerindeki Tayt Kontakt Yapılar

Aralarında asal p, q tam sayıları için $p > q > 0$ iken $-\frac{p}{q}$ sayısının sürekli kesir açılımı, $r_i < -1$ olmak üzere

$$-\frac{p}{q} = r_0 - \frac{1}{r_1 - \frac{1}{r_2 \cdots - \frac{1}{r_k}}}$$

formülü ile verilir.

Teorem 2.8.5 [18] Bölen eğri sayısı iki olan ve bölen eğrilerinin eğimi $-\frac{p}{q}$, $p > q > 0$ olan standart konveks torus sınırına sahip katı torus $S^1 \times D^2$ üzerindeki toplam tayt

kontakt yapı sayısı,

$$|(r_0 + 1) \cdots (r_{k-1} + 1)(r_k)|$$

formülü ile hesaplanır. Buradaki $r_i < -1$ 'ler tamsayı olmak üzere $-\frac{p}{q}$ sayısının rasyonel kesir açılımı kullanılarak hesaplanır.

2.9 Ameliyatlar ve Kirby Hesapları

Ameliyat teknikleri 3-manifoldların topolojisinin çalışılmasında merkezi bir rol oynamaktadır. Aynı şekilde kontakt ameliyat teknikleri de 3-manifoldların kontakt topolojisinin çalışılmasında merkezi bir rol oynamakta ve önemli uygulamaları bulunmaktadır. Bu bölümde Dehn ameliyatlarını ve kontakt ameliyatları tanımlayacağız. Dehn ameliyatları ile ilgili daha fazla bilgi için [14], [19], kontakt ameliyatlar ile ilgili daha fazla bilgi için [16] ve [21] kitaplarına bakınız.

2.9.1 Dehn Ameliyatları

K düğümü kapalı ve yönlü 3-manifold içerisinde bir düğüm olsun. K düğümünün komşuluğu $N(K)$ katı torustur, $N(K) \cong S^1 \times D^2$ ve katı torusun sınırı torustur, $\partial N(K) \cong S^1 \times S^1$. En basit anlamda K düğümüne topolojik Dehn ameliyatı M manifoldu içerisinde K düğümünün komşuluğunun çıkarılıp yerine bir difeomorfizma ile yeni bir katı torus yapıştırılması olarak tanımlanır. Sınır bileşeni olan $M \setminus N(K)$ manifolduna bir difeomorfizma

$$f : \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial(M \setminus N(K))$$

ile yeni bir katı torus $S^1 \times D^2$ yapıştırılması ile yeni bir kapalı yönlü 3-manifold elde edilir. Elde edilen yeni manifold $M' = M \cup_f S^1 \times D^2$ ile gösterilir ve buna, K düğümü boyunca *Dehn ameliyatı* ile M manifoldundan elde edilmiş manifold denir, [19]. Elde edilen yeni 3-manifold yapıştırma difeomorfizması f 'ye bağlı olarak değişir.

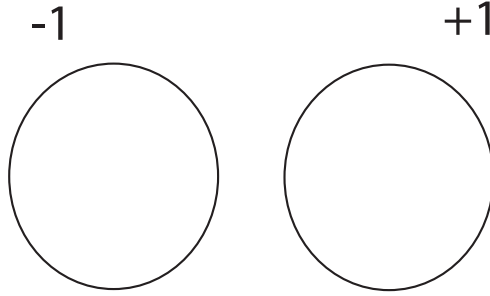
Eğer $M = S^3$ manifoldu alınırsa, S^3 içerisindeki bir K düğümüne yapılacak olan ameliyat, aralarında asal (p, q) tam sayı çifti ile belirlenir. Sınır bileşeni boyunca f difeomorfizması ile yapıştırılacak katı torus 3-boyutlu 2-kulp ile bir 3-kulpun birleşimi olarak görülebilir. 3-kulplar tek bir şekilde yapıştırılabileceğinden 2-kulpun yapıştırma eğrisi $\{*\} \times \partial D^2$ ameliyatı belirler ve $f(\{*\} \times \partial D^2) = \gamma \in \partial(M \setminus N(K))$ olur. Eğri γ 'nın homoloji sınıfı $[\gamma] \in H_1(M \setminus N(K); \mathbb{Z}) \cong H_1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ içerisinde yer alır.

düğümünün meridyeni m ve boylam l_s ise K düğümünün Seifert çatısına (bk. Tanım 2.2.12) uygun olacak şekilde seçilmiş yönlü (m, l) ikilisi $H_1(M \setminus N(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ için bir taban oluşturur. Bu nedenle, p, q aralarında asal tam sayıları için

$$f(\{*\} \times \partial D^2) = \gamma = pm + ql_s$$

olacak şekilde yazılır, [19]. Sonuç olarak, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı ameliyat ile ilgili tüm bilgiyi barındırır. Dehn ameliyatları bazı kaynaklarda rasyonel ameliyatlar olarak da adlandırılır, [16]. Ayrıca, $\frac{1}{0}$ ameliyatı da yapılabilir, bu ameliyat kısaca ∞ -ameliyat şeklinde gösterilir. Aşağıda bazı Dehn ameliyatı örnekleri verilmiştir.

Örnek 28 Aşağıdaki Şekil 29'de S^3 3-küre içerisinde verilen çözükle düğümlere (-1) veya $(+1)$ Dehn ameliyat yapmanın sonucu yine S^3 3-küre ile sonuçlanır, [21], [14].



Şekil 29: Dehn ameliyatı ile S^3 3-küre elde etme.

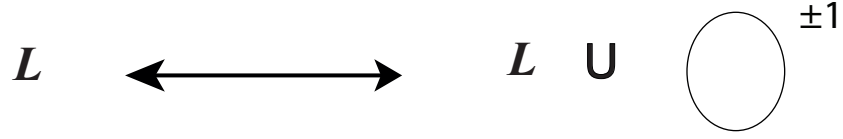
Teorem 2.9.1 ([22], [23]) Her kapalı yönlü 3-manifold M , 3-küre S^3 içerisindeki bir link boyunca (± 1) -Dehn ameliyatları yapılarak elde edilebilir.

Örnek 29 [19] [21] [14] Herhangi bir $K \subset S^3$ düğümü üzerinde yapılan $\frac{1}{0}$ ameliyatı ile yine S^3 elde ederiz.

2.9.2 Kirby Hareketleri

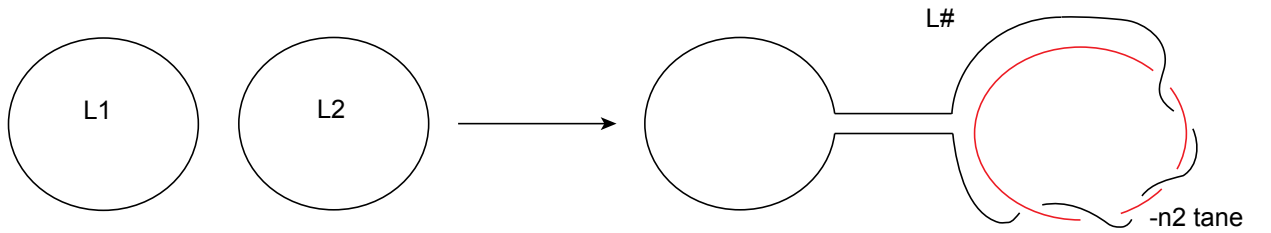
Bu bölümde farklı düğümlere yapılan farklı ameliyatların aynı 3-manifold verdiğini göstermek için kullanılan Kirby hareketleri ile adlandırılan ameliyat metodları çalışılacaktır. Kirby hareketleri ile ilgili daha fazla bilgi için [21] ve [19] kitaplarına bakınız. Yapıldığında 3-manifoldu değiştirmeyen aşağıdaki iki temel işleme *Kirby hareketleri* denir, [20], [19], [21].

K1: (± 1) -çatıya sahip çözüük düğümü eklemek ve çıkarmak.



Şekil 30: Kirby hareketleri-K1.

K2: L linkinin bir bileşenini diğeri üzerinden kaydırmak.



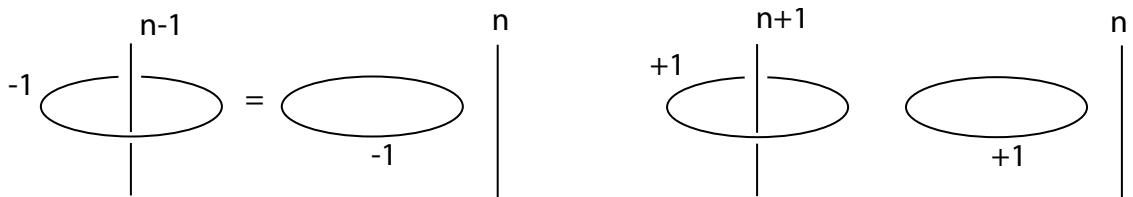
Şekil 31: Kirby hareketleri-K2.

L_1 ve L_2 , sırası ile çatısı n_1 ve n_2 olan iki düğüm olsun. $L_1 \cup L_2$ ' yi $L_{\#} \cup L_2$ ile Şekil 31 'de görüldüğü gibi yer değiştiriyoruz. Bu durumda L_1 düğümünü L_2 üzerinden kaydırarak elde edilen yeni $L_{\#}$ düğümünün çatısı;

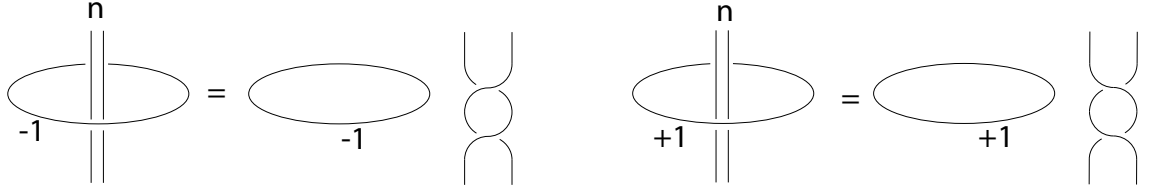
$$n_3 = n_1 + n_2 + 2lk(L_1, L_2)$$

eşitliği ile hesaplanır, [19], [21].

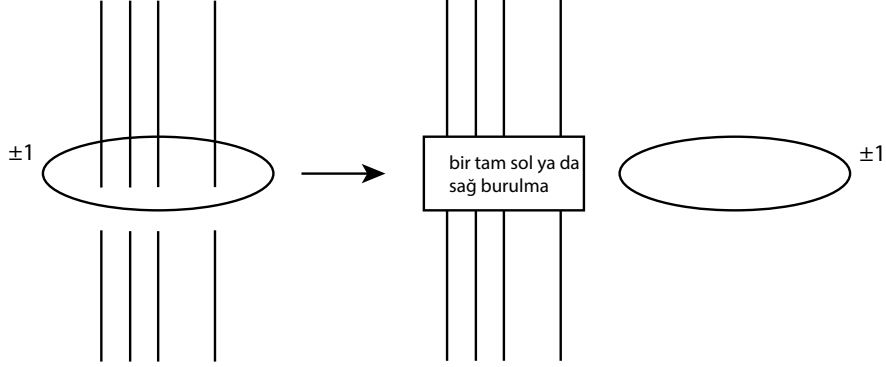
Önerme 2.9.2 [19] [21] (± 1) çatıya sahip olan herhangi bir çözüük düğüm daima bir L linkin geri kalanından Şekil 32, Şekil 33 ya da Şekil 34'den uygun olanları kullanılarak ayrılabilir.



Şekil 32: (± 1) söndürme/ patlatma.



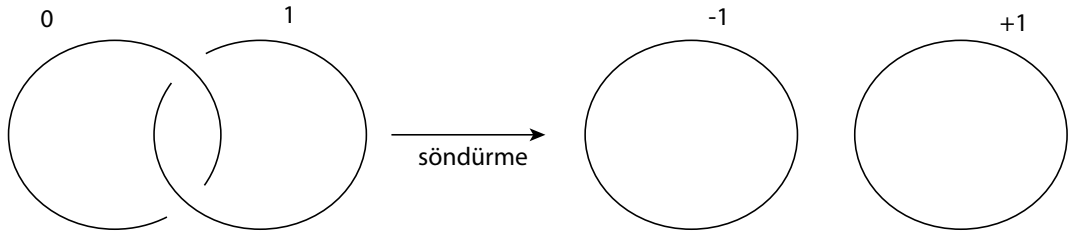
Şekil 33: (± 1) söndürme/ patlatma.



Şekil 34: (± 1) söndürme/ patlatma genel durum.

Tanım 2.9.3 [19] [21] (± 1) çatıya sahip olan çözükleme düğümü L linkinden ayırma işlemine *söndürme* (*blow-down*), tersi ekleme işlemine ise *patlama* (*blow-up*) işlemi denir.

Örnek 30 Aşağıdaki şekilde bulunan halkadan $+1$ çatıya sahip olanı ayırıyoruz yani söndürme işlemi yapıyoruz. Sonuçta (-1) ve $(+1)$ Dehn ameliyat diagramı kalır ve oluşan manifold 3-küre S^3 manifoldudur.



Şekil 35: Söndürme işlemi.

2.9.3 Kontakt Ameliyatlar

Aralarında asal olan $p, q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ için kontakt $\frac{p}{q}$ -ameliyatı da Dehn ameliyatına benzer şekilde tanımlanır. Kontakt ameliyatlar Legendre düğümleri üzerinde yapılır. L düğümü, (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içinde bir Legendre düğümü olsun. Legendre L düğümünün komşuluğu $N(L)$ kontakt bir katı torustur. Kontakt 3-manifold (M, ξ) içerisinden çıkarılan Legendre L düğümünün komşuluğu olan katı torusun yerine, bir difeomorfizma ile sınır bileşenindeki kontakt yapıyı içerisine genişletebileceğimiz tayt kontakt katı bir torus yapıştırmaya *kontakt ameliyat* yapmak denir, [24], [25].

Eğer $(M, \xi) = (S^3, \xi_{st})$ manifoldu alınırsa, S^3 içerisindeki bir Legendre L düğümüne yapılacak olan kontakt ameliyat, aralarında asal (p, q) tam sayı çifti ile belirlenir. Legendre L düğümünün meridyeni m olacak şekilde ve boylam l_k ise L düğümünün kontakt çatısına, Tanım 2.3.5'e, uygun olacak şekilde seçilmiş yönlü (m, l_k) ikilisi $H_1((S^3, \xi_{st}) \setminus N(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ için bir taban oluşturur. Bu nedenle, p, q aralarında asal tam sayıları için

$$\begin{aligned} f : \partial((S^1 \times D^2, \xi')) &\longrightarrow \partial((S^3, \xi_{std}) \setminus \nu \mathbf{L}) \\ \{*\} \times \partial D^2 &\longrightarrow pm + ql_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

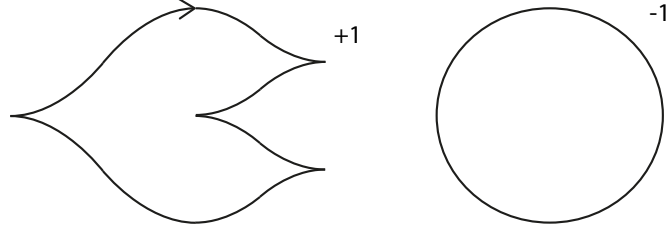
olur.

Sonuç olarak, Dehn ameliyatlarında olduğu gibi $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \infty$ sayısı ameliyat ile ilgili tüm bilgiyi barındırır. Kontakt ameliyat sonucunda yeni bir kontakt 3-manifold $(M', \xi_a) = (S^3, \xi_{st}) \setminus N(L) \cup_f (S^1 \times D^2, \xi')$ elde edilir. Ameliyat yapılan manifold üzerindeki kontakt yapı tayt olsa bile, ameliyat sonucunda elde edilen yeni kontakt 3-manifold üzerindeki kontakt yapı ξ_a aşırı dönen kontakt yapı olabilir.

Teorem 2.9.4 [24] *Her kapalı yönlü kontakt 3-manifold (M, ξ) , kontakt 3-küre (S^3, ξ_{st}) içerisindeki bir Legendre link boyunca (± 1) -kontakt ameliyatlar yaparak elde edilebilir.*

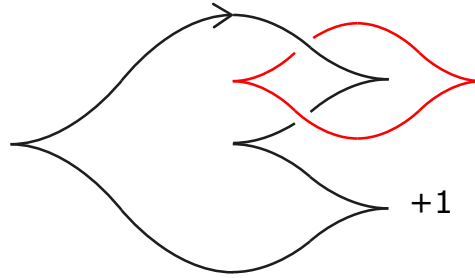
Önteorem 2.9.5 (Sadeleştirme Önteoremi) [27] *L düğümü, (M, ξ) kontakt 3-manifoldu içerisinde bir Legendre düğümü, L' düğümü ise L düğümünün itilerek elde edilmiş bir paralel kopyası olsun. (M', ξ') , L boyunca (-1) kontakt ameliyat ve L' boyunca $(+1)$ kontakt ameliyat ile (M, ξ) 'den elde edilmiş kontakt manifold olsun. O halde, (M', ξ') manifoldu (M, ξ) manifolduna kontaktamorfiktir.*

Örnek 31 [25] (S^3, ξ_{st}) içerisinde $tb(L) = -2$ ve $r(L) = 1$ olan L Legendre çözüük düğümü üzerinde $(+1)$ kontakt ameliyatı ile elde edilen manifold, aşırı dönen kontakt 3-küre S^3 olur.



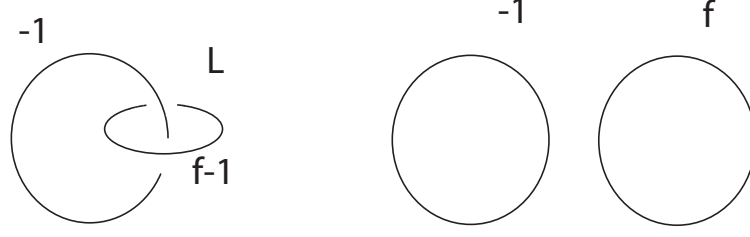
Şekil 36: Aşırı dönen kontakt S^3 .

Öncelikle, Şekil 36'da verilen Legendre çözüük düğümüne yapılan $(+1)$ -kontakt ameliyat, $(+1)$ kontakt çatı oluşturur ve Thurston-Bennequin değışmezinin tanımı gereği Seifert çatısı (-1) olur, yani Şekil 36'da verilen kontakt ameliyat diyagramı, topolojik olarak (-1) -Dehn ameliyat yapmaya denk olacaktır. 3-küre S^3 içerisindeki çözüük düğüme (-1) -Dehn ameliyatı, yine S^3 ile sonuçlanır, [14], [21].



Şekil 37: Kontakt ameliyat.

Şekil 37'de kırmızı ile çizilmiş olan Legendre L düğümü aşırı dönen diskin sınırındır. Manifold içinde aşırı dönen bir disk bulunabildiği için elde edilen kontakt 3-manifold aşırı dönen kontakt S^3 manifoldu olur. Şimdi bunu biraz daha açıklayalım. L Legendre düğümünün kontakt çatısı f olmak üzere Şekil 37'de verilen ameliyat diyagramının topolojik diagramını Şekil 38'de oluşturalım.



Şekil 38: Thurston-Bennequin değışmezi 0 olan Legendre düğümü.

Şekil 38’de görüldüğü gibi L düğümünün topolojik diagramda Seifert çatısı $f-1$ olur ve Kirby $K1$ hareketinden hatırlayacağımız üzere bu diagramdan (-1) çıkartırsak, yani söndürme yaparsak, Şekil 38’in sağ taraftaki gibi, L düğümünün topolojik Seifert çatısı f olacaktır. Zaten başta bu düğümün kontakt çatısı da f olarak verilmişti. Thurston-Bennequin değışmezinin tanımı gereği Legendre düğümünün yüzey çatısı ile kontakt çatısının birbirine göre dönmesini ölçtüğünden, $tb(L) = f - f = 0$ olur. Aşırı dönen diskin tanımından, $tb(L) = 0$ olan Legendre çözükle düğümünün aşırı dönen diskin sınırı olduğunu biliyoruz. İçerisinde aşırı dönen bir disk bulunan manifold ise aşırı dönendir.

Önteorem 2.9.6 [25] *Thurston-Bennequin değışmezi $tb(L) = -1$ olan Legendre çözükle düğümü üzerine yapılan $(+1)$ -kontakt ameliyatın sonucu $tayt S^1 \times S^2$ ’dir.*

2.10 Kontakt Yapıların Homotopi Değışmezleri

2-düzlem alanı olan kontakt yapıların d_2 -değışmezi ve d_3 -değışmezi olmak üzere iki tane homotopi değışmezi vardır. Homotopi değışmezlerinden d_2 -değışmezi [26] makalesinde tanımlanmıştır. Bu değışmez, manifoldun 2-iskeleti üzerindeki homotopiyi belirler ve Euler sınıfı modülo 2-torsiyona eşittir. İlk Chern sınıfı, manifoldun ikinci kohomoloji grubunun elemanıdır ve Euler sınıfı üst Chern sınıfına eşittir.

Kontakt yapıların diğerk homotopi değışmezi d_3 -değışmezi [26] makalesinde tanımlanmıştır. Bu değışmez, kontakt yapıların manifoldun 3-iskeleti üzerindeki homotopi engelini belirler. Daha açık bir ifade ile, manifoldun 2-iskeleti üzerinde homotopik olan herhangi 2-düzlem alanının 3-manifoldun tamamı üzerinde homotopik olması için gerek ve yeter koşul aynı d_3 -değışmezine sahip olmasıdır, [26]. d_3 -değışmezi rasyonel bir sayıdır.

Kontakt ameliyat diyagramı verilen kontakt bir 3-manifold (M, ξ) ’nin d_3 -değışmezi,

kontakt ameliyat diyagramı kullanılarak hesaplanabilir. Kontakt 3-manifold (M, ξ) 'un, 3-küre (S^3, ξ_{st}) içerisinde kontakt $(+1)$ -ameliyat yapılan düğümlerin bileşimi \mathbb{L}_+ ve (-1) -ameliyat yapılan düğümlerin bileşimi \mathbb{L}_- olmak üzere ameliyat linki $\mathbb{L} = \mathbb{L}_+ \cup \mathbb{L}_- \subset (S^3, \xi_{st})$ olsun. 4-manifold X , ameliyat diyagramından gelen ameliyatları kulplar yapıpıştırarak elde ettiğimiz 4-boyutlu manifold olsun ve $\sigma(X)$, 4-manifold X 'in imzası, ve $\chi(X)$, 4-manifold X 'in Euler karakteristiği olsun.

Önerme 2.10.1 [25] *Euler sınıfı $e(\xi)$ torsiyon sınıf ise ve üzerinde her bir $(+1)$ -ameliyat yaptığımız Legendre düğümler $L_i \in \mathbb{L}_+$ için $tb(L_i) \neq 0$ ise, kontakt yapı ξ 'nin $d_3(\xi)$ -değişmezi,*

$$d_3(\xi) = \frac{1}{4}(c^2 - 3\sigma(X) - 2\chi(X)) + q \quad (4)$$

formülü ile hesaplanır. Burada q sayısı, $(+1)$ -ameliyat yaptığımız \mathbb{L}_+ 'nın bileşenlerinin sayısıdır ve $c \in H^2(X)$ kohomoloji sınıfı, her $L_i \in \mathbb{L}_+$ için dönme sayısı $r(L_i)$ 'ler kullanılarak hesaplanır.

Önteorem 2.10.2 [25] *S^3 üzerindeki standart kontakt yapı ve tek tayt yapı olan ξ_{st} 'in $d_3(\xi_{st})$ değişmezi $-\frac{1}{2}$ 'ye eşittir.*

Önteorem 2.10.3 [25] *S^3 üzerindeki Şekil 36 diyagramından elde edilen aşırı dönen kontakt yapı ξ_a 'nın $d_3(\xi_a)$ değişmezi $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir.*

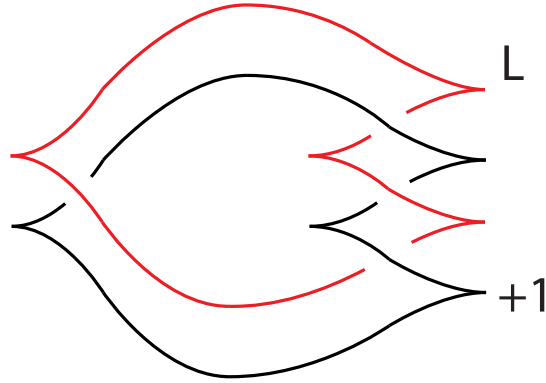
2.11 Aşırı Dönen Kontakt Yapılar İçerisindeki Legendre Düğümleri

Aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisinde iki tip Legendre düğümü bulunmaktadır.

Tanım 2.11.1 [5] *(M, ξ) aşırı dönen kontakt 3-manifold olsun. $L \subset M$ Legendre düğümü olmak üzere, $M \setminus L$ manifoldu aşırı dönen kontakt manifold ise L düğümü *gevşek* Legendre düğümü; $M \setminus L$ manifoldu tayt kontakt manifold ise L düğümüne *gevşek olmayan* Legendre düğümü denir.*

Örnek 32 Şekil 37'de görülen ve kırmızı ile çizilen Legendre L düğümü gevşek Legendre düğümü örnektir.

Örnek 33 Şekil 39’da görülen ve kırmızı ile çizilen Legendre L düğümü ise gevşek olmayan bir Legendre düğümü örnektir. Şekil 39’daki Legendre L düğümüne yapılacak olan kontakt (-1) -ameliyatı Sadeleştirme Önteoremine göre sadeleşir ve geriye tayıt kontakt 3-küre S^3 kalır. Gevşek bir düğümü yapılacak olan herhangi bir kontakt ameliyat tümleyeninde bulunan aşırı dönen diskten uzakta yapılabileceğinden her zaman aşırı dönen kontakt manifold ile sonuçlanır. Bu nedenle Şekil 39’daki Legendre L düğümü gevşek olmayan bir Legendre düğümü örnektir.



Şekil 39: Gevşek olmayan bir Legendre düğümü örneği.

İlk gevşek olmayan Legendre düğümü örnekleri [28] ve [29] makalelerinde verilmiştir. Daha sonra [5], [30], [31] makalelerinde de gevşek olmayan düğüm örnekleri yer almıştır.

3 GELİŞME

Bu bölümde tayt kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırılması ile aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırılmasını karşılaştırmak amacı ile Legendre çözümlerin sınıflandırılması çalışılacaktır. Standart tayt S^3 içerisindeki Legendre çözümlerin ve $d_3(\xi) = \frac{1}{2}$ olan aşırı dönen S^3 içerisindeki gevşek olmayan Legendre çözümlerin kontaktomorfizmaya göre sınıflandırılması, Tanım 2.6.1'ye göre sınıflandırılması verilecektir.

3.1 Standart tayt kontakt 3-küre S^3 içerisindeki Legendre çözümlerinin sınıflandırılması

Teorem 3.1.1 [5] [7] *Standart tayt kontakt S^3 içerisinde $L \subset (S^3, \xi_{st})$ bir Legendre çözümler olsun. Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n$ ve n negatif bir tamsayı olmak üzere, dönme sayısı $r(L)$ değişmezi,*

$$\{n + 1, n + 3, \dots, -n - 3, -n - 1\}$$

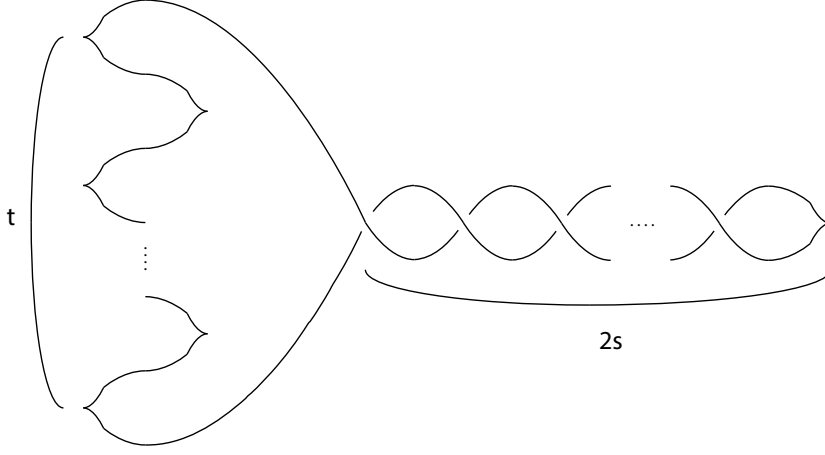
aralığında olur. Bu koşulu sağlayan herhangi bir (tb, r) değişmez çiftine sahip bir Legendre düğümü bulunabilir ve bu tip çiftler, kontaktomorfizmaya göre tüm Legendre çözümleri belirler. Diğer bir ifadeyle;

her bir $n \leq -1$ için toplam $|n|$ tane farklı Legendre çözümler vardır.

Aslında [5] makalesinde ve daha sonra [6] makalesinde tüm tayt kontakt 3-manifoldlar içerisindeki Legendre çözümlerin izotopiye göre sınıflandırılması, Tanım 2.6.2'ye göre sınıflandırılması verilmiştir.

Teorem 3.1.2 [5] *Bir tayt kontak yapı içerisinde iki yönlü Legendre çözümler Legendre izotopiktir ancak ve ancak Thurston-Bennequin değişmezi ve dönme sayısı aynıdır.*

Tayt 3-küre (S^3, ξ_{st}) içerisindeki Legendre çözümlerin Legendre izotopiye göre tüm listesi Şekil 40'da gösterilmiştir, [5] [6]. Bu durumda Legendre çözümler Tanım 2.6.3'e göre Legendre basittir.



Şekil 40: Legendre çözüük düğümlerin Legendre izotopiye göre tam listesi.

Şekil 40'da t sol taraftaki boynuz sayısı, s ise sağ tarafta oluşan çaprazlamaların sayısı olmak üzere $tb(L) = -2s - t$ ve $r = \pm(t - 1)$ şeklinde hesaplanır.

3.2 Aşırı dönen kontakt 3-küre S^3 içerisindeki Legendre çözüük düğümlerinin sınıflandırılması

Teorem 3.2.1 [5] [7] $L \subset (S^3, \xi_a)$, aşırı dönen bir S^3 içerisinde gevşek olmayan Legendre çözüük düğüümü olsun. O halde, aşırı dönen kontakt yapı ξ_a için $d_3(\xi_a) = \frac{1}{2}$ olur ve L düğüümünün değişmezleri

$$(tb(L), r(L)) \in \{(n, \pm(n - 1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi içerisindeydir. Bu değişmezler L 'yi kontaktomorfizmaya göre belirler ve kümenin herhangi bir elemanını değişmezi olarak kabul eden bir L Legendre çözüük düğüümü vardır.

3.3 Teorem 3.1.1'in ve Teorem 3.2.1'in ispatı

Teorem 3.1.1'in ve Teorem 3.2.1'deki "değişmezler Legendre L düğüümünün kontaktomorfizmaya göre belirler" ifadesini daha detaylı açıklayalım. L_1 ve L_2 düğüümleri aynı (tb, r) değişmezlerine sahip (M, ξ) içerisinde iki Legendre düğüüm olsun. Eğer (M, ξ) kontakt manifoldunun L_1 düğüümünü L_2 düğüümüne götüreceğ şekilde bir kontaktomorfizması var ise L_1 ve L_2 düğüümü bu kontaktomorfizmaya göre denk olurlar, Tanım 2.6.1'e bakınız. Sabitlenen bir (tb, r) değişmezleri için bu değişmeze sahip tüm

Legendre düğümler kontaktomorfizmaya göre birbirine denk ise " (tb, r) değişmez çifti Legendre düğümü kontaktomorfizmaya göre belirler" denir. Teorem 3.2.1'deki gevşek olmayan Legendre çözükle düğümlerde de bu durum söz konusudur.

Şimdi Teorem 3.1.1'in ve Teorem 3.2.1'in Geiges-Onaran'ın [7] makalesinde verilen ispatını detaylı bir şekilde inceleyelim.

Tayt (S^3, ξ_{st}) içerisinde bir Legendre çözükle düğümü ya da aşırı dönen S^3 içerisinde gevşek olmayan bir L Legendre çözükle düğümü verilsin. L Legendre düğümünün standart komşuluğu V_1 olmak üzere, 3-boyutlu küre S^3 'ün torus boyunca Heegaard ayrışımı $S^3 = V_1 \cup V_2$ olarak alınsın. Daha iyi bir ifadeyle, V_i katı toruslarının meridyenini μ_i , boylamını λ_i olarak tanımlarsak, bu yapıştırma işlemini $\mu_1 = \lambda_2$ ve $\lambda_1 = \mu_2$ tanımlarıyla belirlediğimizi kabul edebiliriz.

Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n$ olarak verilirse, komşuluğu olan V_1 katı torusun sınırı ∂V_1 konveks bir torustur. Bu konveks torusun iki bölen eğrisi vardır ve eğimi $\frac{1}{n}$ dir. L Legendre çözükle düğümünün tümleyeni V_2 katı torusudur. L çözükle düğümü tayt (S^3, ξ_{st}) içerisinde ise V_2 tayttır. L çözükle düğümü aşırı dönen S^3 içerisinde ise L yi gevşek olmayan Legendre düğümü olarak aldığımız için, tanım gereği tümleyeni V_2 katı torusu yine tayttır. Her iki durumda da tayt olan V_2 katı torusunun sınır bileşeni ∂V_2 , iki bölen eğriye sahip ve eğimi n olan konveks torustur. Konveks torus ∂V_2 'nin eğimi olan n sayısı L Legendre çözükle düğümünün Thurston-Bennequin sayısıdır. Bu nedenle Legendre L çözükle düğümünün kontaktomorfizmaya göre sınıflandırılması V_2 katı torusu üzerindeki kontakt yapıların sınıflandırılmasından gelir.

Katı toruslar üzerindeki tayt kontakt yapıların sınıflandırılması Grioux ve Honda tarafından yapılmıştır, [17], [18]. Honda'nın makalesindeki Theorem 2.8.5'e göre sınır bileşeni ∂V , eğimi $-\frac{p}{q} < -1$ olan ve iki bölen eğriye sahip konveks bir torus olan katı torus V üzerindeki tayt kontakt yapıların sayısı,

$$|(r_0 + 1) \dots (r_{k-1} + 1) r_k|$$

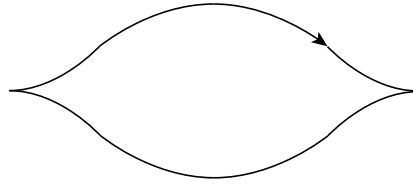
sayısına eşittir. Burada her $r_i < -1$ 'dir ve

$$-\frac{p}{q} = r_0 - \frac{1}{r_1 - \frac{1}{r_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{r_k}}}} = [r_0, \dots, r_k]$$

sürekli kesir açılımından bulunur. Ayrıca $-\frac{p}{q} = -1$ için tek bir tayt kontakt yapı vardır.

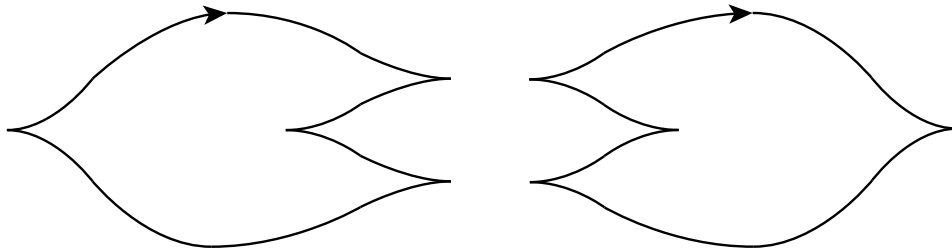
Teorem 3.1.1'in ispatı: L Legendre çözükle düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n$ ve n negatif bir tamsayı olsun. Bu durumda, $n < 0$ için $-\frac{p}{q} = r_0 = n$

sürekli kesir açılımını elde ederiz. Grioux ve Honda'ya göre L 'nin tümleyeni V_2 katı torusu üzerinde toplam $|r_0| = |n|$ tane farklı tayt kontakt yapı vardır, [17], [18]. Bunların herbiri $tb(L) = n$ olan toplam $|n|$ tane farklı Legendre düğümüne denk gelir. Sınırı ∂V_2 , eğimi $n < 0$ konveks torus olan katı torus V_2 'yi, Legendre çözükle düğümün komşuluğu olan V_1 ile yapıştırdığımızda her zaman tayt (S_3, ξ_{st}) 'yi elde ederiz. Bu nedenle $tb(L) = n < 0$ olan Legendre çözükle düğümler, (S_3, ξ_{st}) içerisinde ve hepsi Şekil 41'de verilen $tb(L) = -1$ ve $r(L) = 0$ olan standart çözükle düğümün stabilizasyonlarından elde edilir.



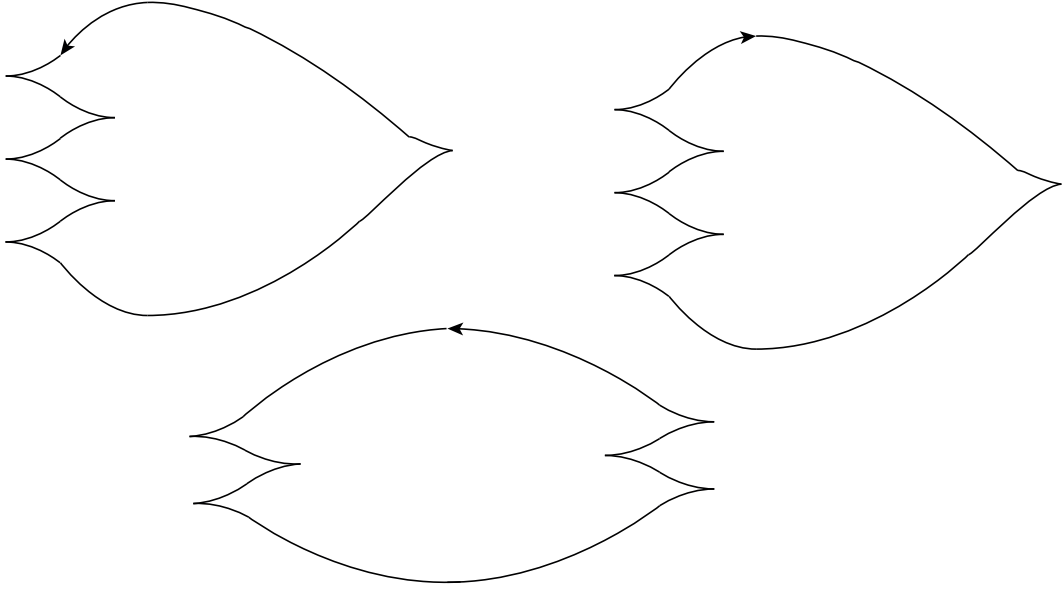
Şekil 41: $tb(L) = -1$ ve $r(L) = 0$.

Örneğin; $tb(L) = n = -2$ olan Legendre çözükle düğüm $|n| = 2$ tanedir ve Şekil 31'de verilmiştir. Şekil 42'deki $tb(L) = -2$ ve $r(L) = \pm 1$ olan Legendre çözükle düğümler Şekil 41'de verilen $tb(L) = -1$ ve $r(L) = 0$ olan Legendre düğümünün pozitif ve negatif stabilizasyonundan elde edilmiştir.



Şekil 42: $tb(L) = -2$ ve $r(L) = \pm 1$.

Diğer bir örnek ise Şekil 43'de verildiği gibi, $tb(L) = n = -3$ olan $|n| = 3$ farklı Legendre çözükle düğümün olmasıdır.



Şekil 43: $tb(L) = -3$ ve $r(L) = \pm 2, r(L) = 0$.

Görüldüğü gibi $tb(L) = n < 0$ için $r(L)$ dönme sayısı değişmezi, $\{n+1, n+3, \dots, -n-3, -n-1\}$ aralığı içerisinde bir değer alır.

Şimdi $n > 0$ durumunu incelemeden önce ∂V_2 konveks torusun üzerindeki bölen eğrilerinin eğimi $n = 0$ olduğu durumu detaylı inceleyelim. Bu durumda bölen eğrileri $(1, 0)$ -eğrileridir, diğer bir deyişle ∂V_2 konveks torusu üzerinde bir meridyen eğrisidir ve bu meridyenin sınır bileşeni olduğu V_2 katı torusu içerisindeki disk aşırı dönen disklerdir. Ayrıca, bu durumu başka bir yaklaşım kullanarak görebiliriz. Eğer, Legendre L çözüük düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n = 0$ ise, aşırı dönen diskin tanımı gereği L Legendre çözüük düğümü aşırı dönen diskin sınır bileşenidir. Bu durum tayt kontakt (S^3, ξ_{st}) içerisinde ya da Legendre L düğümü aşırı dönen kontakt manifold içerisinde gevşek olmayan düğüm olduğunda oluşmaz.

Teorem 3.2.1'in ispatı Legendre L çözüük düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n > 0$ olsun. Tayt kontakt (S^3, ξ_{st}) içerisindeki Legendre çözüük düğümün alabileceği maksimal Thurston-Bennequin değişmezi -1 olduğundan verilen Legendre L çözüük düğümü aşırı dönen bir S^3 içerisinde dir.

Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n > 0$ ise katı torus V_2 'nin sınır bileşeni olan konveks torus ∂V_2 üzerinde ve eğimi de $n > 0$ olur. Honda'nın Teorem 2.8.5'de katı toruslar üzerindeki tayt kontakt yapıların sayısını vermiş olduğu formülünde ise eğim $-\frac{p}{q} < 0$ 'dır. Bu formülü kullanabilmek için V_2 katı torusuna konveks sınır bileşeni

üzerindeki bölen eğrisinin eğimini değiştirerek negatif yapmak amacı ile uygun bir Dehn burgusu uygulayacağız. Burada amaç Honda'nın Teorem 2.8.5'de verdiği sınıflandırma formülünü kullanmak olduğundan eğimi ≤ -1 olacak şekilde ayarlamaktır. ∂V_2 konveks torusun meridyeni μ_2 ve boylamı da λ_2 olsun. Boylam λ_2 eğrisini $(\lambda_2)' = \lambda_2 + k\mu_2$ eğrisine götüren Dehn burgusu uygulandığında bölen eğrilerinin $n > 0$ olan eğimi $\frac{n}{1-kn} < 0$ olur. Bu durumu daha ayrıntılı açıklamak gerekirse, eğimi n olan bölüm eğrisi konveks torus ∂V_2 üzerinde $\mu_2 + n\lambda_2$ eğrisi olarak ifade edilir. Uygulanan Dehn burgusu sonucunda elde edilen yeni meridyen ve boylam (μ_2, λ_2') çiftine göre ise

$$\begin{aligned} (1 - kn)\mu_2 + n\lambda_2' &= (1 - kn)\mu_2 + n(\lambda_2 + k\mu_2) \\ &= (1 - kn)\mu_2 + n\lambda_2 + kn\mu_2 \\ &= \mu_2 + n\lambda_2 \end{aligned}$$

eşitliğinde bölüm eğrisi $(1 - kn)\mu_2 + n\lambda_2'$ eğrisi olarak ifade edilir. Bu durumda, eğim $\frac{n}{1-kn} < 0$ dır. Bu durumda, Honda'nın katı torus üzerindeki tayt yapılarının sayısını verdiği Teorem 2.8.5'deki formülü kullanılabilir.

$n = 1$ olduğu durumda $k = 2$ alınırsa, $\frac{n}{1-kn} = -1$ olur. Teorem 2.8.5'deki sınıflandırma formülüne göre $-\frac{p}{q} = -1 = r_0$, olacak şekilde V_2 üzerinde, $|r_0| = 1$, tek bir tayt kontakt yapı vardır.

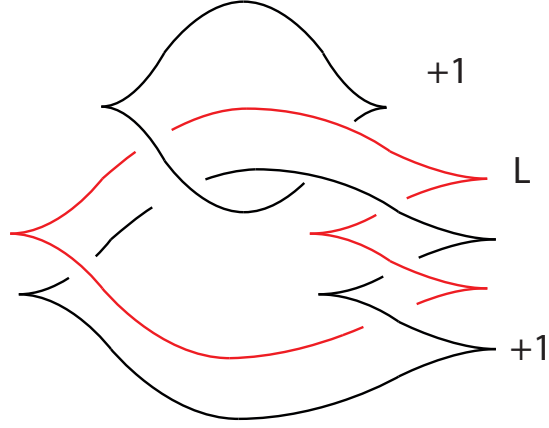
Diğer tüm $n \geq 2$ durumlarında, $k = 1$ almak yeterlidir.

$n \geq 2$ durumunda eğim $\frac{n}{1-n}$ ya da $-\frac{n}{1-n}$ olur ve sürekli kesir açılımı

$$-\frac{n}{n-1} = -2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2}}}$$

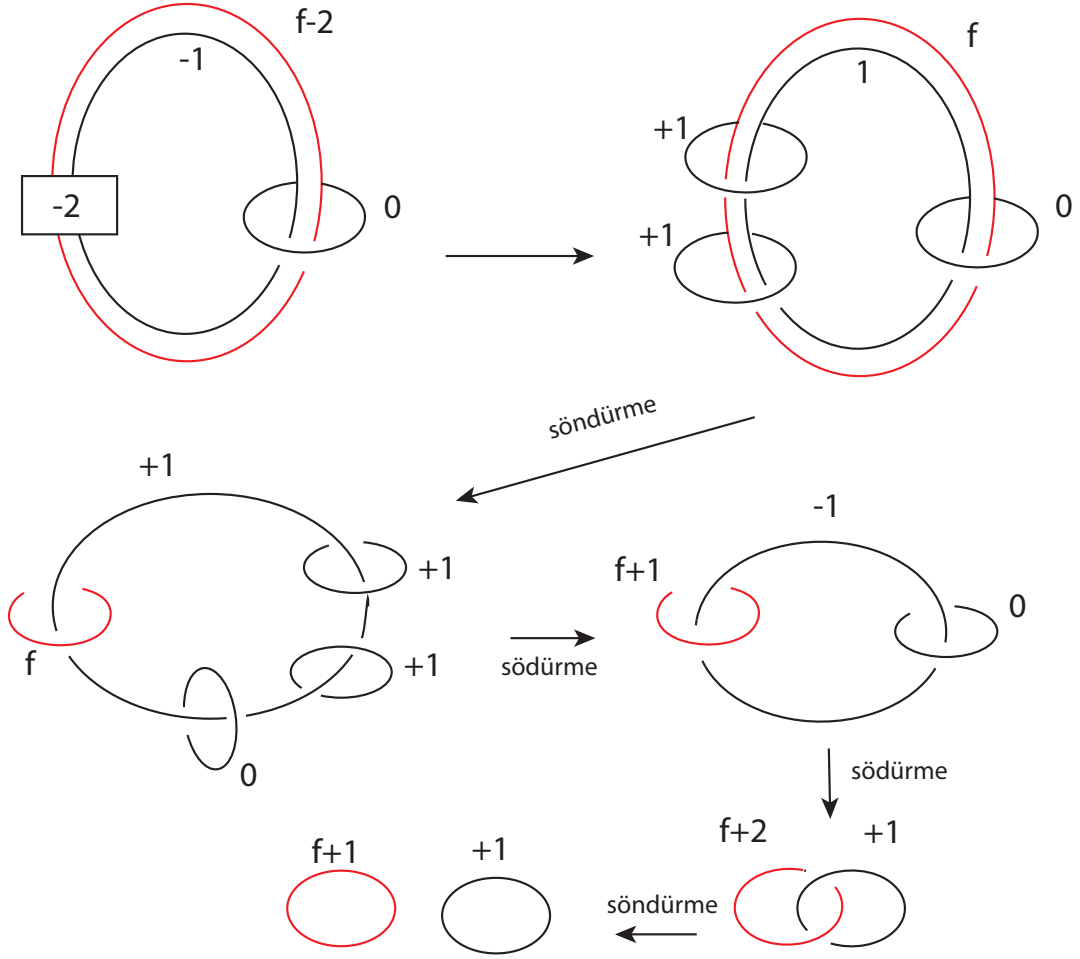
dır. Yani $r_0 = r_1 = \dots = r_k = -2$ dir. Teorem 2.8.5'te verilen $|(r_0 + 1)\dots(r_{k-1} + 1)r_k|$ formülüne göre V_2 katı torus üzerinde toplam $|(-1)\dots(-1)(-2)| = 2$ farklı tayt kontakt yapı vardır. Bu sayılar ile eşleşen aşırı dönen S^3 içerisindeki gevşek olmayan Legendre çözükle düğümlerinin diyagramlarının bulunması sınıflandırma sorusunu çözecektir. Bu diyagramlar Plamenevskaya tarafından [32] makalesinde verilmiştir. Şimdi bu diyagramları detaylı çalışalım.

$n = 1$ durumu için V_2 katı torusu üzerinde tek bir tayt kontakt yapı vardır. Bu nedenle aşırı dönen S^3 içerisinde $tb(L) = 1$ olan bir tane Legendre çözükle düğüm bulunması gerekir. Aşağıda Şekil 44'de kontakt ameliyat diyagramı ile verilen Legendre çözükle düğümün bu koşulu sağladığı görülür.



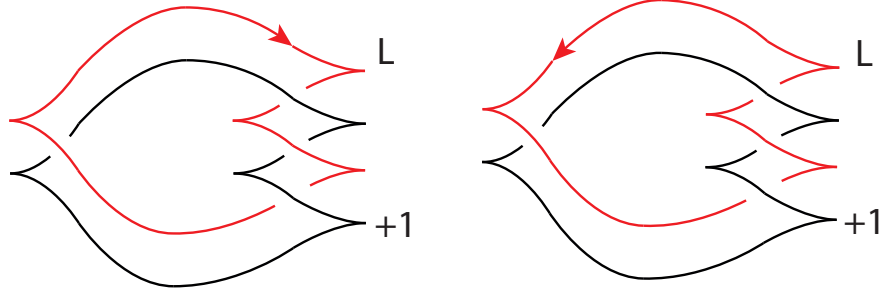
Şekil 44: $(tb, r) = (1, 0)$ olan gevşek olmayan Legendre çözükle düğümü.

Şimdi Şekil 44'de verilen L düğümünün gevşek olmayan olduğunu ve $tb(L) = 1$ olduğunu gösterelim. Eğer L düğümü gevşek bir düğüm olsaydı, yani tanım gereği tümleyeninde aşırı dönen bir disk olsaydı, L düğümüne herhangi bir kontakt ameliyat yapıldığında sonuç her zaman aşırı dönen kontakt manifold olurdu. Herhangi bir Legendre L düğümünün gevşek olmayan olduğunu göstermek için, L üzerine yapılan bir kontakt ameliyatın sonucunun tayı manifold olduğunu göstermek yeterlidir. Şekil 44'de verilen Legendre L düğümüne (-1) -kontakt ameliyat yapılırsa, Sadeleştirme Önteoremine (Önteorem 2.9.5) göre Legendre L düğümü $(+1)$ -kontakt ameliyat yapılan zigzaglı eğrinin paralel kopyası olduğundan sadeleşme işlemi gerçekleşir. Legendre L düğümüne (-1) -kontakt ameliyatın sonucunda geriye sadece $tb(L) = -1, r(L) = 0$ olan çözükle düğümüne yapılan $(+1)$ -kontakt ameliyatı kalır. Bu durumun sonucu, Önteorem 2.9.6'ya göre tayı $S^1 \times S^2$ 'dir. Legendre L düğümüne yapılan kontakt bir ameliyat tayı sonuçlandığı için Legendre L düğümü gevşek olmayan bir Legendre düğümüdür. L düğümünün çözükle düğüm olduğu ve Thurston-Bennequin değişiminin $tb(L) = 1$ olduğu Şekil 45'deki Kirby diagramları kullanılarak hesaplanmıştır.



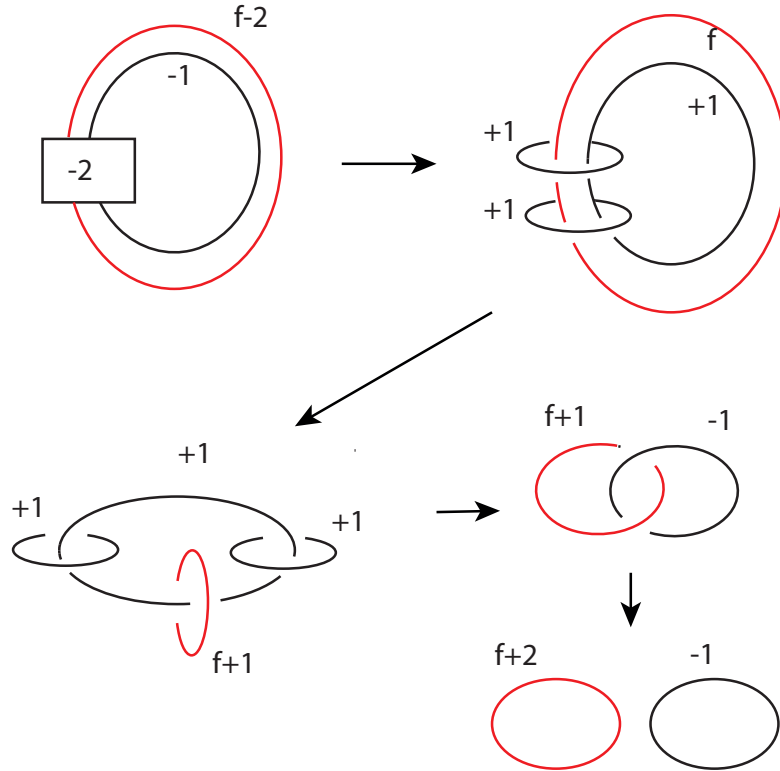
Şekil 45: Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişiminin hesaplanması, $tb = 1$.

Şekil 44'de verilen ilk diagramda Legendre L düğümünün kontakt çatısını f olarak kabul edersek, topolojik ameliyat diagramına aktarılarak, Şekil 45'te yapılan Kirby hareketleri sonucunda L düğümünün Seifert çatısını $f + 1$ olarak buluruz. Thurston-Bennequin değişimi tanımından, Tanım 2.4.1'den dolayı Şekil 44'te verilen Legendre L çözümlü düğümünün Thurston-Bennequin değişimi $tb(L) = f + 1 - f = 1$ 'dir.



Şekil 46: $(tb, r) = (2, \pm 1)$ olan gevşek olmayan Legendre çözük düğümleri.

Şekil 46, Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n = 2$ durumunda gereken iki gevşek olmayan Legendre çözük düğümünün diyagramıdır. Sadeleştirme Önteoremine (Önteorem 2.9.5) göre Şekil 46'daki Legendre L düğümüne yapılacak olan (-1) -kontakt ameliyat sadeleşir ve standart tayt (S^3, ξ_{st}) ile sonuçlanır. Bu nedenle Şekil 46'daki Legendre L çözük düğümleri $tb(L) = n = 1$ durumunda benzer şekilde gevşek olmayandır.

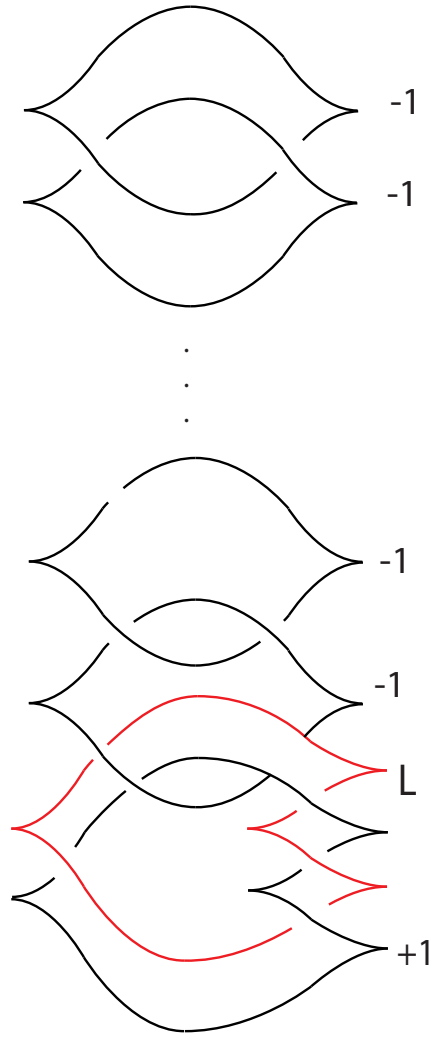


Şekil 47: Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değişiminin hesaplanması, $tb = 2$.

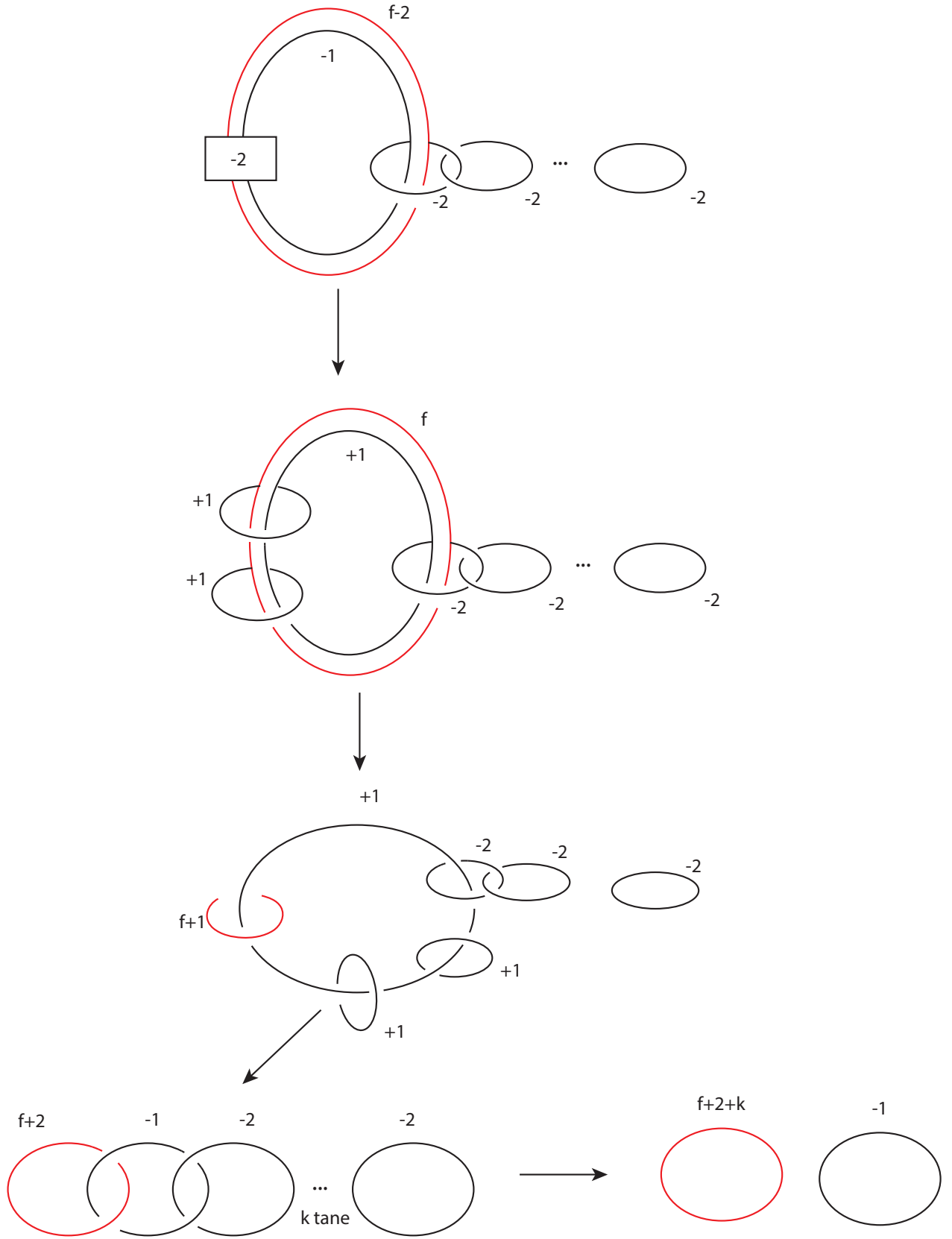
Şekil 46'da verilen ilk diagramda Legendre L düğümünün kontakt çatısını f ola-

rak kabul edersek, topolojik ameliyat diagramına aktarılarak Şekil 47’de yapılan Kirby hareketleri sonucunda Legendre L düğümünün Seifert çatısını $f + 2$ olarak buluruz. Thurston-Bennequin değışmezi tanımından (Tanım 2.4.1) dolayı Legendre L düğümünün Thurston-Bennequin değışmezi $tb(L) = f + 2 - f = 2$ olarak hesaplanır.

Genel durumda, $n \geq 3$ olduğunda gerekli olan Legendre düğüm diagramları Şekil 48’de kırmızı ile belirtilerek verilmiştir. Şekil 48’de, $k \geq 1$ ’den büyük tam sayı olmak üzere (-1) -kontakt ameliyat yapılan Legendre çözükle düğümler k tanedir. Açıklamalı Kirby diyagramı Şekil 49’da verilmiştir.



Şekil 48: $(tb, r) = (n, \pm(n - 1))$ olan gevşek olmayan Legendre çözükle düğümleri, $n \geq 3$.



Şekil 49: Kirby hareketleri ile kontakt ameliyat diagramındaki gevşek olmayan Legendre düğümünün Thurston-Bennequin değışmezinin hesaplanması, $tb \geq 3$.

Şekil 48'de verilen ilk diagramda Legendre L düğümünün kontakt çatısını f olarak kabul edersek, topolojik ameliyat diagramına aktarılarak Şekil 49'da yapılan Kirby hareketleri sonucunda L düğümünün Seifert çatısını $f+k+2$ olarak buluruz. Burada $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere (-1) -kontakt ameliyat yapılan Legendre çözüük düğümlerin k tane olduğunu kabul etmiştik. Thurston-Bennequin değişmezi tanımından (Tanım 2.4.1) Legendre L düğümünün Thurston-Bennequin değişmezi, $tb(L) = f+k+2-f = k+2 \geq 3$ tür.

Şekil 48'de verilen Legendre L düğümünün dönme sayısı [31] makalesindeki Lemma 6.6'yı ya da [7] makalesindeki Lemma 3.1'i kullanarak $tb(L) = n$ için seçtiğimiz yöne göre $r(L) = \pm(n-1)$ olarak hesaplanır.

Aşırı dönen kontakt S^3 içerisinde tümleyeni tayt olan ve Thurston-Bennequin değişmezi $tb(L) = n > 0$ olan Legendre çözüük düğümler Teorem 2.8.5'e göre en fazla 2 tane olabilir. Şekil 44, Şekil 46 ve Şekil 48 'de 2 tane olarak çizildiğinden, $tb(L) = n > 0$ olan Legendre çözüük düğümler toplam 2 tanedir ve dönme sayıları ile birbirinden ayrılır. Sadece 2 tane olan Legendre çözüük düğümler, $d_3(\xi_a) = \frac{1}{2}$ olan aşırı dönen kontakt 3-küre S^3 içerisinde bulunduğundan diğer aşırı dönen S^3 'ler içerisinde bulunmazlar.

4 SONUÇ

Kontakt topolojide, aynı klasik değişmezler, yani aynı düğüm tipine, aynı Thurston-Bennequin değişmezi ve aynı dönme sayısına sahip Legendre düğümlerinin aynı ya da farklı olup olmadığı temel bir problemdir. Bu tezde Legendre düğümlerinin sınıflandırılmasında kullanılan temel teknikler çalışılmıştır. Bu amaçla en basit düğüm tipi olan çözükle düğümlerin Legendre temsillerinin sınıflandırılması detaylı incelenmiştir. Özel olarak, standart tayt kontakt 3-küre S^3 içerisindeki Legendre çözükle düğümler ve d_3 -değişmezi $d_3(\xi) = \frac{1}{2}$ olan aşırı dönen S^3 içerisindeki tümleyeni tayt olan Legendre çözükle düğümlerin sınıflandırılması çalışılmıştır.

Tayt kontakt manifoldların içerisindeki Legendre düğümlerinin sınıflandırılması ile aşırı dönen kontakt manifoldlar içerisinde tümleyeni tayt olan Legendre düğümlerinin sınıflandırılma tekniklerinin benzer olduğu, benzer zorluklara sahip olduğu sonucuna varılmıştır. İki durumda da yani düğümlerin içinde bulunduğu manifoldun tayt ya da aşırı dönen olması durumunda da Legendre düğümünün tümleyeni olan konveks torus sınır bileşenine sahip olan sınır bileşenli manifoldun üzerindeki tayt kontakt yapıların sınıflandırılmasının bilinmesi gerekmektedir. Legendre düğümünün düğüm tipi çözükle düğüm olduğunda ve manifold S^3 alındığında; çözükle düğümün tümleyeni, katı torus $S^1 \times D^2$ 'dir. Katı torus üzerindeki tüm tayt kontakt yapıların sınıflandırılması Grioux, Honda tarafından yapılmıştır, [17], [18]. Tümleyeni üzerindeki tayt yapıların sınıflandırılması bilindiğinden Legendre çözükle düğümlerin sınıflandırılması yapılabilmektedir. Düğüm tipi çözükle düğümden farklı alındığında Legendre düğümün tümleyeni katı torustan farklı olacaktır. Bu nedenle çözükle düğüm dışındaki düğümlerin sınıflandırılmasında zorluklar çıkabilir. Aynı teknikle çözükle düğüm dışında başka hangi düğüm tipi sınıflandırılabilir sorusu çalışılacaktır.

Kaynaklar

- [1] Marinets J., *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II Lecture Notes in Mathematics Volume 209, 142–163, **1971**.
- [2] Bennequin D., *Entrelacements et équations de Pfaff*, *Astérisque*, 107–108, 87–161, **1983**.
- [3] Eliashberg Y., *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98, 623–637, **1989**.
- [4] Etnyre J. B., Honda K., *On the nonexistence of tight contact structures*, Annals of Math. 153, 749–766, **2001**.
- [5] Eliashberg Y., Fraser M., *Topologically trivial Legendrian knots*, J. Symplectic Geom., 7(2):77–127, **2009**.
- [6] Etnyre J. B., Honda K., *Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot.*, J. Symplectic Geom., 1(1):63–120, **2001**.
- [7] Geiges H., Onaran S., *Legendrian rational unknots in lens spaces*, J.Symplectic Geom, Vol. 13, No. 1, 17–50, **2015**.
- [8] Baker K. L, Etnyre J. B., *Rational linking and contact geometry*, Progr. Math. 296 19–37, **2009**.
- [9] Ghiggini P., *Linear Legendrian curves in T^3* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 , no. **3**, 451–473, **2006**.
- [10] Geiges H., *An introduction to contact topology*, Cambridge studies in advanced mathematics Vol.109, **2008**.
- [11] Etnyre, J. B., *Introductory Lectures on Contact Geometry*, In Topology and Geometry of Manifolds, Athens, 81–107, **2001**. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 71. Providence, RI: American Mathematical Society, **2003**.
- [12] Etnyre J. B., *Legendrian and transversal knots*, Handbook of knot theory, **2005**.

- [13] McDuff D., Salamon D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, **1995**.
- [14] Rolfsen D., *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc, **1976**.
- [15] Adams C. C., *The Knot Book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, **2004**.
- [16] Ozbagci B., Stipsicz A. I., *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Society Mathematical Studies, **2004**.
- [17] Giroux E., *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66, no. 4, 637–677, **1991**.
- [18] Honda K., *On the classification of tight contact structures I*, Geom. Topol. 4, 309–368, **2000**.
- [19] Saveliev N., *Lectures on the topology of 3-manifolds: an introduction to the Casson Invariant*, Berlin; Newyork: De Gruyter, **1999**.
- [20] Kirby R. C., *The topology of 4-manifolds*, Springer Lecture Notes 1374, Springer-Verlag **1989**.
- [21] Gompf R. E., Stipsicz A. I., *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence **1999**.
- [22] Lickorish R., *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. 76 , 531–540, **1962**.
- [23] Wallace A. H., *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12, 503–528, **1960**.
- [24] Ding F., Geiges H., *A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 136, 583–598, **2001**.
- [25] Ding F., Geiges H., Stipsicz A., *Surgery diagrams for contact 3-manifolds*, Turkish J. Math. 28, 41–74, **2004**.

- [26] Gompf R. E., *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) 148 , 619–693, **1998**.
- [27] Ding F., Geiges H., *Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles*, Algebr. Geom. Topol. 1, 153–172, **2001**.
- [28] Dymara K. **2001**, *Legendrian knots in overtwisted contact structures on S^3* . Ann. Global Anal. Geom., 19(3):293–305.
- [29] Dymara K., *Legendrian knots in overtwisted contact structures*, www.arxiv.org/abs/math.GT/0410122.
- [30] J. B. Etnyre, *On Contact Surgery*, Proc. of the AMS, 136, no. 9, 3355–3362, **2008**.
- [31] Lisca P., Ozsváth P., Stipsicz A. I. , ve Szabó Z., *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. 11, no. 6, 1307–1363. **2009**.
- [32] Plamenevskaya O., *On Legendrian surgeries between lens spaces*, J. Symplectic Geom. 10, 165–181, **2012**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Berna PEKAVCILAR
Doğum Yeri : YÜREĞİR/ADANA
Medeni Hali : Bekar
E-posta : pek_berna@hotmail.com

Eğitim

Lise : 2000-2004 Seyhan Danişment Gazi Anadolu Lisesi
Lisans : 2005-2006 Hacettepe Üniversitesi,
Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık
2006-2010 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Çok iyi

İş Deneyimi

–

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 15 /08/2017

Tez Başlığı / Konusu: Legendre Düğümlerinin Sınıflandırılması/ Kontakt Topoloji

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın

- Kapak sayfası,
- Giriş,
- Ana bölümler

d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 53 sayfalık kısmına ilişkin, 13/08/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

- Kaynakça dâhil
- Alıntılar dâhil
- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Berna PEKAVCILAR
Öğrenci No: N12223940
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik-Tezli Yüksek Lisans
Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Sinem Çelik ONARAN

(Unvan, Ad Soyad, İmza)