İDEAL VE MODÜL İNDİRGEMELERİ

REDUCTIONS OF IDEALS AND MODULES

MERVE AKIN

DOÇ.DR.BÜLENT SARAÇ
Tez danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2017

MERVE AKIN ' ın hazırladığı **"İdeal ve Modül İndirgemeleri"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Başkan ....

Doç. Dr. Bülent SARAÇ
Danışman ....

Doç. Dr. Evrim AKALAN
Üye ....

Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Oğuz YAYLA
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun 29.06.2029 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

29 / 06 / 2017

(İmza)

Öğrencinin Adı Soyadı

Merve AKIN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/06/2017

MERVE AKIN

ÖZET

İDEAL VE MODÜL İNDİRGEMELERİ

Merve AKIN

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bülent SARAÇ

Haziran 2017

Değişmeli Cebirde ideallerin nasıl geliştiğinin anlaşılması üzerine pek çok önemli çalışma yapılmış ve halen de yapılmaya devam etmektedir. Bu yöndeki araştırmaların en temel dayanaklarından biri Hilbert-Samuel Polinomlarıdır. Buna göre, $(R, \mathfrak{m})$ yerel halkası ile bir $\mathfrak{m}$-asıl Q ideali verildiğinde yeterince büyük n tamsayıları için R/Q^n modülünün uzunluğu tamsayı değerli bir polinom vermektedir. Bu polinomun katsayıları rasyonel olup R ve Q ikilisini çalışmak için önemli parametreler sunmaktadır. Örneğin bu polinomun derecesi d ise $d = \dim R$ ve başkatsayısının $d!$ katı Q'nun R üzerindeki çokkatlılığı dediğimiz ve Q hakkında pek çok bilgi sağlayan bir değişmezdir. Tezimizde, bu değişmezi bozmadan, gereksiz bazı elemanlarını eleyerek idealler üzerinde çalışmamıza olanak sağlayan ve ideallerin analitik teorisi içinde pek çok uygulaması keşfedilmiş olan "ideal indirgemelerini" inceleyeceğiz.

Tez çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölümde, diğer bölümlerde kullanılan Halka ve Modül Teorisi'nin temel kavramlarına ve sonuçlarına yer verilmiştir.

İkinci bölüme rasyonel sayılar cismi üzerindeki polinomların temel özellikleri incelenerek başlanmaktadır. Daha sonra $\mathbb{Z}$-kademeli modüllerin Hilbert Fonksiyonları ve bunlar yardımıyla tanımlanan çokkatlılık kavramı ele alınarak ileride kullanılacak olan ve bazı temel özellikler kanıtlanmaktadır.

Üçüncü bölüme, ideal indirgemelerinin tanım ve temel özellikleri ile minimal indirgemelerin varlığı gösterilerek başlanmıştır. Daha sonra analitik yayılım kavramı tanımlanmış ve bu kavramın minimal indirgemelerin minimal tabanlarının büyüklüğü ile ilişkisi ortaya konmuştur. Bu bölümde son olarak bir idealin integral kapanışı kavramı tanımlanmış ve ideal indirgemeleri ile olan yakın ilişkisi ortaya konmuştur.

Son bölümde, ilk olarak, ideal indirgemelerinin modüllere genişletilebilmesi için gerekli altyapıyı tesis etmek amacıyla Rees değer fonksiyonları üzerinde bazı önemli sonuçlar verilmiştir. Daha sonra modül indirgemeleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Bunlar arasında, özel olarak, modül indirgemelerini harici ve simetrik cebirler yardımıyla açıklayabildiğimiz bazı sonuçlar bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Hilbert polinomu, Hilbert-Samuel polinomu, çokkatlılık, ideal indirgemesi, minimal indirgeme, analitik yayılım, analitik bağımsızlık, integral kapanış, kesikli değer halkası, Rees değer fonksiyonu, modül indirgemesi

ABSTRACT

REDUCTIONS OF IDEALS AND MODULES

Merve AKIN

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Bülent SARAÇ

June 2017

In Commutative Algebra, there have been numerous significant contributions for understanding growth of ideals. Research in this direction is mostly based on the concept of Hilbert-Samuel polynomials. In fact, given an $\mathfrak{m}$-primary ideal Q in a local ring $(R, \mathfrak{m})$, the length of the R–module R/Q^n is equal to an integer-valued polynomial for sufficiently large n. This polynomial has rational coefficients which provide important parameters for studying the pair R and Q. For instance, if the degree of this polynomial is d, then $\dim R = d$ and $d!$ times the leading coefficient (called the multiplicity of Q on R) is a significant invariant that carry much information about Q. In this thesis, we investigate reductions of ideals as a technique which has proved to have many applications in analytic theory of ideals and which enables us to study ideals by eliminating some superfluous elements.

This thesis consists of four chapters. In the introductory chapter we give some important notions and results on commutative rings and their modules which will be used in the sequel.

In the second chapter, we start with some fundamental properties of polynomials with rational coefficients. Then we study Hilbert polynomials of $\mathbb{Z}$-graded modules as well as the concept of multiplicity arising from Hilbert polynomials. Moreover, we prove some important results related to Hilbert-Samuel polynomials and multiplicity which will be crucial for the remaining part of the thesis.

In the third chapter, we begin with the definition and some basic properties of reductions of ideals and prove the existence of minimal reductions. Next we define the notion of analytic spread and give its relation with the extent of any minimal basis of minimal reductions. Finally in this chapter we define integral closure of ideals and explore its close relation with reductions.

In the last chapter, firstly, in order to set the stage necessary for developping a parallel theory of reductions for modules, we give some important results on Rees valuations. Then we define reductions of modules and prove some fundamental theorems. Among them are two results by which we can explain reductions of modules in terms of symmetric and exterior algebras.

Keywords: Hilbert polynomial, Hilbert-Samuel polynomial, multiplicity, reduction of ideals, minimal reduction, analytic spread, analytical independence, integral closure, discrete valuation ring, Rees valuations, reduction of modules.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana ışık olan, sabırla destekleyen, yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam ve tez danışmanım sayın Doç. Dr. Bülent SARAÇ'a,

Tez savunması aşamasındaki değerlendirmeleri ve katkıları ile jüri üyeleri sayın hocalarım Prof. Dr. Mustafa ALKAN, Doç. Dr. Evrim AKALAN, Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU ve Yrd. Doç. Dr. Oğuz YAYLA'ya,

Her zaman yanımda olan, her kararımda arkamda duran ve varlıklarıyla bana güç veren anneme, babama ve kardeşlerime,

Desteklerini her zaman yanımda hissettiğim, nazımı çeken, acılarımı, sevinçlerimi paylaştığım dostlarım Betül Cansu-Harun GACAL, Duygu ÇAKIR, Emre ÇAĞLAR, Onur SAKAR, Mümüne ŞAHİNKAYA, Esra KARADENİZ'e ve canımın içi Hasan BAYSAL'a

sonsuz teşekkürler…

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	negatif olmayan tamsayılar
$\mathbb{Z}$	tamsayılar
$\subset$ veya $\subsetneqq$	kesin olarak kapsama
$\leq$	alt modül
$\oplus$	dik toplam
$\cong$	izomorfizma
$\trianglelefteq_{ind}$	indirgeme
$\operatorname{Spec}(R)$	R'nin Asal ideallerinin kümesi
$\operatorname{Rad} I$	I idealinin radikali
$\operatorname{Min}(R)$	R'nin minimal asal ideallerinin kümesi
χ_R	doğal dönüşüm
M_P	M'nin P asal ideali ile yerelleştirmesi
KR_P	K alt modülünün P asal ideali ile yerelleştirmesindeki genişlemesi
W^c	W alt modülünün daralması
$\operatorname{Ann}_R(M)$ veya $(0 :_R M)$	M'nin R halkasındaki sıfırlayıcısı
$\dim(P)$	P asal idealinin boyutu
$\operatorname{rank}(P)$	P asal idealinin rankı
$\operatorname{der}(x)$	x elemanının derecesi
$\operatorname{der}[P(x)]$	$P(x)$ polinomunun derecesi
$e(M)$	M modülünün çokkatlılığı
$H_M(n)$	M'nin Hilbert fonksiyonu
$Q_M(n)$	M'nin Hilbert polinomu
$HS_M(n)$	M'nin Hilbert-Samuel fonksiyonu
$QS_M(n)$	M'nin Hilbert-Samuel polinomu
$l(A)$	A idealinin analitik yayılımı
$\binom{s}{\mu}$	binom katsayısı
$\lambda(M)$	M modülünün uzunluğu
$\lambda_a(M)$	M modülünün asıl uzunluğu

Bölüm 1

Ön Bilgiler

1.1 Genel Kavramlar

Tez çalışmamız halka, halka homomorfizması, ideal, bölüm halkası, modül, alt modül, bölüm modülü gibi kavramları temel kavram olarak kullanmaktadır. Bu kavramlar ile ilgili detaylı bilgilere hemen hemen tüm lisans ve lisansüstü cebir kitaplarında rastlanabilir. Tez çalışmamız boyunca ele alacağımız halkalar, aksi belirtilmedikçe, birimli ve değişmeli, modüller ise üniter olacaktır. Ayrıca halka elemanlarının modül elemanları üzerine etkisi soldan çarpma biçiminde gösterilecektir. Genel olarak bir halkayı R şeklinde göstereceğiz. Dolayısıyla tez çalışmamız boyunca R ile, birimli ve değişmeli olan herhangi bir halka ifade edilecek, R üzerindeki modüller ile de, sol R–modüller kastedilecektir. Ayrıca alt modül olma durumu $\leq$ simgesi ile gösterilecektir.

Eğer bir R halkasının

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots,$$

şeklindeki ideallerinin her artan zinciri için $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \cdots$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı bulunabiliyorsa; yani R'nin ideallerinin her artan zinciri belli bir yerden sonra sabitleniyorsa, o zaman, R'ye bir *Noether halka* denir. Aynı tanımı R'nin ideallerinin azalan zincirleri için yineleyecek olursak R halkasının *Artin halka* olmasını tanımlamış oluruz. R halkasının Noether halka olması ile tüm ideallerinin sonlu üretilmiş olması denktir. İdeallerin artan veya azalan zincirleri üzerinden verdiğimiz Noether ve Artin halka tanımlarını, modüller için, alt modüllerinin artan veya azalan zincirleri üzerinden yinelersek, *Noether* ve *Artin modül* kavramlarını tanımlamış oluruz. Kolayca görülebilir ki bir M modülü Noether modüldür ancak ve ancak M'nin bütün alt modülleri sonlu üretilmiştir ancak ve ancak M'nin alt modüllerin boştan farklı her kümesinin kapsama bağıntısına göre bir maksimal elemanı vardır.

R bir halka ve P, R'nin bir öz ideali olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ oluyorsa P idealine R'nin bir *asal ideali* denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesini $\operatorname{Spec}(R)$ şeklinde göstereceğiz. I, R 'nin herhangi bir öz ideali olsun. O zaman Zorn Lemmasının basit bir uygulaması sayesinde I'nın bir maksimal ideal tarafından içerilebileceğini gösterebiliriz. Maksimal idealler birer asal ideal olacağından R'nin I'yı içeren en az bir asal ideali olacağı görülür. R'nin I idealini içeren bütün asal ideallerinin ara kesiti olan ideale I'nın R içindeki *radikali* denir ve bu ideal $\operatorname{Rad} I$ şeklinde gösterilir. Eğer I idealini içeren bütün asal ideallerin kümesini $\operatorname{Var}(I)$ ile gösterirsek, Zorn Lemması sayesinde, $\operatorname{Var}(I)$ kümesinin kapsama bağıntısına göre en az bir tane minimal elemanı olduğu gösterilebilir (bkz. [10, 3.52]). $\operatorname{Var}(I)$ kümesinin minimal elemanlarına I'nın minimal asal idealleri denir. I'nın minimal asal ideallerinin kümesini $\operatorname{Min}(I)$ ile göstereceğiz. Özel olarak sıfır idealinin minimal asal ideallerine R halkasının minimal asal idealleri diyeceğiz ve bunların kümesini ise $\operatorname{Min}(R)$ ile göstereceğiz. Kolayca görülebilir ki $\operatorname{Rad} I$, I'nın minimal asal ideallerinin ara kesitine eşittir (bkz. [10, 3.54]). Diğer taraftan eğer R bir Noether halka ve I, R'nin bir öz ideali ise o zaman $\operatorname{Min}(I)$ kümesi sonludur.

Q, R'nin bir öz ideali olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $ab \in Q$ iken $a \in Q$ ya da $b \in \operatorname{Rad} Q$ oluyorsa Q idealine R'nin bir *asıl ideali* denir. Q, R'nin bir asıl ideali ise $P = \operatorname{Rad} Q$ ideali R'nin bir asal idealidir. Bu durumda Q idealine R'nin bir P-*asıl ideali* denir. Buna göre asıl ideallerin radikalleri asal ideal olur. Fakat bunu tersi her zaman doğru değildir. Yani radikali asal olan tüm idealler asıl ideal olmak zorunda değildir. Ancak bu duruma bir istisna olarak, radikali maksimal ideal olan tüm ideallerin birer asıl ideal olacağını söyleyebiliriz.

M bir R-modül ve $S \subseteq M$ olsun. $\operatorname{Ann}_R S = \{r \in R : rs = 0, \forall s \in S\}$ kümesine S'nin R içindeki *sıfırlayıcısı* denir. Dikkat edilirse $\operatorname{Ann}_R S$, R'nin bir idealidir. Eğer $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ise $\operatorname{Ann}_R S$ yerine kimi zaman $\operatorname{Ann}_R(s_1, \ldots, s_n)$ gösterimini kullanacağız. Özel olarak $S = \{s\}$ ise $\operatorname{Ann}_R S = \operatorname{Ann}_R(s)$ yazacağız. Öte yandan N, M'nin bir alt modülü olmak üzere $\operatorname{Ann}_R(M/N)$ idealini çoğu defa $(N : M)$ şekline göstereceğiz. Buna göre $(N : M)$, her $m \in M$ için $rm \in N$ koşulunu sağlayan $r \in R$ elemanlarının kümesidir.

M bir R-modül ve Q, M'nin bir öz alt modülü olsun. Eğer her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in Q$ iken $r \in \operatorname{Rad}(Q : M)$ ya da $m \in Q$ oluyorsa Q'ya M'nin bir asıl alt modülü denir. Q, M'nin bir asıl alt modülü ise $P = \operatorname{Rad}(Q : M) \in \operatorname{Spec}(R)$ olur. Bu durumda Q'ya M'nin bir P-asıl alt modülü denir. Bir $N \leq M$ ve $Q_1, \ldots, Q_n$ asıl alt modüller olmak üzere

$$N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n, \qquad \operatorname{Rad}(Q_i : M) = P_i \tag{*}$$

şeklindeki bir yazıma N'nin M içindeki bir *asıl ayrışımı* denir. Bu durumda N alt modülüne de M'nin bir *ayrışabilir alt modülü* denir. Eğer (*) ile verilen asıl ayrışımda

$i \neq j$ iken $P_i \neq P_j$ ve her $i = 1, \ldots, n$ için

$$Q_i \not\supseteq \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Q_j$$

oluyorsa bu asıl ayrışıma N'nin bir *normal asıl ayrışımı* denir. Eğer N'nin bir asıl ayrışımı varsa bu ayrışım N'nin bir normal asıl ayrışımına inceltilebilir. Ancak her zaman alt modüllerin asıl ayrışıma sahip olmasını bekleyemeyiz (bkz. [10, 4.30]). Diğer taraftan M bir Noether modül ise M'nin her öz alt modülünün bir asıl ayrışımı (dolayısıyla da bir normal asıl ayrışımı) bulunabilir. Eğer $(*)$ ayrışımı ile

$$N = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_m, \qquad \mathrm{Rad}(Q'_i : M) = P'_i, \tag{**}$$

N'nin iki normal asıl ayrışımı ise bu durumda $n = m$ ve $\{P_1, \ldots, P_n\} = \{P'_1, \ldots, P'_m\}$ olur. Ayrıca $\{P_1, \ldots, P_n\}$ kümesinin kapsama bağıntısına göre minimal olan elemanlarına karşılık gelen Q_i ve Q'_j terimleri eşittir. Diğer taraftan $\{P_1, \ldots, P_n\}$ kümesinin kapsama bağıntısına göre minimal olan elemanları $(N : M)$ idealinin minimal asal idealleri ile aynıdır.

R halkasının bir P asal idealini alalım. $n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere eğer P ideali ile başlayan ve kesin olarak azalan $P \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n$ asal ideal dizisi var ve bu dizi daha fazla terim içeren başka bir asal ideal dizisine genişletilemez ise o zaman P asal idealinin rankı n'dir denir ve $\operatorname{rank} P = n$ şeklinde gösterilir. Eğer her n tamsayısı için $n+1$ terimli en az bir $P \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n$ asal ideal dizisi var ise o zaman $\operatorname{rank} P = \infty$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla her asal idealin rankı tanımlıdır.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

1. Bir P asal ideali için $\operatorname{rank} P = 0$ ancak ve ancak P ideali halkanın minimal asal idealidir.

2. Eğer $P \subsetneqq P'$ asal idealler ise o zaman $\operatorname{rank} P \leq \operatorname{rank} P'$ olur. Ayrıca eğer $\operatorname{rank} P < \infty$ ise o zaman $\operatorname{rank} P < \operatorname{rank} P'$ elde edilir.

Rank kavramını asal olmayan idealler için şu şekilde genişletebiliriz: Bir A öz ideali için, A'nın rankı, P idealleri asal idealler olmak üzere

$$\operatorname{rank} A = \inf_{P \supseteq A} \operatorname{rank} P$$

eşitliği ile tanımlanır. Dikkat edilirse burada, P asal idealleri, A idealinin minimal asal idealleri olarak da alınabilir. Kolayca görülebilir ki A, B öz idealler ve $A \subseteq B$ ise o zaman $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B$ olur.

P, R'nin bir asal ideali ve $n \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer ilk terimi P olan ve kesin olarak artan $P \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ şeklinde bir asal ideal dizisi var ve bu dizi, daha fazla terim içeren başka bir asal ideal dizisine genişletilemez ise o zaman n sayısına P idealinin (Krull) boyutu denir ve bu durum $\dim P = n$ şeklinde yazılarak gösterilir. Eğer her $n \geq 0$ için $P \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ gibi en az bir asal ideal dizisi var ise o zaman P ideali sonsuz boyutludur denir ve $\dim P = \infty$ yazılır. Dolayısıyla boyut kavramı her P asal ideali için tanımlıdır.

Tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edebilir:

1. P asal ideali için $\dim P = 0$ ancak ve ancak P ideali maksimaldir.

2. Eğer $P \subsetneqq P'$ asal idealler ise o zaman $\dim P \geq \dim P'$ olur. Ayrıca eğer $\dim P' < \infty$ ise o zaman $\dim P > \dim P'$ elde edilir.

Boyut kavramını asal olmayan idealler için şu şekilde genişletebiliriz: Bir A öz ideali için, A'nın (Krull) boyutu, P idealleri asal idealler olmak üzere

$$\dim A = \sup_{P \supseteq A} \dim P$$

eşitliği ile tanımlanır. Dikkat edilirse burada P asal idealleri A idealinin minimal asal idealleri olarak da alınabilir.

R halkasının boyutu, sıfır idealinin boyutu olarak tanımlanır ve $\dim R$ ile gösterilir.

E sıfırdan farklı bir R–modül olsun. O zaman E modülünün boyutu ile aslında $R/\operatorname{Ann}_R E$ halkasının boyutu kastedilir ve $\dim E$ ile gösterilir. Dolayısıyla eğer R bir Noether halka ise P idealleri $\operatorname{Ann}_R E$ idealinin minimal asal idealleri olmak üzere $\dim E = \max_P(\dim P)$ yazılabilir.

1.2 Transandantlık Derecesi

E/F bir cisim genişlemesi ve $S \subseteq E$ olsun.

$\upsilon : S \longrightarrow \mathbb{N}$ sonlu desteğe sahip bir fonksiyon (yani sonlu tanesi hariç her $s \in S$ için $\upsilon(s) = 0$) olsun.

$$M_{(\upsilon)}(S) := \prod_{x \in S} x^{\upsilon(x)}$$

gösterimini tanımlayalım. $M_{(\upsilon)}(S)$ ifadesine S üzerinde bir *monom* denir. S'den $\mathbb{N}$'ye sonlu desteğe sahip bütün fonksiyonların kümesini $\mathbb{N}^{(S)}$ şeklinde gösterelim. Eğer her υ için $a_{(\upsilon)} \in F$ ve sonlu tanesi hariç her υ için $a_{(\upsilon)} = 0$ olmak üzere

$$\sum_{\upsilon \in \mathbb{N}^{(S)}} a_{(\upsilon)} M_{(\upsilon)}(S) = 0$$

sonlu toplamı şeklindeki bir eşitlik ancak her υ için $a_{(\upsilon)} = 0$ olması ile mümkün oluyorsa o zaman S kümesine F üzerinde *cebirsel bağımsızdır* denir. E'nin F üzerinde cebirsel bağımsız alt kümelerini, kapsama bağıntısına göre sıralarsak, Zorn lemmasının basit bir uygulaması ile maksimal cebirsel bağımsız alt kümeler seçebileceğimizi görebiliriz. E'nin bu tür alt kümelerinin her birine E'nin F üzerindeki bir *transandantlık tabanı* denir. Kolayca görülebilir ki $S \subseteq E$, F üzerinde bir transandantlık tabanıdır ancak ve ancak E, $F(S)$ üzerinde cebirseldir.

Teorem 1.2.1. *E/F bir cisim genişlemesi ve $S \subseteq E$ olsun. Eğer S, E'nin F üzerindeki bir transandantlık tabanı ise o zaman E'nin F üzerindeki her transandantlık tabanı S ile eş güçlüdür.*

Tanım 1.2.2. E/F bir cisim genişlemesi olsun. E'nin F üzerindeki herhangi bir transandantlık tabanının kardinalitesine E'nin F üzerindeki *transandantlık derecesi* denir ve $tr.der_F E$ biçiminde gösterilir.

Tanımdan kolayca görülebilir ki E, F üzerinde cebirseldir ancak ve ancak $tr.der_F E = 0$ 'dır.

Tanım 1.2.3. $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi ve S bir tamlık bölgesi olsun. $Q(R)$ ve $Q(S)$, sırasıyla R ve S'nin kesirler cismi ise $tr.der_{Q(R)}Q(S)$, S'nin R üzerindeki transandantlık derecesi şeklinde ifade edilir ve bu derece $tr.der_R S$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.4. *[3, Theorem B.2.5] R bir Noether halka ve S, R'nin bir genişlemesi olsun. Kabul edelim ki S (dolayısıyla R) bir tamlık bölgesi olsun. $Q \in Spec(S)$ ve $P = Q \cap R$ olsun. O zaman*

$$rankQ + tr.der_{K(P)}K(Q) \leq rankP + tr.der_R S$$

olur. (Burada $K(P)$, R/P'nin, $K(Q)$ ise S/Q'nun kesirler cismidir.)

1.3 Kademeli Halkalar ve Kademeli Modüller

Tanım 1.3.1. Bir R halkasının alt gruplarının bir $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi

(i) $R = \bigoplus_n R_n$ ve

(ii) her n, m tamsayısı için $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$

özelliklerini sağlıyorsa R halkasına bir *$\mathbb{Z}$-kademeli halka* denir. Eğer her $n < 0$ tamsayısı için $R_n = 0$ ise R'ye özel olarak bir *negatif olmayan $\mathbb{Z}$-kademeli halka* denir.

Aslında kademeli halkalar daha genel bir biçimde, indeks kümesi $\mathbb{Z}$ yerine herhangi bir sıralı yarı-grup alınarak tanımlanabilmektedir. Ancak tez çalışmamızda ele alınan bütün kademeli halkalar $\mathbb{Z}$-kademeli halkalar olacağından kademeli halka kavramını daha genel bir düzlemde inceleme gereği duymayacağız. Bu nedenle tez çalışmamız boyunca, özellikle belirtilmese dahi, kademeli halka bahsi geçen her yerde kastedilen $\mathbb{Z}$-kademeli halkalar olacaktır.

Bir R halkası $R_0 = R$ ve $n \neq 0$ için $R_n = 0$ alınarak bir kademeli halka şeklinde düşünülebilir, bu halkaya *aşikar kademeli halka* denir.

Tanım 1.3.2. R bir kademeli halka olmak üzere sıfırdan farklı bir $x \in R_n$ elemanına R'nin n *dereceli homojen elemanı denir. Eğer* $x \neq 0$ *ve* $x = \sum x_n$, homojen elemanların tek türlü belirli sonlu toplamı şeklindeki yazımı ise sıfırdan farklı x_n elemanlarına x'in n dereceli *homojen bileşeni* denir.

n dereceli bir homojen elemanla m dereceli bir homojen elemanı çarparsak $n+m$ dereceli bir homojen eleman elde ederiz.

Açıklama 1.3.3. $R = \bigoplus R_n$ bir kademeli halka ise R_0, R'nin bir alt halkasıdır. (dolayısıyla $1 \in R_0$'dır.) ve her n tamsayısı için R_n bir R_0-modüldür.

$R = \bigoplus R_n$ bir kademeli halka ve E bir R-modül olsun. E'nin elemanları R üzerinde toplamaya göre bir grup oluşturur ki bu grubu E'nin toplamsal grubu ile isimlendiririz. Şimdi buradan faydalanarak kademeli R-modül tanımını verelim.

Tanım 1.3.4. $R = \bigoplus R_n$ bir kademeli halka ve E bir R-modül olsun. E'nin toplamsal grubunun alt gruplarının bir $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi

1. $E = \bigoplus E_n$ ve

2. her n, m tamsayısı için $R_n.\,E_m \subseteq E_{m+n}$

özelliklerini sağlıyorsa E'ye bir *kademeli R-modül* denir.

Önerme 1.3.5. *[7, Proposition 28] $R = \bigoplus R_n$ bir kademeli halka, E bir kademeli R-modül ve K da E'nin bir alt modülü olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:*

(i) $K = \sum_n (E_n \cap K)$.

(ii) Eğer $x \in K$ ise x'in homojen bileşenleri de K'nın elemanıdır.

(iii) K bir R-modül olarak homojen elemanlar tarafından üretilebilir.

E'nin Önerme 1.3.5'deki (i)-(iii) özelliklerini sağlayan K alt modülüne bir *homojen alt modül* denir. Buradan yola çıkarak, R'yi kendi üzerinde bir kademeli R-modül olarak düşünürsek, *homojen ideal* tanımını elde ederiz.

Tanım 1.3.6. A ideali R kademeli halkasının homojen elemanları tarafından üretiliyorsa A' ya R'nin bir *homojen ideali* denir.

Önerme 1.3.7. *R bir kademeli halka ve $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ R'nin homojen ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman $\sum_j I_j$ ve $\bigcap_j I_j$ idealleri de homojen olur.*

Lemma 1.3.8. *[4, Lemma 4.1] R bir kademeli halka ve M bir Noether (Artin) kademeli R-modül olsun. O zaman her n için M_n de bir Noether (Artin) R_0-modüldür.*

Teorem 1.3.9. *[4, Theorem 4.1] Bir R kademeli halkasının Noether olması için gerekli ve yeterli koşul R_0'ın Noether ve R'nin R_0 üzerinde cebir olarak sonlu üretilmiş olmasıdır.*

Lemma 1.3.10. *[4, Lemma 4.2] R bir kademeli halka ve M bir kademeli R-modül olsun. O zaman M bir basit R-modüldür ancak ve ancak M bir basit R_0-modüldür.*

M bir R-modül olsun. M'nin alt modüllerinin

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_n = 0 \tag{1.3.1}$$

şeklinde, M'de başlayıp 0'da biten ve kesin olarak azalan bir dizisi verilsin. Eğer her $i = 1, \ldots, n$ için M_{i-1}/M_i bir basit R-modül ise (1.3.1) dizisine M'nin bir *kompozisyon serisi* denir. M_{i-1}/M_i bölümlerine ise kompozisyon serisinin *kompozisyon faktörleri* denir. Her modül bir kompozisyon serisine sahip olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$'nin bir kompozisyon serisi yoktur çünkü $\mathbb{Z}$'nin basit alt modülü yoktur. Aslında bir M modülünün kompozisyon serisine sahip olması için gerek ve yeter koşul M'nin hem Noether hem de Artin modül olmasıdır (bkz. [1, Proposition 11.1]). Bir kompozisyon serisine sahip olan bir M modülü için "sonlu uzunluğa sahiptir" diyeceğiz. Literatürde Jordan-Hölder Teoremi olarak bilinen sonuç, M'nin herhangi iki kompozisyon serisinin aynı uzunlukta olması gerektiğini söylemektedir. Bu uzunluğa M'nin uzunluğu diyeceğiz ve onu $\lambda(M)$ ile göstereceğiz. Eğer M bir kompozisyon serisine sahip değilse o zaman M'nin uzunluğunu sonsuz olarak tanımlayacak ve $\lambda(M) = \infty$ şeklinde yazacağız. Uzunluk kavramının sağladığı önemli özelliklerden biri de şu şekildedir: Eğer

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

R-modüllerin bir kısa tam dizisi ise o zaman $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$ olur. Bunun bir sonucu olarak da şu sonucu verebiliriz: M bir R-modül ve $K \subseteq N$ olacak şekilde K, N M'nin alt modülleri olsun. O zaman

$$\lambda(M/K) = \lambda(M/N) + \lambda(N/K).$$

Lemma 1.3.11. *[4, Corollary 4.1] M bir kademeli R-modül ve $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ M'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman M sonlu uzunluğa sahiptir ancak ve ancak yeterince büyük bütün n'ler için $\lambda(M_n) = 0$ dır.*

Önerme 1.3.12. *[7, Proposition 33, §2.13], [4, Lemma 5.2] R bir kademeli halka ve P R'nin bir asal ideali olsun. P^* ile P'deki homojen elemanların ürettiği homojen asal ideali gösterelim. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:*

(i) P^*, R'nin bir homojen asal idealidir.

(ii) P, R'nin bir minimal asal ideali ise o zaman P homojendir.

(iii) Eğer P homojen değilse P ile P^* arasında öz olarak kapsanan bir asal ideal yoktur.

P, R halkasının bir asal ideali olsun. Bu durumda $S = R \setminus P$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. R'nin S çarpımsal kapalı alt kümesine göre kesirler halkasını R_P ile göstereceğiz. Buna göre R_P tek maksimal ideali PR_P olan bir yarı-yerel halkadır. Eğer R Noether ise R_P de Noether olacağından bu durumda R_P bir yerel halka olur. Diğer taraftan bir R-modül M verildiğinde M'nin S ye göre kesirler modülünü tanımlayabiliriz. Bu modülü de M_P şeklinde göstereceğiz. Dikkat edilirse M_P bir R_P-modüldür.

Sonuç 1.3.13. *[4, Corollary 5.1] R bir kademeli halka ve M de sonlu üretilmiş bir kademeli R-modül olsun. P, R'nin bir asal ideali olmak üzere kabul edelim ki $M_P \neq 0$ ve P homojen olmasın. O zaman* $\dim M_P = \dim M_{P^*} + 1$

Sonuç 1.3.14. *[4, Corollary 5.2] R bir negatif olmayan $\mathbb{Z}$-kademeli halka olsun. O zaman* $\dim R =$*maks*$\{rank(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m}$ *bir homojen maksimal ideal*$\}$

Lemma 1.3.15. *[4, Proposition 5.2] R bir kademeli halka, I, R'nin pozitif dereceli homojen elemanlarının ürettiği homojen ideal ve $P_1, P_2, \ldots, P_n$ R'nin I'yı içermeyen asal idealleri olsun. O zaman öyle bir $x \in I$ vardır ki her i için $x \notin P_i$'dir.*

Lemma 1.3.16. *[4, Lemma 5.3] $R/\mathfrak{m}$ sonsuz olmak üzere $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka, M bir R-modül ve $N_1, N_2, \ldots, N_s$ de M'nin alt modülleri olsun. Q alt modülünü $\forall i = 1, \ldots, s$ için N_i'lerin hiç birinde kapsanmayacak şekilde alalım. O zaman öyle bir $x \in Q$ vardır ki her $i(1 \leq i \leq s)$ için $x \notin N_i$'dir.*

Sonuç 1.3.17. *[4, Corollary 5.3] R bir kademeli halka, $(R_0, \mathfrak{m})$ bir yerel halka ve $R_0/\mathfrak{m}$ sonsuz olsun. I'yı R 'nin aynı s dereceli homojen elemanlarıyla üretilen bir ideali ve $J_1, J_{2,\ldots}, J_n$'leri de R'nin I'yı kapsamayan idealleri olarak alalım. O zaman I'nın en az bir homojen x elemanı vardır öyle ki $der(x) = s$ ve her $i(1 \leq i \leq n)$ için $x \notin J_i$'dir.*

Sonuç 1.3.18. *[4, Corollary 5.4] R bir negatif olmayan Noether $\mathbb{Z}$-kademeli halka, R_0 Artin yerel halka ve $\mathfrak{m}$, R'nin $\dim R = rank(\mathfrak{m}) = d$ olacak şekilde bir homojen maksimal ideali olsun. O zaman $\mathfrak{m} = \operatorname{Rad}(w_1, \ldots, w_d)$ olacak şekilde homojen $w_1, \ldots, w_d \in R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ elemanları vardır. Ek olarak $R = R_0[R_1]$ ve R_0 'ın rezidü cismi sonsuz ise $w_1, \ldots, w_d \in R_1$ seçebiliriz.*

Çeşitli Özel Kademeli Halkalar

R bir değişmeli halka ve I R'de bir ideal olsun. *I ile ilişkili kademeli halka* adını verdiğimiz $gr_I(R)$ halkası şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$gr_I(R) = R/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots .$$

$gr_I(R)$ halkası bir negatif olmayan $\mathbb{Z}$-kademeli halkadır. Eğer R bir Noether halka ise $gr_I(R)$ halkası da Noether olur. Ayrıca $I = (a_1, \ldots, a_t)$ ve her $i = 1, \ldots, t$ için $\overline{a}_i$, a_i elemanın I/I^2 içindeki doğal görüntüsü ise

$$gr_I(R) = (R/I)\left[\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_t\right]$$

yazılabilir. Yani $gr_I(R)$ halkası, 1. dereceden homojen elemanlar tarafından üretilen bir (R/I)-cebiri olur.

R herhangi bir değişmeli halka ve t, R üzerinde bir değişken olsun. I, R'nin bir ideali ise I'nın Rees cebiri, $R\,[t]$'nin

$$\begin{aligned} R[It] &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i : n \in \mathbb{N},\, a_i \in I^i,\, i = 0, 1, \ldots, n \right\} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan alt halkasıdır. Dikkat edilirse $R\,[It]$, $R\,[t]$ polinom halkasının bir kademeli alt halkasıdır ve Önerme 1.3.5'den dolayı $IR[It]$ ideali de $R[It]$'nin bir homojen idealidir. Buna göre $R[It]/IR[It]$ halkası bir kademeli halkadır. Aslında $R[It]/IR[It]$ kademeli halkası, $gr_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ kademeli halkasına izomorftur.

J, R'nin bir ideali ise $J \subseteq JR\,[It] \cap R \subseteq JR\,[t] \cap R = J$ olacağından $JR\,[It] \cap R = J$ bulunur. Ayrıca

$$R/J \hookrightarrow \frac{R\,[It]}{JR\,[t] \cap R\,[It]} \hookrightarrow \frac{R\,[t]}{JR\,[t]}$$

ve

$$\frac{R\,[It]}{JR\,[t] \cap R\,[It]} \cong \frac{R}{J}\left[\frac{I+J}{J}t\right]$$

olur.

$Q \in \mathrm{Min}(R\,[It])$ olsun. $R\,[It]$ bir kademeli halka olduğundan Q, $R\,[It]$'nin bir homojen idealidir. Buna göre $Q = \bigoplus_{n\geq 0}(Q \cap I^n)t^n$ yazılabilir. $Q \cap R \in \mathrm{Spec}(R)$ olduğundan $P \subseteq Q \cap R$ olacak şekilde $P \in \mathrm{Min}(R)$ vardır. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $P \cap I^n \subseteq Q \cap I^n$ olacağından $PR\,[t] \cap R\,[It] \subseteq Q$ bulunur. Q'nun minimal oluşundan $Q = PR\,[t] \cap R\,[It]$ ve $P = Q \cap R$ elde edilir. Dolayısıyla $R\,[It]$'nin minimal asal ideallerinin kümesi

$$\{PR\,[t] \cap R\,[It] : P \in \mathrm{Min}(R)\}$$

şeklindedir. Böylece

$$\dim R\,[It] = \sup\left\{ \dim\left(\frac{R}{P}\left[\frac{I+P}{P}t\right]\right) : P \in \mathrm{Min}(R) \right\}$$

yazılabilir. Buna göre eğer I, R'nin bütün minimal asal ideallerinin içindeyse $\dim R\,[It] = \dim R$ olur. Şimdi kabul edelim ki bir $P \in \mathrm{Min}(R)$ için $I \nsubseteq P$ ve $\dim R/P = \dim R$ olsun. (Buradan itibaren, alt bölümün sonuna kadar R'yi Noether kabul edeceğiz.)

$$\dim\left(\frac{R}{P}\left[\frac{I+P}{P}t\right]\right) = \dim R + 1$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için genelliği bozmadan R'yi bir tamlık bölgesi ve $I \neq 0$ alabiliriz. Bu durumda $\dim R\,[It] = \dim R + 1$ eşitliğini elde etmek istiyoruz. R'nin kesirler cismi k olsun. Buna göre $R\,[It]$'nin kesirler cismi $k(t)$ cismidir. Dolayısıyla, Teorem 1.2.4'den dolayı, $R\,[It]$'nin her Q asal ideali için

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} Q &\leq \operatorname{rank}(Q \cap R) + tr.der_R R[It]\\ &= \operatorname{rank}(Q \cap R) + tr.der_k k(t)\\ &= \operatorname{rank}(Q \cap R) + 1\end{aligned}$$

olur. Böylece $\dim R\,[It] \leq \dim R + 1$ bulunur. Şimdi $P_0 = ItR\,[It]$ olsun. Açıktır ki $P_0 \in \mathrm{Spec}(R\,[It])$ ve $P_0 \cap R = 0$'dır. ($It \subseteq P_0, rankP_0 > 0$ ve $R[It]/P_0 \cong R$.) Buna göre $\dim R\,[It] \geq \dim R + 1$ olur. Böylece R Noether ise

$$\dim R[It] = \begin{cases} \dim R + 1, & I \nsubseteq P \text{ ve } \dim R/P = \dim R \text{ olacak şekilde } P \in \mathrm{Min}(R) \text{ var} \\ \dim R, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğu gösterilmiş olur. Özel olarak

$$\dim\left(\frac{R\,[It]}{IR\,[It]}\right) \leq \dim R + 1$$

olduğu görülür. Şimdi eşitliğin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $IR\,[It] \subseteq Q$ ve $\dim\,(R[It]/Q) = \dim R + 1$ olacak şekilde $Q \in \mathrm{Min}(R\,[It])$ vardır. $Q \cap R = P$ olsun. O zaman $P \in \mathrm{Min}(R)$'dir. Q homojen olduğundan

$$Q = \bigoplus_{n\geq 0}(Q \cap I^n)t^n = \bigoplus_{n\geq 0}(P \cap I^n)t^n = PR\,[t] \cap R\,[It]$$

olur. $IR\,[It] = \bigoplus_{n\geq 0} I^{n+1}t^n \subseteq Q$ olduğundan $I \subseteq P$ elde edilir. Fakat bu durumda

$$\frac{R\,[It]}{Q} \cong \frac{R}{P}\left[\frac{P+I}{P}t\right] = \frac{R}{P}$$

olacağından $\dim\,(R[It]/Q) \leq \dim R$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla

$\dim(gr(R)) = \dim\left(\dfrac{R[It]}{IR[It]}\right) \leq \dim R$ bulunur.

Şimdi $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka ve I, R'nin bir ideali olsun. $\mathfrak{m}$'nin elemanları $R[It]$ halkasında homojen olduğundan Önerme 1.3.5 gereğince $\mathfrak{m}R[It]$, $R[It]$'nin bir homojen ideali olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{F}_I(R) = R[It]/\mathfrak{m}R[It]$$

bölüm halkası bir kademeli halka olur. $\mathcal{F}_I(R)$ kademeli halkasına I'nın *fiber konisi* adı verilir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I(R) &\cong \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{m}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2} \oplus \frac{I^3}{\mathfrak{m}I^3} \oplus \cdots \\ &\cong gr_I(R)/\mathfrak{m}.gr_I(R)\end{aligned}$$

izomorfizmaları vardır.

1.4 Noether Halkalar

Önerme 1.4.1. *R bir Artin (Noether) halka ve M bir sonlu üretilmiş R-modül ise M de bir Artin (Noether) R-modüldür.*

M aşikar olmayan bir R-modül olsun. Kabul edelim ki S, M'nin bir üreteç kümesi olsun. Yani M'nin her elemanı S'nin elemanlarının R-üzerindeki bir doğrusal birleşimi olarak yazılabiliyor olsun. Eğer M, S'nin hiçbir öz alt kümesi tarafından üretilemiyorsa o zaman S kümesine M'nin bir minimal üreteç kümesi denir. Her modülün bir minimal üreteç kümesi vardır çünkü her üreteç kümesi bir minimal üreteç kümesi içerir. Eğer M sonlu üretilmiş bir modül ise sonlu bir minimal üreteç kümesine de sahip olacaktır. Eğer R bir cisim ise M bir vektör uzayı olur ve bu durumda M'nin minimal üreteç kümeleri R-üzerindeki tabanlarından başkası değildir. Buna göre vektör uzaylarında minimal üreteç kümelerinin kardinaliteleri aynıdır. Fakat R cisim değilse bu durum herhangi bir R-modül için doğru olmak zorunda değildir. Örneğin $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ alınırsa $\{\overline{1}\}$ ve $\{\overline{2}, \overline{3}\}$ kümeleri M'nin birer minimal üreteç kümesi olmasına rağmen aynı sayıda elemana sahip değildir. Aşağıdaki teorem, vektör uzaylarının minimal üreteç kümeleri için sahip olduğu değişmezlik özelliğinin yerel halkalar üzerindeki sonlu üretilmiş modüller tarafından da paylaşıldığını göstermesi açısından önemli bir sonuçtur.

Teorem 1.4.2. *[10, Proposition 9.3] $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka ve G bir sonlu üretilmiş R-modül olsun. O zaman $\{g_1, \ldots, g_m\}$, G'nin bir minimal üreteç kümesidir ancak ve ancak $\{g_1 + \mathfrak{m}G, \ldots, g_m + \mathfrak{m}G\}$ kümesi $G/\mathfrak{m}G$ uzayının bir bazıdır.*

Tanım 1.4.3. R bir yarı-yerel halka ve $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s$ 'ler de R 'nin tüm maksimal idealleri olsun. R'nin bir B idealini alalım. Eğer bir $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s)^k \subseteq B \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s$$

sağlanıyorsa B 'ye R'nin *tanım ideali* denir.

Kolayca görülebilir ki B'nin tanım ideali olması aşağıdakilerle denktir:
(i) $\operatorname{Rad} B = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s$.
(ii) B 'nin minimal asal idealleri $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s$ 'dir.

Teorem 1.4.4. *[7, Theorem 23, §4.9] R bir yarı-yerel halka ve* $\dim R = d$ $(d \geq 0)$ *olsun. O zaman R' de R'nin bir tanım idealini üreten d tane eleman bulabiliriz. Ayrıca tanım idealleri en az d tane elemanla üretilir.*

Tanım 1.4.5. R bir yarı-yerel halka ve $\dim R = d$ olsun. R 'nin bir tanım idealini üreten d tane elemandan oluşan kümeye R'nin bir *parametreler sistemi* denir.

Not 1.4.6. Teorem 1.4.4'den dolayı R yarı-yerel halkasında parametreler sistemi her zaman bulunabilir.

Açıklama 1.4.7. $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka ve $\dim R = d$ ise R'nin bir parametreler sistemi, $\mathfrak{m}$-asıl ideal üreten d elemanlı bir kümedir.

Lemma 1.4.8. *[10, Lemma 8.21] R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Eğer* $\operatorname{Rad} I$, *R'nin bir sonlu üretilmiş ideali ise o zaman uygun bir m tamsayısı için* $(\operatorname{Rad} I)^m \subseteq$ *I'dır.*

Teorem 1.4.9. *R bir Noether halka ve I, R'nin $n(n \geq 0)$ tane elemanla üretilen bir öz ideali olsun. Eğer P, A'nın bir minimal asal ideali ise o zaman* $\operatorname{rank} P \leq n$ *'dir.*

1.5 İntegral Olma

Teorem 1.5.1. *[10, Proposition 13.20] $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi ve $u \in S$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(i) u, $R[X]$'deki bir monik polinomun köküdür.

(ii) S'nin $R[u] = \{\sum_{i=0}^{n} r_i u^i : n \in \mathbb{N},\ r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}\}$ *alt halkası bir sonlu üretilmiş R-modüldür.*

(iii) $R[u]$ üzerinde öyle bir faithful modül vardır ki bu modül R üzerinde sonlu üretilmiştir.

Tanım 1.5.2. $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi ve $u \in S$ olsun. Eğer u yukarıdaki teoremin denk koşullarını sağlıyorsa u'ya *R üzerinde integraldir* denir.

Teorem 1.5.3. *[10, 13.22] $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi olsun. S'nin R üzerindeki integral olan bütün elemanlarının kümesi S'nin R'yi içeren bir alt halkasıdır.*

Tanım 1.5.4. $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi olsun. S'nin R üzerinde integral olan bütün elemanlarından oluşan alt halkasına R'nin S içindeki *integral kapanışı* denir. R'nin integral kapanışını genellikle $\overline{R}$ ile göstereceğiz. Eğer $R = \overline{R}$ ise R'ye S içinde *integral kapalıdır* denir. Eğer $S = \overline{R}$ ise S'ye R'nin bir *integral genişlemesi* denir.

Teorem 1.5.5. *[10, 13.23] $R \subseteq S \subseteq T$ olmak üzere R, S'nin, S de T'nin bir alt halkası olsun. Eğer R, S içinde; S de T içinde integral kapalı ise o zaman R, T içinde integral kapalıdır.*

Teorem 1.5.6. *[10, 13.24] $R \subseteq S$ değişmeli halkaların bir genişlemesi olsun. Buna göre R'nin S içindeki integral kapanışı $\overline{R}$, S içinde integral kapalıdır.*

Teorem 1.5.7. *[3, Theorem 2.3.2] $R \subseteq S$ $\mathbb{Z}$-kademeli halkaların bir genişlemesi olsun. O zaman R'nin S içindeki integral kapanışı da $\mathbb{Z}$-kademeli halkadır.*

1.6 Kesikli Değer Fonksiyonları ve Değer Halkaları

Tanım 1.6.1. K bir cisim, $K^\times = K \setminus \{0\}$ ve $v : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(i) v örten

(ii) her $x, y \in K^\times$ için $v(xy) = v(x) + v(y)$

(iii) her $x, y \in K^\times$ için $x + y \neq 0$ ise $v(x + y) \geq min\,\{v(x), v(y)\}$

koşulları sağlanıyorsa v'ye K üzerinde bir *kesikli değer fonksiyonu* denir.

Eğer v, K cismi üzerinde bir kesikli değer fonksiyonu ise $\{x \in K^\times : v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ kümesi K'nın bir alt halkasıdır. Bu alt halkaya v'nin bir *değer halkası* adı verilir.

R bir tamlık bölgesi ve K, R'nin kesirler cismi olsun. Eğer K üzerindeki uygun bir v kesikli değer fonksiyonu için R, v'nin değer halkasına eşitse o zaman R'ye bir *kesikli değer halkası* denir.

Teorem 1.6.2. *[2, Theorem 16.2.7] R bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdakiler denktir.*

(i) R bir kesikli değer halkasıdır.

(ii) R bir yerel temel ideal bölgesidir.

(iii) R, Krull boyutu 1 olan integral kapalı bir yerel tamlık bölgesidir.

Sonuç 1.6.3. *R bir Noether integral kapalı tamlık bölgesi ve P, R'nin rankı 1 olan bir asal ideali ise R_P bir kesikli değer halkasıdır.*

Tanım 1.6.4. R cisim olmayan bir tamlık bölgesi ve K R'nin kesirler cismi olsun. Eğer,

(i) V_α, υ_α'nın değer halkası olmak üzere $R = \bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha$ olacak şekilde K üzerindeki kesikli değer fonksiyonlarının bir $\{\upsilon_\alpha : \alpha \in I\}$ kümesi var ve

(ii) her $a \in K^\times$ için yalnızca sonlu tane $\alpha \in I$ için $\upsilon_\alpha(a) \neq 0$

koşulları sağlanıyorsa R'ye bir *Krull bölgesi* denir.

Eğer R bir Krull bölgesi ise R'nin rankı 1 olan her P asal ideali için R_P bir kesikli değer halkasıdır ve

$$R = \bigcap \{R_P : P \in Spec(R) \text{ ve rank } P = 1\}$$

olur.

Teorem 1.6.5 (Mori-Nagata Teoremi)**.** *[6, Teorem 33.10] R bir Noether tamlık bölgesi, K, R'nin kesirler cismi ve $\overline{R}$, R'nin K içindeki integral kapanışı olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:*

1. *$\overline{R}$ bir Krull bölgesidir.*
2. *$P \in Spec(R)$ ise $\mathcal{P} \cap R = P$ olacak şekilde $\overline{R}$'nin yalnızca sonlu tane $\mathcal{P}$ asal ideali vardır ve eğer $\mathcal{P}$ böyle bir asal ideal ise o zaman $\overline{R}/P$ 'nin kesirler cismi R/P'nin kesirler cisminin bir sonlu genişlemesidir.*

1.7 Simetrik Cebirler ve Harici Cebirler

R bir değişmeli halka ve M bir R-modül olsun. Her $k \geq 1$ tamsayısı için

$$\mathcal{T}^k(M) = M \otimes_R M \otimes_R \ldots \otimes_R M \text{ (k tane)}$$

ve $\mathcal{T}^0(M) = R$ olsun.

$$\mathcal{T}(M) = R \oplus \mathcal{T}^1(M) \oplus \mathcal{T}^2(M) \oplus \ldots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(M)$$

yazalım. $m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \in \mathcal{T}^i(M)$ ve $m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j \in \mathcal{T}^j(M)$ için

$$(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i)(m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) = m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemini, dağılma özelliğini sağlayacak şekilde $\mathcal{T}(M)$'ye genişletirsek $\mathcal{T}(M)$, homojen alt grupları $\mathcal{T}^i(M)$'ler olan bir kademeli halka olur. Bu halkaya M'nin *tensör cebiri* denir.

$\mathcal{C}(M)$, $\mathcal{T}(M)$ tensör cebirinin $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$ $(m_1, m_2 \in M)$ tipindeki elemanları ile üretilen idealini göstersin. $\mathcal{C}(M)$, $\mathcal{T}(M)$'nin homojen elemanları ile üretildiğinden bir homojen ideal olur. O halde $\mathcal{T}(M)/\mathcal{C}(M)$ bölüm halkası da bir kademeli halkadır. Bu kademeli halkaya *"M'nin simetrik cebiri"* diyeceğiz ve onu $Sym(M)$ ile göstereceğiz. $\mathcal{C}^k(M) = \mathcal{T}^k(M) \cap \mathcal{C}(M)$ denirse $Sym^k(M) = \mathcal{T}^k(M)/\mathcal{C}^k(M)$ olur. $\mathcal{C}(M)$, $k \geq 2$ olmak üzere $k-$tensörleri içerdiğinden $\mathcal{C}(M) \cap M = 0$'dır. Dolayısıyla $Sym^1(M) = M$ olur. Benzer şekilde $Sym^0(M) = R$ 'dir. $Sym^k(M)$ $R-$modülüne M'nin $k-$yıncı simetrik kuvveti denir. M'nin $k-$yıncı simetrik kuvveti $Sym^k(M)$ $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k - m_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma(k)}$, $m_i \in M, \sigma \in S_k$ tipindeki elemanlar ile üretilir. Böylece her $m_1, \ldots, m_k \in M$ ve $\sigma \in S_k$ için

$$m_1 \otimes \ldots \otimes m_k + \mathcal{C}(M) = m_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma(k)} + \mathcal{C}(M)$$

olur.

Teorem 1.7.1. *V bir F cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı olsun. O zaman $Sym(M)$, kademeli bir halka olarak F üzerindeki n değişkenli bir polinom halkasına izomorftur. Aslında $Sym^k(M)$, $F[X_1, \ldots, X_n]$'in k dereceli homojen polinomlarının uzayına izomorftur ve $\dim_F Sym^k(M) = \binom{k+n-1}{n-1}$.*

$\mathcal{A}(M)$, $\mathcal{T}(M)$ tensör cebirinin $m \otimes m$ $(m \in M)$ tipindeki elemanları ile üretilen ideali olsun. Buna göre $\mathcal{A}(M)$, $\mathcal{T}(M)$'nin bir homojen idealidir ve $\mathcal{T}(M)/\mathcal{A}(M)$ bölüm halkası bir kademeli halkadır. Bu kademeli bölüm halkasına *M'nin harici cebiri* denir ve $E(M)$ ile gösterilir. Dikkat edilirse burada $E^0(M) = R$ ve $E^1(M) = M$ 'dir. Ayrıca $\mathcal{A}^k(M) = \mathcal{T}^k(M) \cap \mathcal{A}(M)$ denirse $\mathcal{A}^k(M)$, en az bir $i \neq j$ çifti için $m_i = m_j$ olmak üzere $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ elemanları ile üretilir.

Teorem 1.7.2. *V bir F cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ V'nin bir bazı olsun. Buna göre $k \leq n$ ise $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} + \mathcal{A}(M)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ elemanları $E^k(V)$'nin bir tabanını oluşturur. Öte yandan her $k > n$ için $E^k(V) = 0$'dır. Özel olarak $dim_F E^k(V) = \binom{n}{k}$ olur.*

Şimdi R bir Noether tamlık bölgesi ve M sonlu üretilmiş burulmasız bir $R-$modül olsun. K, R'nin kesirler cismi, $V = K \otimes_R M$ olsun.

$$\varphi : Sym_R M \longrightarrow Sym_K V$$

$$\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k + \mathcal{C}(M)) = m_1 \otimes \ldots \otimes m_k + \mathcal{C}(V)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır ve bir halka homomorfizmasıdır. $S(M)$ ile φ'nin $Sym_K V$ içindeki görüntüsünü kastedeceğiz. φ aynı zamanda bir kademeli halka homomorfizması olduğundan $S(M)$ de bir kademeli halkadır. Kolayca görülebilir ki $S^0(M) = R$, $S^1(M) = M$ ve $r \geq 2$ için $S^r(M) = Sym^r(M)/t(Sym^r(M))$ 'dir. Burada $t(Sym^r(M))$, $Sym^r(M)$'nin burulmalı alt modülüdür; yani

$$t(Sym^r(M)) = \{x \in Sym^r(M) : rx = 0 \text{ olacak şekilde } r \in R \setminus \{0\} \text{ var.}\}$$

alt modülüdür. Öte yandan L, M'yi içeren bir sonlu üretilmiş burulmasız $R-$modül ise $S(M)$ de $S(L)$ 'nin bir kademeli alt halkasıdır.

Bölüm 2

Hilbert Fonksiyonları ve Çokkatlılık

2.1 $\mathbb{Q}$ Rasyonel Sayılar Cismi Üzerinde Polinomlar

Lemma 2.1.1. *K, $\mathbb{Q}$'nun bir cisim genişlemesi olsun. O zaman t bir değişken olmak üzere*

$$\mathscr{A} = \left\{ \binom{t+i}{i} : i \geq 0 \right\}$$

kümesi, K'nın $K[t]$ polinom halkası üzerindeki bir K-tabanı olur.

Kanıt. n üzerinde tümevarım kullanarak $t^n \in \mathscr{A}$ olduğunu gösterelim.

$n = 0$ için $t^0 = 1 = \binom{t+0}{0} \in \mathscr{A}$ sağlanır.

$n = 1$ için $t^1 = t = t + 1 - 1 = \binom{t+1}{1} - \binom{t+0}{0} \in \mathscr{A}$ olduğundan bu durum da sağlanır.

Şimdi $n > 0$ alalım ve $i < n$ için $t^i \in \mathscr{A}$ olduğunu kabul edelim. $t^n \in \mathscr{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\binom{t+n}{n} &= \frac{(t+n)(t+n-1)(t+n-2)\dots(t+1)}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}(t^n + q_1 t^{n-1} + \dots q_n), \quad q_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} i_i \dots i_k
\end{aligned}$$

olacağından

$$n! \binom{t+n}{n} = t^n + (q_1 t^{n-1} + \dots q_n),$$

ve bu sayede

$$t^n = n!\binom{t+n}{n} - (q_1 t^{n-1} + \ldots q_n) \in \mathscr{A}$$

elde edilir. Böylece t^n elemanının $\mathscr{A}$ kümesinde olduğunu söyleriz. Buradan da $\mathscr{A}$ kümesi $K[t]$'nin bir tabanı olur. $\square$

Yukarıdaki lemmanın ifadesinden

$$\binom{t+i}{i} = \frac{(t+i)(t+i-1)(t+i-2)\ldots(t+1)}{i!} \in Q[t]$$

olduğu görülür. Böylece $\binom{t+i}{i}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerinde t'ye bağlı bir polinom ifade ettiğini söyleyebiliriz ki bu polinomun derecesi de i'dir. Örneğin

$$P(t) = \binom{t+2}{2} = \frac{(t+2)(t+1)}{2!} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$$

ve *der* $[P(t)] = 2$ dir.

Not 2.1.2. $\binom{t}{0} = \binom{t}{t} = 1$'dir.

Lemma 2.1.3. *$P(t) \in Q[t]$ polinomunu alalım ve der $[P(t)]=d \geq 0$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*

(i) Yeterince büyük n'ler için $P(n) \in \mathbb{N}$'dir.

(ii) $a_d > 0$ ve $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{t+i}{i}$ olacak şekilde tek türlü belirli $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tamsayıları vardır.

(i) şıkkında $P(n) \in \mathbb{Z}$ alınırsa $a_d > 0$ şartı kaldırılabilir.

Kanıt. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Lemma 2.1.1'den $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{t+i}{i}$, $a_d \neq 0$ olacak şekilde $a_i (0 \leq i \leq d)$ rasyonel sayıları vardır ve taban tanımından bu rasyonel sayılar tektir.

$\forall i \geq 0$ için

$$\binom{t-1+i}{i} + \binom{t+i-1}{i-1} = \binom{t+i}{i}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\binom{t-1+i}{i} + \binom{t+i-1}{i-1} &= \frac{(t-1+i)(t-1+i-1)\ldots(t)}{i!} + \frac{(t+i-1)(t+i-2)\ldots(t+1)}{(i-1)!} \\
&= \frac{(t+i-1)(t+i-2)\ldots(t+1)}{(i-1)!} \cdot \left(\frac{t}{i} + 1\right) \\
&= \frac{(t+i-1)(t+i-2)\ldots(t+1)}{(i-1)!} \cdot \left(\frac{t+i}{i}\right) = \binom{t+i}{i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
P\left(t\right)-P\left(t-1\right) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{t+i}{i} - \sum_{i=0}^{d} \binom{t-1+i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i \left[\binom{t+i}{i} - \binom{t-1+i}{i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i \binom{t+i-1}{i-1} \quad = \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} \binom{t+i}{i} = P_1(t)
\end{aligned}
$$

$P_1(t) = P(t) - P(t-1) \in \mathbb{Q}\,[t]$olur. (i)'den yeterince büyük n'ler için $P_1(n) \in \mathbb{N}$'dir. d üzerinde tümevarımla $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ gösterelim. $d = 0$ ise $P(t) - P(t-1)$ sabit polinom olur. $a_0 = P(t) - \sum_{i=1}^{d} a_i \binom{t+i}{i}$, $N \in \mathbb{N}$ için $P(N) \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$
a_0 = P(N) - \sum_{i=1}^{d} a_i \binom{N+i}{i} \in \mathbb{Z}
$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\forall n \in N$ için $\binom{n+i}{i} \in \mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz.

$P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{n+i}{i}$, $a_d > 0$ olduğundan (analizden) n'yi yeterince büyük seçersek $P(n) \in \mathbb{N}$ elde ederiz. □

Lemma 2.1.4. *Keyfi $j, n \geq 0$ tamsayıları için*

$$
\sum_{i=0}^{n} \binom{i+j}{j} = \binom{n+j+1}{j+1}
$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Analizden $\dfrac{1}{(1-x)^s}$ fonksiyonunun bir kuvvet serisi açılımına sahip olduğunu biliyoruz.

$$
\frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{s-1} x^k, (-1 < x < 1.)
$$

buradan

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1-x)^{n+1}} &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \\
\frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1-x)^{n+1}} &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} - 1 \\
\frac{x}{1-x}(1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-x)^{n}}) &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} - 1
\end{aligned}
$$

ve buradan da

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+1}{1} x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2}{2} x^{j+1} + \cdots + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n}{n} x^{j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n+1}{n+1} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{j+n}{n} x^{j}$$

Son eşitlikte her iki taraftan x^{j+1}'in katsayısını değerlendirerek

$$\binom{j+0}{0} + \binom{j+1}{1} + \cdots + \binom{j+n}{n} = \binom{j+1+n}{n}$$

bulunur. $\binom{j+0}{0} = \binom{j+0}{j}$ olduğundan istenen elde edilir. □

Lemma 2.1.5. *R, $\mathbb{Q}$'da kapsanan bir tamlık bölgesi ve $Q(n)$ katsayıları R'den gelen $der\,[Q(n)] = d \geq 0$ olacak şekilde n'ye bağlı bir polinom olsun. Sabit bir j tamsayısı için $P(n) = \sum_{i=j}^{n} Q(i)$ alalım. O zaman $P(n)$ katsayıları R'den gelen n'ye bağlı bir polinomdur. Ayrıca $der\,[P(n)] = d+1$ ve $Q(n)$ polinomunun baş katsayısına c dersek $P(n)$'nin baş katsayısı $\dfrac{c}{d+1}$ olur.*

Kanıt. $P(n) = \sum_{i=0}^{n} Q(i) - \sum_{i=0}^{j-1} Q(i)$ ve $\sum_{i=0}^{j-1} Q(i)$ ifadesi n' ye bağlı olmadığından $P(n) = \sum_{i=0}^{n} Q(i)$ alabiliriz.

Lemma 2.1.1'dan $Q(n) = \sum_{j=0}^{d} a_i \binom{n+j}{j}$, $a_j \in \mathbb{R}$ olarak yazılabilir. Buradan Lemma 2.1.4'den

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{i+j}{j} = \sum_{j=0}^{d} a_j \sum_{i=0}^{n} \binom{i+j}{j} = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{n+j+1}{j+1}$$

yazabiliriz. Böylece $der\,[P(n)] = d+1$ ve ayrıca $Q(n)$'nin baş katsayısı $\dfrac{a_j}{d!} = c$, $P(n)$'nin baş katsayısı $\dfrac{a_j}{(d+1)!} = \dfrac{c}{d+1}$ elde edilir. □

2.2 Hilbert Fonksiyonu ve Poincaré Serisi

Tanım 2.2.1. R bir kademeli halka ve M bir kademeli R-modül olsun. Her n için $\lambda_{R_0}(M_n) < \infty$ olduğunu varsayalım. M'nin *Hilbert fonksiyonu her n tamsayısı için* $H_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$H_M(n) = \lambda_{R_0}(M_n)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Not. Eğer bir M kademeli R-modülü için $\lambda_{R_0}(M_n) < \infty$ $(\forall n)$ sağlanıyorsa M için "*Hilbert fonksiyonuna sahiptir*" denir.

Tanım 2.2.2. M bir kademeli R-modül olsun. Eğer her $n \leq k$ için $M_n = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa M'ye *alttan sınırlı* denir.

Lemma 2.2.3. *Yeterince büyük n tamsayıları için $R_n = 0$ ise o zaman bu n'lerin hepsi için $M_n = 0$'dır.*

Kanıt. $R = \ldots \oplus R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots \oplus R_t \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ldots$ ve m_i'ler k_i dereceli homojen elemanlar olmak üzere $M = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} + \cdots + R_{m_n}$ alalım. $k = max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ diyelim ve k'dan daha büyük dereceli eleman olamayacağını gösterelim.

$q > k + t$ ve $der\,[m] = q$ olmak üzere $m \in M$ homojen elemanını alalım.

$m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$, $der\,[r_i m_i] = q$'dur.

Ancak $k + t < q = der\,[r_i m_i] \leq k + t$ olduğundan çelişki elde ederiz. Böylece

$$M = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} + \cdots + R_{m_k} + 0 + 0 + \cdots$$

bulunur.

Şimdi $R = \ldots \oplus 0 \oplus 0 \oplus R_{-t} \oplus \ldots \oplus R_{-2} \oplus R_{-1} \oplus R_0 \oplus \ldots$

$M = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} + \cdots + R_{m_n}$, $m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$ ve $der\,[m_i] = k_i$ (m_i homojen elemanlar) alalım.

$k = max\{|k_1|, |k_2|, \ldots, |k_n|\}$ ve $q < -t - k$ ve $der\,[m] = q$ olsun.

$-k \leq k_i \leq k$,

$-k \leq der\,[m_i] = k_i$

$-t \leq der\,[r_i]$ olduğundan $-t - k \leq der\,[r_i m_i] = q < -t - k$ olur ve böylece çelişki elde ederiz.

O halde M alttan sınırlıdır. □

Tanım 2.2.4. Bir M kademeli R-modülü alttan sınırlı ve Hilbert fonksiyonuna sahipse M'nin *Poincaré serisi*

$$P_M(t) = \sum_{n \in Z} H_M(n) t^n$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.2.5. *R bir kademeli halka ve M bir kademeli R-modül olsun. O zaman*

$$\lambda_R(M) = \lambda_{R_0}(M) = \sum_n \lambda_{R_0}(M_n).$$

Kanıt. $\lambda_R(M) = \infty$ ise $\lambda_{R_0}(M) = \infty$ olacağından bu durum açıktır.

O halde $\lambda_R(M) = n$ olsun. O zaman

$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{n-1} \supset M_n = (0)$ ve $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$ basit olacak şekilde M'nin R alt modüllerinin bir kompozisyon serisi vardır. Lemma 1.3.10 ' dan M_i $(0 \leq i \leq n)$ alt modülleri R_0-alt modül olarak da basittir. Buradan $\lambda_{R_0}(M) = n$ elde edilir. Ayrıca uzunluk tanımından da

$$\lambda_{R_0}(M) = \sum_n \lambda_{R_0}(M_n) = n$$

elde edilir. □

Sonuç 2.2.6. *Bir kademeli R halkasının Artin olması için gerekli ve yeterli koşul R_n' in Artin R_0-modül olmasıdır.*

Teorem 2.2.7. *[4, Theorem 7.1]R bir Noether kademeli halka, M de sonlu üretilmiş ve Poincaré serisine sahip bir kademeli R-modül olsun. O zaman $P_M(t)$ t'ye bağlı, rasyonel katsayılı bir polinomdur. Üstelik eğer $R = R_0[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ ve $\forall i = 1, \ldots, k$ için der $[(x_i)] = s_i \neq 0$ ise o zaman*

$$P_M(t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - t^{s_i})}, \quad g(t) \in \mathbb{Z}\left[t^{-1}, t\right].$$

Kanıt. Kanıtı k üzerine tümevarım uygulayarak yapacağız.

Eğer $k = 0$ ise $R = R_0$ olur. M bir Noether R-modül olduğundan sonsuz sayıdaki R modüllerin dik toplamı olarak yazılamaz. Böylece sonlu sayıda n dışında $M_n = 0$' dır. Buradan

$$P_M(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_M(n)t^n = \sum_{n\in Z} \lambda_{R_0}(M_n)t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_R(M_n)t^n$$

ve $\lambda_R(M_n) \in \mathbb{Z}$ $(H_M : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z})$ olduğundan $P_M(t) = g(t) \in Z[t^{-1}, t]$ elde ederiz.

Şimdi $k > 0$ ve $k - 1$ için doğruluğunu kabul edelim.

$$0 \longrightarrow (0 :_M x_k)_{(-s_k)} \longrightarrow M_{(-s_k)} \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{x_k M} \longrightarrow 0$$

tam dizisini düşünelim.

$$\lambda_{R_0}(M_n) - \lambda_{R_0}(M_{(-s_k)})_n = \lambda_{R_0}(\frac{M}{x_k M})_n - \lambda_{R_0}((0 :_M x_k)_{(-s_k)})_n$$

$$t^n\lambda_{R_0}(M_n) - t^n\lambda_{R_0}(M_{(-s_k)})_n = t^n\lambda_{R_0}(\frac{M}{x_k M})_n - t^n\lambda_{R_0}((0 :_M x_k)_{(-s_k)})_n$$

$$P_M(t) - P_{M_{(-s_k)}}(t) = P_{M/x_k M}(t) - P_{(0:_M x_k)_{(-s_k)}}(t)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$P_{M(-s_k)}(t) = \sum_{n \in Z} H_{M(-s_k)}(n)t^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H_{M(n-s_k)}(n)t^{n-s_k})t^{s_k} = P_M(t) \cdot t^{s_k}$$

eşitliğini bir önceki ifadede yerine yazarsak

$$(1 - t^{s_k})P_M(t) = P_{M/x_k M}(t) - t^{s_k} P_{(0:_M x_k)}(t)$$

bulunur. $\dfrac{M}{x_k M}$ ve $(0 :_M x_k)$ x_k tarafından sıfırlandığından ve $R[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$ ve $R[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ modül yapıları aynı olduğundan tümevarım kabulünden

$$(1 - t^{s_k})P_M(t) = \frac{f_1(t)}{\prod_{i=1}^{k-1}(1 - t^{s_i})} - \frac{t^{s_k} f(t)}{\prod_{i=1}^{k-1}(1 - t^{s_i})}$$

$$P_M(t) = \frac{f_1(t) - t^{s_k} f_2(t)}{\prod_{i=1}^{k-1}(1 - t^{s_i})(1 - t^{s_k})} = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - t^{s_i})}$$

Böylece isteneni elde ederiz. □

Lemma 2.2.8. *$R = R_0[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ bir Noether kademeli halka, R_0 Artin, her i için $\operatorname{der}[x_i] = 1$ ve M bir sonlu üretilmiş kademeli R-modül olsun. O zaman M Poincaré serisine sahiptir.*

Kanıt. R halkası derecesi 1 olan elemanlarla üretildiğinden derecesi negatif olan elemanlar yoktur. Böylece R alttan sınırlı ve Lemma 2.2.3'den M de alttan sınırlıdır.

Lemma 1.3.8'den her n için M_n Noether R_0-modül olur. R_0 Artin olduğundan Lemma 1.4.1'den M_n de Artindir. Buradan M'nin Hilbert fonksiyonuna sahip olduğunu söyleriz. Böylece M Poincaré serisine sahiptir. □

Sonuç 2.2.9. *[4, Corollary 7.1]$R = R_0[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ bir Noether kademeli halka, R_0 Artin, $\forall i$ için $\operatorname{der}[x_i] = 1$ ve M de bir sonlu üretilmiş kademeli R-modül olsun. O zaman*

$$P_M(t) = \frac{g(t)}{(1-t)^s}$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $s = s(M)$ $(0 \leq s \leq k)$ tamsayısı ve $g(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ polinomu vardır öyle ki $g(1) \neq 0$'dır.

Kanıt. Lemma 2.2.8'dan M Poincaré serisine sahiptir. O halde Teorem 2.2.7'i kullanabiliriz. Bir $f(t) \in Z[t^{-1}, t]$ için

$$P_M(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^k}.$$

Uygun bir $u \geq 0$ için $t^u f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ olur. Bir $m \geq 0$ ve $g'(t) \in \mathbb{Z}[t]$ için de

$$t^u f(t) = (1-t)^m g^{'}(t)$$

yazabiliriz. Burada $g^{'}(1) \neq 0$'dır. Yukardaki eşitlikten

$$f(t) = \frac{(1-t)^m g^{'}(t)}{t^u}$$

elde ederiz. $g(t) = \dfrac{g^{'}(t)}{t^u}$ ve $s = m - k$ dersek istenen elde edilir. Ayrıca $g(1) = g^{'}(1) \neq 0$'dır.

Eğer $s < 0$ olsa $P_M(t) = (1-t)^{-s} g(t)$ ve $P_M(1) = 0$ olur. Buradan her n için $L_R(M_n) = 0$ ve dolayısıyla $M = 0$ elde edilirdi. Böylece $s \geq 0$'dır.

Son olarak $g(t)$ ve s'nin tekliğini gösterelim.

$$\frac{g(t)}{(1-t)^s} = \frac{g_1(t)}{(1-t)^{s_1}}$$

olacak şekilde $g_1(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$, $g_1(1) \neq 0$ ve $s_1 \geq 0$ alalım.

$$g(t)(1-t)^{s_1} = g_1(t)(1-t)^s$$

Eğer $s_1 > s$ olsa $g(t)(1-t)^{s-s_1} = g_1(t)$ ve buradan $g_1(1) = 0$ olur. Benzer şekilde $s > s_1$ olsa $g(1) = 0$ olur. O halde $s = s_1$ ve dolayısıyla da $g(t) = g_1(t)$'dir. □

Önerme 2.2.10. *[4, Proposition 7.2]M Poincaré serisine sahip bir kademeli R-modül ve M'nin Poincaré serisi bir* $s \geq 0$ *ve* $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$, $f(1) \neq 0$ *için*

$$P_M(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^s}$$

şeklinde olsun. O zaman tek türlü belirli bir $Q_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *polinomu vardır öyle ki* $der\,[Q_M(x)] = s - 1$ *ve yeterince büyük n'ler için* $H_M(n) = Q_M(n)$*'dir.*

Kanıt. $f(t) = a_l t^l + a_{l+1} t^{l+1} + \ldots + a_m t^m$ diyelim.

$$P_M(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^s} = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{s-1} t^n$$
$$P_M(t) = \sum_{n \epsilon \mathbb{Z}} H_M(n) t^n = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{s-1} t^n$$

Son eşitlikte t^n'nin katsayısını değerlendirecek olursak $n \geq m$ için

$$H_M(n) = \sum_{i=l}^{m} a_i \binom{n-i+s-1}{s-1}$$

elde ederiz.

$$Q_M(x) = \sum_{i=l}^{m} a_i \binom{x-i+s-1}{s-1}$$

ile tanımlayalım. $Q_M(x)$ katsayıları $\mathbb{Q}$'dan gelen x'e bağlı bir polinomdur ve yeterince büyük n'ler için $H_M(n) = Q_M(n)$'dir. Diğer taraftan

$$Q_M(x) = \sum_{i=l}^{m} a_i \binom{x-i+s-1}{s-1} = \sum_{i=l}^{m} a_i \left[\frac{(x-i+s-1)(x-i+s-2)\ldots(x-i+1)}{(s-1)!} \right]$$

olduğundan *der* $[Q_M(x)] \leq s-1$'dir. Ayrıca $Q_M(x)$ polinomunda x^{s-1} teriminin katsayısı

$$\frac{a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m}{(s-1)!} = \frac{f(1)}{(s-1)!}$$

ve $f(1) \neq 0$ olduğundan *der* $[Q_M(x)] = s-1$ elde ederiz. Şimdi tekliğini gösterelim.

$$Q_M(x) = \sum_{i=l}^{m} a_i \binom{x-i+s-1}{s-1}$$

ve $\forall n \geq m$ için $Q_M(n) = H_M(n)$ olsun. Bir $Q'_M(x)$ polinomu için $Q'_M(n) = Q_M(n) = H_M(n)$ ve $P(x) = Q'_M(x) - Q_M(x)$ diyelim. O halde her $n \geq m$ için $P(n) = 0$ buluruz. Buradan sonsuz tane n için $P(n) = 0$ olur. Ancak bir polinom en fazla kök sayısı kadar değerde sıfır olabileceğinden $P(x) = 0$ ve dolayısıyla $Q_M(x) = Q'_M(x)$ elde ederiz. □

Tanım 2.2.11. R bir kademeli halka ve M de $H_M(n)$ Hilbert fonksiyonuna sahip bir kademeli R-modül olsun. Yeterince büyük n'ler için $Q_M(n) = H_M(n)$ eşitliğini sağlayan $Q_M(x) \in Q[x]$ polinomuna M'nin *Hilbert polinomu* denir.

Bir R kademeli halkası için $R_+ = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots$ ve $R_- = \ldots \oplus R_{-2} \oplus R_{-1}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Lemma 2.2.12. *[4, Lemma 7.1]R, R_0 − cebir olarak sonlu üretilmiş negatif olmayan bir kademeli halka ve M de bir sonlu üretilmiş kademeli R-modül olsun. O zaman bir $k \geq 1$ ve yeterince büyük n tamsayıları için $M_n \subseteq (R_+)^k M$ 'dir.*

Kanıt. $R_+ = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots$ ve $(R_+)^k$ R ' nin homojen idealleri olduğundan $(R_+)^k M$, M'nin bir homojen alt modülüdür. $N = \dfrac{M}{(R_+)^k M}$ ve $S = \dfrac{R}{(R_+)^k M}$ diyelim. N, S kademeli halkasının bir sonlu üretilmiş kademeli alt modülü ve $N_n = \dfrac{M_n + (R_+)^k}{(R_+)^k}$ olsun. Lemma 2.2.3'dan eğer yeterince büyük n'ler için $S_n = 0$ oluyorsa $n >> 0$ için $N_n = 0$ olacağından $M_n \subseteq (R_+)^k$ elde ederiz. O halde $S = \dfrac{R}{(R_+)^k M} = 0$ olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanır. $n >> 0$ için $S_n = \dfrac{R_n + (R_+)^k}{(R_+)^k} = 0$ olduğunu görelim. $R = R_0[y_1, y_{2,}, \ldots, y_s]$, y_i'ler homojen elemanlar ve $der\,[y_i] = d_i$ olsun. $p = k(d_1 + d_2 + \ldots + d_s)$ diyelim ve $\forall n \geq p$ için $R_n \subseteq (R_+)^k$ 'yı gösterelim.

$r \in R_n$, $der\,[r] \geq p$ homojen elemanını alalım. O halde $r = \sum x \cdot y_1^{a_1} \ldots y_s^{a_s}$ öyle ki $x \in R$ ve $a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots + a_s d_s \geq p$ olarak yazılabilir. p'yi yerine yazarsak

$$a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots + a_s d_s \geq k(d_1 + d_2 + \ldots + d_s)$$

elde ederiz, böylece $\exists a_j \geq k$ yani $y_1^{a_1} \ldots y_s^{a_s} \in (R_+)^k$ ve $r \in (R_+)^k$ olur. Sonuç olarak her $n \geq p$ için $R_n \subseteq (R_+)^k$ ve dolayısıyla $S = \dfrac{R}{(R_+)^k M} = 0$ gösterilir. □

Tanım 2.2.13. R bir kademeli halka ve M bir kademeli R-modül olsun. Eğer bir $x \in R_l$ için sonlu sayıda n'den sonra $(0 :_M x)_n = 0$ oluyorsa x'e l dereceli *M için yüzeysel eleman* denir.

Önerme 2.2.14. *[4, Proposition 7.3]R bir negatif olmayan Noether kademeli halka ve M bir sonlu üretilmiş kademeli R-modül olsun. O zaman homojen bir $x \in R_+$ vardır öyle ki x Miçin yüzeysel elemandır. Ayrıca R_0'ın rezidü cismi sonsuz ise $x \in R_1$ seçebiliriz.*

Kanıt. $0 = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ ve $P_i - asıl$ olmak üzere 0'ın Miçindeki asıl ayrışımını alalım. Burada $P_i = \mathrm{Rad}(Q_i : M) = \mathrm{Rad}\,(Ann_R M/Q_i)$'dir. Q_i'leri $i = 1, \ldots, s$ için $R_+ \nsubseteq P_i$ ve $i = s+1, s+2 \ldots, t$ için $R_+ \subset P_i$ olarak sınıflandıralım. $(0 \leq s \leq t)$ $R_+ \nsubseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$ olduğundan Lemma 1.3.16'dan $\exists x \in R_+$ vardır öyle ki $\forall i = 1, \ldots, s$ için $x \notin P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$'tir.

$der\,[x] = l$ olsun. Sonuç 1.3.17 'dan ($l = 1$ seçtik) $R_1 \nsubseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$ ise $der\,[x] = 1$ olacak şekilde bir homojen $x \in R_1$ vardır. x ' in M için yüzeysel eleman olduğunu iddia ediyoruz.

$$\begin{aligned}
&R_+ \subseteq P_{s+1} \cap P_{s+2} \cap \ldots \cap P_t \\
&R_+ \subseteq \mathrm{Rad}\left({}^{Ann_R M}/_{Q_{s+1}}\right) \cap \mathrm{Rad}\left({}^{Ann_R M}/_{Q_{s+2}}\right) \cap \ldots \cap \mathrm{Rad}\left({}^{Ann_R M}/_{Q_t}\right)
\end{aligned}$$

$k = min\,\{m_1, \ldots m_t\} \in \mathbb{N}$ dersek

$$\begin{aligned}
(R_+)^k &\subseteq Ann_R({}^{M}/_{Q_{s+1}}) \cap \ldots \cap Ann_R({}^{M}/_{Q_t}) \\
(R_+)^k M &\subseteq Q_{s+1} \cap \ldots \cap Q_t
\end{aligned}$$

olur.

Lemma 2.2.12 'den bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq N$ için $M_n \subseteq (R_+)^k M$ 'dir. Buradan

$$M_n \subseteq Q_{s+1} \cap \ldots \cap Q_t$$

elde ederiz. Şimdi $u \in (0 :_M x)_n$ alalım ve $n \geq N$ olsun. $(0 :_M x)_n \subseteq M_n$ olduğundan $i = s+1, \ldots, t$ için $u \in Q_i$'dir ve $u \in (0 :_M x)_n$ olduğundan $\forall i (1 \leq i \leq t)$ için $xu = 0 \in Q_i$'dir. $1 \leq i \leq s$ için $xu \in Q_i$, $x \notin P_i$ ve Q_i P_i-asıl olduğundan $u \in Q_i$ olur. Böylece $u \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_t = 0$ ve buradan da $u = 0$ elde edilir. O halde her $n \geq N$ için $(0 :_M x)_n = 0$ ve dolayısıyla da x, M için yüzeysel elemandır. □

Lemma 2.2.15. *[4, Lemma 7.2]R bir negatif olmayan Noether kademeli halka, M bir sonlu üretilmiş kademeli R-modül ve* $\dim M > \dim R_0$ *olsun. O zaman M için yüzeysel bir* $x \in R_+$ *için*

$$\dim {}^{M}/_{xM} = \dim M - 1.$$

Kanıt. Genelliği bozmadan $Ann_R M = 0$ alalım. O zaman $\dim M = \dim R/Ann_R = \dim R$ ve buradan $\dim M/xM = \dim R/xR$ elde ederiz.

R bir negatif olmayan kademeli halka olduğundan Sonuç 1.3.14 'dan $\dim R = \dim R_N$ olacak şekilde R 'nin bir N maksimal homojen ideali vardır. $x \in N$ olduğundan $\dim R/xR \geq \dim R_N/xR_N \geq \dim R_N - 1 = \dim R - 1$ ve böylece $\dim R/xR \geq \dim R - 1$ elde ederiz. O halde $\dim R/xR < \dim R$ olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanır. Aksini varsayalım. Bu durumda R'nin bir minimal P asal ideali vardır ki $x \in P$ ve $\dim R/P = \dim R$'dir. P ideali $(0) = Ann_R M$ üzerinde minimal ve $P \in Ass_R M$. Bu nedenle bir $t \in M$ için $P = (0 :_R t)$ yazabiliriz. Ayrıca $x \in P$ olduğundan da $t \in (0 :_M x)$ ve buradan da her $k \geq 1$ için $(R_+)^k t \in (0 :_M x)$ elde ederiz.

Yeterince büyük n'ler için $(0 :_M x)_n = 0$ olduğundan bazı $k \geq 1$ için $(R_+)^k t = 0$ ve böylece $R_+ \subseteq P$ buluruz. Bu durumda

$$\dim M = \dim R = \dim {}^{R}/_{P} \leq \dim {}^{R}/_{R_+} = \dim R_0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\dim R/xR < \dim R$ yani $\dim R/xR = \dim R - 1$ 'dir. □

Teorem 2.2.16. *[4, Theorem 7.2]R bir negatif olmayan Noether kademeli halka, R_0 Artin yerel halka ve M ' de sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir kademeli R-modül,* $\dim M = d$ *olsun. O zaman*

$$P_M(t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{d}(1 - t^{s_i})}$$

olacak şekilde pozitif $s_1, s_{2,\ldots,} s_d$ *tamsayıları ve* $g(1) \neq 0$ *olmak üzere* $g(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ *vardır.*

Kanıt. $\dim M = d$ üzerine tümevarım uygulayalım.

$d=0$ olsun. O zaman M bir Artin R-modül olur. M aynı zamanda Noether R-modül olduğundan sonlu uzunluğa sahiptir. Dolayısıyla Lemma 1.3.11'den sonlu sayıdaki n haricinde bütün n ler için $M_n = 0$ olur.

$$P_M(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_M(n)t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{R_0}(M_n)t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M)t^n$$

ve $\lambda_{R_0}(M_n) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $P_M(t) = g(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ 'dir. Ayrıca

$$P_M(1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{R_0}(M_n) = \lambda_{R_0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n\right) = \lambda_{R_0}(M) = \lambda_R(M) \neq 0$$

'dır.

Şimdi $d > 0$ ve $d-1$ için doğruluğunu kabul edelim. $x \in R_+$ M için bir yüzeysel eleman ve $der\,[x] = s_d$ olsun.

$$0 \longrightarrow (0:_M x)_n \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n+s_d} \longrightarrow \left({}^{M}/_{xM}\right)_{n+s_d} \longrightarrow 0$$

tam dizisini alalım.

$$\begin{aligned}
\lambda(M_{n+s_d}) - \lambda(M_n) &= \lambda\left(\left({}^{M}/_{xM}\right)_{n+s_d}\right) - \lambda\left((0:_M x)_n\right) \\
t^{n+s_d}\lambda(M_{n+s_d}) - t^{n+s_d}\lambda(M_n) &= t^{n+s_d}\lambda\left(\left({}^{M}/_{xM}\right)_{n+s_d}\right) - t^{n+s_d}\lambda\left((0:_M x)_n\right) \\
P_M(t) - t^{s_d}P_M(t) &= P_{M/xM}(t) - t^{s_d}P_{(0:_M x)}(t)
\end{aligned}$$

buluruz. Lemma 2.2.15'den $\dim M/xM = d-1$'dır. Ayrıca $(0:_M x)$ sonlu uzunluklu olduğundan $\dim(0:_M x) = 0$ ya da $(0:_M x) = 0$'dır. O halde tümevarım kabulünden $g_1(t), g_2(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ ve $g_1(1) \neq 0$ olmak üzere

$$P_M(t)\cdot(1-t^{s_d}) = \frac{g_1(t)}{\prod_{i=1}^{d-1}(1-t^{s_i})} - g_2(t)t^{s_d}$$

olarak yazabiliriz. Buradan $g(t) = g_1(t) - g_2(t)t^{s_d}\cdot\prod_{i=1}^{d-1}(1-t^{s_i})$ alınarak

$$P_M(t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{d}(1-t^{s_i})}$$

elde ederiz.

Şimdi $g(1) \neq 0$ gösterelim. $d > 1$ ise

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t)t^{s_d}\cdot(1-t)(1-t^2)\ldots$$

olduğundan $g(1) = g_1(1) \neq 0$'dır.

$d = 1$ olsa $g(t) = g_1(t) - g_2(t)t^{s_1}$ ve $g(1) = g_1(1) - g_2(1)$ olur.

$$P_{M/xM}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda\left({}^{M}\!/_{xM}\right) t^n = g_1(t)$$
$$P_{M/xM}(1) = \lambda\left({}^{M}\!/_{xM}\right) = g_1(1)$$

buradan $g(1) = \lambda\left({}^{M}\!/_{xM}\right) - \lambda\left((0 :_M x)\right)$ elde ederiz. □

Açıklama 2.2.17. Bu kanıttan M bir negatif olmayan kademeli R-modül ise $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ olacağını anlarız.

Sonuç 2.2.18. *[4, Corollary 7.3]$R = R_0[x_1, x_2, \ldots x_k]$ bir Noether kademeli halka, R_0 Artin yerel halka, $\forall i$ için der $[x_i] = 1$ ve M'de bir sonlu üretilmiş kademeli R - modül olsun. $s = s(M)$ ve $\dim M = d$ diyelim. O zaman $s(M) = \dim M$'dir. Ayrıca $\dim M \leq k$ ve der $[Q_M(x)] = \dim M - 1$'dir.*

Kanıt. Teorem 2.2.16 ve Sonuç 2.2.9 'den

$$P_M(t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{d}(1-t^{s_i})} = \frac{f(t)}{(1-t)^s}$$

burada $g(1) \neq 0$ ve $f(1) \neq 0$. Yine Sonuç 2.2.9'den

$$\frac{g(t)}{(1-t)^d} = \frac{f(t)}{(1-t)^s}$$
$$g(t)\cdot(1-t)^s = f(t)\cdot(1-t)^d$$

dir. $s > d$ olsa $g(t)\cdot(1-t)^d\cdot(1-t)^{s-d} = f(t)\cdot(1-t)^d$ ve buradan $g(t)\cdot(1-t)^{s-d} = f(t)$ ve dolayısıyla $f(1) = 0$ olur. Benzer şekilde $d > s$ olsa $g(1) = 0$ olur. O halde $s = d$'dir.

Ayrıca Sonuç 2.2.9 'den $0 \leq s \leq k$ olduğundan $s = \dim M \leq k$'dır. Önerme 2.2.10 ' den de bir $Q_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu vardır öyle ki *der* $[Q_M(x)] = d-1$ ve $n >> 0$ için $H_M(n) = Q_M(n)$ olduğundan *der* $[Q_M(x)] = \dim M - 1$ gösterilir. □

Şimdi çokkatlılık kavramından bahsedeceğiz.

M bir kademeli R-modül ve M'nin Hilbert polinomu $Q_M(x)$ olsun. Yeterince büyük n'ler için $Q_M(n) = H_M(n) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $Q_M(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$'dir. Her $i = 0, 1, \ldots, d-1$ için tek türlü belirli $e_i = e_i(M)$ tamsayıları vardır öyle ki

$$Q_M(x) = e_0\binom{x+d-1}{d-1} - e_1\binom{x+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^{d-1}e_{d-1}\binom{x}{0}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.19. Yukarıdaki $e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}$ katsayılarına M 'nin Hilbert katsayıları ve $(d-1)$ dereceli olan e_0 katsayısına da M'nin *çokkatlılığı* denir ve $e(M)$ ile gösterilir.

Eğer $\dim M = 0$ ise $e(M) = \lambda(M)$ ile tanımlıdır.

Tanım 2.2.20. $(R, \mathfrak{m})$ yerel halka ve I bir $\mathfrak{m} - asıl$ ideal olsun. O zaman $M = gr_I(R)$ için

$$H_M(n) \quad \text{ve} \quad HS_I(n) = \sum_{i=0}^{n-1} H_M(i)$$

fonksiyonlarının yeterince büyük n'ler için eşit olduğu rasyonel katsayılı polinomlara sırasıyla I'nın *Hilbert polinomu* ve *Hilbert-Samuel polinomu* diyeceğiz.

Buna göre Lemma 2.1.5 ve Sonuç2.2.18 'dan $der\,[QS_I(n)] = der\,[Q_M(n)] + 1 = \dim gr_I(R)$ ve Q_M'nin başkatsayısı $e/(d-1)!$ ise $QS_I(n)$ polinomunun başkatsayısı $e/d!$'dir. Dikkat edilirse buradaki e sayısı $e(M)$ çokkatlılığına eşittir.

Lemma 2.2.21. $(R, \mathfrak{m})$ *bir yerel halka ve* I, J *de* R*'nin* $\mathfrak{m} - asıl$ *iki ideali olsun. O zaman*

$$\dim gr_I(R) = \dim gr_J(R)$$

Kanıt. Genelliği bozmadan $J = \mathfrak{m}$ alabiliriz. I, $\mathfrak{m} - asıl$ olduğundan $\mathrm{Rad}\, I = \mathfrak{m}$ 'dir. Buradan bir k tamsayısı için $\mathfrak{m}^k \subseteq I$. Buradan her n için

$$\mathfrak{m}^{kn} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{m}^n$$

$$R/\mathfrak{m}^{kn} \subseteq R/I^n \subseteq R/\mathfrak{m}^n$$

olduğundan uzunluğa geçersek

$$\lambda\left(R/\mathfrak{m}^{kn}\right) \leq \lambda\left(R/I^n\right) \leq \lambda\left(R/\mathfrak{m}^n\right)$$

elde ederiz ki burada $\lambda\left(R/\mathfrak{m}^{kn}\right) = HS_{\mathfrak{m}}(kn)$, $\lambda\left(R/I^n\right) = HS_I(n)$, $\lambda\left(R/\mathfrak{m}^n\right) = HS_{\mathfrak{m}}(n)$ ve yeterince büyük n'ler için bu fonksiyonlar Hilbert-Samuel polinomlarına eşit olacağından $n >> 0$ için

$$QS_{\mathfrak{m}}(kn) \leq QS_I(n) \leq QS_{\mathfrak{m}}(n)$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte dereceleri kıyaslarsak $der\,[QS_I(n)]{=}der\,[QS_{\mathfrak{m}}(n)]$ bulunur ki buradan da $\dim gr_I(R) = \dim gr_{\mathfrak{m}}(R)$ gösterilir. Böylece $\dim gr_I(R) = \dim gr_J(R)$ elde edilir. □

Teorem 2.2.22. *[4, Theorem 7.3]*$(R, \mathfrak{m})$ *bir yerel halka ve* I *bir* $\mathfrak{m} - asıl$ *ideal olsun. O zaman*

$$\dim gr_I(R) = \dim R.$$

Kanıt. $\dim R = d$ olsun. I'nın bir $x_1, x_{2,} \ldots x_d$ parametreler sistemi ile üretildiğini gösterirsek $I = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ve Lemma 2.2.21' den $\dim gr_I(R) = \dim gr_{(x_1,x_2,\ldots,x_d)}(R) = d$ gösterilir.

$x_i^* = x_i + I^2 \in I/I^2$ olmak üzere $gr_I(R) = R/I[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_d^*]$ ve $\dim gr_I(R) = der\,[QS_I(n)]$ olduğundan Sonuç 2.2.18 'dan $\dim gr_I(R) \leq d$'dir.

Şimdi $\dim gr_I(R) \geq d$ gösterelim. $\dim gr_I(R) = d_1$ diyelim ve M, $gr_I(R)$ ' nin homojen maximal ideali olsun. Sonuç 1.3.18 'dan $gr_I(R)$ 'nın pozitif dereceli homojen $w_{1,}w_2, \ldots, w_{d_1}$ elemanları için $M = \text{Rad}(w_1, \ldots, w_{d_1})$ 'dir. w_i'lerin uygun kuvvetlerini alarak her birini aynı dereceli seçebiliriz. $\forall i$ $(i = 1, \ldots, d_1)$ için $w_i = p$ olsun. Sabit bir i için $u_i \in I^p$ alalım ve $u_i^* = w_i$ diyelim. O zaman $n >> 0$ için

$$I^n/I^{n+1} = \left[(u_1, \ldots u_{d_1})I^{n-p} + I^{n+1}\right]/I^{n+1}$$

olur. Buradan $I^n = (u_{1,\ldots,}u_{d_1})I^{n-p} \subseteq (u_1, \ldots, u_{d_1})$ elde edilir ki böylece $(u_1, \ldots, u_{d_1})$ R için bir parametreler sistemi ve $d_1 \geq d$ gösterilir. Yani $\dim gr_I(R) = \dim R$ 'dir. □

Sonuç 2.2.23. $(R, \mathfrak{m})$ *bir yerel halka ve I, R'nin bir $\mathfrak{m}$-asıl ideali olsun. Buna göre I'nın Hilbert polinomunun derecesi* $\dim R - 1$ *ve Hilbert-Samuel polinomunun derecesi* $\dim R$*'dir.*

Kanıt. Lemma 2.1.5, Sonuç 2.2.18 ve Teorem 2.2.22 sayesinde açıktır. □

R bir halka, P R'nin bir asal ideali ve Q bir $P-$ *asıl* ideal olsun. $\text{Rad}\,Q = P$ ve $\text{Rad}\,Q^n = \text{Rad}\,Q = P$ olduğundan Q^n ideali de $P-$ *asıl* olur. Q^n 'in

$$Q^n = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_t$$

bir normal asıl ayrışımını alalım. Radikale geçersek

$$\text{Rad}\,Q^n = \text{Rad}\,Q_1 \cap \text{Rad}\,Q_2 \cap \ldots \cap \text{Rad}\,Q_t$$

ve $\text{Rad}\,Q^n = P$ olduğundan $P = \text{Rad}\,Q_1 \cap \text{Rad}\,Q_2 \cap \ldots \cap \text{Rad}\,Q_t$ 'dir. $\exists i = 1, \ldots, t$ için $\text{Rad}\,Q_i = P_i \subseteq P$ olsun. $\text{Rad}\,Q^n \subseteq \text{Rad}\,Q_i$ olacağından $P \subseteq \text{Rad}\,Q_i$ ve böylece $\text{Rad}\,Q_i = P$ olur.

Genelliği bozmadan $P = \text{Rad}\,Q_1$ diyelim. Q^n'in genişlemesine geçersek ($\chi : R \longrightarrow R_P$ kanonik dönüşüm olmak üzere)

$$Q^n R_P = Q_1 R_P \cap Q_2 R_P \cap \ldots \cap Q_t R_P$$

ve $i > 1$ için $Q_i R_P = R_P$ olacağından $Q^n R_P = Q_1 R_P$ yazabiliriz. Bu eşitlikte daralmaya geçersek de

$$(Q^n R_P)^c = (Q_1 R_P)^c = Q_1$$

elde ederiz. Böylece şunu söyleyebiliriz:

"Q^n' nin normal asıl ayrışımında bir bileşeni $P-$asıl olur. Q^n 'in bu $P-$asıl bileşenine Q' nun *n. sembolik kuvveti* denir ve $Q^{(n)}$ ile gösterilir."

Önerme 2.2.24. *[7, Proposition 11, §4.5]E bir Noether R–modül ve N, E'nin bir P-asıl alt modülü olsun.*

$$N = N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q \subset E, \tag{2.2.1}$$

E'nin P-asıl alt modüllerinin kesin olarak artan bir dizisi olsun. O zaman

$$q \leq \lambda_{R_P}\left(E_P/N_P\right)$$

olur. Ayrıca eğer (2.2.1) *dizisi P-asıl alt modüllerin daha uzun bir dizisine genişletilemiyor ise*

$$q = \lambda_{R_P}\left(E_P/N_P\right)$$

eşitliği sağlanır.

Buradaki q sayısına E/N modülünün "asıl uzunluğu" diyeceğiz ve $q = \lambda_a(E/N)$ yazacağız.

Sonuç 2.2.25. *P, R'nin bir asal ideali ve Q da bir P-asıl ideal olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\lambda_a(R/Q^{(n)}) = \lambda_{R_P}\left(R_P/Q^n R_P\right)$$

olur.

Lemma 2.2.26. *P R'nin bir asal ideali, Q da bir $P-$ asıl ideal ve* $\dim R = d$ *olsun. O zaman yeterince büyük n' ler için*

$$P_Q(n) = \lambda_a\left({}^{R}/_{Q^{(n)}}\right)$$

ile tanımlı $P_Q(n)$ n'ye bağlı bir polinomdur ve bu polinomun derecesi d 'dir.

Kanıt. $\chi : R \longrightarrow R_P$ kanonik dönüşüm olmak üzere (R_P, PR_P) yerel halkasını düşünelim.

$\lambda_a\left(R/Q^{(n)}\right) = \lambda_{R_P}\left(R_p/Q^n R_P\right)$ olduğundan kanıtı $\lambda_{R_P}\left(R_P/Q^n R_P\right)$ için yapmak yeterli olacaktır. R_P Noether olduğundan $R_P/Q^n R_P$ de Noether'dir. Ayrıca

$$\operatorname{Rad} Q = P \Rightarrow P^m \subseteq Q \Rightarrow P^{mn} \subseteq Q^n \Rightarrow (PR_P)^m \subseteq Q^n R_P$$

'den $(PR_P)^m \subseteq AnnR_P/Q^n R_P$ elde ederiz. Buradan $R_P/Q^n R_P$ Noether ve maksimal idealin bir kuvveti tarafından sıfırlandığından Artin olur. Yani $\lambda_{R_P}\left(R_P/Q^n R_P\right) < \infty$ 'dur.

Q bir $P-$asıl ideal olduğundan QR_P de PR_P-asıl olur. QR_P ile ilişkili

$$gr_{QR_P}(R_P) = R_P/QR_P \oplus QR_P/Q^2 R_P \oplus \ldots \oplus Q^{n-1}R_P/Q^n R_P$$

kademeli halkasını alalım. Sonuç 2.2.18'dan yeterince büyük n'ler için $H_{QR_P}(n) = \lambda\left({}^{Q^{n-1}R_P}/_{Q^nR_P}\right)$ bir polinom ve bu polinomun derecesi de Sonuç 2.2.23'den dolayı $\dim R_P - 1$ 'dir. Lemma 2.1.5 ' dan

$$\sum_{t=0}^{n-1} H_{QR_P}(t) = \sum_{t=0}^{n-1} \lambda_{R_P/QR_P}\left({}^{Q^{t-1}R_P}/_{Q^tR_P}\right) = \lambda_{R_P/QR_P}\left({}^{R_P}/_{Q^nR_P}\right)$$

de bir polinom ve bu polinomum derecesi de $der\left[H_{QR_P}(n)\right] + 1$ olduğundan derecesi $\dim R_P$ olan bir polinom elde ederiz. Diğer taraftan $\dim R_P = rankP = d$ olduğundan $\lambda_{R_P/QR_P}\left(R_P/Q^nR_P\right) = \lambda_{R_P}\left(R_P/Q^nR_P\right)$ polinomunun derecesi d 'dir. Böylece istenen elde edilir. $\square$

Tanım 2.2.27. Lemma 2.2.26'nin kanıtında $HS_{QR_P} = \lambda_{R_P}\left(R_P/Q^nR_P\right)$ polinomunun (Q_{R_P}'nin Hilbert-Samuel polinomu) baş katsayısına $e_0 = e/d!$ dersek e sayısına Q *asıl idealinin çokkatlılığı* denir. Q 'nun çokkatlılığını $e(Q)$ ile göstereceğiz.

Bu tanımı asıl olmayan ideallere de genişletebiliriz.

Tanım 2.2.28. A R'de bir ideal, P A'nın bir minimal asal ideali, Q da A'nın P-asıl bileşeni olsun. O zaman $e(A,P) = e(Q)$ ile tanımlıdır ve buna da *A'nın P asalı ile ilişkilendirilmiş çokkatlılığı* denir.

Bölüm 3

İdeal İndirgemeleri

3.1 Temel özellikler

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R bir Noether halka ve R'nin idealleri de öz idealler olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1. A ve B R' nin idealleri olsun. Eğer,

(i) $B \subseteq A$

(ii) En az bir r pozitif tamsayısı için $BA^r = A^{r+1}$

sağlanırsa B' ye A'nın bir *indirgemesi* denir. Bunu kısaca $B \trianglelefteq_{ind} A$ ile göstereceğiz.

Lemma 3.1.2. *A ve B R' nin idealleri ve $B \subseteq A$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

(i) Her ideal kendisinin bir indirgemesidir.

(ii) Eğer bir r pozitif tamsayısı için $BA^r = A^{r+1}$ ise o zaman her $n \geq r$ tamsayısı için $BA^n = A^{n+1}$ ve her m pozitif tamsayısı için $B^m A^r = A^{r+m}$ 'dir.

Kanıt. (i) R 'nin her A ideali için $A \subseteq A$ ve her r pozitif tamsayısı için $AA^r = A^{r+1}$ olduğundan kanıt açıktır.

(ii)

$$BA^n = BA^{n-r}A^r = BA^r A^{n-r} = A^{r+1}A^{n-r} = A^{n+1}$$

'dir. Diğer kısım için m üzerine tümevarım uygulayalım.

$m = 1$ için kabulden doğrudur. $m-1$ için doğruluğunu kabul edelim ve m için doğru olduğunu gösterelim.

$$B^m A^r = B^{m-1}BA^r = B^{m-1}A^{r+1} = B^{m-1}A^r A = A^{m-1+r}A = A^{m+r}$$

elde ederiz. □

Örnek 3.1.3. $I = \langle X^2, Y^2 \rangle$ ve $J = \langle X, Y \rangle^2 = \langle X^2, XY, Y^2 \rangle$ alalım. $I \subseteq J$ ve $r = 1$ için

$$IJ = \left\langle X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4 \right\rangle = \langle X, Y \rangle^4 = J^2$$

olduğundan I, J'nin bir indirgemesi olur.

Örnek 3.1.4. $I^n = I^{n+1}$ eşitliğini sağlayan bir halkada I^2, I'nın bir indirgemesi olur. Çünkü $I^2.I^{n-1} = I^n$sağlanır. O halde Artin halkalarda ideallerin kareleri indirgemeleri olacaktır.

İndirgeme tanımından anlaşıldığı üzere bir idealin indirgemesi o idealin daha basit bir formu olur. Ayrıca bu ideallerin sağladığı bir takım özelliklerin aynı olduğunu söyleyebiliriz. Bu özellikler arasında en dikkat çekici olanı ise her iki idealin de aynı cebirsel çokkatlılığa sahip olmasıdır.

Teorem 3.1.5. *[8, Theorem 1.1] A, B R'nin idealleri ve $B \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. O zaman B ile A ' nın minimal asal idealleri aynıdır ve her P minimal asal ideali için*

$$e(A, P) = e(B, P)$$

sağlanır.

Kanıt. Uygun bir r pozitif tamsayısı için $BA^r = A^{r+1}$ olsun. O zaman $A^{r+1} \subseteq B \subseteq A$ 'dır. P, A'nın bir minimal asalı ve P', B'nin bir minimal asalı olsun. $P = P'$ olduğunu gösterelim. $B \subseteq P' \Rightarrow A^{r+1} \subseteq P' \Rightarrow A \subseteq P'$ ve $B \subseteq A \subseteq P \subseteq P'$ ve P minimal olduğundan $P = P'$ elde ederiz. O halde A ve B 'nin minimal asal idealleri aynıdır.

Şimdi A ve B 'nin bir P minimal asal idealini alalım. Q ve Q_1 sırasıyla A ve B'nin $P-asıl$ bileşenleri olsun.

$$A = Q \cap Q_1^{'} \cap \ldots \cap Q_n^{'}$$

A'nın asıl ayrışımını alalım. $\chi : R \longrightarrow R_P$ kanonik dönüşüm olmak üzere genişlemeye geçersek $AR_P = QR_P$ buradan $A^m R_P = Q^m R_P$ ve tekrar daralmaya geçersek de $(A^m R_P)^c = (Q^m R_P)^c$ elde ederiz. Diğer taraftan

$$A^m = Q_1^{''} \cap \ldots \cap Q_n^{''}$$

A^m'nin asıl ayrışımı alırsak bir $i = 1, \ldots, n$ için $\operatorname{Rad} Qi^{''} = P$ olacağından genelliği bozmadan $\operatorname{Rad} Q_1^{''} = P$ diyelim. Buradan $(A^m R_P)^c = Q_1^{''}$ olur. Böylece A^m'nin $P-asıl$ bir bileşenin olduğunu görürüz. Bu bileşene $(Q^m R_P)^c = Q^{(m)}$ ve benzer şekilde elde edilebilecek olan B^m 'nin $P-asıl$ bileşenine de $Q_1^{(m)}$ diyelim. Her m tamsayısı için

$$A^{r+m} \subseteq B^m \subseteq A^m$$

olduğundan
$$Q^{(r+m)} \subseteq Q_1^{(m)} \subseteq Q^{(m)}$$
ve buradan da
$$\lambda_a\left(R/Q^{(r+m)}\right) \geq \lambda_a\left(R/Q_1^{(m)}\right) \geq \lambda_a\left(R/Q^{(m)}\right)$$
elde ederiz. Dolayısıyla Lemma 2.2.26 'dan
$$P_Q(m+r) \geq P_{Q_1}(m) \geq P_Q(m)$$
'dir. $P_Q(m) = P_Q(m+r) = a \cdot m^d + \dots$, $P_{Q_1}(m) = b \cdot m^{d_1} + \dots$ diyelim. O zaman
$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_Q(m+r)}{m^d} \geq \lim_{m\to\infty} \frac{P_{Q_1}(m)}{m^d} \geq \lim_{m\to\infty} \frac{P_Q(m)}{m^d}$$
eşitsizliğinde Sandwich teoreminden

$b = \lim_{m\to\infty} \dfrac{P_{Q_1}(m+r)}{m^d} = \lim_{m\to\infty} \dfrac{P_{Q_1}(m)}{m^d} = a \neq 0$ elde ederiz. ($d = d_1$ olacağına dikkat ediniz.) Böylece $e(Q) = e(Q_1)$ elde ederiz. □

Tanım 3.1.6. $B \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. Eğer A'nın B'de öz olarak kapsanan bir indirgemesi yoksa B'ye A'nın bir *minimal indirgemesi* denir.

Tanım 3.1.7. Bir A idealinin kendisinden başka indirgemesi yoksa A'ya *bir ana ideal* denir.

O halde bir idealin minimal indirgemesi bir ana ideal olur.

Örnek 3.1.8. $R = \dfrac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[\![X,Y]\!]}{(XY\,(X+Y))}$ halkasında $I = \mathfrak{m} = (X,Y)\,R$ alırsak I bir ana ideal olur.

Lemma 3.1.9. *Eğer $B \trianglelefteq_{ind} A$ ve $C \trianglelefteq_{ind} B$ ise o zaman $C \trianglelefteq_{ind} A$ 'dır.*

Kanıt. $C \subseteq B \subseteq A$ olduğundan $C \subseteq A$'dır. Uygun bir $r,s \in \mathbb{Z}^+$için $BA^r = A^{r+1}$ ve $CB^s = B^{s+1}$ olsun. Şimdi
$$CA^{r+s} = A^{r+s+1}$$
gösterelim.
$$A^{r+s+1} = B^{s+1}A^r = CB^sA^r = CA^{r+s}$$
elde edilir. Böylece $C \trianglelefteq_{ind} A$ gösterilir. □

Lemma 3.1.10. *[8, Lemma 7.1] Eğer $B_1 \trianglelefteq_{ind} A_1$ ve $B_2 \trianglelefteq_{ind} A_2$ ise o zaman $B_1 + B_2 \trianglelefteq_{ind} A_1 + A_2$ 'dir.*

Kanıt. Uygun m,n pozitif tamsayıları için $B_1A_1^m = A_1^{m+1}$ ve $B_2A_2^n = A_2^{n+1}$ olsun. O zaman

$$B_1(A_1+A_2)^{m+n} = B_1\sum_{r=0}^{m+n} A_1^r A_2^{m+n-r} = \sum_{r=0}^{m+n} B_1 A_1^r A_2^{m+n-r} \supseteq \sum_{r=m}^{m+n} A_1^{r+1} A_2^{m+n-r}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B_2(A_1+A_2)^{m+n} &= \sum_{r=0}^{m+n} B_2 A_1^r A_2^{m+n-r} = \sum_{r=0}^{m} B_2 A_1^r A_2^{m+n-r} + \sum_{r=m+1}^{m+n} B_2 A_1^r A_2^{m+n-r} \\ &\supseteq \sum_{r=0}^{m} A_1^r B_2 A_2^n A_2^{m-r} \supseteq \sum_{r=0}^{m} A_1^r A_2^{m+n-r+1} \end{aligned}$$

elde ederiz.Buradan

$$\begin{aligned} (B_1+B_2)(A_1+A_2)^{m+n} &\supseteq B_1(A_1+A_2)^{m+n} + B_2(A_1+A_2)^{m+n} \\ &\supseteq \sum_{r=m}^{m+n} A_1^{r+1} A_2^{m+n-r} + \sum_{r=0}^{m} A_1^r A_2^{m+n-r+1} \\ &= \sum_{r=0}^{m+n+1} A_1^r A_2^{m+n-r+1} = (A_1+A_2)^{m+n+1} \end{aligned}$$

Böylece istenen elde edilir. □

Teorem 3.1.11. *[8, Theorem 7.1] A R'nin bir ideali olsun. O zaman A için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\hat{A}$ ideali vardır ve tektir.*

(i) $A \trianglelefteq_{ind} \hat{A}$

(ii) A'yı indirgeme olarak kapsayan her ideal $\hat{A}$'da kapsanır.

Kanıt. Σ kümesi ile A'yı indirgeme olarak kapsayan ideallerin kümesini gösterelim. $A \in \Sigma$ olduğundan Σ kümesi boştan farklıdır. R Noether olduğundan idealleri için maksimal şartı sağlar. Böylece Σ'nın bir $\hat{A}$ elemanı Σ'da maksimal olur.

Şimdi $A \trianglelefteq_{ind} A_1$ olacak şekilde bir A_1 ideali alalım. A, A_1 ve $\hat{A}$'nın bir indirgemesi olduğundan Lemma 3.1.10 'den A, $A_1+\hat{A}$'nın bir indirgemesi olur. Buradan $A_1+\hat{A} \in \Sigma$ 'dır. $\hat{A} \subseteq A_1+\hat{A}$ ve $\hat{A}$ maksimal olduğundan $\hat{A} = A_1+\hat{A}$ ve buradan da $A_1 \subseteq \hat{A}$ elde ederiz. □

Sonuç 3.1.12. *Eğer B A'nın bir indirgemesi ise o zaman $\hat{B} = \hat{A}$ 'dır.*

Kanıt. B, A'nın bir indirgemesi ve A da $\hat{A}$'nın bir indirgemesi olduğundan B, $\hat{A}$'nın bir indirgemesi olur. Buradan $\hat{A} \subseteq \hat{B}$ 'dır. Diğer taraftan uygun bir m tamsayısı için $B\hat{B}^m = \hat{B}^{m+1}$ olsun. $A\hat{B}^m \subseteq \hat{B}^{m+1} \subseteq A\hat{B}^m$ olduğundan A, $\hat{B}$'nin bir indirgemesi olur buradan da $\hat{B} \subseteq \hat{A}$. Böylece $\hat{B} = \hat{A}$ elde edilir. □

3.2 Minimal İndirgemeler

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka, ve $k = R/\mathfrak{m}$ sonsuz alacağız.

Teorem 3.2.1. *[8, Theorem 2.1] $B \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. O zaman A'nın B' de kapsanan en az bir C minimal indirgemesi vardır.*

Kanıta geçmeden önce kullanacağımız yardımcı lemmaları verelim.

Lemma 3.2.2. *A ve B, R'nin iki ideali olsun. Eğer $A \subseteq B + A\mathfrak{m}$ ise o zaman $A \subseteq B$ 'dir. Ayrıca $B \subseteq A$ da varsa $A = B$ 'dir.*

Kanıt. $\dfrac{A+B}{B} \subseteq \dfrac{B+A\mathfrak{m}}{B} = \mathfrak{m}\left(\dfrac{A+B}{B}\right)$ ve $\mathfrak{m}\left(\dfrac{A+B}{B}\right) = \dfrac{\mathfrak{m}A+\mathfrak{m}B+B}{B} \subseteq \dfrac{A+B}{B}$ olduğundan $\dfrac{A+B}{B} = \mathfrak{m}\left(\dfrac{A+B}{B}\right)$ elde ederiz. O halde Nakayama lemmadan $\dfrac{A+B}{B} = 0$ ve $A \subseteq B$ bulunur. □

Lemma 3.2.3. *C,R'nin A'da kapsanan bir ideali olsun. O zaman*
$C \trianglelefteq_{ind} A$ ancak ve ancak $C + A\mathfrak{m} \trianglelefteq_{ind} A$'dır.

Kanıt. $\Rightarrow$: $C \subseteq C + A\mathfrak{m} \subseteq A$ 'dır. Ayrıca $C \trianglelefteq_{ind} A$ olduğundan uygun bir r pozitif tamsayısı için $CA^r = A^{r+1}$'dir.

$$(C + A\mathfrak{m})A^r = CA^r + A^{r+1}\mathfrak{m} = A^{r+1} + A^{r+1}\mathfrak{m} = A^{r+1}$$

ve buradan $C + A\mathfrak{m} \trianglelefteq_{ind} A$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $C + A\mathfrak{m} \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. O halde uygun bir r pozitif tamsayısı için $(C + A\mathfrak{m})A^r = A^{r+1}$ ve buradan $CA^r + A^{r+1} = A^{r+1}$ buluruz. Lemma 3.2.2 'dan $A^{r+1} \subseteq CA^r$ ve diğer yön açık olduğundan $CA^r = A^{r+1}$ elde edilir. Böylece $C \trianglelefteq_{ind} A$ gösterilir. □

Artık Teorem 3.2.1 'ın kanıtını verebiliriz.

Kanıt. $C' \subseteq B$ ve $C' \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. Σ ile $C' + A\mathfrak{m}$ biçimindeki bütün ideallerin kümesini gösterelim. $B \subseteq B$ ve $B \trianglelefteq_{ind} A$ olduğundan $B + A\mathfrak{m} \in \Sigma$ ve dolayısıyla Σ kümesi boştan farklıdır. $k = R/\mathfrak{m}$ üzerinde $A/A\mathfrak{m}$ bir sonlu boyutlu vektör uzayı ve $(C' + A\mathfrak{m})/A\mathfrak{m}$ de $A/A\mathfrak{m}$ 'nin bir alt uzayı olduğundan öyle bir C'ideali seçebiliriz ki $C' + A\mathfrak{m}$, Σ ' da minimaldir.

$\{c_1 + A\mathfrak{m}, c_2 + A\mathfrak{m}, \ldots, c_r + A\mathfrak{m}\}$ kümesi $(C' + A\mathfrak{m})/A\mathfrak{m}$ 'nin k üzerindeki tabanı olacak şekilde $c_1, c_2, \ldots, c_r \in C'$seçelim ve $C = (c_1, \ldots, c_r)$ diyelim. O zaman $C \subseteq C' \subseteq B$ ve $C + A\mathfrak{m} = C' + A\mathfrak{m}$ 'dir. $C' \trianglelefteq_{ind} A$ olduğundan Lemma 3.2.3 'dan $C' + A\mathfrak{m} = C + A\mathfrak{m} \trianglelefteq_{ind} A$ ve yine Lemma 3.2.3 'dan $C \trianglelefteq_{ind} A$ buluruz. Şimdi C'nin A' nın bir minimal indirgemesi olduğunu gösterelim.

Eğer

$$\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_r c_r \equiv 0 (modA\mathfrak{m})$$

ise

$$\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_r c_r + A\mathfrak{m} = 0$$
$$\alpha_1 c_1 + A\mathfrak{m} + \ldots + \alpha_r c_r + A\mathfrak{m} = 0$$

ve $\forall i = 1, \ldots, r$ için $\alpha_i c_i + A\mathfrak{m}$ 'ler taban elemanları olduğundan $\alpha_i c_i + A\mathfrak{m} = 0$ olur.

$\alpha_i c_i + A\mathfrak{m} = 0 \Rightarrow \alpha_i c_i \in A\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \Rightarrow \alpha_i \in \mathfrak{m}$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $C \cap A\mathfrak{m} \subseteq C\mathfrak{m}$ bulunur.

Şimdi $C_0 \subseteq C$ ve C_0 A'nın bir indirgemesi olsun. O zaman $C_0 + A\mathfrak{m} \in \Sigma$ 'dir. $C_0 \subseteq C'$ olduğundan $C_0 + A\mathfrak{m} \subseteq C' + A\mathfrak{m}$ olur. Ancak $C' + A\mathfrak{m}$ minimal olduğundan $C_0 + A\mathfrak{m} = C' + A\mathfrak{m} = C + A\mathfrak{m}$ elde ederiz.

$C \subseteq C + A\mathfrak{m}$ olduğundan $C \subseteq C_0 + A\mathfrak{m}$ diyebiliriz. Bir $x \in C$ alalım. O halde $x = y + z$ olacak şekilde $y \in C_0$ ve $z \in A\mathfrak{m}$ elemanları vardır. $z = x - y \in C \cap A\mathfrak{m} \subseteq C\mathfrak{m}$ olduğundan $x \in C_0 + C\mathfrak{m}$ buradan $C \subseteq C_0 + C\mathfrak{m}$ yani $C \subseteq C_0$ elde ederiz. Böylece $C = C_0$ elde ederiz. □

Lemma 3.2.4. *[8, Lemma 2.3] C, A'nın bir minimal indirgemesi ve B, C ile A arasında bir ideal olsun. O zaman C'nin her minimal tabanı, B'nin bir minimal tabanına genişletilebilir.*

Kanıt. $\{c_1 + A\mathfrak{m}, c_2 + A\mathfrak{m}, \ldots, c_r + A\mathfrak{m}\}$ kümesi $(C + A\mathfrak{m})/A\mathfrak{m}$ 'nin k üzerindeki tabanı olacak şekilde $c_1, c_2, \ldots, c_r \in C$ seçelim. Teorem 3.2.1 'ın kanıtında olduğu gibi $(c_1, c_2, \ldots, c_r) \cap A\mathfrak{m} \subseteq (c_1, c_2, \ldots, c_r)\mathfrak{m}$ ve $(c_1, \ldots, c_r) + A\mathfrak{m} = C + A\mathfrak{m}$ olduğunu gösterebiliriz. Lemma3.2.2 'den $(c_1, \ldots, c_2)$ A'nın bir indirgemesi olur. $C \cap A\mathfrak{m} \subseteq C\mathfrak{m}$ ve $B \subseteq A$ olduğundan $C \cap B\mathfrak{m} \subseteq C\mathfrak{m}$ diğer taraftan $C\mathfrak{m} \subseteq C \cap B\mathfrak{m}$ olduğundan da $C \cap B\mathfrak{m} = C\mathfrak{m}$ elde ederiz. O halde

$$\frac{C + A\mathfrak{m}}{A\mathfrak{m}} \cong \frac{C}{C\mathfrak{m}} = \frac{C}{C \cap B\mathfrak{m}} \cong \frac{C + B\mathfrak{m}}{B\mathfrak{m}} \subseteq \frac{B}{B\mathfrak{m}}$$

ve buradan da $\dfrac{C}{C\mathfrak{m}} \hookrightarrow \dfrac{B}{B\mathfrak{m}}$ bulunur. Böylece istenen elde edilir. □

3.3 Bir İdeal için Analitik Yayılım Kavramı

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe $(R, \mathfrak{m})$ yerel halka olarak alınacaktır.

$(u_1, \ldots, u_t) = u$, A'nın bir tabanı olsun. (Bu taban minimal olmak zorunda değildir.)

$\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_t)$ ile katsayıları R'den gelen s dereceli bir formu gösterelim ve bu formun katsayılarının tamamı $\mathfrak{m}$'de olmasın.

$\overline{\phi}(x)$ ile de bu formun $k[x_1, \ldots, x_t]$'deki karşılığını gösterelim.

Tanım 3.3.1. Bir $\overline{\phi}(x) \in k[x_1, \ldots, x_t]$ formu için $\phi(u) \equiv 0 \pmod{A^s\mathfrak{m}}$ oluyorsa $\overline{\phi}(x)$ formuna *boş form* denir.

Not 3.3.2. $\phi_1, \phi_2 \in R[x_1, \ldots, x_t]$ ve $\overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2$ ise $\phi_1(u) \equiv \phi_2(u) \pmod{A^s\mathfrak{m}}$'dir.

Kanıt. $\overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2$ olduğundan $\overline{\phi}_1 - \overline{\phi}_2 = \overline{\phi_1 - \phi_2} = 0$ ve buradan $\phi_1 - \phi_2$'nin katsayıları $\mathfrak{m}$' ye düşer. Dolayısıyla

$$(\phi_1 - \phi_2)(x) = \sum_{a_1+\ldots+a_t=s} m \cdot X_1^{a_1} \ldots X_t^{a_t}$$

olarak tanımlayabiliriz. ($m \in \mathfrak{m}$). O halde

$$(\phi_1 - \phi_2)(u) = \sum_{a_1+\ldots+a_t=s} m \cdot u_1^{a_1} \ldots u_t^{a_t} \in A^s\mathfrak{m}$$

buradan $(\phi_1 - \phi_2)(u) = \phi_1(u) - \phi_2(u) \in A^s\mathfrak{m}$ ve böylece $\phi_1(u) \equiv \phi_2(u) \pmod{A^s\mathfrak{m}}$ elde ederiz. □

Not 3.3.2'dan boş form tanımı yapılırken $\overline{\phi}$'ye bağlı olduğumuzu ve ϕ'nin seçiminden bağımsız hareket edebileceğimizi anlarız.

Tanım 3.3.3. N, $k[x_1, \ldots, x_t]$ 'de bir homojen ideal olsun. N ideali boş formlarla üretiliyorsa N'ye A'nın *boş form ideali* denir. Eğer bir idealin boş form ideali yoksa (0) ideali alınır.

Tanımı biraz daha açacak olursak;

$$k[x_1, \ldots x_t] = k[x] = k \oplus k[x]_1 \oplus k[x]_2 \oplus \ldots$$

olsun. $\left\langle \overline{\phi}(x) \right\rangle = N$ idealine A'nın boş form ideali denir. Burada

$$N = N_0 \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots, N_i = N \cap k[x]$$

olur.

Teorem 3.3.4. *[8, Theorem 3.1]*

$$\phi(s, A) = \dim_k (A^s / A^s\mathfrak{m})$$

olarak tanımlayalım. $\phi(s, A)$ sayısı A^s'nin minimal tabanındaki eleman sayısı ise o zaman yeterince büyük s'ler için $\phi(s, A)$ s'ye bağlı bir polinom olur.

Kanıt.
$$\dim_k \left(A^s/A^s\mathfrak{m}\right) = \dim_k \left(k\left[x\right]_s/N_s\right)$$

olduğunu gösterirsek $\phi(s, A)$ N'nin ($k\left[x\right]/N$'nin) Hilbert fonksiyonu olacağından kanıt tamamlanır.

$$\begin{aligned} k\left[x\right]_s &\longrightarrow A^s \longrightarrow A^s/A^s\mathfrak{m} \\ \overline{\phi} &\longmapsto \phi(u) \longmapsto \phi(u) + A^s\mathfrak{m} \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alırsak $\phi(u) \equiv 0 \pmod{A^s\mathfrak{m}}$ ve dönüşümün çekirdeği N_s'tir. Buradan
$$k\left[x\right]_s/N_s \cong A^s/A^s\mathfrak{m}$$
elde ederiz. Böylece $\dim_k \left(A^s/A^s\mathfrak{m}\right) = \dim_k \left(k\left[x\right]_s/N_s\right)$ ve istenen elde edilir. □

Tanım 3.3.5. *der* $[\phi(s, A]$ sayısı $\phi(s, A)$ polinomunun derecesi olmak üzere $l(A) =$ *der* $[\phi(s, A)] + 1$ sayısına *A'nın analitik yayılımı* denir.

Sonuç 3.3.6. *A 'nın analitik yayılımı $l(A)$, A'nın N boş form idealinin boyutuna eşittir. Ayrıca*
$$l(A) = \dim \mathcal{F}_A(R) \leq \dim R$$
olur.

Kanıt. $\phi(s, A)$ $k[x]/N$'nin Hilbert fonksiyonuna eşit olduğundan açıktır. Ayrıca yukarıdaki teoremin kanıtından görülebileceği gibi $\dim_k \left(A^s/A^s\mathfrak{m}\right) = \dim_k \left(k\left[x\right]_s/N_s\right)$ olduğundan $l(A) = \dim \mathcal{F}_A(R)$ elde edilir. Öte yandan

$$\mathcal{F}_A(R) \cong gr_A(R)/\mathfrak{m}.gr_A(R)$$

olduğundan $\dim \mathcal{F}_A(R) \leq \dim R$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

Tanım 3.3.7 (Analitik Bağımsızlık). $v = (v_1, \ldots, v_r)$ A'nın elemanlarının bir sıralı dizisi, $\phi\left(x_1, \ldots, x_t\right)$ derecesi p olan (p keyfi) katsayıları R 'den gelen $\phi(v) \equiv 0 \pmod{A^p\mathfrak{m}}$ olacak şekilde bir form iken ϕ'nin katsayıları $\mathfrak{m}$' ye düşüyorsa v_i'lere *A'da analitik bağımsızdır* denir.

Tanım 3.3.8. $v = (v_1, \ldots, v_r)$, R'nin elemanlarının bir sıralı dizisi ve $\phi\left(x_1, \ldots, x_r\right)$ de katsayıları R'den gelen $\phi(v) = 0$ olacak şekilde bir form iken ϕ'nin katsayıları $\mathfrak{m}$'ye düşüyorsa v_i'lere *analitik bağımsızdır* denir.

Lemma 3.3.9. *$v = (v_1, \ldots, v_r)$ elemanları analitik bağımsızdır ancak ve ancak ürettiği ideal olan $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle$'de analitik bağımsızdır.*

Kanıt. $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = A$ diyelim. Keyfi p dereceli bir ϕ formu için $\phi(v) \equiv 0 \pmod{A^p\mathfrak{m}}$ olsun. O zaman $\phi(v) \in A^p\mathfrak{m}$ 'dir buradan bir $\alpha \in A^p\mathfrak{m}$ için $\phi(v) = \alpha$ ve buradan da $\phi(v) - \alpha = 0$ elde ederiz.

$\phi(v) - \alpha = \phi'(x)$ dersek $\phi'(x)$'in katsayılarının hepsi $\mathfrak{m}$' ye düşer ve böylece $\phi(x) = \phi'(x) + \alpha$ 'in katsayıları $\mathfrak{m}'$de olur.

Diğer yön için $\phi(v) = 0$ alalım. O halde her p için $\phi(v) \equiv 0 \pmod{A^p\mathfrak{m}}$ olacağından açıktır. □

Lemma 3.3.10. *[8, Lemma 4.1] $v = (v_1, \ldots, v_r)$ elemanları A'da analitik bağımsız olsun. O zaman v_i'ler $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ idealinin bir minimal tabanıdır. Ayrıca eğer $w_1, \ldots, w_r$ elemanları $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ idealinin diğer bir minimal tabanı ise o zaman w_i'ler de A'da analitik bağımsız olur.*

Kanıt. Öncelikle v_i'lerin $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$'nin minimal tabanı olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Yani $v_i \in (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r)$ olsun. Buradan $v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \ldots + \alpha_r v_r$ yazabiliriz. $\phi(X) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{i-1}x_{i-1} - x_i + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \ldots + \alpha_r x_r$ seçersek $\phi(v) = 0$ ve v_i elemanları analitik bağımsız olduğundan $1 \in \mathfrak{m}$ buluruz. Ancak $\mathfrak{m}$ maksimal olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla v_i, $(i = 1, \ldots, r)$ elemanları $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$'nin bir tabanı olur.

Şimdi $B = (v_1, \ldots, v_r)$ ve $\{w_1, \ldots, w_r\}$ B'nin minimal tabanı olsun. Bir p tamsayısı için ϕ, p dereceli bir form ve $\phi(w) \equiv 0\ (mod A^p\mathfrak{m})$ olsun. $w_i = \sum \alpha_{ij} v_j$, $\overline{w_i}$, $\overline{v_j} \in B/\mathfrak{m}B$, $\overline{\alpha_{ij}} \in R/\mathfrak{m}$ yazalım. $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\}$ ve $\{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r\}$ kümeleri $B/\mathfrak{m}B$ uzayının birer bazıdır. $\overline{w_i} = \sum \overline{\alpha_{ij}}\ \overline{v_{ij}}$ olduğundan $\left[\overline{\alpha ij}\right]$ matrisi baz dönüşüm matrisi ve dolayısıyla tersinir olur. Buradan $det\left[\overline{\alpha_{ij}}\right] \neq 0$ buluruz.

$$\phi(w) = \phi\left(\sum \alpha_{1j}v_j, \ldots, \sum \alpha_{rj}v_j\right) \equiv 0\ (mod\ A^p\mathfrak{m})$$

ve v_i'ler A da analitik bağımsız olduğundan $\overline{\phi}\left(\sum \overline{\alpha_{1j}}X_j, \ldots, \sum \overline{\alpha_{rj}}X_j\right) = 0$ olur. $\left[\overline{\beta_{ij}}\right]$, $\left[\overline{\alpha_{ij}}\right]$ matrisinin tersi olsun. O zaman

$$\begin{bmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \overline{\alpha_{12}} & \cdots & \overline{\alpha_{1r}} \end{bmatrix} . \left[\overline{\beta_{ij}}\right] . \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \beta_{1j}X_j \\ \sum \beta_{2j}X_j \\ \vdots \\ \sum \beta_{rj}X_j \end{bmatrix}$$

olur. X_r yerine $\sum \beta_{rj}X_j$ yazılırsa $\overline{\phi}(X_1, \ldots, X_r) = 0$ bulunur ki bu da w_i'lerin A 'ya analitik bağımsız olması demektir. □

Lemma 3.3.11. *[8, Lemma 4.2] A, C R'de idealler, C A'nın bir minimal indirgemesi ve $\{v_1, \ldots, v_r\}$ elemanları C'nin bir minimal taban elemanları ise o zaman v_i'ler A'da analitik bağımsızdır.*

Kanıt. $\phi(X_1,\ldots,X_r)$ p dereceli bir form ve $\phi(v) \equiv 0 \ (mod\ A^p\mathfrak{m})$ olsun. Öncelikle X_1^p teriminin katsayısının $\mathfrak{m}$'de olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. O halde bu katsayı unittir. DT derecesi p olan diğer terimleri göstermek üzere $\phi(X) = c_1.X_1^p + DT$ olarak yazılabilir ve $\phi(v_1,\ldots,v_r) \in A^p\mathfrak{m}$ olduğundan $c_1.v_1^p + DT(v_1,\ldots,v_r) \in A^p\mathfrak{m}$ olur. Ayrıca eğer $n_1+n_2+\cdots+n_r = p$ ise $X_1^{n_1}X_2^{n_2}\ldots X_i^{n_i}\ldots X_r^{n_r} = X_i\left(X_1^{n_1}X_2^{n_2}\ldots X_i^{n_i-1}\ldots X_r^{n_r}\right)$ yazımında v'yi yerine yazarsak $v_1^{n_1}\ldots v_r^{n_r} = v_i\left(v_1^{n_1}v_2^{n_2}\ldots v_i^{n_i-1}\ldots v_r^{n_r}\right)$ elde ederiz. Böylece $v_1^p \in A^p\mathfrak{m} + (v_2,\ldots,v_r)\,C^{p-1}...(*)$ yazabiliriz. Diğer taraftan $C = \langle v_1,\ldots,v_r\rangle$ ise $C^p = \langle\{v_1^{n_1},\ldots,v_r^{n_r}\} : n_1+n_2+\ldots+n_r = p\rangle$ olduğundan bir $y \in C^p$ için $y \in \alpha v_1^p + \ldots + (v_2,\ldots,v_r)\,C^{p-1}$ ve $(*)$ eşitliğinden $C^p \subseteq (v_2,\ldots,v_r)\,C^{p-1} + A^p\mathfrak{m}$ elde ederiz. C, A'nın bir indirgemesi olduğundan uygun bir m tamsayısı için $CA^m = A^{m+1}$'dir. Buradan

$$\begin{aligned} A^{m+p} = A^mC^p &\subseteq (v_2,\ldots,v_r)\,C^{p-1}A^m + A^p\mathfrak{m}A^m \\ &\subseteq (v_2,\ldots,v_r)\,A^{m+p-1} + A^{p+m}\mathfrak{m} \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2dan $A^{m+p} \subseteq (v_2,\ldots,v_r)\,A^{m+p-1}$ buluruz. Buradan $(v_2,\ldots,v_r)$ A'nın bir indirgemesi olur ki bu da $(v_1,v_2,\ldots,v_r)$'nin minimal oluşuyla çelişir. Dolayısıyla X_1^p'nin katsayısı $\mathfrak{m}$'ye düşer.

Şimdi $\alpha_{11},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{r1} \in R$ alalım. Bu elemanların hepsi $\mathfrak{m}$'de olmasın. $(\overline{\alpha_{11}},\overline{\alpha_{21}},\ldots,\overline{\alpha_{r1}}) \in k^r \setminus \{0\}$ve dim$k^r = r$'dir. $[\overline{\alpha_{11}},\overline{\alpha_{21}},\ldots,\overline{\alpha_{r1}}]$ matrisinin determinantı k'da $\overline{0}$'den farklı olduğundan

$$\overline{0} \neq det\,[\overline{\alpha_{ij}}] = \overline{det\,[\alpha_{ij}]}$$

ve buradan $det\,[\alpha_{ij}] \notin \mathfrak{m}$ yani $det\,[\alpha_{ij}]$ unit olur. Dolayısıyla α_{ij} $(1 \leq i \leq r\ ,\ 2 \leq j \leq r)$ elemanlarını $det\,[\alpha_{ij}]$ unit olacak şekilde seçebiliriz. $\{v_1,\ldots,v_r\}$ k^r'nin bir bazı olacak şekilde en az bir $v_i = (\overline{\alpha_{1i}},\ldots\overline{\alpha_{ri}})$ elemanı vardır. $w_1,\ldots w_2$ elemanlarını $v_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}w_j$ ile tanımlayalım. $det\,[\alpha_{ij}]$ unit olduğundan $[\alpha_{ij}]$ matrisi tersinirdir ve

$$[\alpha_{ij}]^{-1}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix} \text{ ve } [\overline{\alpha_{ij}}]\begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \vdots \\ \overline{w_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_r} \end{bmatrix}$$

yazılır. $\beta_1\overline{w_1} + \ldots + \beta_r\overline{w_r} = 0$ olsun. O zaman

$$0 = \begin{bmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \vdots \\ \overline{w_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_r \end{bmatrix}[\overline{\alpha_{ij}}]^{-1}\begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_r} \end{bmatrix} = 0$$

dolayısıyla $[\beta_1,\ldots,\beta_r] = 0$ buluruz. Buradan $\{\overline{w_1},\ldots,\overline{w_r}\}$ kümesi $R/\mathfrak{m}$'de lineer bağımsızdır. $\{w_1, \ldots, w_r\}$ kümesi C'nin bir minimal tabanı olur.

$$\phi\left(\sum \alpha_{1j} w_j, \ldots, \sum \alpha_{rj} w_j\right) \equiv 0 \ (mod A^p \mathfrak{m})$$

ve X_1^p'nin $\phi\left(\sum \alpha_{1j} X_j, \ldots, \sum \alpha_{rj} X_j\right)$ 'deki katsayısı $\mathfrak{m}$'de olduğundan $\phi\left(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{r1}\right) \equiv 0 \ (mod \mathfrak{m})$ buluruz. Bu $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{r1}$ katsayıları keyfi ve $R/\mathfrak{m}$ sonsuz olduğundan ϕ'nin katsayıları $\mathfrak{m}$'ye düşer. Böylece v_i'ler A'da analitik bağımsız olur. □

Lemma 3.3.12. *$v_1, \ldots, v_r$ elemanları A içinde analitik bağımsızdır ancak ve ancak her s için $v_1, \ldots, v_r$ elemanlarının s dereceli kuvvet çarpımlarının kümesinin $A^s/A^s\mathfrak{m}$ içindeki görüntüleri $R/\mathfrak{m}$ üzerinde doğrusal bağımsızdır.*

Kanıt. $v_1, \ldots, v_r$ A içinde analitik bağımsız olsun.

$$\{\bar{v_1}^{n_1}, \ldots, \bar{v_r}^{n_r} \mid n_1 + \ldots + n_r = s\}$$

kümesinin $Q/\mathfrak{m}$ üzerinde doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim:

$$\sum_{n_1+\ldots+n_r=s} \bar{c}_{n_1\ldots n_r} \bar{v}_1^{n_1} \ldots \bar{v}_r^{n_r} = 0$$

olsun. $\phi\left(x_1, \ldots x_r\right) = \sum c_{n_1\ldots n_r} X_1^{n_1} \ldots X_r^{n_r}$ dersek $\overline{\phi}\left(v_1, \ldots, v_r\right) \equiv 0$ (mod $A^s\mathfrak{m}$) ve $v_1, \ldots, v_r$'ler A'da analitik bağımsız olduğundan ϕ'nin katsayıları $\mathfrak{m}$' de olacağından istenen elde edilir.

Diğer yön için ϕ, s dereceli bir form ve $\phi(v) \equiv 0$ (mod $A^s\mathfrak{m}$) olsun. O zaman $\phi(v) + A^s\mathfrak{m} = 0 + A^s\mathfrak{m}$ yani $A^s/A^s\mathfrak{m}$ içinde $\overline{\phi}(v) = \bar{0}$ 'dir.

$$\phi(x) = \sum \bar{c} \cdot \bar{v}_1^{n_1} \ldots \bar{v}_r^{n_r} = \bar{0}$$

ve kabulümüzden $\bar{c} = 0$ ve böylece $c \in \mathfrak{m}$ elde ederiz. O halde v_i' ler analitik bağımsız olur. □

Lemma 3.3.13. *[8, Lemma 4.3] Eğer $v_1, \ldots, v_r$ elemanları A'da analitik bağımsız ise $r \leq l(A)$'dır.*

Kanıt. v_i'ler A'da analitik bağımsız olduğundan Lemma 3.3.12'dan v_i'lerin s dereceden bir kuvveti A^s 'nin minimal tabanının bir parçasıdır. Binomdan

$\dim_k\left(A^s/A^s\mathfrak{m}\right) = \phi(s, A) \geq \binom{s+r-1}{r-1}$ 'dir. (Burada $\binom{s+r-1}{r-1}$ derecesi s olan kuvvet çarpımlarının sayısıdır.) Buradan dereceye geçersek $der\left[\phi(s, A)\right] \geq r-1$ ve böylece $l(A) \geq r$ elde ederiz. □

Teorem 3.3.14. *[8, Theorem 4.1] $B \trianglelefteq_{ind} A$ ve $v_1, \ldots, v_r$'ler B'nin bir minimal taban elemanları olsun. O zaman B A'nın bir minimal indirgemesidir ancak ve ancak v_i'ler A'da analitik bağımsızdır.*

Eğer B, A'nın minimal indirgemesi ise o zaman B'nin minimal tabanındaki eleman sayısı $r = l(A)$'dır.

Kanıt. B, A'nın bir minimal indirgemesi olsun. O zaman Lemma 3.3.11 'den v_i'ler A'da analitik bağımsızdır ve Lemma 3.3.13 'ten de $r \leq l(A)$'dır. Şimdi $l(A) \leq r$ olduğunu gösterelim.

$B \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. Uygun bir t tamsayısı için $BA^t = A^{t+1}$ ve her s tamsayısı için $B^sA^t = A^{t+s}$'dir. A^t, l tane elemanla üretilsin. O halde

$A^{t+s} = B^sA^t$ de $\phi(s, B) \cdot l$ tane elemanla üretilir. Buradan $\phi(t+s, A) \leq \phi(s, B) \cdot l$ elde ederiz. v_i'ler A'da analitik bağımsız olduğundan B'de de analitik bağımsızdır. O halde v_i'lerin s dereceli kuvvet çarpımları B^s'nin minimal tabanı olur. Böylece $\phi(s, B) = \binom{s+r-1}{r-1}$ elde ederiz. Son eşitsizlikte yerine yazarsak $\phi(s, A) \leq l \cdot \binom{s+r-1}{r-1}$ olur. Derecelere geçerek *der* $[\phi(s, A)] \leq r-1$ ve buradan $l(A) \leq r$ gösterilir. Böylece $r = l(A)$ buluruz.

Kanıtı tamamlamak için v_i'ler A'da analitik bağımsız olsun. O zaman Lemma 3.3.13 'ten $r \leq l(A)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.2.1'den $C \subseteq B$ olacak şekilde A'nın bir minimal indirgemesini bulabiliriz. $w_1, \ldots, w_p$ C'nin bir minimal tabanı olsun. O zaman $p \leq r$ 'dir. Lemma 3.2.4'den C'nin bir minimal tabanını B'nin bir minimal tabanına genişletebiliriz. $w_{p+1}, \ldots, w_r$ elemanlarını için $\{w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$ kümesi B'nin bir minimal tabanı olacak şekilde alalım. C minimal olduğundan $p = l(A)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $p \leq r$ ve $r \leq l(A) = p$ olduğundan $p = r$ buluruz. Buradan $C = (w_1, \ldots, w_p) = (w_1, \ldots, w_r) = B$ elde ederiz. □

Teorem 3.3.14 yardımıyla bir A idealinin minimal indirgemelerinin minimal tabanlarındaki eleman sayılarının eşit olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bu eleman sayısı da $l(A)$ değerine eşit olduğundan $l(A)$ analitik yayılım kavramının yeni bir tanımını elde etmiş oluruz.

Teorem 3.3.15. *[8, Theorem 4.2] $B \trianglelefteq_{ind} A$ olsun. O zaman B en az $l(A)$ tane elemanla üretilir. Eğer B, $l(A)$ tane elemanla üretiliyorsa o zaman B, A'nın bir minimal indirgemesi olur.*

Kanıt. C, A'nın B'de kapsanan bir minimal indirgemesi ve $w_1, \ldots w_p$' ler de C'nin bir minimal tabanını üretsin. Bu durumda $p = l(A)$ olduğunu göstermiştik. Ayrıca w_i'ler B'nin bir minimal tabanına genişletilebileceğinden B en az $p = l(A)$ tane elemanla üretilir.

Şimdi B , $l(A)$ tane elemanla üretilsin. O zaman B'nin bir minimal tabanı $l(A)$ tane eleman içereceğinden $B = C$ elde edilir. Yani B minimaldir. □

Sonuç 3.3.16. *Analitik yayılım l(A), A'nın bir minimal indirgemesini üreten minimum eleman sayısıdır.*

Teorem 3.3.17. *[8, Theorem 4.3] $l(A)$ tamsayısı A'da analitik bağımsız olabilecek maksimum eleman sayısıdır.*

Kanıt. Teorem 3.2.1'den A'nın bir minimal indirgemesi olacağından Teorem 3.3.14'den A'da analitik bağımsız olabilecek $l(A)$ tane eleman bulabiliriz. Ayrıca Lemma 3.3.13' ten $w_1, \ldots, w_r$'ler A'da analitik bağımsız ise $r \leq l(A)$ olacağından istenen elde edilir. □

Lemma 3.3.18. *[8, Lemma 4.4] Keyfi bir A ideali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$rank(A) \leq l(A) \leq \dim_k (A/A\mathfrak{m})$$

Kanıt. C, A'nın bir minimal indirgemesi ve $\{v_1, \ldots, v_l\}$ C'nin bir minimal tabanı olsun. O zaman $l = l(A)$ 'dır ve v_i'ler A'da analitik bağımsızdır. Ayrıca v_i'ler A'nın minimal tabanının bir parçası olduğundan $l \leq \dim_k (A/A\mathfrak{m})$'dir. Teorem 3.1.5 'dan C ve A'nın minimal asalları aynı olduğundan

$$rankA = rank(v_1, \ldots, v_l) \leq l$$

olur ki böylece istenen elde edilir. □

Teorem 3.3.19. *[8, Theorem 4.4]Bir A idealinin ana ideal olmasıyla aşağıdaki iki koşulun sağlanması denktir:*

(i)A'nın minimal taban elemanları analitik bağımsızdır.

(ii) $l(A) = \dim_k (A/A\mathfrak{m})$

Kanıt. $\{v_1, \ldots, v_r\}$, A'nın minimal tabanı olsun. O zaman $r = \dim_k (A/A\mathfrak{m})$ 'dir.

Öncelikle A ana ideal olsun. O zaman A'nın minimal indirgemesi kendisidir. v_i'ler $A = (v_1, \ldots, v_r)$ da analitik bağımsızdır ve $r = l(A)$ 'dır.

Şimdi v_i'ler analitik bağımsız olsun. O zaman v_i'ler $A = (v_1, \ldots, v_r)$'da da analitik bağımsız olacağından Teorem 3.3.14 'den A, A'nın minimal indirgemesi olur ki bu da A'nın ana ideal olması demektir. □

Teorem 3.3.19 yardımıyla bir ana idealin analitik bağımsız elemanlarla üretilen bir ideal olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bir R yerel halkasının maksimal ideali ana ideal ise yani analitik bağımsız elemanlarla üretilebiliyorsa R bir *düzenli halka* olur.

Teorem 3.3.20. *[8, Theorem 4.5] A, r tane elemanla üretilen bir ideal ve $rankA = r$ olsun. O zaman A bir ana ideal olur ve dolayısıyla A'nın minimal taban elemanları analitik bağımsızdır.*

Kanıt. $rankA = r$ ve A , r tane elemanla üretildiğinden

$$r = \dim_k (A/A\mathfrak{m})$$

dir. Lemma 3.3.18'ten

$$r = rankA \leq l(A) \leq \dim_k (A/A\mathfrak{m}) = r$$

buradan da $l(A) = \dim_k (A/A\mathfrak{m})$ buluruz. Teorem 3.3.19 'den A ana ideal olur. □

Sonuç 3.3.21. $(R, \mathfrak{m})$ *yerel halkasında* $\dim R = d$ *olsun. O zaman R'de bir parametreler sistemi analitik bağımsızdır ve ürettikleri tanım ideali de ana idealdir.*

Kanıt. R' de d tane elemandan oluşan bir parametreler sisteminin bir $\mathfrak{m}-$asıl ideal ürettiğini biliyoruz. Bu ideale A diyelim. $rankA = d$ ve A, d tane elemanla üretildiğinden A ideali ana ideal ve dolayısıyla da R'de bir parametreler sisteminin analitik bağımsız olduğunu söyleriz. □

Teorem 3.3.22. *[8, Theorem 6.1] Q bir $\mathfrak{m}$-asıl ideal ve* $\dim R = d$ *olsun. O zaman* $l(Q) = rankQ = \dim R = d$*'dir.*

Kanıt. $(R, \mathfrak{m})$ yerel halka ve Q bir $\mathfrak{m} -$ *asıl* ideal olduğundan $rankQ = \dim R$ olur. Lemma 3.3.18 'ten $rankQ = d \leq l(Q)$ olduğunu biliyoruz. O halde $d \geq l(Q)$ olduğunu gösterelim.

$$\phi(s, Q) = \dim_k (Q^s/Q^s\mathfrak{m}) = \lambda (Q^s/Q^s\mathfrak{m}) = \lambda (R/Q^s\mathfrak{m}) - \lambda (R/Q^s)$$

ve $Q^{s+1} \subseteq Q^s\mathfrak{m}$ olduğundan

$$\phi(s, Q) \leq \lambda \left(R/Q^{s+1}\right) - \lambda (R/Q^s)$$

ve bunların derecesi d olan bir polinom belirttiğini söylemiştik. Ayrıca başkatsayıları da eşittir. Buradan

$$\phi(s, Q) \leq P_Q(s + 1) - P_Q(s)$$

Dereceye geçersek $der\,[\phi(s, Q)] < d$ ve buradan $l(Q) \leq d$ elde ederiz. □

Sonuç 3.3.23. *[8, Corollary 6.1] Eğer Q bir $\mathfrak{m}$-asıl ideal ise o zaman Q'da analitik bağımsız olabilecek maksimum eleman sayısı* $\dim R$*' ye eşittir.*

Kanıt. $l(Q) = \dim R$ olduğundan açıktır. □

Sonuç 3.3.24. *[8, Corollary 6.2] Bir $\mathfrak{m}$-asıl Q ideali ana idealdir ancak ve ancak bir parametreler sistemiyle üretilebilir.*

Kanıt. Q bir $\mathfrak{m} -$ *asıl* ideal olduğundan $l(Q) = \dim R = rankQ$ 'dur. $\dim R = d$ diyelim.

Eğer Q bir ana ideal ise $rankQ = d$ olduğundan minimal tabanı $d = l(Q)$ tane eleman içerir. O halde bu d tane eleman bir parametreler sistemi olur.

Şimdi Q bir parametreler sistemiyle üretilsin. O zaman Q'nun minimal tabanı d tane elemandan oluşur ve $rankQ = d$ olduğundan Teorem 3.3.20'den Q ana ideal olur. $\square$

3.4 Analitik Bağımlılık ve Bir İdealin İntegral Kapanışı

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R bir Noether halka olarak alınacaktır.

Tanım 3.4.1. $v, u_1, \ldots, u_r$ elemanlarını alalım. ϕ, $r+1$ değişkenli ve m dereceli bir form olmak üzere $\phi(u_1, \ldots, u_r, v) = 0$ iken v^m'nin katsayısı birimsel oluyorsa v 'ye $u_1, \ldots, u_r$ elemanlarına *analitik bağımlıdır* denir.

Lemma 3.4.2. *$B = (b_1, \ldots, b_r)$ ve $b_1', \ldots, b_s'$ B'nin keyfi elemanları olsun. Eğer α elemanı $b_1', \ldots, b_s'$ elemanlarına analitik bağımlı ise o zaman $b_1, \ldots, b_r$ elemanlarına da analitik bağımlıdır.*

Kanıt. $\phi\left(b_1', \ldots, b_s', \alpha\right) = 0$ ve $der\phi = m$ olsun. O zaman α^m'nin katsayısı birimseldir. a_{ij} elemanları için $b_{ij}' = \sum_j a_{ij} b_j$ olarak yazılabileceğinden

$$\phi\left(\sum a_{1j} b_j, \ldots, \sum a_{sj} b_j, \alpha\right) = 0$$

ve α^m 'nin katsayısı birimsel olduğundan $\psi(x_1, \ldots, x_s) = \phi\left(\sum a_{1j} x_j, \ldots, \sum a_{sj} x_j\right)$ alırsak α, b_i elemanlarına analitik bağımlı olur. $\square$

Yukarıdaki lemma sayesinde bir α elemanı bir B idealinin bir tabanına analitik bağımlı olduğunda B'nin herhangi bir tabanına analitik bağımlı olacağını söyleyebiliriz. Bu ise aşağıdaki tanımı vermemize olanak sağlamaktadır.

Tanım 3.4.3. α elemanı bir B idealinin (herhangi) bir tabanına analitik bağımlı ise α elemanına *B ideali üzerinde integraldir* denir. Ayrıca R'nin B üzerinde integral olan bütün elemanlarının kümesine de B'nin *integral kapanışı* denir ve $\overline{B}$ ile gösterilir. Eğer $B = \overline{B}$ ise B'ye *integral kapalıdır* denir.

Önerme 3.4.4. *B, R'nin bir ideali ve $\alpha \in R$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(i) α, B üzerinde integraldir.

(ii) $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$ olacak şekilde $a_i \in B^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ elemanları vardır.

Lemma 3.4.5. *Bir B ideali, (B, α) idealinin bir indirgemesidir ancak ve ancak α, B üzerinde integraldir.*

Kanıt. $B = (b_1, \ldots, b_r)$ olsun. $B \trianglelefteq_{ind} (B, \alpha)$ olduğunu kabul edelim. O zaman uygun bir m tamsayısı için

$$(B, \alpha)^m = (b_1, \ldots, b_r)(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^{m-1}$$

'dir. Buradan $\alpha^m = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot \phi_i (b_1, \ldots, b_r, \alpha)$ (ϕ_i derecesi $m-1$ olan bir form) yazabiliriz. O halde $\alpha^m - \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot \phi_i (b_1, \ldots, b_r, \alpha) = 0$ ve böylece istenen elde edilir.

Şimdi $\phi(b_1, \ldots, b_r, \alpha) = 0$, $der\phi = m$ ve α^m'nin katsayısı birimsel olsun. O zaman $\alpha^m \in (b_1, \ldots, b_r)(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^{m-1}$ ve buradan da

$$(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^m \subseteq (b_1, \ldots, b_r)(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^{m-1}$$

bulunur. Diğer kapsama açık olduğundan

$$(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^m = (b_1, \ldots, b_r)(b_1, \ldots, b_r, \alpha)^{m-1}$$

elde ederiz. Böylece B, (B, α) 'nın bir indirgemesi olur. □

Önerme 3.4.6. *[3, Corollary 1.1.8] B, R'nin bir ideali ve $r \in R$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

1. *$r \in \overline{B}$.*
2. *$rM \subseteq BM$ ve $\mathrm{Ann}(M).r \subseteq \mathrm{Rad}\,0$ olacak şekilde sonlu üretilmiş bir R-modül M vardır.*

Önerme 3.4.7. *[3, Proposition 1.2.4] $B \subseteq A$ idealler ve $r_1, \ldots, r_k \in R$ olsun. Eğer $C = B + (r_1, \ldots, r_k)$ ve $B \trianglelefteq_{ind} A$ ise o zaman $B \trianglelefteq_{ind} C$ olur.*

Önerme 3.4.8. *[3, Corollary 1.2.5] $J \subseteq I$ idealler olsun. I sonlu üretilmiş ise J, I'nın bir indirgemesidir ancak ve ancak $I \subseteq \overline{J}$ dir.*

Sonuç 3.4.9. *[3, Corollary 1.3.1] Bir halkanın herhangi bir idealinin integral kapanışı, o halkada integral kapalı bir idealdir.*

Teorem 1.5.7'den dolayı $R[It]$'nin $R[t]$ içindeki integral kapanışı uygun $I_0, I_1, I_2, \ldots$ idealleri için $I_0 \oplus I_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus \ldots$ biçimindedir. Aşağıdaki önermede $R[It]$ halkasının $R[t]$ içindeki integral kapanışı ile I idealinin integral kapanışı arasındaki ilişki verilmektedir.

Önerme 3.4.10. *[3, Proposition 5.2.1] R bir halka ve t R üzerinde bir değişken olsun. Buna göre R'nin herhangi bir I ideali için $R[It]$'nin $R[t]$ içindeki integral kapanışı $R \oplus \overline{I}t \oplus \overline{I^2}t^2 \oplus \overline{I^3}t^3 \oplus \ldots$ kademeli halkasıdır.*

Sonuç 3.4.11. *$J \subseteq I$ idealler ve I sonlu üretilmiş ise J, I'nın bir indirgemesidir ancak ve ancak $R[It]$, $R[Jt]$'nin bir integral genişlemesidir.*

Tanım 3.4.12. Bir C idealinin elemanlarının hepsi sıfır bölen değilse C idealine *ilgili ideal* denir.

Not 3.4.13. C ideali ilgili ideal ise o zaman $\forall n$ için $C^n \subseteq I$ olacak şekildeki her I ideali de ilgili idealdir. Dolayısıyla C'nin her indirgemesi de ilgili ideal olur.

Kanıt. $c \in C$ sıfır bölen değilse her n için $c^n \in C^n \subseteq I$ de sıfır bölen değildir. Buradan I ilgili ideal olur. Ayrıca uygun bir r pozitif tamsayısı için $BC^r = C^{r+1}$ ise $C^{r+1} \subseteq B$ olacağından B ilgili ideal olur. □

Teorem 3.4.14. *[8, Theorem 7.2] $B \subseteq A$ ve A bir ilgili ideal olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.*

(i) $B \trianglelefteq_{ind} A$'dir.

(ii) $BC = AC$ olacak şekilde bir C ilgili ideali vardır.

(iii) A'nın her elemanı B üzerinde integraldir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$: Uygun bir m tamsayısı için $BA^m = AA^m$ olsun. $C = A^m$alırsak istenen elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Bir C ilgili ideali için $BC = AC$ olsun. $\alpha \in A$ alalım. $C = (c_1, \ldots, c_s)$ diyelim. O zaman $\alpha c_i = \sum_j b_{ij} c_j$, $b_{ij} \in B$.

$$\begin{aligned} (\alpha - b_{11})c_1 - b_{12}c_2 - \ldots - b_{1s}cs &= 0 \\ -b_{21}c_1 + (\alpha - b_{22})c_2 - \ldots - b_{2s}c_s &= 0 \\ &\vdots \\ \cdots + (\alpha - b_{ss})c_s &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha - b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1s} \\ -b_{21} & \alpha - b_{22} & \cdots & -b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{s1} & -b_{s2} & \cdots & \alpha - b_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Burada

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1s} \\ -b_{21} & \alpha - b_{22} & \cdots & -b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{s1} & -b_{s2} & \cdots & \alpha - b_{ss} \end{bmatrix}$$

dersek $Adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n$ olacağından

$$\begin{bmatrix} det(A)c_1 \\ det(A)c_2 \\ \vdots \\ det(A)c_s \end{bmatrix} = 0$$

ve buradan da $\forall i$ için $det(A)c_i = 0$ dolayısıyla $det(A)C = 0$ ancak C ilgili ideal olduğundan $detA = 0$ buluruz.

$\phi(b_{ij}, \alpha) = 0$ ve α^n'nin katsayısı 1 olduğundan α B üzerinde analitik bağımlıdır.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $A = (a_1, \ldots, a_l)$ olsun.$\forall j$ için α_j, B'ye analitik bağımlı olduğundan Lemma 3.4.5 'dan B, (B, α_j)'nin bir indirgemesi olur. Lemma 3.1.10 'dan da B, $(B, \alpha_1) + \ldots + (B, \alpha_s) = (B, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = A$ 'nın bir indirgemesi olur. □

Sonuç 3.4.15. *A bir ideal olsun. O zaman $\overline{A} = \hat{A}$ olur. Eğer ek olarak A bir ilgili ideal ise A ile $\overline{A}$ arasındaki bütün idealler A'yı bir indirgeme olarak kapsar.*

Kanıt. $A \trianglelefteq_{ind} \hat{A}$ olduğundan Önerme 3.4.8 gereğince $\hat{A} \subseteq \overline{A}$ olur. Tersine $\alpha \in R$, A üzerinde integral ise Teorem 3.1.11 ve Lemma 3.4.5 gereğince $(A, \alpha) \subseteq \hat{A}$ ve dolayısıyla $\alpha \in \hat{A}$ olur. Böylece $\hat{A} = \overline{A}$ elde edilir. Son olarak $A \subseteq A_1 \subseteq \hat{A}$ olsun. O zaman $AC \subseteq A_1C \subseteq \hat{A}C = AC$ olduğundan $AC = A_1C$ ve böylece Teorem 3.4.14'den dolayı A, A_1'in bir indirgemesi olur. □

Sonuç 3.4.16. *$B \subseteq A$ idealler olsun. Buna göre $B \trianglelefteq_{ind} A$ ancak ve ancak $\overline{A} = \overline{B}$.*

Kanıt. $B \trianglelefteq_{ind} A$ ise Sonuç 3.1.12 ve Sonuç 3.4.15'den dolayı $\overline{A} = \overline{B}$ elde edilir. Tersine eğer $\overline{A} = \overline{B}$ ise o zaman $A \subseteq \overline{B}$ olacağından Önerme 3.4.8 gereğince $B \trianglelefteq_{ind} A$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 3.4.17. *[8, Theorem 7.4] $B \trianglelefteq_{ind} A$ ve A bir ilgili ideal ise o zaman $l(A) = l(B)$'dir. Ayrıca A'nın B de kapsanan indirgemeleri B'nin de bir indirgemesi olur.*

Kanıt. Öncelikle ikinci kısmı gösterelim. $C \trianglelefteq_{ind} A$ ve $C \subseteq B$ olsun. O zaman Sonuç 3.4.16'dan dolayı $\overline{C} = \overline{A}$'dır. Ayrıca $C \subseteq B \subseteq \overline{A} = \overline{C}$ ve C ilgili ideal olduğundan Sonuç 3.4.15'dan $C \trianglelefteq_{ind} B$ olur.

Şimdi C, B'nin bir minimal indirgemesi olsun. O zaman C'nin A'nın da bir minimal indirgemesi olacağını gösterelim. $C_1 \subseteq C \subseteq A$ olacak şekilde A'nın bir C_1 indirgemesini alalım. O halde $C_1 \subseteq C \subseteq B$ olacağından $C = C_1$ elde ederiz. Buradan da C'nin minimal tabanındaki eleman sayısı olan $l(A) = l(B)$ elde edilir. □

Sonuç 3.4.18. *B, A ilgili idealinin bir indirgemesi ise o zaman B minimaldir ancak ve ancak B ana idealdir.*

Teorem 3.4.19. *[8, Theorem 7.5] A bir ilgili ideal ve $v_1, \ldots, v_r \in A$ olsun. O zaman $v_1, \ldots, v_r$'lerin A'nın bir minimal indirgemesinin tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır.*

(i) v_i'ler analitik bağımsızdır.

(ii) A'nın bütün elemanları v_i'lere analitik bağımlıdır.

Kanıt. $V = (v_1, \ldots, v_r)$, A'nın bir minimal indirgemesi ve tabanı minimal olsun. O zaman Teorem 3.3.14 'den v_i'ler A'da analitik bağımsızdır. Böylece v_i'ler analitik bağımsız olur. Ayrıca A ilgili ideal olduğundan $(v_1, \ldots, v_r)$ de ilgili ideal olur ve $A \subseteq \overline{V}$ Teorem 3.4.14'den A'nın bütün elemanları v_i'lere analitik bağımlıdır.

Şimdi (i) ve (ii) sağlansın. $A = (a_1, \ldots a_s)$ alalım. O zaman Lemma 3.4.5 'dan her i için $(v_1, \ldots, v_r)$, $(v_1, \ldots, v_r, a_i)$'nin bir indirgemesidir. O zaman Lemma 3.1.10 'den $(v_1, \ldots, v_r)$, $(v_1, \ldots, v_r, a_i, \ldots, a_s) = A$'nın bir indirgemesi olur. Ayrıca v_i'lerin $(v_1, \ldots, v_r)$'nin minimal tabanı olduğunu biliyoruz. Böylece minimal taban elemanları analitik bağımsız olacağından Teorem 3.3.19'den $(v_1, \ldots, v_r)$ ideali ana idealdir. Sonuç 3.4.18 'den $(v_1, \ldots, v_r)$ A'nın bir minimal indirgemesi olur. □

Bölüm 4

Modül İndirgemeleri

4.1 Rees Değer Fonksiyonları ve İntegral Kapanış

R herhangi bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. $V_I : R \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, her $x \in R$ için $x \in I^n \setminus I^{n+1}$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayısı varsa $V_I(x) = n$, aksi halde (yani $x \in \bigcap_{n\geq 0} I^n$ ise) $V_I(x) = \infty$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Önerme 4.1.1. *[5, Proposition 11.1] R herhangi bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. $x \in R$ alalım. O zaman*

$$\overline{V}_I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{V_I(x^n)}{n}$$

limiti vardır. ($\lim_{n\to\infty} \dfrac{V_I(x^n)}{n}$ limiti sonsuz da olabilir.)

Kanıt. $a = \limsup \dfrac{V_I(x^n)}{n}$ olsun. $b < a$ ve $\delta < 1$olsun. Eğer yeterince büyük n değerleri için $\dfrac{V_I(x^n)}{n} \geq \delta b$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır, çünkü buarada b, a'ya δ da 1'e istenildiği kadar yakın seçilebilir.

$b < a$ olduğundan $\dfrac{V_I(x^m)}{m} \geq b$ olacak şekilde m tamsayısı vardır. $\dfrac{l}{l+1} \geq \delta$ olacak şekilde bir l tamsayısı seçelim. $n \geq lm$ olsun. $km \leq n < (k+1)m$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. Dikkat edilirse $k \geq l$'dir. Buna göre $\dfrac{k}{k+1} \geq \delta$ olur. $V_I(x^m) \geq mb$ olduğundan

$$V_I(x^n) \geq V_I(x^{km}) \geq kV_I(x^m) \geq kmb$$

elde edilir. $n < (k+1)m$ olduğundan

$$\frac{V_I(x^n)}{n} > \frac{kmb}{m(k+1)} = \frac{k}{k+1}b \geq \delta b$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanır. □

Önerme 4.1.2. *[5, Proposition 11.2] $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. $x \in \bar{I^k}$ ise o zaman $\bar{V}_I(x) \geq k$'dır. Eğer $\bar{V}_I(x) > k$ ise $x \in \bar{I^k}$ olur.*

Kanıt. $x \in \bar{I^k}$ olsun. O zaman

$$x^{s+1} + a_1x^s + \ldots + a_{s+1} = 0$$

olacak şekilde $a_i \in I^{ki}$ vardır. Kolayca görülebilir ki $m \geq s+1$ ise $x^m \in I^{(m-s)k}$. Buna göre

$$\frac{V_I(x^m)}{m} \geq \frac{(m-s)k}{m}$$

olur. $m \longrightarrow \infty$ iken $\overline{V}_I(x) \geq k$ bulunur.

Şimdi $\overline{V}_I(x) > k$ olsun. Buna göre yeterince büyük n değerleri için $\dfrac{V_I(x^n)}{n} > k$ olur. Buna göre $V_I(x^n) > nk$ ve buradan da $x^n \in I^{nk}$elde edilir. Böylece $x^n + 0.x^{n-1} + \ldots + 0.x + (-x^n) = 0$ yazılırsa $x \in \overline{I^k}$ olması gerektiği görülür. □

Daha sonra göstereceğimiz gibi R Noether halka iken $\overline{V}_I(x) = k$ olduğu zaman da $x \in \overline{I^k}$ olmaktadır.

Lemma 4.1.3. *[5, Lemma 11.3] R bir Krull bölgesi ve $I = uR$ bir temel ideal olsun. $P_1, \ldots, P_r$ u'yu içeren bütün rankı 1 olan asal idealler ve $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_r$ sırasıyla $R_{P_1}, \ldots R_{P_r}$ kesikli değer halkalarının belirlediği kesikli değer fonksiyonları olsun. $e_i = \upsilon_i(u)(i = 1, \ldots, r)$ olsun. O zaman her $x \in R$ için*

$$\overline{V}_I(x) = min\left\{\frac{\upsilon_i(x)}{e_i} : i = 1, \ldots, r\right\}.$$

Kanıt. $a = min\left\{\dfrac{\upsilon_i(x)}{e_i} : i = 1, \ldots, r\right\}$ ve $V_I(x) = k$ olsun. Öncelikle $a - 1 < k \leq a$ olduğunu göstereceğiz. $x \in I^k = u^kR$ olduğundan $\upsilon_i(x) \geq \upsilon_i(u^k) = ke_i$ ve buradan $a \geq k$ elde edilir. Şimdi $a - 1 < m \leq a$ olacak şekilde bir tamsayı alalım. Buna göre $\upsilon_i(u^m) = me_i \leq ae_i \leq \upsilon_i(x)$; yani $x \in u^mR = I^m$ olur. Dolayısıyla $k = V_I(x) \geq m > a - 1$ elde edilir. Böylece $a - 1 < k \leq a$ olduğu kanıtlanır. Bunu x^n için uygularsak $\upsilon_i(x^n) = n\upsilon_i(x)$ olduğunu da düşünerek, $na - 1 < V_I(x^n) \leq na$ elde edilir. Böylece

$$a - \frac{1}{n} < \frac{V_I(x^n)}{n} \leq a$$

ve buradan $n \longrightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \dfrac{V_I(x^n)}{n} = a$ elde edilir. Başka bir deyişle $\overline{V}_I(x) = a$'dır. □

Lemma 4.1.4. *[5, Lemma 11.4] I, herhangi bir R tamlık bölgesinin bir ideali ve T, R'nin bir integral genişlemesi olsun. $J = IT$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $\overline{V}_I(x) = \overline{V}_J(x)$'dir.*

Kanıt. $I^n \subseteq J^n$ olduğundan $\overline{V}_I(x) \leq \overline{V}_J(x)$ olur. Ters eşitsizliği göstermek için önce $J^n \cap R \subseteq \bar{I^n}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $y \in J^n \cap R$ alalım. $y = a_1t_1 + \ldots + a_mt_m$ olacak şekilde $a_i \in I^n, t_i \in T$ vardır. $w_1, \ldots, w_k$, $T_1 = R\left[t_1, \ldots, t_m\right]$'nin $R-$modül olarak üreteçleri olsun.

$$yw_j = a_1\left(w_jt_1\right) + \ldots + a_m\left(w_jt_m\right) \in I^nT_1$$

olduğundan

$$yw_j = b_{j1}w_1 + \ldots + b_{jk}w_k$$

olacak şekilde $b_{jl} \in I^n$ vardır.$B = \left[b_{jl}\right]$, $k \times k$ matrisi olsun. Buna göre

$$(B - yI)\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} = 0$$

olacağından $det\left(B - yI\right) = 0$ olur. Fakat $det\left(B - yI\right) = (-1)^ky^k + b_1y^{k-1} + \ldots + b_m$ olacak şekilde $b_i \in I^{ni}$ bulunabileceğinden tanım gereği $y \in \overline{I^n}$olur. Böylece $J^n \cap R \subseteq \overline{I^n}$ elde edilir.

Şimdi $\beta < \overline{V}_J(x)$ olacak şekilde bir $\beta > 0$ rasyonel sayısı alalım. $V_J(x^n) \geq n\beta$ ve $n\beta \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde yeterince büyük (sonsuz) n değeri bulunabilir. Buna göre, bu n değerleri için $x^n \in J^{n\beta} \cap R \subseteq \overline{I^{n\beta}}$ ve buradan da $V_I(x^n) \geq n\beta$ elde edilir. Böylece $\overline{V}_I(x) \geq \beta$ olur. β, $\overline{V}_J(x)$' e istenildiği kadar yakın alınabileceğinden $\overline{V}_I(x) \geq \overline{V}_J(x)$ bulunur. Böylece kanıt tamamlanır. □

R herhangi bir halka, I bir ideal ve t bir değişken olsun. $R\left[t, t^{-1}\right]$ halkasının

$$\begin{aligned} R\left[It, t^{-1}\right] &= \left\{ \sum_{i=-n}^{n} a_it^i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I^i \right\} \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^nt^n \ (n \leq 0 \Rightarrow I^n = R) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan alt halkasına I'nın *genişletilmiş Rees cebiri* denir. Dikkat edilirse her $m \geq 0$ tamsayısı için $t^{-m}R\left[It, t^{-1}\right] \cap R = I^m$'dir.

Teorem 4.1.5. *[5, Proposition 11.5] R bir Noether tamlık bölgesi, I bir ideal, $S = R\left[It, t^{-1}\right]$ ve $u = t^{-1}$ olsun. $\overline{S}$, S'nin kesirler cismi içindeki integral kapanışı, $P_1, \ldots, P_r$ $\overline{S}$'nin u'yu içeren ve rankı 1 olan asal idealleri ve $v_1, \ldots, v_r$, sırasıyla $\overline{S}_{P_i}$ kesikli değer* *halkalarının belirlediği kesikli değer fonksiyonları olsun. Her $i = 1, \ldots, r$ için $e_i = \upsilon_i(u)$ denirse o zaman her $x \in R$ için*

$$\overline{V}_I(x) = min\left\{\frac{\upsilon_i(x)}{e_i} : i = 1, \ldots, r\right\}$$

olur.

Kanıt. Her $m \geq 0$ için $u^m S \cap R = I^m$ olduğundan, her $n \geq 0$ için $V_I(x^n) = V_{uS}(x^n)$ olur. Böylece $\overline{V}_I(x) = \overline{V}_{uS}(x)$ elde edilir. Lemma 4.1.4 'dan dolayı da $\overline{V}_I(x) = \overline{V}_{u\overline{S}}(x)$ yazabiliriz. $\overline{S}$ bir Krull bölgesi olacağından Lemma 4.1.3'dan kanıt tamamlanır. □

Sonuç 4.1.6. *[5, Corollary 11.6] R bir Noether tamlık bölgesi ve I bir ideal olsun. O zaman her $k \geq 0$ tamsayısı için $x \in \overline{I^k}$ ancak ve ancak $\overline{V}_I(x) \geq k$'dır.*

Kanıt. Daha önce verdiğimiz önermeden dolayı $\overline{V}_I(x) = k$ iken $x \in \overline{I^k}$ olması gerektiğini göstermek yeterlidir. Yukarıdaki teoremin gösterimlerini kullanırsak her $i = 1, \ldots, r$ için $\upsilon_i(x) \geq e_i k = \upsilon_i(u^k)$ olur. Dolayısıyla $x \in u^k\overline{S} \cap R$ olur. Fakat $u^k\overline{S} \cap R = \overline{I^k}$ olduğundan istenen elde edilir. □

R bir Noether tamlık bölgesi ve K, R'nin kesirler cismi olsun.K üzerindeki her kesikli değer fonksiyonu υ için O_υ, υ'nin değer halkasını göstersin. Yani $O_\upsilon = \{0\} \cup \{x \in K^x : \upsilon(x) \geq 0\}$ olsun. Ayrıca $\mathit{\Gamma}$, $R \subseteq O_\upsilon$ özelliğini sağlayan K üzerindeki bütün υ kesikli değer fonksiyonlarının kümesi olsun. Buna göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.1.7. *R bir Noether tamlık bölgesi ve K, R'nin kesirler cismi olsun.Aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $x \in R$ olsun. x, I üzerinde integraldir ancak ve ancak her $\upsilon \in \Gamma$ için $x \in IO_\upsilon$'dir.

(ii) $J \subseteq I$, R'nin iki ideali olsun. J, I'nın bir indirgemesidir ancak ve ancak her $\upsilon \in \Gamma$ için $JO_\upsilon = IO_\upsilon$'dir.

Kanıt. (i) Önce x, I üzerinde integral olsun. Bu durumda xt, $R[It]$ üzerinde, dolayısıyla da $O_\upsilon[IO_\upsilon t]$ üzerinde integraldir. O_υ bir temel ideal bölgesi olduğundan IO_υ tek bir elemanla üretilebilir. Dolayısıyla $O_\upsilon[IO_\upsilon t]$, O_υ üzerinde tek değişkenli polinom halkasına izomorf olacağından integral kapalıdır. Buna göre $xt \in O_\upsilon[IO_\upsilon t]$; yani $x \in IO_\upsilon$ olur.

Şimdi x, I üzerinde integral olmasın. Bu durumda xt de $R[It]$ üzerinde integral değildir. Mori-Nagata Teoremine göre $R[It]$ halkasının $R(t)$ içindeki integral kapanışı bazı kesikli değer halkalarının arakesiti olarak yazılabileceğinden $K(t)$ üzerinde öyle bir ω kesikli değer fonksiyonu bulunabilir ki ω, $R[It]$ üzerinde pozitif değerler alırken $\omega(xt) < 0$ 'dır. $\upsilon = \omega|_K$ olsun. Buna göre υ, K üzerinde bir kesikli değer fonksiyonudur. $x \notin IO_\upsilon$ olduğunu gösterirsek (i)'nin kanıtı tamamlanmış olur. Kabul edelim ki $x \in$

IO_v olsun. O zaman $x = a_1y_1 + \ldots + a_my_m$ olacak şekilde $a_1, \ldots, a_m \in I$ ve $y_1, \ldots y_m \in O_v$ vardır. Buna göre

$$\omega(x) = \upsilon(x) = \upsilon(a_1y_1 + \ldots + a_my_m) \geq \upsilon(a_iy_i)$$

olacak şekilde $i = 1, \ldots, m$ vardır. Fakat bu durumda

$$\begin{aligned} 0 > \omega(xt) &= \omega(x) + \omega(t) \\ &= \upsilon(x) + \omega(t) \\ &\geq \upsilon(a_iy_i) + \omega(t) \\ &= \upsilon(a_i) + \upsilon(y_i) + \omega(t) \\ &= \upsilon(y_i) + \omega(a_it) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. □

4.2 Bir Modülün İndirgemesi ve Bir Alt Modül Üzerinde İntegral Bağımlılık

R bir Noether halka ve $P_1, \ldots, P_r$, R'nin minimal asal idealleri olsun. R_j ile R'nin P_j ile yerelleştirmesini ve K_j ile de R_j'nin rezidü cismini yani R/P_j'nin kesirler cismini gösterelim.

L, M sonlu üretilmiş $R-$modüller ve M, L'nin bir alt modülü olsun. O zaman $R_j \otimes_R M$ de $R_j \otimes_R L$'nin bir alt modülüdür. $W_j := K_j \otimes_R L$ ve $K_j \otimes_R M$'nin W_j içindeki görüntüsüne de V_j diyelim. x_j, L_j, M_j de sırasıyla x, L, M'nin $L \longrightarrow W_j$, $M \longrightarrow V_j$, $x \to 1 \otimes_R x$ dönüşümleri altındaki görüntüleri olsun. O zaman her j için M_j , L_j'nin bir alt modülü olur.

Tanım 4.2.1. $x \in L$ olsun. Eğer her j ve K_j'deki $\upsilon(z) \geq 0$ $(\forall z \in R_j)$ olacak şekildeki her υ kesikli değer fonksiyonu için $x_j \in O_vM_j$ oluyorsa x'e M üzerinde *integraldir* denir.

Aksi belirtilmedikçe genelliği bozmadan R bir tamlık bölgesi ve L, M modüllerini de burulmasız modüller alarak işlemlerimize devam edeceğiz. j'yi sabit tutarak L ve M ile bunların W ve V içindeki görüntülerini gösterelim ve V'yi de W'nın bir alt uzayı olarak düşünelim.

Şimdi bir $x \in L$ için x, M üzerinde integral ise $x \in V$ olduğu açıktır. $L = M + Rx$ olarak alalım. V'nin M üzerinde integral olan elemanlarının kümesi bir $R-$modül olur. Bu modülü $\overline{M}$ ile göstereceğiz. Ayrıca $\overline{M}$ sonlu üretilmiş olmak zorunda değildir.

Lemma 4.2.2. *[9, Lemma 1.1] $M \neq 0$ olsun. $\overline{M}$ sonlu üretilmiştir ancak ve ancak R'nin K'daki integral kapanışı olan $\overline{R}$ bir sonlu üretilmiş $R-$modüldür.*

Kanıt. $0 \neq x \in M$ alalım. O zaman $\overline{M}$, $\overline{R}$'ye $R-$modül olarak izomorf bir $\overline{R}x$ alt modülünü içerir. Buradan $\overline{M}$ sonlu $R-$modül ise $\overline{R}$ de sonlu olur.

Tersi için $\overline{R}$ bir sonlu $R-$modül olsun. $M^+ := Hom_R(M, \overline{R})$, $V^+ := Hom_K(V, K)$ diyelim. V ile V^{++} 'yı ve V'nin sonlu üretilmiş $R-$alt modülleri ile de M^{++}'yı tanımlayalım. Şimdi bir $\mu \in M^+$ alalım. O zaman μ , V^+ da tek türlü belirli bir elemana genişletilebilir. Bu elemanı da μ ile gösterelim. $x \in \overline{M}$ olsun. O zaman O_ν, K'daki $\nu(z) \geq 0$, $(z \in R)$ olacak şekildeki bir ν kesikli değer fonksiyonunun değer halkası olmak ise $\nu(x) \in O_\nu \overline{R}$'dir. Ancak O_ν halkalarının arakesiti $\overline{R}$ olduğundan $\mu(x) \in \overline{R}$ ve buradan da $x \in M^{++}$ elde ederiz ve buradan da $\overline{M}$, M^{++}'nın bir alt modülü olduğundan sonlu üretilmiş olduğu bulunur. □

Tanım 4.2.3. N, M 'nin bir alt modülü olsun. Eğer M'nin her elemanı N üzerinde integral ise *N'ye M'nin bir indirgemesi* denir ve biz bunu $N \trianglelefteq_{ind} M$ ile göstereceğiz. Ayrıca K üzerindeki $\upsilon(z) \geq 0$, $(z \in R)$ olacak şekildeki her υ kesikli değer fonksiyonu için $O_\upsilon M = O_\upsilon N$ sağlanır.

Sonuç 4.2.4. *M, L'nin ve N de M'nin bir alt modülü olsun. O zaman $N \trianglelefteq_{ind} L$ ancak ve ancak $M \trianglelefteq_{ind} L$ ve $N \trianglelefteq_{ind} M$ sağlanır.*

Şimdi modüllerin indirgemesini başka bir yönden ele alalım. M bir sonlu üretilmiş $R-$modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. $E(M)$ ve $E(N)$ ile M ve N'nin (R üzerinde), harici cebirlerinin $E(V)$ içindeki kanonik görüntüleri kastedilsin. M'nin rankı yani V'nin boyutu r ise o zaman $E(V)$'nin $i > r$ olacak şekildeki $E^i(V)$ bileşenleri sıfır ve $E^r(V)$'nin boyutu 1'dir. Buradan $E^r(M)$ rankı 1 olan burulmasız bir $R-$modüldür ve R'nin bir I idealine $R-$modül (dolayısıyla da alt modül) olarak izomorftur. Ayrıca $E^r(N)$ de I'da kapsanan bir J idealine bir izomorfizmayla eşlenebilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.5. *[9, Theorem 1.2] $N \trianglelefteq_{ind} M$ ancak ve ancak $J \trianglelefteq_{ind} I$.*

Kanıt. Öncelikle N, M'nin bir indirgemesi olsun. O zaman uygun bir υ için $O_\upsilon M = O_\upsilon N$'dir ve buradan $O_\upsilon I = O_\upsilon J$ olacağından J'nin I'nın bir indirgemesi olduğunu elde ederiz.

Şimdi J, I'nın bir indirgemesi olsun ve N, M'nin bir indirgemesi olmasın. O zaman $O_\upsilon M \neq O_\upsilon N$ olacak şekilde bir υ seçebiliriz. $O_\upsilon M, O_\upsilon N$ sonlu üretilmiş, burulmasız, $KDH-$modülleri aynı zamanda O_υ üzerinde free modüller olur. Şimdi eğer N rankı M'den küçük olan bir modül ise o zaman $E^r(N) = 0$ ve $E^r(M) \neq 0$ 'dır. Buradan $J = 0$ bulunur ve I'nın bir indirgemesi olmaz. O halde N ve M aynı ranka sahiptir. Bu durumda $O_\upsilon M$'nin bir $u_1, \ldots, u_r$ tabanını seçebiliriz öyleki P, O_υ'nin maksimal idealinin bir üreteci olmak üzere N'nin bir $P^{m(1)}u_1, \ldots, P^{m(r)}u_r$ tabanı vardır. $O_\upsilon N \neq O_\upsilon M$ olduğundan bu $m(j)$ tamsayılarından en az biri sıfırdan büyüktür. Dolayısıyla $m = \sum m(j) > 0$ olmak üzere $JO_\upsilon = P^m IO_\upsilon$ olur ki bu J'nin I'nın bir indirgemesi oluşuyla çelişir. O halde $N \trianglelefteq_{ind} M$ elde edilir. □

Tanım 4.2.6. M bir burulmasız $R-$modül ve T bir kademeli $R-$cebir olsun. Eğer,

(i) T, T_1'in elemanları ile üretilen sonlu üretilmiş bir $R-$modüldür.

(ii) $T_0 = R$, $T_1 = M$

(iii) Uygun bir υ için $O_\upsilon T$ kesirler cismi içinde integral kapalıdır.

sağlanırsa T'ye M için bir *test bölgesi* denir.

Teorem 4.2.7. *[9, Theorem 1.3] T, M için bir test bölgesi ve V_n de KT_n vektör uzayı olsun. O zaman $\overline{T}$, T'nin kesirler cismi içindeki integral kapanışı ise $\overline{T}$ kademeli halkasının $\overline{T}_n$ modülünün V_n deki elemanlarla çakışan n dereceli elemanları T_n'ye integral bağımlıdır.*

Kanıt. $\overline{T}$ kademelidir. Her υ için $O_\upsilon T$ integral kapalı olduğundan her υ için $\overline{T}$ $O_\upsilon T$ de kapsanır ve buradan $x \in \overline{T}_n$, $O_\upsilon T_n$ de kapsanır. Dolayısıyla x elemanı T_n üzerinde integral olur.

Tersi için bir $x \in V_n$ alalım öyleki x, T üzerinde integral olmasın. O zaman T'nin kesirler cisminde bir ω kesikli değer fonksiyonu vardır $(\omega(z) \geq 0, z \in T)$ öyleki $\omega(x) < 0$ 'dır. υ, ω'nin K'ya kısıtlaması olsun. O zaman υ sıfırdan farklı değerli olmalıdır aksi takdirde $\omega(x) \geq 0$ olur. Buradan $O_\upsilon T_n$, O_ω'de kapsanır ve x'i içermez. Dolayısıyla x, T_n üzerinde integral olmaz. □

Lemma 4.2.8. *[9, Lemma 1.4] $O_\upsilon T$'nin kesirler cismi içinde integral kapalı olması için aşağıdakiler gereklidir.*

(i) KT kesirler cismi içinde integral kapalıdır.

(ii) p, O_υ'nin maksimal idealinin üreteci ise o zaman $pO_\upsilon T$ asaldır.

Kanıt. $R = O_\upsilon$ ve T yerine de $O_\upsilon T$ alabiliriz. x, T'ye integral bağımlı olsun. O zaman (i)'den $x \in KT$'dir. Buradan $p^r x \in T$ olacak şekilde bir r seçebiliriz. r'yi minimal seçelim. $r \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz. $r > 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $p^r x \notin pT$'dir. Ancak x, T üzerinde integral olduğundan $p^r x \in \overline{p^r T}$ 'dir ve dolayısıyla $p^r x \in \overline{pT}$ ve $\overline{pT}$ asal olduğundan $p^r x \in pT$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Yani $r \leq 0$'dır. □

Şimdi M için genel test bölgesi tanımına geri dönelim. Bu yapı M'nin simetrik cebiri olan $Sym_R M$'nin $Sym_K V$ simetrik cebiri içindeki görüntüsüdür. (Burada K üzerinde $V = KM$ alıyoruz.) Ayrıca $\mathfrak{B}$, $Sym_R M$ 'nin R ile arakesiti (0) ideali olan tek türlü belirli bir minimal asal ideali olmak üzere $Sym_R(M/\mathfrak{B})$ 'yi tanımlayabiliriz. $Sym_R(M/\mathfrak{B})$'yi $S(M)$ ile gösterelim. N, M'nin bir alt modülü ise o zaman $S(N)$ de $S(M)$'nin bir alt halkasıdır.

Aşağıdaki teoremle $S(M)$'nin M için bir test bölgesi olacağını göstereceğiz.

Teorem 4.2.9. *[9, Theorem 1.5] M bir sonlu üretilmiş $R-$modül ve N de M'nin $KN = KM = V$ olacak şekilde bir alt modülü olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $S(M)$, M için bir test bölgesidir.

(ii) N, M'nin bir indirgemesidir ancak ve ancak $NS(M)$, $S(M)$'nin bir ilgili olmayan idealidir.

Kanıt. (i) $O_v S(M)$'nin kesirler cismi içinde integral kapalı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $X_1, \ldots, X_m$ değişkenler olmak üzere $O_v S(M)$, $O_v [X_1, \ldots, X_m]$'ye izomorf ve M'nin rankı m olduğundan istenen elde edilir.

(ii) $S(M)$, $S(N)$'nin M'nin elemanları ile üretilen bir sonlu genişlemesi ve $S(N)$, N için bir test bölgesi olduğundan M'nin elemanları N üzerinde integraldir integral ancak ve ancak $S(M)$ bir sonlu $S(N)-$modüldür. Buradan N, M'nin bir indirgemesidir ancak ve ancak $NS(M)$, $S(M)$'nin bir ilgili olmayan idealidir. □

Bölüm 5

Sonuçlar

Tez çalışmamızda Değişmeli Cebirde ideallerin kuvvetlerinin büyüdükçe iyileştiğinin anlaşılması üzerine yapılan bir çok önemli çalışmadan biri olan Hilbert-Samuel Polinomlarından yararlanarak bir idealin çokkatlılığı kavramını açıkladık. Bu kavram ideallerin anlaşılması üzerine pek çok parametre sunduğundan önemlidir. İdeallerin çokkatlılık değişmezini bozmadan bazı gereksiz elemanlarını eleyerek daha basit bir formu olan ideal indirgemelerini açıklayarak temel özelliklerine değindik. Daha sonra yerel halkalarda bir ideal için analitik yayılım kavramını tanımlayıp bu kavramın idealin minimal indirgemelerinin minimal tabanlarındaki eleman sayısına eşit olduğunu gösterdik. Bunu takiben analitik bağımlılık kavramını tanımladıktan sonra bir A ideali üzerinde integral olan bütün elemanların kümesinin yani $\overline{A}$'nin aslında $\hat{A}$'ya eşit olduğunu gördük. Son olarak kesikli değer fonksiyonları ve Rees-Değer fonksiyonlarından faydalanarak idealler üzerinde tanımladığımız indirgeme tanımını modüllere genişleterek modül indirgemelerini açıkladık. Aslında modül indirgemesi tanımı yapılırken temel olarak faydalandığımız yapının modüllerin integral kapanışı olduğunu gösterdik.

Kaynakça

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and categories of modules, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[2] D. S. Dummit, R. M. Foote, Abstract algebra. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004.

[3] C. Huneke, I. Swanson, Integral closure of ideals, rings, and modules, London Mathematical Society Lecture Note Series, 336. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] T. Marley, Graded Rings and Modules, https://www.math.unl.edu/~tmarley1/905notes.pdf.

[5] S. McAdam, Asymptotic prime divisors. Lecture Notes in Mathematics, 1023. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] M. Nagata, Local rings. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13 Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London 1962.

[7] D. G. Northcott, Lessons on rings, modules and multiplicities, Cambridge University Press, London, 1968.

[8] D. G. Northcott, D. Rees, Reductions of ideals in local rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. 50, (1954).

[9] D. Rees, Reduction of modules. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (1987), no. 3, 431–449.

[10] R. Y. Sharp, Steps in commutative algebra. Second edition, London Mathematical Society Student Texts, 51. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Merve AKIN

Doğum Yeri : Alanya/ANTALYA

Medeni Hali : Bekar

E-posta : aknnmrve@gmail.com

Adresi : Saray Mah. Hasret Sok. Hacıgökmen Apt. No:12 Daire:8 Alanya/ANTALYA

Eğitim

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce – Orta

İş Deneyimi

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 29/06/2017

Tez Başlığı / Konusu: İDEAL VE MODÜL İNDİRGEMELERİ

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 65 sayfalık kısmına ilişkin, 29/06/2017 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

29.06.2017
Tarih ve İmza

Adı Soyadı:	MERVE AKIN
Öğrenci No:	N13229214
Anabilim Dalı:	MATEMATİK
Programı:	MATEMATİK - TEZLİ YÜKSEK LİSANS
Statüsü:	☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. BÜLENT SARAÇ
(Unvan, Ad Soyad, İmza)