BAZI SEÇME ÖZELLİKLERİNİN ZAYIF VE GÖRECELİ FORMLARI

WEAK AND RELATIVE FORMS OF SOME SELECTION PROPERTIES

ALİ EMRE EYSEN

PROF. DR. SELMA ÖZÇAĞ
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2019

ALİ EMRE EYSEN'in hazırladığı "**Bazı Seçme Özelliklerinin Zayıf ve Göreceli Formları**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. A. Haydar EŞ
Başkan ....

Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ
Danışman ....

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK
Üye ....

Prof. Dr. Şenol DOST
Üye ....

Prof. Dr. Çetin VURAL
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak ....../....../2019 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETiK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/06/2019

ALİ EMRE EYSEN

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.

☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ... ay ertelenmiştir.

☐ Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

20/06/2019

ALİ EMRE EYSEN

ÖZET

BAZI SEÇME ÖZELLİKLERİNİN ZAYIF VE GÖRECELİ FORMLARI

Ali Emre EYSEN

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ

Haziran 2019, 68 sayfa

Bu tezin amacı, bazı klasik seçme özelliklerinin zayıf formlarını ikili topolojik uzaylarda tanıtmak, aralarındaki ilişkileri incelemek ve bu özellikleri topolojik oyunlarla karakterize etmektir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin konusu hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde klasik seçme prensipleri, ikili topolojik uzaylar ve topolojik oyunlarla ilgili tezde kullanılacak temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikili topolojik uzaylarda Menger özelliğinin zayıf formları tanımlanmış bu özelliklerin birbirleriyle ve klasik seçme prensipleriyle olan ilişkileri incelenmiş ayrıca bazı topolojik özellikleri ele alınmıştır. Bu bölümde son olarak, bir klasik seçme prensibi olan Hurewicz özelliği ikili topolojik uzaylarda tanımlanmıştır.

Dördüncü bölüm, ikili topolojik uzaylarda Alster özelliğinin zayıf formlarına ayrılmıştır. Bu bağlamda ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Alster ve zayıf Alster özellikleri tanıtılmış ve bu özellikler seçme prensipleriyle karakterize edilmiştir. Ayrıca hemen hemen Alster ikili topolojik uzayların çarpımsal hemen hemen Lindelöf olduğu gösterilmiştir.

Son bölüm ise zayıf seçme prensiplerinin oyun teorisine olan uygulamalarını konu alır. Bu bölümde ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Menger ve hemen hemen Alster özelliklerine paralel olan topolojik oyunlar tanımlanmış ve oyunlarla bu özellikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İkili topolojik uzaylar, Seçme prensipleri, Menger, Alster, Çarpımsal Lindelöf, Topolojik oyunlar.

ABSTRACT

WEAK AND RELATIVE FORMS OF SOME SELECTION PROPERTIES

Ali Emre EYSEN

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ

June 2019, 68 pages

The aim of this thesis is to introduce the weak forms of some classical selection properties in bitopological spaces, investigate the relationships between them and characterize these properties with topological games. This thesis consists of five chapters. In the first chapter, information about the topic of the thesis is given.

In the second chapter, basic information about classical selection principles, topological games and bitopological spaces to be used in the thesis is given.

In the third chapter, weak Menger properties are defined in the bitopological spaces, the relationships of these properties with one another and the classical selection principles are studied, and also some topological properties of them are discussed. Finally, in this chapter, Hurewicz property, which is a classical selection principle, is defined.

The fourth chapter is devoted to the weak forms of Alster property in bitopological spaces. In this context, almost Alster and weakly Alster properties are introduced and these properties are characterized with selection principles. In addition, it is shown that the almost Alster bitopological spaces are productively Lindelöf.

The final chapter is about the applications of the weak selection principles to the game theory. In this chapter, the games parallel to the almost Menger and almost Alster

properties in bitopological spaces are defined and relationships between games and these properties are examined.

Keywords: Bitopological Space, Selection principles, Menger, Alster, Productively Lindelöf, Topological games.

TEŞEKKÜR

İlk olarak; bilgi ve deneyimleriyle bana ışık tutan, desteğini hiç esirgemeyen, katkılarıyla bu çalışmanın oluşmasını sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Selma Özçağ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sağlığında kendisinden birçok ders alma fırsatı yakaladığım için çok şanslı olduğum değerli hocamız Prof. Dr. L. M. Brown'a teşekkür ederim.

Tez izleme komitesindeki hocalarım Prof. Dr. A. Haydar Eş'e ve Prof. Dr. Rıza Ertürk'e, çok teşekkür ederim.

Bu çalışmanın tamamlanma aşamasında deneyimleriyle bana çok yardımcı olan değerli arkadaşlarım Dr. Esra Kormaz'a ve Dr. Meltem Altun Özarslan'a teşekkür ederim.

Çalışmamı tamamlamam için beni sürekli destekleyen, hayatıma her anlamda büyük katkılar sağlayan değerli meslektaşım M. Evren Deviren'e teşekkür ederim.

Sevgi ve destekleriyle başarılı olabilmem için ellerinden geleni yapan anne ve babama çok teşekkür ederim.

Ali Emre EYSEN

Haziran 2019, Ankara

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{P}(X)$	X'in kuvvet kümesi
$\mathcal{O}$	X'in açık örtülerinin sınıfı
Ω	X'in ω-örtülerinin sınıfı
Γ	X'in γ-örtülerinin sınıfı
(i,j)	$i,j \in \{1,2\}$ ve $i \neq j$
(i,j)-P	P özelliğinin τ_j topolojisine göre τ_i topolojisi için geçerli olması
p-P	$(1,2)$-P ve $(2,1)$-P
i-P	P topolojik özelliğinin τ_i topolojisi için geçerli olması
d-P	1-P ve 2-P
$Int_{\tau_i}(A)$	A kümesinin τ_i topolojisine göre içi
$Cl_{\tau_j}(A)$	A kümesinin τ_j topolojisine kapanışı
I $\uparrow G$	I. oyuncunun G oyununda kazanma stratejisi vardır
I $\not\uparrow G$	I. oyuncu'nun G oyununda kazanma stratejisi yoktur
$\square$	Kanıtın bittiğini belirten simge

1 GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, bir X kümesi üzerinde tanımlı keyfi iki τ_1 ve τ_2 topolojilerinden oluşan ve $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ biçiminde gösterilen ikili topolojik uzaylarda bazı seçme özelliklerinin zayıf formlarını tanıtmak, bu kavramlar arasındaki ilişkileri incelemek ve Menger ile Alster özelliklerinin zayıf formlarını topolojik oyunlarla karakterize etmeye çalışmaktır.

Cantor, 1874 yılında yayınladığı kümeler kuramının başlangıcı sayılan makalesinde gerçel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlamıştır. Seçme prensipleri teorisinin temeli, Cantor'un bu ispatta kullandığı köşegenleştirme yöntemine dayanır. Bu yöntem, aşağıda verilen şekliyle matematikte yeni araştırmalar ortaya çıkarmıştır.

> "Aynı türden olan A_n matematik nesnelerinin bir $\big(A_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verildiğinde, belirlenen bir kurala göre her A_n nesnesiyle ilişkili bir seçim yapılarak istenilen türde bir matematik nesnesinin elde edilmesi."

Sonsuz kombinatorik topoloji veya matematikte seçme prensipleri olarak bilinen bu teorinin geçmişi 1920'li yıllarda Borel, Menger, Hurewicz, Rothberger ve Sierpinski'nin yaptığı çalışmalara [6, 12, 27, 33, 40] dayansa da bu konudaki sistematiksel yapı Scheepers'ın [35] makalesi ile oluşmaya başlamıştır. Klasik seçme prensiplerin çıkış motivasyonları ve tarihsel süreçleri hakkında bilgi edinmek için ön bilgiler bölümüne bakılabilir ve [21, 38, 37] kaynakları incelenebilir.

Seçme prensipleri teorisinin küme teorisi, genel topoloji, oyun teorisi, Ramsey teorisi, fonksiyon uzayları, düzgün yapılar, topolojik gruplar, Karamata teorisi gibi matematiğin birçok alanıyla ilişkisi bulunmaktadır. Özellikle oyun teorisi ile yakın bir ilişkisi olup seçme prensipleri ile tanımlanan birçok özellik oyunlar ile karakterize edilebilmektedir. Topolojik oyunlar ile ilgili temel bilgiler için [39] kaynağı incelenebilir.

Scheepers [35]'te $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan ailelerin iki sınıfı olmak üzere $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ve $U_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ile gösterilen üç klasik seçme prensibi notasyonu vermiştir. Menger [27], metrik uzaylar için Menger taban özelliğini tanımlamıştır. Hurewicz de 1925 yılında bu özelliğin, X topolojik uzayının açık örtülerinin sınıfı $\mathcal{O}$ ile gösterilmek üzere Scheepers'ın notasyonuyla $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme prensibine denk olduğunu göstermiştir. Rothberger 1938 yılında, Rothberger özelliği olarak bilinen örtü özelliğini tanımlamış ve bu özelliğin $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme prensibine denk olduğunu göstermiştir.

Son yıllarda klasik seçme prensiplerinin zayıf formlarının araştırılmasına ilgi artmış ve bu konuda birçok makale yayınlanmıştır [3, 4, 5, 17, 18, 42, 43, 44].

Klasik seçme prensiplerinin genel ve zayıf formları temelde aşağıda verilen dört yöntemle yapılmaktadır.

1. Seçme prensiplerinin ideal versiyonları.
2. Yıldızıl seçme prensipleri.
3. Kapanış operatörü kullanılarak elde edilen zayıf versiyonlar.
4. Genelleştirilmiş açık kümelerle elde edilen zayıf versiyonlar.

Bu tez çalışmasında, yıldızıl seçme prensipleri ve seçme prensiplerinin zayıf versiyonlarından olan hemen hemen Menger (Rothberger, Hurewicz) ve zayıf Menger özellikleri ikili topolojik uzaylarda ele alınacaktır. Diğer taraftan zayıf Alster özellikleri seçme prensipleriyle ifade edilecektir.

Literatüre yeni katılacak olan bu kavramlar ve aralarındaki ilişkiler ikili topolojik uzaylarda inceleneceği için ikili topolojik uzaylardan da bahsedilmesi gerekir. İkili topoloijk uzay kavramı 1963 yılında Kelly tarafından [13]'te tanımlanmıştır. Üzerinde herhangi iki topoloji tanımlanmış bir kümeye ikili topolojik uzay denir. X bir küme, τ_1 ve τ_2 bu küme üzerinde herhangi iki topoloji olmak üzere $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ gösterimi bir ikili topolojik uzay belirtir. Bu teorideki temel çalışmalar Kelly tarafından yapılsa da ikili topolojik uzay kavramı çok dar bir anlamda Baire uzaylarını karakterize etmek için Motchane tarafından tanımlanmıştır [28, 29].

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasının ikinci bölümünde tezde kullanılacak temel bilgi ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Menger (Rothberger) ve zayıf Menger örtü özellikleri tanımlanmış birbirleriyle ve klasik topolojideki Menger, hemen hemen Menger, zayıf Menger özellikleri ile ilişkileri ortaya konmuştur. Ayrıca yıldızıl Menger özelliğinin zayıf formları tanıtılmış ve hemen hemen Menger özelliği ile olan ilişkileri incelenmiştir. Son olarak bazı örtü özelliklerinin belirli koşulları sağlayan fonksiyonlar altındaki görüntüleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen Alster ve zayıf Alster ikili topolojik uzayları tanımlanmıştır. Bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Hemen hemen (zayıf) Alster ikili topolojik uzayların çarpımsal hemen hemen (zayıf) Lindelöf olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu zayıf Alster özellikleri seçme prensipleri ile karakterize edilmiştir.

Beşinci bölümde, ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Menger ve hemen hemen Alster oyunları tanımlanmıştır. Hemen hemen Menger oyunu ile hemen hemen Menger özelliği karakterize edilmiştir. Hemen hemen kompakt-G_δ oyunu ile hemen hemen Alster oyununun dual olduğu gösterilmiştir. Dual olan bu oyunlarda bir koşul sağlandığında ikili topolojik uzayın hemen hemen Alster özelliğinde olduğu gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler, önermeler ve gösterimler verilecektir. Ayrıca seçme prensipleri teorisi, ikili topolojik uzaylar ve topolojik oyunlarla ilgili temel kavramlara değinilecektir.

2.1 Topolojik Uzaylar ve Seçme Prensipleri

Seçme prensipleri teorisinin temelini oluşturan iki temel fikir çok basit olup aşağıda verilen iki şablonla izah edilebilir [24].

Şablon 1 : Bir P topolojik özelliğini seçici olarak P ile ilişkilendirmek.
P: Her A için ... sağlayan bir B vardır.
Seçici P: Her $\big(A_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi için ... olan bir $\big(B_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
Örneğin, P topolojik özelliği kompaktlık ise (X uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır) seçici P şöyledir: X'in açık örtülerinin her $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, X için bir örtü olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Şablon 2 : $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ matematik nesnelerinin iki sınıfı ve π bir seçme yöntemi olmak üzere, $\mathcal{A}$'dan $\mathcal{B}$ elde etmek için π yöntemini uygulamak.

Yukarıda bahsedilen $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sınıfları, genellikle topolojik uzayların çeşitli örtülerinin sınıfları olarak alınır. O halde topolojik uzayların bazı örtülerine ve örtü sınıflarına değinelim.

Tanım 2.1.1. X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi için

$$A \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$$

sağlanıyorsa bu $\mathcal{U}$ ailesine A alt kümesinin bir *örtüsü* denir. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}, X$'in bir örtüsü olmak üzere, $\mathcal{U}$'nun tüm elemanları bu uzayda açık ise $\mathcal{U}$'ya X'in bir *açık örtüsü* denir. X'in açık örtülerinin sınıfı $\mathcal{O}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. X bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ da X'in bir açık örtüsü olsun.

a) X'in sonlu her alt kümesi için $\mathcal{U}$'nun bu kümeyi kapsayan en az bir elemanı varsa $\mathcal{U}$'ya X'in bir *ω-örtüsü* denir. X'in ω-örtülerinin sınıfı Ω ile gösterilir.

b) $\mathcal{U}$ sonsuz elemanlı olmak üzere, her $x \in X$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ ailesi sonlu ise $\mathcal{U}$'ya X'in bir γ-*örtüsü* denir. X'in γ-örtülerinin sınıfı Γ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X kümesinin iki örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa $\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{V}$'nin bir *incesi* denir.

Aşağıda, seçme prensipleri teorisinin temelini oluşturan 3 klasik seçme özelliği verilmiştir.

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ bu uzayın açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere bu uzay için $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir örtü elde edilebiliyorsa (X, τ) topolojik uzayına *Menger* ya da *Menger özelliğindedir* denir [27].

b) Her $\mathcal{U}_n$ örtüsünden bir U_n kümesi seçilerek bu uzay için $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ biçiminde bir örtü elde edilebiliyorsa (X, τ) topolojik uzayına *Rothberger* ya da *Rothberger özelliğindedir* denir [33].

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere X için $\{\cup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ biçiminde bir γ-örtü elde edilebiliyorsa (X, τ) topolojik uzayına *Hurewicz* ya da *Hurewicz özelliğindedir* denir [12].

Scheepers [35]'te aşağıda verilen 3 klasik seçme yöntemini tanımlamıştır.

Tanım 2.1.5. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ matematik nesnelerinin iki sınıfı olsun.

a) $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

$\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisinden, her $n \in \mathbb{N}$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek $\mathcal{B}$'de $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ biçiminde bir eleman elde etmektir.

b) $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

$\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisinden, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt ailesini seçerek $\mathcal{B}$'de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir eleman elde etmektir.

c) $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

> $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisinden, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt ailesini seçerek $\mathcal{B}$'de $\big\{ \cup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ biçiminde bir eleman elde etmektir.

Şimdi de bu seçme yöntemlerinin çıkış motivasyonlarına değinelim.

$\mathcal{S}_1$ **Yöntemi**

Borel, 1919 yılında metrik uzaylar için aşağıdaki tanımı vermiştir.
(X, d) metrik uzayında pozitif gerçel sayılardan oluşan keyfi $(\epsilon_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verildiğinde, her $n \in \mathbb{N}$ için $Çap_d(U_n) < \epsilon_n$ olacak şekilde X'in bir $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ açık örtüsü varsa X'e *kuvvetli ölçümü sıfırdır* denir.

Rothberger, 1938 yılında aşağıdaki örtü özelliğini tanımlamıştır.
X topolojik uzayının açık örtülerinden oluşan keyfi $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek X'in bir $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ açık örtüsünün elde edilmesi [33]. *Rothberger özelliği* olarak bilinen bu örtü özelliği, Scheepers'ın notasyonuyla $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme prensibine denktir.

Rothberger [33]'te bir metrik uzay Rothberger özelliğine sahipse kuvvetli ölçümünün sıfır olduğunu göstermiştir.

$\mathcal{S}_{fin}$ **Yöntemi**

Menger, 1924 yılında metrik uzaylar için *Menger taban özelliğini* şu şekilde vermiştir:
(X, d) metrik uzayının her $\mathcal{B}$ tabanı için $\mathcal{B}$'de öyle bir $\big(B_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır ki $\big\{B_n : n \in \mathbb{N}\big\}$, X'in bir açık örtüsü olmak üzere $\lim_{n\to\infty} Çap_d(B_n) = 0$'dır.

Hurewicz, 1925 yılında aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.
(X, d) metrik uzayı Menger taban özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul X'in açık örtülerinin keyfi $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisinden, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt ailesi seçilerek X'in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir örtüsünün elde edilmesidir.
Hurewicz'in yukarıdaki teoreminin sağ kısmı *Menger özelliği* olarak adlandırılır. Bu özellik Scheepers'ın notasyonuyla $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme prensibine denktir.

$\mathcal{U}_{fin}$ **Yöntemi**

Hurewicz kendi adı ile bilinen *Hurewicz özelliğini* şu şekilde vermiştir:

X topolojik uzayının açık örtülerinin herhangi bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisinden, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt ailesi seçilerek $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{m\geq n} (\cup\mathcal{V}_m) = X$ olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi elde edilebilir.

Hurewicz özelliği, Scheepers'ın notasyonuyla $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ seçme özelliğine denktir.

Aşağıda, Menger özelliğinin zayıf formları olan hemen hemen Menger ve zayıf Menger özelliklerinin tanımları verilmiştir.

Tanım 2.1.6. $\big(X, \tau\big)$ bir topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

a)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} \overline{V} = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau\big)$ topolojik uzayına *hemen hemen Menger* denir [20].

b)

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n} = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau\big)$ topolojik uzayına *zayıf Menger* denir [31].

Tanım 2.1.7. Bir topolojik uzayın sayılabilir çoklukta açık kümesinin arakesiti biçiminde ifade edilebilen alt kümelerine G_δ *küme* denir.

Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa bu uzaya *Lindelöf* uzay denir. Lindelöf topolojik uzayların sonlu çarpımları Lindelöf olmayabilir. Diğer taraftan, Lindelöf bir uzayla çarpımı Lindelöf olan topolojik uzaylar da vardır. Bu uzaylara *çarpımsal Lindelöf uzaylar* denir. Çarpımsal Lindelöf topolojik uzayların karakterizasyonu uzun yıllardır üzerinde çalışılan bir problemdir. Alster [1]'de aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 2.1.8. X bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$'da X'in G_δ alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olsun. X'in kompakt her alt kümesi için $\mathcal{U}$'nun bu kümeyi kapsayan en az bir elemanı varsa $\mathcal{U}$'ya X'in bir *Alster örtüsü* denir. X'in her Alster örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa X'e bir *Alster uzay* denir.

Alster [1]'de, Alster uzayların çarpımsal Lindelöf olduğunu kanıtlamıştır ancak çarpımsal Lindelöf olan her topolojik uzay Alster uzay mıdır sorusuna halen çözüm bulunamamıştır.

Alster özelliği ile seçme prensipleri teorisi arasında yakın bir ilişki vardır. Diğer taraftan Alster özelliğinin zayıf formları da tanımlanarak zayıf Lindelöf topolojik uzayların karakterizasyonu üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Tanım 2.1.9. ([18]) X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ Alster örtüsünün

$$\bigcup_{V\in\mathcal{V}} Cl(V) = X$$

olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt ailesi varsa X'e *hemen hemen Alster uzay* denir.

Teorem 2.1.10. *([18]) Hemen hemen Alster topolojik uzaylar hemen hemen Menger'dir.*

Tanım 2.1.11. ([10]) Bir $\big(X,\tau\big)$ topolojik uzayında sayılabilir çoklukta açık alt kümenin arakesiti açık oluyorsa bu uzaya *P-uzayı* denir.

Tanım 2.1.12. Bir $\big(X,\tau\big)$ topolojik uzayı kompakt alt kümelerinin sayılabilir birleşimi biçiminde ifade edilebiliyorsa bu uzaya *σ-kompakt uzay* denir.

Tanım 2.1.13. $\big(X,\tau\big)$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her $x\in X$ noktasının, $\mathcal{U}$'nun en çok sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa $\mathcal{U}$ ailesine *yerel sonlu aile* denir.

Tanım 2.1.14. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde, $\mathcal{B}=\big\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R}\big\}$ ailesi bir topoloji tabanıdır. $\mathcal{B}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde taban olduğu topolojiye Sorgenfrey topolojisi denir.

2.2 İkili Topolojik Uzaylar

İkili topolojik uzaylar 1963 yılında Kelly tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1. ([13]) Üzerinde herhangi iki topoloji tanımlanmış olan bir kümeye *ikili topolojik uzay* denir. X bir küme, τ_1 ve τ_2 bu küme üzerinde herhangi iki topoloji olmak üzere $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ gösterimi bir ikili topolojik uzay belirtir.

Kelly'nin tanımı aslında boş olmayan bir X kümesi üzerinde iki farklı topoloji üreten bir pseudo-quasi metrik ve onun eşleniğine dayanıyordu. X kümesi üzerinde d *pesudo-quasi metriği*; her $x, y, z \in X$ için

(i) $d(x, x) = 0$

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ biçiminde bir fonksiyondur.

X kümesi üzerinde her d pseudo-quasi metriği; $B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon, \epsilon > 0\}$ olmak üzere, tabanı $\{B_d(x, \epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$ ailesi olan bir $\tau(d)$ topolojisi tanımlar. Aynı zamanda $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$ ile tanımlı d^{-1} eşleniği de bir pseudo-quasi metrik olup bu metrik de benzer biçimde $\tau(d^{-1})$ topolojisini tanımlar. Dolayısıyla bir d pseudo-quasi metriğinden $\tau_1 = \tau(d)$ ve $\tau_2 = \tau(d^{-1})$ biçiminde iki topoloji elde edilir.

İkili topolojik uzaylarda aşağıda verilen sembol ve notasyonlar için [8] kaynağı referans alınmıştır. Her zaman $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$ kabul edilecektir. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve P bir topolojik özellik olsun. (i, j)-P ile, P topolojik özelliğine paralel ve τ_j topolojisi ile ilişkili olan bir özelliğin τ_i topolojisi için geçerli olduğu belirtilecektir. p-P gösterimi $(1, 2)$-P ve $(2, 1)$-P anlamına gelmektedir. (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının i-P özelliğinde olması ile (X, τ_i) topolojik uzayının P özelliğinde olması denktir. d-P gösterimi ise P topolojik özelliğinin ikili topolojik uzayın her iki topolojisi için de geçerli olduğunu (i-P ve j-P) belirtir.

Tanım 2.2.2. ([41]) (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayında her $x \in X$ ve x'i içermeyen τ_i-kapalı her F alt kümesi için $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde τ_i-açık bir U kümesi ve τ_j-açık bir V kümesi varsa bu uzaya (i, j)-*regüler* denir.

Önerme 2.2.3. *([41]) (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının (i, j)-regüler olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ ve x'i içeren τ_i-açık her U kümesi için*

$$x \in V \subset Cl_{\tau_j}(V) \subset U$$

olacak biçimde τ_i-açık bir V kümesinin olmasıdır.

Tanım 2.2.4. ([8]) (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ_1) ve (X, τ_2) topolojik uzayları kompakt ise (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına *d-kompakt* denir.

Tanım 2.2.5. ([41]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayının bir A alt kümesi için

- $Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(A)=A$ eşitliği sağlanıyorsa A'ya bir (i,j)-*regüler açık küme,*
- $Cl_{\tau_i}Int_{\tau_j}(A)=A$ eşitliği sağlanıyorsa A'ya bir (i,j)-*regüler kapalı küme*

denir.

Önerme 2.2.6. *([8])* $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ikili topolojik uzayının her A alt kümesi için*

- $Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(A)$ *bir* (i,j)*-regüler açık,*
- $Cl_{\tau_i}Int_{\tau_j}(A)$ *bir* (i,j)*-regüler kapalı*

kümedir.

Tanım 2.2.7. ([16]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olsun. X'in τ_i-açık alt kümelerinin her $\big\{U_n : n\in\mathbb{N}\big\}$ sayılabilir ailesi için

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n\Big)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Cl_{\tau_j}(U_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i,j)-*zayıf P-uzayı* denir.

Tanım 2.2.8. ([26]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ve $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının (i,j)-regüler açık her alt kümesinin f fonksiyonu altındaki ters resmi τ_i-açık ise f fonksiyonuna (i,j)-*hemen hemen süreklidir* denir.

Tanım 2.2.9. ([34]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$, $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojiklar uzay ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X'in τ_i-açık her U alt kümesi için $f(U)\subset Int_{\sigma_i}Cl_{\sigma_j}\big(f(U)\big)$ koşulu sağlanıyorsa f'ye (i,j)-*önaçık fonksiyon* denir.

Önerme 2.2.10. $f:\big(X,\tau_1,\tau_2\big)\to\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *bir fonksiyon olsun. f'nin bir (i,j)-önaçık fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul Y'nin σ_j-açık her V alt kümesi için*

$$f^{-1}\big(Cl_{\sigma_i}(V)\big)\subset Cl_{\tau_i}\big(f^{-1}(V)\big)$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.11. ([7]) (X,τ_1,τ_2) ve (Y,σ_1,σ_2) ikili topolojik uzaylar ve $p:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. p dönüşümü d-sürekli ve d-kapalı olmak üzere, her $y\in Y$ için $p^{-1}(y)\subset X$, d-kompakt oluyorsa p'ye *mükemmel dönüşüm* denir.

Tanım 2.2.12. ([8]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$, $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x\in X$ ve $f(x)$'in σ_i-açık her V komşuluğu için

$$f\big(Cl_{\tau_j}(U)\big)\subset Cl_{\sigma_j}(V)$$

olacak biçimde x'in τ_i-açık bir U komşuluğu varsa f'ye *(i,j)-θ-sürekli fonksiyon* denir.

Tanım 2.2.13. ([34]) $\big\{\big(X_\lambda,\tau_\lambda,\sigma_\lambda\big):\lambda\in\Lambda\big\}$ ikili topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\big(X_\lambda,\tau_\lambda\big)$ çarpım uzayının çarpım topolojisi $\prod\tau$ ve $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\big(X_\lambda,\sigma_\lambda\big)$ çarpım uzayının çarpım topolojisi $\prod\sigma$ olmak üzere, bu ikili topolojik uzay ailesinin *çarpım uzayı* $\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,\prod\tau,\prod\sigma\Big)$ biçimindedir.

Önerme 2.2.14. (X,τ_1,τ_2) *bir ikili topolojik uzay ve* (Y,σ_1,σ_2) *bir d-kompakt ikili topolojik uzay ise*

$$p_1: X\times Y\to X$$

izdüşüm fonksiyonu mükemmeldir.

2.3 Topolojik Oyunlar

Bu kısımda, topolojik uzaylardaki oyunlar hakkında bilgiler verilecektir. Oyunlar, I. oyuncu ve II. oyuncu diye adlandırdığımız iki oyuncu tarafından oynanmaktadır. Oyunlardaki karşılaşmalarda her $n\in\mathbb{N}$ için bu iki oyuncu n. rauntta karşı karşıya gelecektir. Herhangi bir karşılaşmanın n. rauntunda I. oyuncu bir I_n kümesi, II. oyuncu ise bir J_n kümesi seçmekle yükümlüdür. Buradaki I_n ve J_n kümeleri oyunun kuralına göre belirli küme ailelerinden seçilmelidir. Biz ikili topolojik uzaylardaki oyunları ele alacağımız için bu kümeler ilgili ikili topolojik uzayın topolojileriyle alakalı olacaktır. Oyunlardaki karşılaşmalar, I. oyuncu ve II. oyuncunun seçtiği kümelerle $I_0,\ J_0,\ I_1,\ J_1,\ldots$ biçiminde ifade edilir. Bir $I_0,\ J_0,\ I_1,\ J_1,\ldots$ karşılaşmasında oyunun kuralına göre belirli bir koşul sağlanırsa oyunculardan biri, bu koşul sağlanmazsa diğer oyuncu karşılaşmayı kazanır. Beraberlik durumu yoktur. Oyuncuların bir hamle yapmadan önce, oyunda o ana kadar yapılan tüm hamleleri hatırladıkları kabul edilir.

Biraz da strateji kavramına değinelim. Strateji en kaba tabirle bir oyun oynama yöntemidir. Bir oyuncu için strateji, oyuncunun oyun oynarken karşılaşabileceği tüm olası durumlarda nasıl hamle yapması gerektiğini bildirmelidir. O halde *strateji*, diğer oyuncunun olası tüm hamlelerine karşı daha önceden hazırlanmış bir cevap olarak nitelendirilebilir.

Tanım 2.3.1. Herhangi bir oyunda *I. oyuncu için bir strateji*, tamamlanmamış sonlu $I_0,\ J_0, \ldots, I_n,\ J_n$ karşılaşmalarından I. oyuncunun seçebileceği kümelerin ailesine bir fonksiyondur. $I_0,\ J_0, \ldots, I_n,\ J_n$ sonlu karşılaşmaları II. oyuncunun son hamlesi (J_n) ile bitmelidir.

Tanım 2.3.2. Herhangi bir oyunda *II. oyuncu için bir strateji*, tamamlanmamış sonlu $I_0,\ J_0, \ldots, J_{n-1},\ I_n$ karşılaşmalarından II. oyuncunun seçebileceği kümelerin ailesine bir fonksiyondur. $I_0,\ J_0, \ldots, J_{n-1},\ I_n$ sonlu karşılaşmaları I. oyuncunun son hamlesi (I_n) ile bitmelidir.

Tanım 2.3.3. σ bir oyunda I. oyuncu için bir strateji olsun. $\sigma(\emptyset) = I_0$ ve her n pozitif tam sayısı için $I_n = \sigma(I_0, J_0, \ldots, I_{n-1}, J_{n-1})$ olmak üzere, I. oyuncu oyundaki tüm $I_0,\ J_0,\ I_1,\ J_1, \ldots$ karşılaşmalarını kazanıyorsa, σ'ya bu oyunda *I. oyuncu için bir kazanma stratejisi* denir. Diğer bir deyişle, I. oyuncu σ stratejisine göre oynadığı tüm karşılaşmaları kazanıyorsa σ bu oyunda I. oyuncu için bir kazanma stratejisidir.
I. oyuncunun bir G oyununda kazanma stratejisi olduğu ve olmadığı sırasıyla $\mathrm{I} \uparrow G$ ve $\mathrm{I} \not\uparrow G$ biçimde belirtilir.

Tanım 2.3.4. σ bir oyunda II. oyuncu için bir strateji olsun. $\sigma(I_0) = J_0$ ve her n pozitif tam sayısı için $J_n = \sigma(I_0, J_0, \ldots, J_{n-1}, I_n)$ olmak üzere, II. oyuncu oyundaki tüm $I_0,\ J_0,\ I_1,\ J_1, \ldots$ karşılaşmalarını kazanıyorsa, σ'ya bu oyunda *II. oyuncu için bir kazanma stratejisi* denir. Diğer bir deyişle, II. oyuncu σ stratejisine göre oynadığı tüm karşılaşmaları kazanıyorsa σ bu oyunda II. oyuncu için bir kazanma stratejisidir.
II. oyuncunun bir G oyununda kazanma stratejisi olduğu ve olmadığı sırasıyla $\mathrm{II} \uparrow G$ ve $\mathrm{II} \not\uparrow G$ biçimde belirtilir.

Tanım 2.3.5. G ve G' topolojik oyunları için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bu oyunlara *dual* denir.

i) I. oyuncunun G oyununda bir kazanma stratejisinin olması için gerekli ve yeterli koşul II. oyuncunun G' oyununda bir kazanma stratejisinin olmasıdır.
($\mathrm{I} \uparrow G \Leftrightarrow \mathrm{II} \uparrow G'$)

ii) II. oyuncunun G oyununda bir kazanma stratejisinin olması için gerekli ve yeterli koşul I. oyuncunun G' oyununda bir kazanma stratejisinin olmasıdır.
($\mathrm{II} \uparrow G \Leftrightarrow \mathrm{I} \uparrow G'$)

Seçme prensipleri teorisi ile topolojik oyunlar arasında yakın bir ilişki vardır. Aşağıda $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ve $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seçme prensiplerine paralel olan iki oyun verilmiştir.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ matematik nesnelerinin iki sınıfı olsun.

$\mathcal{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Oyunu : $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; n. rauntta I. oyuncu bir $A_n \in \mathcal{A}$, II. oyuncu ise bir $B_n \in A_n$ seçer. $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ olursa II. oyuncu aksi halde I. oyuncu karşılaşmayı kazanır.

$\mathcal{G}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Oyunu : $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; n. rauntta I. oyuncu bir $A_n \in \mathcal{A}$, II. oyuncu ise bir $B_n \subset A_n$ seçer. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$ olursa II. oyuncu aksi halde I. oyuncu karşılaşmayı kazanır.

Şimdi de yukarıda bahsedilen ilişkiye örnek verelim.

I. oyuncunun $\mathcal{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\big($benzer olarak $\mathcal{G}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\big)$ oyununda bir kazanma stratejisi yoksa $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\big(\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\big)$ seçme prensibi sağlanır. Bu ifadenin tersi her zaman doğru olmayabilir.

Rothberger oyunu yani $G_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, Galvin tarafından [9]'da tanımlanmış ve Pawlikowski de [30]'da aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.3.6. *X topolojik uzayının Rothberger özelliğinde $\big(S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})\big)$ olması için gerek ve yeter koşul $G_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır.*

Hurewicz de Menger oyunu yani $G_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ ile Menger özelliği arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.7. *([11]) X topolojik uzayının Menger özelliğinde olması $\big(S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})\big)$ için gerek ve yeter koşul $G_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır.*

3 İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA SEÇME PRENSİPLERİ

3.1 Hemen Hemen Menger Özelliği

Bu kısımda, ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Menger ve hemen hemen Rothberger özelliklerinin birbirleriyle ve klasik topolojideki Menger özelliğiyle olan ilişkileri incelenecektir. Ayrıca hemen hemen Menger özelliğinin kalıtsal özellik olup olmadığı, belirli özellliklere sahip fonksiyonlar altındaki görüntüleri gibi bazı topolojik özelliklerine yer verilecektir.

Topolojik uzaylarda kapanış operatörü kullanılarak klasik seçme prensiplerinin zayıf formları elde edilmiştir. Örneğin Tanım 2.1.6(a)'da, bir açık örtü dizisindeki her elemandan sonlu sayıda açık küme seçilip bu kümelerin kapanışları alınarak topolojik uzayın bir örtüsünün elde edilmesi hemen hemen Menger özelliği olarak adlandırılmıştır. İkili topolojik uzaylarda ise açık örtüler topolojilerden birine göre alınıp kapanış diğer topolojiye göre yapılarak her iki topolojinin de dahil edilmesi sağlanmıştır.

Tanım 3.1.1. ([23]) $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V) = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen Menger* denir.

Önerme 3.1.2.
(1) $\big(X, \tau_i\big)$ *topolojik uzayı Menger ve* τ_j, X *üzerinde herhangi bir topoloji ise* $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ikili topolojik uzayı* (i, j)*-hemen hemen Menger'dir.*
(2) $\big(X, \tau_i\big)$ *topolojik uzayı hemen hemen Menger ve* τ_j, X *üzerinde* τ_i*'den daha kaba bir topoloji ise* $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ikili topolojik uzayı* (i, j)*-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: Tanımlardan kolayca görülebilir. □

Örnek 3.1.3. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış topoloji τ_1 ve Sorgenfrey topolojisi τ_2 olmak üzere, $\big(\mathbb{R}, \tau_1\big)$ topolojik uzayı Menger'dir. Böylece Önerme 3.1.2(1)'e göre $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger'dir.

Önerme 3.1.2(1)'in tersi genel olarak doğru değildir. Yani (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının (i, j)-hemen hemen Menger olması (X, τ_i) topolojik uzayının Menger olmasını gerektirmez. Bu durumla ilgili aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış topoloji τ_2 olmak üzere,

$$\mathcal{B} = \big\{\{x\} \cup (\mathbb{Q} \cap U) : x \in U \in \tau_2\big\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır [45]. $\mathcal{B}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde taban olduğu topoloji τ_1 ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki bilgiler elde edilir.

- τ_1 topolojisi, τ_2 topolojisinden daha incedir.
- $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{R}, \tau_1)$ uzayında da yoğundur.
- Her $O \in \tau_1$ için $Cl_{\tau_2}(O) = Cl_{\tau_1}(O)$'dur.
- $(\mathbb{R}, \tau_1)$ topolojik uzayı Lindelöf olmadığından Menger değildir.
- $(\mathbb{R}, \tau_1)$ topolojik uzayı hemen hemen Menger'dir.
- $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili toplojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger'dir.

Aşağıdaki teorem, Önerme 3.1.2(1)'in tersinin hangi koşul altında sağlandığını belirtmektedir.

Teorem 3.1.5. *(X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i, j)-regüler ve (i, j)-hemen hemen Menger ise (X, τ_i) topolojik uzayı Menger'dir.*

Kanıt: X'in τ_i-açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i, j)-regüler olduğundan Önerme 2.2.3'e göre her $n \in \mathbb{N}$ için X'in bir $\mathcal{U}'_n$, τ_i-açık örtüsü vardır ki

$$Cl_{\tau_j}(\mathcal{U}'_n) = \{Cl_{\tau_j}(U') : U' \in \mathcal{U}'_n\}$$

ailesi $\mathcal{U}_n$'nin bir incesidir.

(X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger ve $(\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N})$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir $\mathcal{V}'_n$ alt ailesi vardır ki

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_j}(V') = X$$

olur.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $V' \subset U_{V'}$ olacak biçimde bir $U_{V'} \in \mathcal{U}_n$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{U_{V'} : V' \in \mathcal{V}'_n\}$ biçimindeyse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ ailesi X'i örteceğinden (X, τ_i) topolojik uzayı Menger'dir. □

Topolojik uzaylarda, Rothberger özelliği ile Menger özelliği arasında yakın bir ilişki vardır. Açıkça Rothberger özelliğindeki topolojik uzaylar Menger özelliğindedir. Scheepers [36]'da topolojik uzaylarda hemen hemen Rothberger özelliğinin tanımını vermiştir. Song ise [43]'te topolojik uzaylarda Rothberger, hemen hemen Rothberger ve zayıf Rothberger özellikleri arasındaki ilişkileri inceleyip bu uzayların topolojik özellikleri üzerinde durmuştur. Biz de ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Rothberger özelliğinin tanımını verip hemen hemen Menger özelliği ile ilişkisine kısaca değineceğiz.

Tanım 3.1.6. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

olacak biçimde bir $(U_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi bulunabiliyorsa (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen Rothberger* denir.

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, (i, j)-hemen hemen Rothberger ikili topolojik uzaylar (i, j)-hemen hemen Menger'dir. Fakat bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Bu durumla ilgili aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.7. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde τ_1 alışılmış topoloji ve τ_2 topolojisi $\tau_2 = \{U = G\backslash C : G \in \tau_1, C \subset \mathbb{R} \text{ sayılabilir}\}$ biçiminde olsun. $(\mathbb{R}, \tau_1)$ topolojik uzayı Menger olduğundan Önerme 3.1.2(1)'e göre $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger'dir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki doğal metrik d ve $U \subset \mathbb{R}$ için $Çap_d(U) = sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \{U \in \tau_1 : Çap_d(U) < 2^{-n}\}$ biçiminde olsun. $\mathbb{R}$'nin τ_1-açık örtülerinin $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için $Cl_{\tau_1}(U) = Cl_{\tau_2}(U)$ olur. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere

$$Çap_d\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_2}(U_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

olacağından $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Rothberger değildir.

(i,j)-hemen hemen Menger ikili topolojik uzayların tanımında geçen i-açık kümeleri (i,j)-regüler açık kümeler alabiliriz. Aşağıdaki teoremde, (i,j)-hemen hemen Menger ikili topolojik uzaylar (i,j)-regüler açık kümelerle karakterize edilmiştir.

Teorem 3.1.8. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayının (i,j)-hemen hemen Menger olması için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın (i,j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin her $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisine karşılık her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V)=X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisinin olmasıdır.

Kanıt:

($\Rightarrow$): (i,j)-regüler açık kümeler i-açık olduğundan hemen sağlanır.

($\Leftarrow$): $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayının τ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n=\big\{Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U) : U\in\mathcal{U}_n\big\}$ biçiminde olsun. Önerme 2.2.6'ya göre $\big(\mathcal{U}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$ bu uzayın (i,j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. O halde hipoteze göre her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{V'\in\mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_j}(V')=X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $V'\in\mathcal{V}'_n$ için $V'=Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U_{V'})$ olacak biçimde bir $U_{V'}\in\mathcal{U}_n$ vardır. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n=\big\{U_{V'} : V'\in\mathcal{V}'_n\big\}$ biçimindeyse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan $Cl_{\tau_j}\big(U_{V'}\big)$ kümeleri (j,i)-regüler kapalı olduğundan

$$Cl_{\tau_j}\big(V'\big)=Cl_{\tau_j}Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}\big(U_{V'}\big)=Cl_{\tau_j}\big(U_{V'}\big)$$

eşitliği sağlanır.

O halde (1) eşitliğine göre

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V)=X$$

olacağından $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

Aşağıdaki teoremde, (i,j)-hemen hemen Menger özelliğinin (i,j)-regüler açık kümelerle karakterizasyonundan yararlanılarak p-hemen hemen sürekli fonksiyonlar altında korunduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.9. *(X, τ_1, τ_2) ve (Y, σ_1, σ_2) ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ p-hemen hemen sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) uzayı (i, j)-hemen hemen Menger ise (Y, σ_1, σ_2) uzayı da (i, j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: Y uzayının (i, j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ biçimindeyse f fonksiyonu (i, j)-hemen hemen sürekli olduğundan $(\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N})$, X uzayının τ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. X uzayı (i, j)-hemen hemen Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_j}(V') = X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır.
Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $V' = f^{-1}(U_{V'})$ olacak biçimde en az bir $U_{V'} \in \mathcal{U}_n$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{U_{V'} : V' \in \mathcal{V}'_n\}$ biçimindeyse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Bu durumda

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'_n} Cl_{\sigma_j}(U_{V'}) = Y \tag{2}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.
$y = f(x) \in Y$ olsun. (1) eşitliğine göre en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve en az bir $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $x \in Cl_{\tau_j}(V') = Cl_{\tau_j}(f^{-1}(U_{V'}))$ olur. $U_{V'}$ kümesi Y uzayının (i, j)-regüler açık bir alt kümesi olduğundan $Cl_{\sigma_j}(U_{V'}) = Cl_{\sigma_j} Int_{\sigma_i} Cl_{\sigma_j}(U_{V'})$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğe göre $Y \backslash Cl_{\sigma_j}(U_{V'})$ kümesi (j, i)-regüler açıktır. f fonksiyonu (j, i)-hemen hemen sürekli olduğundan $f^{-1}(Y \backslash Cl_{\sigma_j}(U_{V'})) = X \backslash f^{-1}(Cl_{\sigma_j}(U_{V'}))$ kümesi τ_j-açık ve dolayısıyla da $f^{-1}(Cl_{\sigma_j}(U_{V'}))$ kümesi τ_j-kapalıdır. Buradan $Cl_{\tau_j}(f^{-1}(U_{V'})) \subset f^{-1}(Cl_{\sigma_j}(U_{V'}))$ olacağından $y \in Cl_{\sigma_j}(U_{V'})$'dür. Böylece (2) eşitliği sağlandığından (Y, σ_1, σ_2) uzayı (i, j)-hemen hemen Menger'dir. $\square$

Yukarıdaki teoremde, f fonksiyonu p-hemen hemen sürekli olduğundan X uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger ise Y uzayı da $(1, 2)$-hemen hemen Menger; benzer biçimde X uzayı $(2, 1)$-hemen hemen Menger ise Y uzayı da $(2, 1)$-hemen hemen Menger'dir. O halde aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 3.1.10. *(X, τ_1, τ_2) ve (Y, σ_1, σ_2) ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ p-hemen hemen sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) uzayı p-hemen hemen Menger ise (Y, σ_1, σ_2) uzayı da p-hemen hemen Menger'dir.*

Teorem 3.1.11. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ve* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *bir* (j,i)*-önaçık ve mükemmel dönüşüm olsun. Bu durumda* Y *uzayı* (i,j)*-hemen hemen Menger ise* X *uzayı da* (i,j)*-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: X uzayının τ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. f fonksiyonu mükemmel olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi τ_i-kompakttır. Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(y) \subset \cup\,\mathcal{U}_{ny}$ olacak biçimde $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{U}_{ny}$ alt ailesi vardır.
$\cup\,\mathcal{U}_{ny} = U_{ny}$ olsun. f fonksiyonu i-kapalı olduğundan $V_{ny} = Y \backslash f\big(X \backslash U_{ny}\big)$ kümesi y'nin σ_i-açık bir komşuluğudur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \big\{V_{ny} : y \in Y\big\}$ biçimindeyse $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, Y uzayının σ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. Y uzayı (i,j)-hemen hemen Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{V}'_n} Cl_{\sigma_j}(V) = Y$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
Her $n \in \mathbb{N}$ için I_n sonlu bir indis kümesi olmak üzere, $\mathcal{V}'_n = \big\{V_{ny_i} : i \in I_n\big\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}'_n = \bigcup\limits_{i\in I_n} \mathcal{U}_{ny_i}$ biçimindeyse $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan f fonksiyonu (j,i)-önaçık olduğundan Önerme 2.2.10'a göre

$$\begin{aligned}
X =& f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} Cl_{\sigma_j}\big(V_{ny_i}\big)\Big)\\
=& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} f^{-1}\big(Cl_{\sigma_j}\big(V_{ny_i}\big)\big)\\
\subset& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} Cl_{\tau_j}\big(f^{-1}\big(V_{ny_i}\big)\big)\\
\subset& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} Cl_{\tau_j}\big(U_{ny_i}\big)\\
=& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} Cl_{\tau_j}\big(\cup\,\mathcal{U}_{ny_i}\big)\\
=& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{U\in\mathcal{U}'_n} Cl_{\tau_j}(U)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

Sonuç 3.1.12. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ve* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *p-önaçık ve mükemmel bir dönüşüm olsun. Bu durumda* Y *uzayı p-hemen hemen Menger ise* X *uzayı da p-hemen hemen Menger'dir.*

Teorem 3.1.13. (X, τ_1, τ_2) *bir p-hemen hemen Menger ve* (Y, σ_1, σ_2) *bir d-kompakt ikili topolojik uzay ise* $(X \times Y, \tau_1 \times \sigma_1, \tau_2 \times \sigma_2)$ *ikili topolojik uzayı p-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: Önerme 2.2.14'e göre $p_1 : X \times Y \to X$ izdüşüm fonksiyonu mükemmeldir. Diğer taraftan p_1 fonksiyonu d-açık olduğundan p-önaçıktır. O halde Sonuç 3.1.12'ye göre $X \times Y$ uzayı p-hemen hemen Menger'dir. □

(i, j)-hemen hemen Menger özelliğinin hangi alt uzaylarda korunduğunu göstermek amacıyla aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.1.14. (X, τ_1, τ_2) *bir ikili topolojik uzay ve A bu uzayın τ_j-açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda* $(A, \tau_{1_A}, \tau_{2_A})$ *alt uzayının (i, j)-hemen hemen Menger olması için gerekli ve yeterli koşul A'nın τ_i-açık alt kümelerden oluşan örtülerinin her* $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ *dizisine karşılık her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere*

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V)$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$ *dizisinin olmasıdır.*

Kanıt:

$(\Rightarrow)$: A'nın τ_i-açık kümelerden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}_n\}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N})$, A'nın τ_{i_A}-açık örtülerinin bir dizisidir. Öyleyse hipoteze göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V \in \mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_{j_A}}(V) \qquad (1)$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır.

Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V \in \mathcal{V}'_n$ için $V = A \cap U_V$ olacak biçimde bir $U_V \in \mathcal{U}_n$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}'_n\}$ biçimindeyse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Her $V \in \mathcal{V}'_n$ için

$$Cl_{\tau_{j_A}}(V) = Cl_{\tau_j}(V) \cap A \subset Cl_{\tau_j}(A \cap U_V) \subset Cl_{\tau_j}(U_V)$$

olduğundan (1) eşitliğine göre

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{U_V \in \mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(U_V)$$

elde edilir.

($\Leftarrow$): A'nın τ_{i_A}-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için V_U, τ_i-açık bir küme olmak üzere $U = A \cap V_U$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \big\{V_U : U \in \mathcal{U}_n\big\}$ biçimindeyse $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, A'nın τ_i-açık kümelerden oluşan örtülerinin bir dizisidir. O halde hipoteze göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V_U\in\mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_j}(V_U) \tag{2}$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \big\{U = A \cap V_U : V_U \in \mathcal{V}'_n\big\}$ biçimindeyse $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan A kümesi τ_j-açık olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $U \in \mathcal{U}'_n$ için

$$Cl_{\tau_{j_A}}(U) = Cl_{\tau_{j_A}}(V_U \cap A) = Cl_{\tau_j}(V_U) \cap A$$

olur. O halde (2)'ye göre

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{U\in\mathcal{U}'_n} \mathrm{Cl}_{\tau_{j_A}}(U)$$

olacağından $(A, \tau_{1_A}, \tau_{2_A})$ uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

Teorem 3.1.15. *(i,j)-hemen hemen Menger bir ikili topolojik uzayın τ_i-kapalı ve τ_j-açık olan bir alt uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Menger ve X'in A alt kümesi τ_i-kapalı ve τ_j-açık olsun. A'nın τ_i-açık kümelerden oluşan örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. A kümesi τ_i-kapalı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n \cup \{X \backslash A\}$ ailesi X'in bir τ_i-açık örtüsüdür. X uzayı (i,j)-hemen hemen Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{V}'_n} Cl_{\tau_j}(V) = X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \big\{V \in \mathcal{V}'_n : V \neq X \backslash A\big\}$ biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan $X \backslash A$ kümesi τ_j-kapalı olduğundan (1) eşitliğine göre

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{U}'_n} Cl_{\tau_j}(V)$$

elde edilir. O halde Önerme 3.1.14'e göre $\big(A, \tau_{1_A}, \tau_{2_A}\big)$ alt uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

Teorem 3.1.16. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *bir ikili topolojik uzay olsun. Her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $\big(X^n,{\tau_1}^n,{\tau_2}^n\big)$ *çarpım uzayının* (i,j)*-hemen hemen Menger olması için gerekli ve yeterli koşul* X*'in* τ_i*-*ω*-örtülerinin her* $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ *dizisine karşılık aşağıdaki koşulların sağlandığı bir* $\big(\mathcal{V}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ *dizisinin olmasıdır.*

(i) Her $n\in\mathbb{N}$ *için* $\mathcal{V}_n$*,* $\mathcal{U}_n$*'nin sonlu bir alt ailesidir.*

(ii) X*'in her sonlu* F *alt kümesi için* $F\subset Cl_{\tau_j}(V)$ *olacak biçimde en az bir* $n\in\mathbb{N}$ *ve* $V\in\mathcal{V}_n$ *vardır.*

Kanıt:

$(\Rightarrow)$: X'in τ_i-ω-örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $m\in\mathbb{N}$ için $N_m\subset\mathbb{N}$ sonsuz bir küme olmak üzere $\big\{N_m : m\in\mathbb{N}\big\}$ ailesi $\mathbb{N}$'nin bir parçalanışı olsun. Her $m\in\mathbb{N}$ ve her $k\in N_m$ için ${\mathcal{U}_k}^m=\big\{U^m : U\in\mathcal{U}_k\big\}$ biçimindeyse $\big({\mathcal{U}_k}^m : k\in N_m\big)$, X^m'nin ${\tau_i}^m$-açık örtülerinin bir dizisidir.

Hipoteze göre $\big(X^m,{\tau_1}^m,{\tau_2}^m\big)$ uzayı (i,j)-hemen hemen Menger olduğundan her $k\in N_m$ için ${\mathcal{V}_k}^m$, ${\mathcal{U}_k}^m$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{k\in N_m}\bigcup_{V\in{\mathcal{V}_k}^m} Cl_{{\tau_j}^m}(V)=X^m \tag{1}$$

olacak biçimde bir $\big({\mathcal{V}_k}^m : k\in N_m\big)$ dizisi vardır.

Diğer taraftan her $V\in{\mathcal{V}_k}^m$ için $V={U_V}^m$ olacak biçimde en az bir $U_V\in\mathcal{U}_k$ vardır. Her $k\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_k=\big\{U_V : V\in{\mathcal{V}_k}^m\big\}$ olsun. Bu durumda $\big(\mathcal{V}_k : k\in\mathbb{N}\big)$ dizisi için aranan koşulların sağlandığını gösterelim.

(i) Açıkça her $k\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{U}_k$'nin sonlu bir alt ailesidir.

(ii) $F=\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}\subset X$ olsun. (1) eşitliğine göre $(x_1,x_2,\ldots,x_s)\in Cl_{{\tau_j}^s}(V)$ olacak biçimde en az bir $k\in N_s$ ve $V\in{\mathcal{V}_k}^s$ vardır. Diğer taraftan en az bir $U_V\in\mathcal{U}_k$ için $V={U_V}^s$ biçimindedir. Buradan

$$Cl_{{\tau_j}^s}(V)=Cl_{{\tau_j}^s}\big({U_V}^s\big)=\big(Cl_{\tau_j}(U_V)\big)^s$$

eşitliğine göre $F\subset Cl_{\tau_j}\big(U_V\big)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: X^k uzayının ${\tau_i}^k$-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $\mathcal{U}_n$ örtüsü $\mathcal{U}_n=\big\{U_{nm} : m\in M_n\big\}$ biçiminde olsun. F, X'in sonlu bir alt kümesi olsun. Bu durumda F^k de X^k'nin sonlu bir alt kümesi olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$F^k\subset\bigcup_{m\in M_n^F}U_{nm}$$

olacak biçimde M_n'nin sonlu bir M_n^F alt kümesi vardır. Diğer taraftan

$$F \subset V_F \text{ ve } {V_F}^k \subset \bigcup_{m \in M_n^F} U_{nm}$$

olacak biçimde X'in τ_i-açık bir V_F alt kümesi vardır. Böylece $\mathcal{V}_n = \{V_F : F \subset X \text{ sonlu}\}$ ailesi X'in bir τ_i-ω-örtüsüdür.

Hipoteze göre öyle bir $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere, X'in sonlu her S alt kümesi için $S \subset Cl_{\tau_j}(W)$ olacak biçimde en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve en az bir $W \in \mathcal{W}_n$ vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için R_n sonlu bir indis kümesi olmak üzere, $\mathcal{W}_n = \{V_{F_r} : r \in R_n\}$ biçiminde olsun. Bu durumda $H_n = \{m \in M_n^{F_r} : r \in R_n\}$ olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in H_n} Cl_{{\tau_j}^k}(U_{n,m}) = X^k \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.

$x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in X^k$ olsun. $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ kümesi sonludur. Öyleyse en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve en az bir $W \in \mathcal{W}_n$ için $S \subset Cl_{\tau_j}(W)$'dir. $r \in R_n$ için $W = V_{F_r}$ olsun. Buradan

$$S^k \subset \big(Cl_{\tau_j}(V_{F_r})\big)^k \subset Cl_{{\tau_j}^k}({V_{F_r}}^k) \subset \bigcup_{m \in M_n^{F_j}} Cl_{{\tau_j}^k}(U_{nm})$$

olduğundan en az bir $m \in M_n^{F_r}$ için $x \in Cl_{{\tau_j}^k}(U_{nm})$'dir. O halde (2) eşitliği sağlandığından $(X^k, {\tau_1}^k, {\tau_2}^k)$ uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

3.2 Zayıf Menger Özelliği

Bu kısımda öncelikle ikili topolojik uzaylarda zayıf Menger özelliğinin tanımı verilecektir. İkili topolojik uzaylarda zayıf Menger özelliği ile hemen hemen Menger özelliği karşılaştırılacak, hangi koşullar altında denk oldukları gösterilecektir. Ayrıca zayıf Menger ikili topolojik uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.2.1. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n\Big) = X$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi bulunabiliyorsa (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına *(i,j)-zayıf Menger* denir.

Tanımdan açıkça görüleceği üzere (i,j)-hemen hemen Menger ikili topolojik uzaylar (i,j)-zayıf Menger'dir. Fakat (i,j)-zayıf Menger özelliği, (i,j)-hemen hemen Menger özelliğini gerektirmez. Aşağıda (i,j)-zayıf Menger olan ancak (i,j)-hemen hemen Menger olmayan bir ikili topolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 3.2.2. Her x irrasyonel sayısı için alışılmış topolojide x'e yakınsayan bir (x_n) rasyonel sayı dizisi seçelim. Her x irrasyonel sayısı için $U_n(x) = \{x\} \cup \{x_k : k \geq n\}$ biçiminde olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B} = \big\{\{y\} : y \in \mathbb{Q}\big\} \cup \big\{U_n(x) : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\big\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. $\mathcal{B}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde ürettiği topolojiye *rasyonel dizi topolojisi* denir. Rasyonel dizi topolojisi, alışılmış topolojiden daha incedir [45, ör:65].

Şimdi örnek olarak vereceğimiz ikili topolojik uzayı oluşturalım.

τ_1 ve τ_2 sırasıyla $\mathbb{R}$ üzerinde rasyonel dizi topolojisi ve alışılmış topoloji olsun. $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayının $(1,2)$-zayıf Menger olduğunu ancak $(1,2)$-hemen hemen Menger olmadığını görelim.

• $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-zayıf Menger'dir:

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{R}, \tau_2)$ uzayında yoğun olduğundan $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-zayıf Menger'dir.

• $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Menger değildir:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \big\{\{y\} : y \in \mathbb{Q}\big\} \cup \big\{U_n(x) : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\big\}$ ailesi $\mathbb{R}$'nin bir τ_1-açık örtüsüdür. Her irrasyonel sayı, $\mathcal{U}_n$'nin sadece bir elemanında vardır. Diğer taraftan $\mathcal{U}_n$'nin elemanları τ_2-kapalıdır. Öyleyse her irrasyonel sayı, $\mathcal{U}_n$'nin sadece bir elemanının τ_2-kapanışında bulunur. $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ örtü dizisinde irrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğu göz önüne alındığında $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayının $(1,2)$-hemen hemen Menger olmadığı görülür.

Kocev [18]'de zayıf Menger (topolojik uzay anlamında) P-uzaylarının hemen hemen Menger olduğunu göstermiştir. Aşağıdaki iki önermede iki farklı koşul altında zayıf Menger ikili topolojik uzayların hemen hemen Menger olduğu gösterilmiştir.

Önerme 3.2.3. *(X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve (X, τ_j) bir P-uzayı olsun. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Menger ise (i,j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: X'in τ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. X uzayı (i,j)-zayıf Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup \mathcal{V}_n\Big) = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
$\big(X, \tau_j\big)$ bir P-uzayı olduğundan bu uzayda sayılabilir çoklukta kapalı kümenin birleşimi kapalıdır. Öyleyse $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V)$ kümesi τ_j-kapalıdır. Bu durumda

$$X = Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup \mathcal{V}_n\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V)$$

olacağından $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir. □

Önerme 3.2.4. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf P-uzayı olsun. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı (i,j)-zayıf Menger ise (i,j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: Tanım 2.2.7'den açıktır. □

Teorem 3.1.5'te $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-regüler ve (i,j)-hemen hemen Menger olduğunda $\big(X, \tau_i\big)$ uzayının Menger olduğu gösterildi. Önerme 3.2.3 ve Önerme 3.2.4'ten de yararlanarak aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 3.2.5. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-regüler olsun. Bu durumda $\big(X, \tau_j\big)$ bir P-uzayı ya da $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir (i,j)-zayıf P-uzayı ise*

(1) *$\big(X, \tau_i\big)$ topolojik uzayı Menger'dir.*

(2) *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir.*

(3) *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Menger'dir.*

ifadeleri denktir.

Teorem 3.1.8'de (i,j)-hemen hemen Menger özelliği (i,j)-regüler açık kümelerle karakterize edilmişti. Aşağıdaki teoremde, benzer biçimde (i,j)-zayıf Menger özelliği de (i,j)-regüler açık kümelerle karakterize edilmiştir.

Teorem 3.2.6. *(X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının (i,j)-zayıf Menger olması için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın (i,j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin her $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisine karşılık her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere*

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup \mathcal{V}_n\Big) = X$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisinin olmasıdır.

Kanıt:

($\Rightarrow$): (i,j)-regüler açık kümeler i-açık olduğundan hemen sağlanır.

($\Leftarrow$): (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının τ_i-açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \{Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ biçiminde olsun. $(\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N})$ bu uzayın (i,j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. O halde hipoteze göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup \mathcal{V}'_n\Big) = X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $V' = Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U_{V'})$ olacak biçimde bir $U_{V'} \in \mathcal{U}_n$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{U_{V'} : V' \in \mathcal{V}'_n\}$ biçiminde seçilirse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Bu durumda

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup \mathcal{V}_n\Big) = X \tag{2}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$x \in X$ ve N_x, x'in bir τ_j-açık komşuluğu olsun. (1) eşitliğine göre en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve en az bir $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $N_x \cap V' \neq \emptyset$'dir. Diğer taraftan $U_{V'} \in \mathcal{V}_n$ için $V' = Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U_{V'})$ biçiminde olduğundan

$$N_x \cap Int_{\tau_i}Cl_{\tau_j}(U_{V'}) \neq \emptyset$$

$$N_x \cap Cl_{\tau_j}(U_{V'}) \neq \emptyset$$

$$N_x \cap U_{V'} \neq \emptyset$$

olur. Böylece (2) eşitliği sağlandığından (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Menger'dir. □

Aşağıdaki teoremde, Teorem 3.1.9'a paralel olarak (i,j)-zayıf Menger özelliğinin p-hemen hemen sürekli fonksiyonlar altında korunduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.2.7. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ve* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *p-hemen hemen sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *uzayı* (i,j)*-zayıf Menger ise* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *uzayı da* (i,j)*-zayıf Menger'dir.*

Kanıt: Y uzayının (i,j)-regüler açık kümelerinden oluşan örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \big\{f^{-1}(U) : U\in\mathcal{U}_n\big\}$ biçimindeyse f fonksiyonu (i,j)-hemen hemen sürekli olduğundan $\big(\mathcal{U}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$, X uzayının τ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. X uzayı (i,j)-zayıf Menger olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\mathcal{V}'_n\Big) = X \qquad (1)$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $V'\in\mathcal{V}'_n$ için $V' = f^{-1}\big(U_{V'}\big)$ olacak biçimde en az bir $U_{V'}\in\mathcal{U}_n$ vardır. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \big\{U_{V'} : V'\in\mathcal{V}'_n\big\}$ biçimindeyse $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt kümesidir. Bu durumda

$$Cl_{\sigma_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\mathcal{V}_n\Big) = Y \qquad (2)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.
$y = f(x)\in Y$ ve N_y, y'nin bir σ_j-açık komşuluğu olsun. $Int_{\sigma_j}Cl_{\sigma_i}(N_y)$ kümesi Y'nin (j,i)-regüler açık bir alt kümesi ve f fonksiyonu (j,i)-hemen hemen sürekli olduğundan $f^{-1}\big(Int_{\sigma_j}Cl_{\sigma_i}(N_y)\big)$ kümesi x'in bir τ_j-açık komşuluğudur. O halde (1) eşitliğine göre en az bir $n\in\mathbb{N}$ ve en az bir $V'\in\mathcal{V}'_n$ için $f^{-1}\big(Int_{\sigma_j}Cl_{\sigma_i}(N_y)\big)\cap V' \neq \emptyset$'dir. Diğer taraftan $U_{V'}\in\mathcal{V}_n$ için $V' = f^{-1}\big(U_{V'}\big)$ biçiminde olduğundan

$$f^{-1}\big(Int_{\sigma_j}Cl_{\sigma_i}(N_y)\big)\cap f^{-1}\big(U_{V'}\big) \neq \emptyset$$

$$Int_{\sigma_j}Cl_{\sigma_i}(N_y)\cap U_{V'} \neq \emptyset$$

$$Cl_{\sigma_i}(N_y)\cap U_{V'} \neq \emptyset$$

$$N_y\cap U_{V'} \neq \emptyset$$

olur. Böylece (2) eşitliği sağlandığından $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ uzayı (i,j)-zayıf Menger'dir. □

Sonuç 3.2.8. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ve* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *p-hemen hemen sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *uzayı p-zayıf Menger ise* $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ *uzayı da p-zayıf Menger'dir.*

Teorem 3.2.9. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ve $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir (j,i)-önaçık ve mükemmel bir dönüşüm olsun. Bu durumda Y uzayı (i,j)-zayıf Menger ise X uzayı da (i,j)-zayıf Menger'dir.*

Kanıt: Teorem 3.1.12'nin kanıtına benzer olarak yapılabilir. □

Sonuç 3.2.10. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ve $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir p-önaçık ve mükemmel bir dönüşüm olsun. Bu durumda Y uzayı p-zayıf Menger ise X uzayı da p-zayıf Menger'dir.*

Teorem 3.2.11. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ bir p-zayıf Menger ve $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ bir d-kompakt ikili topolojik uzay ise $\big(X\times Y,\tau_1\times\sigma_1,\tau_2\times\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzayı p-zayıf Menger'dir.*

Kanıt: Önerme 2.2.14 ve Sonuç 3.2.10'dan elde edilen bilgilerle Teorem 3.1.13'ün kanıtına benzer olarak yapılabilir. □

Teorem 3.2.12. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ (i,j)-zayıf Menger bir ikili topolojik uzay olsun. A, X'in τ_j-yoğun bir alt kümesi olmak üzere $A\times Y$ uzayı (i,j)-zayıf Menger ise $X\times Y$ uzayı da (i,j)-zayıf Menger'dir.*

Kanıt: $X\times Y$ uzayının $\tau_i\times\sigma_i$-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n=\big\{U\cap(A\times Y) : U\in\mathcal{U}_n\big\}$ biçimindeyse $\big(\mathcal{U}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$, $A\times Y$'nin $\tau_{i_A}\times\sigma_i$-açık örtülerinin bir dizisidir. $A\times Y$ uzayı (i,j)-zayıf Menger olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{U}'_n$'nün sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$Cl_{\tau_{j_A}\times\sigma_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\mathcal{V}'_n\Big)=A\times Y \tag{1}$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}'_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $V'\in\mathcal{V}'_n$ için $V'=U_{V'}\cap(A\times Y)$ olacak biçimde bir $U_{V'}\in\mathcal{U}_n$ vardır. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n=\big\{U_{V'} : V'\in\mathcal{V}'_n\big\}$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan $A\times Y$, $X\times Y$ uzayının $\tau_j\times\sigma_j$-yoğun bir alt kümesi olduğundan ve (1) eşitliğinden

$$Cl_{\tau_j\times\sigma_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\mathcal{V}_n\Big)=X\times Y$$

elde edilir. O halde $X\times Y$ uzayı (i,j)-zayıf Menger'dir. □

3.3 Hemen Hemen Yıldızıl Menger Özellikleri

Seçme prensipleri teorisinde yıldızıl operatörü ilk kez Kočinac tarafından kullanılmış ve yıldızıl Menger, kuvvetli yıldızıl Menger, yıldızıl Hurewicz tanımları yapılmıştır [19, 20, 22]. Yıldızıl seçme prensipleri ile ilgili detaylı bilgiye [20, 25]'ten ulaşılabilir.

Topolojik uzaylarda yıldızıl seçme prensiplerinin zayıf formları Kocev tarafından çalışılmıştır [17]. Biz de ikili topolojik uzaylarda yıldızıl seçme prensiplerinin zayıf formlarını inceleyeceğiz.

X bir küme, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $B \subset X$ ve $x \in X$ olmak üzere;

$$St(x, \mathcal{A}) = \cup\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$
$$St(B, \mathcal{A}) = \cup\{A \in \mathcal{A} : B \cap A \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlanır. Açıkça, $St(B, \mathcal{A}) = \bigcup_{x \in B} St(x, \mathcal{A})$ eşitliği sağlanır.

Tanım 3.3.1. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n, X'in sonlu bir alt kümesi olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(F_n, \mathcal{U}_n)\big) = X$$

olacak biçimde bir $\big(F_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)*-hemen hemen kuvvetli yıldızıl Menger* denir.

(i, j)-hemen hemen Menger ikili topolojik uzayların (i, j)-hemen hemen kuvvetli yıldızıl Menger olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 3.3.2. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için K_n, X'in τ_j-kompakt bir alt kümesi olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(K_n, \mathcal{U}_n)\big) = X$$

olacak biçimde bir $\big(K_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)*-hemen hemen yıldızıl K Menger* denir.

Bir topolojik uzayın sonlu alt kümeleri kompakt olduğundan (i, j)-hemen hemen kuvvetli yıldızıl Menger ikili topolojik uzaylar, (i, j)-hemen hemen yıldızıl K Menger'dir.

Tanım 3.3.3. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(\cup\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)\big) = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)*-hemen hemen yıldızıl Menger* denir.

(i, j)-hemen hemen kuvvetli yıldızıl Menger ikili topolojik uzaylar, (i, j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir. Diğer taraftan $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ (i, j)-hemen hemen yıldızıl K Menger ikili topolojik uzayı için $\tau_i \subset \tau_j$ ise bu uzay (i, j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir.

Tanım 3.3.4. ([32]) $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olsun. Eğer X'in her τ_i-açık örtüsünün τ_i-açık ve τ_j-yerel sonlu olan bir incesi varsa bu uzaya (i, j)*-parakompakt* denir.

Teorem 3.3.5. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i, j)-parakompakt olsun. Bu durumda X uzayı (i, j)-hemen hemen yıldızıl K Menger ise (i, j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: X'in τ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. X, (i, j)-parakompakt olduğundan genelliği bozmadan $\mathcal{U}_n$ örtülerini τ_j-yerel sonlu kabul edebiliriz. X, (i, j)-hemen hemen yıldızıl K Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için K_n, X'in bir τ_j-kompakt alt kümesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(K_n, \mathcal{U}_n)\big) = X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $\big(K_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.
$\mathcal{U}_n$ örtüleri τ_j-yerel sonlu olduğundan her $x \in X$ noktasının $\mathcal{U}_n$'nin sonlu sayıda elemanını kesen bir N_{xn} τ_j-komşuluğu vardır. Diğer taraftan, K_n kümeleri τ_j-kompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset \bigcup_{x\in F_n} N_{xn}$ olacak biçimde K_n'nin sonlu bir F_n alt kümesi vardır. Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \big\{U \in \mathcal{U}_n : U \cap N_{xn} \neq \emptyset, x \in F_n\big\}$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$St\Big(\bigcup_{x\in F_n} N_{xn}, \mathcal{U}_n\Big) = \cup\mathcal{V}_n \tag{2}$$

eşitliği elde edilir. O halde (1) ve (2) eşitliklerinden $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger'dir. $\square$

Aşağıdaki şema, verilen yıldızıl Menger özellikleri arasındaki ilişkileri ifade etmektedir.

$$
\begin{tikzcd}
(i,j)\text{-h. h. Menger} \arrow[d, Rightarrow] & \\
(i,j)\text{-h. h. kuv. yıl. Menger} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (i,j)\text{-h. h. yıl. K Menger} \arrow[ul, Rightarrow, "(i,j)\text{-parakompakt}"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau_i \subset \tau_j"] \\
(i,j)\text{-h. h. yıl. Menger} &
\end{tikzcd}
$$

Teorem 3.3.6. *(X, τ_1, τ_2) ve (Y, σ_1, σ_2) ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ d-sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) uzayı (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger ise (Y, σ_1, σ_2) uzayı da (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir.*

Kanıt: Y uzayının σ_i-açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ biçimindeyse f fonksiyonu i-sürekli olduğundan $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$ X uzayının τ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. X uzayı (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(\cup\mathcal{V}'_n, \mathcal{V}_n)\big) = X \tag{1}$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır.
Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V' \in \mathcal{V}'_n$ için $V' = f^{-1}(U_{V'})$ olacak biçimde en az bir $U_{V'} \in \mathcal{U}_n$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \{U_{V'} : V' \in \mathcal{V}'_n\}$ biçimdeyse $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\sigma_j}\big(St(\cup\mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n)\big) = Y \tag{2}$$

eşitliği sağlanır. Çünkü f fonksiyonu örten olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f\big(St(\cup\mathcal{V}'_n, \mathcal{V}_n)\big) = St(\cup\mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n)$$

olur. Diğer taraftan f fonksiyonu j-sürekli olduğundan

$$f\Big(Cl_{\tau_j}\big(St(\cup\mathcal{V}'_n, \mathcal{V}_n)\big)\Big) \subset Cl_{\sigma_j}\big(St(\cup\mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n)\big)$$

kapsaması vardır. O halde (2) eşitliğine göre (Y, σ_1, σ_2) uzayı (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir. $\square$

Sonuç 3.3.7. *(X,τ_1,τ_2) ve (Y,σ_1,σ_2) ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ d-sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X,τ_1,τ_2) uzayı p-hemen hemen yıldızıl Menger ise (Y,σ_1,σ_2) uzayı da p-hemen hemen yıldızıl Menger'dir.*

Teorem 3.3.8. *(X,τ_1,τ_2) ve (Y,σ_1,σ_2) ikili topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ d-açık ve mükemmel bir dönüşüm olsun. Bu durumda (Y,σ_1,σ_2) uzayı (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger ise (X,τ_1,τ_2) uzayı da (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir.*

Kanıt: f fonksiyonu d-açık ve d-kapalı olduğundan $f(X) = Y$ kabul edebiliriz. X uzayının τ_i-açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi verilsin. f fonksiyonu mükemmel olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y) \subset \cup\mathcal{U}_{ny}$ ve her $U \in \mathcal{U}_{ny}$ için $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$ olacak biçimde $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{U}_{ny}$ alt ailesi vardır.
f fonksiyonu i-kapalı olduğundan $V_{ny} = Y \backslash f(X \backslash \cup\mathcal{U}_{ny})$ kümesi y'nin σ_i-açık bir komşuluğu olmak üzere $f^{-1}(V_{ny}) \subset \cup\mathcal{U}_{ny}$ olur. Diğer taraftan f fonksiyonu i-açık olduğundan her $U \in \mathcal{U}_{ny}$ için $f(U)$ da y'nin σ_i-açık bir komşuluğudur. Öyleyse y'nin σ_i-açık bir W_{ny} komşuluğu için $W_{ny} \subset V_{ny}$ ve her $U \in \mathcal{U}_{ny}$ için $W_{ny} \subset f(U)$ olur.
Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n = \{W_{ny} : y \in Y\}$ biçimindeyse $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbb{N})$, Y uzayının σ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. Y uzayı (i,j)-hemen hemen yıldızıl Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}'_n$, $\mathcal{W}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\sigma_j}\big(St(\cup\mathcal{W}'_n, \mathcal{W}_n)\big) = Y \tag{1}$$

olacak biçimde bir $(\mathcal{W}'_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi vardır.
Her $n \in \mathbb{N}$ için $Y_n \subset Y$ sonlu bir küme olmak üzere $\mathcal{W}'_n = \{W_{ny} : y \in Y_n\}$ biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n = \bigcup_{y\in Y_n} \mathcal{U}_{ny}$ biçiminde seçilirse $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(St(\cup\mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n)\big) = X \tag{2}$$

eşitliğinin sağlandığını görelim.
$x \in X$ ve N, x'in τ_j-açık bir komşuluğu olsun. f fonksiyonu j-açık olduğundan $f(N)$ kümesi $f(x)$'in σ_j-açık bir komuşuluğudur. Öyleyse (1) eşitliğine göre en az bir $n \in \mathbb{N}$

için $f(N) \cap St(\cup \mathcal{W}'_n, \mathcal{W}_n) \neq \emptyset$'dir. Buradan

$$\text{en az bir } y \in Y \text{ için} \quad f(N) \cap W_{ny} \neq \emptyset \text{ ve } W_{ny} \cap \big(\cup \mathcal{W}'_n\big) \neq \emptyset$$
$$\text{en az bir } y \in Y \text{ için} \quad N \cap f^{-1}(W_{ny}) \neq \emptyset \text{ ve } W_{ny} \cap \big(\cup \mathcal{W}'_n\big) \neq \emptyset$$
$$\text{en az bir } U \in \mathcal{U}_{ny} \text{ için} \quad N \cap U \neq \emptyset \text{ ve } f(U) \cap \big(\cup \mathcal{W}'_n\big) \neq \emptyset$$
$$\text{en az bir } U \in \mathcal{U}_n \text{ için} \quad N \cap U \neq \emptyset \text{ ve } U \cap \big(\cup \mathcal{U}'_n\big) \neq \emptyset$$

olduğundan $N \cap St(\cup \mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n) \neq \emptyset$'dir. Böylece $x \in Cl_{\tau_j}\big(St(\cup \mathcal{U}'_n, \mathcal{U}_n)\big)$ olup (2) eşitliği sağlanır. O halde $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı (i, j)-hemen hemen yıldızıl Menger'dir. □

3.4 Hemen Hemen Hurewicz Özelliği

Bu kısımda, ikili topolojik uzaylarda hemen hemen γ-küme ve hemen hemen Hurewicz özellikleri verilecektir. Bu özelliklerin bazı özel tanımlı fonksiyonlar altında görüntüleri incelenecektir.

Tanım 3.4.1. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-ω-örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere, her $x \in X$ için $\big\{n \in \mathbb{N} : x \notin Cl_{\tau_j}(U_n)\big\}$ sonlu olacak biçimde bir $\big(U_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen γ-küme* denir.

Tanım 3.4.2. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ bu uzayın τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere, her $x \in X$ için $\big\{n \in \mathbb{N} : x \notin Cl_{\tau_j}(\cup \mathcal{V}_n)\big\}$ sonlu olacak biçimde bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi bulunabiliyorsa $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen Hurewicz* denir.

Aşağıdaki teoremde (i, j)-hemen hemen γ-kümelerin (i, j)-θ-sürekli fonksiyonlar altındaki görüntülerinin (i, j)-hemen hemen Hurewicz olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.4.3. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ve $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu (i, j)-θ-sürekli ve örten olsun. Bu durumda $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı (i, j)-hemen hemen γ-küme ise $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ uzayı (i, j)-hemen hemen Hurewicz'dir.*

Kanıt: Y uzayının σ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $V_{xn} \in \mathcal{V}_n$ vardır ki $f(x) \in V_{xn}$'dir. f fonksiyonu (i, j)-θ-sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f\big(Cl_{\tau_j}(U_{xn})\big) \subset Cl_{\sigma_j}(V_{xn})$$

olacak biçimde x'in τ_i-açık bir U_{xn} komşuluğu vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi, U_{xn} kümelerinin sonlu birleşimlerinden meydana geliyorsa $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, X'in τ_i-ω-örtülerinin bir dizisidir. X uzayı (i,j)-hemen hemen γ-küme olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere, her $x \in X$ için $\big\{n \in \mathbb{N} : x \notin Cl_{\tau_j}(U_n)\big\}$ sonlu olacak biçimde bir $\big(U_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır. Öyleyse her $x \in X$ için en az bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_x$ için $x \in Cl_{\tau_j}(U_n)$ olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n, X'in sonlu bir alt kümesi olmak üzere $U_n = \bigcup\limits_{x \in F_n} U_{xn}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n = \big\{V_{xn} : x \in F_n\big\}$ biçimindeyse $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Bu durumda her $y \in Y$ için $\big\{n \in \mathbb{N} : y \notin Cl_{\sigma_j}(\cup\mathcal{W}_n)\big\}$ kümesinin sonlu olduğunu gösterelim. $y = f(x) \in Y$ olsun. Her $n \geq n_x$ için $x \in Cl_{\tau_j}(U_n) = Cl_{\tau_j}\big(\bigcup\limits_{x \in F_n} U_{xn}\big)$ olduğundan en az bir $\tilde{x} \in F_n$ için $x \in Cl_{\tau_j}(U_{\tilde{x}n})$'dir. Öyleyse her $n \geq n_x$ için

$$y = f(x) \in f\big(Cl_{\tau_j}(U_{\tilde{x}n})\big) \subset Cl_{\sigma_j}(V_{\tilde{x}n}) \subset Cl_{\sigma_j}(\cup\mathcal{W}_n)$$

olduğundan istenilen elde edilir. O halde $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ uzayı (i,j)-hemen hemen Hurewicz'dir. □

Teorem 3.4.4. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ve $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ ikili topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ (i,j)-θ-sürekli, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı (i,j)-hemen hemen Menger ise $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ uzayı da (i,j)-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: Y uzayının σ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $V_{xn} \in \mathcal{V}_n$ vardır ki $f(x) \in V_{xn}$'dir. f fonksiyonu (i,j)-θ-sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f\big(Cl_{\tau_j}(U_{xn})\big) \subset Cl_{\sigma_j}(V_{xn})$$

olacak biçimde x'in τ_i-açık bir U_{xn} komşuluğu vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \big\{U_{xn} : x \in X\big\}$ biçiminde olmak üzere $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, X'in τ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. X uzayı (i,j)-hemen hemen Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}'_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} Cl_{\tau_j}(U) = X$$

olacak biçimde bir $\big(\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n, X'in sonlu bir alt kümesi olmak üzere $\mathcal{U}'_n = \big\{U_{xn} : x \in F_n\big\}$ biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}'_n = \big\{U_{xn} : x \in F_n\big\}$, $\mathcal{V}_n$'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer taraftan

$$Y = f(X) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{x\in F_n} Cl_{\tau_j}\big(U_{xn}\big)\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{x\in F_n} Cl_{\sigma_j}\big(V_{xn}\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{V\in\mathcal{V}'_n} Cl_{\sigma_j}\big(V\big)$$

olduğundan $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ uzayı (i, j)-hemen hemen Menger'dir. $\square$

Teorem 3.4.5. *([8])* $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ve* $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *bir fonksiyon olsun.* f *fonksiyonu p-hemen hemen sürekli ise* (i, j)*-*θ*-süreklidir.*

Sonuç 3.4.6. *Teorem 3.1.9'da* (i, j)*-hemen hemen Menger uzayların p-hemen hemen sürekli fonksiyonlar altındaki görüntülerinin* (i, j)*-hemen hemen Menger olduğu gösterilmişti. Teorem 3.4.5'e göre, p-hemen hemen sürekli fonksiyonlar* (i, j)*-*θ*-sürekli olduğundan ve Teorem 3.4.4'e göre,* (i, j)*-hemen hemen Menger uzayların* (i, j)*-*θ*-sürekli fonksiyonlar altındaki görüntüleri* (i, j)*-hemen hemen Menger olduğundan daha iyi bir sonuç elde edilmiş oldu.*

4 İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA ALSTER ÖZELLİĞİ

Birçok matematikçi Lindelöf topolojik uzaylarla çarpımları Lindelöf olan topolojik uzayları araştırmıştır. Lindelöf uzayların sonlu çarpımları Lindelöf olmayabilir. Örneğin, gerçel eksen $\mathbb{S}$ Sorgenfrey topolojisi ile bir Lindelöf uzaydır, fakat $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ Lindelöf değildir. Alster [1]'de Alster uzayların tanımını vererek Alster uzayların Lindelöf uzaylarla çarpımının Lindelöf olduğunu göstermiştir. Yine [1]'de süreklilik hipotezi doğru kabul edilerek Lindelöf bir uzayla çarpımı Lindelöf olan uzayların Alster uzaylar olduğu gösterilmiştir.

4.1 Hemen Hemen Alster Özelliği

Kocev [18]'de hemen hemen Alster kavramını verip bazı özelliklerini incelemiştir. Biz de, ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Alster tanımını verip bazı topolojik özelliklerini ve seçme prensipleriyle olan ilişkilerini inceleyeceğiz. Ayrıca hemen hemen Lindelöf ikili topolojik uzayların sonlu çarpımının hemen hemen Lindelöf olmayabileceğini, fakat hemen hemen Alster ikili topolojik uzaylarla hemen hemen Lindelöf ikili topolojik uzayların çarpımının hemen hemen Lindelöf olduğunu göreceğiz.

Tanım 4.1.1. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. X'in her $\mathcal{U}$, τ_i-Alster örtüsünün

$$\bigcup_{V\in\mathcal{V}} Cl_{\tau_j}(V) = X$$

olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt ailesi varsa (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen Alster* denir.

Tanım 4.1.2. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. X uzayı sayılabilir çoklukta τ_i-kompakt alt kümenin τ_j-kapanışlarının birleşimi biçiminde ifade edilebiliyorsa (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına (i, j)-*hemen hemen σ-kompakt* denir.

Açıkça, (X, τ_i) topolojik uzayı σ-kompakt ise (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen σ-kompakttır.

Önerme 4.1.3. *(X, τ_1, τ_2) (i, j)-hemen hemen σ-kompakt ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olsun. X, (i,j)-hemen hemen σ-kompakt olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(K_n\big) = X$$

olacak biçimde X'in τ_i-kompakt alt kümelerinden oluşan bir $\big(K_n : n\in\mathbb{N}\big)$ dizisi vardır. $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $K_n\subset U_n$ olacak biçimde bir $U_n\in\mathcal{U}$ vardır. O halde,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(K_n\big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U_n\big)$$

kapsamasına göre X (i,j)-hemen hemen Alster'dir. □

Teorem 4.1.4. $\big(X,\tau_i\big)$ *metriklenebilir bir topolojik uzay olsun. Bu durumda* $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ *ikili topolojik uzayının* (i,j)*-hemen hemen Alster olması için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın* (i,j)*-hemen hemen* σ*-kompakt olmasıdır.*

Kanıt:

($\Leftarrow$): Önerme 4.1.3'ten sağlanır.

($\Rightarrow$): $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olsun. X'in τ_i-kompakt alt kümelerinin ailesini $\mathcal{U}$ ile gösterelim. $\big(X,\tau_i\big)$ metriklenebilir bir topolojik uzay olduğundan T_2 özelliğindedir. Dolayısıyla da $\mathcal{U}$'nun elemanları τ_i-kapalıdır. Diğer taraftan metriklenebilir bir topolojik uzayda kapalı alt kümeler bir G_δ kümedir. O halde $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür.

$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$, (i,j)-hemen hemen Alster olduğundan $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt ailesi için

$$\bigcup_{V\in\mathcal{V}} Cl_{\tau_j}(V) = X$$

eşitliği sağlanır.

X'in τ_i-kompakt alt kümelerinden oluşan $\mathcal{V}$ sayılabilir ailesi için yukarıdaki eşitlik sağlandığından $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen σ-kompakttır. □

Önerme 4.1.5. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ (i,j)*-hemen hemen Alster ikili topolojik uzayı* (i,j)*-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: $\big(\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\big)$ X'in τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olsun. Genelliği bozmadan her $\mathcal{U}_n$'nin sonlu birleşim altında kapalı olduğunu kabul edelim.

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n : (\forall n)(U_n\in\mathcal{U}_n)\right\}$$

biçiminde olsun. Açıkça, $\mathcal{O}$'nun her elemanı X'in bir τ_i-G_δ alt kümesidir. Diğer taraftan, X'in τ_i-kompakt her K alt kümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K \subset U_n$ olacak biçimde en az bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır. Öyleyse $\mathcal{O}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür.
$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ (i, j)-hemen hemen Alster olduğundan, $\mathcal{O}$'nun

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(O_k\big) = X$$

eşitliğini sağlayan sayılabilir bir $\big\{O_k : k \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$O_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{kn} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, U_{kn} \in \mathcal{U}_n)$$

biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $O_n \subset U_{nn} \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_{nn}) = X$$

olacağından $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger'dir. $\square$

(i, j)-hemen hemen Menger özelliği, (i, j)-hemen hemen Alster özelliğini gerektirmez. Aşağıda $(1, 2)$-hemen hemen Menger olan fakat $(1, 2)$-hemen hemen Alster olmayan bir ikili topolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 4.1.6. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış ve tümleyenleri sayılabilir kümeler topolojileri sırasıyla τ_e ve τ_{tsa} ile gösterilmek üzere, $\tau_e \cup \tau_{tsa}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde ürettiği τ topolojisine *tümleyenleri sayılabilir kümelerin genişletme topolojisi* denir.
U ve S, $\mathbb{R}$'nin sırasıyla τ_e-açık ve sayılabilir alt kümeleri olmak üzere; $(\mathbb{R}, \tau)$ uzayının açık kümeleri $U \backslash S$ biçimindedir. $(\mathbb{R}, \tau)$ metriklenebilir bir topolojik uzay değildir. $(\mathbb{R}, \tau)$ topolojik uzayının kompakt alt kümeleri sonlu olduğundan bu uzay σ-kompakt değildir [45, ör:63]. $(\mathbb{R}, \tau)$ topolojik uzayı Menger özelliğindedir [23].
Şimdi örnek olarak vereceğimiz ikili topolojik uzayı oluşturalım.
τ_1 ve τ_2 sırasıyla $\mathbb{R}$ üzerindeki tümleyenleri sayılabilir kümelerin genişletme topolojisi ve alışılmış topoloji olsun. $\big(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayının $(1, 2)$-hemen hemen Menger olduğunu ancak $(1, 2)$-hemen hemen Alster olmadığını görelim.
• $\big(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger'dir:
$\big(\mathbb{R}, \tau_1\big)$ topolojik uzayı Menger olduğundan $\big(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Menger'dir.
• $\big(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1, 2)$-hemen hemen Alster değildir:

$\mathbb{R}$'nin τ_1-kompakt alt kümelerinin ailesini $\mathcal{U}$ ile gösterelim. $U \in \mathcal{U}$ olsun. U sonlu olduğundan τ_2-kompakttır. Ayrıca, $(\mathbb{R}, \tau_2)$ bir metriklenebilir uzay olduğundan U, τ_2-kapalı dolayısıyla da bir τ_2-G_δ kümedir. Diğer taraftan $\tau_2 \subset \tau_1$ olduğundan U bir τ_1-G_δ kümedir. Öyleyse $\mathcal{U}$, $\mathbb{R}$'nin bir τ_1-Alster örtüsüdür. Fakat $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt ailesindeki kümelerin τ_2-kapanışlarından oluşan aile $\mathbb{R}$'yi örtemeyeceğinden $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Alster değildir.

Tanım 4.1.7. ([14]) (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. X'in her $\mathcal{U}$, τ_i-açık örtüsünün

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

eşitliğini sağlayan bir $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ alt ailesi varsa (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayına (i,j)-*hemen hemen Lindelöf* denir.

Önerme 4.1.8. (X, τ_1, τ_2) *(i,j)-hemen hemen Menger ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf'tür.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, X ikili topolojik uzayının bir τ_i-açık örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ alınırsa $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ X'in τ_i-açık örtülerinin bir dizisi olur. Bu örtü dizisinde X'in (i,j)-hemen hemen Menger olduğu göz önüne alındığında istenilen elde edilir. □

Önerme 4.1.5 ve Önerme 4.1.8'den (i,j)-hemen hemen Alster ikili topolojik uzayların (i,j)-hemen hemen Lindelöf olduğu elde edilir. Ancak (i,j)-hemen hemen Lindelöf olan ikili topolojik uzayların (i,j)-hemen hemen Alster olması gerekmez. Aşağıda $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf olan fakat $(1,2)$-hemen hemen Alster olmayan bir ikili topolojik uzayı örneği verilmiştir.

Örnek 4.1.9. $\mathcal{B}$ ailesi, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış topolojinin bir tabanı olsun.

$$\mathcal{B}^\star = \mathcal{B} \cup \{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. $\mathcal{B}^\star$'ın $\mathbb{R}$ üzerinde ürettiği τ topolojisine *alışılmış topolojinin ayrık rasyonel genişletilmesi* denir.
$(\mathbb{R}, \tau)$ bir metriklenebilir topolojik uzaydır. Bu uzay Lindelöf'tür fakat σ-kompakt değildir [45, ör:70].

$\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji τ_2 ile, bu topolojinin ayrık rasyonel genişletilmesi de τ_1 ile gösterilsin. Bu durumda $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf'tür fakat $(1,2)$-hemen hemen Alster değildir.

• $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf'tür: $\left(\mathbb{R}, \tau_1\right)$ topolojik uzayı Lindelöf olduğundan $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf'tür.

• $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Alster değildir: $\left(\mathbb{R}, \tau_1\right)$ bir metriklenebilir topolojik uzay olduğundan Teorem 4.1.4'e göre $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayının $(1,2)$-hemen hemen Alster olması ile $(1,2)$-hemen hemen σ-kompakt olması denktir. Öyleyse $\left(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayının $(1,2)$-hemen hemen σ-kompakt olmadığını gösterelim.

K, X'in bir τ_1-kompakt alt kümesi ise $\tau_2 \subset \tau_1$ olduğundan bu küme τ_2 topolojisine göre de kompakttır. $(\mathbb{R}, \tau_2)$ topolojik uzayı metriklenebilir olduğundan K kümesi bu uzayda kapalıdır. Diğer taraftan $(\mathbb{R}, \tau_1)$ uzayı σ-kompakt olmadığından $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi, sayılabilir çokluktaki τ_1-kompakt alt kümenin τ_2-kapanışlarından oluşan bir aile tarafından örtülemez. O halde $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen σ-kompakt değildir.

Önerme 4.1.10. *$\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ bir ikili topolojik uzay ve $\left(X, \tau_i\right)$ bir P-uzayı olsun. Bu durumda $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf ise (i,j)-hemen hemen Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olsun. $\left(X, \tau_i\right)$ bir P-uzayı olduğundan $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-açık örtüsüdür. $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf ise $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt ailesinin τ_j-kapanışlarından oluşan aile X'i örteceğinden $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olur. □

Sonuç 4.1.11. *$\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ bir ikili topolojik uzay ve $\left(X, \tau_i\right)$ bir P-uzayı olsun. Bu durumda*

(1) $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Alster'dir.

(2) $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Menger'dir.

(3) $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf'tür.

ifadeleri denktir.

Aşağıda, hemem hemen Lindelöf ikili topolojik uzayların sonlu çarpımlarının hemen hemen Lindelöf olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.1.12. ([15]) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde τ_1 Sorgenfrey topolojisi ve τ_2 alışılmış topoloji olmak üzere, $\big(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf'tür. Fakat $\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_1\times\tau_1, \tau_2\times\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı $(1,2)$-hemen hemen Lindelöf değildir.

Teorem 4.1.13. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Alster, $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf ise $\big(X\times Y, \tau_1\times\sigma_1, \tau_2\times\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf'tür.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, $X\times Y$ çarpım uzayının bir $\tau_i\times\sigma_i$-açık örtüsü olsun. Genelliği bozmadan $\mathcal{W}$'nin sonlu birleşim altında kapalı olduğunu kabul edelim.
X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi ve her $y \in Y$ için $A\times\{y\}$ kümesi $X\times Y$ çarpım uzayında $\tau_i\times\sigma_i$-kompakt olduğundan $A\times\{y\} \subset W(A,y)$ olacak biçimde en az bir $W(A,y) \in \mathcal{W}$ vardır. Diğer taraftan

$$A\times\{y\} \subset U(A,y)\times V(A,y) \subset W(A,y)$$

olacak biçimde A'nın en az bir $U(A,y)$ τ_i-açık komşuluğu ve y'nin en az bir $V(A,y)$ σ_i-açık komşuluğu vardır.
$\big\{V(A,y) : y \in Y\big\}$, Y'nin bir σ_i-açık örtüsü ve Y uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf olduğundan Y'nin sayılabilir bir $Y(A)$ alt kümesi için

$$\bigcup_{y\in Y(A)} Cl_{\sigma_j}\big(V(A,y)\big) = Y$$

eşitliği sağlanır.

$$U(A) = \bigcap_{y\in Y(A)} U(A,y)$$

biçiminde olsun. Açıkça $U(A)$, A'yı kapsayan bir τ_i-G_δ küme olmak üzere; her $y \in Y(A)$ için $A\times\{y\} \subset U(A)\times V(A,y) \subset W(A,y)$'dir.
$\big\{U(A) : A \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\big\}$ ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsü ve X uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olduğundan X'in τ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\big\{A_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ ailesi için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) = X$$

eşitliği sağlanır.

Böylece

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) \times \bigcup_{y\in Y(A_n)} Cl_{\sigma_j}\big(V(A_n,y)\big)\Big) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{y\in Y(A_n)} Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) \times Cl_{\sigma_j}\big(V(A_n,y)\big)\Big) \\ &\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{y\in Y(A_n)} Cl_{\tau_j\times\sigma_j}\big(W(A_n,y)\big) \end{aligned}$$

elde edildiğinden $\big(X\times Y, \tau_1\times\sigma_1, \tau_2\times\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i,j)-hemen hemen Lindelöf'tür. $\square$

Teorem 4.1.14. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ve* $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ (i,j)*-hemen hemen Alster ikili topolojik uzaylarının* $\big(X\times Y, \tau_1\times\sigma_1, \tau_2\times\sigma_2\big)$ *çarpım uzayı da* (i,j)*-hemen hemen Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, $X\times Y$ çarpım uzayının bir $\tau_i\times\sigma_i$-Alster örtüsü olsun.
X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi ve Y'nin σ_i-kompakt her B alt kümesi için $A\times B$ kümesi $X\times Y$ çarpım uzayında $\tau_i\times\sigma_i$-kompakt olduğundan $A\times B \subset W(A,B)$ olacak biçimde en az bir $W(A,B) \in \mathcal{W}$ vardır. $W(A,B)$ bir $\tau_i\times\sigma_i$-G_δ küme olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n(A,B) \subset X\times Y$ bir $\tau_i\times\sigma_i$-açık alt küme olmak üzere, $W(A,B)$ kümesi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n(A,B)$ biçiminde ifade edilebilir.
Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için $A\times B \subset W_n(A,B)$'dir. A ve B kümeleri sırasıyla τ_i ve σ_i-kompakt olduğundan

$$A\times B \subset U_n(A,B)\times V_n(A,B) \subset W_n(A,B)$$

olacak biçimde A'nın en az bir $U_n(A,B)$ τ_i-açık komşuluğu ve B'nin en az bir $V_n(A,B)$ σ_i-açık komşuluğu vardır.
$U(A,B) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n(A,B)$ ve $V(A,B) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n(A,B)$ biçiminde olmak üzere; $U(A,B)$, A'yı kapsayan bir τ_i-G_δ küme ve $V(A,B)$, B'yi kapsayan bir σ_i-G_δ kümedir.
X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi için $\big\{V(A,B) : B \subset Y, \sigma_i\text{-kompakt}\big\}$ ailesi Y'nin bir σ_i-Alster örtüsüdür. Öyleyse Y'nin σ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\mathcal{A}$ ailesi için

$$\bigcup_{B\in\mathcal{A}} Cl_{\sigma_j}\big(V(A,B)\big) = Y$$

olur.

$U(A) = \bigcap_{B\in\mathcal{A}} U(A,B)$ biçimindeyse $U(A)$, X'in A'yı kapsayan bir τ_i-G_δ alt kümesi olmak üzere, her $B \in \mathcal{A}$ için $A\times B \subset U(A)\times V(A,B) \subset W(A,B)$ olur.

$\{U(A) : A \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\}$ ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür. Öyleyse X'in τ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) = X$$

eşitliği sağlanır.

Böylece

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) \times \bigcup_{B\in\mathcal{A}_n} Cl_{\sigma_j}\big(V(A_n,B)\big)\Big) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{B\in\mathcal{A}_n} Cl_{\tau_j}\big(U(A_n)\big) \times Cl_{\sigma_j}\big(V(A_n,B)\big)\Big) \\ &\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{B\in\mathcal{A}_n} Cl_{\tau_j\times\sigma_j}\big(W(A_n,B)\big) \end{aligned}$$

elde edileceğinden $\big(X\times Y, \tau_1\times\sigma_1, \tau_2\times\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i,j)-hemen hemen Alster'dir.□

Teorem 4.1.15. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir (i,j)-hemen hemen Alster ikili topolojik uzay olsun. $F \subset X$, τ_i-kapalı ve τ_j-açık bir alt küme ise $\big(F, \tau_{1_F}, \tau_{2_F}\big)$ alt uzayı da (i,j)-hemen hemen Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, F alt uzayının bir τ_{i_F}-Alster örtüsü olsun. Her $U \in \mathcal{U}$, F'in bir τ_{i_F}-G_δ alt kümesi olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için U_n, X'in bir τ_i-açık alt kümesi olmak üzere

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(U_n \cap F\big)$$

biçiminde yazılabilir. Öyleyse

$$U \cup (X\backslash F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\big(U_n \cap F\big) \cup (X \setminus F)\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(U_n \cup (X \setminus F)\Big)$$

eşitliğine göre $U \cup (X\backslash F)$, X'in bir τ_i-G_δ alt kümesidir.

K, X'in bir τ_i-kompakt alt kümesi ise $K \cap F$ de F'nin bir τ_{i_F}-kompakt alt kümesi olduğundan $K \cap F \subset U_K$ olacak biçimde en az bir $U_K \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan

$$K = (K \cap F) \cup (K \setminus F) \subset U_K \cup (X \setminus F)$$

elde edildiğinden

$$\mathcal{V} = \{U \cup (X \setminus F) : U \in \mathcal{U}\}$$

ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür.

$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U_n \cup (X \setminus F)\big) = X$$

olacak biçimde $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır. Diğer taraftan F, τ_j-açık olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n)\right) \cup (X \setminus F) = X$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafını da F kümesiyle kesiştirdiğimizde

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_{j_F}}\big(U_n\big) = F$$

olacağından $\big(F, \tau_{1_F}, \tau_{2_F}\big)$ alt uzayı da (i,j)-hemen hemen Alster'dir. □

Teorem 4.1.16. *(i,j)-hemen hemen Alster ikili topolojik uzayların d-sürekli fonksiyonlar altındaki resmi de (i,j)-hemen hemen Alster'dir.*

Kanıt: $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir (i,j)-hemen hemen Alster ve $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ bir d-sürekli, örten fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayının da (i,j)-hemen hemen Alster olduğunu gösterelim.

$\mathcal{U}$, Y'nin bir σ_i-Alster örtüsü olsun. $\mathcal{V} = \big\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\big\}$ ailesinin X'in bir τ_i-Alster örtüsü olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$'nun her elemanı bir σ_i-G_δ küme ve f fonksiyonu i-sürekli olduğundan $\mathcal{V}$'nin elemanları da τ_i-G_δ kümedir. Diğer taraftan K, X'in bir τ_i-kompakt alt kümesi ise f fonksiyonu i-sürekli olduğundan $f(K)$ da Y'nin bir σ_i-kompakt alt kümesidir. Öyleyse $f(K) \subset U$ olacak biçimde en az bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece en az bir $V \in \mathcal{V}$ için $K \subset V$ olduğundan $\mathcal{V}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür.

X uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(V_n\big) = X$$

olacak biçimde $\mathcal{V}$'nin sayılabilir bir $\big\{V_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n = f^{-1}\big(U_n\big)$ olacak biçimde bir $U_n \in \mathcal{U}$ vardır. f fonksiyonu örten ve j-sürekli olduğundan

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f\Big(Cl_{\tau_j}\big(V_n\big)\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\sigma_j}\Big(f\big(V_n\big)\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\sigma_j}\big(U_n\big)$$

olur. O halde Y uzayı da (i,j)-hemen hemen Alster'dir. □

4.2 Alster Özelliğinin Seçme Prensipleriyle Karakterizasyonu

Bu kısımda ikili topolojik uzaylarda hemen hemen Alster özelliği seçme prensipleri yardımıyla karakterize edilecektir. Bu karakterizasyon yardımıyla da hemen hemen Alster ikili topolojik uzaylarla hemen hemen Menger ikili topolojik uzayların çarpımının hemen hemen Menger olduğu gösterilecektir.

$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olmak, üzere aşağıda bazı ailelerin sınıfları verilmiştir.
$\mathcal{G}^{\tau_i}$: X'in τ_i-G_δ alt kümelerinden oluşan örtülerinin sınıfıdır.

$\mathcal{G}^{\tau_i}_A$: X'in τ_i-Alster örtülerinin sınıfıdır.

$\mathcal{G}^{\tau_i}_\Omega$: $\mathcal{U} \in \mathcal{G}^{\tau_i}$ örtülerinin sınıfıdır öyle ki X'in sonlu her alt kümesi, $\mathcal{U}$'nun en az bir elemanı tarafından kapsanır.

$Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)$: X'in τ_i-G_δ alt kümelerinden oluşan $\mathcal{U}$ ailelerinin sınıfıdır öyle ki $\big\{Cl_{\tau_j}(U) : U \in \mathcal{U}\big\}$ ailesi X'i örter.

$Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}_\Omega\big)$: $\mathcal{U} \in Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)$ ailelerinin sınıfıdır öyle ki X'in sonlu her F alt kümesi için $F \subset Cl_{\tau_j}\big(U_F\big)$ olacak biçimde bir $U_F \in \mathcal{U}$ vardır.

Teorem 4.2.1. *Bir $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.*
(1) X bir (i, j)-hemen hemen Alster uzayıdır.

(2) X, $S_1\Big(\mathcal{G}^{\tau_i}_A, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

(3) X, $S_1\Big(\mathcal{G}^{\tau_i}_A, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}_\Omega\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

Kanıt:
(1) $\Rightarrow$ (2): X'in τ_i-Alster örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin.

$$\mathcal{V} = \Big\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n : (\forall n)(U_n \in \mathcal{U}_n) \Big\}$$

biçiminde olsun. Açıkça $\mathcal{V}$ de X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür. X, (i, j)-hemen hemen Alster olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(V_n\big) = X$$

olacak biçimde $\mathcal{V}$'nin sayılabilir bir $\big\{V_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U^n_k \qquad \big(U^n_k \in \mathcal{U}_k, k \in \mathbb{N}\big)$$

biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \subset U_n^n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(V_n\big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U_n^n\big)$$

olduğundan X, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olmak üzere $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, X'in τ_i-Alster örtülerinden oluşan bir dizidir. O halde hipoteze göre,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U_n\big) = X$$

olacak biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır.
Diğer taraftan $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\}$, $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt ailesi olduğundan X, (i,j)-hemen hemen Alster'dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): Teorem 4.1.14'e göre (i,j)-hemen hemen Alster ikili topolojik uzayların sonlu kuvvetleri de (i,j)-hemen hemen Alster'dir. O halde X, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlarsa her $n \in \mathbb{N}$ için X^n de $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i^n}, Cl_{\tau_j^n}\big(\mathcal{G}^{\tau_i^n}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

X'in τ_i-Alster örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Y_n \subset \mathbb{N}$ sonsuz olmak üzere, $\big\{Y_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ ailesi $\mathbb{N}$'nin bir parçalanışı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in Y_n$ için $\mathcal{V}_k = \big\{U^n : U \in \mathcal{U}_k\big\}$ biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\big(\mathcal{V}_k : k \in Y_n\big)$, X^n'nin τ_i^n-Alster örtülerinin bir dizisidir. X^n, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i^n}, Cl_{\tau_j^n}\big(\mathcal{G}^{\tau_i^n}\big)\Big)$ seçme prensibini sağladığından

$$\bigcup_{k\in Y_n} Cl_{\tau_j^n}\big(V_k\big) = X^n$$

olacak biçimde her $k \in Y_n$ için bir $V_k \in \mathcal{V}_k$ vardır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in Y_n$ için $V_k = {U_k}^n$ olacak biçimde bir $U_k \in \mathcal{U}_k$ vardır.

Şimdi $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\} \in Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}_\Omega^{\tau_i}\big)$ olduğunu görelim. $F = \big\{x_1, x_2, \ldots, x_m\big\}$, X'in sonlu bir alt kümesi ise $z = \big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big) \in X^m$ olduğundan en az bir $k \in Y_m$ için $z \in Cl_{\tau_j^m}\big(V_k\big)$'dir. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x_i \in Cl_{\tau_j}\big(U_k\big)$ olduğundan $F \subset Cl_{\tau_j}(U_k)$'dir. Öyleyse X, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}_\Omega^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

(3) $\Rightarrow$ (2): $Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}_\Omega^{\tau_i}\big) \subset Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)$ olduğundan açıktır. □

Teorem 4.2.2. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ikili topolojik uzayı* (i,j)*-hemen hemen Alster,* $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ *ikili topolojik uzayı* (i,j)*-hemen hemen Menger ise* $\big(X \times Y, \tau_1 \times \sigma_1, \tau_2 \times \sigma_2\big)$ *çarpım uzayı* (i,j)*-hemen hemen Menger'dir.*

Kanıt: $X{\times}Y$ uzayının $\tau_i{\times}\sigma_i$-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Genelliği bozmadan $\mathcal{U}_n$'lerin sonlu birleşim altında kapalı olduğunu kabul edelim.

X'in τ_i-kompakt her C alt kümesi ve her $y \in Y$ için $C{\times}\{y\}$ kümesi $X{\times}Y$ uzayında $\tau_i{\times}\sigma_i$-kompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $C{\times}\{y\} \subset U_n(C,y)$ olacak biçimde en az bir $U_n(C,y) \in \mathcal{U}_n$ vardır. Diğer taraftan,

$$C{\times}\{y\} \subset V_n(C,y){\times}W_n(C,y) \subset U_n(C,y)$$

olacak biçimde C'nin bir $V_n(C,y)$ τ_i-açık komşuluğu ve y'nin bir $W_n(C,y)$ σ_i-açık komşuluğu vardır.

Böylece X'in τ_i-kompakt her C alt kümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{W}_n(C) = \big\{W_n(C,y) : y \in Y\big\}$$

ailesi Y'nin bir σ_i-açık örtüsüdür.

Her $m \in \mathbb{N}$ için $S_m \subset \mathbb{N}$ sonsuz olmak üzere, $\big\{S_m : m \in \mathbb{N}\big\}$ ailesi $\mathbb{N}$'nin bir parçalanışı olsun. Öyleyse her $m \in \mathbb{N}$ için $\big(\mathcal{W}_n(C) : n \in S_m\big)$, Y'nin σ_i-açık örtülerinin bir dizisidir. Y uzayı (i,j)-hemen hemen Menger olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ ve her $n \in S_m$ için Y'nin sonlu bir $F(C,n)$ alt kümesi vardır ki, her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\bigcup_{n\in S_m} \Big\{Cl_{\sigma_j}\big(W_n(C,y)\big) : y \in F(C,n)\Big\}$$

ailesi Y'yi örter.

Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$V_m(C) = \bigcap_{n\in S_m} \bigcap \big\{V_n(C,y) : y \in F(C,n)\big\}$$

kümesi X'in C'yi kapsayan bir τ_i-G_δ alt kümesidir. Öyleyse her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{V}_m = \big\{V_m(C) : C \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\big\}$$

ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür. X uzayı (i,j)-hemen hemen Alster olduğundan Teorem 4.2.1'ye $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar. Öyleyse

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(V_m(C_m)\big) = X$$

olacak biçimde her $m \in \mathbb{N}$ için bir $V_m(C_m) \in \mathcal{V}_m$ vardır.

Şimdi her $m \in \mathbb{N}$ ve her $n \in S_m$ için

$$\mathcal{F}_n = \Big\{V_n\big(C_m,y\big){\times}W_n\big(C_m,y\big) : y \in F\big(C_m,n\big)\Big\}$$

olmak üzere,

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in S_m}\bigcup_{F\in\mathcal{F}_n} Cl_{\tau_j\times\sigma_j}(F)=X\times Y$$

olduğunu görelim.

$(x_0,y_0)\in X\times Y$ olsun. Öyleyse en az bir $m\in\mathbb{N}$ için $x_0\in Cl_{\tau_j}\big(V_m(C_m)\big)$'dir. Diğer taraftan en az bir $n\in S_m$ ve $y\in F\big(C_m,n\big)$ için $y_0\in Cl_{\sigma_j}\big(W_n(C_m,y)\big)$'dir. Öyleyse

$$\begin{aligned}(x_0,y_0)&\in Cl_{\tau_j}\big(V_m(C_m)\big)\times Cl_{\sigma_j}\big(W_n(C_m,y)\big)\\&\subset Cl_{\tau_j}\big(V_n(C_m,y)\big)\times Cl_{\sigma_j}\big(W_n(C_m,y)\big)\\&\subset Cl_{\tau_j\times\sigma_j}\big(V_n(C_m,y)\times(W_n(C_m,y)\big)\end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan, her $n\in\mathbb{N}$ ve her $F\in\mathcal{F}_n$ için $F\subset U_F$ olacak biçimde bir $U_F\in\mathcal{U}_n$ vardır. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\mathcal{H}_n=\big\{U_F:F\in\mathcal{F}_n\big\}\subset\mathcal{U}_n$$

seçimi $X\times Y$'nin (i,j)-hemen hemen Menger olduğunu gösterir. □

4.3 Zayıf Alster Özelliği

Bu kısımda, ikili topolojik uzaylarda zayıf Alster özelliği tanımlacak ve diğer zayıf seçme özellikleriyle ilişkileri incelecektir. Ayrıca zayıf Alster özelliği seçme prensipleri yardımıyla karekterize edilecektir. Son olarak ikili topolojik uzaylarda tanımlanan zayıf seçme prensipleri arasındaki ilişkiler bir şema üzerinde verilecektir.

Tanım 4.3.1. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olsun. X'in her $\mathcal{U}$, τ_i-Alster örtüsünün

$$Cl_{\tau_j}(\cup\mathcal{V})=X$$

olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt ailesi varsa $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i,j)-*zayıf Alster* denir.

Tanımdan açıkça görüldüğü gibi (i,j)-hemen hemen Alster ikili topolojik uzaylar (i,j)-zayıf Alster'dir.

Önerme 4.3.2. *(X,τ_1,τ_2), (i,j)-zayıf Alster ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Menger'dir.*

Kanıt: Önerme 4.1.5'in ispatına benzer olarak yapılabilir. □

Tanım 4.3.3. ([16]) $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olsun. X'in her $\mathcal{U}$, τ_i-açık örtüsünün

$$Cl_{\tau_j}(\cup\mathcal{V})=X$$

olacak biçimde sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt ailesi varsa, $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayına (i,j)-*zayıf Lindelöf* denir.

(i,j)-zayıf Menger ve (i,j)-hemen hemen Lindelöf ikili topolojik uzayların (i,j)-zayıf Lindelöf olduğu açıktır.

Teorem 4.3.4. *$\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Alster, $\big(Y,\sigma_1,\sigma_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Lindelöf ise $\big(X\times Y,\tau_1\times\sigma_1,\tau_2\times\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i,j)-zayıf Lindelöf'tür.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, $X\times Y$ çarpım uzayının bir $\tau_i\times\sigma_i$-açık örtüsü olsun. Genelliği bozmadan $\mathcal{W}$'nin sonlu birleşim altında kapalı olduğunu kabul edelim.
X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi ve her $y\in Y$ için $A\times\{y\}$ kümesi $X\times Y$ çarpım uzayında $\tau_i\times\sigma_i$-kompakt olduğundan $A\times\{y\}\subset W(A,y)$ olacak biçimde en az bir $W(A,y)\in\mathcal{W}$ vardır. Diğer taraftan

$$A\times\{y\}\subset U(A,y)\times V(A,y)\subset W(A,y)$$

olacak biçimde A'nın en az bir $U(A,y)$ τ_i-açık komşuluğu ve y'nin en az bir $V(A,y)$ σ_i-açık komşuluğu vardır.
$\big\{V(A,y):y\in Y\big\}$ Y'nin bir σ_i-açık örtüsü ve Y uzayı (i,j)-zayıf Lindelöf olduğundan Y'nin sayılabilir bir $Y(A)$ alt kümesi için

$$Cl_{\sigma_j}\Big(\bigcup_{y\in Y(A)}V(A,y)\Big)=Y \qquad (1)$$

eşitliği sağlanır.

$$U(A)=\bigcap_{y\in Y(A)}U(A,y)$$

biçiminde olsun. Açıkça $U(A)$, A'yı kapsayan bir τ_i-G_δ küme olmak üzere; her $y\in Y(A)$ için $A\times\{y\}\subset U(A)\times V(A,y)\subset W(A,y)$'dir.
$\big\{U(A):A\subset X,\tau_i\text{-kompakt}\big\}$ ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsü ve X uzayı (i,j)-zayıf Alster olduğundan X'in τ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\big\{A_n:n\in\mathbb{N}\big\}$ ailesi

için

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U(A_n)\Big) = X \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda, $\mathcal{W}$'nin $\big\{W(A_n, y) : y \in Y(A_n), n \in \mathbb{N}\big\}$ sayılabilir alt ailesinin birleşiminin $X{\times}Y$ çarpım uzayında $\tau_j{\times}\sigma_j$-yoğun olduğunu görelim. $(a, b) \in X{\times}Y$ ve $S{\times}T$, (a, b)'yi içeren bir $\tau_j{\times}\sigma_j$-temel açık küme olsun. (2) eşitliğine göre, en az bir $n_a \in \mathbb{N}$ için $S \cap U(A_{n_a}) \neq \emptyset$'dir. Benzer biçimde (1) eşitliğine göre, en az bir $y_b \in Y(A_{n_a})$ için $T \cap V(A_{n_a}, y_b) \neq \emptyset$'dir. Öyleyse

$$\begin{aligned}\emptyset \neq \big(S \cap U(A_{n_a})\big) \times \big(T \cap V(A_{n_a}, y_b)\big) &= \big(S \times T\big) \cap \big(U(A_{n_a}) \times V(A_{n_a}, y_b)\big)\\ &\subset \big(S \times T\big) \cap W(A_{n_a}, y_b)\end{aligned}$$

olduğundan istenilen elde edilir. O halde $\big(X{\times}Y, \tau_1{\times}\sigma_1, \tau_2{\times}\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i, j)-zayıf Lindelöf'tür. □

Teorem 4.3.5. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ *ve* $\big(Y, \sigma_1, \sigma_2\big)$ (i, j)*-zayıf Alster ikili topolojik uzaylarının* $\big(X{\times}Y, \tau_1{\times}\sigma_1, \tau_2{\times}\sigma_2\big)$ *çarpım uzayı da* (i, j)*-zayıf Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, $X{\times}Y$ çarpım uzayının bir $\tau_i{\times}\sigma_i$-Alster örtüsü olsun. X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi ve Y'nin σ_i-kompakt her B alt kümesi için $A{\times}B$ kümesi $X{\times}Y$ çarpım uzayında $\tau_i{\times}\sigma_i$-kompakt olduğundan $A{\times}B \subset W(A, B)$ olacak biçimde en az bir $W(A, B) \in \mathcal{W}$ vardır.

Diğer taraftan $W(A, B)$ bir $\tau_i{\times}\sigma_i$-G_δ küme olduğundan

$$A{\times}B \subset U(A, B){\times}V(A, B) \subset W(A, B)$$

olacak biçimde X'in bir $U(A, B)$ τ_i-G_δ alt kümesi, Y'nin bir $V(A, B)$ σ_i-G_δ alt kümesi vardır.

X'in τ_i-kompakt her A alt kümesi için $\big\{V(A, B) : B \subset Y, \sigma_i\text{-kompakt}\big\}$ ailesi Y'nin bir σ_i-Alster örtüsüdür. Öyleyse Y'nin σ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\mathcal{A}$ ailesi için

$$Cl_{\sigma_j}\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{A}} V(A, B)\Big) = Y \tag{1}$$

eşitliği sağlanır.

$U(A) = \bigcap_{B\in\mathcal{A}} U(A, B)$ biçimindeyse $U(A)$, X'in A'yı kapsayan bir τ_i-G_δ alt kümesi olmak üzere; her $B \in \mathcal{A}$ için $A{\times}B \subset U(A){\times}V(A, B) \subset W(A, B)$ olur.

$\big\{U(A) : A \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\big\}$ ailesi X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür. Öyleyse X'in τ_i-kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\big\{A_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ ailesi için

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U(A_n)\Big) = X \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda, $\mathcal{W}$'nin $\big\{W(A_n, B) : B \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}\big\}$ sayılabilir alt ailesinin birleşiminin $X\times Y$ çarpım uzayında $\tau_j\times\sigma_j$-yoğun olduğunu görelim. $(a, b) \in X\times Y$ ve $S\times T$, (a, b)'yi içeren bir $\tau_j\times\sigma_j$-temel açık küme olsun. (2) eşitliğine göre, en az bir $n_a \in \mathbb{N}$ için $S \cap U(A_{n_a}) \neq \emptyset$'dir. Benzer biçimde (1) eşitliğine göre, en az bir $B_b \in \mathcal{A}_{n_a}$ için $T \cap V(A_{n_a}, B_b) \neq \emptyset$'dir. Öyleyse

$$\begin{aligned}\emptyset \neq \big(S \cap U(A_{n_a})\big) \times \big(T \cap V(A_{n_a}, B_b)\big) &= \big(S \times T\big) \cap \big(U(A_{n_a}) \times V(A_{n_a}, B_b)\big)\\ &\subset \big(S \times T\big) \cap W(A_{n_a}, B_b)\end{aligned}$$

olduğundan istenilen elde edilir. O halde $\big(X\times Y, \tau_1\times\sigma_1, \tau_2\times\sigma_2\big)$ çarpım uzayı (i, j)-zayıf Alster'dir. □

Teorem 4.3.6. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay ve A bu uzayın τ_j-yoğun bir alt kümesi olsun. Bu durumda, A alt uzayı (i, j)-zayıf Alster ise $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı da (i, j)-zayıf Alster'dir.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, X ikili topolojik uzayının bir τ_i-Alster örtüsü olsun. $U \in \mathcal{U}$, X'in bir τ_i-G_δ alt kümesi olduğundan $U \cap A$, A'nın bir τ_{i_A}-G_δ alt kümesidir. Diğer taraftan K, A'nın τ_{i_A}-kompakt bir alt kümesi ise K, X'in de bir τ_i-kompakt alt kümesi olduğundan en az bir $U \in \mathcal{U}$ için $K \subset U \cap A \subset U$ olur. Öyleyse $\mathcal{U}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ A'nın bir τ_{i_A}-Alster örtüsüdür. A alt uzayı (i, j)-zayıf Alster olduğundan

$$A = Cl_{\tau_{j_A}}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap A)\Big)$$

eşitliğini sağlayan $\mathcal{U}_A$'nın sayılabilir bir $\big\{U_n \cap A : n \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır.

Yukarıdaki eşitlikten ve A, X'in τ_j-yoğun bir alt kümesi olduğundan

$$A \subset Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap A)\Big) \subset Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big)$$
$$X = Cl_{\tau_j}(A) \subset Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big)$$

elde edilir. O halde $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i,j)-zayıf Alster'dir. $\square$

İkili topolojik uzaylarda zayıf Alster özelliği de seçme prensipleri yardımıyla karakterize edilebilir. Bunun için aşağıdaki örtü sınıfını verelim.
$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ bir ikili topolojik uzay olsun.
$D_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)$: X'in τ_i-G_δ alt kümelerinden oluşan $\mathcal{U}$ ailelerinin sınıfıdır öyle ki $\cup\mathcal{U}$ kümesi X'te τ_j-yoğundur.

Teorem 4.3.7. *Bir $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.*
(1) X bir (i,j)-zayıf Alster uzayıdır.
(2) X, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, D_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

Kanıt:
(1) $\Rightarrow$ (2): X'in τ_i-Alster örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin.

$$\mathcal{V} = \Big\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n : (\forall n)(U_n \in \mathcal{U}_n) \Big\}$$

biçiminde olsun. Açıkça $\mathcal{V}$ de X'in bir τ_i-Alster örtüsüdür. X, (i,j)-zayıf Alster olduğundan

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\Big) = X$$

olacak biçimde $\mathcal{V}$'nin sayılabilir bir $\big\{V_n : n \in \mathbb{N}\big\}$ alt ailesi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k^n \qquad \big(U_k^n \in \mathcal{U}_k, k \in \mathbb{N}\big)$$

biçiminde olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \subset U_n^n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere,

$$X = Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\Big) \subset Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^n\Big)$$

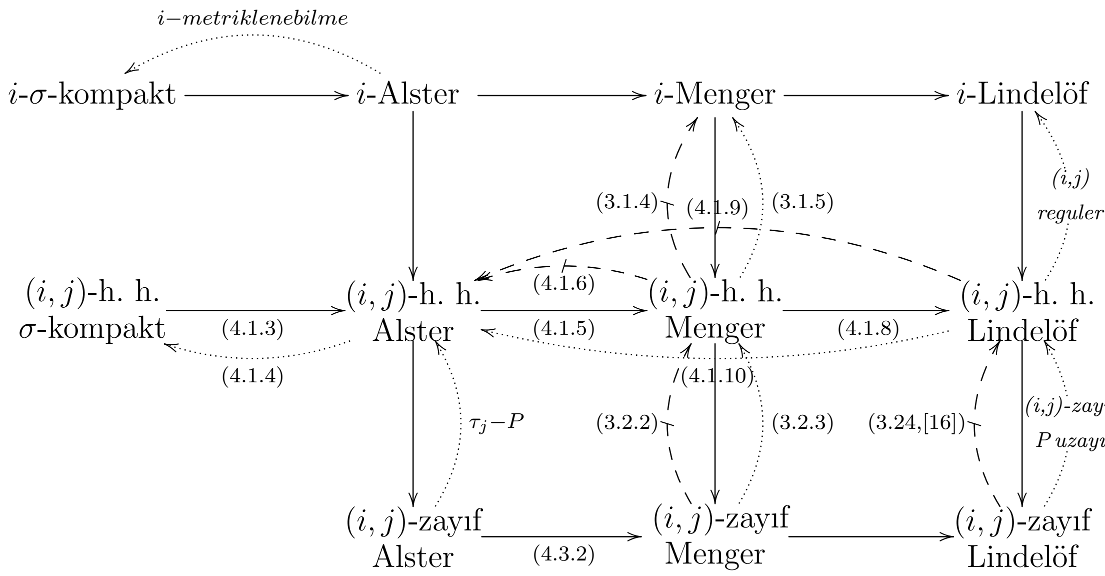
olduğundan X, $S_1\Big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, D_{\tau_j}\big(\mathcal{G}^{\tau_i}\big)\Big)$ seçme prensibini sağlar.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{U}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olmak üzere $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$, X'in τ_i-Alster örtülerinden oluşan bir dizidir. O halde hipoteze göre,

$$Cl_{\tau_j}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) = X$$

olacak biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır.
Diğer taraftan $\big\{U_n : n \in \mathbb{N}\big\}$, $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt ailesi olduğundan X, (i,j)-zayıf Alster'dir.

Aşağıdaki şema; şimdiye kadar verilen seçme özelliklerini, aralarındaki ilişkileri, özelliklerin hangi koşullar altında denk olduklarını ve ters örnekleri ifade etmektedir.



5 İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA TOPOLOJİK OYUNLAR

Bu bölümde ikili topolojik uzaylarda bazı oyunlar tanımlanıp bu oyunlarla hemen hemen Menger ve hemen hemen Alster özellikleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

5.1 Hemen Hemen Menger ve Alster Oyunları

Tanım 5.1.1. (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayında oynanan (i, j)-*hemen hemen Menger oyunu* şu şekildedir: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; n. rauntta I. oyuncu X'in τ_i-açık bir $\mathcal{U}_n$ örtüsünü, II. oyuncu ise $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

biçimindeki bir karşılaşmasında

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V) = X$$

eşitliği sağlanırsa II. oyuncu, aksi halde I. oyuncu karşılaşmayı kazanır.

Bir topolojik uzayın Menger veya Rothberger özelliğini sağlaması, ilgili topolojik oyunda I. oyuncunun kazanma stratejisinin olmamasıyla karakterize edilmiştir [11, 30]. Diğer taraftan bu özelliklerin zayıf formları da topolojik oyunlarla ilişkilendirilmiştir [3]. İkili topolojik uzaylarda hemen hemen Menger özelliği ile hemen hemen Menger oyunu arasında da benzer bir ilişki kurulabilir mi sorusuna aşağıdaki teorem ve kanıtıyla cevap verebiliriz.

Teorem 5.1.2. *(X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay, (X, τ_i) bir Lindelöf topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) *(X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger özelliğindedir.*

(2) *(X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayında oynanan (i, j)-hemen hemen Menger oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisi yoktur.*

Kanıt:

(2) $\Rightarrow$ (1): $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan (i, j)-hemen hemen Menger oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisi olmasın. Bu uzayın (i, j)-hemen hemen Menger özelliğinde olduğunu gösterelim.

$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayının τ_i-açık örtülerinin bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'yi I. oyuncunun n. rauntta seçeği τ_i-açık örtü olarak aldığımızda I. oyuncu için bir strateji belirlemiş oluruz. Fakat bu oyunda I. oyuncunun bir kazanma stratejisi olmadığından I. oyuncu bu strateji altında oynadığı en az bir

$$\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

karşılaşmasını kaybeder. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} Cl_{\tau_j}(V) = X$$

eşitliği sağlanacağından $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili toplojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger özelliğindedir.

(1) $\Rightarrow$ (2): $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayı (i, j)-hemen hemen Menger özelliğinde olsun. Bu uzayda oynanan (i, j)-hemen hemen Menger oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisinin olmadığını gösterelim.

Genelliği bozmadan aşağıdakileri kabul edebiliriz.

- I. oyuncunun seçeceği τ_i-açık örtüleri artan örtüler alarak sınırlayabiliriz.
- Yukarıdaki koşul altında II. oyuncu rakibinin seçtiği τ_i-açık örtülerin sadece bir elemanını seçebilir.
- Karşılaşmanın herhangi bir rauntunda I. oyuncunun seçeceği τ_i-açık örtünün her elemanının bir önceki rauntta II. oyuncunun seçtiği kümeyi kapsadığını kabul edebiliriz.

σ, I. oyuncu için bir strateji olsun. σ'nın bu oyuncu için bir kazanma stratejisi olmadığını, yani II. oyuncunun σ'yı başarısız kılabileceğini gösterelim. I. oyuncunun σ'ya göre ilk hamlesi $\sigma(\emptyset) = \big\{U_{(n)} : n \in \mathbb{N}\big\}$ biçiminde olsun. II. oyuncu $U_{(n)}$'yi seçerse I. oyuncunun σ'ya göre karşılığı $\sigma\big(U_{(n)}\big) = \big\{U_{(n,m)} : m \in \mathbb{N}\big\}$ biçiminde olsun. Bu yöntemi genelleyecek olursak $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, II. oyuncunun k. raunttaki hamlesi $U_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$ ise I. oyuncunun σ stratejisine göre karşılığı $\big\{U_{(n_1, n_2, \ldots, n_k, m)} : m \in \mathbb{N}\big\}$ biçimdedir.

Her $n,k\in\mathbb{N}$ için U_k^n kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U_k^n=\begin{cases} U_{(k)} & ;\quad n=0\\ U_k^{n-1}\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in\mathbb{N}^n}U_{\tau^\frown(k)}\Big) & ;\quad n\neq 0\end{cases}$$

Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathfrak{U}_n=\{U_k^n:k\in\mathbb{N}\}$ ailelerinin X'in bir artan τ_i-açık örtüsü olduğunu görelim.

- $\mathfrak{U}_n$ aileleri artandır, yani her $n,k\in\mathbb{N}$ için $U_k^n\subset U_{k+1}^n$'dir.

  $n=0$ için; $U_k^0=U_{(k)}\subset U_{(k+1)}=U_{k+1}^0$'dir.

  $n=1$ için; $U_k^1=U_k^0\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in\mathbb{N}}U_{\tau^\frown(k)}\Big)$ ve $U_{k+1}^1=U_{k+1}^0\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in\mathbb{N}}U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)$ biçimindedir. Her $k\in\mathbb{N}$ ve her $i\geq k$ için

  $U_k^0=U_{(k)}\subset U_{(i)}\subset U_{(i,k)}$ ve $U_k^0=U_{(k)}\subset U_{(k,k+1)}$ olduğundan

  $U_k^1=U_k^0\cap U_{(0,k)}\cap\ldots\cap U_{(k-1,k)}\cap U_{(k,k+1)}$

  $U_{k+1}^1=U_{k+1}^0\cap U_{(0,k+1)}\cap\ldots\cap U_{(k-1,k+1)}\cap U_{(k,k+1)}$

  eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden de $U_k^1\subset U_{k+1}^1$ olduğu kolayca görülür.

  $n=m$ için; $U_k^m\subset U_{k+1}^m$ olsun.

  $n=m+1$ için; $U_k^{m+1}\subset U_{k+1}^{m+1}$ olduğunu görelim.

  $U_k^{m+1}=U_k^m\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in\mathbb{N}^{m+1}}U_{\tau^\frown(k)}\Big)$ ve $U_{k+1}^{m+1}=U_{k+1}^m\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in\mathbb{N}^{m+1}}U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)$ biçimindedir.

  $(n_1,n_2,\ldots,n_{m+1})\in\mathbb{N}^{m+1}$ ve $k\in\mathbb{N}$ için $n_j=\text{maks}\{n_1,n_2,\ldots,n_{m+1}\}\geq k$ ise

  $$U_{(n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots,n_{m+1},k)}\supset U_{(n_1,n_2,\ldots,n_j)}\supset U_{n_j}^{j-1}\supset U_{n_j}^m\supset U_k^m$$

  olacağından

  $$A_k^{m+1}=\{(n_1,n_2,\ldots,n_{m+1})\in\mathbb{N}^{m+1}:\text{maks}\{n_1,n_2,\ldots,n_{m+1}\}<k\}$$
  $$B_k^{m+1}=\{(n_1,n_2,\ldots,n_{m+1})\in\mathbb{N}^{m+1}:\text{maks}\{n_1,n_2,\ldots,n_{m+1}\}=k\}$$

  sonlu kümeleri için

  $U_k^{m+1}=U_k^m\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in A_k^{m+1}}U_{\tau^\frown(k)}\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in B_k^{m+1}}U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)$

  $\Big(\tau\in B_k^{m+1}$ için $U_k^m\subset U_{\tau^\frown(k)}\subset U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)$

  $U_{k+1}^{m+1}=U_{k+1}^m\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in A_k^{m+1}}U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{\tau\in B_k^{m+1}}U_{\tau^\frown(k+1)}\Big)$

  eşitliklerinden $U_k^{m+1}\subset U_{k+1}^{m+1}$ olduğu görülür.

- Her $n, k \in \mathbb{N}$ için U_k^n kümeleri τ_i-açıktır.

  $n = 0$ için; $U_k^0 = U_{(k)}$ τ_i-açıktır.

  $n = 1$ için; $U_k^1 = U_k^0 \cap \Big(\bigcap\limits_{\tau \in \mathbb{N}} U_{\tau \frown (k)} \Big) = U_k^0 \cap \Big(\bigcap\limits_{\tau \in A_k^1} U_{\tau \frown (k)} \Big)$ τ_i-açık kümelerin sonlu arakesiti biçiminde olduğundan τ_i-açıktır.

  $n = m$ için; U_k^m τ_i-açık olsun.

  $n = m+1$ için; U_k^{m+1} kümesinin τ_i-açık olduğunu görelim.

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap \Big(\bigcap\limits_{\tau \in A_k^{m+1}} U_{\tau \frown (k)} \Big)$ τ_i-açık kümelerin sonlu arakesiti biçiminde olduğundan τ_i-açıktır.

- Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \{ U_k^n : k \in \mathbb{N} \}$ ailesi X'i örter.

  $n = 0$ için; $\mathcal{U}_0 = \{ U_k^0 : k \in \mathbb{N} \} = \{ U_{(k)} : k \in \mathbb{N} \}$ X'i örter.

  $n = 1$ için; $\mathcal{U}_1 = \{ U_k^1 : k \in \mathbb{N} \}$ ailesinin X'i örttüğünü görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_0$, X'i örttüğünden $x \in U_{k_x}^0$ olacak biçimde bir $k_x \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan her $i = 0, 1, \ldots, k_x - 1$ için $\{U_{(i,l)} : l \in \mathbb{N}\}$ X'i örttüğünden $x \in U_{(i,l_i)}$ olacak biçimde bir $l_i \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $k \geq \text{maks}\big(\{l_i : i = 0, 1, \ldots, k_x - 1\} \cup \{k_x\}\big)$ için $x \in U_k^1$ olduğunu görelim.

  $U_k^1 = U_k^0 \cap \ U_{(0,k)} \cap \ U_{(1,k)} \cap \ldots \cap U_{(k_x - 1,k)} \cap U_{(k_x,k)} \cap U_{(k_x+1,k)} \cap \ldots$ biçimindedir.

  $x \in U_{k_x}^0$ ve $U_{k_x}^0 \subset U_k^0$ olduğundan $x \in U_k^0$'dir.

  $i < k_x$ için $x \in U_{(i,l_i)} \subset U_{(i,k)}$ ve $i \geq k_x$ için $x \in U_{k_x}^0 = U_{(k_x)} \subset U_{(i)} \subset U_{(i,k)}$ olduğundan $x \in U_k^1$'dir.

  $n = m$ için; $\mathcal{U}_m$, X'i örtsün.

  $n = m+1$ için; $\mathcal{U}_{m+1}$'in X'i örttüğünü görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_m$, X'i örttüğünden $x \in U_{k_x}^m$ olacak biçimde bir $k_x \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan her $\tau \in A_{k_x}^{m+1}$ için $\{U_{\tau \frown (l)} : l \in \mathbb{N}\}$, X'i örttüğünden $x \in U_{\tau \frown (l_\tau)}$ olacak biçimde bir $l_\tau \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $k \geq \text{maks}\big(\{l_\tau : \tau \in A_{k_x}^{m+1}\} \cup \{k_x\}\big)$ için $x \in U_k^{m+1}$ olduğunu görelim.

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap \Big(\bigcap\limits_{\tau \in A_{k_x}^{m+1}} U_{\tau \frown (k)} \Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{\tau \in A_k^{m+1} \setminus A_{k_x}^{m+1}} U_{\tau \frown (k)} \Big)$ biçimindedir.

  $k \geq k_x$ olduğundan $x \in U_{k_x}^m \subset U_k^m$'dir.

  $\tau \in A_{k_x}^{m+1}$ için $x \in U_{\tau \frown (l_\tau)} \subset U_{\tau \frown (k)}$'dir.

  $\tau = (n_1, n_2, \ldots, n_{m+1}) \in A_k^{m+1} \setminus A_{k_x}^{m+1}$ için $\text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_{m+1}\} \geq k_x$ ve dolayısıyla $x \in U_{k_x}^m \subset U_{\tau \frown (k_x)} \subset U_{\tau \frown (k)}$'dir. Böylece $x \in U_k^{m+1}$ olduğundan $\mathcal{U}_{m+1}$, X'i örter.

Şimdi $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayının τ_i-açık örtülerinin $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisine

(i,j)-hemen hemen Menger özelliğini uyguladığımızda, doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine öyle bir f fonksiyonu vardır ki $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U^n_{f(n)}\big)$ eşitliği sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U^n_{f(n)} \subset U_{(f(0),f(1),\ldots,f(n))}$ olduğundan $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}\big(U_{(f(0),f(1),\ldots,f(n))}\big)$ eşitliği de sağlanır.
Öyleyse II. oyuncunun

$$U_{(f(0))}, U_{(f(0),f(1))}, \ldots, U_{(f(0),f(1),\ldots,f(n))}, \ldots$$

hamleleri I. oyuncunun σ-stratejisini başarısız kılar. $\square$

Aşağıda ikili topolojik uzaylarda, hemen hemen Alster ve hemen hemen kompakt-G_δ oyunlarının tanımları verilmiş ve bu oyunların dual oldukları gösterilmiştir.

Tanım 5.1.3. $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan (i,j)*-hemen hemen Alster oyunu* şu şekildedir: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; n. rauntta I. oyuncu X'in bir $\mathcal{U}_n$ τ_i-Alster örtüsünü, II. oyuncu ise $\mathcal{U}_n$'nin bir U_n elemanını seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_0, U_0, \mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

biçimindeki bir karşılaşmasında II. oyuncunun seçtiği kümelerin τ_j-kapanışları X'i örterse yani

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

eşitliği sağlanırsa II. oyuncu, aksi halde I. oyuncu karşılaşmayı kazanır.

Bir sonraki önerme ve ispatı [46], Lemma 6.1'e paralel olarak verilmiştir.

Önerme 5.1.4. *([46]) σ, $\big(X,\tau_1,\tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan (i,j)-hemen hemen Alster oyununda II. oyuncu için bir strateji ve $\big(\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n\big)$ X'in τ_i-Alster örtülerinin bir dizisi olsun.*
Bu durumda, X'in τ_i-kompakt bir K alt kümesi vardır ki X'in K'yi kapsayan her U τ_i-G_δ alt kümesi için

$$U = \sigma(\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n,\mathcal{U})$$

olacak biçimde X'in bir $\mathcal{U}$ τ_i-Alster örtüsü vardır.

Kanıt: II. oyuncunun σ stratejisine göre seçemeyeceği X'in τ_i-G_δ alt kümelerinin ailesi $\mathcal{W}$ olsun. Başka bir deyişle

$$\mathcal{W} = \Big\{ G \subset X : G \text{ bir } \tau_i\text{-}G_\delta \text{ küme}, G \neq \sigma\big(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{U}\big), \mathcal{U} \text{ bir } \tau_i\text{-Alster örtü} \Big\}$$

biçiminde olsun.

$\mathcal{W}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü değildir. Aksine $\mathcal{W}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü ise $\sigma\big(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{W}\big) \in \mathcal{W}$ olacağından bir çelişki elde edilir.

Önermede iddia edilen doğru değilse bir çelişki elde edileceğini görelim.

X'in τ_i-kompakt her K alt kümesi için $K \subset U$ olacak biçimde X'in bir U, τ_i-G_δ alt kümesi var ve X'in her $\mathcal{U}$ τ_i-Alster örtüsü için $U \neq \sigma\big(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{U}\big)$ ise $\mathcal{W}$, X'in bir τ_i-Alster örtüsü olacağından bir çelişki elde edilir. □

Tanım 5.1.5. $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan (i, j)-*hemen hemen kompakt-G_δ* oyunu şu şekildedir: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n. rauntta I. oyuncu X'in bir K_n τ_i-kompakt alt kümesini, II. oyuncu ise K_n'yi kapsayan X'in bir U_n τ_i-G_δ alt kümesini seçer. Oyunun

$$K_0, U_0, K_1, U_1, \ldots, K_n, U_n, \ldots$$

biçimindeki bir karşılaşmasında II. oyuncunun seçtiği kümelerin τ_j-kapanışları X'i örterse yani

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

eşitliği sağlanırsa I. oyuncu, aksi halde II. oyuncu karşılaşmayı kazanır.

Teorem 5.1.6. *(i, j)-hemen hemen Alster ve (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyunları dualdir.*

Kanıt: $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan bu oyunların dual olduğunu gösterelim. σ, (i, j)-hemen hemen Alster oyununda II. oyuncu için bir kazanma stratejisi olsun. (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda I. oyuncu için bir σ' kazanma stratejisi belirleyelim.

K_0, Önerme 5.1.4'te varlığı ispatlanan τ_i-kompakt küme olmak üzere, $\sigma'(\emptyset) = K_0$ olsun. Önerme 5.1.4'e göre K_0'ı kapsayan X'in bir U_0, τ_i-G_δ alt kümesi için $U_0 = \sigma(\mathcal{U}_0)$ olacak biçimde X'in bir $\mathcal{U}_0$, τ_i-Alster örtüsü vardır(Burada U_0 kümesi (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncunun ilk hamlesi, $\mathcal{U}_0$ ve $\sigma(\mathcal{U}_0)$ ise (i, j)-hemen hemen Alster oyununda sırasıyla I. ve II. oyuncuların ilk hamleleridir.). Yine Önerme 5.1.4'e göre bir K_1, τ_i-kompakt küme vardır ki $K_1 \subset U$ biçimindeki her τ_i-G_δ küme için $U = \sigma(\mathcal{U}_0, \mathcal{U})$ olacak biçimdeki bir $\mathcal{U}$, τ_i-Alster örtü vardır. $\sigma'(U_0) = K_1$ olsun. U_1, K_1'i kapsayan bir τ_i-G_δ küme ise $\mathcal{U}_1$, τ_i-Alster örtü için $U_1 = \sigma(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1)$ olsun. Bu yöntemle devam ederek (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda I. oyuncu için bir σ' stratejisi belirleyelim.

σ, (i, j)-hemen hemen Alster oyunun II. oyuncu için bir kazanma stratejisi olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

O halde, yukarıdaki eşitliğe göre σ', (i, j)–hemen hemen kompakt-G_δ oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisidir.

σ, (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisi olsun. (i, j)-hemen hemen Alster oyununda II. oyuncu için bir σ' kazanma stratejisi belirleyelim.

$\mathcal{U}_0$ bir τ_i-Alster örtü olsun. Bu durumda $\sigma(\emptyset) \subset U_0$ olacak biçimde bir $U_0 \in \mathcal{U}_0$ vardır. $\sigma'(\mathcal{U}_0) = U_0$ olsun. $\mathcal{U}_1$ bir τ_i-Alster örtü olsun. Bu durumda $\sigma(U_0) \subset U_1$ olacak biçimde bir $U_1 \in \mathcal{U}_1$ vardır. $\sigma'(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1) = U_1$ olsun. Bu yöntemle devam ederek (i, j)-hemen hemen Alster oyununda II. oyuncu için bir σ' stratejisi belirleyelim.

σ, (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisi olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

O halde, yukarıdaki eşitliğe göre σ', (i, j)-hemen hemen Alster oyununda II. oyuncu için bir kazanma stratejisidir.

σ, (i, j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisi olsun. (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncu için bir σ' kazanma stratejisi belirleyelim.

K_0 bir τ_i-kompakt küme olsun. Bu durumda $\sigma(\emptyset)$, τ_i-Alster örtüsünün K_0'ı kapsayacak biçimde bir U_0 elemanı vardır. $\sigma'(K_0) = U_0$ olsun. Benzer biçimde K_1 bir τ_i-kompakt küme olsun. Bu durumda $\sigma(U_0)$, τ_i-Alster örtüsünün K_1'i kapsayacak biçimde bir U_1 elemanı vardır. $\sigma'(K_0, K_1) = U_1$ olsun. Bu yöntemle devam ederek (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncu için bir σ' stratejisi belirleyelim.

σ, (i, j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisi olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) \neq X$$

olur. O halde σ', (i,j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncu için bir kazanma stratejisidir.

σ, (i,j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncu için bir kazanma stratejisi olsun. (i,j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncu için bir σ' kazanma stratejisi belirleyelim.
$\mathcal{U}_0 = \big\{\sigma(K) : K \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\big\}$ biçiminde olmak üzere $\sigma'(\emptyset) = \mathcal{U}_0$ olsun. $U_0 \in \mathcal{U}_0$ ise $U_0 = \sigma(K_0)$ olacak biçimde τ_i-kompakt bir K_0 kümesi vardır. $\mathcal{U}_1 = \big\{\sigma(K_0, K) : K \subset X, \tau_i\text{-kompakt}\big\}$ biçiminde olmak üzere, $\sigma'(U_0) = \mathcal{U}_1$ olsun. $U_1 \in \mathcal{U}_1$ ise $U_1 = \sigma(K_0, K_1)$ olacak biçimde τ_i-kompakt bir K_1 kümesi vardır. Bu yöntemle devam ederek (i,j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncu için bir σ' stratejisi belirleyelim.
σ, (i,j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda II. oyuncu için bir kazanma stratejisi olduğundan

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) \neq X$$

olur. O halde σ', (i,j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncu için bir kazanma stratejisidir. $\square$

Önerme 5.1.7. *$\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ ikili topolojik uzayında oynanan (i,j)-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisi yoksa bu uzay $S_1\big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}(\mathcal{G}^{\tau_i})\big)$ seçme özelliğini sağlar.*

Kanıt: X uzayının τ_i-Alster örtülerinden oluşan bir $\big(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$'yi I. oyuncunun (i,j)-hemen hemen Alster oyununda n. rauntta seçeceği τ_i-Alster örtü olarak alırsak bu oyuncu için bir strateji belirlemiş oluruz. Hipoteze göre bu strateji bir kazanma stratejisi olmadığından I. oyuncu bu strateji altında oynadığı en az bir karşılaşmayı kaybeder.

$$\mathcal{U}_0, U_0, \mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } U_n \in \mathcal{U}_n)$$

I. oyuncunun kaybettiği bir karşılaşma ise

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Cl_{\tau_j}(U_n) = X$$

eşitliği sağlanacağından $\big(X, \tau_1, \tau_2\big)$ uzayı $S_1\big(\mathcal{G}_A^{\tau_i}, Cl_{\tau_j}(\mathcal{G}^{\tau_i})\big)$ özelliğindedir. $\square$

Sonuç 5.1.8. $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ *ikili topolojik uzayında oynanan* (i, j)*-hemen hemen Alster oyununda I. oyuncunun bir kazanma stratejisi yoksa bu uzay* (i, j)*-hemen hemen Alster'dir.*

Sonuç 5.1.9. $\left(X, \tau_1, \tau_2\right)$ *ikili topolojik uzayında oynanan* (i, j)*-hemen hemen kompakt-*G_δ *oyununda II. oyuncunun bir kazanma stratejisi yoksa bu uzay* (i, j)*-hemen hemen Alster'dir.*

(i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ ve (i, j)-hemen hemen Alster oyunları dual olduklarından yukarıdaki sonuca ulaşıyoruz. Ancak ikili topolojik uzay (i, j)-hemen hemen Alster ise II. oyuncunun (i, j)-hemen hemen kompakt-G_δ oyununda ve I. oyuncunun (i, j)-hemen hemen Alster oyununda kazanma stratejisinin olmadığını söyleyemiyoruz.

KAYNAKLAR

[1] K. Alster, On the class of all spaces of weight not greater than ω_1 whose Cartesian product with every Lindelöf space is Lindelöf, Fund. Math., 129(2) **(1988)** 133–140.

[2] L.F. Aurichi, R.R. Dias, Topological games and Alster spaces, Can. Math. Bull., 57(4) **(2014)** 683–696.

[3] L. Babinkostova, B.A Pansera, M. Scheepers, Weak covering properties and infinite games, Topology Appl., 159(17) **(2012)** 3644–3657.

[4] L. Babinkostova, B.A Pansera, M. Scheepers, Weak covering properties and selection principles, Topology Appl., 160(18) **(2013)** 2251–2271.

[5] M. Bonanzinga, F. Cammaroto, B.A. Pansera, B. Tsaban, Diagonalizations of dense families, Topology Appl., 165 **(2014)** 12–25.

[6] E. Borel, Sur la classification des ensembles de mesure nulle, Bul. Soc. Math. Fr., 47 **(1919)** 97–125.

[7] M.C. Datta, Projective Bitopological Spaces II, J. Aust. Math. Soc., 14 **(1972)** 119–128.

[8] B. Dvalishvili, Bitopological spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications, Elsevier **2005**.

[9] F. Galvin, Indeterminancy of point-open games, Bull. Acad. Polon. Sci., 26 **(1978)** 445–449.

[10] L. Gillman, M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc., 77 **(1954)** 340–362.

[11] W. Hurewicz, Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems, Math. Z., 24 **(1926)** 401–421.

[12] W. Hurewicz, Über Folgen Stetiger Funktionen, Fund. Math., 9 **(1927)** 193–204.

[13] J.C. Kelly, Bitopological spaces, Proc. London Math. Soc., 13(3) **(1963)** 71–89.

[14] A. Kılıçman, Z. Salleh, Pairwise Almost Lindelöf Bitopological Space II, Malays. J. Math. Sci., 1(2) **(2007)** 227–238.

[15] A. Kılıçman, Z. Salleh, Pairwise Weakly Regular-Lindelöf Spaces, Abstr. Appl. Anal., **(2008)** ID 184243.

[16] A. Kılıçman, Z. Salleh, On Pairwise Weakly Lindelöf Bitopological Spaces, Bull. Iranian Math. Soc., 39(3) **(2013)** 469–486.

[17] D. Kocev, Almost Menger and related spaces, Mat. Vesnik, 61 **(2009)** 173–180.

[18] D. Kocev, Menger-Type Covering Properties of Topological Spaces, Filomat, 29 **(2015)** 99–106.

[19] Lj.D.R. Kočinac, Star-Menger and related spaces, Publ. Math. Debrecen, 55 (3–4) **(1999)** 421–431.

[20] Lj.D.R. Kočinac, Star-Menger and related spaces II, Filomat, 13 **(1999)** 129–140.

[21] Lj.D.R. Kočinac, Selected results on selection principles, In: Proceedings of the Third Seminar on Geometry and Topology, 15–17 July, 2004, Tabriz, Iran, **(2004)** p. 71–104.

[22] Lj.D.R. Kočinac, Some covering properties in topological and uniform spaces, Proc. Steklov Inst. Math., 252(1) **(2006)** 122–137.

[23] Lj.D.R. Kočinac, S. Özçağ, Bitopological spaces and selection principles, Proc. Internat. Conf. Topology Appl. (ICTA 2011), **2012**, p. 243–255.

[24] Lj.D.R. Kočinac, Star Selection Principles: A Survey, Khayyam J. Math., 1(1) **(2015)** 82–106.

[25] Lj.D.R. Kočinac, Variations of classical selection principles: An overview, Quaest. Math., **(2019)** doi:10.2989/16073606.2019.1601646.

[26] S.N. Maheshwari, R. Prasad, Semi open sets and semi continuous function in bitopological spaces, Mathematical Not., 26 **(1977/78)** 29–37.

[27] K. Menger, Einige Überdeckungssätze der Punltmengenlehre, Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologieund Mechanik (Wiener Akademie, Wien), 133 **(1924)** 421–444.

[28] L. Motchane, Sur la notion d'espace bitopologique et sur les espaces de Baire, C. R. Acad. Sci. Paris, 224 **(1957)** 3121–3124.

[29] L. Motchane, Sur la caractérization des espaces de Baire, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 **(1958)** 215–218.

[30] J. Pawlikowski, Undetermined sets of point-open games, Fund. Math., 144 **(1994)** 279–285.

[31] B.A. Pansera, Weaker forms of the Menger property, Quaest. Math., 35 **(2012)** 161–169.

[32] T.G. Raghavan, I.L. Reilly, Metrizability of quasi-metric spaces, J. Lond. Math. Soc., 15(1) **(1977)** 169–172.

[33] F. Rothberger, Eine Verschärfung der Eigenschaft C, Fund. Math., 30 **(1938)** 50–55.

[34] M.J. Saegrove, On bitopological spaces, Doctoral Diss., Iowa State University, Ames, Iowa, **1971**.

[35] M. Scheepers, Combinatorics of open covers (I): Ramsey Theory, Topology Appl., 69 **(1996)** 31–62.

[36] M. Scheepers, Lusin sets, Proc. Math. Soc., 197 **(1999)** 251–257.

[37] M. Scheepers, Selection principles in topology: New directions, Filomat, 15 **(2001)** 111–126.

[38] M. Scheepers, Selection principles and covering properties in Topology, Note Mat., 22(2) **(2003)** 3–41.

[39] M. Scheepers, Topological games, In Encyclopedia of General Topology, K. P. Hart, J. Nagata and J. E. Vaughan, Eds. Elsevier, Amsterdam, **2004**.

[40] W. Sierpinski, Sur un Ensemble nondénombrable, donc toute image continue est de mesure nulle, Fund. Math., 11 **(1928)** 301–304.

[41] A.R. Singal and S.P. Arya, On pairwise almost regular spaces, Glas. Math. Ser. III, 26(6) **(1971)** 335–343.

[42] Y.-K. Song, R.Li, The almost Hurewicz spaces, Questions Answers Gen. Topology, 31 **(2013)** 131–136.

[43] Y.-K. Song, Remarks on almost Rothberger spaces and weakly Rothberger spaces, Quaest. Math., 38(3) **(2015)** 317–325.

[44] Y.-K. Song, Some Remarks On Almost Menger Spaces and Weakly Menger Spaces, Publ. Inst. Math., 98 **(2015)** 193–198.

[45] L.A. Steen, J.A. Seebach, Counterexamples in Topology, Dover Publications, New York, **1995**.

[46] R. Telgarsky, Spaces defined by topological games, II, Fund. Math., 116 **(1983)** 189–207.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
~~YÜKSEK LİSANS~~/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih:21/06/2019

Tez Başlığı / ~~Konusu~~: BAZI SEÇME ÖZELLİKLERİNİN ZAYIF VE GÖRECELİ FORMLARI

Yukarıda başlığı/~~konusu~~ gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 67 sayfalık kısmına ilişkin, 21/06/2019 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
21.06.2019

Adı Soyadı: Ali Emre EYSEN

Öğrenci No: N11246408

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı:

Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Ali Emre EYSEN
Doğum Yeri	:	Ankara
Medeni Hâli	:	Bekâr
E-posta	:	aeeysen@hacettepe.edu.tr
Adresi	:	Karapınar Mah. 1165. Cad. 33/15 Çankaya/ANKARA

Eğitim

Lise	:	2000 - 2003 Elmadağ Lisesi
Lisans	:	2004 - 2005 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık 2005 - 2009 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	:	2009 - 2012 Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü
Doktora	:	2012 - 2019 Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Orta Seviye

İş Deneyimi

2010 - 2013 Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

2013 - 2017 Sözleşmeli Uzman, Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Mekezi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

1. S. Özçağ, **A. E. Eysen**, Almost Menger property in bitopological spaces, Ukr. Math. J. 68:6 **(2016)** 950–958.
2. **A. Emre Eysen**, S. Özçağ, Weaker forms of the Menger property in bitopological spaces, Quaest. Math. 41 (7) **(2018)** 877–888.

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1. "İkili Topolojik Uzaylarda Hemen Hemen Menger Özelliği", 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 Haziran 2013, Çankaya Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE.
2. "Almost Menger Property in Bitopological Spaces", 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013), August 26-29, 2013, Sarajevo, BOSNIA and HERZEGOVINA.