MODÜLLERİN BAER-KAPLANSKY SINIFLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

A STUDY ON BAER-KAPLANSKY CLASSES OF MODULES

ZEYNEP BAŞER

PROF. DR. DERYA KESKİN TÜTÜNCÜ
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

Haziran 2024

ÖZET

MODÜLLERİN BAER-KAPLANSKY SINIFLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Zeynep Başer
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Derya Keskin Tütüncü
Haziran 2024, 83 sayfa

A ve B burulmalı iki grup olsun. Eğer $End_{\mathbb{Z}}(A)$ ile $End_{\mathbb{Z}}(B)$ halkaları, Ψ izomorfizması yardımıyla izomorf ise A ile B grupları da izomorftur. Üstelik eğer A ile B, ϕ izomorfizması yardımıyla izomorf ise o zaman $\Psi(\eta) = \phi\eta\phi^{-1}$ elde edilir. Bu ifade "Baer-Kaplansky Teoremi" olarak bilinir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin konusu tanıtılmakta ve yapılan bazı çalışmalara değinilmektedir.

İkinci bölüm çalışma için gerekli olan ön bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde ise Baer-Kaplansky Teoremi detaylandırılarak örnekler verilmektedir.

Dördüncü bölümde IP-izomorfizması yardımıyla Baer-Kaplansky özelliğini sağlayan modül sınıfları çalışılmaktadır. Tezin son kısmı da orijinal kısımdır. Bu kısımda bir R halkası inşa edilmektedir. Bu R halkası için Mod-R kategorisinin Baer-Kaplansky özelliğini sağlamadığı gösterilmektedir. Ayrıca bazı modül sınıflarının Baer-Kaplansky özelliği incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Baer-Kaplansky Teoremi, Baer-Kaplansky sınıflar, (yarı-) ayrık modüller, yerel modüller, yerel halkalar, (yarı-) mükemmel halkalar, Artin halkalar.

ABSTRACT

A STUDY ON BAER-KAPLANSKY CLASSES OF MODULES

Zeynep Başer

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Derya Keskin Tütüncü

June 2024, 83 pages

If A and B are torsion groups whose $End_{\mathbb{Z}}(A)$ and $End_{\mathbb{Z}}(B)$ are isomorphic with Ψ, then A and B are isomorphic. Moreover, if A and B are isomorphic with ϕ, then $\Psi(\eta) = \phi\eta\phi^{-1}$. This expression is known as "Baer-Kaplansky Theorem".

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and some studies are mentioned.

The second chapter contains the preliminary information necessary for the study. In the third chapter, the Baer-Kaplansky Theorem is elaborated and examples are given.

In the fourth chapter, with the help of IP-isomorphism, classes of modules satisfying the Baer-Kaplansky property are studied. The last part of the thesis is the original part. In this part, a ring R is constructed. It is shown that for this ring the category Mod-R does not satisfy the Baer-Kaplansky property. Also, the Baer-Kaplansky property of some module classes are analysed.

Keywords: Baer-Kaplansky Theorem, Baer-Kaplansky classes, (quasi-) discrete modules, local modules, local rings, (semi-) perfect rings, Artinian rings.

TEŞEKKÜR

Öğrencisi olduğum ve beraber çalıştığım için gurur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. Derya Keskin Tütüncü'ye yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olduğu ve yol gösterdiği için sonsuz teşekkür ederim.

Aileme yanımda oldukları ve bütün destekleri için çok teşekkür ederim. Bu süreçte arkadaşlarım Öykü, Volkan, Melike, Mısra, Ahsen ve Melisa'ya yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Prof. Dr. Alberto Facchini'ye tezimin son kısmına bulunmuş olduğu değerli katkıları için teşekkür ederim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından "2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu" programı kapsamında finansal olarak desteklenmiştir. Bu desteği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Zeynep BAŞER

2024, Ankara

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

G	:	Abel grup
R	:	Birimli halka
M_R	:	Birimli sağ R-modül
G_p	:	G'nin p-bileşeni
$N < M$	:	N M'nin öz alt modülü
$N \leq M$	:	N M'nin alt modülü
$N \leq_d M$	:	N M'nin dik toplananı
$N \trianglelefteq M$	:	N M'nin büyük alt modülü
$N \ll M$	:	N M'nin küçük alt modülü
$< S >$	:	S kümesi tarafından üretilen alt modül
$boy(W_Q)$	:	W'nun Q üzerinde sağ boyutu
$boy(_QW)$	:	W'nun Q üzerinde sol boyutu
$\sum M_i$	:	M_i modüllerinin toplamı
$\bigoplus M_i$	:	M_i modüllerinin dik toplamı
$\prod M_i$	:	M_i modüllerinin dik çarpımı
$A \otimes B$	:	A ve B'nin tensör çarpımı
$J(R)$	:	R halkasının Jacobson Radikali
$Rad(M)$	:	M modülünün radikali
$Soc(M)$	:	M modülünün sokulu
$Ker(f)$	:	f homomorfizmasının çekirdeği
$Im(f)$	:	f homomorfizmasının görüntüsü
$Ann_R(A)$	:	A'nın sağ sıfırlayıcısı
$r_R(a)$	:	a elemanının sağ sıfırlayıcısı
$Hom_R(M,N)$	:	M'den N'ye olan R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	:	M modülünün R-endomorfizmalarının halkası
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık sayılar kümesi

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	:	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu
J_p	:	p-adic tam sayılar grubu
$\mathbb{Q}_p^\star$	:	p-adic tam sayılar halkası
$\mathbb{Z}_p^\infty$	:	Prüfer p-grubu

1. GİRİŞ

p bir asal sayı olsun. $0 \leq a_i \leq p-1$ için $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ formunda yazılan bir sayıya p-$adic$ tam sayı denir. Örneğin -1 bir p-adic tam sayıdır. Çünkü

$$\begin{aligned} -1 &= p-1+(p-1)p+(p-1)p^2+(p-1)p^3+\ldots \\ &= p-1+p^2-p+p^3-p^2+p^4-p^3+\ldots \end{aligned}$$

yazılımı vardır. p-adic tam sayılarda toplama ve çarpma işlemine $0 \leq a_i \leq p-1$ ve $0 \leq b_i \leq p-1$ olmak üzere aşağıdaki gibi bir örnek verilebilir:

$$\begin{aligned} \pi &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots = 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots \text{ 3-adic tam sayı} \\ \rho &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots\ = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots \text{ 3-adic tam sayı} \end{aligned}$$

için $\pi + \rho$ işlemi şöyle yapılır:

$$\begin{aligned} &\pi_1 = 2 \equiv 2\ (mod\ 3) \\ &\pi_2 = 2 + 1 \cdot 3 = 5 \equiv 5\ (mod\ 3^2) \\ &\pi_3 = 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 23 \equiv 23\ (mod\ 3^3) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\rho_1 = 1 \equiv 1\ (mod\ 3) \\ &\rho_2 = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \equiv 7\ (mod\ 3^2) \\ &\rho_3 = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 25 \equiv 25\ (mod\ 3^3) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\pi+\rho)_1 &= \pi_1+\rho_1 = 3 \equiv 0\ (mod\ 3)\\
(\pi+\rho)_2 &= \pi_2+\rho_2 = 12 \equiv 3\ (mod\ 3^2)\\
(\pi+\rho)_3 &= \pi_3+\rho_3 = 48 \equiv 21\ (mod\ 3^3)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\pi+\rho = 0+1\cdot 3+2\cdot 3^2+\dots$$

sonucuna ulaşılır. $\pi\rho$ için de:

$$\begin{aligned}
&(\pi\rho)_1 = \pi_1\rho_1 = 2\cdot 1 = 2 \equiv 2\ (mod\ 3)\\
&(\pi\rho)_2 = (\pi\rho)_1 + (a_0b_1+a_1b_0)\cdot 3 = 2+(2\cdot 2+1\cdot 1)\cdot 3 = 17 \equiv 8\ (mod\ 3^2)\\
&(\pi\rho)_3 = (\pi\rho)_2 + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)\cdot 3^2 = 8+(2\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1)\cdot 3^2 = 80 \equiv 26\ (mod\ 3^3)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

işlemleri yapıldıktan sonra

$$\pi\rho = 2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\dots$$

sonucu elde edilir.

p bir asal sayı olsun. J_p p-adic tam sayılar grubunu, $\mathbb{Q}_p^\star$ p-adic tam sayılar halkasını göstersin.

$$\mathbb{Z}_p^\infty = \left\{\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z} \,|\, a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$$

Prüfer p-grubu ele alınsın.

$$End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p^\infty) \cong End_{\mathbb{Z}}(J_p) \cong \mathbb{Q}_p^\star$$

halka izomorfizmasının var olmasına karşın $\mathbb{Z}_p^\infty$ burulmalı grup, J_p burulmasız grup olduğundan birbirine izomorf gruplar değildir [1, Examples 3.4 ve 3.5].

$n \geq 2$ bir tam sayı olsun. O zaman $End_{\mathbb{Z}}(G) \cong \mathbb{Z}$ ve $rank(G) = n$ olan burulmasız bir G abel grubu vardır (bkz. Önerme 2.1.9). Böylece

$$End_{\mathbb{Z}}(G) \cong End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

olur. Fakat $rank(G) = n$ ve $rank(\mathbb{Z}) = 1$ olduğundan G ve $\mathbb{Z}$ izomorf gruplar değildir.

Şimdi A ve B burulmalı iki grup olsun. Eğer $End_{\mathbb{Z}}(A)$ ile $End_{\mathbb{Z}}(B)$ halkaları, Ψ izomorfizması yardımıyla izomorf ise A ile B grupları da izomorftur. Üstelik eğer A ile B, ϕ izomorfizması yardımıyla izomorf ise o zaman

$$\Psi(\eta) = \phi\eta\phi^{-1}$$

olur. Bu ifade literatürde *Baer-Kaplansky Teoremi* olarak bilinir [2, Theorem 108.1].

1943 yılında R.Baer [3], bu teoremi önce burulmalı ve sınırlı gruplar üzerinde ispatladı. Daha sonra 1952 yılında I.Kaplansky [4], Baer'in bu çalışmasından esinlenerek yukarıda söylenen burulmalı gruplar için bu teoremi ispatladı. Bundan dolayı bu teorem literatürde Baer-Kaplansky Teoremi adıyla bilinir.

Baer-Kaplansky Teoremi aslında bazı $\mathbb{Z}$-modüller üzerinde sağlanan bir özelliktir. Baer-Kaplansky özelliğinin başka modül sınıflarına genişletilip genişletilemeyeceğini incelemek için pek çok çalışma yapılmıştır. 1998'de Ivanov [5], Baer-Kaplansky Teoremi'ni genelleyerek Baer-Kaplansky olan yeni sınıflar bulmuştur. Bu yönde IP-izomorfizma kavramını literatüre kazandırmıştır. 2002'de Ivanov ve Vamos [6], Baer-Kaplansky kategori tanımını vermişlerdir. $\mathcal{C}$ R-modüllerin bir kategorisi olsun. Eğer $A, B \in \mathcal{C}$ için $End_R(A) \cong End_R(B)$ halka izomorfizması $A_R \cong B_R$ modül izomorfizmasını gerektirirse $\mathcal{C}$'yi *Baer-Kaplansky kategori* olarak adlandırmışlardır. Bu çalışmalarında ayrıştırılamaz FGC halkalar üzerindeki sonlu üreteçli modüllerin oluşturduğu kategorilere yönelmişlerdir. Daha sonra 2015'de S.Breaz [7], Dedekind bölgeleri üzerinde bu yönde çalışmalar yapmıştır.

Bu çalışmalardan esinlenerek D.Keskin Tütüncü ve R.Tribak [8], 2017'de modüllerin Baer-Kaplansky sınıfları üzerinde çalışmışlardır.

Bu tezde, yukarıdaki makaleler esas alınarak Baer-Kaplansky özelliğini sağlayan modül sınıfları çalışılacaktır.

Tezin bir sonraki bölümünde tezde kullanılacak gerekli tanımlar ve teoremler hakkında bilgi verilmiştir. Burada Baer-Kaplansky özelliğinin inceleneceği halka ve modül sınıflarının tanımları ve kullanılacak teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Baer-Kaplansky teoremi ifade edilerek bazı Baer-Kaplansky sınıflarına örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde Ivanov'un literatüre kazandırdığı IP-izomorfizma tanımı verilmiş ve Ivanov'un bu çalışmasından inşa ettiği Baer-Kaplansky sınıfları incelenmiştir. Daha sonra [8] temel alınarak farklı modül ve halka sınıfları üzerinde Baer-Kaplansky özelliği incelenmiştir.

Tezin son bölümü orijinal kısımdır. Bu bölümde; yerel, Artin bir R halkası inşa edilmiştir öyle ki W; R'nin Jacobson radikali, $W^2 = 0$, $Q = R/W$ değişmeli, $boy({}_QW) = 1$, $boy(W_Q) = 2$ ve $W = uR \oplus vR$ özellikleri sağlanmakta olup bu R halkası üzerinde Baer-Kaplansky özelliği incelenmiştir. Son olarak bazı modül sınıflarının Baer-Kaplansky özelliği tartışılmıştır. Bu bölümdeki tüm sonuçlar [9]'da mevcuttur.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu tezde, G bir abel grup, R birimli bir halka ve M birimsel bir sağ R-modül olarak alınacaktır. Aksi durumlar belirtilecektir.

Bu bölümde, tez boyunca faydalanılacak kavramlar ve sonuçlar yer almaktadır.

2.1 Abel Gruplar

Tanım 2.1.1. [10] Bir G grubunun her elemanının mertebesi sonlu ise G'ye *burulmalı* $grup$, G'nin sıfırdan farklı her elemanının mertebesi sonsuz ise G'ye *burulmasız* $grup$ denir.

Tanım 2.1.2. [10] Bir G grubunun her elemanının mertebesi bir sabit p asal sayısının kuvvetiyse G'ye p*-primar grup* veya p*-grup* denir.

Tanım 2.1.3. [10] Bir G grubu ve p asal sayısı için G'nin, mertebeleri p'nin kuvveti olan elemanlarının kümesi $T_p(G)$ ile gösterilir. Eğer G burulmalı grup ise $T_p(G)$, G_p şeklinde yazılır. G_p alt grubuna G'nin *p-bileşeni* denir.

Tanım 2.1.4. [1] Bir G grubunun tüm elemanlarının mertebesi pozitif bir tam sayı ile sınırlı ise G'ye *sınırlı grup* denir.

Tanım 2.1.5. [10] Her n pozitif tam sayısı için $nG = G$ ise G'ye *bölünebilir grup* denir. Örneğin $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ grupları bölünebilir gruplardır fakat $\mathbb{Z}$ bölünebilir grup değildir.

Önerme 2.1.6. [10, Önerme 4.6] *Her G burulmalı grubu için, $\mathbb{P}$ tüm asal sayıların kümesi olmak üzere,*

$$G = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} G_p$$

dir.

Tanım 2.1.7. [1] G bir abel grup olsun. G'nin rankı,

$$rank(G) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G)$$

olarak tanımlanır. Örneğin $rank(\mathbb{Z}) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) = dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = 1$ olur.

Teorem 2.1.8. [11] *Her sonlu G abel grubu için $|G_i| = p_i^{n_i}$ olmak üzere*

$$G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$$

sağlanır. Burada,

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{n_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{n_t}\mathbb{Z}}$$

olur. Aynı zamanda her sonlu üreteçli G abel grubu için n bir pozitif tam sayı olmak üzere tek türlü

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{n_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{n_t}\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^n$$

yazılımı vardır. Burada $rank(\mathbb{Z}) = 1$ ve

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{n_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{n_t}\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^n \\
rank(G) &= dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q} \otimes \left(\frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{n_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{n_t}\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^n\right)\right) \\
&= dim_{\mathbb{Q}}\left(\left(\mathbb{Q} \otimes \left(\frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{n_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{n_t}\mathbb{Z}}\right)\right) \oplus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}^n)\right) \\
&= dim_{\mathbb{Q}}(0 \oplus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}^n)) \\
&= dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z})) \\
&= 1 + \cdots + 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

olduğundan $rank(G) = n$ elde edilir.

Önerme 2.1.9. [1, Example 3.8] *$n \geq 2$ tam sayı olsun. $rank(G) = n$ ve $End_{\mathbb{Z}}(G) \cong \mathbb{Z}$ olacak şekilde burulmasız bir G abel grubu vardır.*

2.2 Sonlu Üreteçli Modüller, Modüler Kuralı ve Serbest Modüller

Tanım 2.2.1. [10] M modülünün bir S alt kümesini içeren en küçük $< S >$ alt modülüne *S'nin ürettiği alt modül* denir. S sonlu alt küme ve $M = < S >$ ise M'ye *sonlu üreteçli* *modül* denir. $< S >=< x >= xR = \{xr \mid r \in R\}$ alt modülüne *x'in ürettiği devirli modül* denir. Devirli modüllerin sonlu üreteçli olduğu açıktır.

Önerme 2.2.2. [12] *Sonlu üreteçli modüllerin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafindan kapsanır.*

Önerme 2.2.3. [10, Önerme 2.1] *M bir modül ve $A, B, C \leq M$, $A \leq C$ ise*

$$(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$$

sağlanır. Bu eşitliğe modüler kuralı denir.

Teorem 2.2.4. [10, Teorem 4.8] *M bir modül ve $X = \{x_k \mid k \in K\}$ M'nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir:*

(i) Her $a \in M$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfirdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak

$$a = \sum_{k \in K} x_k r_k$$

şeklinde yazılabilir.

(ii) Her $k \in K$ için

$$\begin{aligned} f_k : R &\longrightarrow x_k R \\ r &\longmapsto x_k r \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir izomorfizma olup

$$M = \bigoplus_{k \in K} x_k R$$

dır.

Tanım 2.2.5. [10] Teorem 2.2.4 deki koşullardan biri sağlanırsa M'ye *serbest modül*, $X = \{x_k \mid k \in K\}$ kümesine de M'nin *tabanı* denir. Bir M_R modülünün serbest olması için gerek ve yeter şartın $M_R \cong \oplus_I R$ olduğu açıktır.

2.3 (Yarı-) Basit Modüller ve (Yarı-) Basit Halkalar

Tanım 2.3.1. [13] M bir modül olsun. Eğer M'nin 0 ve M'den başka alt modülü yoksa M'ye *basit modül* denir. R bir halka olsun. Eğer R'nin 0 ve R'den başka ideali yoksa R'ye *basit halka* denir.

$M \neq 0$ basit bir modül ise, her $0 \neq m \in M$ elemanı için sıfırdan farklı olan mR devirli alt modülü M'ye eşit olmak zorundadır. Tersine, her $0 \neq m \in M$ için $mR = M$ olsun. O halde her $0 \neq N \leq M$ alt modülü için bir $0 \neq m \in N$ elemanı alınsın. M basit olduğundan $mR = M$'dir. $mR \leq N$ olduğundan $N = M$ elde edilir. Böylece M modülünün basit olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $mR = M$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Önerme 2.3.2. [10, Önerme 3.6] *Bir B modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) *B basittir.*

(2) *Bir M modülü ve $N \leq M$ için $B \cong M/N$ ise N, M'nin maksimal alt modülüdür.*

(3) *N, M'nin maksimal alt modülü ve $B \cong M/N$ olacak şekilde bir M modülü ve bunun N alt modülü vardır.*

(4) *$B \cong R/I$ olacak şekilde bir I maksimal sağ ideali vardır.*

Tanım 2.3.3. [10] M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $U \leq M$ için $N \cap U = 0$ eşitliğinde $U = 0$ elde edilirse N'ye M'nin *büyük alt modülü* denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir. Örneğin her M modülü için M'nin kendisi büyük alt modüldür ve $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünde sıfırdan farklı her alt modül büyüktür.

Teorem 2.3.4. [10, Teorem 9.1]

(1) *$A \leq B \leq M \leq N$ ve $A \trianglelefteq N$ ise $B \trianglelefteq M$'dir.*

(2) *Sonlu sayıda büyük alt modülün kesişimi de büyüktür.*

(3) *Büyük alt modülün bir homomorfizma altında ters görüntüsü büyüktür.*

Tanım 2.3.5. [13, Proposition 9.7] M bir modül olsun.

$$Soc(M) = \bigcap\{N \leq M \mid N \text{ büyük alt modül}\}$$
$$= \sum\{N \leq M \mid N \text{ basit alt modül}\}$$

alt modülüne M'nin $sokulu$ denir. Eğer M hiç basit alt modüle sahip değilse $Soc(M) = 0$ alınır.

Teorem 2.3.6. [13, Theorem 9.6] *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(i) *M'nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.*

(ii) *M basit alt modüllerin toplamıdır.*

(iii) *M basit alt modüllerin dik toplamıdır.*

(iv) *M'nin her alt modülü dik toplanandır.*

Tanım 2.3.7. [13, Theorem 9.6, Corallary 13.8] Bir M modülü Teorem 2.3.6'nın denk koşullarından birini sağlarsa bu M modülüne *yarı-basit modül* denir. R_R, denk olarak ${}_RR$, yarı-basit ise R'ye *yarı-basit halka* denir.

2.4 Yerel Modüller, Yerel Halkalar ve Jacobson Radikali

Tanım 2.4.1. [14, Definition 4.1] M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M'nin her K özalt modülü için $M \neq N + K$ ise N'ye M'nin *küçük alt modülü* denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Örneğin her M modülü için 0 küçük alt modüldür ve $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünde sadece 0 alt modülü küçüktür.

Teorem 2.4.2. [10, Teorem 9.6]

(1) *$A \leq B \leq M \leq N$ ve $B \ll M$ ise $A \ll N$'dir.*

(2) *Sonlu sayıda küçük alt modülün toplamı da küçük alt modüldür.*

(3) *Küçük alt modülün homomorfizma altında görüntüsü de küçük alt modüldür.*

Tanım 2.4.3. [14] Her özalt modülü küçük olan bir modüle *hollow modül* denir. Örneğin Prüfer p-grup $\mathbb{Z}_p^\infty$ bir hollow modüldür.

Tanım 2.4.4. [13, Proposition 9.13] R bir halka, M bir sağ R-modül olsun.

$$\begin{aligned} Rad(M) &= \bigcap\{N \leq M \mid N;\ M\text{'nin maksimal alt modülü}\} \\ &= \sum\{N \leq M \mid N \ll M\} \end{aligned}$$

alt modülüne M modülünün $radikali$ denir. Eğer M hiç maksimal alt modüle sahip değilse $Rad(M) = M$ alınır.

Önerme 2.4.5. [13] *M sonlu üreteçli bir modül olsun. O zaman $Rad(M) \ll M$'dir.*

Önerme 2.4.6. [13] *M yarı-basit bir modül ise $Rad(M) = 0$'dır.*

Önerme 2.4.7. [13, Proposition 9.14 ve 9.15]

(i) *$f : M \longrightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun.*

$$f(Rad(M)) \leq Rad(N)$$

dir.

(ii) $Rad(\frac{M}{Rad(M)}) = 0.$

(iii) *$f : M \longrightarrow N$ bir epimorfizma olsun. $Ker(f) \leq Rad(M)$ ise*

$$f(Rad(M)) = Rad(N)$$

olur.

Tanım 2.4.8. [14] M bir modül olsun. M hollow ve $Rad(M) \neq M$ ise M'ye *yerel modül* denir.

Tanım 2.4.9. [13, Proposition 15.15] Eğer bir R halkası bir tek sağ (denk olarak bir tek sol) ideale sahipse R'ye *yerel halka* denir.

Tanım 2.4.10. [13, Proposition 15.3] R bir halka olsun. R'nin *Jacobson Radikal'i*

$$\begin{aligned} J(R) &= \{r \in R \mid \forall s \in R,\ \text{1-rs sağ tersinir}\} \\ &= \{r \in R \mid \forall s \in R,\ \text{1-sr sol tersinir}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Önteorem 2.4.11. [13, Corallary 15.4] *R bir halka olsun. O zaman*

$$Rad(R_R) = J(R) = Rad(_R R)$$

olur.

2.5 İnjektif Modüller ve Projektif Modüller

Tanım 2.5.1. [14, Definition 1.1] A ve N iki modül olsun. A modülünün her X alt modülü için her $\psi : X \longrightarrow N$ homomorfizması bir $\Phi : A \longrightarrow N$ homomorfizmasına genişliyorsa, yani, $\varphi : X \longrightarrow A$ monomorfizma olmak üzere $\Phi\varphi = \psi$ oluyorsa N modülüne *A-injektif modül* denir. Eğer bir Q modülü Q-injektif ise Q'ya *yarı-injektif modül* denir. Eğer bir M modülü her N modülü için N-injektif ise M'ye *injektif modül* denir. Bu tanım aşağıdaki değişmeli diagramla ifade edilir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\Phi"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Önerme 2.5.2. [14, Proposition 1.3] *N bir A-injektif modül olsun. Eğer $B \leq A$ ise N B-injektif ve A/B-injektiftir.*

Teorem 2.5.3. [10, Baer Kriteri] *I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U sağ ideali için her $k : U \longrightarrow I$ homomorfizmasının bir $m : R \longrightarrow I$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir.*

Teorem 2.5.4. [10] *D abel grubunun injektif olması için gerek ve yeter koşul bölünebilir olmasıdır.*

Teorem 2.5.5. [10] *$\{I_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun.*

$$I = \prod_{k \in K} I_k$$

dik çarpımının injektif modül olması için gerek ve yeter koşul I_k modüllerinin $(k \in K)$ her birinin injektif olmasıdır.

Tanım 2.5.6. [14, Definition 4.29] A ve N iki modül olsun. A'nın her X alt modülü için her $\varphi : N \longrightarrow A/X$ homomorfizması bir $\psi : N \longrightarrow A$ homomorfizmasına yükselirse, yani, $\pi : A \longrightarrow A/X$ doğal epimorfizma olmak üzere $\pi\psi = \varphi$ oluyorsa N'ye *A-projektif modül* denir. Eğer bir M modülü M-projektif ise M'ye *yarı-projektif* modül denir. Eğer her A modülü için M modülü A-projektif ise M'ye *projektif modül* denir. Bu tanım aşağıdaki değişmeli diagramla ifade edilir.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, "\pi"'] & A/X \end{tikzcd}$$

Tanım 2.5.7. [14] M bir modül ve P bir projektif modül olsun. $Ker(f) \ll P$ olacak şekilde bir $f : P \longrightarrow M$ epimorfizması varsa P'ye M'nin *projektif örtüsü* denir. Eğer bir M modülünün projektif örtüsü P ise P izomorfizma farkıyla tektir.

Önerme 2.5.8. [14, Proposition 4.31] *N A-projektif olsun. $B \leq A$ ise N B-projektif ve A/B-projektiftir.*

Teorem 2.5.9. [10] *$\{P_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun.*

$$P = \bigoplus_{k \in K} P_k$$

dik toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul her P_k $(k \in K)$ modülünün projektif olmasıdır.

Önteorem 2.5.10. [10] *Her F serbest modülü projektiftir.*

Sonuç 2.5.11. [10] *Her A modülü için P projektif (serbest) olmak üzere bir $f : P \longrightarrow A$ epimorfizması vardır.*

Teorem 2.5.12. [14] *M herhangi bir modül ve S bir yarı-basit modül olsun. O zaman M S-projektif ve S-injektif olur.*

Kanıt. M bir modül ve S yarı-basit bir modül olsun.

$T \leq S$ olmak üzere $\pi : S \longrightarrow S/T$, $\pi(s) = s + T$ doğal epimorfizması ve $f : M \longrightarrow S/T$ herhangi bir modül homomorfizması olsun. $\pi g = f$ olacak şekilde bir $g : M \longrightarrow S$ homomorfizması bulunabilirse M, S-projektif olacaktır. S yarı-basit olduğundan $S = T \oplus K$ olacak şekilde $K \leq S$ vardır (bkz. Teorem 2.3.6). Şimdi $m \in M$ olsun. O zaman $f(m) = t + k + T = k + T$ olacak şekilde $t \in T$ ve $k \in K$ vardır. $g(m) = k$ alınırsa M'den S'ye bir g homomorfizması elde edilmiş olur. Üstelik, $m \in M$ ve $k \in K$ olmak üzere $f(m) = k + T$ için $(\pi g)(m) = \pi(g(m)) = \pi(k) = k + T = f(m)$ eşitliklerinden $\pi g = f$ elde edilir. Sonuç olarak M, S-projektif olur.

Şimdi de $N \leq S$ olmak üzere $i : N \hookrightarrow S$ içerim dönüşümü ve $\alpha : N \longrightarrow M$ herhangi bir homomorfizma olsun. $hi = \alpha$ olacak şekilde bir $h : S \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse M, S-injektif olacaktır. S yarı-basit olduğundan $S = N \oplus L$ olacak şekilde $L \leq S$ vardır. Şimdi $n \in N$, $l \in L$ olmak üzere $n + l \in S$ alınsın. O zaman $h(n + l) = \alpha(n)$ tanımı ile $h : S \longrightarrow M$ homomorfizmasına ulaşılır. Ayrıca, $(hi)(n) = h(n) = \alpha(n)$ eşitliklerinden $hi = \alpha$ elde edilir. Sonuç olarak M, S-injektif olur. □

Teorem 2.5.13. [14] *Bir M modülü A_1 ve A_2-projektif olsun. O zaman M, $A_1 \oplus A_2$-projektiftir.*

Teorem 2.5.14. [15, Theorem] *$M_{\mathbb{Z}}$ yarı-projektif ise M ya serbest ya da burulmalıdır.*

Sonuç 2.5.15. [13] *R bir halka olsun.*

$$
\begin{aligned}
R \textit{ yarı-basittir } &\Longleftrightarrow \textit{Her sağ } R\textit{-modül yarı-basittir}\\
&\Longleftrightarrow \textit{Her sağ } R\textit{-modül projektiftir}\\
&\Longleftrightarrow \textit{Her basit sağ } R\textit{-modül projektiftir.}
\end{aligned}
$$

Önerme 2.5.16. [13, Corallary 26.7] *R bir yerel halka olsun. O zaman her projektif sağ R-modül serbesttir.*

2.6 Eşkare Elemanlar

Tanım 2.6.1. [13] R bir halka ve $e \in R$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise e'ye *eşkare eleman* denir. $e, f \in R$ iki eşkare eleman olsun. Eğer $ef = fe = 0$ ise e ile f *dik eşkarelerdir* denir. Eğer e eşkare elemanı sıfırdan farklı iki dik eşkare elemanın toplamı olarak yazılamıyorsa e'ye *ilkel eşkare eleman* denir.

Tanım 2.6.2. [13] M bir modül olsun. $M = A \oplus B$ iken $A = 0$ veya $B = 0$ ise M'ye *ayrıştırılamaz modül* denir. Örneğin $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ayrıştırılamaz bir modüldür.

Önerme 2.6.3. [13, Proposition 5.10] *Sıfırdan farklı bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(a) *M ayrıştırılamazdır.*

(b) *$End_R(M)$'nin eşkare elemanları sadece 0 ve 1'dir.*

(c) *1, $End_R(M)$'nin ilkel eşkare elemanıdır.*

Teorem 2.6.4. [13, Corallary 5.11] *M bir modül ve $e : M \longrightarrow M$, $End_R(M)$'nin sıfırdan farklı bir eşkare eleman olsun.*

$$e(M) \textit{ ayrıştırılamaz} \Longleftrightarrow e \textit{ ilkel eşkare elemandır.}$$

Önerme 2.6.5. [13] *M bir modül olsun. $e : M \longrightarrow M$, $End_R(M)$'nin sıfırdan farklı eşkare elemanı için*

$$M = e(M) \oplus (1 - e)(M)$$

olur.

Kanıt. $M = e(M) + (1-e)(M)$ ve $e(1-e) = (1-e)e = 0$ oldukları açıktır. $m, m' \in M$ olmak üzere $e(m) = (1-e)(m')$ olsun. O zaman $ee(m) = e^2(m) = e(m) = e(1-e)(m') = 0$ olur. Böylece $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$ elde edilir. □

Önteorem 2.6.6. [13] *R bir halka ve $I \leq R$ sağ ideal olsun.*

$$I \leq_d R \Longleftrightarrow I = eR \text{ olacak şekilde } R\text{'nin bir } e \text{ eşkare elemanı vardır.}$$

Kanıt.

$(\Rightarrow)$: I, R halkasının bir sağ ideali ve dik toplananı olsun. $I \oplus J = R$ olacak şekilde R'nin J sağ ideali vardır. $x \in I$, $y \in J$ olmak üzere $1_R = x + y$'dir. Buradan $x = x^2 + yx$ ve $x - x^2 = yx$ olur. $yx \in I \cap J = 0$ olduğundan $yx = 0$'dır. Yani $x = x^2$ olur. Şimdi $a \in R$ olsun. $a = xa + ya \in xR + J$ olduğundan $xR \oplus J = R$'dir. $I = R \cap I = (xR \oplus J) \cap I$'den modüler kuralı uygulanırsa (bkz. Önerme 2.2.3) $I = (I \cap J) \oplus xR = xR$ olur.

$(\Leftarrow)$: Önerme 2.6.5'ten $eR \oplus (1-e)R = R$ yazılımı vardır. Buradan

$$eR = I \leq_d R$$

olur. □

Önerme 2.6.7. [13, Proposition 5.9] *M bir R-modül ve $e \in End_R(M)$ bir eşkare eleman olsun. O zaman $eEnd_R(M)e$ ve $End_R(e(M))$ arasında halka izomorfizması vardır.*

Aşağıdaki sonuç Önerme 2.6.7'den elde edilmektedir. Ancak bir uygulama olarak ispatı aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.6.8. [13] *R bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun.*

$$eRe \cong End_R(eR)$$

dir.

Kanıt. $r \in R$ olsun. $ex, ey \in eR$ ve $ex = ey$ olsun. O zaman $erex = erey$ elde edilir. Dolayısıyla $f_r : eR \longrightarrow eR$; $f_r(ex) = erex$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

$$\begin{aligned}(f_r)(ex + ey) &= (f_r(e(x + y)) \\ &= ere(x + y) \\ &= erex + erey \\ &= (f_r)(ex) + (f_r)(ey)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_r)((ex)t) &= erext \\ &= ((f_r)(ex))t\end{aligned}$$

olur. Buradan $f_r \in End_R(eR)$'dir. Böylece

$$\begin{aligned}\Psi : eRe &\longrightarrow End_R(eR) \\ ere &\longmapsto \Psi(ere) = f_r\end{aligned}$$

dönüşümü elde edilir.

r, $s \in R$ olmak üzere $ere = ese$ olsun.

$$(\Psi(ere))(ex) = erex = esex = (\Psi(ese))(ex)$$

olur. Yani Ψ iyi tanımlıdır. Ayrıca her $ex \in eR$ için

$$
\begin{aligned}
\Psi(ere+ese)(ex) &= \Psi(e(r+s)e)(ex) \\
&= e(r+s)ex \\
&= erex+esex \\
&= \Psi(ere)(ex)+\Psi(ese)(ex) \\
&= (\Psi(ere)+\Psi(ese))(ex)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\Psi(ere+ese) = \Psi(ere)+\Psi(ese)$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\Psi((ere)(ese))(ex) &= \Psi(erese)(ex) \\
&= eresex
\end{aligned}
$$

ve

$$((\Psi(ere)\circ\Psi(ese))(ex) = (\Psi(ere))(esex) = eresex$$

olur. Dolayısıyla $\Psi((ere)(ese)) = \Psi(ere)\circ\Psi(ese)$ olur. O halde Ψ bir halka homomorfizması olur.

Şimdi r,$s \in R$ olmak üzere $\Psi(ere) = \Psi(ese)$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $erex = esex$'dir. Eğer $x = 1$ alınırsa, $ere = ese$ olur. Böylece Ψ birebirdir.

Ψ'nin örtenliği için; $f : eR \longrightarrow eR$, R-homomorfizması alınsın. $f(e) = er$ olsun.

$$\Psi(ere)(ex) = erex = f(e)ex = f(ex)$$

olur. Böylece $\Psi(ere) = f$ elde edilir. Bundan dolayı Ψ örten olur.

Sonuç olarak

$$eRe \cong End_R(eR)$$

ulaşılır. $\square$

Tanım 2.6.9. [13] Bir R halkası ve A modülü için

$$\{r \in R \mid Ar = 0\}$$

kümesine *A'nın sağ sıfırlayıcısı* denir. $Ann_R(A)$ olarak gösterilir. $a \in R$ için

$$\{x \in R \mid ax = 0\}$$

kümesine de *a elemanının sağ sıfırlayıcısı* denir ve $r_R(a)$ ile gösterilir.

Önteorem 2.6.10. [13] *R bir halka ve $A_R = aR$ olsun.*

$$A_R \cong R/r_R(a)$$

dir.

Kanıt. $f : R \longrightarrow A$, $f(r) = ar$ tanımlansın. f'nin bir sağ R-modül homomorfizması olduğu açıktır. $Ker(f) = \{r \in R \mid ar = 0\} = r_R(a)$ olduğundan $R/r_R(a) \cong aR$ olur. □

Önerme 2.6.11. [13] *R değişmeli bir halka, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $A = aR$ ve $B = bR$ basit iki modül olsun.*

$$A \cong B \Longleftrightarrow r_R(a) = r_R(b)$$

olur.

Kanıt.

$(\Rightarrow)$: $A \cong B$ olsun. $f : A \longrightarrow B$ izomorfizması vardır. $r \in r_R(a)$ olsun. $ar = 0$'dır. Diğer taraftan f örten olduğundan $b = f(a)s$ olacak şekilde $a \in A$ ve $s \in R$ vardır. O zaman

$$br = f(ars)$$

olur ve $br = 0$ elde edilir. Böylece $r \in r_R(b)$. Sonuç olarak $r_R(a) \leq r_R(b)$ elde edilir. $r_R(a)$ R'nin maksimal sağ ideali olduğundan $r_R(a) = r_R(b)$ olur (bkz. Önerme 2.3.2).

$(\Leftarrow)$: $r_R(a) = r_R(b)$ olsun. O zaman

$$R/r_R(a) = R/r_R(b)$$

elde edilir. Önteorem 2.6.10'dan $A \cong B$ olur. $\square$

2.7 Artin Modüller, Artin Halkalar ve (Yarı-) Mükemmel Halkalar

Tanım 2.7.1. [13] M bir modül ve $\mathcal{L}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{L}$'deki her

$$L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq \ldots i = 1, 2, \ldots$$

azalan zinciri için $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ *azalan zincir koşulunu sağlar* denir.

Tanım 2.7.2. [13] M bir modül olsun. Eğer M alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlarsa M'ye *Artin modül* denir.

Tanım 2.7.3. [13] R bir halka olsun. Eğer R_R $({}_RR)$ Artin ise R'ye *sağ (sol) Artin halka* denir. Eğer R hem sağ hem sol Artin ise R'ye *Artin halka* denir.

Tanım 2.7.4. [13] $e + J$ elemanı R/J halkasında eşkare eleman olsun. $e + J = f + J$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ elemanı varsa R/J halkasındaki *eşkare elemanlar J'ye yükselir* denir. R/J yarı-basit bir halka ve R/J'deki eşkare elemanlar J'deki eşkare elemanlara yükselirse R'ye *yarı-mükemel halka* denir.

Tanım 2.7.5. [13] R bir halka olsun. R'nin her sol (sağ) modülleri projektif örtüye sahipse R'ye *sol (sağ) mükemmel* halka denir. Her sağ mükemmel halka yarı-mükemmeldir.

Sonuç 2.7.6. [13] *Her sağ ya da sol Artin halka hem sağ hem de sol mükemmel halkadır.*

Sonuç 2.7.7. [13] *R bir halka olsun. R yarı-basit ise R mükemmel halkadır.*

Önerme 2.7.8. [13, Remark 28.5(3)] *R sağ mükemmel bir halka olsun. $J = J(R)$ olmak üzere her M_R modülü için*

$$Rad(M) = MJ \ll M_R$$

olur.

Sonuç 2.7.9. [16, Corallary 1] *Bir R sağ mükemmel halkası üzerinde herhangi bir R-projektif sağ R-modülü projektiftir.*

Teorem 2.7.10. [13, Theorem 27.6] *R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R yarı-mükemmeldir.

(b) Her basit sağ R-modül, projektif örtüye sahiptir.

(c) Her sonlu üreteçli sağ R-modül, projektif örtüye sahiptir.

2.8 Dedekind Bölgeleri

Tanım 2.8.1. [13, Exercise 3.15] R tamlık bölgesi olsun. Her sıfırdan farklı $a \in R$ için $Ma = M$ ise M'ye ***bölünebilir*** R-modül denir.

Tanım 2.8.2. [13, Exercise 18.11] R tamlık bölgesi olsun. Eğer her bölünebilir R-modül injektif ise R'ye ***Dedekind bölgesi*** denir.

2.9 Yarı-Polinom Halkaları

Tanım 2.9.1. [17, Example 1.7] R birimli bir halka ve $R[x]$; $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ formundaki polinomların halkası olsun. Her $a \in R$ için $ax = xa$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. Şimdi; $ax = xa$ eşitliği yerine, $\sigma : R \longrightarrow R$ bir halka homomorfizması olmak üzere, her $a \in R$ için $xa = \sigma(a)x$ eşitliğini sağlaması istenen ve polinomları yine $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ formunda olan yeni bir $R[x;\sigma]$ polinomlar halkası tanımlanacaktır.

$$R[x;\sigma] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

olmak üzere $R[x;\sigma]$ üzerindeki çarpma işlemi;

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{k} b_j x^j\right) = \sum a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}$$

olarak tanımlansın. O zaman, $R[x;\sigma]$ birimli bir halka olur. Bu şekilde inşa edilen $R[x;\sigma]$ halkasına *yarı-polinom halkası (skew-polynomial ring)* denir. Gerçekten de $xa = \sigma(a)x$ eşitliği sağlanır:

$$\begin{aligned} xa &= (0 + 1 \cdot x) \cdot (a + 0 \cdot x) \\ &= 0 \cdot a + (0 \cdot \sigma^0(0) + 1 \cdot \sigma^1(a))x \\ &= \sigma(a)x \end{aligned}$$

3. BAER-KAPLANSKY TEOREMİ VE BAZI ÖRNEKLER

R bir halka, A ve B iki sağ R-modül olsun.

$$A \cong B \Longrightarrow End_R(A) \cong End_R(B)$$

gerektirmesi aşağıdaki gibi kanıtlanabilir [1]:

$\phi : A \longrightarrow B$ bir izomorfizma olsun. $\alpha \in End_R(A)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi : End_R(A) &\longrightarrow End_R(B) \\ \alpha \quad &\longmapsto \phi\alpha\phi^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. $\alpha_1, \alpha_2 \in End_R(A)$ için $\psi(\alpha_1) = \psi(\alpha_2)$ olsun. Böylece

$$\psi(\alpha_1) = \phi\alpha_1\phi^{-1} = \psi(\alpha_2) = \phi\alpha_2\phi^{-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_1 = \alpha_2$ olur. Bu da ψ birebir demektir. Şimdi $\beta \in End_R(B)$ olsun. $\alpha = \phi^{-1}\beta\phi$ için

$$\psi(\phi^{-1}\beta\phi) = \phi\phi^{-1}\beta\phi\phi^{-1} = \beta$$

olduğundan ψ örtendir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_1 + \alpha_2) &= \phi(\alpha_1 + \alpha_2)\phi^{-1} \\ &= [(\phi\alpha_1) + (\phi\alpha_2)]\phi^{-1} \\ &= [(\phi\alpha_1\phi^{-1}) + (\phi\alpha_2\phi^{-1})] \\ &= \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi(\alpha_1\alpha_2) &= \phi\alpha_1\alpha_2\phi^{-1} \\ &= (\phi\alpha_1\phi^{-1})(\phi\alpha_2\phi^{-1}) \\ &= \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\end{aligned}$$

olduğundan ψ bir halka homomorfizmasıdır. Böylece $End_R(A) \cong End_R(B)$ elde edilir.

Bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örneklerle görülebilir.

(1) $\mathbb{Z}_p^\infty = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \,|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Prüfer p-grubu ele alınsın.

$$End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p^\infty) \cong End_{\mathbb{Z}}(J_p) \cong \mathbb{Q}_p^\star$$

halka izomorfizmasının var olmasına karşın $\mathbb{Z}_p^\infty$ ile J_p birbirine izomorf gruplar değildir. Çünkü $\mathbb{Z}_p^\infty$ burulmalı gruptur, J_p burulmasızdır [1, Example 3.4 ve Example 3.5].

(2) $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. O zaman $End_{\mathbb{Z}}(G) \cong \mathbb{Z}$ ve $rank(G) = n$ olan burulmasız bir G abel grubu vardır (bkz. Önerme 2.1.9). Böylece

$$End_{\mathbb{Z}}(G) \cong End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

olur. Fakat G ile $\mathbb{Z}$ izomorf gruplar değildir. Çünkü $rank(\mathbb{Z}) = 1$'dir (bkz. Tanım 2.1.7).

Baer-Kaplansky Teoremi bu gerektirmenin tersini incelemek için doğmuştur. Bu bağlamda burulmalı gruplar ele alınmıştır.

Bu bölümde Baer-Kaplansky Teoremi ifade edilecek ve bazı Baer-Kaplansky sınıflarına örnekler verilecektir.

3.1 Baer-Kaplansky Teoremi

Öncelikle bu bölümde kullanılacak olan aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.1.1. [10, Teorem 7.1] $\{M_k \mid k \in K\}$ *bir modüller topluluğu,* B *bir modül olsun. Bu durumda,* $i_n : M_n \to \bigoplus_{k\in K} M_k$ *gömme fonksiyonu olmak üzere,* $\alpha(f) = (f \circ i_k)$ *kuralı ile verilen*

$$\alpha : Hom(\bigoplus_{k\in K} M_k, B) \longrightarrow \prod_{k\in K} Hom(M_k, B)$$

fonksiyonu bir izomorfizmadır.

Baer-Kaplansky Teoremi aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 3.1.2. [2, Theorem 108.1] A *ve* B *burulmalı iki grup olsun. Eğer* $End_{\mathbb{Z}}(A)$ *ile* $End_{\mathbb{Z}}(B)$ *halkaları,* Ψ *izomorfizması yardımıyla izomorf ise* A *ile* B *grupları da izomorftur. Üstelik eğer* A *ile* B*,* ϕ *izomorfizması yardımıyla izomorf ise o zaman* $\Psi(\eta) = \phi\eta\phi^{-1}$ *elde edilir.*

Baer-Kaplansky teoreminin, Fuchs'un [2] kitabındaki ispatı incelenirse ana hatlarıyla aşağıdaki gibi olduğu görülür:
Öncelikle ispat p-gruplarına indirgenebilir. Çünkü her burulmalı abel grup p-bileşenlerin dik toplamı olarak yazılır (bkz. Önerme 2.1.6). Dolayısıyla

$$A = \bigoplus_{\text{p asal}} A_p \text{ ve } A_p = \{a \in A \,|\, p^n A = 0 \text{ olacak şekilde } n \in \mathbb{Z}^+ \text{vardır}\}.$$

Aynı şekilde $B = \bigoplus_{\text{p asal}} B_p$ yazılır. Dolayısıyla Teorem 3.1.1'den

$$End_{\mathbb{Z}}(A) = End_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{\text{p asal}} A_p) = \prod_{\text{p asal}} End_{\mathbb{Z}}(A_p)$$
$$End_{\mathbb{Z}}(B) = End_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{\text{p asal}} B_p) = \prod_{\text{p asal}} End_{\mathbb{Z}}(B_p)$$

elde edilir. Böylece $End_{\mathbb{Z}}(A) \cong End_{\mathbb{Z}}(B)$ olması her p asalı için $End_{\mathbb{Z}}(A_p) \cong End_{\mathbb{Z}}(B_p)$ olmasını gerektirir. $A_p \cong B_p$ olduğu ispatlandığında $A \cong B$ olacaktır. Sonuç olarak A ve B p-grup olarak alınabilir. $A_p \cong B_p$ olduğunu görmek için ispat üç adıma bölünmüştür:

1. A sınırlı grup iken,
2. B sınırlı grup ve D sıfırdan farklı bölünebilir grup olmak üzere $A = B \oplus D$ iken,
3. A sınırsız grup iken,

ispatlar verilmiştir.

3.2 Baer-Kaplansky Sınıflarına Örnekler

Baer-Kaplansky teoreminin başka modül sınıflarına genişletilip genişletilemeyeceğini görmek için aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 3.2.1. [8] $\mathcal{C}$ modüllerin bir sınıfı olsun. Eğer $A, B \in \mathcal{C}$ için $End_R(A) \cong End_R(B)$ halka izomorfizması $A_R \cong B_R$ izomorfizmasını gerektirirse $\mathcal{C}$'ye *Baer-Kaplansky sınıf* denir. Baer-Kaplansky sınıflarının alt sınıflarının da Baer-Kaplansky sınıf olduğu açıktır.

Baer-Kaplansky sınıflarına bazı örnekler aşağıda verilmektedir.

Örnek 3.2.2.

(1) [18] *R basit Artin halka olmak üzere $\mathcal{C}$ =Mod-R,*

(2) [1] *D bir bölümlü halka (Bir R halkasında sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa R'ye bölümlü halka denir) olmak üzere*
$\mathcal{C} = \{V_D \mid V,\ D$ üzerinde vektör uzay$\}$,

(3) [19, Theorem 4.1] *R temel ideal bölgesi olmak üzere*
$\mathcal{C} = \{M_R \mid M_R$ projektif modül$\}$,

(4) [6, Theorem 4] *R değişmeli ve ayrıştırılamaz bir FGC halka (R halkasında her sonlu üreteçli R modül devirli alt modüllerin dik toplamı ise R'ye FGC halka denir) olmak üzere*
$\mathcal{C} = \{M_R \mid M_R$ *sonlu üreteçli ve M, R'ye izomorf bir dik toplanan kapsar*$\}$,

Baer-Kaplansky sınıflardır.

(5) [7, Theorem 2.1] *R bir Dedekind Bölgesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir temel ideal bölgesidir.*

(2) *$G' = R \oplus G$ ve $H' = R \oplus H$ modülleri için $End_R(G') \cong End_R(H')$ iken $G \cong H$ olur.*

Önerme 3.2.3. [2] *$A = B \oplus C$ ve A' iki grup olsun. Eğer $End_{\mathbb{Z}}(A) \cong End_{\mathbb{Z}}(A')$ ise*

$$A' = B' \oplus C' \text{ ve } End_{\mathbb{Z}}(B) \cong End_{\mathbb{Z}}(B'),\ End_{\mathbb{Z}}(C) \cong End_{\mathbb{Z}}(C')$$

olur.

Kanıt. $A = B \oplus C$ ve A' iki grup olmak üzere $\Psi : End_{\mathbb{Z}}(A) \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(A')$ halka izomorfizması alınsın. $\epsilon : B \oplus C \longrightarrow B$; $Ker(\epsilon) = C$ olan izdüşüm dönüşümü olsun. Dolayısıyla $\Psi(\epsilon) = \epsilon'$ bir eşkare eleman olur. Böylece

$$B' = \epsilon'(A') \text{ ve } C' = Ker(\epsilon') \text{ olmak üzere } A' = B' \oplus C'$$

ayrışımı elde edilir. Ayrıca

$$End_{\mathbb{Z}}(B) = \epsilon End_{\mathbb{Z}}(A)\epsilon$$

alınabilir. Şimdi

$$\Psi(End_{\mathbb{Z}}(B)) = \Psi(\epsilon End_{\mathbb{Z}}(A)\epsilon) = \epsilon'\Psi(End_{\mathbb{Z}}(A))\epsilon' = \epsilon' End_{\mathbb{Z}}(A')\epsilon'$$

eşitlikleri gerçeklenir. Önerme 2.6.7'den $\epsilon' End_{\mathbb{Z}}(A')\epsilon' \cong End_{\mathbb{Z}}(\epsilon'(A')) = End_{\mathbb{Z}}(B')$ elde edilir. Bu da $End_{\mathbb{Z}}(B) \cong End_{\mathbb{Z}}(B')$ demektir. Benzer şekilde $End_{\mathbb{Z}}(C) \cong End_{\mathbb{Z}}(C')$ olduğu da görülür. □

Şimdi Baer-Kaplansky sınıf olan başka modül sınıflarına örnekler verilecektir.

Örnek 3.2.4. [8, Example 1.3(i)] $\mathcal{C} = \{A_{\mathbb{Z}} \mid A \text{ sonlu üreteçli grup}\}$ *bir Baer-Kaplansky sınıftır.*

Kanıt. $A_{\mathbb{Z}}$, $A'_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$ ve $End_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}) \cong End_{\mathbb{Z}}(A'_{\mathbb{Z}})$ olsun. Teorem 2.1.8'den

$$A_{\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_k^{n_k}\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^n$$

$$A'_{\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{q_1^{m_1}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{q_t^{m_t}\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^m$$

yazılımları vardır. Şimdi

$$\frac{\mathbb{Z}}{p_1^{n_1}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p_k^{n_k}\mathbb{Z}} = B \,, \mathbb{Z}^n = C$$

ve

$$\frac{\mathbb{Z}}{q_1^{m_1}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{q_t^{m_t}\mathbb{Z}} = B' \,, \mathbb{Z}^m = C'$$

olsun. Önerme 3.2.3'ten

$$End_{\mathbb{Z}}(B) \cong End_{\mathbb{Z}}(B')$$

ve

$$End_{\mathbb{Z}}(C) = \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m = End_{\mathbb{Z}}(C')$$

olur. Buradan $m = n$ elde edilir. Ayrıca B ve B' burulmalı grup olduğundan Baer-Kaplansky teoremi (bkz. Teorem 3.1.2) gereğince $B \cong B'$ elde edilir. Dolayısıyla $A_{\mathbb{Z}} \cong A'_{\mathbb{Z}}$ elde edilir. □

Örnek 3.2.5. [8, Example 2.9(i)] $\mathcal{C} = \{M_{\mathbb{Z}} \mid M_{\mathbb{Z}}$ *yarı-projektif*$\}$ *bir Baer-Kaplansky sınıftır.*

Kanıt. $M_{\mathbb{Z}}$, $N_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$ olmak üzere $End_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{Z}}) \cong End_{\mathbb{Z}}(N_{\mathbb{Z}})$ olsun. Teorem 2.5.14'ten aşağıdaki durumlar oluşur:

(1) M ve N serbest olsun. O zaman Örnek 3.2.2(3)'ten $M \cong N$ olur.

(2) M ve N burulmalı grup ise Teorem 3.1.2'den $M \cong N$ olur.

(3) M serbest ve N burulmalı olamaz. Çünkü M serbest ve N burulmalı ise $M = \oplus\mathbb{Z}$, $N = \oplus N_p$ yazılımları mevcut olur (bkz. Önerme 2.1.6 ve Tanım 2.2.5). O zaman Önerme 3.2.3 gereğince $\mathbb{Z} \cong End_{\mathbb{Z}}(N_p)$ olur ki bu bir çelişkidir.

□

4. IP-İZOMORFİZMALAR VE MODÜLLERİN BAER-KAPLANSKY SINIFLARI

Ivanov [5], IP-izomorfizma tanımını vererek Baer-Kaplansky teoremini daha da genellemiş ve Baer-Kaplansky olan yeni modül sınıfları inşa etmiştir. Tezin bu bölümünde Ivanov'un bu çalışması ele alınarak [8] incelenecektir.

4.1 IP-izomorfizmalar

Tanım 4.1.1. [5, Proposition 1] M ve N iki R-modül olsun. $\Phi : End_R(M) \longrightarrow End_R(N)$ halka izomorfizmasında eğer $End_R(M)$'nin her ilkel eşkare elemanı e için

$$e(M) \cong \Phi(e)(N)$$

sağlanıyorsa bu Φ izomorfizmasına *IP-izomorfizma* denir.

Uyarı 4.1.2. [13] Yukarıdaki Φ izomorfizması için $e \in End_R(M)$ ilkel eşkare eleman ise $\Phi(e)$ de ilkel eşkare eleman olur:

$$\Phi(e)\Phi(e) = \Phi(e^2) = \Phi(e)$$

olduğundan $\Phi(e)$ bir eşkare elemandır. f ve g iki dik eşkare eleman olmak üzere $\Phi(e) = f + g$ olsun. Φ örten olduğundan $\Phi(e_1) = f$ ve $\Phi(e_2) = g$ olacak şekilde $End_R(M)$'de e_1 ve e_2 eşkare elemanları vardır. Böylece

$$\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) = \Phi(e_1 + e_2)$$

elde edilir. Φ birebir olduğu için $e = e_1 + e_2$ olur. f ve g dik olduğundan e_1 ile e_2'nin dik olduğu açıktır. e ilkel olduğu için $e_1 = 0$ veya $e_2 = 0$'dır. Dolayısıyla, $f = 0$ veya $g = 0$'dır. Böylece $\Phi(e)$ de ilkel eşkare eleman olur.

Tanım 4.1.3. [5] $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ayrıştırılamaz modüllerin dik toplamı ve $N \leq M$ olsun.

(i) Eğer N sonlu tane M_i'nin toplamının içine düşerse N'ye, *M'nin yukarıdaki ayrışımının içine sonlu gömülür* denir.

(ii) Eğer M'nin her ayrıştırılamaz dik toplananı yukarıdaki ayrışımın içine sonlu gömülür ise M *yukarıdaki ayrışıma göre sonlu gömülme özelliğine sahiptir* denir.

Önerme 4.1.4. [5, Proposition 1] *M_i ve N_j'ler ayrıştırılamaz alt modüller olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve $N = \bigoplus_{j\in J} N_j$ olsun. Kabul edelim ki $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ sonlu gömülme özelliğine sahip olsun. O zaman;*

$$M \cong N \Longleftrightarrow End_R(M) \text{ ve } End_R(N) \text{ arasında IP-izomorfizması vardır.}$$

Kanıt. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve M bu ayrışıma göre sonlu gömülme özelliğine sahip olsun.

$(\Rightarrow)$: $\varphi : M \longrightarrow N$ bir izomorfizma olsun. 3. bölümün girişindeki gerektirmeden;

$$\begin{aligned} \phi : End_R(M) &\longrightarrow End_R(N) \\ f \quad &\longmapsto \varphi f \varphi^{-1} \end{aligned}$$

halka izomorfizması mevcuttur. $e \in End_R(M)$ ilkel eşkare eleman olsun.

$$\phi(e)(N) = (\varphi e \varphi^{-1})(N) = \varphi e(M)$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \alpha : e(M) &\longrightarrow \varphi e(M) \\ e(m) &\longmapsto \varphi(e(m)) \end{aligned}$$

modül izomorfizması yardımıyla

$$\varphi e(M) \cong e(M)$$

olduğundan

$$\phi(e)(N) \cong e(M)$$

olur. Dolayısıyla ϕ bir IP-izomorfizma olur.

($\Leftarrow$): $\Phi : End_R(M) \longrightarrow End_R(N)$ IP-izomorfizma olsun. $e_i : M \rightarrow M_i$ izdüşüm dönüşümü alınsın ve $\Phi(e_i) = f_i$ olsun. Teorem 2.6.4'ten e_i ilkeldir. Böylece Uyarı 4.1.2'den f_i ilkel olur. Tekrar Teorem 2.6.4'den $f_i(N)$ ayrıştırılamaz olur. Φ, IP-izomorfizma olduğu için

$$e_i(M) \cong f_i(N)$$

sağlanır.

$$\Psi : M \longrightarrow N$$
$$e_i(M) \longmapsto f_i(N)$$

homomorfizması alınsın. e_i'ler ikişer ikişer dik oldukları için f_i'ler de ikişer ikişer diktir. Böylece $\bigoplus_{i\in I} f_i(N)$ dik toplamı elde edilir. Üstelik

$$\Psi(M) = \bigoplus_{i\in I} f_i(N)$$

dir. Açıktır ki Ψ birebirdir. K, N'nin ayrıştırılamaz dik toplananı ve $f : N \longrightarrow K$ izdüşüm dönüşümü olsun. Φ örten olduğundan $\Phi(e) = f$ olacak şekilde $e : M \longrightarrow M$ ilkel eşkare dönüşümü mevcuttur. Böylece Teorem 2.6.4'ten $e(M)$, M'nin ayrıştırılamaz dik toplananı olur. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ sonlu gömülme özelliğine sahip olduğu için

$$e(M) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

olacak şekilde n pozitif tam sayısı vardır. $m \in M, m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n$ olmak üzere

$$e(m) = m_1 + \ldots + m_n$$

olsun.

$$\begin{aligned}(1-e_1-e_2-\ldots-e_n)e(m) &= e(m)-e_1e(m)-\ldots-e_ne(m)\\ &= e(m)-e_1(m_1+\ldots+m_n)-\ldots-e_n(m_1+\ldots+m_n)\\ &= e(m)-m_1-\ldots-m_n\\ &= 0\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$1-(e_1-e_2-\ldots-e_n)e=0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}(1-\Phi(e_1)-\Phi(e_2)-\ldots-\Phi(e_n))\Phi(e) &= 0\\ &= (1-f_1-f_2-\ldots-f_n)f\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in K$ alınsın. f örten olduğu için $x=f(a)$ olacak şekilde $a \in N$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}(1-f_1-f_2-\ldots-f_n)f(a) &= 0\\ &= f(a)-f_1f(a)-f_2f(a)-\ldots-f_nf(a)\end{aligned}$$

olup

$$f(a)=x=f_1f(a)+f_2f(a)+\ldots+f_nf(a) \in \bigoplus_{i=1}^{n} f_i(N)$$

elde edilir. Buradan

$$K \leq \bigoplus_{i=1}^{n} f_i(N)$$

ve böylece

$$K \leq \Psi(M)$$

olur. Sonuç olarak $N \leq \Psi(M)$ olup $\Psi(M)=N$ olur. Bu da Ψ örten demektir. $\square$

Yukarıdaki önerme yardımıyla bazı yeni Baer-Kaplansky sınıfları aşağıdaki örnekte verilecektir.

Örnek 4.1.5. [8, Example 2.3] *R yerel ve Artin bir halka olmak üzere*

$$J(R) = W\ ,\ W^2 = 0\ ,\ R/W = Q \textit{ değişmeli}$$

ve

$$\textit{boy}({}_QW) = 1\ ,\ \textit{boy}(W_Q) = 2$$

olsun.

$$W = uR \oplus vR$$

kabul edilsin. [20, Proposition 3]*'ten R sadece üç tane ayrıştırılamaz sağ R-modüle sahiptir. Bunlar*

$$A_1 = R/W \textit{ (basit modül)}\ ,\ A_2 = R/uR \textit{ (injektif)}\ ,\ A_3 = R_R$$

dir. Diğer tüm ayrıştırlamaz sağ R-modüller bu üçünden birine izomorftur. Ayrıca her sağ R-modül bu ayrıştırılamaz alt modüllerin bir dik toplamıdır. Her bir ayrıştırılamaz modül devirli olduğu için her sağ R-modül devirli modüllerin dik toplamıdır. M_R herhangi bir modül olsun. O halde H_i'ler devirli olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} H_i$ yazılımı mevcuttur. X ayrıştırılamaz ve $X \leq_d M$ olsun. Böylece

$$X \leq \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$$

olacak şekilde n pozitif tam sayısı vardır. Dolayısıyla her sağ R-modül sonlu gömülme özelliğine sahip olmuş olur. Önerme 4.1.4'ten her M ve N sağ R-modülleri için

$$M \cong N \Longleftrightarrow End_R(M) \longrightarrow End_R(N) \textit{ IP-izomorfizması vardır.}$$

P ve Q iki projektif R-modül olsun. Bu durumda Önerme 2.5.16'dan P ve Q serbest modül olurlar. Dolayısıyla Teorem 2.6.4'ten her $End_R(P) \longrightarrow End_R(Q)$ halka izomorfizması IP-izomorfizmadır. Böylece, projektif R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıf olur. Aynı

şekilde injektif R-modüllerin, basit R-modüllerin ve yarı-basit R-modüllerin sınıfı da Baer-Kaplansky sınıf olur.

4.2 Yarı-ayrık Modüller ve Baer-Kaplansky Teoremi

Tanım 4.2.1. [14, Definition 4.10] M bir modül olsun.

(D_1) Her $A \leq M$ için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır.

(D_2) $A \leq M$ ve $M/A \cong N \leq_d M$ ise $A \leq_d M$'dir.

(D_3) $M_1, M_2 \leq_d M$ ve $M_1 + M_2 = M$ ise $M_1 \cap M_2 \leq_d M$'dir.

Eğer M modülü (D_1) ve (D_2) koşullarını sağlarsa M'ye *ayrık modül*, (D_1) ve (D_3) koşullarını sağlarsa *yarı-ayrık modül* denir. Hollow modüller yarı-ayrık, yarı-basit modüller ayrık modüllerdir.

Önteorem 4.2.2. [14, Lemma 4.6] *M (D_2) koşulunu sağlayan bir modül ise (D_3) koşulunu da sağlar.*

Kanıt. M (D_2) koşulunu sağlasın. $A, B \leq_d M$ ve $M = A + B$ olsun. O zaman

$$M = A \oplus A' = B \oplus B'$$

olacak şekilde $A', B' \leq M$ vardır. Buradan

$$\frac{M}{[(A \cap B) \oplus A']} = \frac{A \oplus A'}{[(A \cap B) \oplus A']} \cong \frac{A}{A \cap B} \cong \frac{M}{B} \cong B'$$

olur. B', M'nin bir dik toplananı ve M (D_2) koşulunu sağlayan bir modül olduğundan $(A \cap B) \oplus A'$, M'nin dik toplananı ve dolayısıyla $A \cap B$, M'nin dik toplananı olur. □

Buradan bir M modülü ayrık modül ise yarı-ayrık modüldür sonucuna ulaşılır.

Önteorem 4.2.3. [14, Lemma 4.2(2)] *M bir modül olsun. $A \leq B \leq_d M$ ve $A \ll M$ ise $A \ll B$'dir.*

Kanıt. $B \leq_d M$ olduğu için $B \oplus X = M$ olacak şekilde $X \leq M$ vardır. $C \leq B$ olmak üzere $A + C = B$ olsun.

$$(A + C) \oplus X = M \text{ ve } A \ll M$$

olduğundan $C \oplus X = M$ olur. Önerme 2.2.3'ten

$$(C \oplus X) \cap B = (B \cap X) \oplus C = B$$

dir. Böylece $C = B$ elde edilir. □

Önteorem 4.2.4. [14, Lemma 4.7] *Bir M modülü (D_i) $(i = 1, 2, 3)$ koşulunu sağlıyorsa herhangi bir dik toplananı da sağlar.*

Kanıt. M bir modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun.

(D_1) : $A \leq M_1$ olsun. M (D_1) koşulunu sağladığı için $N_1 \leq A$, $A \cap N_2 \ll M$ olacak şekilde $M = N_1 \oplus N_2$ ayrışımı vardır. Buradan

$$M_1 = M_1 \cap (N_1 \oplus N_2) = N_1 \oplus (M_1 \cap N_2)$$

olur. $M_1 \cap N_2 \cap A \ll M_1$ olduğu görülürse ispat bitecektir.

$$M_1 \cap N_2 \cap A = A \cap N_2 \leq M_1 \leq_d M$$

olduğu için Önteorem 4.2.3'ten istenen elde edilir.

(D_2) : $A \leq M_1$ ve $M_1/A \cong N \leq_d M_1$ olsun.

$$\frac{M}{A \oplus M_2} = \frac{M_1 \oplus M_2}{A \oplus M_2} \cong \frac{M_1}{A} \cong N \leq_d M$$

olduğundan ve M (D_2) koşulunu sağladığından $A \oplus M_2 \leq_d M$ elde edilir ve $A \leq_d M_1$ olur.

(D_3) : $A_1, B_1 \leq_d M_1$ ve $M_1 = A_1 + B_1$ olsun. $M_1 = A_1 \oplus A_1' = B_1 \oplus B_1'$ olacak şekilde $A_1', B_1' \leq M_1$ vardır. Böylece $M = A_1 \oplus A_1' \oplus M_2$'den $A_1 \oplus M_2 \leq_d M$ elde edilir. Aynı şekilde $B_1 \oplus M_2 \leq_d M$ elde edilir. M (D_3) koşulunu sağladığından

$$(A_1 + M_2) \cap (B_1 + M_2) \leq_d M$$

olur. Buradan

$$(A_1 + M_2) \cap (B_1 + M_2) = (A_1 \cap B_1) + M_2 = (A_1 \cap B_1) \oplus M_2 \leq_d M$$

olduğundan $A_1 \cap B_1 \leq_d M_1$'dir. □

Sonuç 4.2.5. [14, Corallary 4.9] *M ayrıştırılamaz ve (D_1) koşulunu sağlayan bir modüldür ancak ve ancak M hollow modüldür.*

Kanıt.

$(\Rightarrow)$: M ayrıştırılamaz ve (D_1) koşulunu sağlayan bir modül olsun. $X < M$ alındığında (D_1) koşulundan $M_1 \leq X, X \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ sağlayan $M_1, M_2 \leq M$ vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan $M_1 = 0$ veya $M_1 = M$ olur. $M_1 = M$ için $X = M$ çelişkisi elde edileceğinden $M_1 = 0$'dır. Böylece

$$M_2 = M \text{ ve } X \cap M_2 = X \ll M$$

olur.

$(\Leftarrow)$: M hollow modül olsun. $X \leq M$ alınsın. $X = M$ için

$$M = X \oplus 0, 0 \cap X = 0 \ll M$$

olur. $X = 0$ için aynı şekilde

$$M = 0 \oplus M, M \cap 0 = 0 \ll M$$

sağlanır. Son olarak $X < M$ alındığında da

$$M = 0 \oplus M, 0 \leq X, X \cap M = X \ll M$$

olur ve M (D_1) koşulunu sağlar.

M'nin ayrıştırılamaz olduğunu göstermek için $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $M_1 \neq 0$ olursa $M \neq M_2$ olmak zorundadır. $M_2 < M$ olduğundan $M_2 \ll M$ olur. Buradan $M_2 = 0$ elde edilir. □

Önteorem 4.2.6. [13] *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \ll M$ ve N M'nin maksimal alt modülü ise M yereldir.*

Kanıt. $N \ll M$ olduğundan $N \leq Rad(M)$ ve N, M'nin maksimal alt modülü olduğundan $Rad(M) \leq N$'dir. Böylece $N = Rad(M)$. Dolayısıyla $Rad(M) \neq M$.

Şimdi M'nin hollow olduğu gösterilecektir. $X < M$ ve $Y \leq M$ olmak üzere $M = X + Y$ olsun.

$$Rad(M) \leq Rad(M) + Y \leq M$$

olduğundan dolayı

$$Rad(M) = Rad(M) + Y \text{ veya } Rad(M) + Y = M$$

dir. Eğer $Rad(M) = Rad(M) + Y$ ise $Y \leq Rad(M)$ ve böylece $M = X + Rad(M)$ olur. Buradan $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = X$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla

$$M = Rad(M) + Y$$

olur. Yine $Rad(M) \ll M$ olduğundan $Y = M$ elde edilir. Böylece M hollow olur. Sonuç olarak, M bir yerel modül olur. □

Sonuç 4.2.7. [13] *Yerel modüllerin tek maksimal alt modülü vardır.*

Kanıt. M bir yerel modül olsun. Tanım 2.4.8'den $Rad(M) \neq M$ ve M hollow modüldür. B, M'nin maksimal alt modülü olsun. O zaman, $Rad(M) \leq B$ olur. Diğer taraftan $B \ll M$ olur. Dolayısıyla, $B \leq Rad(M)$'dir. Sonuç olarak, $Rad(M) = B$ elde edilir. □

Sonuç 4.2.8. [13] *Yerel modüller devirlidir.*

Kanıt. M bir yerel modül olsun. Tanım 2.4.8'den $Rad(M) \neq M$ olduğundan $x \notin Rad(M)$ olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. Sonuç 4.2.7'den $Rad(M)$, M'nin tek maksimal alt modülüdür. Buradan

$$xR + Rad(M) = M$$

elde edilir. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $xR = M$ olur. □

Önerme 4.2.9. [13] *Bir M modülü için $Rad(M) \ll M$ ve $N \leq_d M$ ise $Rad(N) \ll N$ olur.*

Kanıt. $Rad(M) \ll M$ ve $N \leq_d M$ olsun. $N \oplus Y = M$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır. $Rad(N) + A = N$ olsun. Buradan

$$(Rad(N) + A) \oplus Y = M$$

'dir. Önerme 2.4.7(1)'den $Rad(N) \leq Rad(M)$ olur. Teorem 2.4.2'den $Rad(N) \ll M$ elde edilir. Böylece $A \oplus Y = M$ olur. Önerme 2.2.3'ten

$$N = M \cap N = (A \oplus Y) \cap N = (N \cap Y) \oplus A$$

olur. Sonuç olarak $A = N$ elde edilir. □

Önerme 4.2.10. [14] *M hollow modül ve $N \leq M$ olsun. O zaman, M/N hollow modüldür.*

Kanıt. $T/N < M/N$ ve $T/N + K/N = M/N$ olsun. $M = T + K$, $T < M$ ve M hollow olduğundan $M = K$ elde edilir. Dolayısıyla $K/N = M/N$ olur. Yani M/N hollow olur. □

Teorem 4.2.11. [14, Theorem 4.15] *M yarı-ayrık modül olsun. Her bir H_i hollow olacak şekilde $M = \bigoplus_{i\in I} H_i$ yazılımı mevcuttur. Bu yazılım izomorfizma farkıyla tektir.*

Önerme 4.2.12. [8, Proposition 2.4] R bir halka, $Rad(M) \ll M$ olacak şekilde M yarı-ayrık bir modül ve N ayrıştırılamaz modüllerin dik toplamı olsun. $End_R(M)$ ve $End_R(N)$ arasında IP-izomorfizması varsa $M \cong N$'dir.

Kanıt. M yarı-ayrık bir modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Teorem 4.2.11'den H_i'ler yerel modül olmak üzere M'nin $M = \bigoplus_{i\in I} H_i$ şeklinde yazılımı vardır. H, M'nin ayrıştırılamaz dik toplananı olacak şekilde alınsın. $Rad(H) \ll H$ ve H yarı-ayrık bir modül olur (bkz. Önerme 4.2.9 ve Önteorem 4.2.4). H ayrıştırılamaz ve yarı-ayrık olduğundan Sonuç 4.2.5'ten hollowdur. Buradan H yerel modül olur ve dolayısıyla devirlidir (bkz. Tanım 2.4.8 ve Önerme 4.2.8). Böylece $H = xR$ olacak şekilde $x \in M$ vardır. O zaman $x_i \in H_i$ olmak üzere

$$x = x_1 + \ldots + x_t \in H_1 \oplus \ldots \oplus H_t = \bigoplus_{i=1}^{t} H_i$$

'dir ve buradan

$$H \leq \bigoplus_{i=1}^{t} H_i$$

olur. Böylece M'nin ayrıştırılamaz bir dik toplananı $M = \oplus_{i\in I} H_i$ ayrışımının içine sonlu gömüldüğünden M sonlu gömülme özelliğine sahiptir. Önerme 4.1.4 uygulandığında $M \cong N$ sonucuna ulaşılır. □

Sonuç 4.2.13. [8, Corallary 2.5] *R bir halka, M ve N $Rad(M) \ll M$, $Rad(N) \ll N$ olan iki yarı-ayrık modül olsun. Eğer $End_R(M)$ ve $End_R(N)$ arasında IP-izomorfizması varsa $M \cong N$'dir.*

4.3 (Yarı-) Mükemmel Halkalar ve Baer-Kaplansky Teoremi

Teorem 4.3.1. [14, Theorem 4.41] *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

(i) R bir sağ (yarı-) mükemmel halkadır.

(ii) Her (sonlu üreteçli) yarı-projektif sağ R-modül ayrıktır.

Teorem 4.3.2. [8, Theorem 2.6] *R bir halka olsun. Aşağıdaki koşullar için $(i) \Rightarrow (ii)$ gerektirmesi sağlanır.*

(i) R sağ (yarı-) mükemmel halkadır.

(ii) Her (sonlu üreteçli) yarı-projektif P ve Q sağ modülleri için $End_R(P)$ ve $End_R(Q)$ arasında IP- izomorfizması varsa $P \cong Q$'dur.

Kanıt. R sağ (yarı-) mükemmel bir halka olsun. P ve Q (sonlu üreteçli) yarı-projektif modülleri için $End_R(P)$ ve $End_R(Q)$ arasında IP-izomorfizması olsun. Teorem 4.3.1 ve Önerme 2.7.8 kullanılırsa P ve Q,

$$Rad(P) \ll P, Rad(Q) \ll Q$$

olan yarı-ayrık modüller olur. Buradan Sonuç 4.2.13'ün koşulları sağlanmış olur. Böylece $P \cong Q$ elde edilir. □

Sıradaki örnek Teorem 4.3.2(ii)'de IP-izomorfizma koşulunun gereksiz olmadığını gösterir.

Örnek 4.3.3. [8, Example 2.7(ii)] *R, F cismi üzerinde 2×2 üst üçgensel matris halkası olsun. Bu halka sağ Artin halkadır. Böylece Sonuç 2.7.6'dan R halkası (yarı-) mükemmeldir. R_R modülünün $End_R(I_1) \cong End_R(I_2)$ olan fakat $I_1 \ncong I_2$ olacak şekilde iki I_1 ve I_2 dik toplananı vardır. Çünkü:*

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in F \right\}$ olsun.

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } e' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşkare elamanları için Önerme 2.6.6'dan

$$I_1 = eR = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in F \right\}, I_2 = e'R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in F \right\}$$

alınabilir. Burada $I_1 \ncong I_2$ olduğu açıktır. Sonuç 2.6.8'den $End_R(eR) \cong eRe$ ve $End_R(e'R) \cong e'Re'$ olmaktadır.

$$eRe = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in F \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in F \right\} = e'Re'$$

'dir. Böylece $\gamma : eRe \longrightarrow e'Re'$, $\gamma(ere) = e're'$ halka izomorfizması elde edilir:

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri alındığında $a = a_1$'dir.

$$\gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} = \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

olduğundan γ iyi tanımlıdır.

$$\gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

için

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

olur ve $a = a_1$'dir. Buradan

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve γ'nın birebirliği gösterilmiş olur.

Alınan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ matrisi için

$$\gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

olduğundan γ fonksiyonu örtendir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a + a' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a' \end{bmatrix} \\
&= \gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \gamma\left(\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \gamma\left(\begin{bmatrix} aa' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & aa' \end{bmatrix}$$

$$= \gamma\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \gamma\left(\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

olduğundan γ fonksiyonu homomorfizmadır. Böylece $End_R(eR) \cong End_R(e'R)$ elde edilir. γ bir IP-izomorfizma değildir.

Sonuç 4.3.4. [8, Corallary 2.8] *R bir halka olsun. Aşağıdaki koşullar için $(i) \Rightarrow (ii)$ gerektirmesi sağlanır.*

(i) R yarı-basit bir halkadır.

(ii) Herhangi iki M, N sağ R-modülleri için eğer $End_R(M)$ ve $End_R(N)$ arasında IP-izomorfizması varsa $M \cong N$ olur.

Kanıt. M, N sağ R-modülleri için $End_R(M)$ ve $End_R(N)$ arasında IP-izomorfizması olsun. M ve N yarı-projektiftir (bkz. Sonuç 2.5.15). Sonuç 2.7.7 yardımıyla Teorem 4.3.2'ye ulaşılır. Yani $M \cong N$ elde edilir. □

Sıradaki örnek Teorem 4.3.2 ve Sonuç 4.3.4'ün karşıtlarının genelde sağlanmadıklarını göstermektedir.

Örnek 4.3.5. [8, Example 2.9]

(i) $R = \mathbb{Z}$ *olsun. Örnek 3.2.5'ten yarı-projektif modüllerin sınıfının Baer-Kaplansky olduğu biliniyor. Dolayısıyla Teorem 4.3.2'nin* (ii) *koşulu sağlanır. Fakat*

$$\frac{\mathbb{Z}}{J(\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z}}{\bigcap p\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}$$

olduğundan ve $\mathbb{Z}$ *yarı-basit olmadığından* $\mathbb{Z}$ *yarı-mükemmel olamaz böylece Teorem 4.3.2'nin* (i) *koşulu sağlanmaz.*

(ii) Örnek 4.1.5'teki R *halkası Sonuç 4.3.4'nın* (ii) *koşulunu sağlar, fakat yarı-basit değildir.*

Tanım 4.3.6. [14, Definition 4.3] M bir modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer $M = A + B$ ve B bu özelliğe göre minimal olacak şekilde $B \leq M$ varsa B'ye A'nın *tümleyeni* denir ve ayrıca B'ye M'nin tümleyen bir alt modülü denir.

Önteorem 4.3.7. [14, Lemma 4.5] *B, A'nın tümleyenidir ancak ve ancak* $M = A + B$ *ve* $A \cap B \ll B$*'dir.*

Kanıt.

($\Rightarrow$): $M = A + B$ ve B bu özelliğe göre minimal olsun. $A \cap B + X = B$ için B ilk eşitlikte yerine yazıldığında

$$M = A + A \cap B + X = A + X$$

elde edilir. B minimal olduğundan $B = X$ olur.

($\Leftarrow$): $M = A + B$ ve $A \cap B \ll B$ olsun. $X \leq B$ için $M = A + X$ alındığında buradan

$$M \cap B = (A + X) \cap B$$

olur ve Önerme 2.2.3'ten

$$B = X + (A \cap B)$$

elde edilir. $A \cap B \ll B$ olduğundan $B = X$ olur. Böylece B minimal olur. □

Tanım 4.3.8. [14, 21] M bir modül olsun.

1. $A \leq M$ için eğer A'nın M'de dik toplanan olacak şekilde bir B tümleyeni varsa bu B'ye A'nın $\oplus$-*tümleyeni* denir.

2. Eğer M'nin her alt modülü M içinde bir $\oplus$-tümleyene sahipse M'ye $\oplus$-*tümlenmiş modül* denir.

3. Eğer M'nin her dik toplananı $\oplus$-tümlenmiş ise M'ye *tamamen* $\oplus$-*tümlenmiş modül* denir.

Tanım 4.3.9. [8] M bir modül olsun. Her $N \leq M$ için $K \leq N$ ve $N/K \ll M/K$ olacak şekilde $K \leq_d M$ varsa M modülüne *yükselen (lifting)* modül denir.

Önerme 4.3.10. [14] *M bir modül olsun. M (D_1) özelliğini sağlar ancak ve ancak M yükselen modüldür.*

Kanıt.

$(\Rightarrow):$ $N \leq M$ olsun. $M_1 \leq N$ ve $N \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. Buradan

$$M \cap N = (M_1 \oplus M_2) \cap N$$

ve Önerme 2.2.3'ten

$$N = M_1 \oplus (M_2 \cap N)$$

elde edilir.

$$\psi : M \longrightarrow M/M_1$$

doğal epimorfizma olsun. Teorem 2.4.2'den

$$\psi(N \cap M_2) = \frac{(N \cap M_2) \oplus M_1}{M_1} = \frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$$

olur.

$(\Leftarrow):$ $N \leq M$ olsun. $N/K \ll M/K$, $K \leq_d M$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Buradan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. Önerme 2.2.3'ten

$$N = M \cap N = (K \oplus K') \cap N = K \oplus (K' \cap N)$$

olur. $f : M/K \longrightarrow K'$ izomorfizması için Teorem 2.4.2'den

$$f(N/K) \ll f(M/K) \text{ yani } K' \cap N \ll K'$$

olur ve buradan da Teorem 2.4.2 gereğince $K' \cap N \ll M$ 'dir. □

Önerme 4.3.11. [14, Proposition A2] *M yükselen modül ise $\oplus$-tümlenmiştir.*

Kanıt. $N \leq M$ olsun. $M_1 \leq N$ ve $N \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. $M = M_1 \oplus M_2$ için $M_1 + M_2 = M$ olduğundan

$$M_1 + M_2 + N = N + M_2 = M$$

elde edilir. $N \cap M_2 \ll M$ ve $M_2 \leq_d M$' dir. Önteorem 4.2.3 yardımıyla $N \cap M_2 \ll M_2$ olur. Böylece M_2, N'nin bir dik toplanan tümleyeni olur. □

Önerme 4.3.12. [21] *M yükselen modül ise tamamen $\oplus$-tümlenmiş modüldür.*

Kanıt. $N \leq_d M$ olsun. Önteorem 4.2.4'ten N de (D_1) modüldür. Önerme 4.3.11'den N modülü bir $\oplus$-tümlenmiş modüldür. □

Modüller arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

yerel $\Rightarrow$ yarı-ayrık $\Rightarrow$ yükselen $\Rightarrow$ tamamamen $\oplus$-tümlenmiş $\Rightarrow$ $\oplus$-tümlenmiş

Önerme 4.3.13. [21, Lemma 2.14] *M ayrıştırılamaz ve $\oplus$-tümlenmiş bir modül ise hollow modüldür.*

Kanıt. M $\oplus$-tümlenmiş bir modül olduğundan her alt modülü M içinde bir dik toplanan tümleyene sahiptir. $N < M$ olsun. N, M içinde dik toplanan olacak şekilde bir tümleyene sahiptir. Bu dik toplanan tümleyen X olarak alınsın. M ayrıştırılamaz ve $N < M$ olduğundan $M = X$ olur. $X \cap N \ll X$ olduğundan $X \cap N = N \ll M$ olur. □

Önteorem 4.3.14. [22, Lemma 3.1] *Maksimal alt modüle sahip her ayrıştırılamaz $\oplus$-tümlenmiş R-modül yerel modüldür.*

Kanıt. N, M modülünün maksimal alt modülü olsun. M ayrıştırılamaz ve $\oplus$-tümlenmiş olduğundan Önerme 4.3.13'ten dolayı N küçük alt modüldür. Böylece Önerme 4.2.6'dan M yerel olur. □

Önerme 4.3.15. [23, Proposition 1] *M sonlu üreteçli tamamen $\oplus$-tümlenmiş R-modül ise yerel modüllerin dik toplamıdır.*

Önerme 4.3.16. [8, Proposition 2.10] *R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(i) Sonlu üreteçli, tamamen $\oplus$-tümlenmiş R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

(ii) Sonlu üreteçli, yükselen R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

(iii) $Rad(M) \ll M$ olan yarı-ayrık R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

(iv) Yerel R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

Kanıt.

$(i) \Rightarrow (ii)$: M, N sonlu üreteçli, yükselen modül ve $End_R(M) \cong End_R(N)$ olsun. Önerme 4.3.12 ve (i) kabulünden $M \cong N$ sonucuna ulaşılır.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: M, N yerel modül ve $End_R(M) \cong End_R(N)$ olsun. Yerel modüller sonlu üreteçli ve yükselen modül olduğundan $M \cong N$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: M, N yerel modül ve $End_R(M) \cong End_R(N)$ olsun. Tanım 2.4.8'den $Rad(M) \ll M$, $Rad(N) \ll N$ olur. Böylece M ve N radikalleri küçük olan yarı-ayrık modüller olur. (iii) kabulünden $M \cong N$ elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (i)$: $Rad(M) \ll M$ olan her ayrıştırılamaz $\oplus$-tümlenmiş M modülü yereldir (bkz. Önteoreom 4.3.14). Dahası herhangi sonlu üreteçli tamamen $\oplus$-tümlenmiş modüller yerel modüllerin dik toplamıdır (bkz. Önerme 4.3.15). Bundan dolayı herhangi sonlu üreteçli tamamen $\oplus$-tümlenmiş modüller sonlu gömülme özelliğine sahiptir.

M ve N sonlu üreteçli tamamen $\oplus$-tümlenmiş modül olsun.

$$\Phi : End_R(M) \longrightarrow End_R(N)$$

halka izomorfizması olmak üzere $e \in End_R(M)$ ilkel eşkare elemanı alınsın. Önerme 2.6.7 yardımıyla

$$End_R(e(M)) \cong End_R(\Phi(e)(N))$$

olur. $e(M)$; M'nin, $\Phi(e)(N)$; N'nin ayrıştırılamaz dik toplananıdır. $e(M)$ ve $\Phi(e)(N)$ ayrıştırılamaz ve $\oplus$-tümlenmiş olduğundan hollowdur (bkz. Önerme 4.3.13). Aynı zamanda

$$Rad(e(M)) \ll e(M) \text{ ve } Rad(\Phi(e)(N)) \ll \Phi(e)(N)$$

olduğundan $e(M)$ ve $\Phi(e)(N)$ yereldir. (iv) kabülünden

$$e(M) \cong \Phi(e)(N)$$

olur. Buradan Φ'nin IP-izomorfizması olduğu sonucuna ulaşılır. Önerme 4.1.4'ten $M \cong N$ elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: M bir yarı-ayrık modül olsun. Teorem 4.2.11'den H_i'ler hollow olacak şekilde $M = \oplus_{i \in I} H_i$ ayrışımı vardır.

M ve N yarı-ayrık modül ve $Rad(M) \ll M$ ve $Rad(N) \ll N$ olsun.

$$\Phi : End_R(M) \longrightarrow End_R(N)$$

halka izomorfizması ve $e \in End_R(M)$ ilkel eşkare elemanı alınsın.

$$End_R(e(M)) \cong End_R(\Phi(e)(N))$$

olur (bkz. Önerme 2.6.7). $e(M)$ ve $\Phi(e)(N)$ ayrıştırılamaz (bkz. Teorem 2.6.4) ve $\oplus$-tümlenmiş olduğundan hollowdur (bkz. Önerme 4.3.13) ve aynı zamanda

$$Rad(e(M)) \ll e(M) \text{ ve } Rad(\Phi(e)(N)) \ll \Phi(e)(N)$$

olduğundan $e(M)$ ve $\Phi(e)(N)$ yereldir. Önerme 4.2.12'deki ispat tekrarlanırsa M ve N sonlu gömülme özelliğine sahip olur. $(iv) \Rightarrow (i)$ ispatında olduğu gibi $M \cong N$ elde edilir. □

Önerme 4.3.16'nın ispatı aynen takip edilirse sıradaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.17. [8, Proposition 2.12] *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) Yarı-basit R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

(ii) Basit R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

Kanıt.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Basit R-modüller aynı zamanda yarı-basit olduklarından ispatın bu yönü açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: M ve N yarı-basit modül olsunlar. O zaman M_i'ler basit modüller olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve N_j'ler basit modüller olmak üzere $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$ olur.

$$\Phi : End_R(M) \longrightarrow End_R(N)$$

halka izomorfizması olsun. $M' \leq_d M$ ve M' ayrıştırılamaz alt modülü alınsın. Bu M' basit olduğundan $M' = xR$'dir (bkz. Tanım 2.3.1). Her $r \in R$ için

$$xr = m_1 r + ... + m_t r \in \bigoplus_{i=1}^{t} M_i$$

olduğundan M sonlu gömülme özelliğine sahip olmuş olur. Önerme 4.3.16'nın ispatı takip edilerek ispat tamamlanır. □

Önerme 4.3.17'deki R halkasına bir örnek olarak Örnek 4.1.5'deki R halkası verilebilir.

Önteorem 4.3.18. [8, Lemma 2.13] *R değişmeli bir halka ve $\mathcal{C}$; devirli R-modüllerin aşağıdaki koşulları sağlayan bir sınıfı olsun.*

$$(\star\star) \textit{ Her } (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2 \textit{ ikilisi için;}$$
$$C_1 \cong C_2 \Longleftrightarrow \mu : C_1 \to C_2 \textit{ 1-1, örten olacak şekilde } \mu \textit{ fonksiyonu vardır.}$$

O zaman, $\mathcal{C}$ sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.

Kanıt. $cR = C \in \mathcal{C}$ olsun. Her $x, a \in R$ için;

$$\Psi : C \longrightarrow End_R(C)$$
$$a \longmapsto \varphi_a$$

ve

$$\varphi_a : C \longrightarrow C$$
$$cx \longmapsto ax$$

dönüşümleri tanımlansın. $a \in C$ alınsın. O zaman, $a = cr$ olacak şekilde $r \in R$ vardır.

$cx = cy$ olsun. Buradan, $rcx = rcy$ olduğundan, R'nin değişmeli olduğu kullanılırsa $crx = cry$ elde edilir. Böylece,

$$\varphi_a(cx) = \varphi_a(cy)$$

olur. Dolayısıyla φ_a iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\varphi_a(cx+cy) =& ax+ay\\ =& \varphi_a(cx)+\varphi_a(cy)\end{aligned}$$

ve

$$\varphi_a(cxr) = axr = \varphi_a(cx)r$$

olduğundan φ_a homomorfizmadır.

$a, a' \in C$ olmak üzere $a = a'$ olsun.

$$\Psi(a) = \varphi_a = \varphi_{a'} = \Psi(a')$$

olduğundan Ψ iyi tanımlıdır.

$a, a' \in C$ olmak üzere $\Psi(a) = \Psi(a')$ olsun. O zaman $\varphi_a = \varphi_{a'}$ olur. Böylece $\varphi_a(c) = \varphi_{a'}(c)$ eşitliğinden $a = a'$ elde edilir. Dolayısıyla Ψ birebirdir. $f : C \longrightarrow C$ bir homomorfizma olsun. $f(c) = a$ kabul edilsin.

$$\varphi_a(cx) = ax = f(c)x = f(cx)$$

olduğundan $\varphi_a = f$ olur. Böylece $\Psi(a) = \varphi_a = f$ eşitliğinden Ψ örten olur.

$(\star\star)$ koşulundan $C \cong End_R(C)$ olur. $(C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2$ alınsın ve $End_R(C_1) \cong End_R(C_2)$ olsun.

$$C_1 \cong End_R(C_1) \text{ ve } C_2 \cong End_R(C_2)$$

olduğundan $C_1 \cong C_2$ olur. □

Önerme 4.3.19. [8, Proposition 2.14] *R değişmeli bir halka olsun. $\mathcal{C}$ devirli R-modüllerin aşağıdaki koşulları sağlayan bir sınıfı olsun.*

(i) Her $C \in \mathcal{C}$, $|C| < \infty$

(ii) Her $(C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2$ için $C_1 \cong C_2 \iff |C_1| = |C_2|$

O zaman $\mathcal{C}$ Baer-Kaplansky sınıftır.

Kanıt. $(C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2$ alınsın. $\mu : C_1 \longrightarrow C_2$ birebir, örten fonksiyon olsun. $|C_1| < \infty$ ve $|C_2| < \infty$ olduğundan $|C_1| = |C_2|$ dir. (ii)'den $C_1 \cong C_2$ olur ve $(\star\star)$ sağlanır. Önteorem 4.3.18'den sonuç elde edilir. □

Örnek 3.2.2(1)'den basit Artin halka üzerinde tüm modüllerin sınıfının Baer-Kaplansky sınıf olduğu biliniyor. Bunun aksine sıradaki örnekte basit Artin olmayan, değişmeli, yarı-basit halka üzerinde bütün modüllerin sınıfının Baer-Kaplansky olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.3.20. [8, Example 2.15] *$R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ halkası değişmeli ve yarı-basit bir halkadır. Fakat basit Artin değildir. S basit R-modül ise*

$$S \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ veya } S \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

olur. Bundan dolayı basit R-modüllerin sınıfı Önerme 4.3.19'un (i) ve (ii) koşulunu sağlar. Dolayısıyla Önerme 4.3.19'dan basit R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır. Önerme 4.3.17'den yarı-basit R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır. Böylece tüm R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır (bkz. Sonuç 2.5.15).

Sıradaki örnek değişmeli, yarı-basit R halkası üzerinde tüm R-modüllerin sınıfının genelde Baer-Kaplansky sınıf olmadığını gösterir.

Örnek 4.3.21. [8, Example 2.16] *F bir cisim ve $R = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$ değişmeli matris halkası olsun. R'de*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşkare elemanları düşünüldüğünde

$$e_1R = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ ve } e_2R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

basit ve projektif R-modüllerdir. Ek olarak

$$R = e_1R \oplus e_2R$$

yarı-basit halkadır. Buradan

$$e_1Re_1 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ ve } e_2Re_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

ve ayrıca

$$r_R(e_1) = e_2R \textit{ ve } r_R(e_2) = e_1R$$

dir. $e_1R \ncong e_2R$ (bkz. Sonuç 2.6.11). Diğer yandan Sonuç 2.6.8 yardımıyla

$$End_R(e_1R) \cong e_1Re_1 \cong e_2Re_2 \cong End_R(e_2R)$$

elde edilir. Bu gösterir ki basit R-modüllerin sınıfı ve ayrıştırılamaz projektif R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky değildir.

$S_i = End_R(e_iR)$ $(i = 1, 2)$ olsun ve bir $\Phi : S_1 \longrightarrow S_2$ halka izomorfizması düşünülsün. $1_{S_1}(e_1R) = e_1R$ ve $\Phi(1_{S_1})(e_2R) = 1_{S_2}(e_2R) = e_2R$ modülleri izomorf değildir. Böylece Φ halka izomorfizması IP-izomorfizma değildir.

Son örneğe göre; P_1 ve P_2 basit, projektif R-modüller ve $\Phi : End_R(P_1) \longrightarrow End_R(P_2)$ bir halka izomorfizması ise o zaman genelde R değişmeli, yarı-basit halka olsa bile Φ, IP-izomorfizma olmak zorunda değildir.

Uyarı 4.3.22. [8, Remark 2.17] Son örnekte $h : e_1R \longrightarrow e_2R$ birebir, örten fonksiyonun varlığı kolayca görülür. Ancak e_1R ve e_2R basit R-modülleri izomorf değildir. Böylece basit R-modüllerin sınıfı Önteorem 4.3.18 ($\star\star$) koşulunu sağlamaz.

Önteorem 4.3.23. [13, Lemma 13.3] *Eğer T bir basit modül ise $End_R(T)$ bölümlü halkadır.*

Teorem 4.3.24. [8, Theorem 2.18] *R bir halka olsun. Aşağıdaki koşullar göz önüne alınsın:*

(i) *R yarı-basit bir halkadır.*

(ii) (a) *R yarı-mükemmel bir halkadır.*

(b) *Herhangi bir basit R-modülün projektif örtüsünün endomorfizma halkası bölümlü halkadır.*

(c) *Yerel R-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıftır.*

O zaman, $(i) \Rightarrow (ii)(a) - (b)$ ve $(ii) \Rightarrow (i)$ sağlanır.

Kanıt.

$(i) \Rightarrow (ii)(a)$: Bkz. Sonuç 2.7.7.

$(i) \Rightarrow (ii)(b)$: R yarı-basit bir halka olsun. M basit bir modül olsun. M projektif olur (bkz. Sonuç 2.5.15). M kendisinin projektif örtüsüdür ve M aynı zamanda basit modül olduğundan Önteorem 4.3.23'den $End_R(M)$ bölümlü halkadır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: M basit bir modül olsun. $End_R(M)$ bölümlü bir halkadır (bkz. Önteorem 4.3.23). R yarı-mükemmel olduğundan P projektif modülü ve

$$Ker(p) \ll P \text{ olacak şekilde } p : P \longrightarrow M$$

epimorfizması vardır (bkz. Teorem 2.7.10). $(ii)(b)$'den $End_R(P)$ bölümlü halkadır. $f \in End_R(M)$ alınsın. O zaman

$$fp : P \longrightarrow M$$

R-homomorfizması mevcuttur. P projektif olduğundan tek bir $g \in End_R(P)$ vardır öyle ki $pg = fp$ olur. g'nin tekliği aşağıdaki gibi gösterilebilir:

g ve h bu eşitliği sağlayan iki dönüşüm olsun. Yani $pg = fp = ph$ olsun. O zaman $p(g-h) = 0$ olur. Eğer $(g-h) \neq 0$ olursa $End_R(P)$ bölümlü halka olduğundan $(g-h)$ tersinir olur ve böylece $(g-h)\alpha = \alpha(g-h) = 1_P$ olacak şekilde $\alpha \in End_R(P)$ bulunur. Dolayısıyla $p(g-h)\alpha = 0 = p$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $g = h$ olmak zorundadır. Böylece

$$\varphi : End_R(M) \longrightarrow End_R(P)$$
$$f \longmapsto g$$

fonksiyonu tanımlanabilir. $f_1, f_2 \in End_R(M)$ olmak üzere $\varphi(f_1 + f_2) = g$ ve $\varphi(f_1) = g_1$, $\varphi(f_2) = g_2$ olsun. O zaman

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "(f_1+f_2)p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g_1"'] \arrow[d, "f_1p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g_2"'] \arrow[d, "f_2p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$

değişmeli diagramları mevcuttur. Buradan $pg = (f_1 + f_2)p = f_1p + f_2p = pg_1 + pg_2 = p(g_1 + g_2)$ eşitlikleri sağlanır. g tek olduğundan $g = g_1 + g_2$ olur. Dolayısıyla

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$$

elde edilir. Aynı şekilde $\varphi(f_1f_2) = g$ ve $\varphi(f_1) = g_1$, $\varphi(f_2) = g_2$ olsun. O zaman

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "(f_1f_2)p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g_1"'] \arrow[d, "f_1p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g_2"'] \arrow[d, "f_2p"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$

değişmeli diagramları mevcuttur. Buradan $pg = f_1f_2p = f_1pg_2 = pg_1g_2$ eşitlikleri sağlanır. g tek olduğundan $g = g_1g_2$ olur. Dolayısıyla

$$\varphi(f_1f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$$

elde edilir. Böylece φ bir homomorfizmadır.

φ'nin örtenliğini göstermek için $h \in End_R(P)$ alınsın. $End_R(P)$ bölümlü halka olduğundan h bir otomorfizmadır. $p : P \longrightarrow M$ epimorfizması düşünüldüğünde $P/Ker(p) \cong M$ izomorfizması elde edilir. M basit olduğundan Önerme 2.3.2'den $Ker(p)$, P'nin maksimal alt modülüdür. $Ker(p)$ maksimal alt modül olduğundan

$$Rad(P) \leq Ker(p)$$

'dir. Aynı zamanda $Ker(p) \ll P$ olduğundan $Ker(p) \leq Rad(P)$'dir. Böylece

$$Ker(p) = Rad(P) \text{ ve } Rad(P) \ll P$$

olur. Önteorem 4.2.6'dan P yerel modül olur. $Rad(P) = Ker(p)$ olduğundan Önerme 2.4.7'den

$$h(Ker(p)) = Ker(p)$$

elde edilir.

Şimdi her $x \in P$ için

$$s : M \longrightarrow M$$
$$ph^{-1}(x) \longmapsto p(x)$$

dönüşümü tanımlansın. $ph^{-1}(x_1) = ph^{-1}(x_2)$ olsun. h bir otomorfizma olduğundan $h^{-1}(x_1 - x_2) \in Ker(p)$, $x_1 - x_2 \in h(Ker(p)) = Ker(p)$ olur. Buradan da $p(x_1) = p(x_2)$ elde edilir. Yani s iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} s(ph^{-1}(x_1 + x_2)) &= p(x_1 + x_2) \\ &= px_1 + px_2 \\ &= s(ph^{-1}(x_1)) + s(ph^{-1}(x_2)) \end{aligned}$$

ve

$$s(ph^{-1}(xr)) = p(xr) = p(x)r = s(ph^{-1}(x))r$$

olduğundan s bir homomorfizmadır. Buradan

$$ph = sp$$

olur ve böylece

$$\varphi(s) = h$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla φ örtendir.

φ birebir, örten bir homomorfizma olduğundan izomorfizma olur. $(ii)(c)$'den $M \cong P$ olur. Buradan M projektiftir. Sonuç olarak her basit R-modül projektif olduğundan R yarı-basit halka olur (bkz. Sonuç 2.5.15). $\square$

Uyarı 4.3.25. [8, Remark 2.19] Teorem 4.3.24'deki (i) koşulu $(ii)(c)$ koşulunu gerektirmeyebilir. Buna örnek olarak Örnek 4.3.21'deki R halkası verilebilir.

5. BAER-KAPLANSKY ÖZELLİĞİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Bu bölüm tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümün temel amacı Örnek 5.1.1'i inşa etmek ve bazı modül sınıflarının Baer-Kaplansky özelliğini incelemektir.

5.1 Bir Örnek

R yerel, Artin halka

$$J(R) = W, W^2 = 0, Q = R/W \text{ değişmeli}$$

ve

$$boy({}_QW) = 1, boy(W_Q) = 2$$

olsun.

$$W = uR \oplus vR$$

kabul edilsin. Örnek 4.1.5'ten injektif modül sınıfı, projektif modül sınıfı ve yarı-basit modül sınıfı Baer-Kaplansky olmaktadır. Ayrıca $A_1 = R/W$, $A_2 = R/uR$, $A_3 = R_R$ modülleri birbirlerine izomorf olmayan tüm ayrıştırılamaz sağ R-modüller olup her bir sağ R-modülün bu ayrıştırılamaz modüllerin bir dik toplamı olduğu da bilinmektedir. A_1, A_2 ve A_3 modülleri aynı zamanda yereldir. Dolayısıyla R halkası üzerinde ayrıştırılamaz modüller ile yerel modüller çakışır.

$End_R(A_1)$ Önteorem 4.3.23'ten bölümlü halka olur. A_2 ayrıştırılamaz ve injektif olduğundan $End_R(A_2)$ yereldir [24, Proposition 3.12].

$$f : R/uR \longrightarrow R/uR$$
$$r + uR \longmapsto vr + uR$$

olarak tanımlanan R-homomorfizması olsun.

$$Im(f) = \frac{vR + uR}{uR} = \frac{W}{uR} \neq \frac{R}{uR}$$

olduğundan f tersinir olamaz. Böylece $End_R(R/uR)$ yani $End_R(A_2)$ bölümlü halka olamaz. O zaman

$$End_R(A_1) \ncong End_R(A_3) \cong R$$
$$End_R(A_1) \ncong End_R(A_2)$$

olur.

Bu bölümde $End_R(A_2) \cong R$ olacak şekilde ve yukarıdaki tüm özellikleri sağlayan R halkası inşa edilecektir. Dolayısıyla bu R halkası için Mod-R kategorisinde Baer-Kaplansky özelliği sağlanmamış olacaktır.

Örnek 5.1.1. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ *iki elemanlı cisim olsun.*

$$\mathbb{F}_2(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{F}_2[x] \right\}$$

tüm rasyonel fonksiyonların cismi olmak üzere $k = \mathbb{F}_2(x)$ *olsun. O zaman*

$$\alpha\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x^2)}{g(x^2)}$$

olarak tanımlanan $\alpha : k \to k$ *dönüşümü bir halka homomorfizması olur.*

k cisim olduğundan k'nın idealleri sadece 0 ve k'dır. Dolayısıyla $Ker(\alpha) = 0$ olur. Böylece α birebir halka homomorfizması olur. Dolayısıyla $\alpha(k) \cong k$ olup $\alpha(k)$ cisim olur. Üstelik $k = \alpha(k) \oplus x\alpha(k)$ olduğundan $[k : \alpha(k)] = 2$ olur.

Şimdi T değişkenli $P = k[T; \alpha]$ yarı-polinomlar halkası oluşturulsun. (T^2) ideali için $R = P/(T^2)$ bölüm halkası alınsın. R halkası şöyle basitleştirilebilir: P halkası (T^2) idealine bölündüğü için aslında

$$R = \{\lambda_0 + \lambda_1 T \mid \lambda_0, \lambda_1 \in k\}$$

olacaktır ve çarpma işlemi, P'deki çarpma göz önüne alınarak,

$$(\lambda_0 + \lambda_1 T)(\mu_0 + \mu_1 T) = (\lambda_0 \mu_0) + (\lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \alpha(\mu_0))T$$

formuna dönecektir. R'nin Jacobson radikali $W = kT$ olmaktadır. Bu R halkası bölümün başında verilen tüm özelliklere sahiptir:

(1) $W = kT$; R'nin tek maksimal sağ idealidir. Böylece R yerel halkadır.

(2) $W = kT = (\alpha(k) \oplus x\alpha(k))T = \alpha(k)T \oplus x\alpha(k)T$'dir. Burada $u = T$ alınırsa

$$\begin{aligned} uR &= \{T(\mu_0 + \mu_1 T) \mid \mu_0, \mu_1 \in k\} \\ &= \{\alpha(\mu_0)T \mid \mu_0 \in k\} = \alpha(k)T \leq W \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$W = uR \oplus x\alpha(k)T = uR \oplus vR$$

yazılımı elde edilir.

(3) $W^2 = 0$*'dır. Çünkü* $\lambda_1 T$*,* $\mu_1 T \in W$ *alındığında,*

$$\begin{aligned}(\lambda_1 T)(\mu_1 T) &= (0 + \lambda_1 T)(0 + \mu_1 T) \\ &= 0 \cdot 0 + (0 \cdot \alpha^0(\mu_1) + \lambda_1 \alpha^1(0))T \\ &= 0 + (0 + 0)T \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

(4)

$$Q = \frac{R}{W} \cong k$$

olduğundan Q *değişmelidir.*

(5) $W = uR \oplus vR$ *olduğundan* $boy(W_Q) = 2$*'dir.* W*'nun sol* Q*-modül yapısı şöyle tanımlansın:*

$$\mu_0 + \mu_1 T + W \in R/W = Q$$

$\lambda_1 T \in W$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\mu_0 + \mu_1 T)\lambda_1 T &= (\lambda_1 T)\mu_0 \\ &= (0 + \lambda_1 T)(\mu_0 + 0 \cdot T) \\ &= \lambda_1 \alpha(\mu_0) T\end{aligned}$$

Böylece $boy({}_Q W) = 1$ *olur.*

(6) W *tek maksimal (sağ-sol) ideal olduğundan ve* ${}_R W$*,* W_R *Artin olduğundan* R *de (sağ-sol) Artin halka olur.*

uR'nin R içindeki idealleştireni:

$$\begin{aligned} E = \{r \in R \mid ru \in uR\} &= \{\lambda_0 + \lambda_1 T \mid (\lambda_0 + \lambda_1 T)u \in uR\} \\ &= \{\lambda_0 + \lambda_1 T \mid \lambda_0 T \in \alpha(k)T\} \\ &= \{\lambda_0 + \lambda_1 T \mid \lambda_0 \in \alpha(k), \lambda_1 \in k\} \\ &= \alpha(k) + kT \end{aligned}$$

halkası olmaktadır. E/uR'nin bir halka olduğu ve $End_R(R/uR) \cong E/uR$ halka izomorfizmasının varlığı açıktır. Dolayısıyla

$$End_R\left(\frac{R}{uR}\right) \cong \frac{E}{uR} = \frac{\alpha(k) + kT}{\alpha(k)T}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\Psi : R \longrightarrow E/uR$$

dönüşümü

$$\Psi(\lambda_0 + \lambda_1 T) = \overline{\alpha(\lambda_0) + x\alpha(\lambda_1)T}$$

olarak tanımlansın. Ψ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_0 + \lambda_1 T + \mu_0 + \mu_1 T) &= \Psi((\lambda_0 + \mu_0) + (\lambda_1 + \mu_1)T) \\ &= \overline{\alpha(\lambda_0 + \mu_0) + x\alpha(\lambda_1 + \mu_1)T} \\ &= \overline{\alpha(\lambda_0) + \alpha(\mu_0) + x\alpha(\lambda_1)T + x\alpha(\mu_1)T} \\ &= \overline{\alpha(\lambda_0) + x\alpha(\lambda_1)T} + \overline{\alpha(\mu_0) + x\alpha(\mu_1)T} \\ &= \Psi(\lambda_0 + \lambda_1 T) + \Psi(\mu_0 + \mu_1 T) \end{aligned}$$

sağlandığından Ψ bir grup homomorfizmasıdır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}\Psi((\lambda_0+\lambda_1 T)(\mu_0+\mu_1 T)) &= \Psi(\lambda_0\mu_0+(\lambda_0\alpha^0(\mu_1)+\lambda_1\alpha^1(\mu_0))T)\\ &= \Psi(\lambda_0\mu_0+(\lambda_0\mu_1+\lambda_1\alpha(\mu_0))T)\\ &= \overline{\alpha(\lambda_0\mu_0)+x\alpha(\lambda_0\mu_1+\lambda_1\alpha(\mu_0))T}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_0+\lambda_1 T)\cdot\Psi(\mu_0+\mu_1 T) &= \overline{\alpha(\lambda_0)+x\alpha(\lambda_1)T}\cdot\overline{\alpha(\mu_0)+x\alpha(\mu_1)T}\\ &= \overline{(\alpha(\lambda_0)+x\alpha(\lambda_1)T)(\alpha(\mu_0)+x\alpha(\mu_1)T)}\\ &= \overline{\alpha(\lambda_0)\alpha(\mu_0)+(\alpha(\lambda_0)\alpha^0(x\alpha(\mu_1))+x\alpha(\lambda_1)\alpha^1(\alpha(\mu_0))T}\\ &= \overline{\alpha(\lambda_0\mu_0)+(\alpha(\lambda_0)x\alpha(\mu_1)+x\alpha(\lambda_1)\alpha^2(\mu_0))T}\end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned}&\alpha(\lambda_0\mu_0)+x\alpha(\lambda_1\alpha(\mu_0)+\lambda_0\mu_1)T-\alpha(\lambda_0\mu_0)-(x\alpha(\lambda_1)\alpha^2(\mu_0)+\alpha(\lambda_0)x\alpha(\mu_1))T\\ &=(x\alpha(\lambda_1)\alpha^2(\mu_0)+x\alpha(\lambda_0\mu_1))T-x\alpha(\lambda_1)\alpha^2(\mu_0)-\alpha(\lambda_0)x\alpha(\mu_1)T\\ &=x\alpha(\lambda_0\mu_1)T-x\alpha(\lambda_0)\alpha(\mu_1)T\in\alpha(k)T\end{aligned}$$

olur. O zaman $\Psi((\lambda_0+\lambda_1 T)(\mu_0+\mu_1 T))=\Psi(\lambda_0+\lambda_1 T)\cdot\Psi(\mu_0+\mu_1 T)$ *elde edilir. Böylece* Ψ *bir halka homomorfizması olur.*

$\Psi(\lambda_0+\lambda_1 T)=\Psi(\mu_0+\mu_1 T)$ *olsun. O zaman*

$$\overline{\alpha(\lambda_0)+x\alpha(\lambda_1)T}=\overline{\alpha(\mu_0)+x\alpha(\mu_1)T}$$

olur. Dolayısıyla $\alpha(\lambda_0)+x\alpha(\lambda_1)T-\alpha(\mu_0)-x\alpha(\mu_1)T=\alpha(\lambda_0-\mu_0)+x(\alpha(\lambda_1-\mu_1)T)\in\alpha(k)T$ *'den*

$$\alpha(\lambda_0-\mu_0)=0 \text{ ve } x\alpha(\lambda_1-\mu_1)\in\alpha(k)\cap x\alpha(k)=0$$

olur. Böylece $\alpha(\lambda_0)=\alpha(\mu_0)$ *ve* $\alpha(\lambda_1)=\alpha(\mu_1)$ *elde edilir.* α *birebir olduğundan* $\lambda_0=\mu_0$ *ve* $\lambda_1=\mu_1$*'e ulaşılır. O halde* $\lambda_0+\lambda_1 T=\mu_0+\mu_1 T$ *olup* Ψ *birebir olur.*

Şimdi $\overline{\alpha(\lambda_0)+(\alpha(\mu_0)+x(\eta_0))T} \in E/uR$ *olsun. Buradan*

$$\begin{aligned}\overline{\alpha(\lambda_0)+\alpha(\mu_0)T+x\alpha(\eta_0)T} &= \overline{\alpha(\lambda_0)+x\alpha(\eta_0)T}\\ &= \Psi(\lambda_0+\eta_0 T)\end{aligned}$$

olup Ψ *örten olur.*

Böylece

$$End_R(R_R) \cong End_R(R/uR)$$

elde edilir. Şimdi

$$\chi = \Big\{A_1 = R/W,\ A_2 = R/uR,\ A_3 = R_R\Big\}$$

olsun. $End_R(R/uR) \cong End_R(R_R)$ *olup* $R/uR \ncong R_R$ *olduğundan* χ *Baer-Kaplansky sınıf olamaz. Böylece, ayrıştırılamaz (denk olarak yerel) sağ* R*-modüllerin sınıfı Baer-Kaplansky sınıf olamaz.*

Şimdi de $\mathcal{F} = \{M_R \mid M$ sonlu üreteçli R-modül$\}$ olsun. $\chi \subseteq \mathcal{F}$ ve χ Baer-Kaplansky sınıf olmadığından $\mathcal{F}$ de Baer-Kaplansky sınıf olamaz. Dolayısıyla, Mod-R de Baer-Kaplansky sınıf olamaz.

5.2 Bazı Modül Sınıfları Üzerine Uygulamalar

$f : M \longrightarrow N$ bir örten homomorfizma ve $g : X \longrightarrow Y$ bir birebir homomorfizma olsun. O zaman, aşağıdaki modül sınıfları tanımlanabilir:

$\mathcal{A} = \{A_R \mid A,\ M$-projektif$\}$.

$\mathcal{B} = \{A_R \mid A,\ N$-projektif$\}$.

$\mathcal{C} = \{A_R \mid A,\ M$-injektif$\}$.

$\mathcal{D} = \{A_R \mid A,\ N$-injektif$\}$.

$\mathcal{E} = \{A_R \mid A, Y\text{-projektif}\}$.

$\mathcal{F} = \{A_R \mid A, X\text{-projektif}\}$.

$\mathcal{G} = \{A_R \mid A, Y\text{-injektif}\}$.

$\mathcal{H} = \{A_R \mid A, X\text{-injektif}\}$.

O zaman Önerme 2.5.8'den

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\,, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$$

ve Önerme 2.5.2'den

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}\,, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$$

olur. Şimdi R halkası Örnek 5.1.1'de inşa edilen halka olsun. $f : R \longrightarrow R/W = Q$ doğal epimorfizma ve $g : W \hookrightarrow R$ içerim dönüşümü olsun. Yukarıda tanımlanan modül sınıfları ışığında aşağıdaki sınıflara ulaşılır:

$\mathcal{A} = \{A_R \mid A, R_R\text{-projektif}\} = \mathcal{E}$.

$\mathcal{B} = \{A_R \mid A, Q\text{-projektif}\}$.

$\mathcal{C} = \{A_R \mid A, R_R\text{-injektif}\} = \mathcal{G}$.

$\mathcal{D} = \{A_R \mid A, Q\text{-injektif}\}$.

$\mathcal{F} = \{A_R \mid A, W\text{-projektif}\}$.

$\mathcal{H} = \{A_R \mid A, W\text{-injektif}\}$.

R Artin olduğundan, R sağ (sol) mükemmel halka olur (bkz. Sonuç 2.7.6). Sonuç 2.7.9'dan her R_R-projektif modül projektif olacaktır. Böylece

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} = \{A_R \mid A \text{ projektif}\}$$

olur. Teorem 2.5.3'ten

$$\mathcal{C} = \mathcal{G} = \{A_R \mid A \text{ injektif}\}$$

olur. Q ve W yarı-basit olduklarından Teorem 2.5.12 gereğince her sağ R-modül Q ve W'ya göre hem injektif hem de projektif olur. Böylece

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} = \mathcal{F} = \mathcal{H} = \text{Mod-}R$$

olur. Dolayısıyla, $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ ve $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ sınıfları Örnek 4.1.5'ten Baer-Kaplansky olur, ancak $\mathcal{B} = \mathcal{D} = \mathcal{F} = \mathcal{H} = \text{Mod-}R$ sınıfları Örnek 5.1.1 gereğince Baer-Kaplansky olamaz.

6. SONUÇ

Bu tezde, Baer-Kaplansky özelliğini sağlayan pek çok modül sınıfları verilmiştir.

$J(R) = W$ olmak üzere yerel, Artin, $W^2 = 0$, $Q = R/W$ değişmeli, $boy({}_QW) = 1$, $boy(W_Q) = 2$ ve $W = uR \oplus vR$ koşullarını sağlayan bir R halkası inşa edilmiştir. Bu R halkası için $End_R(R/uR) \cong R$ olduğu ispatlanarak sonlu üreteçli sağ R-modüllerin sınıfının ve böylece Mod-R kategorisinin Baer-Kaplansky özelliğini sağlamadığı sonucuna varılmıştır. Bu sonuç tezin orijinal sonucudur.

KAYNAKLAR

[1] P.A. Krylov, A.V. Mikhalev and A.A. Tuganbaev. Endomorphism Rings of Abelian Groups. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, **2003**.

[2] L. Fuchs. Infinite Abelian Groups. *Pure and Applied Mathematics*, 36-II, Academic Press, New York, **1973**.

[3] R. Baer. Automorphism rings of primary abelian operator groups. *Ann. Math* 44:192-227, **1943**.

[4] I. Kaplansky. Some Results on Abelian Groups. *Proc. Not. Sci.*, USA 38:538-540, **1952**.

[5] G. Ivanov. Generalizing the Baer-Kaplansky theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 133:107-115, **1998**.

[6] G. Ivanov and P. Vámos. A characterization of FGC rings. *Rocky Mountain J. Math.*, 32(4):1485-1492, **2002**.

[7] S. Breaz. A Baer-Kaplansky theorem for modules over principal ideal domains. *J. Commut. Algebra*, 7(1):1-7, **2015**.

[8] D. Keskin Tütüncü and R. Tribak. On Baer-Kaplansky classes of modules. *Algebra Colloquium*, 24:603-610, **2017**.

[9] D. Keskin Tütüncü and Z. Başer. An investigation of the Baer-Kaplansky property. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, published online, **2024**.

[10] R. Alizade and A. Pancar. Homoloji Cebire Giriş, Samsun:Ondokuz Mayıs Üniversitesi, **2016**.

[11] D.S. Dummit and R.M. Foote. Abstract Algebra (Third Edition), United States of America:John Wiley & Sons Inc, **2003**.

[12] N. Aydın and H. Kandamar. Soyut Cebir, İstanbul:Kriter Yayınevi, **2013**.

[13] F.W. Anderson and K.R. Fuller. Rings and Categories of Modules. *Graduate Texts in Mathematics 13, Springer-Verlag*, New York, **1992**.

[14] S.H. Mohamed and B.J. Müller. Continuous and Discrete Modules. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 147, Cambridge University Press, Cambridge, **1990**.

[15] L.Fuchs and K.M. Rangaswamy. Quasi-projective abelian groups. *Bull. Soc. Math. France*, 98:5-8, **1970**.

[16] R.D. Ketkar and N. Vanaja. R-projective modules over a semiperfect ring. *Canad. Math. Bull.*, 24(3):365-367, **1981**.

[17] T.Y. Lam. A first course in noncommutative rings (Second Edition), Berkeley:Springer Science & Business Media, **2001**.

[18] K. Morita. Category-isomorphisms and endomorphism rings of modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103(3):451-469, **1962**.

[19] K.G. Wolfson. Isomorphisms of the endomorphism ring of a free module over a principal left ideal domain. *Michigan Math. J.*, 9(1):69-75, **1962**.

[20] V. Dlab and C.M. Ringel. A class of balanced non-uniserial rings. *Math. Ann.* 195:279-291, **1972**.

[21] A. Harmancı, D. Keskin and P.F. Smith. On $\oplus$-supplemented modules. *Acta Math. Hungarica*, 83(1-2):161-169, **1999**.

[22] D. Keskin, P.F. Smith and W.Xue. Rings whose modules are $\oplus$-supplemented. *J.Algebra*, 218:470-487, **1999**.

[23] A. Idelhadj and R. Tribak. A dual notion of CS-modules generalization, in:Algebra and Number Theory (Fez), (eds.). M. Boulagouaz, J.-P. Tignol, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 208, Marcel Dekker, New York, pp. 149-155., **2000**.

[24] D.V. Sharpe and P.Vamos. Injective Modules. *Lectures in Pure Mathematics*, Cambridge University Press, **1972**.