TOPOLOJİK VEKTÖR LATİSLERİ ÜZERİNDE TANIMLI OPERATÖRLERİN OLUŞTURDUĞU AİLELERİN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF FAMILIES OF OPERATORS DEFINED ON TOPOLOGICAL VECTOR LATTICES

AHSEN SENA YURTOĞLU

Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2024

ÖZET

TOPOLOJİK VEKTÖR LATİSLERİ ÜZERİNDE TANIMLI OPERATÖRLERİN OLUŞTURDUĞU AİLELERİN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

AHSEN SENA YURTOĞLU
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
Haziran 2024, 60 sayfa

Son zamanlarda Banach latisleri üzerinde norm yakınsama ve sıra yakınsamanın temelini oluşturduğu çeşitli operatör sınıfları üzerine yapılan araştırmalar önemli bir gelişme kaydetmiştir. Aynı şekilde, lokal solid vektör latislerinde tanımlanan operatörlerin topolojik özellikleri ve vektör latis yapıları da detaylı bir şekilde incelenmiş ve çeşitli özellikleri araştırılmıştır. Son dönemde birçok araştırmacı, farklı operatörlerin demi versiyonlarını araştırmış ve bu operatörler ile ilgili farklı bakış açıları sunmuştur. Bu tezde, lokal solid vektör latisler ve Banach latisler üzerinde tanımlanan operatör sınıfları detaylı bir şekilde incelenmiş, çeşitli operatörlerin demi versiyonları araştırılarak aralarındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Banach latis, Lokal solid vektör latis, KB operatör, Levi operatör, Demi KB operatör, Demi Levi operatör

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF FAMILIES OF OPERATORS DEFINED ON TOPOLOGICAL VECTOR LATTICES

AHSEN SENA YURTOĞLU
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
June 2024, 60 pages

Recently, research on various classes of operators based on norm convergence and order convergence in Banach lattices has made significant progress. Similarly, the topological properties and vector lattice structures of operators defined on locally solid vector lattices have also been studied in detail and various properties have been investigated. Recently, many researchers have explored the demi versions of different operators and introduced different perspectives on these operators. In this thesis, the classes of operators defined on locally solid vector lattices and Banach lattices are studied in detail, and the demi versions of various operators are examined and their relations are studied.

Key Words: Banach lattices, Locally solid vector lattices, KB operator, Levi operator, Demi KB operator, Demi Levi operator

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışmanım Doç. Dr. Nazife Erkurşun Özcan'a sonsuz sabrı, desteği ve değerli katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen, motivasyonumu yüksek tutan sevgili aileme ve Sercan Demirci'ye teşekkür ederim.

Yüksek lisans sürecim boyunca 2210-A burs programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Programı Başkanlığı'na (BİDEB) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Vektör latisleri veya diğer adıyla bilinen Riesz uzayları fonksiyonel analiz ile yakından ilişkilidir. Riesz'in, 20.yüzyılın başlarında yaptığı öncü çalışmalar vektör latislerin temelini oluşturmuştur. Daha sonra birçok matematikçinin katkılarıyla zenginleşmiş ve geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur. Vektör latislerin tanım ve özellikleri 1930 ve 1940 yıllarında geliştirilmiştir. 1950'lerden itibaren birçok çalışma yayımlanmış ve Banach uzayları ile ilişkileri araştırılmıştır. Günümüzde, vektör latisleri özellikle operatör teorisi alanında önemli bir rol oynamaktadır.

Topolojik vektör uzayları fonksiyonel analiz ve topoloji dallarında önemli bir yere sahiptir. Vektör uzay özelliklerinin topolojik özellikler ile birleşmesi lineer operatörlerin ve fonksiyon uzaylarının incelenmesinde, netlerin yakınsama kavramlarında kullanılır. Lokal solid vektör latisleri bir yandan vektör latislerin sıra yapısını bir yandan da topolojik vektör uzaylarının topolojik yapısını içerir. Lineer işlemler ve topoloji bu sıra yapı ile uyumlu bir şekilde tanımlanır. Oluşturulan bu yapı üzerinde tanımlanan operatörlerin sürekliliği ve sıra yapısının korunması açısından önemlidir.

X bir Banach latis ve Y bir Banach uzayı olmak üzere X'in b-sıra sınırlı kümesinin T altındaki görüntüsü relatif zayıf kompakt ise $T : X \to Y$ operatörüne b-zayıf kompakt operatör denir. Bu operatör sınıfı ilk olarak Alpay, Altın, Tonyalı tarafından [3] makalesinde verilmiştir. Bahramnezhad ve Azar [9] makalesinde KB operatör sınıfını tanıtmıştır. Makalenin sonunda X Banach latisinden Y Banach uzayına tanımlı KB operatör olup b-zayıf kompakt olmayan operatör varlığı sorulmuştur. Sonrasında KB operatör sınıfının birçok farklı versiyonu yayınlanmıştır, [4, 6]. [6] makalesinde Altın ve Machcrafi, [9] makalesinde tanımlanan KB operatör sınıfının b-zayıf kompakt operatörler ile aynı olduğunu ispatlamıştır.

[14] makalesinde, [9] makalesinden farklı bir KB operatör sınıfı ile quasi KB operatör sınıfı tanıtılmış, bu KB operatörünün sağlamadığı özellikler üzerinde durularak yeni bir bakış açısı sunulmuştur. [4] makalesinde Lebesgue, quasi Lebesgue, Levi ve quasi Levi operatör sınıfları tanıtılmıştır. Son yıllarda, Banach latisleri üzerinde tanımlanan farklı operatör sınıfları ile ilgili olarak yapılan çalışmalar oldukça ilgi çekici hale gelmiştir. Birçok makalede Banach latis üzerinde tanımlanan operatörlerin demi versiyonları çalışılmıştır. Bu çalışmalar Levi ve quasi Levi operatörlerinin demi versiyonlarının araştırılması için ilgiyi arttırmıştır.

Bu tez dört üniteden oluşmaktadır.

Birinci ünitede, diğer bölümlerde yardımcı olacak temel tanım ve özellikler verilmiştir. Birinci bölümünde vektör latislerin genel özellikleri, sıra yakınsaklık ve operatörler, ikinci bölümünde topolojik vektör uzayı tanımı ve temel özellikleri, üçüncü bölümde lokal solid vektör latis tanımı ve sıra yakınsaklık ile aralarındaki ilişki anlatılmıştır.

İkinci ünitede, lokal solid latisler üzerinde tanımlı olan Lebesgue, ön-Lebesgue, Fatou latis kavramları ele alınmış, aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Hangi koşullar altında denklik sağlanacağı detaylı olarak araştırılmıştır. Lebesgue, quasi Lebesgue, $o\tau$-sürekli operatör tanımları verilmiş ve bu operatörlerin aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunlara ek olarak, vektör latislerde tamamlanışlar verilmiş ve sonrasında topolojik vektör latis üzerinde τ-lateral tamlık tanımı ele alınmıştır. Son olarak, regüler alt latis tanımı verilip, regüler alt latise kısıtlanan bazı operatörlerin özellikleri araştırılmıştır.

Üçüncü ünitede, önce lokal solid topoloji üzerinde KB ve quasi KB operatör tanımları ele alınmıştır. KB, quasi KB ve Lebesgue operatörlerinin arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Bu operatörlerin baskınlık durumu incelenmiş ve belirli koşullar sayesinde baskınlık özelliğinin nasıl sağlandığı araştırılmıştır. Daha sonra, Banach latisleri üzerinde bu operatörlerin davranışları incelenmiş, verilen çoğu önermenin başka şartlar altında geçerli olmadığı çeşitli örnekler ile açıklanmıştır. Ünitenin sonunda, KB ve quasi KB operatörlerin demi versiyonları araştırılmış ve birçok sonuç incelenmiştir.

Son olarak dördüncü ünitede, lokal solid latislerde tanımlanan Levi latis özelliği ile Levi ve quasi Levi operatör tanımı verilmiş, aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Banach latis üzerinde Levi latis ile Fatou latis ve Dedekind tamlık arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Levi operatörlerin norm kapalı olmadığı ve her quasi Levi operatörün Levi operatör olmadığı örnekler ile gösterilmiştir. Quasi Levi operatörlerin baskınlık özelliğini sağladığı ispatlanmış fakat Levi operatörlerin bu özelliği sağlamadığı verilen örnek ile açıklanmıştır. Levi ve quasi Levi operatörlerin demi versiyonları çalışılmış ve KB/quasi KB operatörlerin demi versiyonları ile aralarındaki ilişkiler detaylıca araştırılıp, son olarak verilen diagram ile özetlenmiştir. Bu tezde tartışılan sonuçlar [4, 10, 14] makalelerinde mevcuttur.

2 ÖN BİLGİLER

Bu ünitede tez boyunca kullanılacak genel bilgiler verilecektir. Daha fazla ayrıntı için [1, 2, 19, 20, 21] kitaplarına bakılabilir.

2.1 Vektör Latis Özellikleri ve Operatörler

Vektör latisler tezin temelini oluşturmaktadır. Öncelikle temel özellikleri incelenmelidir.

Tanım 2.1.1. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere üzerinde tanımlı "$\leq$" işlemi ile aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise X kümesine kısmi sıralı küme denir.

(i) Her $x \in X$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği).

(ii) Her $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetrik özelliği).

(iii) Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişkenlik özelliği).

Tanım 2.1.2. X kısmi sıralı kümesi bir vektör uzayı olsun. Eğer

(i) Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

(ii) Her $x, y \in X$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$,

koşulları sağlanıyor ise X uzayına sıralı vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.3. X kısmi sıralı bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ varsa X'nin elemanı ise X kümesine latis denir.

Tanım 2.1.4. X sıralı vektör uzayı aynı zamanda bir latis ise X uzayına vektör latis veya Riesz uzayı adı verilir.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L_p, ℓ_p, $C(X)$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uzayları vektör latislerine birer örnektir.

Tanım 2.1.5. X vektör latisindeki $x \geq 0$ özelliğini sağlayan $x \in X$ elemanına pozitif eleman denir.

Pozitif elemanların kümesi $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ şeklinde gösterilir..

Tanım 2.1.6. X bir vektör latis ve $x, y \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq nx \leq y$ ve $y \in X^+$ iken $x = 0$ oluyor ise X Arşimedyan vektör latistir denir.

Tez boyunca vektör latisleri Arşimedyan alınacaktır.

Tanım 2.1.7. X vektör latisindeki herhangi bir x elemanı alınsın. $x \vee 0$, x elemanının pozitif kısmı, $(-x) \vee 0$, negatif kısmı ve $x \vee (-x)$, mutlak değeri olarak adlandırılır ve sırasıyla $x^+, x^-, |x|$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8. X bir vektör latis ve $x, y, z \in X$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.

(ii) $x - (y \wedge z) = (x - y) \vee (x - z)$ ve $x - (y \vee z) = (x - y) \wedge (x - z)$.

(iii) $x \vee y = (x-y)^+ + y = (y-x)^+ + x$

(iv) $\lambda \geq 0$ için $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ ve $\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$

(v) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|\lambda x| = |\lambda||x|$

(vi) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

(vii) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$

$(viii)$ $x = x^+ - x^-$ ve $x^+ \wedge x^- = 0$

(ix) $|x| = x^+ + x^-$ (buradan $|x| = 0 \iff x = 0$)

(x) $|x-y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$

(xi) $|x+y| \vee |x-y| = |x| + |y|$

(xii) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$ ve $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x+y| - |x-y||$

$(xiii)$ $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$ (Birkoff Eşitsizliği)

Tanım 2.1.9. X vektör latis olmak üzere $x, y \in X$ için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyor ise bu iki eleman birbirine diktir denir. İki elemanın birbirine dik olması $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1.10. (Diklik Özellikleri)

(i) X vektör latis ve $x, y \in X$ için $x \perp y$ ve $x \perp z$ ise her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $x \perp (\lambda y + \mu z)$ sağlanır.

(ii) X vektör latis ve $x, y \in X$ olmak üzere x ve y elemanlarının dik olması için gerek ve yeter koşul $|x+y| = |x-y|$ olmasıdır.

(iii) X vektör latis ve $x, y \in X$ için $x \perp y$ ise

$$|x+y| = |x-y| = |x| + |y| = ||x| - |y|| = |x| \vee |y|$$

olur.

Teorem 2.1.11. (**Riesz Ayrışım Özelliği**) X bir vektör latis ve $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ olsun. $|x| \leq |y_1 + y_2 + \cdots + y_n|$ ise her $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i| \leq |y_i|$ ve $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ olacak şekilde $x_1, \cdots, x_n \in X$ vardır. Ek olarak eğer x pozitif bir vektör ise x_i'ler de pozitif vektör olarak seçilebilir.

Tanım 2.1.12. X bir vektör latis $A \subseteq X$ alt küme olsun. $x \in X$ ve $y \in A$ olmak üzere eğer $|x| \leq |y|$ iken $x \in A$ oluyor ise A'ya solid küme adı verilir. A vektör alt uzayı olmak üzere solid ise ideal adı verilir. B bir ideal olsun. Eğer $\sup A \in X$ değeri olan her $A \subseteq B$ alt kümesi için $\sup A \in B$ oluyor ise B idealine band adı verilir.

Örnek 2.1.13. c_0, ℓ_∞ uzayları noktasal sıralamaya göre vektör latistir. c_0 uzayı ℓ_∞ uzayının idealidir fakat bandi değildir. $(x_n) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{n tane}}, 0, \ldots, 0)$ dizisi alınsın. $(x_n) \in c_0$'dir. $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{1}$ değeri ℓ_∞ içinde vardır fakat $\mathbb{1} \notin c_0$'dir.

Tanım 2.1.14. $(I, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. Her $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ için en az bir $\alpha_3 \in I$ var ve $\alpha_1 \leq \alpha_3$, $\alpha_2 \leq \alpha_3$ oluyor ise I'ya yönlendirilmiş küme veya indis kümesi denir.

Her tam sıralı küme bir indis kümesidir.

Tanım 2.1.15. Tanım kümesi yönlendirilmiş küme olan fonksiyona net denir.

Tanım 2.1.16. X bir küme ve $\leq$ bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için en az bir $z \in X$ var ve $x \leq z$, $y \leq z$ oluyor ise X kümesine yukarı yönlendirilmiş küme denir. $X \uparrow$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.17. Her $x, y \in X$ için $x \vee y \in X$ ise $x \vee y \geq x$ ve $x \vee y \geq y$'dir. Ayrıca her $x, y \in X$ için $x \wedge y \in X$ ise $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$'dir. Böylece X vektör latisi hem aşağı hem yukarı yönlendirilmiş kümedir.

Tanım 2.1.18. X bir vektör latis ve $A \subseteq X$ alt kümesi olsun. A'yı içeren ideallerin en küçüğüne A tarafından üretilen ideal denir.

A tarafından üretilen ideal I_A olmak üzere

$$I_A = \{x \in X : \exists x_1, \cdots, x_n \in A \text{ ve } \lambda \geq 0 \text{ için } |x| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.19. X bir vektör latis olmak üzere tek eleman $\{x\}$ ile üretilen ideale esas ideal denir.

x tarafından üretilen ideal I_x olmak üzere

$$I_x = \{y \in X : \exists \lambda \geq 0 \text{ vardır ve } |y| \leq \lambda |x|\}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.1.20. $\mathbb{R}^2$'de noktasal sıralama ile $(0, 1)$ elemanının ürettiği ürettiği ideal $I_{(0,1)} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $(1, 0)$ elemanının ürettiği ideal $I_{(1,0)} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.21. X vektör latis ve $A \subseteq X$ alt kümesi olsun. A'yı kapsayan bandlerin en küçüğüne A tarafından üretilen band denir.

I, X uzayının bir ideali olmak üzere I tarafından üretilen band B_I olmak üzere

$$B_I = \{x \in X : \exists\ (x_\alpha) \subset I^+ \text{ vardır ve } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$$

şeklindedir.

$A \subseteq X$ olmak üzere A tarafından üretilen band ile A'nın ürettiği I_A ideali tarafından üretilen band aynıdır. $B_I = B_{I_A}$ olur.

Tanım 2.1.22. X bir vektör latis olmak üzere tek eleman $\{x\}$ ile üretilen bande esas band denir.

x elemanı tarafından üretilen band B_x olmak üzere $B_x = \{y \in X : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.23. X vektör latis ve A boştan farklı bir alt küme olsun. $\{x \in X : \forall\, a \in A$ için $a \perp x\}$ kümesine A'nın dik tümleyeni denir ve A^d şeklinde gösterilir.

A^d, X içerisinde bir idealdir. Dik tümleyen kümesi

(i) $(A^d)^d = A^{dd}$

(ii) $A \subseteq A^{dd}$ ve

(iii) $A \subseteq B$ ise $B^d \subseteq A^d$

özelliklerini sağlar.

Teorem 2.1.24. X Arşimedyan vektör latis ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. $B_A = A^{dd}$'dir. Eğer A band ise $B_A = A = A^{dd}$'dir.

Tanım 2.1.25. X normlu uzay ve vektör latis olmak üzere her $x, y \in X$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyor ise X uzayına normlu vektör latis adı verilir. X normlu vektör latisi olmak üzere X norma göre tam ise Banach latis adını alır.

X normlu vektör latis olmak üzere her $x, y \in X$ için $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$ ve $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$ eşitsizlikleri sağlanır.

Örnek 2.1.26. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ uzayları Banach latistir. K kompakt ve Hausdorff olmak üzere $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ bir Banach latistir fakat $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ normu ile $C(K)$ uzayı tam olmadığından $(C(K), \|\cdot\|_p)$ normlu vektör latistir.

Aşağıdaki örnek her normun latis norm olmayacağına dair bir örnektir.

Örnek 2.1.27. $X = \mathbb{R}^2$ olsun ve $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\|\cdot,\cdot\|$ ikilisi

$$\|x, y\| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

şeklinde tanımlansın. $\{e_1, e_2\}$ standart tabanı ve $x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\|x\|^* = \|x, e_1\| + \|x, e_2\|$ normu tanımlansın. $|x| < |y|$ olmak üzere $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alınsın.

$$\|x\|^* = \|x, e_1\| + \|x, e_2\| = |x_1| + |x_2| < |y_1| + |y_2| = \|y, e_1\| + \|y, e_2\| = \|y\|^*.$$

$\mathbb{R}^2$ uzayı $\|\cdot\|^*$ normu ile normlu vektör latistir. Fakat normu tanımlamak için $\{e_1, e_2\}$ standart tabanı yerine $\{a = (0,1), b = (1,2)\}$ lineer bağımsız kümesi alınır ise tanımlanan $\|\cdot\|^*$ normu latis normu olmaz. Örnek olarak $x = (1,1)$ ve $y = (1,2)$ elemanlarını alınsın. $|x| \leq |y|$ sağlanır fakat $\|x\|^* \leq \|y\|^*$ eşitsizliği sağlanmaz. O halde $\{a = (0,1), b = (1,2)\}$ lineer bağımsız kümesi ile $\|\cdot\|^*$ normu latis normu değildir.

Tanım 2.1.28. X Banach latis olsun.

(i) Her $x, y \in X$ ve $x \wedge y = 0$ için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyor ise X uzayı AL uzay denir.

(ii) Her $x, y \in X$ ve $x \wedge y = 0$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyor ise X uzayı AM uzay denir.

Örnek 2.1.29. $(L_1, \|\cdot\|_1)$ uzayı AL uzayına, $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ve $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ uzayları AM uzayına örnektir.

(x_α) bir net olmak üzere $A = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ kümesi düşünülsün. Eğer A aşağı yönlü bir küme ise (x_α) neti $x_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir. Ayrıca (x_α) neti aşağı yönlü ve $\inf x_\alpha = 0$ ise $x_\alpha \downarrow 0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.30. X normlu bir vektör latis olmak üzere eğer $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ koşulunu sağlıyor ise X'in normuna sıra sürekli norm ve X'e sıra sürekli normlu vektör latis adı verilir.

Örnek 2.1.31. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\|\cdot\|_p$ normu ile L_p ve ℓ_p uzayları sıra sürekli norma sahiptir, sup normu ile $C[0,1], L_\infty[0,1]$ ve ℓ_∞ uzayları Banach latis olup sıra sürekli norma sahip değildir.

Tanım 2.1.32. X bir vektör latis ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ oluyor ise (x_n) dizisine dik dizi denir.

Önerme 2.1.33. Her AL-uzayı sıra sürekli norma sahiptir.

Tanım 2.1.34. X bir vektör latis olsun. $\emptyset \neq A \subseteq X$ olmak üzere üstten sınırlı (sayılabilir) alt kümesinin supremumu varsa X uzayına Dedekind tam (σ-Dedekind tam) vektör latis denir.

Teorem 2.1.35. (Nakano) X bir Banach latis olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) X sıra sürekli norma sahiptir.

(ii) X içinde $0 \leq x_n \uparrow x$ ise (x_n) norm Cauchy dizisidir.

(iii) X Dedekind σ-tam ve X içinde $x_n \downarrow 0$ ise $\|x_n\| \downarrow 0$ olur.

(iv) X, ikinci dual uzayının bir idealidir.

(v) X'nin her sıra sınırlı aralığı zayıf kompakttır.

Sonuç 2.1.36. X Banach latisi sıra sürekli norma sahip ise Dedekind tamdır.

Operatör sınıfları tanımlanırken sıra yakınsaklık kavramına ihtiyaç duyulmaktadır. Burada sıra yakınsaklık tanımı ile temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.1.37. X bir vektör latis, I ve Λ iki yukarı yönlendirilmiş küme olmak üzere $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ bir net ve $x \in X$ olsun. Her bir $\beta \in \Lambda$ ve her $\alpha \geq \alpha_0$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde bir tane (y_β) neti ve en az bir tane $\alpha_0 \in I$ var ise (x_α) netine sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. x elemanına ise sıra limiti adı verilir.

$$x_\alpha \xrightarrow{o} x \iff \forall \beta \in \Lambda, \exists \alpha_0 \in I, \forall \alpha > \alpha_0 \text{ iken } |x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$$

olarak yazılabilir.

Lemma 2.1.38. X vektör latis olmak üzere $(x_\alpha) \subseteq X$ netinin sıra limiti var ise tektir.

Lemma 2.1.39. X vektör latis olsun. X'in içinde $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $(y_\beta)_{\beta \in \Lambda}$ iki net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $y_\beta \xrightarrow{o} y$ olsun. Aşağıdaki önermeler sağlanır.

(i) $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$, $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$, $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$ olur.

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $ax_\alpha + by_\beta \xrightarrow{o} ax + by$ olur.

(iii) $x_\alpha \vee y_\beta \xrightarrow{o} x \vee y$ ve $x_\alpha \wedge y_\beta \xrightarrow{o} x \wedge y$ olur.

(iv) $x_\alpha \uparrow x$ veya $x_\alpha \downarrow x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.

(v) $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ olur.

Tanım 2.1.40. X vektör latis, $A \subseteq X$ alt kümesi olsun. Herhangi $(x_\alpha) \subseteq A$ ve X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $x \in A$ oluyor ise A'ya sıra kapalı denir. Eğer bu tanımda net yerine dizi alınır ise A kümesine σ-sıra kapalı adı verilir.

Teorem 2.1.41. X vektör latis olmak üzere aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) X Arşimedyan uzaydır.

(ii) (λ_α) $\mathbb{R}$'de bir net ve $\lambda_\alpha \to 0$ ise her $u \in X$ için $\lambda_\alpha u \xrightarrow{o} 0$'dır.

(iii) Eğer $\mathbb{R}$ içinde $\lambda_n \to 0$ ise her $u \in X$ için $\lambda_n u \xrightarrow{o} 0$'dır.

(iv) X içindeki her B bandi için $B = B^{dd}$'dir.

(v) $\emptyset \neq S$, $S \subseteq X^+$ ve $T = \{v \in X : \text{her } u \in X \text{ için } 0 \leq v \leq u\}$ ise $\inf\{u - v : u \in S, v \in T\} = 0$'dır.

Lemma 2.1.42. X sıra sürekli norma sahip vektör latistir ancak ve ancak $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dir.

Lemma 2.1.43. X bir Banach latis olmak üzere (x_n), X içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ise $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde en az bir tane (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

Bu bölümün devamında vektör latis üzerinde tanımlı operatörlerin temel özellikleri verilecektir. $T : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty$ oluyor ise T dönüşümüne operatör denir. X'ten Y'ye giden operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.44. X, Y vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ operatör olsun. Her $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ oluyor ise T operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım 2.1.45. X, Y vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ operatör olsun. Her $x, y \in X$ için $x \leq y$ iken $Tx \leq Ty$ ise T operatörüne sıra koruyan operatör denir.

Teorem 2.1.46. X, Y vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ operatör olsun. T pozitif operatördür ancak ve ancak T sıra koruyan operatördür.

Teorem 2.1.47. X bir Banach latis, Y normlu vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ pozitif operatör olsun. T operatörü süreklidir.

Tanım 2.1.48. X vektör latis, $x \leq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. $\{z \in X : x \leq z \leq y\}$ kümesine sıra aralık denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.49. X vektör latis olmak üzere A, X'in bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesi bir sıra aralığın içine düşüyor ise sıra sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.50. X, Y vektör latis ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer sıra sınırlı kümelerin T altındaki görüntüsü Y içinde de sıra sınırlı ise T operatörüne sıra sınırlı operatör denir.

Sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(X, Y)$ ile gösterilir. Bu tanım, her $x \in X^+$ için $T[-x, x] \subset [-y, y]$ olacak şekilde en az bir $y \in Y^+$ var ise T operatörü sıra sınırlı operatördür şeklinde de verilebilir.

Lemma 2.1.51. X, Y vektör latis olsun. $T : X \to Y$ pozitif operatörü sıra sınırlıdır.

Tanım 2.1.52. X, Y vektör latis ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $T \vee (-T) \in L(X, Y)$ var ise bu operatöre T'nin modülü denir ve $|T|$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.53. X, Y vektör latis ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $x \in X^+$ için $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$, Y^+'nın elemanı ise $|T|$ vardır ve $|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$'dir.

Tanım 2.1.54. X, Y vektör latis ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ oluyor ise T operatörüne sıra sürekli operatör denir.

2.2 Topolojik Vektör Uzayları

Topolojik vektör uzaylar topolojik ve cebirsel yapılar arasında bağlantı kuran uzaylardır. Banach ve Hilbert uzaylarının genellemesi olarak görülebilecek bu uzay lokal solid vektör latisleri tanımlamak için gereklidir. Bu bölümde topolojik vektör uzaylarının temel bilgileri verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [2, 16, 21] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.2.1. X, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X'in üzerinde bir τ topolojisi var ve

$$\begin{aligned} t : X \times X &\to X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} ç : \mathbb{R} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

dönüşümleri bu τ topolojisine göre sürekli ise τ topolojisine lineer topoloji, X uzayına topolojik vektör uzayı (TVU) denir.

Örnek 2.2.2. Herhangi X vektör uzayı, üzerinde tanımlanan kaba topoloji ile her zaman topolojik vektör uzayıdır. Her normlu vektör uzayı topolojik vektör uzaydır.

Tanım 2.2.3. X bir vektör uzayı ve U, X'in alt kümesi olsun.

(i) Her $x \in X$ için $|\lambda| \leq p$ olacak şekilde en az bir $p \in \mathbb{R}^+$ var ve $\lambda x \in U$ oluyor ise U kümesine absorbing küme denir.

(ii) Her $x \in U$ ve $|\lambda| \leq 1$ olan her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in U$ oluyor ise U kümesine balanced küme denir.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. U birim yuvarı, absorbing ve balanced kümedir.

Tanım 2.2.4. X bir küme ve $\mathcal{F}$, X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdakiler sağlanıyor ise $\mathcal{F}$'e filtre denir.

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$'dir.

(iii) $F \subset F^{'}$ ve $F \in \mathcal{F}$ ise $F^{'} \in \mathcal{F}$'dir.

Tanım 2.2.5. X bir küme ve $\mathcal{B}$, X'in boş olmayan alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdakiler sağlanıyor ise $\mathcal{B}$'ye $\mathcal{F}$ filtresinin tabanı denir.

(i) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$

(ii) Her $A \in \mathcal{F}$ için $B \subseteq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ vardır.

Teorem 2.2.6. (X, τ) topolojik vektör uzayı ve $x \in X$ olsun. U, X'in alt kümesi olmak üzere x noktasını içeren en az bir açık küme içeriyorsa x'in komşuluğu adı verilir. $x \in X$ noktasının tüm komşuluklarının ailesi $\mathcal{F}(x)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.7. X topolojik uzay ve $x \in X$ alınsın. $\mathcal{F}(x)$ komşuluk filtresi aşağıdaki koşulları sağlar.

(N1) Herhangi $A \in \mathcal{F}(x)$ için $x \in A$'dır.

(N2) Herhangi $A \in \mathcal{F}(x)$ ve her $y \in B$ için $A \in \mathcal{F}(y)$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{F}(x)$ vardır.

Tersine, eğer her $x \in X$ için $(N1)$ ve $(N2)$ koşullarını sağlayan bir $\mathcal{F}_x$ filtresi varsa, her $x \in X$ için $\mathcal{F}_x$, x'in komşuluk ailesi olacak şekilde tek τ topolojisi vardır, diğer bir deyişle her $x \in X$ için $\mathcal{F}(x) \equiv \mathcal{F}_x$'dir.

Teorem 2.2.8. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan X vektör uzayının filtresi $\mathcal{F}$, X'in vektör yapısıyla uyumlu topolojiye göre 0'ı içeren komşuluklarının filtresidir, ancak ve ancak

(i) $\mathcal{F}$'in her U elemanı 0'ı içerir.

(ii) Her $U \in \mathcal{F}$ için $V + V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{F}$ vardır.

(iii) Her $U \in \mathcal{F}$ ve $\lambda \neq 0$ olan her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda U \in \mathcal{F}$.

(iv) Her $U \in \mathcal{F}$ için U absorbing kümedir.

(v) Her $U \in \mathcal{F}$ için $V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{F}$ balanced kümesi vardır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ X topolojik vektör uzayı olmak üzere $\mathcal{F}$, 0'ı içeren komşuluklardan oluşan filtre olsun.

(i) $\mathcal{F}$, 0'ı içeren komşuluklardan oluşan filtre olduğundan aşikardır.

(ii) X topolojik vektör uzay olduğundan $(x, y) \longmapsto t(x, y) = x + y$ süreklidir. $U \in \mathcal{F}$ alınsın. U'nun t altındaki ön görüntüsü $t^{-1}(U) \subset X \times X$ $(0, 0)$'ın komşuluğudur.

$$W_1 \times W_2 \subset t^{-1}(U)$$

olacak şekilde $W_1, W_2 \in \mathcal{F}(0)$ vardır. $V = W_1 \cap W_2$ alınsın. $V \subset W_1$ ve $V \subset W_2$'dir ve buradan $V \times V \subset W_1 \times W_2$ elde edilir.

$$t(V \times V) \subset t(W_1 \times W_1)$$

olduğundan istenilen $V + V \subset U$ bulunur.

(iii) $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}$ alınsın.

$$\begin{aligned} \psi : X &\to X \\ x &\longmapsto \frac{1}{\lambda}x \end{aligned}$$

dönüşümü topolojik otomorfizmdir, yani ψ dönüşümü birebir, örten sürekli ve açık bir lineer dönüşümdür. $U \in \mathcal{F}$ alınsın. $\psi^{-1}(U) = W \in \mathcal{F}$'dir.

$$\psi(\psi^{-1}(U)) = \psi(W) = \frac{1}{\lambda}W \subset U$$

olur ve buradan $W \subset \lambda U$ yazılır. $W \in \mathcal{F}$ olduğundan $\lambda U \in \mathcal{F}$ elde edilir.

(iv) $U \in \mathcal{F}$ absorbing küme olmasın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n}y \notin U$$

olacak şekilde en az bir $y \in X$ vardır. $\frac{1}{n} \to 0$ ve $y \to y$ olduğundan

$$\frac{1}{n}y \to 0.y = 0$$

elde edilir. Böylece $0 \in U$ için her $n \geq N$ iken $\frac{1}{n}y \in U$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu da çelişkidir.

(v) X topolojik vektör uzayı olduğundan

$$\begin{aligned} ç : \mathbb{R} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

süreklidir. $U \in \mathcal{F}$ alınsın. U'nun altındaki ön görüntüsü $ç^{-1}(U) \subset \mathbb{R} \times X$ $(0,0)$'ın komşuluğudur.

$$\mathbb{N} \times M \subset \mathbb{R} \times X$$

ve

$$N \times M \subset ç^{-1}(U)$$

olacak şekilde $N, M \in \mathcal{F}(0)$ vardır. $N \subset \mathbb{R}$ Öklid topolojisine göre komşuluk olduğundan $B(r,0) \subset N$ olacak şekilde en az bir $r > 0$ vardır.

$$\overline{B(0,r)} \times M \subset N \times M \subset ç^{-1}(U)$$

ve buradan

$$ç(\overline{B(0,r)} \times M) \subset ç(ç^{-1}(U))$$

yazılabilir. Bu da $\lambda M \subset U$ demektir. $V = \bigcup_{\substack{\lambda \\ |\lambda| \leq r}} \lambda M$ kümesini alınsın. $\lambda M \subset U$ olduğundan $V \subset U$ olur. V kümesinin balanced kümedir. $x \in V$ alınsın. $|\lambda| \leq r$ olacak şekilde en az bir λ vardır ve $x \in \lambda M$'dir. $|\mu| \leq 1$ olacak şekilde μ alınsın. $\mu x \in \mu\lambda M$ olur.

$$|\lambda'| = |\mu\lambda| = |\mu||\lambda| \leq |\lambda| \leq r$$

olduğundan $\mu x \in \mu\lambda M = \lambda' M \subset V$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $(i-v)$ koşulları herhangi bir $\mathcal{F}$ filtresi için sağlansın. (X,τ) topolojik uzay olsun. Herhangi $x \in X$ için $\mathcal{F}(x) = \{x+U : U \in \mathcal{F}\}$ şeklindedir.
$(N1)$ $A \in \mathcal{F}(x)$ alınsın. $A = x+U$, $U \in \mathcal{F}$ yazılabilir. Böylece $x \in A$ sağlanır.
$(N2)$ $U \in \mathcal{F}$ olmak üzere $A = x+U \in \mathcal{F}(x)$ alınsın. $U \in \mathcal{F}$ ise $V+V \subset U$ sağlanacak şekilde $V \in \mathcal{F}$ vardır. $B = x+V \in \mathcal{F}(x)$ tanımlansın ve $y \in B$ alınsın.

$$y+V \subset V+B \subset V+x+V \subset x+U = A.$$

Fakat $y+V \in \mathcal{F}(y)$ ve $\mathcal{F}(y) = \{y+U : \forall\, U \in \mathcal{F}\}$ olduğundan $A \in \mathcal{F}(y)$ bulunur. Böylelikle $\tau = \{\mathcal{O} \subset X : x \in \mathcal{O} \text{ iken } \mathcal{O} \in \mathcal{F}(x)\}$, $\mathcal{F}(x)$ komşuluklarından oluşan bir topolojidir.

$$\begin{aligned} t : X \times X \quad &\rightarrow \quad X \\ (x,y) \quad &\longmapsto \quad x+y \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir. W komşuluk olmak üzere $(x_0+y_0) \in W$ alınsın. $\mathcal{F}$ filtresi $(N1)$ ve $(N2)$ koşullarını sağlayan 0'ın filtresi olsun. $U \in \mathcal{F}$ için $W = (x_0+y_0)+U$'dır. (ii) şıkkından $V+V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{F}$ vardır.

$$(V+x_0)+(V+y_0) \subset U+(x_0+y_0) = W$$

şeklinde yazalabilir. Buradan

$$t^{-1}((V+x_0)+(V+y_0)) \subset t^{-1}(W)$$

elde edilir. $V_1 \times V_2$ (x_0,y_0)'nin komşuluğu olmak üzere

$$t((V+x_0)+(V+y_0)) \subset (V+x_0)+(V+y_0) \subset W$$

olduğundan toplam dönüşümü sürekli olur.

$$\begin{aligned} ç : \mathbb{R} \times X \quad &\rightarrow \quad X \\ (\lambda,x) \quad &\longmapsto \quad \lambda x \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir. Herhangi $\lambda_0 x_0 \in U'$ komşuluğu alınsın. $U \in \mathcal{F}$ için $U' = U+\lambda_0 x_0$ şeklinde yazılır. (ii) şıkkından, $V+V \subset U$ sağlanacak şekilde en az bir $V \in F$ vardır. (v) şıkkından $W \subset V$ olacak şekilde en az bir $W \in \mathcal{F}$ vardır ve W balanced kümedir. Böylece

$$W+W \subset V+V \subset U$$

olur. (v) şıkkından W absorbing kümedir. $|\lambda| \leq \rho$ ve $\lambda x_0 \in W$ olacak şekilde en az bir $\rho > 0$ vardır.
1.durum: $\lambda_0 = 0$ olsun. $\lambda_0 x_0 = 0$ olur böylece $U = U'$'dir.

$$ç(B(0,\rho) \times (x_0+W)) = \{\lambda x_0 + \lambda w : \lambda \in (B(0,\rho), w \in W\}$$

şeklindedir. W absorbing küme olduğundan $\lambda x_0 \in W$'dir. $|\lambda| \leq \rho$ ve W balanced küme olduğundan $\lambda W \subset W$'dir. Böylece

$$ç(B(0,\rho) \times (x_0+W)) \subset W+W \subset U$$

bulunur.
2.durum: $\lambda_0 \neq 0$ olsun. $\min\{\rho, |\lambda_0|\} = \mu$ alınsın. Genelliği bozmadan $\rho \leq 1$ kabul edelim.

$$\varsigma((\lambda_0 + B(0,\mu)) \times (x_0 + \frac{1}{|\lambda_0|}W)) = \{\lambda z : \lambda \in \lambda_0 + B(0,\mu) \text{ve} z \in x_0 + \frac{1}{|\lambda_0|W}\}.$$

$\xi \in B(0,\mu),\ \mu \leq \rho$ ve W absorbing küme olduğundan $\xi x_0 \in W$ olur. Her

$$\xi \in B(0,\mu),\ \mu \leq \rho,\ \left|\frac{\xi}{|\lambda_0|}\right| \leq \frac{\mu}{|\lambda_0|} \leq 1, \frac{\lambda_0}{|\lambda_0|} \leq 1$$

ve W balanced küme olduğundan $\frac{\xi}{|\lambda_0|}w \in W$ ve $\frac{\lambda_0}{|\lambda_0|}w \in W$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda z = \lambda_0 x_0 + \frac{\lambda_0}{|\lambda_0|}w + \xi w + \frac{\xi}{|\lambda_0|}w \quad &\in \quad \lambda_0 x_0 + W + W + W \\ &\subset \quad \lambda_0 x_0 + V + W \\ &\subset \quad \lambda_0 x_0 + V + V \subset \lambda_0 x_0 + U \end{aligned}$$

elde edilir ve $\varsigma((\lambda_0 + B(0,\mu)) \times (x_0 + \frac{1}{|\lambda_0|}W)) \subset \lambda_0 x_0 + U$ bulunur.

□

Önerme 2.2.9. X bir topolojik vektör uzayı olsun. X Hausdorff uzaydır gerek ve yeter koşul

$$\forall x \neq 0,\ \exists U \in \mathcal{F}(0) \text{ için } x \notin U. \tag{2.2.1}$$

Topolojik vektör uzayının topolojisi ötelemeyi koruduğundan X Hausdorff uzaydır gerek yeter koşul $T1$ uzaydır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) (X,τ) Hausdorff olsun. Herhangi $0 \neq x \in X$ için $U \in \mathcal{F}(0)$ ve $V \in \mathcal{F}(x)$ vardır ve $U \cap V = \emptyset$. Böylece $x \notin U$ olur ve (2.2.1) sağlanır.
($\Leftarrow$) (2.2.1) sağlansın. $x \neq y \in X$ alınsın. $x - y \neq 0$ olur ve (2.2.1)'den $x - y \notin U$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{F}(0)$ vardır. Teorem 2.2.8, (ii) ve (v)'den $V+V \subset U$ olacak şekilde en az bir V balanced kümesi vardır. V balanced küme olduğundan $V = -V$'dir. Buradan $V - V \subset U$ bulunur. $(x+V) \cap (y+V) \neq \emptyset$ olsun. $z \in (x+V) \cap (y+V)$ alınsın. $v \in V$ ve $w \in V$ olmak üzere $z = x + v = y + w$ şeklinde yazılabilir. Buradan $x - y = w - v \in V - V \subset U$ elde edilir ki bu (2.2.1) ile çelişir. □

Tanım 2.2.10. X, Y uzayları $\mathbb{R}$ üzerinde iki topolojik vektör uzayı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu alınsın. Y içindeki her $V \in \mathcal{F}(0)$ komşuluğu için X'in içinde $U \in \mathcal{F}(0)$ komşuluğu var ve her $x, y \in X$ için $x - y \in U$ iken $f(x) - f(y) \in V$ oluyor ise f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

2.3 Lokal Solid Vektör Latis

Daha ayrıntılı bilgi için [2] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.3.1. X bir vektör latis olsun. ζ lineer topolojisi solid kümelerden oluşan 0 bazına sahip ise ζ'ya X üzerinde lokal solid topoloji denir. (X,ζ) uzayına lokal solid vektör latis adı verilir.

Normlu vektör latisler lokal solid vektör latislere bir örnektir.

Tanım 2.3.2. X bir vektör uzayı olsun. ζ lineer topolojisi konveks kümelerden oluşan 0 tabanına sahip ise ζ'ya X üzerinde lokal konveks topoloji denir.

Tanım 2.3.3. X vektör latis olsun. ζ lineer topolojisi hem lokal solid hem lokal konveks topoloji ise ζ'ya lokal konveks solid topoloji, (X, ζ) uzayına lokal konveks solid vektör latis denir.

[2] referansındaki Teorem 1.11 ve Teorem 2.19(ii)'ye göre (X, ζ) lokal konveks solid vektör latisi absorbing, ζ-kapalı, konveks ve solid kümelerden oluşan 0 bazına sahiptir.

Teorem 2.3.4. X vektör latis ve ζ lineer topoloji olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) (X, ζ) lokal solid vektör latistir.

(ii) $(u, v) \longmapsto u \vee v$ olarak tanımlanan $(X, \zeta) \times (X, \zeta) \to (X, \zeta)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

(iii) $(u, v) \longmapsto u \wedge v$ olarak tanımlanan $(X, \zeta) \times (X, \zeta) \to (X, \zeta)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

(iv) $(u, v) \longmapsto |u|$ olarak tanımlanan $(X, \zeta) \to (X, \zeta)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

(v) $(u, v) \longmapsto u^-$ olarak tanımlanan $(X, \zeta) \to (X, \zeta)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

(vi) $(u, v) \longmapsto u^+$ olarak tanımlanan $(X, \zeta) \to (X, \zeta)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ X lokal solid vektör latis olmak üzere $V + V \subset U$ sağlanacak şekilde $U,\ V \in \zeta(0)$ komşulukları alınsın. Her $(u, v),\ (f, g) \in X \times X$ için $(u, v) - (f, g) \in V \times V$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi : X \times X &\to X \\ (u, v) &\longmapsto u \vee v \end{aligned}$$

düşünülürse,

$$|\varphi(u, v) - \varphi(f, g)| = |u \vee v - f \vee g| \leq |u - f| + |v - g| \in V + V \subset U$$

bulunur. Böylece φ düzgün süreklidir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $u \wedge v = -[(-u) \vee (-v)]$ eşitliği kullanılarak istenilen elde edilir.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ $|u| = -[u \wedge (-u)]$ eşitliği kullanılarak istenilen elde edilir.
$(iv) \Rightarrow (v)$ $u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$ eşitliği kullanılarak istenilen elde edilir.
$(v) \Rightarrow (vi)$ $u^+ = (-u)^-$ eşitliği kullanılarak istenilen elde edilir.
$(vi) \Rightarrow (i)$

$$\begin{aligned} X &\to X \\ u &\longmapsto u^+ \end{aligned}$$

düzgün sürekli olsun. $U \in \zeta(0)$ herhangi bir komşuluk olmak üzere $V + V \subset U$ sağlanacak şekilde en az bir $V \in \zeta(0)$ balanced komşuluğu vardır. $u \longmapsto u^+$ düzgün sürekli ise $u - v \in W$ iken $u^+ - v^+ \in V$ olacak şekilde en az bir $W \in \zeta(0)$ balanced komşuluk vardır. $u \in W$ ise $u^+,\ u^- \in V$ olur. W, 0'ın komşuluğu olduğundan $W_1 \in \zeta(0)$ balanced komşuluğu için

$$W_1 + W_1 \subset W$$

sağlanır. 0'ın komşuluğu W_2 alınsın. $u \longmapsto u^+$ düzgün sürekli olmasından, $u - v \in W_2$ iken $u^+ - v^+ \in W_1$ elde edilir. W_2'nin solid hull'ı $sol(W_2) \subset U$ sağlanır. $u \in U$ olmak üzere en az bir $v \in W$ için $0 \leq |u| \leq |v|$ olsun. $v \in W_2$ ise $v^+,\ v^- \in W_1$'dir. $|v| = v^+ - v^-$ eşitliği kullanılarak $|v| \in W$ bulunur. Daha sonra,

$$|v| = u^+ - (u^+ - |v|) \in W$$

olduğundan

$$u^+ = (u^+)^+ - (u^+ - |v|)^+ \in V$$

elde edilir. Aynı adımlar uygulanarak $u^- \in V$ bulunur. $V + V \subset U$ kullanılırsa

$$u = u^+ - u^- \in V + V \subset U$$

elde edilir ve ζ lokal solid topolojidir. □

Teorem 2.3.5. (X, ζ) lokal solid vektör latis olsun.

(i) X'in sıra sınırlı alt kümeleri ζ-sınırlıdır.

(ii) X'in herhangi solid kümesinin ζ-kapanışı solid kümedir.

(iii) X'in vektör alt latisinin ζ-kapanışı vektör alt latistir.

Kanıt. *(i)* $[u, v]$ X'in sıra aralığı ve $V \in \mathcal{F}(0)$ solid komşuluğu olmak üzere, $\lambda > 0$ alınsın ve $\lambda(|u| + |v|) \in V$ olsun. $u \leq w \leq v$ ise

$$u^+ \leq w^+ \leq v^+$$

ve

$$-v^- \leq -w^- \leq -u^-$$

olduğundan $|w| \leq |u| + |v|$ bulunur. V solid küme olduğundan $|w| \in V$ olur. Böylece $\lambda[u, v] \in V$ elde edilir ki $[u, v]$ sıra aralığı ζ-sınırlıdır.

(ii) S, X'in solid alt kümesi ve $v \in \overline{S}$ için $|u| \leq |v|$ sağlansın. $v_\alpha \xrightarrow{\zeta} v$ olacak şekilde $(v_\alpha) \subset S$ neti seçilsin. Her α için $u_\alpha = (u \wedge |v_\alpha|) \vee (-|v_\alpha|)$ tanımlansın. $|u_\alpha| \leq |v_\alpha|$'dır. Böylece $(u_\alpha) \subseteq S$ olur ve Teorem 2.3.4'den $u_\alpha \xrightarrow{\zeta} u$ elde edilir. Buradan $u \in \overline{S}$ olur ve $\overline{S}$ solid kümedir.

(iii) K, X'in vektör alt latisi olsun. O halde $\overline{K}$ da X'in vektör alt uzayıdır. $u \in \overline{K}$ ise $u_\alpha \xrightarrow{\zeta} u$ olacak şekilde $(u_\alpha) \subseteq K$ neti vardır. Teorem 2.3.4'den $(u_\alpha) \subset K$ neti için $u_\alpha^+ \xrightarrow{\zeta} u^+$ sağlanır ve $u^+ \in K$ olur. $\overline{K}$ vektör alt latistir. □

Teorem 2.3.6. (X, ζ) Hausdorff lokal solid vektör latis olsun.

(i) X Arşimedyan vektör latistir.

(ii) X'in pozitif kısmı X^+ ζ-kapalıdır.

(iii) X içinde $u_\alpha \xrightarrow{\zeta} u$ ve $u_\alpha \uparrow$ ise $u_\alpha \uparrow u$, aynı şekilde X içinde $u_\alpha \xrightarrow{\zeta} u$ ve $u_\alpha \downarrow$ ise $u_\alpha \downarrow u$ olur.

(iv) X'in her bandi ζ-kapalıdır.

(v) Aynı indis ile iki $(u_\alpha), (v_\alpha)$ neti $u_\alpha \leq v_\alpha \downarrow$ ve $u_\alpha - v_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ koşullarını sağlıyorsa $u_\alpha \downarrow u$ olması için gerek ve yeter koşul $v_\alpha \downarrow u$ olmasıdır.

Kanıt. (i) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $u,\ v \in L^+$ için $0 \leq nu \leq v$ sağlansın. $0 \leq u \leq \dfrac{1}{n}v$ ve $\dfrac{1}{n}v \xrightarrow{\zeta} 0$ olur. ζ Hausdorff lokal solid topoloji olduğundan $u = 0$ bulunur.

(ii) Teorem 2.3.4'den

$$\begin{aligned} \varphi : (X,\zeta) &\to (X,\zeta) \\ (u,v) &\longmapsto u^- \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. X Hausdorff olduğundan $\{0\}$ kümesi ζ-kapalıdır ve φ'nin sürekliliğinden $\varphi^{-1}(0) = X^+ = \{u \in X : u^- = 0\}$ kümesi de ζ-kapalı olur.

(iii) α indisi sabitlensin. $\beta \geq \alpha$ için

$$0 \leq u \vee u_\alpha - u \leq u \vee u_\beta - u \leq |u_\beta - u| \xrightarrow{\zeta} 0$$

olur. Böylece $u \vee u_\alpha - u = 0$ sağlanır ve her α için $u_\alpha \leq u$ olur. $v \in X$ ve her α için $u_\alpha \leq v$ olsun. $0 \leq v - u_\alpha \xrightarrow{\zeta} v - u$ olur ve X^+ ζ-kapalı olduğundan $v - u \in X^+$, yani $u \leq v$ elde edilir. Bu da X'in içinde $u_\alpha \uparrow u$ olduğunu söyler. Aynı adımlar $-u_\alpha$ için geçerli olduğundan $u_\alpha \downarrow$ ve $u_\alpha \xrightarrow{u}$ ise $u_\alpha \downarrow u$ sağlanır.

(iv) D kümesi X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$D^d = \{u \in X : \text{her } v \in D \text{ için } |u| \wedge |v| = 0\}$$

kümesi ζ-kapalıdır. $u \in \overline{D^d}$ alınsın ve $(u_\alpha) \subset D^d$ için $u_\alpha \xrightarrow{\zeta} u$ sağlansın. Her $v \in D$ için $0 = |u| \wedge |v| \xrightarrow{\zeta} |v| \wedge |u|$'dir. ζ Hausdorff olduğundan $v \in D$ için $|u| \wedge |v| = 0$ olmak üzere $u \in D^d$'dir. Teorem 2.1.41'dan X Arşimedyan ise $B = B^{dd}$ her band için sağlanır. Böylece B bandi ζ-kapalıdır.

(v) X içinde $u_\alpha \downarrow u$ ve her α için $v_\alpha \geq v \geq u$ olsun. Her α için $0 \leq v \leq v_\alpha$ ve $u \leq u_\alpha$ vardır. Her α için

$$0 \leq (v - u_\alpha)^+ \leq v_\alpha - u_\alpha$$

sağlanır ve buradan $(v - u_\alpha)^+ \xrightarrow{\zeta} 0$ olur. Fakat

$$(v - u_\alpha)^+ \uparrow (v - u)^+ = v - u$$

olduğundan (iii) şıkkından $v - u = 0$ elde edilir. X içinde $v_\alpha \downarrow u$ olsun. $0 \leq u - u \wedge u_\alpha \leq v_\alpha - u_\alpha$ eşitsizliğinden $u - u \wedge u_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ elde edilir. $u - u \wedge u_\alpha \uparrow$ ve (iii) şıkkından $0 \leq u - u \wedge u_\alpha \uparrow 0$ olur. Böylece her α için $u - u \wedge u_\alpha = 0$ ve dolayısıyla $u \leq u_\alpha$ bulunur. O halde X içinde $u_\alpha \downarrow u$'dir. □

3 LEBESGUE VE QUASİ LEBESGUE OPERATÖRLER İLE BU OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

Bu ünitede Lebesgue ve Quasi Lebesgue operatörleri incelenecektir. Aralarındaki ilişkilerin yanı sıra $o\tau$-kompakt ve $o\tau$-sürekli operatörler ile bağlantıları ele alınacaktır. Bu ünite [4] makalesine dayanmaktadır.

3.1 Lokal Solid Vektör Latislerin Özel Sınıfları

Bu bölümde lokal solid latislerin özel sınıflarından olan Lebesgue, ön-Lebesgue ve Fatou latis özellikleri tartışılacaktır. Daha ayrıntılı bilgi için [2] incelenebilir.

Tanım 3.1.1. (X, ζ) lokal solid vektör latis olsun.

(i) Her x_α neti için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ oluyor ise Lebesgue denir.

(ii) X'in içinde $0 \leq x_n \uparrow\leq x$ iken x_n ζ-Cauchy dizisi ise ön-Lebesgue denir.

(iii) Eğer ζ topolojisi 0'ı içeren sıra kapalı solid kümelerden oluşan baza sahip ise Fatou denir.

(X, ζ) lokal solid vektör latis için yukarıdaki tanımlar şu şekilde de verilebilir:

(i) $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$'dir gerek ve yeter koşul (X, ζ) Lebesgue latistir.

(ii) $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken $x_n \xrightarrow{\zeta} 0$'dir gerek ve yeter koşul (X, ζ) σ-Lebesgue latistir.

(iii) $0 \leq x_n \downarrow$ iken x_α ζ-Cauchy'dir gerek ve yeter koşul (X, ζ) ön-Lebesgue latistir.

Önerme 3.1.2. Arşimedyan lokal solid vektör latiste, her Lebesgue latis ön-Lebesgue latistir.

Kanıt. (X, ζ) Lebesgue latis olmak üzere $0 \leq x_n \downarrow\leq x$ olacak şekilde X içinde (x_n) dizisi alınsın. X Arşimedyan olduğundan Teorem 2.1.41'den $x_n - y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\beta) \subseteq X$ vardır. ζ Lebesgue topoloji olduğundan $x_n - y_\beta \xrightarrow{\zeta} 0$ olur ve buradan x_n ζ-Cauchy dizisidir. □

Önerme 3.1.3. Arşimedyan lokal solid vektör latiste, her Lebesgue latis Fatou latistir.

Kanıt. (X, ζ) lokal solid vektör latis olduğundan ζ topolojisi 0'ı içeren solid kümelerden oluşan baza sahiptir. Lebesgue olduğundan dolayı ve $x_\alpha \downarrow 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{o} 0 \in X$ bulunur ve solid kümeler sıra kapalıdır. □

Teorem 3.1.4. ([2]) (X, ζ) lokal solid vektör latisi olsun. (X, ζ) ön-Lebesgue ise $0 \leq x_\alpha \uparrow\leq x$ iken x_α neti X içinde ζ-Cauchy'dir.

Kanıt. X'in içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow\leq x$ alınsın. Eğer (x_α) ζ-Cauchy değil ise $0 \in V$ ζ-komşuluğu ve artan dizi α_n indisi vardır ve her n için $x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \notin V$. O halde, $0 \leq x_{\alpha_n} \uparrow\leq x$ ve (x_{α_n}) ζ-Cauchy değil. Bu hipotez ile çelişir. (x_α) ζ-Cauchy'dir. □

Sonuç 3.1.5. (X, ζ) ön-Lebesgue latistir gerek ve yeter koşul X içindeki her sıra sınırlı dik dizisi 0'a ζ-yakınsaktır.

Teorem 3.1.6. Topolojik tam Hausdorff lokal solid vektör latis (X, ζ)'da aşağıdakiler denktir:

(i) (X, ζ) Lebesgue'dir.

(ii) (X, ζ) ön-Lebesgue'dir.

Eğer bu ifadelerden biri sağlanıyor ise, X Dedekind tamdır.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ Önerme 3.1.2.
$(ii) \Rightarrow (i)$ X'in içinde $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. Teorem 3.1.4'den x_α neti ζ-Cauchy olur. X ζ-tam olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buradan $x = 0$'dır. Dolayısıyla $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ elde edilir.
X'in Dedekind tam olduğunu görmek için X'in içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ olsun. x_α ζ-Cauchy net ve ζ-yakınsaktır. $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} y \in X$ olur. O halde $x_\alpha \uparrow y \in X$ olur ve X Dedekind tamdır.

□

Teorem 3.1.7. (X, ζ) Hausdorff lokal solid vektör latis ve $\hat{X}$ topolojik tamamlanış olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) (X, ζ) ön-Lebesgue'dir.

(ii) $(\hat{X}, \hat{\zeta})$ ön-Lebesgue'dir.

(iii) $(\hat{X}, \hat{\zeta})$ Lebesgue'dir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ $0 \leq \hat{x}_n \downarrow$, $\hat{x}_n \in \hat{X}$ ve U, 0'ın solid $\hat{\zeta}$-komşuluğu olsun. $V + V + V \subset U$ sağlanacak şekilde V solid $\hat{\zeta}$-komşuluğunu seçelim. Daha sonra, her n için $V = V_1$, $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ olacak şekilde (V_n), 0'ın solid $\hat{\zeta}$-komşuluğu olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $v_n \in X^+$ seçelim ve $\hat{x}_n - v_n \in V_{n+1}$ ve $x_n = \inf\{v_i : i = 1, \ldots, n\}$ sağlansın. $0 \leq x_n \downarrow$, $x_n \in X$'dir ve (X, ζ) ön-Lebesgue olduğundan (x_n) X'de ζ-Cauchy dizisidir. Her $n > m > n_0$ için $x_n - x_m \in V$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca,

$$\hat{x}_n - x_n = \hat{x}_n - \wedge_{i=1}^n v_i = \vee_{i=1}^n (\hat{x_n} - v_i) \leq \vee_{i=1}^n (\hat{x_i} - v_i) \leq \sum_{n=1}^n |\hat{x_i} - v_i|$$

ve aynı şekilde

$$x_n - \hat{x}_n \leq \sum_{n=1}^n |\hat{x_i} - v_i|.$$

İki eşitsizliği kullanarak, her n için $|\hat{x}_n - x_n| \leq \sum_{n=1}^n |\hat{x_i} - v_i| \in V_2 + \ldots + V_{n+1} \subset V$ elde edilir. Buradan her $n > m > n_0$ için

$$|\hat{x}_n - \hat{x}_m| \leq |\hat{x}_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - \hat{x}_m| \in V + V + V \subset U$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve bu da $(\hat{x}_n)$ dizisi $\hat{\zeta}$-Cauchy dizisi demektir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Teorem 3.1.6.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Önerme 3.1.2. □

Bu iki teoremi birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir:
(X, ζ) Hausdorff lokal solid vektör latisi hem Lebesgue hem de ön-Lebesgue özelliklerine sahip ise $(\hat{X}, \hat{\zeta})$ Lebesgue özelliğine sahiptir ve $\hat{X}$ Dedekind tamdır.

Teorem 3.1.8. (X, ζ) Arşimedyan lokal solid vektör latisi için aşağıdakiler denktir.

(i) (X, ζ) Lebesgue'dir.

(ii) (X, ζ) hem Fatou hem ön-Lebesgue'dir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ Önerme 3.1.2 ve Önerme 3.1.3.
$(ii) \Rightarrow (i)$ $x_\alpha \uparrow 0$ ve V 0'ın sıra kapalı ζ-komşuluğu olsun. Teorem 3.1.4'ten (x_α) ζ-Cauchy'dir, yani her $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ için $x_\alpha - x_\beta \in V$ olacak şekilde α_0 indeksi vardır. Sabit $\alpha \geq \alpha_0$ olsun. $x_\beta \downarrow 0$ ise $-x_\beta \uparrow 0$ ve buradan $x_\alpha - x_\beta \uparrow x_\alpha$ olur. V sıra kapalı olduğu için her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in V$'dir Böylece $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ olur ve buradan (X, ζ) Lebesgue'dir. $\square$

Önerme 3.1.9. Her ζ-tam ön-Lebesgue latis (X, ζ) Dedekind tamdır.

Kanıt. $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ olsun. Teorem 3.1.4'den x_α ζ-Cauchy'dir. X ζ-tam olduğundan $y \in X$ için $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} y$'dir. Buradan $x_\alpha \uparrow y \in X$ olur ki (X, ζ) Dedekind tamdır. $\square$

3.2 Lebesgue ve Quasi Lebesgue Operatörler

Bu bölümde Lebesgue, quasi Lebesgue, $o\tau$-kompakt, $o\tau$-sürekli operatörleri incelenecektir. Öncelike bu operatör sınıflarının tanımlarında kullanılacak olan τ-tamamen sınırlı küme tanımı verilsin.

Tanım 3.2.1. (Y, τ) topolojik vektör uzayı olmak üzere $A \subseteq Y$ olsun. 0'ın komşuluğu olan her V için $\lambda A \subseteq V$ sağlanacak şekilde en az bir $\lambda > 0$ varsa A'ya τ-sınırlı küme, 0'ın komşuluğu olan V için $\phi \subset A$ sonlu alt kümesi vardır ve $A \subseteq \bigcup_{x \in \phi} (x + V) = \phi + V$ oluyor ise A'ya τ-tamamen sınırlı küme denir.

Örnek 3.2.2. Her kompakt küme τ-tamamen sınırlıdır. Ayrıca her τ-tamamen sınırlı küme τ-sınırlıdır.

Tanım 3.2.3. X vektör latis, (Y, τ) topolojik vektör uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ operatör olsun.

(i) Eğer $x_\alpha \downarrow 0$ olan her net (dizi) için $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ ise T'ye τ-Lebesgue ($\sigma\tau$-Lebesgue), $x \in X$, $x_\alpha \uparrow \leq x$ olan her $(x_\alpha) \subset X^+$ net (dizi) için Tx_α τ-Cauchy ise T'ye quasi τ-Lebesgue (quasi $\sigma\tau$-Lebesgue) operatör denir. (τ için karışıklık yoksa sadece Lebesgue/quasi Lebesgue denir.)

(ii) Eğer her $x \in X$ için $T[0, x]$ Y'de τ-sınırlı ise T'ye $o\tau$-sınırlı operatör, $T[0, x]$ Y'de τ-tamamen sınırlı ise T'ye $o\tau$-kompakt operatör denir.

(iii) Eğer her $(x_\alpha) \subset X$ neti (dizisi) için $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ olur ise T operatörüne $o\tau$-sürekli ($\sigma o\tau$-sürekli) operatör denir.

Lemma 3.2.4. (Y, τ) lokal solid vektör latis olsun. Id_Y birim operatörü Lebesgue'dir gerek ve yeter koşul (Y, τ) Lebesgue latistir.

Kanıt. Id_Y Lebesgue operatör olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ için $Id_Y x_\alpha = x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$'dır. Buradan (Y,τ) Lebesgue latis olur. $\square$

Örnek 3.2.5. $T : c_{00} \to c_{00}$ operatörü $Tx := (\sum_{k=1}^{\infty} x_k)e_1$ şeklinde tanımlansın. T operatörü $o\tau$-kompakt ve $o\tau$-süreklidir fakat kompakt değildir. Önce T'nin $o\tau$-kompakt olduğunu gösterilsin. $x \in c_{00}^+$ için $[0,x]$ sıra aralığını alınsın. $T[0,x] = \{y \mid z \in [0,x]$ için Tz=y$\}$ ve $y \in T[0,x]$ için V kümesi 0 komşuluğu olmak üzere

$$\begin{aligned} y = Tz &= (\sum_{k=1}^{\infty} z_k, 0, 0, \ldots) \\ &= (\sum_{k=1}^{n} z_k, 0, 0, \ldots) \\ &= (z_1, 0, 0, \ldots) + \ldots + (z_n, 0, 0, \ldots) \subset \sum_{k=1}^{n} (z_k + V) \end{aligned}$$

olduğundan T operatörü $o\tau$-kompakt olur. T operatörü $o\tau$-süreklidir. $x_n = (x_n^k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$ için $x_n \xrightarrow{o} 0$ olsun. O halde $|x_n - 0| \leq y_m$ olacak şekilde en az bir $y_m \downarrow 0$ dizisi vardır ve dolayısıyla $|x_n^k| \leq y_m^k \downarrow 0$ sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - 0\| = \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} x_n^k| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k| = 0.$$

T operatörünün sürekli olmadığını göstermek için $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0, \ldots)$ şeklinde tanımlanan $(x_n) \subseteq c_{00}$ dizisi alınsın. $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \infty$ olduğundan T sınırlı değildir, dolayısıyla sürekli değildir. T operatörü sürekli olmadığından kompakt değildir.

X Banach latis ve Y Banach uzayı olmak üzere her kompakt operatörün $o\tau$-kompakt olduğu rahatlıkla görülebilir. $[0,x]$ sıra aralığı norm sınırlıdır. T kompakt olduğundan $T[0,x]$ göreceli kompakt ve böylece τ-tamamen sınırlıdır.

X vektör latis, (Y,τ) topolojik vektör uzay olmak üzere Lebesgue operatörlerin kümesi $L_{Leb}(X,Y)$, $o\tau$-sürekli operatörlerin kümesi $L_{o\tau}(X,Y)$, $o\tau$-sınırlı operatörlerin kümesi $L_{o\tau b}(X,Y)$, $o\tau$-kompakt operatörlerin kümesi $L_{o\tau c}(X,Y)$ ile gösterilir.

Lemma 3.2.6. $L_{o\tau}(X,Y) \subseteq L_{Leb}(X,Y)$ ve $L_{o\tau c}(X,Y) \subseteq L_{o\tau b}(X,Y)$'dir.

Kanıt. $T : X \to Y$ $o\tau$-sürekli olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ alınsın. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. T $o\tau$-sürekli olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ sağlanır. Böylece $T \in L_{Leb}(X,Y)$ olur. $T : X \to Y$ $o\tau$-kompakt olsun. Her $x \in X$ için $T[0,x]$ τ-tamamen sınırlıdır. Dolayısıyla $T[0,x]$ τ-sınırlı olur ve böylece T $o\tau$-sınırlı operatördür. $\square$

Tanım 3.2.7. $X,\ Y$ vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü olsun. $T = T_1 - T_2$ olup $T_1,\ T_2 \geq 0$ şeklinde yazılıyor ise T operatörüne regüler operatör denir.

Teorem 3.2.8. X vektör latis, (Y,τ) lokal konveks Lebesgue latis olmak üzere Y ya Dedekind tam ya da τ-tam olsun. $L_{o\tau c}(X,Y) \cap L_r(X,Y)$, $L_r(X,Y)$'nin bandidir.

Kanıt. Her Lebesgue latis ön-Lebesgue latistir. O halde (Y,τ) ön-Lebesgue latis ve τ-tam ise Dedekind tamdır. Böylece her iki durumda da Y Dedekind tam uzaydır. [1, Teorem 5.10]'dan her $x \in X^+$ için

$$B(x) = \{T \in L_b(E,F) : T[0,x] \ \tau\text{- tamamen sınırlı}\}$$

kümesi $L_b(X,Y)$'nin bandidir. Her iki durumda da Y Dedekind tam olduğundan $L_b(X,Y) = L_r(X,Y)$ sağlanır ve $L_{o\tau c}(X,Y) \cap L_r(X,Y) = \bigcap_{x\in X^+} B(x)$ kümesi $L_r(X,Y)$'nin bandi olur. □

Önerme 3.2.9. X vektör latis ve (Y,τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ regüler operatörü $o\tau$-sınırlıdır.

Kanıt. Genelliği kaybetmeden $T \geq 0$ olsun. $x \in X^+$, $U \in \tau(0)$ ve $V \subset U$ olacak şekilde Y'nin V 0 balanced komşuluğunu alınsın. V balanced küme olduğundan bazı $\lambda_0 > 0$ için her $\lambda > \lambda_0$ iken $Tx \in \lambda V$'dir. Buradan her $\lambda > \lambda_0$ için

$$T[0,x] \subset [0,Tx] \subset \lambda V \subset \lambda U$$

sağlanır. $U \in \tau(0)$ olduğundan T $o\tau$-sınırlıdır. □

Teorem 3.2.10. ([1]) (X,ζ) lokal konveks solid vektör latis olmak üzere $x_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ olması gerek ve yeter koşul $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olmasıdır.

Kanıt. X içinde $x_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ koşulu sağlansın. V, 0'ın solid ζ-komşuluğu olsun. $0 \in \overline{conv(x_\alpha)}^w$'dir. [1, Teorem 3.11]'den $0 \in \overline{conv(x_\alpha)}^\zeta$ olur. Böylece $V \cap conv(x_\alpha) \neq \emptyset$'dır. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ indisleri ve $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ olacak şekilde λ_i sabitleri için $\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} \in V$ alınsın. Her $i = 1,\ldots,n$ için $\alpha \geq \alpha_i$ ise

$$0 \leq x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \in V.$$

Buradan $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ sağlanır. □

Aşağıdaki önermeden önce zayıf Lebesgue tanımı verilsin. X vektör latis, (Y,τ) topolojik vektör uzayı olsun. $T : X \to Y$ operatörü $x_\alpha \downarrow 0$ olan her net için $Tx_\alpha \xrightarrow{w} 0$ ise T'ye zayıf Lebesgue denir.

Önerme 3.2.11. X vektör latis, (Y,τ) lokal konveks solid latis olsun. $T : X \to Y$ sıra sürekli regüler operatörü Lebesgue'dir gerek ve yeter koşul T zayıf Lebesgue'dir.

Kanıt. T Lebesgue ise zayıf Lebesgue olması doğrudan gelir. Genelliği bozmadan T pozitif zayıf Lebesgue olsun ve $x_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. $Tx_\alpha \downarrow 0$ olur. T zayıf Lebesgue olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{w} 0$'dır. Teorem 3.2.10'den $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ sağlanır. □

Önerme 3.2.12. (X,ζ) Lebesgue latis, (Y,τ) lokal solid vektör latis olsun. $T : X \to Y$ zayıf sürekli pozitif operatör Lebesgue'dir.

Kanıt. X içinde $x_\alpha \downarrow 0$ alınsın. (X,ζ) Lebesgue olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ olur ve buradan $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$'dır. T zayıf sürekli olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{w} 0$'dir. T pozitif operatörü sıra koruyandır. Dolayısıyla $Tx_\alpha \downarrow 0$ olur. Önerme 3.2.10'den $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ bulunur. □

Teorem 3.2.13. X vektör latis olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) X^+ Arşimedyan vektör latistir.

(ii) x_α neti X de $x_\alpha \downarrow$ ve $L = \{y \in X : \forall\alpha \in \Lambda \ y \leq x_\alpha\}$ iken $\inf\limits_{\substack{y\in L \\ \alpha\in\Lambda}} \{x_\alpha - y\} = 0$ olur.

Kanıt. İspatı [18, Teorem 22.5] teoreminde detaylıca verilmiştir. □

Teorem 3.2.14. X vektör latis, (Y, τ) lokal solid vektör latis olsun. $T : X \to Y$ pozitif operatörü Lebesgue ise quasi Lebesgue'dir.

Kanıt. $(x_\alpha) \subset X$ neti pozitif, artan ve her $x \in X$ için $x_\alpha \leq x$ olsun. $0 \leq x - x_\alpha = u_\alpha \downarrow$'dır. $u_\alpha - z \downarrow 0$ olacak şekilde $L = \{z \in X : \forall\alpha \in \Lambda,\ z \leq u_\alpha\}$ kümesi alınsın. T pozitif olduğundan $0 \leq T(u_\alpha - z) \downarrow$ ve T Lebesgue olduğundan $T(u_\alpha - z) \xrightarrow{\tau} 0$ olur. Böylece Tu_α τ-yakınsak ve dolayısıyla Tx_α τ-yakınsak olur. □

τ-lateral (σ-) tamlık tanımına gelmeden önce vektör latislerde tamamlanışları incelensin.

Tanım 3.2.15. X vektör latis ve (x_n) dizisi alınsın. $u \in X^+$ olsun. Eğer $\varepsilon_n \to 0$ olacak şekilde (ε_n) pozitif reel dizisi var ve en az bir $x \in X$ için $|x_n - x| \leq \varepsilon_n u$ oluyor ise (x_n) dizisine u-düzgün yakınsak dizi ve x'e u-düzgün limit denir. Eğer her $n, p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon_n u$ sağlanıyor ise x_n dizisine u-düzgün Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.2.16. (i) X bir vektör latis olmak üzere her (sayılabilir) $A \subseteq X$ alt kümesi üstten sınırlı iken $\sup A \in X$ ise X'e (σ-)Dedekind tam vektör latis denir.

(ii) X Arşimedyan vektör latis olmak üzere X^+'nın ikili dik (sayılabilir) alt kümesinin supremumu varsa X'e lateral (σ-) tam denir.

(iii) X vektör latisi hem Dedekind (σ-)tam hem lateral (σ-)tam ise X'e universal (σ-)tam denir.

(iv) X vektör latisi içindeki her u-düzgün Cauchy dizisi u-düzgün limite sahip ise X'e düzgün tam denir.

Teorem 3.2.17. (i) X vektör latis olsun. X^u universal tamamlanış Dedekind tam ve lateral tamdır. Ayrıca X, X^u'nun alt latisidir ve sıra yoğundur.

(ii) X lateral tam vektör latisi zayıf sıra birime sahiptir ve her bandi esas banddir.

(iii) X universal tam ise lateral tam ve Dedekind tamdır gerek ve yeter koşul lateral tam ve σ- Dedekind tamdır gerek ve yeter koşul düzgün tam ve lateral tamdır.

(iv) X^δ, X'in Dedekind tamamlanışı olmak üzere, $X^\delta \subset X^u$ ve $X^\delta = I_X$, X tarafından üretilen idealdir. Ayrıca X, X^δ ve X^δ, X^u içinde alt latistir.

Kanıt. İspatlar [2, 18] kitaplarında bulunabilir. □

Tanım 3.2.18. (Y, τ) topolojik vektör latis olsun. Y^+'nın ikili dik vektörlerinin τ-sınırlı (sayılabilir) alt kümesinin supremumu varsa Y uzayına τ-lateral (σ-)tam denir.

Teorem 3.2.19. [2, Teorem 7.8] X, Y Arşimedyan vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ pozitif operatör olsun. Eğer X lateral (σ-)tam ise T (σ-)sıra süreklidir.

Kanıt. $u_n \downarrow 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ alınsın. [2, Teorem 7.7]'den her n için $0 \leq u_n \leq 2^{-n}u+\varepsilon u_1$ sağlanacak şekilde $u \in X^+$ vardır. T pozitif olduğundan $Tu_n \geq 0$ ve $Tu_n \downarrow$ olur. Y'nin içinde $0 \leq w \leq Tu_n$ olsun. T'nin pozitifliğinden her n için $0 \leq w \leq Tu_n \leq 2^{-n}Tu + \varepsilon Tu_1$ sağlanır. Y Arşimedyan vektör latis olduğundan $2^{-n}Tu \downarrow 0$ olur ve her $\varepsilon > 0$ için $0 \leq w \leq \varepsilon Tu$ elde edilir. Tekrar Y'nin Arşimedyan olması kullanılır ise $w = 0$ bulunur. Böylece $Tu_n \downarrow 0$ olur. □

Önerme 3.2.20. X lateral σ-tam vektör latis ve (Y, τ) σ-Lebesgue latis olsun. $T : X \to Y$ regüler operatörü σ-Lebesgue'dir.

Kanıt. Genelliği kaybetmeden $T \geq 0$ olsun. $x_n \downarrow 0$ alınsın. Teorem 3.2.19'den T operatörü σ-sıra süreklidir ve $Tx_n \downarrow 0$ olur. Y σ- Lebesgue latis olduğundan $Tx_n \xrightarrow{\tau} 0$'dır. □

Teorem 3.2.21. X lateral σ-tam vektör latis olsun. X ön-Lebesgue'dir gerek ve yeter koşul X σ-Lebesgue'dir.

Kanıt. ($\Rightarrow$) X^+ içerisinde u_n dik dizisi alınsın. (nu_n) dizisi de dik dizidir. $u = \bigvee_{n=1}^{\infty} nu_n \in X$'dir. Her n için $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}u$ sağlanır. Buradan $u_n \xrightarrow{\zeta} 0$ olur. Sonuç 3.1.5'ten X ön-Lebesgue'dir.
($\Leftarrow$) ζ X'in üzerinde lokal solid topoloji olmak üzere $u_n \downarrow 0$ alınsın. V 0'ın solid ζ-komşuluğu ve U 0'ın ζ-komşuluğu olsun ve $U + U \subset V$ sağlansın. $\varepsilon > 0$ alınsın ve $\varepsilon u_1 \in U$ olsun. Her n için $0 \leq u_n \leq 2^{-n}u + \varepsilon u_1$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $u \in X^+$ vardır. U balanced küme olduğundan $k \in \mathbb{N}$ vardır ve her $n \geq k$ için $2^{-n} \in U$ olur. Böylece $0 \leq u_n \leq 2^{-n}u + \varepsilon u_1 \in U + U \subset V$ olduğundan $u_n \xrightarrow{\zeta} 0$ elde edilir. □

(X, ζ) lokal solid vektör latis, (Y, τ) lateral σ-tam lokal solid vektör latis ve $T : X \to Y$ pozitif operatör olsun. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \leq x \in X$ alınsın. Teorem 3.2.21'den (Y, τ) ön-Lebesgue'dir. Buradan $0 \leq Tx_\alpha \leq Tx$ ve $Tx_\alpha \uparrow$ elde edilir ve Tx_α τ-Cauchy'dir. Böylece T operatörü quasi Lebesgue operatördür.

(X, ζ) lateral σ-tam lokal solid vektör latis, (Y, τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü sürekli olsun.

(i) T pozitif ve $0 \leq x_\alpha \leq x$ ve $x_\alpha \uparrow$ olsun. (X, ζ) ön-Lebesgue ise (x_α) neti X içinde τ-Cauchy'dir. Böylece Tx_α τ-Cauchy olur ve T operatörü quasi Lebesgue'dir.

(ii) (X, ζ) Fatou latis olsun. X içinde $x_\alpha \downarrow 0$ alınsın. (X, ζ) ön-Lebesgue ve dolayısıyla Lebesgue latistir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ olur ve $Tx_\alpha \xrightarrow{\zeta} 0$ sağlanır. T Lebesgue operatördür.

Önerme 3.2.22. (X, ζ) lokal solid vektör latis ve (Y, τ) topolojik vektör uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü sürekli ise $o\tau$-sınırlıdır.

Kanıt. $x \in X^+$ ve $U \in \tau(0)$ alınsın. $V \subset T^{-1}(U)$ olacak şekilde V, X içinde 0'ın solid ζ-komşuluğu olsun. Her $\lambda \geq \lambda_0$ için $x \in \lambda V$ olacak şekilde $\lambda_0 > 0$ vardır. Böylece her $\lambda \geq \lambda_0$ için

$$[0, x] \subseteq \lambda V \subseteq \lambda T^{-1}(U)$$

sağlanır. Buradan her $\lambda \geq \lambda_0$ için $T[0, x] \subseteq \lambda U$ olur ve T operatörü $o\tau$-sınırlıdır. □

Lemma 3.2.23. (X,ζ) vektör latis ve (Y,τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ pozitif operatör olsun. T operatörü Lebesgue'dir gerek ve yeter koşul T operatörü $o\tau$-süreklidir.

Kanıt. T Lebesgue operatör olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ alınsın. Her β ve $\alpha \geq \alpha_\beta$ için $|x_\alpha - 0| \leq z_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde z_β neti ve α_β vardır. T pozitif olduğundan her $\alpha \geq \alpha_\beta$ için $|Tx_\alpha| \leq T|x_\alpha| \leq Tz_\beta$ sağlanır. T Lebesgue ise $Tz_\beta \xrightarrow{\tau} 0$ olur ki buradan $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ elde edilir.
T operatörü $o\tau$-sürekli olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ alınsın. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ olur ve T Lebesgue operatördür. □

Tanım 3.2.24. X vektör latis ve Z X'in vektör alt latisi olmak üzere $K \subseteq Z$ olsun. K alt kümesinin Z içindeki infimum değeri var ve X içindeki infimum değeri ile aynı ise Z'ye regüler alt latis denir.

Teorem 3.2.25. X bir vektör latis ve Z, X'in vektör alt uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) Z X'in regüler alt latisidir.

(ii) $(x_\alpha) \subseteq Z$ neti Z içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise X içinde de $x_\alpha \downarrow 0$ olur.

(iii) $(x_\alpha) \subseteq Z$ neti Z içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise X içinde de $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.

Kanıt. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Z X'in regüler alt latisi olsun. Her $x, y \in Z$ için $x \wedge y \in Z$ iken bu değer X uzayı içinde de korunur. $(x_\alpha) \subset Z$ neti Z içinde $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. Z içinde $\inf x_\alpha = 0$ sağlanır. Z regüler alt latis olduğundan X içinde de $\inf x_\alpha = 0$ sağlanır. Buradan X içinde $x_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* $(x_\alpha) \subset Z$ neti Z içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. Her β ve $\alpha \geq \alpha_\beta$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\beta) \subseteq Z$ neti ve α_β vardır. O halde X içinde de $y_\beta \downarrow 0$ olur. Böylece X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ sağlanır.
(iii) $\Rightarrow$ *(i)* $(x_\alpha) \subset Z$ neti için Z içinde $x_\alpha \downarrow$ olmak üzere $\inf x_\alpha = x$ sağlansın. Böylece Z içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ sağlanır. Hipotezden X içinde de $x_\alpha \downarrow x$ olur ve X içinde $\inf x_\alpha = x$ elde edilir. Böylece Z regüler alt latistir. □

Lemma 3.2.26. Z, X vektör latisinin regüler alt latisi, (Y,τ) topolojik vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ $o\tau$-sürekli operatör olsun. T operatörünün Z uzayına kısıtlanışı olan $T|_Z : Z \to Y$ operatörü $o\tau$-süreklidir.

Kanıt. $x_\alpha \subset Z$ netini alınsın ve Z içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlansın. Teorem 3.2.25'den X içinde de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. T operatörü $o\tau$-sürekli olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ elde edilir. □

Lemma 3.2.27. X vektör latis, (Y,τ) lokal solid vektör latis ve $T : X \to Y$ pozitif Lebesgue operatörü olsun. Z, X'in regüler alt latisi ise $T|_Z : Z \to Y$ operatörü $o\tau$-süreklidir.

Kanıt. Lemma 3.2.23'den Lebesgue operatör $o\tau$-süreklidir. Lemma 3.2.26'den $T|_Z : Z \to Y$ operatörü $o\tau$-süreklidir. □

Bu bölümün devamında X Banach latis olarak alınacaktır.

Teorem 3.2.28. X Banach latis olsun. $T : X \to X$ operatörü on-sürekli operatör ise Lebesgue operatördür.

Kanıt. $(x_\alpha) \subseteq X$ olmak üzere $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$'dır ve on-sürekliliğin tanımından $\|Tx_\alpha\| \to 0$ olur. Böylece T Lebesgue operatördür. □

Sonuç 3.2.29. X Banach latisi sıra sürekli norma sahip ise Id_X operatörü on-süreklidir.

4 KB/QUASİ KB OPERATÖRLER VE DEMİ VERSİYONLARI

Bu ünitede KB ve Quasi KB operatörlerinin tanımı verilecek olup özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu operatör sınıflarının demi versiyonları olan demi KB ve demi quasi KB operatörler ayrıntısı ile çalışılacaktır. Bu ünite [4, 10, 14] makalelerine dayanmaktadır.

4.1 KB ve Quasi KB Operatörler

Bu bölümde [4] makalesinde tanımları verilmiş olan yeni operatör sınıfları, KB ve quasi KB operatörler incelenecektir. Farklı KB operatör tanımları da bulunmakla beraber, [12], bu operatör sınıfı burada incelenecek olan quasi KB operatör sınıfına Banach latislerinde denktir.

Tanım 4.1.1. (X, ζ) lokal solid vektör latis, (Y, τ) topolojik vektör uzayı olsun. $T : X \to Y$ operatörüne X'in içindeki her ζ-sınırlı, pozitif, artan net(dizi) için $x \in X$ var ve $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$ ($Tx_n \xrightarrow{\tau} Tx$) ise T'ye KB (σ-KB) operatör, X'in içindeki her ζ-sınırlı, pozitif, artan net(dizi) için Tx_α τ-Cauchy net(dizi) ise T'ye quasi KB (quasi σ-KB) operatör denir.

KB operatörlerinin kümesi $L_{KB}(X, Y)$, quasi KB operatörlerin kümesi $L_{qKB}(X, Y)$ ile gösterilir.

Lemma 4.1.2. X lokal solid vektör latis, Y herhangi topolojik vektör uzay olmak üzere $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Her KB operatör quasi KB operatördür. Ayrıca her quasi σ-KB operatörü quasi σ-Lebesgue operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_\alpha \uparrow\leq x$ olsun. T operatörü KB olduğundan Tx_α τ-yakınsaktır. Dolayısıyla τ- Cauchy olur. Buradan T quasi KB'dir. T operatörü quasi σ-KB olsun. $0 \leq x_n \uparrow\leq x$ olsun. T quasi σ-KB olduğundan Tx_n τ-Cauchy'dir. Buradan quasi σ-Lebesgue olur. □

Birim operatörün KB operatörü olması için gerekli koşulları incelemeden önce KB latis tanımını verelim.

Tanım 4.1.3. (X, ζ) lokal solid vektör latis olmak üzere X'in içindeki her artan, pozitif, ζ-sınırlı neti (dizisi) ζ-yakınsak ise (X, ζ)'e KB (σ-KB) latis denir.

Lemma 4.1.4. (X, τ) lokal solid vektör latis olsun. Id_X birim operatörü KB'dir gerek ve yeter koşul (X, τ) KB latistir.

Kanıt. Id_X KB operatör olsun. Artan, pozitif, τ-sınırlı x_α için $Id_X x_\alpha = x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$'dır. Buradan (X, τ) KB latis olur. □

Önerme 4.1.5. (X, ζ) lokal solid vektör latis ve (Y, τ) topolojik vektör uzayı olsun. $T : (X, \zeta) \to (Y, \tau)$ operatörü quasi KB'dir gerek ve yeter koşul quasi σ-KB'dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Açıktır.
$(\Leftarrow)$ T quasi KB olmasın. O halde ζ-sınırlı artan $(x_\alpha) \subset X^+$ neti için Tx_α neti τ-Cauchy değildir. Her n için

$$Tx_{\alpha_{n+1}} - Tx_{\alpha_n} \notin U \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde α_n artan dizisi ve $U \in \tau(0)$ vardır. x_{α_n} artan, ζ-sınırlı bir dizi olduğundan ve (4.1.1)'den T quasi σ-KB değildir. □

Sonuç 4.1.6. Her ζ-tam σ-KB latis (X, ζ) KB latistir.

Kanıt. X üzerindeki birim operatör σ-KB'dir. Dolayısıyla quasi σ-KB olur. Önerme 4.1.5'ten Id_X quasi KB'dir. Her ζ-sınırlı, artan, pozitif net ζ-Cauchy ve X tam olduğundan ζ-yakınsak olur. □

Baskınlık konusu incelenmeden önce ayrıklık koruyan operatör ve latis homomorfizması özellikleri ele alınsın.

Tanım 4.1.7. X ve Y Arşimedyan vektör latis olsun. $T : X \to Y$ operatörüne X içinde $|f| \wedge |g| = 0$ iken Y içinde $|Tx| \wedge |Ty| = 0$ olma koşulunu sağlıyorsa diklik koruyan operatör denir.

Teorem 4.1.8. ([1]) X vektör latis, Y Arşimedyan vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ sıra sınırlı diklik koruyan operatör ise modülü vardır ve her $x \in X$ için $|T|(x) = |T(|x|)| = |Tx|$ sağlanır.

Tanım 4.1.9. X ve Y iki vektör latis olsun. Her $x, y \in X$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ sağlanıyor ise $T : X \to Y$ operatörüne latis homomorfizması denir.

Teorem 4.1.10. X ve Y iki vektör latis ve $T : X \to Y$ operatör olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) T operatörü latis homomorfizmasıdır.

(ii) Her $x \in X$ için $T(x^+) = (Tx)^+$

(iii) Her $x, y \in X$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$

(iv) $x \wedge y = 0$ ise $Tx \wedge Ty = 0$

(v) Her $x \in X$ için $T(|x|) = |Tx|$

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ T latis homomorfizması olduğundan $x \in X$ için

$$T(x^+) = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = (Tx)^+$$

sağlanır.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T(x - (x-y)^+) = Tx - T(x-y)^+ \\ &= Tx - (Tx - Ty)^+ = Tx \wedge Ty \end{aligned}$$

olur.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ $x \wedge y = 0$ olsun. Buradan $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty = T0 = 0$ bulunur.
$(iv) \Rightarrow (v)$ $x^+ \wedge x^- = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned} |Tx| &= |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-) \\ &= T(x^+) \vee T(x^-) = T(x^+ + x^-) = T(|x|) \end{aligned}$$

elde edilir.
$(v) \Rightarrow (i)$ $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T\big(\frac{1}{2}(x + y + |x-y|)\big) = \frac{1}{2}(Tx + Ty + T|x-y|) \\ &= \frac{1}{2}(Tx + Ty + |Tx - Ty|) = Tx \vee Ty \end{aligned}$$

buluruz. Böylece T latis homomorfizması olur.

□

Teorem 4.1.11. (X,ζ) ve (Y,τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ sıra sınırlı diklik koruyan KB (σ-KB) operatör olsun. Eğer $|S| \le |T|$ sağlanıyor ise S KB (σ-KB) operatördür.

Kanıt. X^+ içinde ζ-sınırlı, artan (x_α) neti alınsın. T KB operatör olduğundan $x \in X$ için $T(x_\alpha - x) \xrightarrow{\tau} 0$ sağlanır. Buradan,

$$|S(x_\alpha - x)| \le |S||(x_\alpha - x)| \le |T||(x_\alpha - x)| = |T(x_\alpha - x)| \xrightarrow{\tau} 0$$

olur ve istenilen $x \in X$ için $S(x_\alpha - x) \xrightarrow{\tau} 0$ sağlanır. □

Sonuç 4.1.12. (X,ζ) ve (Y,τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ KB (σ-KB) latis homomorfizması olsun. Eğer $0 \le S \le T$ sağlanıyor ise S KB (σ-KB) operatördür.

Kanıt. T latis homomorfizması ise Teorem 4.1.10'dan her $x \in X$ için $|Tx| = T(|x|)$ sağlanır. Böylece Teorem 4.1.11'deki ispat adımları aynı şekilde uygulanır. □

Teorem 4.1.13. (X,ζ) ve (Y,τ) lokal solid vektör latis olmak üzere $T : X \to Y$ pozitif quasi KB operatör olsun. $0 \le S \le T$ koşulunu sağlayan her $S : X \to Y$ operatörü quasi KB'dir.

Kanıt. $0 \le S \le T$ olsun ve $(x_\alpha) \subset X^+$ artan, ζ-sınırlı neti alınsın. T pozitif operatör olduğundan $Tx_\alpha \uparrow$'dır. T quasi KB ise Tx_α τ-Cauchy netidir. Her $U \in \tau(0)$ için $V - V \subset U$ sağlanacak şekilde en az bir $V \in \tau(0)$ solid komşuluğunu vardır. Buradan her $\alpha, \beta \ge \alpha_0$ iken $T(x_\alpha - x_\beta) \in V$ olacak şekilde α_0 indisi vardır. Özellikle, $\alpha \ge \alpha_0$ için $T(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$'dir. Ayrıca $0 \le S \le T$ ve V solid olduğundan her $\alpha \ge \alpha_0$ için $S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$ sağlanır. Böylece her $\alpha, \beta \ge \alpha_0$ ve herhangi $U \in \tau(0)$ için

$$S(x_\alpha) - S(x_\beta) = S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) - S(x_{\alpha_0} - x_\beta) \in V - V \subset U$$

elde edilir. Bu durumda S quasi KB operatördür. □

Bu bölümün devamında X Banach latis olarak düşünülecektir. Öncelikle KB uzay tanımını verelim.

Tanım 4.1.14. $(X, \|\cdot\|)$ normlu latisine, her artan, norm sınırlı, pozitif net (dizi) norm yakınsak ise KB (σ-KB) uzay denir.

Örnek 4.1.15. $1 \le p < \infty$ olmak üzere $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ uzayı KB uzayına örnektir. Fakat c_0 ve l_∞ uzayları KB uzay değildir.

Lemma 4.1.16. X KB uzay ve Y topolojik vektör uzayı olsun. $T : X \to Y$ sürekli ise KB'dir.

Kanıt. $0 \le x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ alınsın. X KB uzay olduğundan $x \in X$ için $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ olur ve T sürekli olduğundan $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$ elde edilir. □

Lemma 4.1.17. X KB uzayından herhangi Y Banach latisine giden her operatör KB operatördür.

Kanıt. X KB uzay ve $T : X \to Y$ operatör olsun. $0 \le x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ alınsın. X KB uzay ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. T operatörü sınırlı ise sürekli olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ sağlanır ve böylece T KB operatördür. □

Önerme 4.1.18. X Banach latis olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) $I : X \to X$ operatörü KB'dir.

(ii) $I : X \to X$ operatörü σ-KB'dir.

(iii) $I : X \to X$ operatörü quasi KB'dir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ kolayca görülür.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ alınsın. $Id_X x_\alpha = x_\alpha$ norm Cauchy'dir ve X Banach latis olduğundan $x \in X$ için $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ sağlanır. □

Önerme 4.1.19. X Banach latis, Y KB uzayı olsun. $T \to Y$ sıra sınırlı operatör ise quasi KB'dir.

Kanıt. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ olsun. Y KB uzay ise Dedekind tamdır. Böylece $L_b(X,Y) = L_o(X,Y)$ olur. $T = T^+ - T^-$ ve T^+, $T^- \geq 0$'dır ve aynı zamanda norm sınırlıdır. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ise $0 \leq T^+ x_\alpha \uparrow$ ve $0 \leq T^- x_\alpha \uparrow$ olur. Aynı zamanda (x_α) norm sınırlı ise $T^+ x_\alpha$ ve $T^- x_\alpha$ norm sınırlıdır. Böylece, Y KB uzayı olduğundan $u, v \in Y$ için $T^+ x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ ve $T^- x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} v$ elde edilir. Buradan T quasi KB operatördür. □

Önerme 4.1.20. $l, p \in [1, \infty]$ olmak üzere $X = (c_{00}, \|\cdot\|_l)$ ve $Y = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$ olsun. $I : X \to Y$ quasi KB operatördür ancak ve ancak $l \leq p < \infty$'dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_{c_{00}}$ için (x_n) Cauchy dizisi olsun. O halde (x_n) sınırlıdır. Her $n \geq M$ için $\|x_n\|_p \leq M \|x_n\|_l$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $l \leq p$ sağlanır.
$(\Leftarrow)$ $l \leq p$ olsun. Buradan $\|x\|_p \leq \|x\|_l$'dir. $0 \leq x_n \uparrow$ ve sınırlı olsun. Bu durumda $x \in X$ için $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_l} x$ olur. Böylece $0 \leq \|x_n - x\|_p \leq \|x_n - x\|_l \to 0$'dir. □

Örnek 4.1.21. Her Lebesgue operatör KB operatör olmak zorunda değildir. $X = c_0$ ve $Id_{c_0} : c_0 \to c_0$ operatörü olsun. Önce birim operatörü Id_{c_0}'ın Lebesgue operatör olduğunu göstermek için $x_n \downarrow 0$ alınsın. Her k için $x_k^n \downarrow 0$ olur. Buradan $|x_k^n| \downarrow 0$ elde edilir. $\|Id_{c_o}(x_n)\|_\infty = \|x_n\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n| \to 0$ olduğundan I birim operatörü Lebesgue'dir. Id_{c_o}'ın KB operatörü olmadığını göstermek için $(x_n) \subseteq X_+$ norm sınırlı ve artan dizisi alınsın. $\sup\limits_n \|x_n\| \leq M$ olur. $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{\text{n tane}} 0, \ldots, 0)$ dizisi alınsın. x_n artandır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\|_\infty = 1$'dir. $\|Tx_n - Tx\|_\infty \to 0$ olsun. $\|x_n - x\|_\infty = \|(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_\infty = \sup |1 - x_i| \to 0$ ise $x_i \to 1$ olmalıdır fakat $x = (x_i) \notin c_0$ olur. Böylece I KB operatörü değildir.

Teorem 4.1.22. X Banach latis ve $T : X \to X$ operatörünü alınsın. T (σ-) KB operatör ise quasi (σ-) KB'dir.

Kanıt. Artan $x_\alpha \in B_{X^+}$ netini alınsın. T KB operatör ise $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ olur. X Banach latis olduğundan Tx_α norm Cauchy dizisi olur ve böylece T quasi KB'dir. □

Örnek 4.1.23. Teorem 4.1.22'ın tersi her zaman doğru değildir. $T : c_0 \to c_0$ operatörü alınsın ve $x \in c_0$ olmak üzere $Tx = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i} e_i$ şeklinde tanımlansın. T quasi KB operatörüdür. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $\|x_n\| \leq M$ olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve her $n > m > N$ için $\|Tx_n - Tx_m\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\frac{x_i^n - x_i^m}{i}| \to 0$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla Tx_n norm Cauchy dizisidir. T'nin KB operatör olmadığını göstermek için $(x_n) = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{n tane}}, 0, \ldots, 0)$ dizisi alınsın. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $\|x_n\|_\infty = 1$'dir. $Tx_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} e_i$ ve $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ olur. Buradan

$$\|Tx_n - y\|_\infty = \|(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$$

elde edilir fakat $y = Tx$ olacak şekilde $x \in c_0$ yoktur.

Lemma 4.1.24. X üzerinde T_γ quasi KB operatör neti alınsın ve en az bir T operatörü için $\|T_\gamma - T\| \to 0$ sağlansın. T operatörü quasi KB operatördür.

Kanıt. X'in içinde $x_\alpha \uparrow 0$ norm sınırlı neti alınsın. Genelliği bozmadan her $\alpha \in \Lambda$ için $\|x_\alpha\| \leq 1$ olsun. Verilen ε için $\|T_{\gamma_\varepsilon} - T\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir γ_ε vardır.

$$\sup_{Vertx\| \leq 1} |(T_{\gamma_\varepsilon} - T)(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ayrıca T_{γ_ε} quasi KB operatör olduğundan $(T_{\gamma_\varepsilon} x_\alpha) \subset X$ norm-Cauchy olur. Verilen $\varepsilon > 0$ ve her $\alpha^{'}, \alpha^{''} \geq \alpha_0$ için $\|T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha'} - T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha''}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır. Buradan

$$\|Tx_{\alpha'} - Tx_{\alpha''}\| \leq \|Tx_{\alpha'} - T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha'}\| + \|T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha'} - T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha''}\| + \|T_{\gamma_\varepsilon} x_{\alpha''} - Tx_{\alpha''}\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $T \in L_{qKB}(X)$ □

Genelliği bozmadan bir çok ispatta T operatörü pozitif alınacaktır. Bunun yanında eğer T_1 ve T_2 pozitif KB operatörü olmak üzere $T = T_1 - T_2$ şeklinde yazılabiliyor ise T operatörüne regüler KB, $T \in L_{rKB}(X)$, adı verilir.

Teorem 4.1.25. X Banach Latis olsun. $A = L_{rKB}(X)$ $(L_{rqKB}(X))$, $L_r(X)$ cebirinin sol cebirsel ideali ve operatör normuna göre kapalıdır. Böylece $L_r(X)$'in alt cebiri olur. Dahası, A birimsel alt cebirdir ancak ve ancak X KB uzayıdır.

Kanıt. $T \in L_{rKB}(X)$ ve $S \in L_r(X)$ alınsın. Genelliği bozmadan $T, S \geq 0$ olsun. $x_\alpha \uparrow$ ve norm sınırlı olsun. $T \in L_{rKB}(X)$ olduğundan $\|Tx_\alpha - Tx\| \to 0$ olur. S pozitif olduğundan süreklidir. $\|STx_\alpha - STx\| \leq \|S\|\|Tx_\alpha - Tx\| \to 0$ olur ve $S \circ T \in L_{rKB}(E)$ elde edilir. Şimdi sol idealin operatör normuna göre kapalı olduğu gösterilecektir. $\|T_\gamma - T\| \to 0$ olacak şekilde $T_\gamma \in L_{rKB}(X)$ alınsın. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve norm sınırlı neti olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\|T_{\gamma_\varepsilon} - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir γ_ε vardır. Aynı zamanda $T_{\gamma_\varepsilon} \in L_{rKB}(X)$ olduğundan $\|T_{\gamma_\varepsilon} x_\alpha - T_{\gamma_\varepsilon} x\| \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

$$\|Tx_\alpha - Tx\| \leq \|Tx_\alpha - T_{\gamma_\varepsilon} x_\alpha\| + \|T_{\gamma_\varepsilon} x_\alpha - T_{\gamma_\varepsilon} x\| + \|T_{\gamma_\varepsilon} x - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Böylece $T \in A$ bulunur. A birimseldir gerek ve yeter koşul $I \in A$'dır gerek ve yeter koşul I birim operatörü regüler KB'dir gerek ve yeter koşul X KB uzaydır. □

Önerme 4.1.26. X Banach latis, Y Banach uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ sonlu rank operatörü regüler KB operatördür.

Kanıt. $T : X \to Y$ sürekli ve $\dim(T(X)) < \infty$ olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$ olmak üzere $T = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes f_k$ olarak tanımlansın. $X' = L(X, \mathbb{R})$ Dedekind tam olduğundan $L_b(X, \mathbb{R}) = L_r(X, \mathbb{R})$ olur ve böylece $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonelleri regülerdir.

$$T = \sum_{k=1}^{n}(f_k^+ \otimes y_k^+ + f_k^- \otimes y_k^-) - \sum_{k=1}^{n}(f_k^+ \otimes y_k^- + f_k^- \otimes y_k^+)$$

şeklinde yazabiliriz. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ alınsın. $T_1 x_\alpha = \sum_{k=1}^{n}(f_k^+ \otimes y_k^+ + f_k^- \otimes y_k^-)(x_\alpha)$ ve $T_2 x_\alpha = \sum_{k=1}^{n}(f_k^+ \otimes y_k^- + f_k^- \otimes y_k^+)(x_\alpha)$ netleri artan ve $T(X)$ içinde sınırlıdır. Böylece $T_1 x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} z_1$ ve $T_2 x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in T(X)$ vardır. $z_1, z_2 \in T(X)$ ise $Tx_1 = z_1$ ve $Tx_2 = z_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Buradan $Tx_\alpha = T_1 x_\alpha - T_2 x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} z_1 - z_2$ elde edilir ve böylece $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ sağlanmış olur. T KB operatördür. □

Önerme 4.1.27. X Banach latis üzerinde her regüler kompakt T operatörü quasi KB operatör olur.

Kanıt. $T \geq 0$ ve T kompakt operatör olsun. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve x_α norm sınırlı artan neti alınsın. Buradan $Tx_\alpha \uparrow$ olur. T kompakt olduğundan artan Tx_α netinin yakınsak bir alt neti vardır. Bu durumda $\|Tx_{\alpha_\beta} - y\| \to 0$ olacak şekilde $y \in X$ ve Tx_{α_β} norm Cauchy olur. Tx_α artan ve norm Cauchy alt nete sahip olduğundan Tx_α norm Cauchy'dir. Dolayısıyla T quasi KB operatördür. □

Örnek 4.1.28. X Banach latis ve $T : X \to X$ bir operatör olsun. T kompakt operatörü KB operatör olmak zorunda değildir. $X = c_0$ olsun. a_n'ler reel değerli ve $a_n \to 0$ olmak üzere $x \in c_0$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ olsun.

$$T : X \to X$$
$$x \longmapsto Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e_n$$

olarak tanımlansın. T operatörünün pozitif olduğu kolayca görülür. Kompakt olduğu gösterilecektir. $T_N x = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} e_n = (a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_N}{N}, 0, \ldots)$ ve $dim(T_N(E)) < \infty$ olduğundan T_N'ler kompakttır.

$$\begin{aligned}
\|T_N x - Tx\|_\infty &= \|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e_n\|_\infty \\
&= \|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e_n\| \\
&\leq \sup_k |a_k| \|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{e_k}{k}\| \\
&\leq \|x\|_\infty \|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{e_k}{k}\|
\end{aligned}$$

olup $\|T_N - T\| \leq \|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{e_k}{k}\|_\infty = \dfrac{1}{N+1} \to 0$ olduğundan T kompakt operatördür. Fakat KB operatör değildir. $x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$, x_n pozitif, artan ve norm sınırlı dizisi alınsın. $Tx_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$ norm Cauchy dizisidir. $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$ ve buradan $\|Tx_n - y\| = \|(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots) \to 0$ bulunur ancak $Tx = y$ olacak şekilde $x = (1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots) = 1$ dizisi c_0'ın elemanı değildir. Böylece T KB operatör değildir.

Bu örnek aynı zamanda her quasi KB operatörün KB operatör olmadığına dair bir örnek olarak düşünülebilir. Önerme 4.1.27'den T operatörü quasi KB'dir fakat KB değildir.

Teorem 4.1.29. X sıra sürekli norma sahip Banach latis olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) X KB uzaydır.

(ii) X üzerindeki her pozitif kompakt operatör KB operatördür.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ X KB uzay olsun. X sıra sürekli norma sahip olduğundan Dedekind tamdır. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve norm sınırlı netini ve T pozitif operatörü alınsın. Pozitif operatörler sürekli olduğundan T süreklidir. X KB uzayı olduğundan $\|x_\alpha - x\| \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. $\|T\|\|x_\alpha - x\| \leq \|Tx_\alpha - Tx\| \to 0$ olur ve böylece T KB operatördür.
$(ii) \Rightarrow (i)$ X KB-uzayı olmasın. c_0 X uzayına latis gömülür, [1, Teorem 4.60].

$$\begin{aligned}
\iota : c_0 &\to X \\
(\alpha_k) &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\iota \geq 0$'dır. $\sum_{k=1}^{2} = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1 e_1 \vee a_2 e_2) + (a_1 e_1 \wedge a_2 e_2)$ olarak yazılır ve e_k'lar dik olduğundan $a_1 e_1 + a_2 e_2 = a_1 e_1 \vee a_2 e_2$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| =$

$\lim_{n\to\infty} \| \bigvee_{k=1}^{n} a_k e_k \|$ olarak yazılır. Örnek 4.1.28'den T pozitif ve kompakt operatördür. Dolayısıyla Önerme 4.1.27'den T quasi-KB operatördür.

□

Örnek 4.1.30. Bu örnek ile KB operatörlerinin baskınlık özelliğini sağlamadığını söylenebilir. $T, S \in L(c_0)$ olsun. $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ ve $x \in c_0$ olmak üzere

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} e_n$$

ve

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \right) e_n$$

operatörleri tanımlansın. $0 \leq S \leq T$ olduğu açıktır. T operatörü sonlu rank operatörü olduğundan Önerme 4.1.26'den KB operatörüdür. Fakat Örnek 4.1.28'de $\alpha = (\frac{1}{n})$ alındığında S operatörünün KB olmadığı görüldü. Bu örnekte $\alpha = (\frac{1}{2^k})$ için aynı adımlar geçerlidir. Böylece S operatörü KB değildir.

Lemma 4.1.31. X Banach latis, Y Banach uzayı olmak üzere $L_{qKB}(X, Y)$ kümesi vektör uzayıdır.

KB opetörlerinin oluşturduğu kümenin toplamaya göre kapalı olmadığı aşağıdaki örnek ile görülür. Böylece $L_{KB}(X, Y)$ vektör uzayı değildir.

Tanım 4.1.32. f, ℓ_∞ üzerinde pozitif lineer fonksiyonel olmak üzere $f(\mathbb{1}) = 1$ ve $T(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$ öteleme operatörü için $f(T(x)) = f(x)$ koşulu sağlanıyorsa f lineer fonksiyoneli Banach limit olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.33. $f \in (\ell_\infty)'$ olsun. Banach latisleri için topolojik dual ile sıra dual aynıdır. Böylece $f \in (\ell_\infty)' = (\ell_\infty)^\sim$ olur ve $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılabilir. Genelliği bozmadan $f \geq 0$ alınsın. $S, T \in L(\ell_\infty)$ alınsın ve $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ olmak üzere $Sa = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \right) e_n$ ve $Ta = f(a)e_1$ olarak tanımlansın. S pozitiftir. $f \geq 0$ olduğundan T'nin pozitif olduğu kolaylıkla görülür. T rank-1 operatörü olduğundan Teorem 4.1.26'den KB operatördür. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_{\ell_\infty}$ alınsın.

$$Sx_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_n^k}{2^k} \right) e_n \uparrow y := \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sup_k |x_n^k| \right) e_n$$

Bu durumda $\|Sx_n - y\|_\infty \to 0$ olur ve $S \in L_{KB}(\ell_\infty)$ bulunur. $S + T$'nın KB operatör olmadığını göstermek için $b_n = \sum_{k=1}^{n} e_k + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} e_k$ dizisi düşünülsün. $b_n \in \ell_\infty$, $b_n \uparrow \mathbb{1}$ ve $T(b_n) = f(b_n)e_1 = \frac{1}{2} e_1$'dir.

$$S(b_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{2^k} \right) e_n = (0, \frac{b_1}{2}, \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2}, \ldots, \frac{b_1}{2} + \ldots + \frac{b_n}{2^{n-1}}, \ldots)$$

ise $S(b_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$'dir. Buradan $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$ olmak üzere

$$\|(S+T)(b_n) - v\|_\infty \to 0$$

elde edilir. $(S+T)a = v$ olacak şekilde $a \in \ell_\infty$ olsun. Buradan $Sa + Ta = Sa + f(a)e_1 = Sa + \frac{1}{2}e_1 = (\frac{1}{2}, \ldots)$ şeklindedir. Fakat her $y \in \ell_\infty$ için $(Sy)_1 = 0$'dır. Buradan $f(a) = \frac{1}{2}$ elde edilir. $S(b_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ olduğundan $Sa = u$ olur. Bu eşitlikten $(0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2, \ldots) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$ elde edilir ve buradan $a = (1, 1, \ldots)$ bulunur. $f(a) = 1$ olur ki bu da çelişkidir. O halde $(S+T)a = v$ olacak şekilde $a \in \ell_\infty$ yoktur. $S+T$ KB operatör değildir.

4.2 Demi KB Operatörler

Bu bölümde demi KB operatör tanımı verilecek olup özellikleri incelenecektir. Elde edilmiş sonuçlar [10] makalesinde mevcuttur. Öncelikle X Banach latis olmak üzere üzerinde tanımlı KB operatör tanımını hatırlayalım.

Tanım 4.2.1. X Banach latis olmak üzere $T : X \to X$ bir operatör olsun. Her norm sınırlı artan $x_n \in X_+$ dizisi için $x \in X$ var ve $\|Tx_n - Tx\| \to 0$ ise T'ye KB operatör denir. KB operatörlerinin kümesi $L_{KB}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2. X Banach latis olmak üzere $T : X \to X$ bir operatör olsun. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ olsun. $x \in X$ var ve $x_n - Tx_n \to Tx$ iken x_n'nin norm yakınsak bir alt dizisi var ise T'ye demi KB operatör denir. Demi KB operatörlerin kümesi $L_{DKB}(X)$ ile gösterilir.

Lemma 4.2.3. $\alpha \neq 1$ için αId_X demi KB operatörüdür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - \alpha Id_X(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} \alpha Id_X(x)$ olsun. $(1-\alpha)x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olduğundan (x_n)'nin norm yakınsak bir alt dizisi vardır. □

Örnek 4.2.4. $\alpha = 1$ olması durumunda birim operatör demi KB olmak zorunda değildir.

$$I : \ell_\infty \to \ell_\infty$$

operatörü alınsın ve $x_n = (x_m)_n = \begin{cases} 1\ , & m \leq n \\ 0\ , & m > n \end{cases}$ dizisi düşünülsün.

$0 \leq x_n \uparrow$ ve $\|x\|_\infty = 1$. $x_n - Id_{\ell\infty}(x_n)$ norm yakınsaktır fakat (x_n)'nin norm yakınsak alt dizisi yoktur.

Önerme 4.2.5. X Banach latis ve $T : X \to X$ operatörü KB ise demi KB operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_X$ alınsın. $x_1 \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_1$ olsun. T KB operatör olduğundan $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_2$ olacak şekilde $x_2 \in X$ vardır. Böylece

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} - Tx_{n_k} + x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_1 + Tx_2$$

olur ve T operatörü demi KB operatörü olur. □

$T = -Id_{\ell\infty}$ ve $S = 2Id_{\ell\infty}$ olsun. $T + S$ demi KB operatörü değildir. Böylece $L_{DKB}(X)$ toplamaya göre kapalı değildir. Beklenenin aksine $L_{DKB}(X)$ bir vektör uzay yapısı taşımaz.

4.3 Demi Quasi KB Operatörler

Bu bölümde demi quasi KB operatör tanımı verilecek olup özellikleri incelenecektir. Elde edilmiş sonuçlar [10] makalesinde mevcuttur. Öncelikle X Banach latis olmak üzere üzerinde tanımlı quasi KB operatör tanımını verilsin.

Tanım 4.3.1. X Banach latis ve $T : X \to X$ operatör olsun. B_X içindeki her pozitif artan (x_n) dizisi için Tx_n norm Cauchy dizisi oluyor ise T operatörüne quasi KB operatör denir. Quasi KB operatörlerin kümesi $L_{qKB}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2. X Banach latis, $T : X \to X$ operatör olsun. B_X içindeki her pozitif artan (x_n) dizisi için $x_n - Tx_n$ norm Cauchy olacak şekilde (x_n) dizisinin norm yakınsak alt dizisi var ise T operatörüne demi quasi KB operatör denir. Demi quasi KB operatörlerin kümesi $L_{DQKB}(E)$ ile gösterilir.

$L_{qKB}(X)$'nin bir vektör uzay olduğu rahatlıkla görülebilir.

Lemma 4.3.3. $\alpha \neq 1$ için αId_X demi quasi KB operatörüdür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Id_X x_n$ norm Cauchy olsun. Bu durumda

$$\|x_n - Id_X(x_n) - (x_m - Id_X(x_m))\| = \|(1-\alpha)x_n - (1-\alpha)x_m\| = |1-\alpha|\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

(x_n) dizisi norm Cauchy dizisi olur. O halde (x_n)'in. (x_{n_k}) norm yakınsak alt dizisi vardır. □

Önerme 4.3.4. X Banach latis olsun. Her $T : X \to X$ quasi KB operatörü demi quasi KB operatörüdür.

Kanıt. T operatörü quasi KB olsun ve $(x_n - Tx_n)$ norm Cauchy olacak şekilde $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_X$ alınsın. $(x_n - Tx_n) = (Id_X - T)x_n$ şeklinde yazılabilir. Böylece $(Id_X - T)$ quasi KB operatörü olur. İki quasi KB operatörünün toplamlarının quasi KB operatörüdür. $Id_X = (Id_X - T) + T$ birim operatörü quasi KB olur. $Id_X(x_n) = x_n$ norm Cauchy olduğundan x_{n_k} norm yakınsak alt dizisi vardır. □

Önerme 4.3.5. X Banach latis $T, S : X \to X$ iki operatör olsun. T demi quasi KB, S quasi KB operatör olmak üzere $T + S$ demi quasi KB operatörüdür.

Kanıt. $x_n - (T+S)x_n$ norm Cauchy olacak şekilde $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. S operatörü quasi KB olduğundan Sx_n norm Cauchy dizisidir. Sx_n norm Cauchy ise Sx_{n_k} norm yakınsak alt dizisi vardır. Böylece $y \in X$ için $Sx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$'dir. $x_n - (T+S)x_n$ norm Cauchy ise norm yakınsaktır.

$$x_{n_k} - Tx_{n_k} = x_{n_k} - (T+S)x_{n_k} + Sx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} x + y,\ x + y \in X$$

$x_{n_k} - Tx_{n_k}$ norm yakınsak ise norm Cauchy olduğundan ve T demi quasi KB operatör olduğundan x_{n_k} dizisinin norm yakınsak alt dizisi vardır. Böylece $T + S$ demi quasi KB olur. □

$T, S : X \to X$ operatörleri olsun. T, S quasi demi KB olsun. Fakat $T \circ S$ quasi demi KB olmak zorunda değildir. $X = \ell_\infty$ olsun ve $T = S = (-Id_X)$ alınsın.

$$(-Id_X) \circ (-Id_X)x = -Id_X(-x) = x = Id_X(x)$$

ve Id_X demi quasi KB operatörü değildir. O halde $L_{qKB}(X)$, $L_{DQKB}(X)$ içinde ideal değildir. Çünkü $T, S \in L_{qKB}(X)$ iken $T \circ S \notin L_{qKB}(X)$'dir.

Önerme 4.3.6. X Banach latis olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1. X KB uzaydır.
2. Her $T : X \to X$ operatörü quasi KB operatörüdür.
3. X'nin birim operatörü demi quasi KB operatördür.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) Lemma 4.1.17'den $T : X \to X$ operatörü KB operatördür. Aynı zamanda Lemma 4.1.2'den T operatörü quasi KB operatördür.
(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.
(3) $\Rightarrow$ (1) Id_X demi quasi KB olsun. $0 \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \in B_X$ alınsın. $\|x_n - Id_X(x_n)\| \to 0$ olduğundan $x_n - Id_X(x_n)$ norm Cauchy olur ve Id_X demi quasi KB ise (x_n)'in norm yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. (x_{n_k}) norm yakınsak ve (x_n) artan olduğundan (x_n) dizisi norm yakınsak olur. Dolayısıyla X KB uzaydır. □

Teorem 4.3.7. X Banach latis, Y Banach uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ sürekli operatör olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ için (Tx_n) norm yakınsak bir alt diziye sahiptir.

(ii) $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ için (Tx_n) norm yakınsaktır.

(iii) $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ için (Tx_n) norm Cauchy dizisidir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ [23] makalesinde ispatlandı.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Her yakınsak dizi Cauchy olduğundan $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ için Tx_n norm Cauchy dizisi olur.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ için (Tx_n) norm Cauchy dizisi olsun. Böylece Tx_{n_k} norm yakınsak alt dizisi vardır. □

Böylelikle [3] makalesindeki b-zayıf kompakt operatör, [9] makalesindeki KB operatör ve [14] makalesindeki quasi KB operatörü aynı operatörlerdir.

Lemma 4.3.8. X Banach latis olsun. $T : X \to X$ demi quasi KB operatör ise T demi KB operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ sağlansın. Norm yakınsak dizi norm Cauchy olduğundan, $x_n - Tx_n$ norm Cauchy'dir. Böylece (x_n)'nin norm yakınsak (x_{n_k}) alt dizisi vardır. □

X Banach latis olmak üzere her KB operatör quasi KB operatör, her KB operatör demi KB operatör, her demi quasi KB operatör demi KB operatördür. Son olarak Lemma 4.3.4'den her quasi KB operatör demi quasi KB operatördür.

5 LEVİ/QUASİ LEVİ OPERATÖRLER VE DEMİ VERSİYONLARI

(Quasi) Levi operatörleri de (quasi) KB operatörleri gibi ilginç ve önemli özelliklere sahip operatör sınıflarıdır. Bu operatör sınıfları için sıra yakınsaklık önem arz eder. Bu unitede Levi ve quasi Levi operatörleri tartışılacaktır. Ayrıca bu operatör sınıflarının demi versiyonları olan demi Levi ve demi quasi Levi operatörleri incelenecektir. Bu ünite [4, 10, 14] makalelerine dayanmaktadır.

5.1 Levi ve Quasi Levi Operatörler

Bu bölümde [4] makalesinde tanımları verilmiş olan yeni operatör sınıfları, Levi ve quasi Levi operatörler incelenecektir. Sıra yakınsaklık ile ilgili özellikleri incelemek için ön bilgiler ünitesine bakılabilir.

Tanım 5.1.1. (X,ζ) lokal solid vektör latis olsun. Her artan, ζ-sınırlı, pozitif (x_α) netinin X içinde supremumu var ise X uzayına Levi latis denir.

Tanım 5.1.2. (X,ζ) lokal solid vektör latis, Y vektör latis olmak üzere X'in içindeki her ζ-sınırlı, pozitif, artan net(dizi) için, $x \in X$ var ve $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ $(Tx_n \xrightarrow{o} Tx)$ ise T'ye Levi (σ-Levi) operatör, X'in içindeki her ζ-sınırlı, pozitif, artan net (dizi) için Tx_α sıra Cauchy net (dizi) ise T'ye quasi Levi (σ-quasi Levi) operatör denir.

Levi operatörlerinin kümesi $L_l(X,Y)$, quasi Levi operatörlerin kümesi $L_{ql}(X,Y)$ ile gösterilir.

Lemma 5.1.3. (X,ζ) lokal solid vektör latis olsun. Id_X birim operatörü Levi'dir gerek ve yeter koşul (X,ζ) Levi latistir.

Kanıt. Id_X Levi operatör olsun. Artan, pozitif, ζ-sınırlı (x_α) için $Id_X x_\alpha = x_\alpha \xrightarrow{\zeta} x$'dır. $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{\zeta} x \in X$ ise $\sup x_\alpha = x$ olur. Buradan (X,ζ) Levi latistir. □

Lemma 5.1.4. $(X,\|\cdot\|)$ Banach latis olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her KB uzayı, sıra sürekli tam norma sahip bir Levi latistir.

(ii) Her sıra sürekli Levi normlu latis Fatou'dur.

(iii) Levi normlu latis Dedekind tamdır.

Kanıt. *(i)* $0 \le x_\alpha \uparrow$ ve (x_α) norm sınırlı olsun. Amaç $\sup x_\alpha \in X$ olduğunu göstermektir. X KB uzay ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x \in X$ sağlanır. $\sup x_\alpha = y$ var olsun. $y - x_\alpha \downarrow 0$ ve X sıra sürekli norma sahip olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ sağlanır ve buradan $x = y$ olur.

(ii) $r > 0$ olmak üzere 0'ı içeren baz elemanı $B(0,r)$ yuvarı alınsın. $B(0,r)$'nin sıra kapalı solid küme olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için [1, Lemma 1.37]'den $0 \le x_\alpha \uparrow x$, $x_\alpha \subset B(0,r)$ alınsın. $x \in B(0,r)$ olur ise ispat biter. $0 \le x_\alpha \le x$ ise $\|x_\alpha\| \le \|x\|$'dir. X sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|x\| = \sup \|x_\alpha\|$ olur. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| - \varepsilon$ değeri $(\|x_\alpha\|)$ kümesi için üst sınır değildir. O halde en

az bir α_0 için $\|x\| - \varepsilon \leq \|x_{\alpha_0}\| < r$ olur. Buradan her ε için $\|x\| < r + \varepsilon$'dur. Böylece $x \in B(0,r)$'dir. Solid küme olduğunu göstermek için $x \in B(0,r)$ olmak üzere $|y| \leq |x|$ olsun. Buradan $\|y\| \leq \|x\| < r$ elde edilir ve buradan $y \in B(0,r)$ bulunur.

(*iii*) Açıktır.

□

Sonuç 5.1.5. (X,ζ) lokal solid vektör latis olsun.

(i) (X,ζ) KB latis ise Levi latistir.

(ii) (X,ζ) Levi latis ise Dedekind tamdır.

Önerme 5.1.6. (Y,τ) bir Levi latis olmak üzere her Levi latis τ-lateral tam ve Dedekind tamdır. Ayrıca, her σ-Levi latis τ-lateral σ-tam ve Dedekind σ-tamdır.

Kanıt. (σ-) Levi latis ise Dedekind (σ-) tam olduğu Lemma 5.1.4'den açıktır. τ- lateral (σ-) tam olduğunu göstermek için D, (Y,τ)'nun ikili dik pozitif vektörlerinin τ-sınırlı alt kümesi alınsın. $D^{\vee} := \{\sup M : M \subset D \text{ ve } |M| < \infty\}$ kümesi oluşturulsun. $(P_{fin}(D) = \{M : M \subset D \text{ ve } |M| < \infty\}, \subseteq)$ bir posettir. $M_\alpha \subseteq P_{fin}(D)$ olmak üzere $M_\alpha \uparrow$ olsun. Böylece $\sup M_\alpha = u_\alpha$ ise $u_\alpha \uparrow$ ve $u_\alpha \in D^{\vee}$'dir. $\sup u_\alpha = \sup D^{\vee} = \sup D$ var olduğundan (Y,τ) τ-lateral tamdır. □

Teorem 5.1.7. X normlu vektör latis olsun. $L_{ql}(X)$ vektör uzaydır. Dahası her $T : X \to X$ quasi Levi operatörü sıra sınırlıdır.

Kanıt. İspat [14, Theorem 4]'dan görülür. □

Lemma 5.1.8. X, Y Banach latis olmak üzere X'ten Y'ye giden her pozitif KB operatörü pozitif Levi operatördür.

Kanıt. $T : X \to Y$ pozitif KB olsun ve $0 \leq x_\alpha \uparrow$, $x_\alpha \in B_X$ alınsın. T KB operatör ise $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$'dir. T pozitif ise sıra koruyan olduğundan $Tx_\alpha \uparrow$'dır. Artan ve norm yakınsak net aynı limit noktasına sıra yakınsadığından, $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ elde edilir ve T Levi'dir. □

Önerme 5.1.9. X Banach latis, Y Banach uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ regüler sonlu rank operatörü Levi operatördür.

Kanıt. $\dim(T(X)) < \infty$ olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$ olmak üzere $T = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes f_k$ olarak tanımlansın. $X' = L(X,\mathbb{R})$ Dedekind tam olduğundan $L_b(X,\mathbb{R}) = L_r(X,\mathbb{R})$ olur ve böylece $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonelleri regülerdir.

$$T = \sum_{k=1}^{n} (f_k^+ \otimes y_k) - \sum_{k=1}^{n} (f_k^- \otimes y_k)$$

şeklinde yazabiliriz. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \in B_X$ alınsın. $f_k^+, f_k^- \geq 0$ olduğundan $f_k^+(x_\alpha)$ ve $f_k^-(x_\alpha)$ $\mathbb{R}^-$ içinde artan ve sınırlıdır. Böylece $f_k^+(x_\alpha) \to a_k \in \mathbb{R}$ ve $f_k^-(x_\alpha) \to b_k \in \mathbb{R}$.

$$T_1 x_\alpha = \sum_{k=1}^{n} (f_k^+(x_\alpha)) y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$$

ve

$$T_2x_\alpha = \sum_{k=1}^{n}(f_k^-(x_\alpha))y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{k=1}^{n} b_k y_k$$

ve $dim(T(X)) < \infty$ olduğundan $T(X) \cong \mathbb{R}^n$. Buradan $T_1x_\alpha \xrightarrow{o} \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$ ve $T_2x_\alpha \xrightarrow{o} \sum_{k=1}^{n} b_k y_k$ elde edilir. Böylece $Tx_\alpha = T_1x_\alpha - T_2x_\alpha \xrightarrow{o} \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)y_k \in T(X)$ olur. $Tx = \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)y_k$ olacak şekilde $x \in X$ alınır ise $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ bulunur. T operatörü Levi'dir.

□

Her Levi operatörünün quasi Levi olduğu açıktır. Fakat aşağıdaki örnek quasi Levi olup Levi olmayan bir operatör örneğidir.

Örnek 5.1.10. $(\alpha_n) \in c_0 \backslash c_{00}$ olsun. $T \in L(c_0)$ alınsın ve $T\big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n a_n)e_n$ olarak tanımlansın. Örnek 4.1.28'te $(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ olarak alınmıştır. O halde $(\alpha_n) \in c_0 \backslash c_{00}$ alındığında aynı adımlar geçerli olacaktır. Böylece T operatörü KB değildir. Aynı zamanda, T operatörü σ-Levi operatörü de değildir. $x_n := \sum_{k=1}^{n} e_k$ dizisi alınsın. $0 \leq x_n \uparrow$ ve sınırlıdır.

$$|Tx_n - Tx| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} \alpha_k e_k\right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_k| e_k \downarrow 0$$

$Tx_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ dizisi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$'ya sıra yakınsar. Sıra yakınsak dizi sıra Cauchy olduğundan T operatörü quasi Levi operatördür. Fakat $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ olacak şekilde $x \in c_0$ yoktur. T operatörü σ-Levi değildir.

Lemma 4.1.24'te quasi KB operatörlerinin operatör normu altında kapalı olduğu görüldü. Aşağıdaki örnek bu özelliğin KB ve Levi operatörler için geçerli olmadığını gösteren bir örnektir. Beklenenin aksine bu özellik quasi Levi operatörler için de geçerli değildir, [14, Örnek 6].

Örnek 5.1.11. Bu örnek ile $L_{KB}(c_0)$ ve $L_l(c_0)$ kümelerinin $L(c_0)$ altında operatör normuna göre kapalı olmadığı görülür. $T \in L(c_0)$ alınsın. $x \in c_0$ için $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} e_k$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $T_n \in L(c_0)$, $T_nx = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} e_k$ olarak alınsın. Bu durumda T_n sonlu rank operatörüdür ve $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$'dir. Önerme 4.1.26 ve Önerme 5.1.9'den T_n KB ve Levi operatörüdür. Örnek 5.1.10'den T operatörü KB ve Levi operatörü değildir. Böylece c_0 üzerindeki KB ve Levi operatörler $L(c_0)$'da norm kapalı değildir.

Teorem 5.1.12. X sıra sürekli norma sahip Banach latis olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) X KB uzaydır.

(ii) Her pozitif operatör $T : X \to X$ pozitif Levi operatördür.

(iii) Her pozitif quasi Levi operatör $T : X \to X$ pozitif Levi operatördür.

(iv) Her pozitif kompakt operatör $T : X \to X$ Levi operatördür.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ Lemma 4.1.17'den X KB uzay ise T operatörünün KB operatör olduğu bilinmektedir. Aynı zamandan Lemma 5.1.8'den pozitif KB operatörü pozitif Levi operatör olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Açıktır.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ T pozitif kompakt operatör olsun. Bu durumda Önerme 4.1.27'den T operatörü pozitif quasi KB operatördür. O halde $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve norm sınırlı neti için Tx_α norm Cauchy netidir. X sıra sürekli norma sahip olduğundan Tx_α sıra Cauchy neti olur ve böylece T pozitif Levi operatördür.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Önce her pozitif kompakt operatörün KB operatör olduğu gösterilsin. T pozitif kompakt operatör ve $0 \leq x_\alpha \uparrow$, norm sınırlı net olsun. Varsayımdan $x \in X$ için $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ olur. X sıra sürekli norma sahip olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ elde edilir ve T KB operatördür. Teorem 4.1.29'dan X KB uzay olur. □

Teorem 5.1.13. (X, ζ) lokal solid vektör latis, Y vektör latis ve $T : X \to Y$ pozitif quasi Levi operatör olsun. $0 \leq S \leq T$ koşulunu sağlayan her $S : X \to Y$ operatör quasi Levi operatördür.

Kanıt. T quasi Levi operatör ve $(x_\alpha) \subset X^+$ artan, ζ-sınırlı olsun. Tx_α Y'de sıra Cauchy netidir. Her β ve $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için $|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}| \leq z_\beta$ olacak şekilde $z_\beta \downarrow 0$ neti ve α_β indisi vardır. Sabit α_β için $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ seçilsin.

$$Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2} \leq S(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leq T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leq z_\beta$$

ve benzer şekilde

$$Sx_{\alpha_2} - Sx_{\alpha_1} \leq S(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leq T(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leq z_\beta$$

bulunur. O halde $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için $|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}| \leq z_\beta$ elde edilir. Böylece S operatörü quasi Levi'dir. □

Sıradaki örnek Levi ve σ-Levi operatörlerin baskınlık özelliğini sağlamadığına örnek teşkil eder.

Örnek 5.1.14. $T, S \in L(c_0)$ olsun. $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ ve $x \in c_0$ olmak üzere

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} e_n$$

ve

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \right) e_n$$

operatörleri tanımlansın. $0 \leq S \leq T$ olduğu açıktır. T operatörü sonlu rank operatörü olduğundan Önerme 5.1.9'den Levi operatörüdür. Fakat Örnek 5.1.10'den S operatörü σ-Levi operatör değildir.

Lemma 5.1.15. *X Banach latis, Y Banach uzayı olmak üzere $L_{ql}(X, Y)$ kümesi vektör uzayıdır.*

Levi opetörlerinin oluşturduğu kümenin toplamaya göre kapalı olmadığı aşağıdaki örnek ile görülür. Böylece $L_l(X, Y)$ vektör uzayı değildir.

Örnek 5.1.16. $S, T \in L(\ell_\infty)$ operatörleri alınsın ve bu operatörler Örnek 4.1.33'te olduğu gibi tanımlansın. S ve T operatörleri pozitif KB olduğundan Lemma 5.1.8'den Levi operatörlerdir.

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} e_k + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} e_k$$

dizisi alınsın. $b_n \in \ell_\infty$ ve $b_n \uparrow \mathbb{1}$'dir. $T(b_n) = f(b_n)e_1 = \frac{1}{2}e_1$'dir. $S(b_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$ ise $S(b_n) \xrightarrow{o} u$'dır. Buradan $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$ olmak üzere

$$(S + T)(b_n) - v \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir. $(S + T)a = v$ olacak şekilde $a \in \ell_\infty$ olsun. $Sa + Ta = Sa + f(a)e_1 = Sa + \frac{1}{2}e_1 = (\frac{1}{2}, \ldots)$ şeklindedir. Fakat her $y \in \ell_\infty$ için $(Sy)_1 = 0$'dır. Buradan $f(a) = \frac{1}{2}$ elde edilir. $S(b_n) \xrightarrow{o} u$ olduğundan $Sa = u$ olur. Bu eşitlikten $(0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2, \ldots) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots)$ elde edilir ve buradan $a = (1, 1, \ldots)$ bulunur. Bu durumda $f(a) = 1$ olur ve bu da çelişkidir. O halde $(S + T)a = v$ olacak şekilde $a \in \ell_\infty$ yoktur.

5.2 Demi Levi Operatörler

Bu bölümde demi Levi operatör tanımı verilecek olup özellikleri incelenecektir. Elde edilmiş sonuçlar [10] makalesinde mevcuttur.

Tanım 5.2.1. X normlu vektör latis olsun. Her norm sınırlı artan $x_n \in X_+$ dizisi için $x \in X$ var ve $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ ise $T : X \to X$ operatörüne Levi operatör denir. Levi operatörlerinin oluşturduğu küme $L_l(X)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.2. X normlu vektör latis olsun. Her norm sınırlı artan pozitif $x_n \in X_+$ dizisi için $x \in X$ var ve $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ iken x_n'nin sıra yakınsak bir alt dizisi var ise $T : X \to X$ operatörüne demi Levi operatör denir. Demi Levi operatörlerin oluşturduğu küme $L_{Dl}(X)$ ile gösterilir.

Lemma 5.2.3. *X normlu vektör latis olsun. Her $\alpha \neq 1$ için αId_X demi Levi operatördür.*

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. $x \in X$ için $x_n - \alpha Id_X(x_n) \xrightarrow{o} \alpha Id_X(x)$ sağlansın. $(1 - \alpha)x_n \xrightarrow{o} \alpha x$ olduğundan, x_{n_k} sıra yakınsak alt dizisi vardır. □

Örnek 5.2.4. $\alpha = 1$ durumunda, birim operatör demi Levi olmayabilir.
$I : c_0 \to c_0$ operatörü ve

$$x_n = (x_m)_n = \begin{cases} 1\ ,\ m \leq n \\ 0\ ,\ m > n \end{cases}$$

dizisi verilsin.
$0 \leq x_n \uparrow$ ve $\|x_n\|_\infty = 1$ olduğu açıktır. Böylece $x_n - Id_{c_0}(x_n)$ sıra yakınsaktır. ℓ_∞ içinde $x_n \xrightarrow{o} 1$ olur fakat $1 \notin c_0$.

Önerme 5.2.5. X normlu vektör latis olsun. Her $T : X \to X$ Levi öperatörü demi Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. $x_1 \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} Tx_1$ sağlansın. T Levi operatör olduğundan, $Tx_n \xrightarrow{o} Tx_2$. olacak şekilde $x_2 \in X$ vardır.

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} - Tx_{n_k} + x_{n_k} \xrightarrow{o} Tx_1 + Tx_2$$

şeklinde yazılabilir ve böylece T demi Levi operatördür. □

$T = -Id_{c_0}$ ve $S = 2Id_{c_0}$ alınsın. Lemma 5.2.3'den, T ve S demi Levi operatörlerdir. Fakat $T + S$ demi Levi operatör değildir. Böylece $L_{Dl}(X)$ toplamaya göre kapalı değildir. Ayrıca, $(-Id_X) \in L_{Dl}(X)$ olsun. $(-1)(-Id_X) = Id_X \notin L_{Dl}(X)$. Dolayısıyla $L_{Dl}(X)$ vektör uzay değildir.

Lemma 5.2.6. X normlu vektör latis olsun. $T : X \to X$ demi quasi Levi operatör ise demi Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ olsun. Sıra yakınsak dizi sıra Cauchy olduğundan, $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy dizisidir. Böylece x_n dizisinin sıra yakınsak x_{n_k} alt dizisi vardır. □

Teorem 5.2.7. X normlu vektör latis ve $T : X \to X$ sıra sürekli operatör olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) X Levi latistir.

(ii) Her $T : X \to X$ operatörü Levi operatördür.

(iii) Her $T : X \to X$ operatörü demi Levi operatördür.

(iv) X'in birim operatörü demi Levi operatördür.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. X Levi latis olduğundan, x_n dizisi $y \in X$ elemanına sıra yakınsaktır. T sıra sürekli olduğundan $y \in X$ için $Tx_n \xrightarrow{o} Ty$'dir. Dolayısıyla T Levi operatördür.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Önerme 5.2.5'ten görülür.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Açıktır.
$(iv) \Rightarrow (i)$ $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. x_n dizisinin X içinde supremumu olduğu gösterilmelidir. $(x_n - x_n)$ sıra yakınsak olduğu açıktır. Id_X demi Levi operatör olduğundan, x_n dizisinin sıra yakınsak alt dizisi vardır. Buradan $y \in X$ için $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$'dir. $x_n \uparrow$ ve $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olduğundan $x_n \xrightarrow{o} y$ elde edilir, böylece $\sup x_\alpha = y$ sağlanır ve bu da X'nin Levi latis olduğunu gösterir. □

$-Id_{c_0} : c_0 \to c_0$ demi Levi operatördür fakat $|-Id_{c_0}| = Id_{c_0}$ demi Levi operatör değildir çünkü c_0 Levi latis değildir.

5.3 Demi Quasi Levi Operatörler

Tanım 5.3.1. X normlu vektör latis olsun. Her norm sınırlı artan pozitif $x_n \in X$ dizisi için Tx_n sıra Cauchy ise $T : X \to X$ operatörüne quasi Levi operatör denir. Quasi Levi operatörlerin oluşturduğu küme $L_{ql}(X)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.3.2. X normlu vektör latis olsun. Her norm sınırlı artan pozitif $x_n \in X$ dizisi için $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy iken x_n dizisinin sıra yakınsak alt dizisi var ise $T : X \to X$ operatörüne demi quasi Levi operatör denir. Demi quasi Levi operatörlerin oluşturduğu küme $L_{Dql}(X)$ ile gösterilir.

Lemma 5.3.3. X Dedekind tam normlu vektör latis olmak üzere, her $\alpha \neq 1$ için αId_X demi quasi Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - \alpha Id_X(x_n)$ sıra Cauchy olsun.

$$\big(x_n - \alpha Id_X(x_n) - (x_m - \alpha Id_X(x_m))\big) \xrightarrow{o} 0$$

şeklinde yazılır. Sıra yakınsaklık tanımından $|x_n - \alpha Id_X(x_n) - x_m + \alpha Id_X(x_m)| \leq y_k$ olacak şekilde $y_k \downarrow 0$ dizisi vardır. Böylece

$$|x_n - x_m| \leq \frac{y_k}{|1-\alpha|}, \ \alpha \neq 1$$

elde edilir. Buradan (x_n) sıra Cauchy dizisi olur. Dolayısıyla (x_n) sıra yakınsak alt diziye sahiptir. □

Önerme 5.3.4. X Dedekind tam normlu vektör latis olsun. Her $T : X \to X$ quasi Levi operatörü demi quasi Levi operatördür.

Kanıt. T quasi Levi operatör olmak üzere $(x_n - Tx_n)$ dizisi sıra Cauchy olacak şekilde $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ dizisi alınsın. $(x_n - Tx_n) = (I - T)x_n$ şeklinde yazılabilir. Böylece $(I - T)$ quasi Levi operatör olur. $L_{ql}(X)$ vektör uzayı olduğundan, $I = (I - T) + T$ birim operatör quasi Levi operatör olur. Böylece (x_n) sıra yakınsaktır. □

Örnek 5.3.5. $X = c_{00}$ uzayı olmak üzere $2I : X \to X$ operatörü verilsin. Lemma 5.3.3'dan $2Id_X$ quasi Levi operatör değildir fakat demi quasi Levi operatördür.

Önerme 5.3.6. X Dedekind tam normlu vektör latis ve $T, S : X \to X$ iki operatör olsun. Eğer T demi quasi Levi operatör ve S quasi Levi operatör ise $T + S$ demi quasi Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ olmak üzere $x_n - (T + S)x_n$ sıra Cauchy dizisi olsun. S quasi Levi operatör olduğundan, Sx_n sıra Cauchy dizisidir.

$$\begin{aligned}(x_n - Tx_n) - (x_m - Tx_m) &= (x_n - Tx_n \pm Sx_n) - (x_m - Tx_m \pm Sx_m)\\ &= (x_n - (T+S)x_n) - (x_m - (T+S)x_m) + (Sx_n - Sx_m)\end{aligned}$$

şekilde yazılır ise $x_n - (T+S)x_n$ ve Sx_n dizileri sıra Cauchy olduğundan, $(x_n - Tx_n) - (x_m - Tx_m) \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. Böylece, T demi quasi Levi operatör olduğundan (x_n) dizisinin (x_{n_k}) sıra yakınsak alt dizisi vardır. Dolayısıyla $T + S$ demi quasi KB operatördür. □

$L_{Dql}(X)$ çarpmaya göre kapalı değildir. $X = c_{00}$ uzayı ve $(-Id_X) \in L_{Dql}(X)$ operatörü olsun. c_{00} KB uzay olmadığından $(-1)(-Id_X) = Id_X \notin L_{Dql}(X)$. Dolayısıyla $L_{Dql}(X)$ vektör uzay değildir.

Önerme 5.3.7. *X sıra sürekli norma sahip Banach latis ve $T : X \to X$ sıra sürekli operatör olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

(i) *X KB uzaydır.*

(ii) *Her $T : X \to X$ operatörü quasi Levi operatördür.*

(iii) *X'in birim operatörü demi quasi Levi operatördür.*

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ X KB uzayı olsun ve $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. X KB uzayı olduğundan, (x_n) norm yakınsaktır. x_n dizisinin x_{n_k} alt dizisi vardır, $x \in X$ için $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$'dir. Eğer $x_{n_k} \uparrow$ ve $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ ise $x_n \xrightarrow{o} x$ sağlanır. Böylece, T sıra sürekli operatör olduğundan, $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ elde edilir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Önerme 5.3.4'den görülür.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Id_X demi quasi Levi operatör ve $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. $x_n - Id_X(x_n) \xrightarrow{o} 0$ olduğundan, $x_n - Id_X(x_n)$ sıra Cauchy dizisidir. Eğer Id_X demi quasi Levi operatör ise (x_n) dizisinin sıra yakınsak (x_{n_k}) alt dizisi vardır. X sıra sürekli norma sahip, (x_{n_k}) norm yakınsak ve (x_n) artan olduğundan, (x_n) norm yakınsak dizi olur ve bu X'in KB uzay olduğunu söyler. □

X KB uzay olmasın. $T = 2Id_X$ ve $S = -Id_X$ operatörlerini düşünülsün. Lemma 5.3.3'ten, T ve S operatörleri demi quasi Levi'dir. Fakat, Önerme 5.3.7'den, $T+S = Id_X$ operatörü demi quasi Levi değildir. Dahası, X KB uzayı olmasın fakat Dedekind tam Banach latis olsun. I sıra sürekli operatördür ama demi quasi Levi operatör değildir.

[1, Example 1.58]'den, $2I : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörü σ-sıra sürekli operatör değildir. Fakat Lemma 5.3.3'den demi quasi Levi operatördür. Bu da her demi quasi Levi operatörün sıra sürekli operatör olmadığına bir örnektir.

Teorem 5.3.8. *X normlu vektör latis ve T pozitif demi quasi Levi operatör olsun. Her $0 \leq S \leq T \leq I$ eşitsizliğini sağlayan S operatörü demi quasi Levi operatördür.*

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Sx_n$ sıra Cauchy dizisi olsun. Böylece $(x_n - Sx_n) - (x_m - Sx_m) \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. S merkez operatör olduğundan,

$$|x_n - Sx_n| = |(I - S)x_n| = |I - S||(x_n)|$$

yazılır. Bir diğer yandan, $0 \leq S \leq T \leq I$ olduğundan $(I - T)|x_n| \leq (I - S)|x_n|$. Böylece,

$$\begin{aligned} ((I - S)x_n - (I - S)x_m) \xrightarrow{o} 0 \ &\Rightarrow\ |(I - S)x_n - (I - S)x_m| \xrightarrow{o} 0 \\ &\Rightarrow\ |I - S||x_n - x_m| \xrightarrow{o} 0 \\ &\Rightarrow\ (I - S)|x_n - x_m| \xrightarrow{o} 0 \end{aligned}$$

$(I - T)|x_n| \leq (I - S)|x_n|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (I - T)|x_n - x_m| \xrightarrow{o} 0 \ &\Rightarrow\ |(I - T)(x_n - x_m)| \xrightarrow{o} 0 \\ &\Rightarrow\ (x_n - Tx_n) - (x_m - Tx_m) \xrightarrow{o} 0 \end{aligned}$$

Varsayımdan T demi quasi Levi operatör olduğundan, $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$'dir. Böylece S demi quasi Levi operatördür. □

Teorem 5.3.9. X AL uzayı olsun. Her $T : X \to X$ operatörü demi quasi Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy dizisi olsun. Her AL uzayı KB uzay olduğundan, x_n norm yakınsaktır. (x_n) dizisinin (x_{n_k}) sıra yakınsak alt dizisi vardır. Böylece, T demi quasi Levi operatör olur. □

Önerme 5.3.10. X Banach latis ve $T_\gamma \in L_{Dql}(X)$ olsun. Eğer $T_\gamma \xrightarrow{o} T$ ise $T \in L_{Dql}(X)$.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy dizisi olsun. Varsayımdan,

$$T_\gamma \xrightarrow{o} T \Rightarrow T_\gamma - T \xrightarrow{o} 0.$$

Dolayısıyla $(T_\gamma - T)$ sıra Cauchy dizisidir. Böylece, $(T_\gamma x_n - Tx_n)$ sıra Cauchy dizisi olur. $x_n - T_\gamma x_n = x_n - Tx_n + Tx_n - T_\gamma x_n$ yazılır. $(x_n - Tx_n)$ ve $(T_\gamma x_n - Tx_n)$ sıra Cauchy dizileri olduğundan, toplamları $x_n - T_\gamma x_n$ sıra Cauchy dizisidir. $T_\gamma \in L_{Dql}(X)$ olduğundan, $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olacak şekilde sıra yakınsak bir alt dizi vardır. Böylece $T \in L_{Dql}(X)$. □

Bir diğer önemli soru demi quasi Levi operatörlerin modül özelliğini sağlayıp sağlamadığı hakkındadır. X Dedekind tam Banach latis ve T sıra sürekli olsa bile, $|T|$ demi quasi Levi operatör olmayabilir. Örneğin $-Id_X : c_0 \to c_0$ demi quasi Levidir fakat $|-Id_X| = Id_X$ demi quasi Levi değildir.

Önerme 5.3.11. X KB uzay olsun. $T : X \to X$ pozitif quasi Levi operatör ise Levi operatördür.

Kanıt. $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. T operatörü quasi Levi olduğundan, (Tx_n) sıra Cauchy dizisidir. X uzayı Dedekind tam olduğundan $Tx_n \xrightarrow{o} y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. $T \geq 0$ ve X KB uzay ise $y = Tx$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ elde edilir. Böylece T Levi operatör olur. □

Önerme 5.3.11'den her quasi Levi operatör Levi operatördür. X normlu vektör latis ise her Levi operatör quasi Levi operatör, her quasi Levi operatör demi quasi Levi operatör ve her Levi operatör demi Levi operatördür. Son olarak, Lemma 5.2.6'den her demi quasi Levi operatör demi Levi operatördür.

5.4 Banach Latisleri Üzerinde Levi, Demi Levi, KB ve Demi KB Operatörleri Arasındaki İlişkiler

Önerme 5.4.1. X Dedekind tam Banach latis olsun.

(i) Her $T : X \to X$ quasi KB operatörü demi quasi Levi'dir.

(ii) Her $T : X \to X$ quasi KB operatörü demi Levi'dir.

(iii) Her pozitif $T : X \to X$ quasi KB operatörü Levi'dir.

Kanıt. (i) $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy olsun. X Dedekind tam olduğundan, $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} x$ olur. $T \in L_{qKB}(X)$ ise Tx_n norm Cauchy dizisidir. Böylece, $y \in X$ için $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. O halde x_n'nin x_{n_k} alt dizisi vardır ve $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$ elde edilir.

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} - Tx_{n_k} + x_{n_k} \xrightarrow{o} x + y$$

yazılır ve böylece T demi quasi Levi operatördür.

(ii) $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ olsun. Böylece $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy'dir. Varsayımdan Tx_n norm Cauchy olur. Böylece Tx_{n_k} sıra Cauchy dizisidir.

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} - Tx_{n_k} + x_{n_k}$$

yazılır ve (x_{n_k}) alt dizisi sıra Cauchy olur. X Dedekind tam olduğundan $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$ elde edilir ve böylece T demi Levi operatör olur.

(iii) $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. Varsayımdan T quasi KB operatördür, Tx_n norm Cauchy dizisi olur. X Banach latis olduğundan, $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Norm yakınsak dizisinin sıra yakınsak bir alt dizisi olduğundan $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$'dir. Diğer yandan $x_n \uparrow$ ve $T \ge 0$ olduğundan $Tx_n \uparrow$'dir. Dolayısıyla, $Tx_n \xrightarrow{o} y$ elde edilir. $T \ge 0$ ise $y = Tx$ olacak şekilde $x \in X$ vardır ve $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ elde edilir. T Levi operatördür.

□

Önerme 5.4.2. X sıra sürekli norma sahip Banach latis olsun.

(i) Her $T : X \to X$ demi quasi KB operatör demi quasi Levi'dir.

(ii) $T : X \to X$ demi KB operatördür ancak ve ancak $T : X \to X$ demi Levi operatördür.

Kanıt. (i) $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy olsun. $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olduğu gösterilmelidir. $x_n - Tx_n$ sıra Cauchy dizisi ve X sıra sürekli norma sahip olduğundan, $x \in X$ vardır ve $x_n - Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur. T demi quasi KB operatör ise, (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi vardır ve x_{n_k} norm yakınsaktır. O halde $(x_{n_{k_l}})$ sıra yakınsak alt dizisi vardır. $x_{n_{k_l}}$ dizisi norm yakınsak ve artan olduğundan, $y \in X$ için $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$. Böylece, T demi quasi Levi'dir.

(ii) $(\Rightarrow)$ $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ olsun. X sıra sürekli norma sahip ise $x_n - Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$. Varsayımdan T demi KB operatördür ve $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$'dir. $x_n \uparrow$ ve $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olduğundan $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ elde edilir. Böylece $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olur. T demi Levi operatördür.

$(\Leftarrow)$ $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın ve $x \in X$ için $x_n - Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$ olsun. $x_{n_k} - Tx_{n_k} \xrightarrow{o} Tx$ yazılabilir. T demi Levi operatör olduğundan $x_{n_{k_t}} \xrightarrow{o} y$'dir. $x_{n_k} \uparrow, x_{n_{k_t}} \xrightarrow{o} y$ ise $x_{n_k} \xrightarrow{o} y$. Aynı zamanda X sıra sürekli norma sahip olduğundan $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ elde edilir ve T demi KB operatör olur.

□

Önerme 5.4.3. X sıra sürekli norma sahip vektör latis olsun.

(i) Her $T : X \to X$ quasi Levi operatör quasi KB'dir.

(ii) Her $T : X \to X$ Levi operatör quasi KB'dir.

Kanıt. (i) $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. Varsayımdan T quasi Levi operatördür ve Tx_n sıra Cauchy'dir. X Dedekind tam olduğundan $Tx_n \xrightarrow{o} y$ olur. Diğer yandan X sıra sürekli norma sahip olduğundan $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Böylece Tx_n norm Cauchy'dir ve T quasi KB operatör olur.

(ii) $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in B_X$ alınsın. Varsayımdan T Levi operatördür ve $x \in X$ için $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ elde edilir. X sıra sürekli norma sahip olduğundan $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$'dir. Böylece Tx_n norm Cauchy olur ve T quasi KB operatördür.

$\square$

Kaynaklar

[1] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., *Positive operators*, Reprint of the 1985 original. Springer, Dordrecht, (2006).

[2] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., *Locally Solid Riesz Space with Applications to Economics*, 2nd edn. American Mathematical Society, Providence, RI (2003)

[3] Alpay S., Altin B., Tonyali C., *On property (b) of vector lattices*, (English summary) Positivity and its applications (Nijmegen, 2001), Positivity 7 (2003).

[4] Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S., *The $\sigma\tau$-continuous, Lebesgue, KB, and Levi operators between vector lattices and topological vector spaces*, Results Math. 77 (2022).

[5] Altin B., *On b-Weakly compact operators on Banach lattices*, Taiwanese J. Math., 11 (1), 143-150, (2007).

[6] Altın B., Machrafi N., *Some characterizations of KB-operators on Banach lattices and ordered Banach spaces*, Turkish J. Math., 44(5), 1736-1743, (2020).

[7] Aqzzouz B., Elbour A., Moussa M., H'Michane J., *Some characterizations of b-Weakly compact operators*, Math. Rep. (Bucur.), 12(62), 315-324, (2010).

[8] Aqzzouz B., Elbour A., *Some properties of the class of b-weakly compact operators*, Complex Anal. Oper. Theory, 6 (6), pp. 1139-–1145, (2012).

[9] Bahramnezhad A., Haghnejad Azar K., *KB-operators on Banach lattices and their relationships with Dunford-Pettis and order weakly compact operators*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser A Appl. Math. and Phys., 80 (2), pp. 91–98, (2018).

[10] Bal Ö., Erkurşun-Özcan N., Yurtoğlu A. S., *Demi Version of Quasi Levi and Levi Operators on Banach Lattices*, hakem aşamasında, (2023).

[11] Benkhaled H., Hajji M., Jeribi A., *On the class of demi Dunford-Pettis operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 72 (2), pp. 901–911, (2023).

[12] Benkhaled H., Jeribi A., *The class of demi KB-operators on Banach lattices*, Turkish J. Math., 47 (1), pp. 387–396, (2023).

[13] Gorokhova S. G., Emel'yanov E., *On operators dominated by the Kantorovich-Banach and Levi operators in locally solid lattices*, Sib. Math. J., 64 (3), pp. 720-724, (2023).

[14] Emel'yanov E., *On KB and Levi operators on Banach lattices*, (2023).

[15] Gao N., Troitsky V. G., Xanthos, F., *Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices*, Isr. J. Math., vol. 220, no. 2, pp. 649–689, (2017).

[16] Infusino M., *https://www.math.uni-konstanz.de/infusino/TVS-WS18-19/teachingWS18-19.html*

[17] Jeribi A., Krichen B., Salhi M., *Characterization of essential spectra involving weakly demicompact operators on Banach spaces*, Bull. Iranian Math. Soc., 48 (4), pp. 1513-–1538, (2022).

[18] Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C., *Riesz spaces I*, North-Holland, Amsterdam, (1971).

[19] Meyer-Nieberg, P., *Banach lattices*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[20] Schaefer H. H., *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215, (1974).

[21] Schaefer H. H., Wolff M. P., *Topological vector spaces*, volume 3 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, (1999).

[22] Turan B., Bilici F., *On almost 2-normed vector lattices*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 47 (5), pp. 1094–1101, (2018).

[23] Turan B., Altin B., *The relation between b-weakly compact operator and KB-operator*, Turkish J. Math., 43 (6), pp. 2818–2820, (2019).