HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ cK¢ TEORİSİ BAĞLAMINDAKİ FONKSİYON ANLAYIŞLARININ KANIT ŞEMALARI İLE İNCELENMESİ

Merve KAZANCI

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, Nisan 2024

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ cK¢ TEORİSİ BAĞLAMINDAKİ FONKSİYON ANLAYIŞLARININ KANIT ŞEMALARI İLE İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS' CONCEPTIONS OF FUNCTION IN THE CONTEXT OF cK¢ THEORY WITH PROOF SCHEMES

Merve KAZANCI

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, Nisan 2024

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne, Merve KAZANCI'nın hazırladığı "Matematik Öğretmen Adaylarının cK¢ Teorisi Bağlamındaki Fonksiyon Anlayışlarının Kanıt Şemaları İle İncelenmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Prof. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Dr. Öğr. Üyesi Meltem SARI	İmza
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Gönül YAZGAN SAĞ	İmza

Enstitü Yönetim Kurulunun
…./…/…. Tarihli ve ……
sayılı kararı.

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 27 / 05 / 2024 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Hakkı MİRİCİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının fonksiyon kavramındaki bilgilerini en iyi şekilde analiz etmek ve matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak için Balacheff ‘in geliştirdiği cK¢ (conception, knowing, concept) teorisi ile kanıt sürecindeki eylemlerindeki tüm anlayışların incelenmesi ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemalarının analiz edilmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden olan durum çalışması kullanılmıştır. Çalışma, 2022-2023 akademik yılında Ankara’daki bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programında öğrenim gören her sınıf düzeyinden ikişer olmak üzere, sekiz öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına fonksiyonlarla ilgili iki teorem çevrim içi yazılı olarak sunulmuştur ve cevapları yazılı olarak alınmıştır. Öğretmen adaylarının yazılı olarak verdikleri yanıtlar, çözüm sürecindeki tartışmalarının video kayıtları ve araştırmacının gözlemleri çalışmanın verileri olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin düşünme tarzını ve mantıksal adımlarını anlamak için daha çok kullandıkları hatalı operatörler dikkate alınarak yaptıkları açıklamalardan kontrol yapıları belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin kanıt sürecinin tamamında kullandıkları kanıt şemaları belirlenmiştir. Birinci teoremde; birinci, ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinin kanıt şemaları incelendiğinde daha çok dışsal ikna kanıt şemalarına ve deneysel kanıt şemalarına sahip oldukları görülmektedir. Analitik (çıkarımsal-tümdengelimsel) kanıt şemalarına ise birinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin sahip olduğu görülmektedir. İkinci teoremde ise, öğrencilerin dönüşümsel ve ritüel kanıt şemalarına sahip oldukları görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: cK¢ teorisi, fonksiyon, matematik öğretmen adayı, kanıt, kanıt şeması

Abstract

In this study, the aim is to analyze the knowing of prospective mathematics teachers regarding the concept of functions in the best possible way and to reveal their mathematical thinking using Balacheff's cK¢ (conception, knowing, concept) theory. The study examines all conceptions in the proof process and analyzes them with proof schemes expressed in the operators associated with these conceptions. A case study, one of the qualitative research methods, was used in this study. The study was conducted with eight students, two from each grade level, studying in the mathematics teaching program at a state university in Ankara during the 2022-2023 academic year. Two theorems related to functions were presented to the teacher candidates in written form online, and their responses were collected in writing. The written responses of the teacher candidates, video recordings of their discussions during the solution process, and the researcher's observations were analyzed as the study's data. To understand the students' thinking styles and logical steps, control structures were attempted to be determined from their explanations, focusing on the incorrect operators they frequently used. The proof schemes used by the students throughout the entire proof process were identified. In the first theorem, it was observed that first, second, and third-year students predominantly had external conviction and experimental proof schemes. First and fourth-year students were found to have analytical (inferential-deductive) proof schemes. In the second theorem, it was observed that students had transformational and ritual proof schemes.

Keywords: cK¢ theory, function, preservice mathematics teachers, proof, proof scheme

Teşekkür

Lisansüstü eğitimim süresince ve tez çalışmamda eğitimci kişiliğiyle örnek aldığım, tezimin her aşamasında büyük bir sabırla destek veren ve bu süreci başarıyla tamamlamamda çok büyük emekleri olan tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Meltem SARI' ya yapmış olduğu tüm yardımlarından ve verdiği manevi desteklerden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ailemden ve sevdiklerimden uzakta geçirdiğim bu süreçte benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen ve bütün başarılarımın arkasındaki gerçek kahramanım olan annem Zeliha KAZANCI' ya, uzakta yaşasak da varlığını arakamda hep varlığını hissettiğim babam Ramiz KAZANCI' ya, bütün hayatımda en yakın arkadaşlarım ve sırdaşlarım olan ablalarım Tuğba GÜLTEKİN' e, Banu KAZANCI ASLAN' a ve Hilal KAZANCI' ya, bizim ilk göz ağrımız ve benim en iyi yol arkadaşım olan canım yeğenim Aleyna KÖK' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics.

cK¢: Conception, Knowing, Concept.

Bölüm 1

Giriş

Problem Durumu

Günümüzde matematik tıptan mühendisliğe, sanayiden tarıma hemen hemen her yerde karşımıza çıkmaktadır. Matematiğin hayatın her alanında yer almasının yanında "Matematik nedir? Matematik yapmak ne demektir?" soruları da her zaman tartışma konusu olmuştur. Bu sorulara verilmiş çeşitli yanıtlar bulunmaktadır.

Umay'a göre (1996) matematik tanımsal bir gerçektir, kesindir ve soyuttur. Matematiği sayılar gibi simgesel gösterimlerle soyutlaştırırız. Çocukken soyut ilişkileri kurmak zordur ve nesnelerle matematiği somutlaştırırız, bu matematiği öğrenirken ve öğretirken işimizi kolaylaştırır ama ne kadar somutlaştırırsak o kadar matematikten uzaklaşırız (Umay, 1996).

Matematik sayı ve sembollerle ifade edilen bir dildir. Bu dil olmadan içinde bulunduğumuz dünyanın fiziksel problemleri çözülemez. Matematik her dönemde ihtiyaç duyulan, hayattaki problemleri çözmek için kullanılan bir araçtır. Zaman değiştikçe hayatta yeni yeni problemler karşımıza çıkar bu yüzden matematik dili de gelişmeye ve zenginleşmeye başlar (Nasibov, 2005).

Matematik hayatımızı devam ettirmek için kullandığımız ve sezgiyle öğrenilen bir sistemdir. Öyle ki daha çocukken bile 10 tane çorabın 5 kişiye ait olduğunu hiç matematik öğrenmeden sezgisel olarak biliriz.

Matematik yapmak matematiği öğrenmektir. Ancak bundan kast edilen sayıları, sembolleri, tanımları, teoremleri uygulamayı bilmek demek değildir. Bu bilgileri kullanarak problemleri çözme sürecidir. Yani matematik yapmak öğrenilen bilgi ve becerileri problem çözme sürecine aktarmak için yapılan aktiviteler bütünüdür (Baştürk, 2007).

Görüldüğü gibi matematiğin tek bir anlamı yoktur ve aslında bütün bu tanımlar matematiği nasıl anlamlandırdığımız ile ilgilidir. Bertrand Russell, "Matematik, ne neden söz ettiğimizi ne de söylediğimiz şeyin doğru olup olmadığını bildiğimiz bir konudur" demiştir (Gür, 2014). Lakatos da matematikten "bazen net, bazen bulanık şey" diye bahsetmiştir (Davis & Hersh, 1981, akt., Gür, 2014).

Matematik hayatımızın her alanında karşımıza çıkan ve kendine ait bir dili olan bilim dalıdır. Bu yüzden olsa gerek öğrencilerin matematik endişesinin olduğu ve bu yüzden matematikten kaçma eğiliminde oldukları karşımıza çıkmaktadır (Hembree, 1990). Tabi ki bu algının oluşmasının birçok sebebi vardır. Bunlar geçmişte öğrenilen bilgilerin tam ve eksiksiz öğrenilmemesi, önceden öğrenilmiş yanlış kavram ya da oluşmuş kavram yanılgıları yüzünden yeni öğrenilen konuları anlamlandıramama gibi sebepler olabilir.

Matematiğin dinamikleri sarmal bir sisteme sahip olduğu için yani önceden öğrenilenlere eklemeli olarak devam eden anlayışlar sisteminden oluştuğu için öğrenende oluşan kavram yanılgıları, eksik ve hatalı öğrenmeler matematiğe karşı ön yargı oluşturabiliyor ve matematik öğrenmesini de zorlaştırıyor. Öğrenenlerin sahip olduğu olumsuz matematik algısının giderilmesi ve matematiksel düşüncenin geliştirilmesi için öğrencide oluşan kavram yanılgılarının tespiti ve giderilmesi çok önemlidir. Öğrenenlerde kalıcı ve doğru bir şekilde matematik kavramlarının oluşmasının sağlanması için öğrenmenin nasıl gerçekleştiğinin de iyi bir şekilde analiz edilmesi gerekir.

Öğrenende matematiksel düşünmeyi geliştirmek, problem çözme süreçlerinde anlamlı öğrenmeyi gerçekleştirmek, öğrenmelerin altında yatan anlayışları ortaya çıkarmak için birçok öğrenme teorisi geliştirilmiştir. Matematik eğitiminde geliştirilen öğrenme teorilerden bir tanesi de Balacheff 'in geliştirdiği cK¢ (conception, knowing, concept) teorisidir. Balacheff (2013) öğrencilerin kavramları nasıl anlamlandırdığını analiz etmek, matematik eğitimiyle eğitim teknolojileri arasında bir bağ kurmak için cK¢ (conception), knowing, concept) teorisini geliştirmiştir. “Anlayış (conception)”, “Bilme (Knowing)”,”Kavram (Concept)” üçlüsünün İngilizce karşılıklarının baş harflerinin oluşturduğu cK¢ teorisinin hiyerarşik bir yapısı vardır. Yani anlayışlar birleşerek bilmeleri, bilmeler birleşerek kavramları oluşturur. Bundan dolayı asıl üzerinde durulacak aşama öğrencilerin matematiksel kavramlara karşı geliştirdikleri anlayışları belirlemek olacaktır. Matematik araştırmalarında öğrenenlerin matematiksel kavramlarla ilgili öğrenmelerini ve bilgilerini ifade etmek için anlayış kavramı da kullanılmaktadır. Burada kullanılan anlama en yakın anlayış kavramı ise, Türk Dil Kurumu'nun Eğitim Terimleri sözlüğünde "bir kimsenin anlama biçimi ya da anlama gücü, bir kimsenin benimsemiş olduğu düşüncelerin ve inançların tümüne verilen ad" olarak açıklanmaktadır (Çalık Uzun, 2012).

cK¢ teorisinin anlayış aşaması dört bileşene ayrılmaktadır. Öğrencilerin bir matematiksel kavramı oluşturmak için bir dizi problemlerin yer aldığı uygulama alanı problem kümesini oluşturur ve P ile gösterilir. Problemi çözmek için uyguladıkları kurallar, işlemler ve teoremler kümesini R ile gösterilen operatörler oluşturur, problemleri ve operatörleri ifade etmek için kullanılan tüm matematiksel terimler temsil sistemlerini oluşturur ve L ile gösterilir. Anlayışın son bileşeni ise öğrencilerin, kararlarını, seçimlerini, kullandıkları operatörleri ve yaptıkları tüm eylemleri değerlendirmek için kullandıkları araçlar kümesi olan kontrol yapılarıdır ve Σ ile gösterilir (Pedemonte & Balacheff, 2016).

Öğrenenin problem çözme sürecinde başvurduğu/kullandığı bütün matematiksel kavram ve düşünceler doğrulanmalı ve değerlendirilmelidir. Aksi takdirde öğrenmelerin nasıl gerçekleştiğini, öğrenenin bilgiyi hangi yollarla keşfettiğini ve yeni öğrenmelere nasıl aktaracağını bilemeyiz. Balacheff (2010); doğrulamayı, bir kavramı ya da ifadeyi önceden kabul edilmiş bir sınır içinde kabul ettirmek için oluşturulmuş sebepler olarak tanımlamaktadır. Bu yüzden matematiksel doğrulama net ve kesin kanıt arar.

Matematiksel problem çözme sürecinde öğrenciler ortaya koydukları anlayışların ve eylemlerin doğruluğunu sorgulamak, sağlamak ve değerlendirmek için kontrol yapılarına güvenirler. Ancak problemin çözümünün doğruluğunu göstermek için geliştirdiği anlayışları ve eylemleri kanıta geçirmek çok da kolay değildir. Kontrol yapılarındaki matematiksel terimler, bilmek ve kanıtlamak arasındaki bağları güçlendirirken problem çözümünün kanıtına geçiş sağlar (Pedemonte & Balacheff, 2016). Araştırmacıların ortak görüşüne göre matematik öğrenme ve öğretmede matematiksel kanıtı kullanmak oldukça zordur fakat matematiksel düşünmeyi öğretirken, kanıt kavramını matematiksel bilgiyi yapılandırma probleminden ayıramayız (Balacheff, 2010).

Kanıtlar, matematiksel kavramların resmileştirilmesine, sistematikleştirilmesine ve aktarılmasına olanak sağlar (Hanna, 2000). Kişi kanıtını inceleyerek geçerliğini kontrol ederken kendine özgü bilgi ve anlayışlarını kullanarak yeniden oluşturulabilir. Kanıt yapılırken, konu soyut kavramlardan oluşsa bile ifade etme biçimi somut olma eğilimi taşır. Örneğin kişi, kanıtta “her x negatif sayısı için, f(x)> 0 “ ifadesi yerine “ x negatif bir sayı olsun” yazıp daha sonra f(x) > 0 ifadesini gözlemleyebilir (Selden & Selden, 1999).

Bir lise öğrencisinin kanıt anlayışı üniversite öğrencisinden, günümüz matematikçilerinin kanıt anlayışı eski matematikçilerden farklıdır. Ve kanıt şemaları, bu farklı anlayışları tanımlamak için kullanılan; bir öznenin kendisini veya kendisi dışındakileri, matematiksel bir durumun doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmek için yaptığı açıklamaları, savunmaları ve kanıtları içeren düşünme biçimidir. Kanıt süreci, bir öznenin veya topluluğun bir ifadenin doğruluğu hakkındaki şüpheleri tespit etmesi ve bu şüpheleri ortadan kaldırmak için ikna etmesi gereken bir süreçtir. Kanıt şemaları ise kanıt sürecindeki tüm eylemleri analiz etmeyi içerir (Hareli & Sowder, 2007). Harel ve Sowder'a göre, öğrencilerin matematiksel gelişim sürecinde hangi kanıt şemasına sahip oldukları, öğrencilerin kanıt anlama düzeyleriyle ve öğrencileri ikna edebilecek kanıt teknikleriyle doğrudan ilişkilidir. Bu çerçeve, matematik eğitiminde öğrencilerin kanıt anlama düzeylerini ve kanıt üretme becerilerini anlamak ve geliştirmek için kullanılabilir (Knapp, 2005).

Balacheff’in (2017) belirttiği gibi; cK¢ teori çerçevesi, başlangıçta Didaktik Durum Teorisi ve Kavramsal Alan Teorisi gibi belirli teorilere dayanıyor olabilir, ancak bu çerçeve sınırlı değildir. Teorinin geliştirilmesi ve verimliliğinin artırılması için, (örneğin operatör, temsil, kontrol sistemi) bileşenlerini güçlendirmek için diğer teorilerin entegre edilmesi gerekebilir. Ayrıca teori, bilgiyi edinme ve kanıtlama arasında bir köprü kurmayı, kontrol ve kanıt arasında bir bağ kurmayı sağlar. Bu da, öğrencilerin argümanları nasıl geliştirdiklerini ve nasıl kanıtladıklarını anlamamıza yardımcı olabilir. Bu şekilde, cK¢ modeli, öğrencilerin kavramsal anlayışlarını derinleştirmek ve matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek için güçlü bir araç olabilir.

Sonuç olarak, cK¢ modellemesi başlangıçta belirli teorilere dayanmasına rağmen, diğer teorilerin entegrasyonu ve genişletilmesi ile daha etkili bir hale getirilebilir. Bu çerçeve, öğrenme süreçlerini anlamak ve matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek için önemli bir araç olabilir. Çalışma buradan yola çıkarak cK¢ teorisi ile kanıt şemalarının entegre edilmesiyle gerçekleştirilmiştir.

Fonksiyon kavramının matematikteki yeri düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının fonksiyon kavramıyla ilgili anlayışlarının önemi ortaya çıkmaktadır. Bu alan, çeşitli matematiksel işlevlerin analizine ve özelliklerine odaklanarak matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmek için zengin bir zemin sağlar (Balacheff & Gaudin, 2002; Balacheff & Margolınas, 2003) Öğretmen adaylarının fonksiyon kavramına ilişkin bilgileri ve anlayışları matematik öğretim süreçlerine yansıyacak ve bu durum öğrencilerde fonksiyon kavramının oluşumunu etkileyecektir. Yapılan literatür taramasında özellikle ulusal alan yazında cK¢ teorisi ile yapılan oldukça az sayıda çalışma olduğu görülmüştür (Yazgan, 2006; Çalık Uzun, 2012; Uysal, 2019).

Öğrenenlerin anlayışlarını belirlemede önemli bir teori olan cK¢ teorisinin öğretmen adaylarının cK¢ teorisi bağlamında fonksiyon kavramına ilişkin anlayışları ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemaları ile ilgili bilgilerini ortaya çıkarma hem teorinin anlaşılması hem de öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki anlayışlarının belirlenmesi açısından alana katkı sağlayacaktır.

Buradan yola çıkarak matematik öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki anlayışları cK¢ teorisi bağlamında analiz edilecek ve anlayış aşamasındaki bileşenlerinden olan operatörlerde, Harel ve Sowder ‘ın (1998) tanımladığı kanıt şemalarının analizi yapılacaktır.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Balacheff (2013) kontrol yapısını matematiksel terimlerden oluşan operatörlerden ayırmanın zor olduğundan ve çoğu kez üstü kapalı bir şekilde yer aldığından bahsetmektedir. Problem çözme sürecinde öğrencilerin kavramları nasıl bildiğini sorgulamak ve bu kavramların doğruluğunu göstermek için kontrol yapısının güvenilir ve geçerli olması gereklidir. Bu bağlamda problemin çözüm sürecinde öğrencinin göstermiş olduğu eylemin doğruluğunu denetleyen kontrol yapısının, aksiyomlar, varsayımlar, tanımlar ve teoremlerle uyumlu olması gereklidir. Kontrol yapılarındaki matematiksel terimler, bilmek ve kanıtlamak arasındaki bağları güçlendirirken problem çözümünün kanıtına geçiş sağlar (Pedemonte & Balacheff, 2016). Anlayışları oluşturan operatörler matematiksel bir kuralın uygulamasına karşılık geliyorsa, bu kural kanıtta bir teorem ile yer değiştirilebilir (Pedemonte, 2005). Yani bu operatörler kontrol yapılarıyla örtüşür ve kontrol yapısı görevini üstlenir. Ancak bu operatörler matematiksel olarak geçerli değilse bunu yapmak mümkün değildir. Öğrencinin problem çözme sürecinde geliştirdiği anlayışları ve yaptığı tüm eylemlerin doğruluğu kontrol yapısı ile gösterilir. Dolayısıyla kanıt, kontrol yapısı ile gerçekleştirilebilir. Böylece kontrol yapısının yönlendirdiği kanıt süreci, öğrencilerin anlayışlarını daha iyi analiz etmek ve derinlemesine incelemek için kanıt şemaları kullanılarak gerçekleştirilebilir.

Dolayısıyla bu çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon kavramındaki bilgilerini en iyi şekilde analiz etmek ve matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak için Balacheff ‘in geliştirdiği cK¢ (conception, knowing, concept) teorisi ile kanıt sürecindeki eylemlerindeki tüm anlayışların incelenmesi ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemalarının analiz edilmesi amaçlanmaktadır. Literatür incelemesinde ulaşılan çalışmalarda fonksiyonlar kavramının cK¢ teorisi altında kanıt şemaları ile inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu yüzden, çalışmadan elde edilecek sonuçlar, öğretmen adaylarının fonksiyon kavramı ile ilgili bilgilerini cK¢ teorisi bağlamında belirleme ve özellikle operatörlerde kullandıkları kanıt şemalarını ortaya çıkarma açısından alana önemli katkı sağlayacaktır.

Araştırma Problemi

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının cK¢ teorisi bağlamında fonksiyon kavramına ilişkin anlayışları nasıldır ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemaları nelerdir?

Alt Problemler

1) Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon kavramları ile ilgili anlayışlarını yansıttıkları operatörler nelerdir?
2) Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon kavramıyla ilgili teoremleri kanıtlama sürecindeki tüm eylemlerinde işe koştukları operatörler hangi kanıt şemasının özelliklerini göstermektedir?

Sayıltılar

Öğrencilerin uygulama sürecinde soruları içtenlikle ve ciddiyetle yanıtladıkları ve fonksiyonla ilgili kavramlara ait anlayışlarını teoremin kanıtlarına yansıttıkları varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

Öğrencilerin fonksiyonlarla ile ilgili anlayışları verilen iki teoremde yer alan fonksiyon tanımı, birebirlik, örtenlik, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon kavramları ile sınırlandırılmıştır.

Öğrencilerle yüz yüze yapılması hedeflenen uygulama 6 Şubat 2023 tarihinde yaşanan büyük Türkiye depreminden dolayı çevrim içi ortamda yapılan görüşmelerle sınırlandırılmıştır.

Tanımlar

Kartezyen çarpımı: A ve B boş olmayan iki küme olsun A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere bütün $(a,\ b)$ sıralı çiftlerinden oluşan kümedir (Karaçay, 2016).

Bağıntı: Boş olmayan A ve B kümeleri için $A \times B$ kartezyen çarpımının her alt kümesi A'dan B'ye ikili bir bağıntıdır (Karaçay, 2016).

Fonksiyon: Tanım bölgesindeki her öğeyi değer bölgesinde bir ve yalnızca bir öğeye eşleyen bağıntı fonksiyondur (Karaçay, 2016).

Anlayış: Özne ile çevre arasındaki bazı kısıtlamalar altındaki eylem-dönüt sisteminin dinamik denge haline gelmesidir (Balacheff & Gaudin, 2002).

Bilme: Özne ile çevrede yaşayabileceği olumlu ya da olumsuz tüm eylemler arasındaki etkileşimin dengeye gelmesidir (Brousseau, 1997). Bilme, anlayışların oluşturduğu kümedir (Balacheff, 2000).

Kavram: Matematiksel bilmelerin ortak özelliklerini kapsayan ve bir ortak ad altında toplayan genel tasarımdır. Kavram, bilmelerin oluşturduğu kümelerdir (Balacheff (2000). Vergnaud (1996), bir kavramı, bir dizi kavramın bir araya gelerek oluşturduğu ve karmaşık bir sistem olarak tanımlar. Kavramlar, öznelerin deneyimleri, düşünceleri ve sembolik temsiller aracılığıyla şekillenen dinamik yapılar olarak görülür (Vergnaud 2007, 2013)

Kavram yanılgısı: Öğrencilerin bir konu, kavram veya durum üzerinde kabul edilen evrensel gerçeklerden farlılık gösteren algılamalardır. Bir bilgi hatalı, eksik veya uyumsuz olsa bile öğrenci ortam sisteminin yeterlilik ve etkililik ölçütleri altında gerçekleşen dinamik bir dengenin sonucudur (Balacheff, 1995).

Hata: Öğrencinin bilmeden ve fark etmeden gerçekleştirdiği yanlışlardır (Balacheff, 1995).

Özne (subject): Eylemi gerçekleştiren veya durumu sergileyen kişidir.

Ortam (milieu): Öğrencinin üzerinde etkide bulunan her şeyi içeren bir yapıdır (Brousseau, 2002).

Durum: Matematiksel bilginin farklı bağlamlarda kullanılabilir olduğunu ve her bir bağlamın bu bilgiyi farklı şekillerde vurguladığını ifade eden kavramdır (Brousseau, 2010).

Şema: Belirli bir durumu veya süreci görselleştirmek ve anlamak için kullanılan organizasyonlu yapılardır (Vergnaud, 2013).

Kanıt: Bir matematiksel iddianın doğruluğunu göstermek için kullanılan mantıksal bir argümandır (Knapp, 2005).

Kanıt şemaları: Bir öznenin kendisini veya kendisi dışındakileri, matematiksel bir durumun doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmek için yaptığı açıklamaları, savunmaları ve kanıtları içeren düşünme biçimidir. Kanıt şemaları, belirli bağlamlarda iddialar oluşturmak için kullanılan, bir iddianın doğruluğunu tespit etme ve diğerlerine ikna etme süreçlerini organize eder ve açıklar (Harel & Sowder, 2007).

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

Bu kısımda tezin kuramsal çerçevesini oluşturan cK¢ Teorisi ve Kanıt Şemaları'nın yanında cK¢ teorisinin temelinde yatan Didaktik Durumlar Teorisi ve Kavramsal Alanlar Teorisi de açıklanmaktadır. Anlayış kavramı aslında epistemolojik durumuna bakıldığında kavram yanılgıları ile aynı kökene sahiptir (Artigue, 1991, akt., Balacheff 2002). Balacheff ve Gaudin (2002) anlayışları tanımlarken kavram yanılgılarının yetersiz kalacağını ve iyi konumlandırılmış şekilde analiz edilmesi gerektiğini söylemişlerdir. Bundan dolayı Kavram Yanılgıları, Fonksiyonlar ve Kavram Yanılgıları da ayrı bir başlıklar altında açıklanmıştır.

Didaktik Durumlar Teorisi

Bachelard'ın (1938) epistemolojik engel kavramı, özellikle deneysel bilimlerde bilimsel bilgiye ulaşmayı engelleyen zihinsel kısıtlamaları ve önyargıları ifade eder. Bu kavram, bilimsel bilgiye ulaşmada zorluk çeken öznelerin (subject) düşünce yapısındaki sınırlamalara ve yanlış inançlara işaret eder. Brousseau, bu kavramı matematik eğitimine uygulayarak "bilgi sıçraması" ve didaktik "teoremler" kavramlarını geliştirdi (Brousseau, 1989). Bilgi sıçraması, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarını engelleyen zihinsel engelleri ifade eder. Öğrencilerin matematiksel kavramları anlamaları için bu engelleri aşmaları ve yeni bilgiyi sindirebilmeleri gerekir. Didaktik "teoremler", öğretmenlerin ve eğitimcilerin öğrencilerin bu zihinsel engelleri aşmalarına yardımcı olmak için izleyebilecekleri stratejileri ifade eder. Bu teoremler, öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamalarını ve öğrenmelerini kolaylaştırmayı amaçlar. Brousseau'nun didaktik durumlar teorisi (didactical situation), öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarını ve öğrenme engellerini aşmalarını sağlayarak matematik öğretimini geliştirmeyi hedefler.

Öğrenme, bir öğrencinin durumuyla etkileşime girer ve bu etkileşim öğrenme sürecini şekillendirir. Didaktik durumlar teorisi, öğrenmenin sadece öznenin içsel özelliklerine değil, aynı zamanda dışsal faktörlere de bağlı olduğunu vurgular. Bu teori, eğitim sürecini tasarlarken ve uygularken, öğrencilerin içinde bulundukları durumları dikkate almanın önemini vurgular. Bu şekilde, öğrenme deneyimlerinin daha etkili ve anlamlı hale getirilmesi amaçlanır.

Brousseau'ya (2002) göre ortam (milieu), öğrencinin üzerinde etkide bulunan her şeyi içeren bir yapıdır. Bu yapı, öğrencinin etkileşim içinde olduğu fiziksel, sosyal, kültürel ve diğer unsurları kapsar. Teoride, durum kavramı genellikle ortam kavramı üzerinden tanımlanır. Durum, bir matematik bilgisinin özel kullanım bağlamı veya şartları iken, ortam öğrenciyi harekete geçiren, eylemlerini ve kararlarını belirleyen mekanizmalardır. Ortam, öğrencinin öğrenme sürecindeki etkileşimlerini ve deneyimlerini şekillendirir. Öğrencilerin çevresel faktörlerle etkileşimleri, öğrenme sürecinin dinamiklerini belirler ve öğrencilerin yaklaşımlarını etkiler. Dolayısıyla, ortam öğrenme sürecinde önemli bir rol oynar. Brousseau'nun vurguladığı gibi, ortam genellikle öğrencinin aleyhine işleyen bir yapı olarak tanımlanır (Bingölbali ve diğerleri, 2016).

Teoride kullanılan "durum" kavramını matematik eğitimindeki özel bağlamların anlamını vurgulamak için kullanır ve matematiksel bilginin farklı bağlamlarda kullanılabilir olduğunu ve her bir bağlamın bu bilgiyi farklı şekillerde vurguladığını ifade eder (Brousseau, 2010). Matematiksel kavramlar, çeşitli bağlamlarda kullanılabilir ve her bağlamda kavramın farklı yönleri ön plana çıkabilir. Örneğin, türev kavramı, teğet ve normal doğru denklemini bulmak için kullanılabileceği gibi, bir aracın hızını veya ivmesini hesaplamak için de kullanılabilir. Her iki durumda da, türev kavramının özellikleri farklı açılardan incelenir ve farklı bağlamlarda değerlendirilir (Bingölbali ve diğerleri, 2016).

Öğretme-öğrenme ilişkisi içinde, bir bilginin aktarımı ve öğrenilmesi sürecinde çeşitli durumlar ortaya çıkabilir. Teoride bu açıdan dört farklı durum tanımlanmaktadır. Bunlar didaktik durumlar, didaktik olmayan durumlar, a-didaktik durumlar ve temel durumlardır.

Didaktik durumlar genellikle açık bir öğretim amacı veya işlevi taşıyan durumlar olarak tanımlanır. Bu durumlar, öğretmenler tarafından önceden belirlenen öğrenme hedeflerine ulaşmak için tasarlanır ve yönetilir. Öğretmenler, öğrencilerin belirli bir konuyu öğrenmelerini sağlamak için çeşitli stratejiler ve etkinlikler kullanarak didaktik durumlar oluştururlar. Örneğin, bir öğretmenin bir ders sırasında belirli bir konuyu anlatması, öğrencilere konunun pekiştirilmesi için verilen alıştırmalar veya bir projenin verilmesi gibi etkinlikler, öğrenciler için bir didaktik durum oluşturabilir. Bu durumlar, öğrencilerin belirli bilgi ve becerileri edinmelerini, anlamalarını veya uygulamalarını sağlamak amacıyla tasarlanır. Didaktik durumlar genellikle öğretmenin liderliğinde gerçekleşir ve öğrencilerin öğrenme sürecini yönlendirmek için kullanılır. Öğrencilerin bu durumlarda belirli bir amacı ve hedefleri olduğu gibi, öğretmenin de belirli bir öğretme hedefi vardır ve bu hedef genellikle öğrenciler tarafından bilinir. Bu şekilde, didaktik durumlar, öğrenme sürecinin yapılandırılmasına ve yönetilmesine yardımcı olur (Bingölbali ve diğerleri, 2016).

Didaktik olmayan durumlar, öğretim amacı içermeyen ve bilinçli bir öğretme çabası olmayan durumları ifade eder. Bu durumlar, öğrencilerin kendi çabaları veya doğal çevreleri aracılığıyla bilgi edinmelerine dayanır. Öğrenciler bu tür durumlarda bilgi edinebilirler, ancak bu bilgi edinimi planlı bir eğitim sürecine dayanmaz.

Örneğin, çocuklar evin duvarlarındaki kare pencere çerçevelerini, üçgen trafik levhalarını veya dairenin benzerlerini görebilir ve geometrik şekilleri doğal çevrelerinden öğrenebilirler. Bu süreçte, çocuk kendi çabalarıyla geometrik kavramları anlamaya başlar ve günlük yaşamda matematiksel öğrenmeyi deneyimler. Dolayısıyla, bu etkileşim özel bir matematik dersi olarak planlanmamıştır; çocuğun çevresiyle olan bu etkileşimi didaktik olmayan bir durumdur çünkü bilinçli bir öğretim amacını ve çabasını içermez (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Didaktik olmayan durumlar (non-didactical situation), öğrencilerin çevresel etkileşimlerinden, deneyimlerinden veya kendi keşifleriyle öğrenme fırsatları buldukları durumları kapsar. Bu durumlar, öğrenme sürecini zenginleştirebilir ve öğrencilerin kendi ilgi alanlarını keşfetmelerine ve öğrenmeye olan motivasyonlarını artırmalarına yardımcı olabilir. Ancak, bu tür durumlar planlı bir eğitim sürecinin yerini almazlar ve öğretmenin bilinçli bir müdahalesi olmadan gerçekleşirler.

A-didaktik durumlar, öğretim amacının öğrenciye açıkça belirtilmediği ve öğrenci tarafından hemen fark edilmediği durumları ifade eder. Bu durumlarda, belirlenen öğretim amacına dolaylı yöntemlerle ulaşılmaya çalışılır ve bu amaç genellikle öğrenciyle açıkça paylaşılmaz. Örneğin, çocukların rakamları öğrenmesi için tasarlanmış bir oyuncak, a-didaktik bir durum oluşturabilir. Oyuncak tasarımcısı, çocuğun o an için göremediği bir öğretimsel amaca sahip olabilir ve bu amaç, oyuncak kullanılarak çocuğun deneyimlediği etkinlikler aracılığıyla dolaylı olarak gerçekleştirilmeye çalışılabilir (Bingölbali ve diğerleri, 2016).

Bu tür durumlar, öğrencilerin ilgisini çekmek ve doğal olarak öğrenmeye teşvik etmek için kullanılabilir. Ancak, öğrenciler genellikle bu tür durumların öğretim amacını doğrudan algılayamazlar ve öğretmenin veya tasarımcının belirlediği hedeflere dolaylı yollarla ulaşırlar. Bu şekilde, öğrencilerin keşfetme ve deneyimleme yoluyla öğrenmeleri teşvik edilirken, öğretmenin rolü daha arka planda kalabilir. A-didaktik durumlar teoride önemli bir yer tutar ve öğrencilerin öğrenme deneyimlerini zenginleştirmek ve derinleştirmek için kullanılabilirler. Bu durumlar, öğrencilerin konuları veya görevleri daha özgün bir şekilde keşfetmelerini ve anlamalarını sağlar.

Didaktik durumlar terimi, teoride genellikle daha geniş bir anlamda kullanılır ve a-didaktik durumları da içerir. Örneğin, Brousseau'nun (1997) belirttiği gibi, öğretmenin amacı öğrenciyle etkileşim içindeyken dahi a-didaktik durumu oluşturmak ve bu etkileşimlerin öğrenme sürecine katkı sağlamasını sağlamaktır. Bu anlamda, öğretmenin öğrencilerle olan tüm etkileşimleri, öğretme ve öğrenme sürecinin bir parçası olarak görülür ve bu etkileşimler a-didaktik durumların oluşturulmasında ve öğrencilerin öğrenmelerinin desteklenmesinde kullanılır.

Temel durumlar (fundamental situation) ise, matematiksel kavramların veya kavramların esas anlamını verecek olan a-didaktik durumlar zincirinin çıkış noktası olarak düşünülebilir. Brousseau'nun ifade ettiği gibi, her bir matematiksel kavram için bir a-didaktik durum veya durumlar zinciri bulunabilir. Bu durumlar, matematiksel kavramın temelini oluşturur ve öğrencilere kavramın esas anlamını sağlamak için kullanılır (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Temel durumlar, öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarına yardımcı olmak için tasarlanmıştır. Her bir temel durum, belirli bir matematiksel kavramın temel özelliklerini ve işlevlerini öğrencilere aktarmak için tasarlanmıştır.

Brousseau, öğretim teorisinde oyunların önemli bir rol oynadığına inanıyordu ve özellikle a-didaktik durumların tasarlanması ve uygulanması için oyunları etkin bir araç olarak kullanmıştır. Oyunlar, öğrencilerin aktif katılımını teşvik eden, öğrenme sürecini eğlenceli hale getiren ve derinlemesine öğrenmeyi destekleyen bir ortam sağlayabilir. Brousseau'ya göre, oyunlar belirli bir yaklaşım çerçevesinde titizlikle tasarlanmış olmalıdır (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Oyunlar, öğrencilerin belirli matematik kavramlarını veya becerilerini anlamalarına yardımcı olmak için seçilmiş, planlanmış ve yönlendirilmiş etkinlikler olmalıdır.

Öğrenciler, oyunlar sırasında rakiplerinin stratejilerini gözlemleyerek, kendi stratejilerini geliştirebilir ve değiştirebilirler. Bu süreç, öğrencilerin stratejik düşünme becerilerini güçlendirir ve problem çözme yeteneklerini geliştirir (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Oyun bağlamı, öğrencilerin motive olmalarını ve aktif bir şekilde katılımlarını teşvik ederken, aynı zamanda stratejik düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmelerini sağlar. Bu nedenle, oyunlar öğretim ve öğrenme sürecinde önemli bir rol oynar.

Brousseau (1997), a-didaktik ortamı merkeze alarak öğretim sürecini beş aşamalı bir modelle tanımlamıştır. Bunlar sorumluluk devretme (devolution), eylem durumu (situation of action), ifade etme durumu (situation of formulation), doğrulama durumu (situation of validation) ve kurumsallaştırma (institutionalization) dir.

Teoride, öğretmenin müdahalesi minimum düzeydedir ve genellikle sadece oyunun tanıtımı, grup etkileşimlerinin organizasyonu ve öğrencilerin fikirlerini toplamak gibi görevlerle sınırlıdır. Bu noktada, ilk aşama olan sorumluluk devretme (devolution) kavramı devreye girer (Bingölbali ve diğerleri, 2016). İlk aşama olan sorumluluk devretme, öğretmenin öğrencilere daha fazla sorumluluk ve kontrol vererek öğrenme sürecini yönlendirmelerine izin vermesini ifade eder. Sorumluluk devretme sürecinin etkin bir şekilde gerçekleşmesi için öğretmen ve öğrenciler arasındaki karşılıklı beklentilerin iyi anlaşılması oldukça kritiktir. İyi anlaşılan beklentiler, öğretmenlerin ve öğrencilerin rollerini daha net bir şekilde belirlemelerine yardımcı olur ve böylelikle eğitim hedeflerine daha etkin bir şekilde ulaşılmasını sağlar (Erdoğan & Erdoğan, 2013). Eğitim-öğretim sürecindeki karşılıklı beklenti ve sorumluluklar bütününe "didaktik sözleşme" (didactic contract) adı verilir. Bu sözleşme, resmi bir yazılı belge olmaktan ziyade, eğitim-öğretim süreci içerisinde oluşan, gelişen ve değişen bir sistemdir. Didaktik sözleşme, öğretmen ve öğrenciler arasında karşılıklı beklentilerin ve sorumlulukların belirlendiği bir anlaşmadır (Erdoğan & Erdoğan, 2013).

İkinci aşama eylem durumu (situation of action), bu durum, oyuncunun oyunu yeni öğrenirken ortaya koyduğu eylemleri ve strateji geliştirme çabalarını ifade eder (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Yeni öğrenen bir oyuncu, deneme-yanılma yöntemlerini kullanarak oyunun kurallarını, mekanizmalarını ve stratejilerini keşfetmeye çalışır. Bu durumda, oyuncu oyun deneyimiyle etkileşim halindedir ve kendi stratejilerini geliştirmek için çaba sarf eder.

Üçüncü aşama ifade etme durumu (situation of formulation), bu durum, oyuncunun bulduğu kişisel stratejileri uygun bir şekilde ifade ederek başkalarıyla paylaşılabilir hale getirmesini ifade eder (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Oyuncu, kendi stratejilerini diğer oyuncularla veya öğretmenle paylaşarak fikir alışverişinde bulunur. Bu durumda, stratejilerin sesli bir şekilde ifade edilmesi ve açıklanması önemlidir, çünkü bu diğer oyuncuların stratejileri anlamalarına ve tartışmalarına olanak tanır.

Dördüncü aşama doğrulama durumu (situation of validation), bu durum, ifade edilen stratejilerin gerçekten doğru ve etkili olup olmadığının test edilmesini ifade eder (Bingölbali ve diğerleri, 2016). Diğer oyuncuların veya öğretmenin geribildirimleriyle, oyuncu kendi stratejilerini değerlendirir ve gerekirse düzeltme veya ayarlama yapar. Bu durumda, oyuncu stratejilerinin etkinliğini sorgular ve geliştirmeye açık olur.

Son aşama olan kurumsallaştırma (institutionalization) Brousseau'nun teorisinde önemli bir kavramdır. Brousseau'ya göre, sınıf bir sosyal yapı ve kurumdur ve bir bilginin kurumsallaştırılması, o bilginin sınıf tarafından kabul edilen bir bilgi haline getirilmesi anlamına gelir. Öğretmen, öğrencilerin üretkenliklerini teşvik ederken, onların geliştirdiği bilgileri değerlendirir ve sınıfın kolektif bilgi tabanına katkı sağlayacak önemli bilgileri belirler (Bingölbali ve diğerleri, 2016).

Kavramsal Alanlar Teorisi

Vergnaud'un Kavramsal Alanlar Teorisi, öznelerin bilgi inşasını kavramların gelişimi üzerine odaklanarak açıklar. Teoriye göre, özneler farklı düzeylerde teoremleri anlayarak ilişkiler kurmalı ve sorunları kavramsallaştırarak bilgiyi inşa etmelidir. Kavramsallaştırma süreci, teorik soruların yanı sıra uzun bir diyalog yoluyla da gerçekleşebilir. Vergnaud'un Kavramsal Alanlar Teorisi, kavramların arasındaki ilişkileri ve ayrılıkları, psikolojik bir kavrama teorisi olarak konumlandırarak incelemeye imkân tanıdığını belirtmiştir. Teori, matematik eğitimi alanında, öğrencilerin matematiksel yeteneklerini arttırmayı hedefleyen ve matematiksel kavramları daha iyi anlamalarını sağlayan yaklaşımdır. Aynı zamanda, bilginin dilsel ve sembolik ifadelerinden fiziksel olanlardan oluşan işlevsel formu arasında daha sıkı ve etkili bir şekilde bağlantılar kurma çabasını vurgulamaktadır (Vergnaud, 2009).

Vergnaud (1996), bir kavramı, bir dizi kavramın bir araya gelerek oluşturduğu ve karmaşık bir sistem olarak tanımlar özneler tarafından yapılandırılan bu kavramlar, öznenin karşılaştığı sorunlu durumlar aracılığıyla ifade edilir, çünkü her kavramın öznenin düşünsel süreçlerine ve pratik ihtiyaçlarına uygun şekilde kullanılabilir olması gerektiği ve gerçek durumlara destek sağlaması ya da "özellikleri ve ilişkileri açısından düşünülmeli veya açıklanmalıdır" düşüncesini yansıtır.

Kavramsal alanlar teorisi, öğrencilerin matematiksel yeteneklerini uzun ve orta vadede artan karmaşıklıkla tanımlamak ve analiz etmek ile operasyonel formlar arasında daha sağlam bağlantılar kurmak gibi iki ana hedefe odaklanan gelişimsel bir teoridir. Bu teori; bilgiyi, fiziksel ve toplumsal dünyadaki eylemlerden oluşan yüklemsel biçimiyle birleştirir. Kavramsal alan çerçevesi, bilginin ilerleyen karmaşıklığına odaklandığından, matematiğin epistemolojisini ve öğrencilerin kavramsallaştırma sürecinin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunabilir, bu da öğretmenlere didaktik durumları ve müdahaleleri daha etkili bir şekilde yönlendirmelerine yardımcı olabilir (Vergnaud, 2009).

Vergnaud'a göre, bir kavramsal alanın geniş bir durum ve kavramlar serisi olarak düşünülmesi gerekir. Kavramsal alanlar arasındaki ayrımın önemine vurgu yapar, çünkü bu alanlar bağımlı olabilir, ancak bunların ayrı olarak düşünülmesi önemlidir. Örneğin, türev alanı, diğer kavramsal alanlarla bağlantılı olabilir, ancak bu alanlar arasındaki farklılıkların anlaşılması gerektiğini belirtir (Cedran & Kiouranis, 2019). Bir kavram alanı, öznenin çeşitli olaylarda uyguladığı ve sosyal olarak tanımlanmış kavramlarla sınırlı olan bir alanı temsil eder.

Kavramsal alanın, bir dizi durumu içeren ve bu durumlar arasında bağlantılar kuran bir sistem olduğunu anlamak, öğrenme ve öğretme süreçlerini analitik bir çerçevede değerlendirmenin önemini vurgular. Kavram sistemlerinin gelişimi, sürekli bir süreçtir ve bu sistemler genellikle kısmi, kırılgan ve tutarsız olabilir, ancak öğrenme sürecinin her aşamasında mevcuttur. Bu durumlar, epistemolojinin önemli olmasını sağlar, çünkü kavramsal alanlar, öğrenme ve öğretme faaliyetlerini anlamak için kullanılan bir çerçeveyi temsil eder (Vergnaud, 2013).

Kavramsal Alanlar Teorisi, öğrenme sürecini ve karmaşık kavramların oluşumunu incelemek için temel prensip etrafında organize edilmiş uygun ve etkili bir çerçeve getiren bilişsel bir teoridir. Teori öğrenme bakış açılarını ele alan bir plan (durum) sunarak aynı zamanda Didaktik Durumlar ile de ilgilidir (Vergnaud, 1990, akt., Otero ve diğerleri, 2015).

Vergnaud (2013) kavramı, birbirinden bağımsız olmayan üç farklı bileşenin bir araya gelmesiyle tanımlamıştır.

Kavram (concept)=(S, I, L)

S (a set of situations): Kavrama anlam veren durumlar kümesidir.

I (a set of operational invariants): Durumlarda ortaya çıkan şemaları birleştiren operasyonel (işlevsel) değişmezler kümesidir.

L (a set of linguistic and symbolic representations): Dilsel ve sembolik temsillerin (cebirsel, grafiksel vb.) kavramların ve ilişkilerinin temsil edilmesine olanak sağlayan cebirsel, grafiksel vb. gibi dilsel ve sembolik temsillerin kümesidir.

Kavramlar, öznelerin deneyimleri, düşünceleri ve sembolik temsiller aracılığıyla şekillenen dinamik yapılar olarak görülür. Bu bağlamda, kavramların anlamı ve işlevi, öznelerin iç dünyalarıyla, çevreleriyle ve sembolik sistemlerle etkileşim halinde olduğu kompleks bir ağın parçası olarak anlaşılır. Kavramlar, sadece öznenin özelliği olan özelliklerden değil, aynı zamanda şemalarda bulunan işlevsel değişmezler gibi durumlarla ilgili bileşenlerden de oluşur. Bu, kavramların öznelerin zihinsel yapılarıyla etkileşim halinde olduğunu ve bu etkileşimin kavramların anlamını şekillendirdiğini gösterir (Vergnaud 2007, 2013).

Vergnaud'a (1998) göre, kavramların oluşumu değişmezler (I) ve durumlar (S) ile ilişkilidir, çünkü kavramlar nesnelerin özellikleri, ilişkileri ve dönüşümleriyle tanımlanır. Bu oluşum süreci, temsiller kümesi (L) tarafından gösterilebilir. Yani, özneler için kavram oluşturma fikri, bu kümelerin (S, I ve L) birlikteliğini ifade eder.

Değişmezler kümesine ait unsurlar, belirli bir kavramın değişmez özelliklerini ve karakteristiklerini temsil eder. Değişmezler kümesi,” bir kavramın veya düşüncenin özünü oluşturan temel unsurları içeren bir küme olarak düşünülür.

Operasyonel değişmezlerin, hedeflerle bağlantılı olarak eylemi içermesi ve ilgili içerikleri durumlara eklemekle ilişkilendirilmesi, bir planın etkinliği üzerinde belirleyici bir rol oynar. Aynı zamanda, çıkarım olasılıklarıyla ilgilenmek, planın sadece belirli durumları değil, aynı zamanda farklı koşullar ve senaryoları ele alacak şekilde esnek ve uyarlanabilir olmasını sağlar. Bu, öznelere geniş bir yelpazede çeşitli durumlarla başa çıkma yeteneği kazandırır.

Operasyonel değişmezler, Piaget'in bilişsel gelişim teorisinde ortaya attığı bir kavramdır. Bu kavram, öznelerin bilişsel süreçlerini ve bilgiyi işleme yöntemlerini açıklamak için kullanılır. Operasyonel değişmezler, öznelerin zihinsel işlemlerini ve mantıksal düşünme yeteneklerini temsil eden belirli kalıplar veya yapılar olarak düşünülür (Vergnaud, 2013). Ayrıca bir kişinin çevresini algılaması, anlaması ve organize etmesi için temel yeteneklerini temsil eder. Bu değişmezler, bilişsel gelişim sürecinde çocukların yaşlarına bağlı olarak farklılaşabilir ve karmaşıklaşabilir. Piaget'e göre, operasyonel değişmezler, öznenin zihinsel yeteneklerinin evrensel bir sıralamasını temsil eder ve bilişsel gelişimde belirli aşamaları işaret eder (Vergnaud, 2013).

Piaget'in şema kavramı, öznenin çevresini anlamak ve deneyimlemek için oluşturduğu bilişsel yapıları temsil ederken, değişmez operasyonlar terimi, öznenin zihinsel işlemlerini karmaşıklaştırma yeteneğini ifade eder (Vergnaud, 2013). Vergnaud'un bakış açısına göre, şemalar sadece Piaget'in şema kavramından farklı bir anlam taşımakla kalmaz, aynı zamanda matematiksel şemaların yanı sıra açıklayıcı, sözel ve sosyal şemalar gibi çeşitli türleri içerir. Bu, şemaların geniş bir yelpazede bilişsel süreçleri ve bilgi türlerini içerdiğini vurgular. Bu çeşitlilik, öznelerin farklı alanlarda etkili bir şekilde düşünmelerini ve öğrenmelerini sağlar (Cedran & Kiouranis, 2019).

Şemalar, belirli bir durumu veya süreci görselleştirmek ve anlamak için kullanılan organizasyonlu yapılar olarak düşünülür (Vergnaud, 2013). Şemaların, belirli durumlarla karşılaşıldıkça değiştiği, ancak davranışların organizasyonu karşısında değişmez olduğu belirtiliyor. Bir durumu anladığımızda, şemalar etkili bir şekilde devreye girer ve o durumu çözmek için gerekli olan şemalar aktive olur (Vergnaud, 1996). Bu perspektif, şemaların esneklik sağlayarak durumlara uyum sağlamak ve çeşitli koşullar altında etkili bir şekilde kullanılmak üzere organize olduğunu vurgular. Var olan şemalar, yeni durumlara uyum sağlamak için uygun hale getirilir veya geliştirilir. Ancak bir şema gelişimi için belirli bir durumun gerekli olduğu, düşüncenin değişmez biçimlerinin genellikle yazılı veya sözlü olarak bilgi paylaşımının ve iletişiminin sunulmasıyla anlaşılabilir. Bu bağlamda, operasyonel değişmezlik kavramı, kavramın durumunu tamamlayarak şemalardaki bilgiyi şekillendirir (Vergnaud, 1996).

Vergnaud'a (2013) göre, bir planın temel işlevleri, tanıdık durumları düzenlemek ve yönetmekle kalmaz, aynı zamanda alışılmadık durumları ele almak ve bu durumlarla başa çıkmaktır ve böylece planın daha başarılı ve amacına uygun bir şekilde çalışmasını sağlayarak sonuçları genişletmektir. Bu sayede, şemalar çeşitli durumlara uyum sağlar ve bilişsel gelişim sürecinde farklı türdeki durumlara da uygulanabilir hale gelir.

Durumlar ve şemalar birbirini tamamlayan kavramlardır. Her ikisi de birbirinden ayrı düşünülemez ve birbirlerine bağlıdır. Durumlar, şemaların içeriğini oluşturur, şemalar ise durumların anlamını şekillendirir. Öğretmenlerin eğitim sürecinde sundukları durumların seçimi, öğrencilerin kavramsal anlayışını ve şemalarını geliştirmelerine yönlendirici bir etki sağlar. Bu, öğrencilerin daha derinlemesine anlamalarını ve öğrenmelerini destekler.

Temsil süreçleri, öznelerin düşüncelerini ifade etmelerini, bilgiyi başkalarına aktarmalarını veya zihinsel süreçlerini sembolik biçimde organize etmelerini sağlar. Bu süreçler, genellikle doğal dil, matematiksel semboller, resimler veya diğer sembolik araçlar kullanılarak gerçekleştirilir. L kümesi, zihinsel olarak iki nesnenin ve durumun oluşturulması yoluyla yapılır. Bu oluşum süreci, kavramın anlamlandırılmasına ve tasvir edilmesine yardımcı olduğunu ifade eder. Bu tür durumlar, problemin özelliğine bağlı olarak daha spesifik bir dilin kullanılmasını gerektirir. Dolayısıyla, temsiller kümesi (L), değişmezler kümesiyle (I) yakından ilişkilidir (Cedran & Kiouranis, 2019).

Vergnaud'un temsil konusundaki perspektifi, temsilin sadece nesneleri göstermekle kalmayıp aynı zamanda kavramlar sistemiyle şekillendiğini vurgular (Vergnaud, 2007). Bir nesneden söz etmek veya figürlerle temsil etmek, bu kavramlar sisteminin resmileştirilmesini gerektirir. Resmileştirme süreci, hem epistemik bileşenleri hem de operasyonel değişmezleri içerir ve öznelerin eylemleriyle etkileşim içindedir. Temsil, açık ya da örtülü olabilir ve bu durum, öznelerin deneyimlerine, eylemlerine ve değişmezlere bağlıdır. Bu anlamda, temsilin sembol veya dil türlerinden oluşan bir yönü olduğu belirtilir, bu da öznelerin nasıl düşündüğünü ve anladığını anlamak için geniş bir perspektif sunar. Vergnaud'a göre, bir temsil, gösterenler ve anlamların bir sistemidir. Kavrama anlam veren unsurlar yalnızca durumlardır ve olayların kendisinde doğrudan bir anlam bulunmaz. Anlam, kelimelerin içindeki sembollerde değil, sadece özne, durum ve gösterenler arasındaki ilişkide bulunur (Cedran & Kiouranis, 2019).

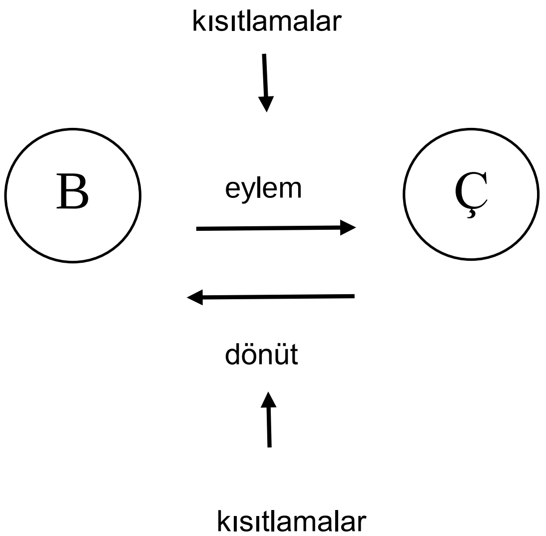
cK¢ (Conception, Knowing, Concept)

Balacheff (2017), Didaktik Durumlar Teorisi ve Kavramsal Alanlar Teorisine dayalı olan ck¢ teorisini; öğrenci anlamalarını, bilişsel model sunmak amacıyla değil öğrenci ile ortam arasındaki etkileşimleri göstermek ve karakterize etmek amacıyla geliştirilmiştir. Didaktik bir bakış açısıyla – “Bir öğretim durumunun modellenmesi; eğitim sistemi, öğrenci sistemi, ortam gibi farklı alt sistemler arasında hedef bilgiye özgü bir oyun üretmekten oluşur” (Brousseau, 1997 s.47). Bu yaklaşımda, öğretmenin kendisinin de eğitim sistemi içinde bir oyuncu olduğu üzerinde durulmuştur ve öğrenenin kavramların alt yapılarını nasıl oluşturduğu, öğrenmeyi nasıl geliştirdiğini ayırt etmede sınırlılıklar vardı (Balacheff, 2013). Balacheff bu sınırlılıkları kaldırmak, öğrencinin öğrenme süreçlerini belirlemek, öğrenmenin gerçekleşmesi için yapılan tüm eylemlerdeki öğrenci anlayışlarını belirlemek ve analiz etmek için cK¢ teorisini geliştirmiştir.

Brousseau (1997), bir kavramı öğrenmeyi, ne sadece öğrenene ne de çevreye bağlamıştır. Öğrenme; özne ile çevrede yaşayabileceği olumlu ya da olumsuz tüm eylemler arasındaki etkileşimin dengeye gelmesidir. Didaktik durumlar teorisinde kavramlar, durumlar üzerinden detaylı bir şekilde açıklamıştır ve durumlar ortam kavramı üzerine inşa edilmiştir. Buna dayanarak Balacheff ve Gaudin (2002), anlayışı özne çevre arasındaki bazı kısıtlamalar altındaki eylem-dönüt sisteminin dinamik denge haline gelmesi olarak tanımlamıştır.

Şekil 1

Bilmenin betimlemesi (Balacheff, 2010, s.125 'den uyarlanmıştır)



Öğrenciler sahip oldukları bilgi ve kavramlardan farklı bir durumla karşılaştıklarında soruyu yanıtlarken çelişkiler ve başarısızlıklar meydana gelebilir. Bu durum genellikle farklı problem durumlarında işe yarayan bilgi ve kavramları harekete geçirirken sistematik bir şekilde hata yapmakla ortaya çıkar. 80'lerdeki klasik düşünce, bu hatalar kavram yanılgıların belirtileri olarak değerlendirildi. Kavram yanılgıları, öğrencilerin bir konu, kavram veya durum üzerinde kabul edilen evrensel gerçeklerden farlılık gösteren algılamalardır. Hata ise öğrencinin bilmeden ve fark etmeden gerçekleştirdiği yanlışlardır. Bir bilgi hatalı, eksik veya uyumsuz olsa bile öğrenci ortam sisteminin yeterlilik ve etkililik ölçütleri altında gerçekleşen dinamik bir dengenin sonucudur (Balacheff, 1995).

" Bir çocuğun bir öğretmen, araştırmacı veya uzmanla aynı olaylar kümesini göremeyebilir […] birçok kez çocuğun tepkisi çok çabuk hatalı olarak etiketleniyor ve […] eğer çocuğun durumu nasıl anlamlandırdığı hayal edilirse, o zaman hataların mantıklı ve desteklenebilir olduğu görülecektir" (Confrey, 1990, s.29). Balachef bu görüşe katılarak "kavram yanılgıları" terimini kullanmaktan vazgeçiyor. Öğrencilerin aynı problem durumunda sahip oldukları farklı ve çelişkili davranış modelleri vardır. Öğrenci davranışlarının gözlemlenmesindeki zorluklar nedeniyle ‘bilgi’ ifadesinden farklı bir ifadeye ihtiyaç duyulmuştur ve bunun yerine ‘anlayış’ ifadesi kullanılmıştır (Balacheff, 2017). “anlayış” daha çok uygulamalı bilim eğitimlerindeki teori çalışmalarından bahsetmek için kullanılan bir ifadedir. Anlayış sözcüğü bu çalışma alanlarında nesne olarak alınmamıştır, daha iyi temellendirilmiş bir bilgi için kavramların tanımı ve bunların farklılıklarını ve benzerliklerini analiz etmeye olanak tanıyan araçlar olarak işlev görmüştür.

“ Anlayış” matematik öğretiminde yapılan çoğu araştırmalarda yıllarca üzerinde durulmuş ve açıklanmaya çalışılmıştır. Ancak anlayış bilmeler için bir araç işlevi görür ve üstü kapalı olarak değinilmiştir. Aslında epistemolojik durumuna bakıldığında kavram yanılgıları ile aynı kökene sahiptir (Artigue, 1991, akt., Balacheff 2002). Balacheff ve Gaudin (2002) anlayışları tanımlarken kavram yanılgılarının yetersiz kalacağını ve iyi konumlandırılmış şekilde analiz edilmesi gerektiğini söylemişlerdir. Kavram yanılgıları sadece yanlış cevaplara götürmez, bazı kısıtlamalar altında doğru sonuca da ulaştırabilir. Kavram yanılgılarının doğru ve geçerli olduğu alanlar da vardır. Örneğin, öğrencilerin, “Sürekli fonksiyonların bir dizisi sürekli bir limite sahiptir” şeklinde fonksiyonların belirli özelliklerini korunduğuna dair yaygın bir kavram yanılgısı vardır. Bu bilgi genellikle hatalı sonuçlar verir. Ancak düzgün yakınsaklık koşulu altında bu yanılgı doğru ve geçerli bir bilgiye dönüşür (Balacheff, 2002).

Artigue (1992, akt. Balacheff, 2002) verdiği bir örnekte ise “ x sonsuza giderken f(x)’in sonlu bir limiti varsa, $f'(x)$ sıfıra gider”.

> Bahsedilen yanlış teoremin "böyle bir ekstra hipotezin somut örneği olarak görülebileceği" sonucuna varır: yeterince büyük x için, f' monotonsa, f' zorunlu olarak bir limite (sonlu olsun ya da olmasın) ve yatay asimptot 0 ile uyumlu benzersiz bir limite sahiptir. Yani f' monotonik koşulu eklendiğinde bu yanlış teorem doğru olur”

Burada öğrenen, problem çözme durumunda yaptığı hataların makul bir şekilde açıklayarak çevre ile etkileşimini denge durumuna getirebilir. Yani bu şekilde hatalar öğreten tarafından çürütülerek öğrenme gerçekleştirilebilir. Bu yüzden anlayışlar öğrenme sürecinde doğru ya da hatalı eylemlerin tümüdür (Balacheff, 2000; Balacheff & Gaudin , 2002). Öğrencilerin anlayışlarına dair bilgi edinmenin yolu, onların anlayışlarının sonucu olan davranışlarını ve ortaya koydukları her türlü düşünceleri incelemektir. Bu tür incelemeler ve değerlendirmeler gözlemlenen davranışlar ile anlayış arasında geçerli bir ilişki kurulabildiği takdirde mümkündür ve sonuçları anlamlıdır. Davranış öğrencinin çevresi ile olan ilişkinin somut göstergesidir ve öğrencinin özelliklerine bağlı olduğu kadar çevresinin özelliklerine de bağlıdır (Balacheff, 2017)

Balacheff (1995) çıkarmak istediği anlamı; bir anlayışın doğru bilgilerden, hatalardan ve engellerden kendi içinde oluşması için çevresi ile dinamik denge durumuna getiren tüm düşünce sistemidir diye tanımlamıştır. Balacheff (2000) anlayış, bilme ve kavram arasındaki ilişkiyi şöyle yorumlamıştır; bilme, anlayışların oluşturduğu, kavram ise bilmelerin oluşturduğu kümelerdir. Örneğin; kesirler kavramı ile ilgili anlayışların bilmeleri ve bu bilmeler de birleşerek formal kesirler kavramını oluşturmaktadır. Bundan dolayı bizde çalışmamızda anlayış kavramı üzerinde duracağız.

Anlayışları iyi bir şekilde incelemek ve analiz etmek için araçlara ihtiyacımız vardır. Balacheff ve Gaudin (2002) cK¢ modelinde anlayışın aşamalarını 4 bileşenle ifade etmiştir.

Bu modelde anlayış C;

P: Problemler kümesi

R: Operatörler kümesi

L: Temsil kümesi

∑: Kontrol yapısı olmak üzere C(P,R,L, ∑) dörtlüsü olarak göstermiştir.

Balacheff anlayışın ilk üç bileşenini neredeyse doğrudan Vergnaud'un Kavramsal Alanlar Teorisinden almıştır. Sadece psikolojide kullanılan ifadelerle karışmaması için farklı ifadeler kullanmıştır. Operatörler, öğrenen/ortam sisteminin işleyişinde gözlemlenebilen eylemlere karşılık gelir; psikolojik açıdan şemalar değillerdir. Temsil sistemi, problemlerin ve formülleştirme geren operatörlerin temsiline izin veren, etkileşimi destekleyen tüm gösterim araçlardan oluşur (Balacheff, 2013).

Vergnaud'un modeliyle arasındaki iki temel fark “Durum” yerine “problem” teriminin kullanılması ve “kontrol yapılarının” açıkça belirtilmemesidir. Burada “problem” anlamı “Durum” dan daha dardır. Problemin içinde bulunan geniş eğitimsel, kurumsal veya maddi bağlamı değil öğrenci ile ortam arasında gerçekleşen rahatsızlıkların sonuçlarını ifade eder. Problem kümesini oluşturmada iki fikir üzerinde durulmuştur: (i) anlayışın etkili bir şekilde sağlandığı tüm problemleri dahil etmek (Vergnaud, 1991) ancak temel kavramlar için etkili olmayacak kadar geneldir; (ii) diğer problemlerin türetileceği sonlu bir problemler kümesini dikkate almak (Brousseau, 1997), ancak herhangi bir anlayış için böyle üretken bir problemler kümesini tespit etme sorununu ortaya çıkartır. Belli kavramlar üzerinde çalışırken oluşturulan Problemler kümesi hem öğrencilerin belirli durumlardaki gözlemlerinden hem de matematik uygulamalarının analizlerinden türetilmesi ile bir nevi Brousseau'nun önerisinin pragmatik bir uygulaması olarak çalışmaktadır.

Çoğu problem bir anlayışı harekete geçirerek çözülemez. Bu genel nitelemeden, bir anlayışın bir soruna özgü olduğunu (onu çözen herhangi bir kavram dizisi bu kavramı içerir) veya anlayışların bir problem çözme bakış açısıyla eşdeğer olduğunu ifade etmek gibi daha belirgin özellikler türetilebilir. Bu da problemler ve anlayışlar arasında çift yönlü bir yapıya sahip olduğunu gösteriyor. Anlayışlar, tanımlamalarının bileşenleri olarak problemlere ihtiyaç duyarken problemler anlamlarını, çözümlerine katkıda bulunan anlayışlardan alıyor (Balacheff, 2013).

P problemler kümesi; anlayışların uygulanacağı sorular kümesidir (Balacheff & Gaudin, 2002). Yani anlayışların anlam kazanacağı problemlerin oluşturduğu küme olarak ifade edilebilir. Örneğin; “ondalık sayılar toplanırken virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır ve virgül ile ayrılır” anlayışının gerçekleşeceği problem kümesi ondalık sayılarda toplama işlemidir (Çalık Uzun, 2012). Problem kümesini oluştururken bir seçenek anlayışın uygulanacağı tüm soruları ele alırken, diğer bir seçenek problemlerin birbirlerinden türeyebileceği sonlu bir küme oluşturmaktır. Fakat bu seçenek her anlayış için yapılabilecek problem kümesi oluşturulabileceğini açıklamamaktadır (Balacheff & Gaudin, 2002).

R operatörler kümesi; problemleri çözmek için kullanılan, özne ile çevre arasındaki ilişkileri elde etmek için yapılan tüm eylemlerin aracı olarak ifade edilebilir. R, öğrenen ile ortam sisteminin işleyişi sırasında gözlemlenebilen davranışlar tarafından somutlaştırılan eylemlere karşılık gelir (Balacheff, 2017). Operatörler, argümanın mantıksal yapısını oluşturan ve argümanı desteklemek veya güçlendirmek için kullanılan unsurlardır. Ancak, eylem kavramı, sadece bir faaliyetin fiziksel gerçekleşmesini ifade etmez, aynı zamanda bu faaliyetin bilinçli bir iradeyle gerçekleştirilmesini içerir. Dolayısıyla, operatörlerin tanımlanması, argüman analizi sürecinde, argümanın mantıksal yapısını oluşturan ve argümanın güçlendirilmesine veya zayıflatılmasına katkıda bulunan belirli bileşenlerin belirlenmesine odaklanır. Dolayısıyla, operatörlerin tanımı, sorunları dönüştürme yeteneğini vurgulamanın yanı sıra, öznenin eylemlerini gerçekleştirmesine izin verme yeteneğini de içerir. Bu, operatörlerin, öznenin problem çözme sürecinde etkili bir şekilde hareket etmesine yardımcı olan önemli araçlar olduğunu vurgular.

Balacheff ve Margolinas (2005) tarafından operatörlerin tanımı, sorunların dönüştürülmesine izin veren unsurlar olarak belirtir. Bu, operatörlerin, öznenin belirli bir sorunu çözmek veya belirli bir hedefe ulaşmak için eylemlerde bulunmasına olanak tanıdığını ifade eder. Öznenin belirli bir hedefe ulaşmak için operatörleri kullanması, problem çözme sürecinde kritik bir rol oynar.

Operatörler çözümün direkt yapılmasına izin veren “somut” nesne olabileceği gibi, sözel, sembolik veya grafiksel temsillere uyarlamaya izin veren “soyut” tanımlar hatta teoremler de olabilir (Balacheff & Gaudin, 2002) (Bkz. Tablo 1 ve Tablo 2). Örneğin, “(Eğer) $f : R \rightarrow R$ fonksiyonunda $\forall\ x \in R$ için $f\ (x) = a$ ise f fonksiyonu sabit fonksiyondur” ifadesi operatöre örnek verilebilir (Çalık Uzun, 2012).

Anlayışın üçüncü bileşeni olan L temsil kümesi, öğrenen ile çevre arasındaki etkileşimde kullanılan, etkiyi dönütü ve çözümleri destekleyen, operatör ve problem kümesinde olan her türlü cebirsel dil, matematik yazılımlar, grafik, sembol, simge vb. gösterimlerden oluşan kümedir (Balacheff & Gaudin, 2002) (Bkz. Tablo 5 ve Tablo 6). Temsiller sistemleri, operatörlerin belirlenmesini, problem çözümlerinin formüle edilmesini, değerlendirmek ve doğrulamak için kontrollerin oluşturulmasını sağlayan sembolik veya dilsel gösterimlerin oluşturur (Balacheff & Margolinas, 2003). Örneğin, bir öğrenci cebirsel bir ifadeyi çözerken, matematiksel ifadelerin sembollerle ifade edildiği bir temsil sistemi kullanır ve bu temsil sistemi ona işlemleri gerçekleştirme ve problemi çözme yeteneği sağlar. Örneğin; $R \rightarrow R$, $\forall x \in R$ gibi ifadeler operatörleri, problemleri veya kontrol yapılarını oluşturan modeller yani temsillerdir.

Anlayışın son bileşeni olan $\sum$ kontrol yapısı, öğrencinin problemi çözerken yaptıkları işlemleri doğrulamak, özne ile ortam döngüsünün dinamik dengeye ulaşıp ulaşamadığını yani öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini denetlemek, karar almak ve yargıda bulunmak için gerekli tüm araçlardır (Balacheff & Gaudin, 2002). Bir kontrol yapısı, öznenin eylemlerinin geçerliliğini veya bir sürecin sonlandırılmasını yargılamayı mümkün kılar. Ancak, bu terim aynı zamanda, tahminlere, strateji geliştirmeye veya sıralamanın geçerliliğine ilişkin bir değerlendirme yapmayı da içerir. Temelde, kontrol yapısı, farklı kontroller arasındaki ilişkileri ve bu kontrollerin öznenin hedeflerine ulaşma sürecinde nasıl etkileşime girdiğini tanımlar.

Kontrol yapısı, öğrenenin gerçekleştirdiği eylemlerin doğruluğunu göstermeyi, öğrenene geri bildirim vermeyi, dahası öğrenen, çevre ve problem boyutlarını dikkate alarak matematiksel kanıtı tanımlamamızı sağlar (Balacheff, 2010). Bu, matematik öğrenme sürecinde öğrencilerin karşılaştığı sorunların nasıl ele alınacağını, hangi adımların atılacağını ve hangi kontrollerin uygulanacağını belirleyen bir yapıdır. Kontrol yapısı, öğrenme sürecinde öğrencinin eylemlerini yönlendirir ve doğruluğunu değerlendirir. Öğrencinin her adımda ne kadar doğru olduğunu değerlendirerek, öğrenenin ilerlemesini izlemeyi ve gerektiğinde geri bildirim almayı sağlar. Kontrol yapılarındaki matematiksel terimler, bilmek ve kanıtlamak arasındaki bağları güçlendirirken problem çözümünün kanıtına geçiş sağlar (Pedemonte & Balacheff, 2016). Anlayışları oluşturan operatörler matematiksel bir kuralın uygulamasına karşılık geliyorsa, bu kural kanıtta bir teorem ile yer değiştirilebilir (Pedemonte, 2005). Yani bu operatörler kontrol yapılarıyla örtüşür ve kontrol yapısı görevini üstlenir (Bkz. Tablo 3 ve Tablo 4). Ancak bu operatörler matematiksel olarak geçerli değilse bunu yapmak mümkün değildir. Öğrencinin problem çözme sürecinde geliştirdiği anlayışları ve yaptığı tüm eylemlerin doğruluğu kontrol yapısı ile gösterilir.

Tablo 1

Toplama Kavramına İlişkin Dört Örnek (Balacheff, 2013, s.7'den uyarlanmıştır)

C1: Sözlü olarak Sayma Anlayışı P1: "5 silgin var, sana 4 tane daha silgi veriyorum, şimdi kaç tane silgin var? R1: Parmaklar ile nesneleri eşleyin, nesnelerle işaret ederek parmakları ile sayı adlarını eşleştirin. L 1: Vücut dili (parmak ile sayma, işaret etme), sayı adlandırma, sözlü sayma. Σ 1: Bir nesneyi iki kere saymaz, tüm nesneleri sayar, sayı adlarının sırası.
C 2: Parmak ile hesaplama Anlayışı P2: "16 silgin var, sana 4 tane daha silgi veriyorum, şimdi kaç tane silgin var? R2: Büyük olan sayıyı seçin ve ekleyerek devam edin. L2: Vücut dili (parmak ile sayma), sayı adlandırma, sözlü sayma. Σ2: sayı adlarının sırası, sayı adlarıyla parmakların eşleşmesi.
C3: Yazılı olarak toplama Anlayışı P3: iki tam sayının toplanması ile ilgili sorular. R3: Elde gerektirmeyen toplama işlemi. L3: Sayıların basamak şekli ile gösterimi Σ3: Toplama işlemini kontrol edilmesi, sayıların basamaklarının kontrol edilmesi
C4:Hesap makinesi Anlayışı P4: İki tam sayının toplanması (sonuç ekranın boyutu ile sınırlı olmalı) R4: Sayıları söylemek ve sayıları toplamak için tuşa vurmak. L4: Vücut dili (tuşlara vurma), sayıların basamak şekli ile gösterimi Σ4:Büyüklük sırasına göre sayıların doğru bir şekilde basıldığının kontrol edilmesi.

Tablo 2

Thomas'ın çalışmasındaki örnek tablo (Vittori, 2018, s.133'den uyarlanmıştır)

	Quipu ve büyük sayılar	
P	Büyük sayıların yazmak için iletilmesi (örneğin muhasebe verilerinin arşivlenmesi için örnek vermek)	
	Quipu (Rq, Lq, Σq)	Çağdaş sayı sistemi (Rç ,Lç, Σç)
R	Birimlere, onlara, yüzlere, binlere, milyonlara ve milyarlara cebirsel ayrıştırma yapar; herhangi bir sıralamada birimleri ekler veya çıkarır; rakam ekler veya kaldırır.	Birler, onlara, yüzlere, binlere, milyonlara, milyarlara düğüm ekleme veya kaldırma yoluyla ayrıştırma yapar, düğüm türünü değiştirir, ip ekler veya kaldırır.
L	Okulun ondalık sayı sistemini kontrol etme, şifre yazma, sayıların sözlü olarak belirtilmesi.	Halatlardaki düğmelerle inkaların sisteminin listelenmesi.
Σ	Akran okuma/yazma karşılaştırır, kod çözme doğruluğunu kontrolünü sağlar.	Renklerin kullanımının, farklı tellerin hizalanmasının (konum karşılaştırmasının) kontrolünü sağlar.

Pedemonte ve Balacheff (2016) yaptıkları çalışmada sunulan problem ve iki grup öğrencilerin oluşturdukları ck¢ modeli öğeleri şunlardır;

Problem:" Çapı AB olan bir daire çizin. AB'yi AC ve CB olmak üzere iki eşit parçaya ayırın. Sonra AC ve CB çaplarında iki daire çizin... ve böyle devam edin. Çevre her aşamada nasıl değişir (aynı inşaat seviyesindeki çevrelerin toplamı dikkate alındığında)? Alan nasıl değişir (aynı yapı seviyesindeki tüm dairelerin alanlarının toplamı dikkate alındığında)?"

Nicola ve Stefano' nin anlayışları;

Tablo 3

Bettina ve Nicolas'ın yaptığı çalışmadaki Nicola'nın anlayışı (Pedemonte & Balacheff, 2016, s.115'den uyarlanmıştır)

	Nicola'nın anlayışı
R	Alan formülü, hesaplama kuralları, Cabri Geometri ölçüm araçları
L	Geometrik çizim, Cabri Geometri özellikleri, sembolik formüller, sembolik yazının sözdizimi
Σ	r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ formülü ile verilir; ortak tema: Bir şeklin ve ölçülen özelliklerinin açılımı uyumlu olmalıdır.

Tablo 4

Bettina ve Nicolas'ın yaptığı çalışmadaki Stefano' nin anlayışı (Pedemonte & Balacheff, 2016, s.115'den uyarlanmıştır)

	Stefano' nin anlayışı
R	Alan formülü, hesaplama kuralları, Cabri Geometri ölçüm araçları
L	Geometrik çizim, Cabri Geometri özellikleri, sembolik formüller, sembolik yazının sözdizimi
Σ	Ortak tema: genelleme ilkesi (r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ formülü ile verilir, r yarıçaplı n tane daireden oluşan her bir eğrinin alanı $A = n * \pi r^2$ formülü ile verilir.)

Nicola ve Stefano yarıçapın her defasında yarıya bölündüğünü ve her eğri için daire alanlarının toplamı bir önceki daire alanlarının yarısıdır genellemesine ulaşıyorlar. Çevre hesaplarken de benzer bir yol izlediler. Bu üç durumda da çevrenin aynı olduğunu gördüler ve Cabri Geometri'nin ölçüm aracıyla hesaplamalarını doğruladılar. Bu davranış, öğrendikleri kavramlardaki anlayışların sembolik bir aritmetik oluşumda olduğunu doğrular.

Vincent ve Ludovic'in anlayışları;

Tablo 5

Bettina ve Nicolas'ın yaptığı çalışmadaki Vincent'in anlayışı (Pedemonte & Balacheff, 2016, s.119'den uyarlanmıştır)

	Vincent'in anlayışı
R	Çevre formülü, hesaplama kuralları, Cabri Geometri ölçüm araçları
L	Geometrik çizim, Cabri Geometri özellikleri, sembolik formüller, sembolik yazının sözdizimi
Σ	Ortak tema: Cebirsel manipülasyona dayalı korunum ilkesi.

Tablo 6

Bettina ve Nicolas'ın yaptığı çalışmadaki Ludovic 'in anlayışı (Pedemonte & Balacheff, 2016, s.119'den uyarlanmıştır)

	Ludovic 'in anlayışı
R	Çevre formülü, hesaplama kuralları, Cabri Geometri ölçüm araçları
L	Geometrik çizim, Cabri Geometri özellikleri, sembolik formüller, sembolik yazının sözdizimi
Σ	Uzamsal-grafik oluşumunda deneysel doğrulamalar.

Vincent ve Ludovic hiç tereddüt etmeden her eğrinin alanın bir önceki eğrinin alanının yarısı olduğunu ve sıfıra yaklaştığını söylemişlerdir. Yine çevre hesaplarken de aynı metotları kullanarak çevrenin aynı kaldığını doğrulamışlardır

Balacheff (2017) çalışmasında fonksiyon kavramının farklı anlayışlarını ck¢ modeline göre analiz etmiştir;

Tablo 7

Fonksiyon kavramının tablo anlayışı (Balacheff, 2017, s.11'den uyarlanmıştır)

	Tablo anlayış (Table conception) $(\mathrm{P_T}, \mathrm{R_T}, \mathrm{L_T}, \Sigma_\mathrm{T})$
$\mathrm{P_T}$	Fizik ve astronomiden kaynaklanan sorunlar
$\mathrm{R_T}$	Oran ve tam sayıların hesaplanması, geometri
$\mathrm{L_T}$	Sayısal tablolar, eğrilerin geometrik gösterimi, sayılar, doğal dil
Σ_T	Hesaplama ile gerçek verileri karşılaştırma

Tablo 8

Fonksiyon kavramının eğri anlayışı (Balacheff, 2017, s.11'den uyarlanmıştır)

	Eğri anlayış (Curve conception) $(\mathrm{P_C}, \mathrm{R_C}, \mathrm{L_C}, \Sigma_\mathrm{C})$
$\mathrm{P_C}$	Eğrilerin noktaların oluşturduğu yörüngeleri (iz) olarak incelenmesi
$\mathrm{R_C}$	Cebirsel araçlar (Euler'den beri) ve çizimlerin manipülasyonu
$\mathrm{L_C}$	Eğrilerin temsili (henüz grafik değil), cebirsel temsil ve doğal dil
Σ_C	Matematiksel ve deneysel doğrulama, zihinsel deneyler

Tablo 9

Fonksiyon kavramının analitik anlayışı (Balacheff, 2017, s.12'den uyarlanmıştır)

	Analitik anlayış (Analytic conception) $(\mathrm{P_A}, \mathrm{R_A}, \mathrm{L_A}, \Sigma_\mathrm{A})$
$\mathrm{P_A}$	Fonksiyonların incelenmesi (nesneler olarak)
$\mathrm{R_A}$	Cebirsel araçlar
$\mathrm{L_A}$	Cebir, grafikler
Σ_A	Matematiksel kanıt

Kanıt Ve Kanıt Şemaları

Harel ve Sowder (2007), matematikçiler tarafından kesin ve doğru bilgi şeklinde ifade edilen “kanıt” terimini kişi yada topluluğu hakikat ile ikna eden şey olarak tanımladıklarını belirtmişlerdir.

Bu tanıma göre kanıt çok küçük yaşlardan itibaren matematik müfredatında kullanılan etkinliği ifade eder. Kanıtın anlamı, doğrulanma şekli ve gerekçelendirmeleri kişiden kişiye değişiklik gösterir. Böylece öğrenme öğretme sürecinde benimsenen felsefi görüş büyük önem taşır. Kanıt yapılırken, kavram bütünlüğü korunarak bir kişi tarafından ikna edici argüman, mevcut bilginin üzerine inşa edilir. Bu nedenle kanıt süreci, kanıt şemalarının merkezini oluşturur ve matematiksel, bilişsel, tarihsel faktörlere bağlı değişiklik gösterir (Harel & Sowder, 2007).

Kanıt matematikte temel bir unsurdur ve matematiksel düşünmenin merkezinde yer alır. Bir kanıt, bir matematiksel iddianın doğruluğunu göstermek için kullanılan mantıksal bir argümandır (Knapp, 2005). Matematik camiasında, bir teoremin doğru olduğunu göstermek için kabul edilebilir bir kanıt sunulması önemlidir. Kanıt, bir teoremin sadece bir iddia olmadığını, aynı zamanda doğruluğunun belgelenmiş olduğunu gösterir (Knapp, 2005). Matematikçiler arasında belirli bir kanıtın kabul edilebilirliği veya kanıtın yeterliliği konusunda farklı görüşler olabilir, ancak genel olarak kanıtların kesin ve mantıksal olarak tutarlı olması beklenir. Kanıtların yazılması ve anlaşılması, matematikçiler arasında bilgi alışverişini, tartışmayı ve ilerlemeyi sağlar (Knapp, 2005). Ayrıca, yeni kanıtların oluşturulması ve mevcut bilginin genişletilmesi için önemli bir araçtır. Formal bir kanıt üretmek genellikle disiplinler arası bir yaklaşım gerektirir. Bir matematiksel kanıt oluştururken, konu alanındaki bilginin yanı sıra mantık yasaları, tümdengelimli akıl yürütme ve matematiksel sembollerin kullanımı gibi mantıksal ve matematiksel araçları da kullanmak gerekir (Knapp, 2005).

Öğrenciler genellikle bu süreçte çeşitli zorluklarla karşılaşabilirler. Bunlar arasında, matematiksel içeriğin karmaşıklığı, mantıksal akıl yürütmenin doğru kullanımını anlamak, kanıtlama sürecinin titizliği ve doğruluğu, dil sorunları ve yazım kurallarına uygunluk gibi konular bulunur. Ayrıca, düşünceleri net bir şekilde ifade etmek ve kanıtları yazılı olarak düzenlemek de önemlidir. Knapp (2005) yaptığı çalışmada; kanıt sürecinde öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları iki kategoriye ayırmıştır.

İlk kategori, öğrencilerin kanıtın mantığı, dili ve kültürüyle ilgili zorluklarla başa çıkmak zorunda oldukları kategoridir. Bu, öğrencilerin kanıtın nasıl yapıldığına dair kavramsal anlayışlarını geliştirmelerini gerektirir. Matematiksel kanıtların formal mantığı, kullanılan dil ve semboller, belirli bir topluluğun matematik kültürü ve beklentileri gibi konular bu kategoriye girer. Öğrenciler, kanıtın gerektirdiği mantıksal akıl yürütme sürecini anlamakta zorlanabilirler ve matematiksel ifadeleri doğru bir şekilde yorumlamakta güçlük çekebilirler. İkinci kategori ise, öğrencilerin alanın içeriğiyle ilgili zorluklarla karşılaştıkları kategoridir. Bu, öğrencilerin belirli bir matematiksel alanda tanımlar, teoremler, kanıt yöntemleri ve örnekler oluşturma becerilerini geliştirmelerini gerektirir. Öğrenciler, belirli bir matematiksel konseptin içsel yapısını anlamakta zorlanabilirler ve bu nedenle kanıtın temelini oluşturan bilgi eksikliğiyle karşılaşabilirler.

Kanıt algıları, düşünme ve muhakeme yeteneklerinde belirleyici bir rol oynar ve ürettikleri kanıt türlerini etkiler. Kanıt algıları, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini nasıl şekillendirdiklerini ve matematiksel iddiaları nasıl doğruladıklarını anlamamıza yardımcı olur (Knapp, 2005).

Öğrencilerin kanıt algıları, matematiksel iddiaların doğruluğunu nasıl sınadıklarını ve bu iddiaların kanıtlanmasında nasıl bir yol izlediklerini belirler. Bazı öğrenciler, bir kanıtın tamamen mantıksal bir akıl yürütme süreci olduğunu düşünebilirken, diğerleri kanıtın daha sezgisel veya görsel yönlerinin de olduğuna inanabilirler. Bu algılar, öğrencilerin hangi kanıt türlerini tercih ettiklerini ve hangi stratejileri kullandıklarını etkileyebilir.

Matematiksel kavramların öğrenci tarafından anlaşılması, yorumlanması ve matematiksel muhakemenin gerçekleşmesi için gerekli ortam hazırlanmalıdır. Bunu yaparken öğrencilerin kavram yanılgıları belirlenmeli ve kavramlara ilişkin anlayışları incelenmelidir. Öğrencilerin matematik ile ilgili anlayışlarının gelişmesi için argümanlarını değerlendireceği stratejiler gereklidir (Ko & Knuth, 2013). Öğrenciler genellikle bu stratejileri belirlerken ne yapacaklarını bilmedikleri için zorlanırlar ve başarısız olurlar. Bu başarısızlıklarını gidermek için kanıt sürecindeki anlayışlarını inceleyerek öğrencilerin bilgilerini nasıl kullandıklarına da bakılmalıdır (Weber, 2001). Matematik eğitiminde, özellikle daha erken yaşlardan başlayarak, kanıt kavramı genellikle daha basit ve somut örneklerle sunulur. Öğrencilere bir iddiayı doğrulamak veya çürütmek için mantıklı bir argüman sunma becerisi öğretilir. Bu süreç, öğrencilere mantıklı düşünme, problem çözme ve eleştirel düşünme becerileri kazandırmaya yardımcı olur.

Matematiksel kanıt oluşturma yaklaşımları ve kanıt şemalarıyla ilgili bilgilere değinecek olursak;

Sentaktik (Sözdizimsel) kanıt üretimi, tanımları ve diğer ilgili gerçekleri doğru bir şekilde ifade ederek ve mantıksal bir yol izleyerek manipüle etmektir. Sentaktik bir yol kullanarak kanıt yapan kişi matematiksel kavramların ve diyagramların diğer sezgisel ve simgesel olmayan temsillerini kullanmaz. Kanıt yapan kişi sadece tanımları açar ve sembollerin anlamlarını ifade eder (Weber & Alcock, 2004). Yani tanımları kurallarla ilişkilendirir ve teoremler gibi üzerinde ortak anlaşmaya varılan dizimler arasında akıl yürüterek anlayışlar geliştirir (Alcock & Inglis, 2008).

Semantik (anlamsal) kanıt üretimini, kanıtlayıcının sembolik çıkarımları yapmak ve yönlendirmek için matematiksel ifadeleri ve örneklemeleri kullanarak gösterdiği kanıt olarak tanımlarız. Kanıtlayıcı matematiksel bir ifadeyi temsil sistemleriyle somutlaştırır (Weber & Alcock, 2004). Genel olarak kişi kanıtlanacak bir ifadenin belirli veya ortak özelliklerini temsil sistemlerini kullanarak ve akıl yürüterek kanıtlar (Alcock & Inglis, 2008).

Prosedürel kanıt oluşturmada başarılı olan öğrenenler önce algoritma oluşturarak bir süreç izler ve son olarak da bir argüman ortaya koyarlar. Kanıtlayan kişi bir dizi fiziksel yasaları olan algoritmayı sürece dâhil ederek ortak evrensel l genellemelere ulaşır. Algoritma olarak kanıt aşamasında öğrenenler, kanıtı bir ifadeyi kanıtlamak için her adımı belli ve sistemli bir önermeler dizinden oluşan algoritma olarak görür. Süreç olarak kanıt anlayışına sahip öğrenciler algoritmanın işleyişini anlayabilir ve diğer örneklerde kullanarak genelleyebilirler. Argüman olarak kanıt aşamasında olan öğrenenler ise uyguladıkları kanıt prosedürünün üzerinde inceleme yapar, neden bu prosedürü kullandıklarını ifade eder, neyi başarmak istediklerini düşünürler (Weber, 2003).

Harel ve Sowder (2007) ; "kanıt şeması" tanımını , "zan (conjecture)" ve "olgu (fact)" kavramlarına dayandırarak ve "kanıtlama" sürecini aşağıdaki ifadelerle açıklar.

Tespit etme (ascertaining): Bir öznenin veya bir topluluğun, bir iddianın doğruluğu hakkındaki kendi şüphelerini ortadan kaldırmak için kullandığı süreçtir. Bu adım, öznenin kendi zihnindeki belirsizlikleri gidermek veya bir iddianın doğruluğuna ilişkin kendi içsel güvenini artırmak için kullanılır.

İkna etme (persuading): Bir öznenin veya bir topluluğun, bir iddianın doğruluğu hakkında başkalarının şüphelerini ortadan kaldırmak için kullandığı süreçtir. Bu adım, bir iddiayı başkalarına sunarak, onların da bu iddianın doğruluğuna inanmalarını sağlamak amacıyla gerçekleştirilir.

Kanıt şeması, bu tür süreçlerin bir organizasyonunu veya yapılandırmasını ifade edebilir. Yani, bir iddianın doğruluğunu belirlemek veya başkalarına kabul ettirmek için kullanılan belirli bir yöntem veya adımlar dizisi olarak düşünülebilir. Bu şema, belirli bir iddianın doğruluğunu kanıtlamak için izlenen adımları belirleyebilir ve bu adımların mantıklı bir sırasını sağlayabilir. Bu şekilde, kanıt şeması, bir iddianın doğruluğunu tespit etme ve diğerlerini ikna etme süreçlerini organize eder ve açıklar.

Kanıt şemaları, belirli bağlamlarda iddialar oluşturmak için kullanılır ve bu nedenle, bu şemalar ele alınırken iddiaların yapıldığı bağlamın doğası dikkate alınmalıdır (Harel & Sowder, 2007).

Bu bağlamda, kanıt şemalarını ele alırken üç ana yön üzerinde durulabilir:

Kanıtlama Bağlamı: Kanıtlamanın gerçekleştiği ortam ve bağlamın doğası önemlidir. Örneğin, matematikteki bir kanıtın mantığı ve yapısal düzeni, bilimsel bir argümanın temellendirilmesinden farklı olabilir. Ayrıca, kültürel, tarihsel ve sosyal faktörler de kanıtlama bağlamını etkileyebilir (Harel & Sowder, 2007).

Kanıtlama Araçları (Kanıt Şemaları): Kanıtlama için kullanılan araçlar, yani kanıt şemaları, iddiaların oluşturulmasında kritik bir rol oynar. Farklı disiplinlerde ve farklı dönemlerde kullanılan kanıt şemaları, belirli bir bağlama ve entelektüel ihtiyaca uygun olarak değişebilir (Harel & Sowder, 2007).

Kavramsal Değişimin Güdüsü: Zaman içindeki kavramsal değişim, kanıtlama pratiklerini ve kanıt şemalarını da etkileyebilir. Entelektüel ihtiyaçlar, yeni keşifler, metodolojik gelişmeler ve bilgi birikimi gibi faktörler, kanıtlamanın ve kanıt şemalarının evrimini şekillendirebilir. Bu unsurların anlaşılması, kanıtlamanın öğrenilmesi ve öğretilmesinde kritik yönleri aydınlatabilir (Harel & Sowder, 2007).

Harel ve Sowder (1998) kanıt şemalarını şu şekilde açıklamıştır:

1) Dışsal ikna kanıt şemaları: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri dışsal bir argüman kullanarak ikna etmeye çalışır. Bu şema üç sınıfa ayrılır.

a) Otoriter kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri öğretmenin, kitabın veya başka bir uzmanın söylediği fikre göre ikna eder. Bu şema, öğrencilerin kanıtı dışsal bir otorite figürü veya kaynağın belirttiği şekilde kabul ettiği durumları temsil eder. Bu durumda, öğrenciler kanıtı sorgulamak veya eleştirmek yerine, sadece dışsal otoritenin belirttiği şekilde kabul ederler.

b) Alışkanlık edinilmiş (Ritüel) kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri önceden bildiği doğruları kullanarak ikna eder. Daha çok biçime odaklanır. Bu şema, öğrencilerin kanıtı bir tür rutin veya alışılmış bir uygulama olarak kabul ettiği durumları temsil eder. Öğrenciler, kanıtın belirli bir formu veya şekli olduğunu kabul ederler ve bu formu takip etmekle yetinirler. Bu durumda, öğrenciler kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederler.

c) Dayanağı olmayan sembolik kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri sembolleri kullanarak ikna eder. Fakat sembolleri niteliğini ve niceliğini bilmeden kullanır. Bu şema, sembolleri anlamsızca değiştiren veya kullanmayan öğrencileri tanımlar. Öğrenciler sembollerin anlamını anlamadan veya kullanmadan sadece sembolleri manipüle ederler. Bu durumda, öğrenciler semboller aracılığıyla matematiksel düşünceyi gerçekten içselleştirmemişlerdir

2) Deneysel kanıt şemaları: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri ikna ederken durumun doğruluğunu ya da yanlışlığını fiziksel veya duygusal gerçeklerle ifade eder. Tümevarımsal (indüktif) ve algısal kanıt şemaları olarak ikiye ayrılırlar.

a) Tümevarımsal (indüktif) kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri örnekler kullandığı belli bir durumdan genelleme yaparak ikna eder. Bu şemalarda, genel bir sonuç çıkarmak için spesifik örnekler veya nicelikler kullanılır. Örnekler veya doğrudan gözlemler yoluyla genelleme yapılır. Örneğin, bir öğrenci birkaç örneği inceleyerek bir genelleme yapabilir ve bu genellemeyi kullanarak bir kanıt oluşturabilir. Tümevarım şeması, öğrencilerin öğrenme sürecinde doğal bir ilerleme olarak kabul edilir, çünkü öğrenciler somut örneklerden soyut genellemelere geçerler

b) Algısal kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri sezgisel olarak basit çizimlerle ikna eder. Bu şemalarda, gözlem ve deneyimler temel alınarak kanıtlanır. Ancak, bu kanıtlar genellikle daha öznel ve deneyime dayalıdır. Öğrenciler, görsel kanıtları veya algısal ipuçlarını kullanarak bir iddiayı desteklerler.

3) Analitik (çıkarımsal-tümdengelimsel) kanıt şemaları: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri tanımlar, varsayımlar ve teoremler kullanarak ikna eder. Dönüşümsel veya aksiyomatik kanıt şemaları olarak ikiye ayrılır.

a) Dönüşümsel kanıt şeması: Kanıtlayıcı kendini ve diğer kişileri tanımlar, varsayımlar ve teoremler kullanarak genelden özele akıl yürüterek ikna eder. Bu şemalarda, bir önerme veya sonuç, önceden kabul edilmiş diğer doğrular veya prensipler kullanılarak türetilir veya dönüştürülür. Bu şemanın genellenme, operasyonel düşünme ve mantıksal çıkarım olmak üzere üç özelliği vardır.

Genelleme: Öğrenci, spesifik durumların ötesine geçerek genelleme yapar. Yani, belirli bir örneği incelemek yerine, genel bir kuralı veya prensibi anlamaya çalışır. Bu, problem çözme ve kanıtlama sürecinde evrensel ve genel geçerli sonuçlar elde etmede önemlidir.

Operasyonel Düşünme: Öğrenci, amaca yönelik zihinsel operasyonları gerçekleştirir. Bu, problemi anlama, farklı yaklaşımları değerlendirme ve çözüm üretme yeteneğini içerir. Öğrenci, matematiksel veya mantıksal operasyonları doğru bir şekilde uygulayarak kanıt veya problem çözme sürecini ilerletir.

Mantıksal Çıkarım: Öğrenci, mantıksal çıkarım yoluyla argümanlarını ve iddialarını destekler. Mantıksal çıkarım, geçerli bir mantıksal formatta bir ifadeden diğerine geçişi içerir. Öğrenci, tanımlar, teoremler ve mantıksal ilişkiler aracılığıyla mantıksal olarak tutarlı bir argüman oluşturur.

Mantıksal çıkarım, bir ifade veya önermenin, başka bir ifade veya önerme tarafından doğrulanması veya sonuç çıkarılması sürecidir. Bu, matematikte kanıtların oluşturulması ve doğrulanması sürecinde temel bir unsurdur. Matematiksel bir kanıtın gerekçelendirmesindeki son aşama olan mantıksal çıkarım, ifadeler arasındaki mantıksal ilişkileri doğru bir şekilde tanımlama ve kullanma yeteneğini içerir. Bu, "eğer... o zaman..."

gibi matematiksel ifadelerin anlamını anlamayı gerektirir. Mantıksal çıkarım, bir ifadenin doğru olduğunu göstermek için matematiksel bir kanıtın temel taşlarından biridir.

b) Aksiyomatik kanıt şeması: Bu şema, dönüşümsel kanıt şemasının tüm özelliklerini kapsar. Kanıtlayıcı önceden kanıt edilmiş teoremlere ve önermelere odaklanır, matematiksel ifadeleri kolayca anlar ve alternatif fikirler geliştirir. Aksiyomatik kanıt şeması, bir iddiayı bir dizi aksiyoma veya temel öncüle dayanarak doğrulamayı içerir. Bu aksiyomlar, kabul edilen doğru olarak kabul edilen temel prensipler veya önermelerdir ve bu şemada, bu aksiyomlardan yola çıkarak, bir sonucun doğruluğunu mantıksal bir şekilde türetme süreci gerçekleştirilir. Bu, matematikte sıkça kullanılan bir kanıt yöntemidir, çünkü matematiksel teoremler genellikle bir dizi temel aksiyomdan türetilir. Aksiyomatik kanıt şeması, bir iddianın doğruluğunu göstermede güvenilir bir araç olarak kabul edilir ve matematiksel kesinlik sağlamak için yaygın olarak kullanılır. Ve kanıt şemalarının en üst sırasında yer alır.

Deneysel kanıt şemaları ve tümdengelimsel kanıt şemaları, Balacheff'in (1988) sırasıyla "pragmatik" kanıt ve "kavramsal" kanıt olarak adlandırdığı kavramlara karşılık gelir.

Balacheff (1988), pragmatik gerekçelendirmeyi üç türe ayırır;

Basit deneycilik: Bu tür gerekçelendirme, birkaç rastgele örnekle gerekçelendirme anlamına gelir. Bu, genellikle rasgele seçilmiş örneklerin veya deneylerin sonuçlarına dayanarak bir iddianın doğruluğunu göstermeyi amaçlar.

Kesin Deney: Bu tür gerekçelendirme, dikkatle seçilmiş örneklerle gerekçelendirme anlamına gelir. Burada, belirli örnekler veya deneyler, bir iddianın doğruluğunu desteklemek için özenle seçilir ve kullanılır.

Genelleyici Örnek: Bu tür gerekçelendirme, bir örnekle bütün bir vaka sınıfını temsil eden örnekle gerekçelendirme anlamına gelir. Burada, bir örnek, genellikle belirgin özellikleri temsil eden ve bir ilkeyi veya prensibi desteklemek için kullanılan bir vaka sınıfını temsil eder

Balacheff (1988), kavramsal gerekçelendirmeleri iki türe ayırır;

Düşünce Deneyi: Bu tür gerekçelendirme, belirli örneklerden ayrılan bir düşünce deneyine dayanır. Burada, bir ilke veya kavramın doğruluğu, belirli örneklerle değil, zihinsel bir deney veya düşünce deneyi yoluyla gösterilmeye çalışılır.

Sembolik Hesaplama: Bu tür gerekçelendirme, yalnızca sembollerin dönüşümüne dayanır. Burada, semboller ve sembolik ifadeler, sembolik işlemler yoluyla doğruluğunu göstermek için kullanılır.

Kavram Yanılgıları

Kavramlar, insan zihnindeki önemli zihinsel yapı taşlarıdır. İnsanlar, düşüncelerini ve deneyimlerini organize etmek, anlamak ve iletmek için kavramları kullanır. Kavramlar, somut nesnelerden soyut fikirlere kadar geniş bir yelpazede olabilirler (Barak, 2007). Örneğin, "araba" bir kavram olabilir ve insanlar bu kavram altında birçok farklı araba modelini veya tiplerini gruplayabilirler. Bu, insanların karmaşık dünyayı daha anlaşılır ve işlenebilir parçalara ayırmasına olanak tanır. Kavramlar, iletişimde de kritik bir rol oynar çünkü insanlar fikirleri ve deneyimleri paylaşırken kavramları kullanarak anlamı aktarabilirler.

Senemoğlu (2007) , kavramları insanların deneyimlediği ve gözlemlediği çeşitli öğeleri gruplamak ve organize etmek için kullandıkları zihinsel yapılar olarak açıklar. Kavramlar, benzer özelliklere sahip olan nesneleri veya kavramsal birimleri bir araya getirerek dünyayı anlamada ve temsil etmede önemli bir rol oynarlar. Bu tanımla, kavramların insanların düşünce süreçlerini desteklediği ve bilgileri daha anlaşılır bir şekilde işlemelerine yardımcı olduğu vurgulanır. Kavramlar, insanların çevrelerindeki karmaşık dünyayı daha kolay anlamalarına ve iletişim kurmalarına yardımcı olur.

Kavramların doğru bir şekilde öğrenilmesi hayati önem taşır çünkü kavramlar, yaşamımızın pek çok yönünü etkiler. Ancak, deneyimler sonucu zihinlerde oluşturulan kavramlar her zaman doğru ve tam olarak öğrenilmeyebilir. Bu durum, kavramlara ilişkin yanılgıların ortaya çıkmasına neden olabilir. Kavramsal yanılgılar, öznelerin gerçek dünyadaki olayları yanlış anlamalarına neden olabilir. Örneğin, yanlış anlaşılan bir bilimsel kavram, doğa olaylarını yanlış yorumlayarak yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Ve yeni deneyimleri anlamada ve yorumlamada zorluklar yaratabilir. Özneler, önceden oluşturulmuş yanlış kavramlarını yeni deneyimlere uyguladıklarında, bu deneyimlerin gerçek anlamını kavramakta güçlük çekebilirler. Yanlış anlaşılan kavramlar, öznelerin kendilerini doğru bir şekilde ifade etmelerini engelleyebilir. Özellikle tartışma veya iletişim durumlarında, yanlış kavramlar kullanılarak iletişim bozulabilir ve anlaşılmazlık yaşanabilir (Ayyıldız, 2010).

Araştırmacılar, öğrencilerin bilimsel kavramları yanlış anlamalarının nedenlerini ve bu yanlış anlamaları düzeltmek için etkili öğretim stratejilerini anlamak için çeşitli incelemelere yönelmişlerdir. Bu incelemeler, öğrencilerin yanlış kavramları nasıl geliştirdiklerini ve bu yanlış anlamaları nasıl düzeltilebileceğini anlamak için önemlidir. Bu bağlamda, "kavram yanılgısı" (misconception) terimi, öğrencilerin bilimsel kavramları yanlış anlamalarını ifade etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu terim, öğrencilerin yanlış anladıkları kavramları tanımlamak ve bu yanlış anlamaları düzeltmek için eğitimde ve araştırmada kullanılmaktadır (Driver & Easley, 1978).

Kavram yanılgıları, öğrencilerin bir konu, kavram veya durum üzerinde kabul edilen evrensel gerçeklerden farlılık gösteren algılamalardır. Hata ise öğrencinin bilmeden ve fark etmeden gerçekleştirdiği yanlışlardır. Bir bilgi hatalı, eksik veya uyumsuz olsa bile öğrenci ortam sisteminin yeterlilik ve etkililik ölçütleri altında gerçekleşen dinamik bir dengenin sonucudur (Balacheff, 1995). Balacheff, kavram yanılgıları terimini öznenin ortam ile denge duruma getirerek oluşturduğu bilmelere karşılık geldiğini ifade etmiştir. Balacheff ve Gaudin (2002) anlayışları tanımlarken kavram yanılgılarının yetersiz kalacağını ve iyi konumlandırılmış şekilde analiz edilmesi gerektiğini söylemişlerdir.

Kavram yanılgısı, bir kişinin belirli bir konuyu veya kavramı, o alanın uzmanından farklı bir şekilde anlamlandırması durumunda ortaya çıkar. Bu yanılgılar, genellikle kişinin sahip olduğu önceki deneyimler, öğrenme tarzı veya önceki bilgi birikimi gibi faktörlerden etkilenir (Baki, 2006). Özellikle karmaşık veya soyut kavramlarla ilgili olarak, insanlar farklı yorumlar yapabilir veya yanlış anlamlandırabilirler. Kavram yanılgıları, eğitimde önemli bir konudur çünkü öğrenme sürecini etkileyebilir ve doğru kavramsal anlayışın gelişimini engelleyebilir. Bu nedenle, öğretmenlerin öğrencilerin kavram yanılgılarını tanıması ve bunları düzeltmek için uygun stratejiler geliştirmesi önemlidir. Ayrıca, öğrencilere kavramları derinlemesine anlamaları için fırsatlar sunmak ve yanlış anlamaları düzeltmek de önemlidir. Bu şekilde, öğrencilerin doğru kavramsal anlayışları geliştirmeleri ve başarılı bir şekilde öğrenmeleri sağlanabilir.

Graeber ve Johnson (1991) tarafından yapılan araştırmaya göre, kavram yanılgıları dört ana kategoride ele alınmaktadır:

<u>Aşırı Genelleme (Overgeneralization):</u> Bu kategori, öğrencilerin bir kavramı çok geniş bir şekilde uygulama eğiliminde olmalarını ifade eder. Öğrenciler, belirli bir kavramın geçerli olduğu durumları aşırı genelleme eğiliminde olabilirler, bu da yanlış sonuçlara veya anlam karmaşıklığına neden olabilir. Aşırı genelleme, bir kural, prensip veya kavramın belirli bir sınıfa ait olduğu halde, bu özelliğin diğer sınıflara da uygulanabileceği yanılgısıdır. Örneğin, bir özellik ya da davranışın belli bir gruba ait olduğu varsayılarak, bu özelliğin veya davranışın herkes için geçerli olduğu düşünülmesi aşırı genelleme olarak nitelendirilebilir (Zembat, 2015a).

Bir öğrenci, negatif sayıların karekökünün bulunmasının imkânsız olduğunu düşünebilir çünkü gerçek sayılarda karekökün içi sıfır veya sıfırdan büyük olması gerekir yani karekök işlemi genellikle pozitif sonuçlar verir. Bu durumda, öğrenci sadece pozitif sayılar üzerinden yapılan karekök işlemlerini gözlemleyerek, negatif sayıların karekökünün olmadığı yanılgısına kapılabilir. Ancak, matematikte negatif sayıların karekökü kavramı vardır ve bu karekökler karmaşık sayılar olarak ifade edilir. Örneğin, -1'in karekökü i'dir, yani i × i = -1. Bu durumda, öğrenci yalnızca pozitif sayılarla yapılan karekök işlemlerinden yola çıkarak negatif sayıların karekökünün var olmadığı sonucuna varabilir, bu da bir tür aşırı genelleme ve kavram yanılgısıdır.

Aşırı Özelleme (Overspecialization): Bu kategori, öğrencilerin bir kavramı çok dar bir şekilde yorumlama eğiliminde olmalarını ifade eder. Öğrenciler, bir kavramın sadece belirli durumlarda geçerli olduğunu düşünerek, kavramı gerektiği gibi genişletmezler. Bu da kavramın tam anlamını anlamamalarına ve yanlış sonuçlara yol açabilir. Aşırı özelleme, bir kural, prensip veya kavramın, belirli bir sınıfa ait olmayan bir özelliği esas alarak, bu sınıfın tümüne ait olmayan bir sınırlama getirilmesi şeklide tanımlanır. Yani, genel bir kural veya prensip, belirli bir durum veya özellik dikkate alınarak, genel geçerliliğini yitirerek daha dar ve özelleştirilmiş bir yapıya dönüşür (Zembat, 2015a)

Bir öğrenci, "çarpan" kavramını sadece iki sayının çarpımını ifade eden sayılar olarak algılayabilir. Örneğin, 3 ve 5'in çarpımı olan 15'i düşünebilir. Ancak, matematikte "çarpan" kavramı sadece sayılarla sınırlı değildir. Çarpanlar, çeşitli matematiksel ifadelerin parçalarını veya faktörlerini de ifade edebilir. Örneğin, x-y veya x+y ifadeleri (x + y)(x - y) şeklindeki bir ifadenin çarpanlarıdır. Bu örnekte, çarpan kavramının sadece sayılarla sınırlı olarak anlaşılması, kavramın tam bir anlayışını sağlamaz ve aşırı özelleme hatasına yol açabilir. Çarpan kavramının matematikteki farklı kullanımlarını anlamak, kavramın tam bir kapsamını kavramayı sağlar.

Yanlış Tercüme (Mistranslation): Bu kategori, öğrencilerin bir kavramı yanlış anlamalarını ifade eder. Öğrenciler, kavramın gerçek anlamını doğru bir şekilde kavrayamazlar ve yanlış yorumlar yapabilirler. Bu genellikle kavramlar arasındaki ilişkilerin yanlış yorumlanması veya kavramların hatalı bir şekilde açıklanmasıyla ilgilidir. Çeşitli formlar arasında yapılan sistemli hatalar zinciri "yanlış tercüme" olarak adlandırılabilir. Bu hatalar, işlem, formül, sembol, tablo, grafik ve cümle gibi farklı form ve formatlardaki bilgilerin yanlış bir şekilde aktarılması veya yorumlanması sonucunda ortaya çıkabilir (Zembat, 2015a).

Bir öğrenci, "karekök" işlemini yanlış anlayabilir. Örneğin, $\sqrt{16}$ ifadesini değerlendirdiğinde, öğrenci bu işlemin "16'nın karesini almak" anlamına geldiğini düşünebilir ve sonucu 256 olarak hesaplayabilir. Ancak, karekök işlemi aslında bir sayının karesini veren sayıyı bulmaktır. Yani, $\sqrt{16}$ ifadesinin sonucu, 16'nın karekökü olan 4'tür. Çünkü 4'ün karesi 16'dır. Bu hata, kavramların tam olarak anlaşılmamasından veya terimlerin yanlış yorumlanmasından kaynaklanabilir. Öğrencilerin kavramları doğru bir şekilde anlamaları ve matematiksel ifadeleri doğru şekilde yorumlamaları önemlidir.

<u>Kısıtlı Algılama (Limited Conception):</u> Bu kategori, öğrencilerin bir kavramı yeterince derinlemesine anlamamalarını ifade eder. Öğrenciler, kavramın sadece yüzeyine odaklanır ve kavramın daha derin ve karmaşık yönlerini göz ardı ederler. Bu, kavramı eksik veya yanlış bir şekilde anlamalarına neden olabilir. Bu dört kavram yanılgısı türü, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarını engelleyebilir ve öğrenme sürecini etkileyebilir. Bir kavramın sadece kısıtlı veya zayıf bir şekilde anlaşılması, bu kavramın genel anlamıyla yeterince kavranmamasına ve dolayısıyla kısıtlı olarak algılanmasına yol açabilir (Zembat, 2015a).

Newton'un (2011) belirttiği gibi, kavram yanılgıları birçok farklı nedenden kaynaklanabilir. Bunlar arasında şunlar bulunabilir:

- Yanlış öğrenme süreçleri, kişinin kavramları yanlış anlamasına ve yanılgılara neden olabilir. Örneğin, bir kavramın yanlış öğretilmesi veya yanlış anlatılması sonucunda kişi yanlış bir kavramsal model oluşturabilir.
- Dikkatsizlik veya aşırı dikkat durumları, kişinin kavramları yanlış yorumlamasına veya yanlış algılamasına neden olabilir. Dikkatsizlik, önemli detayların atlanmasına yol açabilirken, aşırı dikkat ise detayların yanlış yorumlanmasına neden olabilir.
- Kavramların yanlış yorumlanması, kişinin kavramları doğru bir şekilde anlamamasına ve dolayısıyla yanılgılara neden olabilir. Bu, kavramların

yanlış bir şekilde algılanması veya yanlış bir bağlamda değerlendirilmesiyle ilgili olabilir.

- İşitsel veya görsel duyuların yetersiz düzeyde olması, kişinin kavramları doğru bir şekilde algılamasını engelleyebilir ve yanılgılara neden olabilir.
- Öznenin geçirdiği deneyimler, kavram yanılgılarına neden olabilir. Örneğin, bisiklet sürerken ortaya çıkan hareketin sürdürülmesi için kuvvete olan yanlış inanç, deneyimlerin yanıltıcı etkisiyle oluşabilir.

Bu faktörlerin hepsi, kavram yanılgılarının oluşmasına katkıda bulunabilir ve doğru anlayışın gelişimini engelleyebilir. Bu nedenle, öğretim ve öğrenme süreçlerinde bu etkenlerin dikkate alınması ve doğru kavramsal anlayışın geliştirilmesi için çaba harcanması önemlidir.

Newton'da (2011) kavram yanılgılarının giderilmesi için kullanılabilecek farklı yöntemleri açıklamaktadır;

Teşhis: Kavram yanılgısının giderilmesinin ilk adımı, yanılgının teşhis edilmesidir. Öğrencinin hangi kavramın yanlış anlaşıldığının belirlenmesi, doğru bir düzeltme sürecinin başlangıcıdır.

Entegrasyon: Eğer öğrencinin öğrendiği yeni kavram ile önceki bilgisi arasında çatışma yoksa, bu durumda entegrasyon adımına geçilir. Çünkü bu, yeni bilginin doğru bir şekilde öğrenildiğini gösterir.

Ayırma: Kavramlar birbirine karıştığında veya yanlış anlaşıldığında, öğrencilerin bu kavramları doğru şekilde ayırt etmeleri ve tanımaları için ayırma yöntemi kullanılır. Örneğin, günlük hayatta sıkça karıştırılan kavramlar, ayırt edilerek öğrencilere doğru şekilde öğretilir.

Değiştirme: Eğer öğrencinin yeni öğrendiği kavram ile önceki bilgisi arasında çatışma varsa, bu durumda değiştirme yöntemi uygulanır. Buradaki amaç, uygun olmayan bilgiyi doğru kavramla değiştirmektir.

Çürütme metni: Öğrencilere bir konu hakkında olası kavram yanılgılarını ve bu yanılgıların açıklamalarını içeren bir metindir. Bu metin, öğrencilere alternatif bir bakış açısı sunarak kavramsal yanılgılarını tanımalarına ve düzeltmelerine yardımcı olur.

Grup tartışmaları veya işbirliğine dayalı öğrenme yöntemleri: Bilginin geliştirilmesinde ve dönüştürülmesinde etkili bir stratejidir. Bu tür etkileşimli öğrenme ortamları, öğrencilerin kendi aralarında fikir alışverişinde bulunmalarını, birbirlerinin bakış açılarını anlamalarını ve bilgiyi derinlemesine anlamalarını sağlar.

Gösterme yöntemi: Tam olarak öğrenilmemiş bir kavram veya yapıyı fiziksel olarak göstererek öğrenmeyi amaçlar. Ancak, bazı durumlarda bu yöntem yeterli olmayabilir ve bilimsel olmayan inançların veya yanlış kavramsal anlayışların giderilmesi için daha derin bir yaklaşım gerekebilir. Bu durumda, öğrencilerin mevcut inançlarını sorgulamaları ve bilimsel kanıtlarla çelişen düşünceleri gözden geçirmeleri önemlidir. Bu, öğrencilerin kavramsal çatışmalarla karşılaşmalarını ve daha derin bir anlayışa ulaşmalarını sağlar.

Benzerlik ve Örnek: Kavramsal değişimin sağlanması, öğrencilerin yeni kavramları anlamalarını ve mevcut kavramlarla ilişkilendirmelerini kolaylaştırmak için benzerlikler ve örnekler kullanılabilir. Ancak, bu benzerlikler ve örneklerin doğru, açıklayıcı ve öğrenciler tarafından kolayca anlaşılabilir olması gerekmektedir.

Matematiksel kavram yanılgısı, bir öğrencinin uzun süredir doğru olarak kabul ettiği, ancak aslında yanlış olan bir kavramı veya anlayışı ifade eder. Bu yanılgılar, matematiksel gerçeklerle çelişebilir ve öğrencinin doğru problem çözme becerilerini engelleyebilir. Hata ise, matematiksel ifadelerin ve kavramların yanlış bir şekilde kullanılması veya yorumlanması sonucunda oluşan bir durumdur (Erbaş ve diğerleri, 2010). Hatalar genellikle yanlış hesaplamalar veya yanlış mantık yürütme sonucunda ortaya çıkar ve yanılgılarla karıştırılmamalıdır. Yanılgılar daha derinlemesine bir anlayış eksikliğinden kaynaklanırken, hatalar daha çok dikkatsizlik veya yanlış uygulamadan kaynaklanabilir.

Matematikteki kavram yanılgıları evrensel bir problem olup çeşitli faktörlerden kaynaklanabilir. Başlıca kavram yanılgılarının nedenlerine odaklanmak, bu problemleri çözmek için önemlidir. Bazı yaygın kavram yanılgılarının sebepleri:

- Matematik öğretmenlerinin matematiği doğru bir şekilde öğretecek ve kavram yanılgılarını düzeltecek bilgi ve becerilere sahip olmaması, öğrencilerin kavramları yanlış anlamalarına neden olabilir.
- Öğretmen ile öğrenci arasındaki etkileşimin yetersiz olması, öğrencilerin sorularını sormakta çekingenlik yaşamalarına ve kavramları tam olarak anlamamalarına neden olabilir.
- Öğrencilerin matematik derslerini düzenli bir şekilde takip etmemesi, kavramların eksik veya yanlış anlaşılmasına yol açabilir.
- Programın yoğunluğu, sunulan materyallerin anlaşılabilirliği ve mantıksal düzenlemelerin yapılmaması da kavram yanılgılarına katkıda bulunabilir.
- Okuldaki olanakların kısıtlı olması, sınıf mevcutlarının fazla olması ve ekonomik sıkıntılar, öğrencilerin matematik öğrenme süreçlerini olumsuz etkileyebilir.
- Ebeveynlerin ilgisizliği, evdeki öğretim yöntemlerinin okuldan farklı olması ve evde matematikle ilgili yeterli destek ve motivasyonun sağlanmaması da kavram yanılgılarına katkıda bulunabilir.
- Etkili ölçme ve değerlendirme araçlarının kullanılmaması ve yeterli geribildirimlerin sağlanmaması, öğrencilerin kavramları doğru bir şekilde anlamalarını engelleyebilir.

Bu faktörlerin dikkate alınması, matematik eğitiminde kavram yanılgılarının önlenmesi veya düzeltilmesi için uygun stratejilerin belirlenmesine yardımcı olabilir (Kuncar & Breigheith, 2002).

Fonksiyonlar Ve Kavram Yanılgıları

Matematik müfredatı içinde değerlendirildiğinde, cebir konuları arasında fonksiyonlar önemli bir yere sahiptir. Fonksiyonlar, matematiksel düşünmenin gelişiminde kritik bir rol oynar ve matematiğin diğer alanlarıyla sıkı bir ilişki içindedir. Örneğin; limit, türev, kümeler ve daha birçok konu doğrudan fonksiyonlarla ilişkilidir. Fonksiyonlar, matematik ders programlarının temelini oluşturmanın yanı sıra farklı matematik konuları arasında bağlantı kurarak bütünlük sağlama rolünü de üstlenir (Selden & Selden, 1992). Ancak, araştırmalar, öğrencilerin genellikle fonksiyon kavramını anlamada zorluk yaşadığını göstermektedir. Fonksiyon kavramı, matematik içinde diğer kavramlar gibi belli bir özelliğe ve mantığa sahiptir ve doğru bir şekilde düşünülüp öğrenilmelidir. Bir öğrenci, fonksiyon konusunu matematik dersinin dışına taşıyamıyorsa, bu genellikle konuyu tam olarak kavramadığına işaret eder (Vinner, 1983).

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi yayınları (NCTM, 1989, 1991, 2000) fonksiyon konusunun matematik müfredatında önemli bir rol oynaması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu yayınlarda, fonksiyonların öğrencilere diğer matematiksel konuları kavramada ve farklı matematik konuları arasında ilişki kurma yeteneği kazandırmada önemli bir araç olduğu belirtilir. Fonksiyonlar, matematik öğreniminde temel bir unsur olarak kabul edilir ve öğrencilerin genel matematik anlayışlarını derinleştirmelerine yardımcı olur.

Fonksiyonun varlığının en eski göstergelerinden birisi tablolar ve bunların kullanımlarıdır. Örneğin Ptolemy (Almagest'te) gezegenlerin konumlarının zamana göre değişimlerini sayısal tablolar ile göstermiştir (Youschkevitch, 1976). 10. ve 11. yüzyıllarda Arap gökbilimciler de belli tablolar kullanmışlardır. Ancak bu tablolar verilen bir miktarı başka bir miktarla ilişkilendiriyordu ve bu nedenle değişken kavramı henüz mevcut değildi. Eğrilerin tablolarla ilişkilendirilmesi, fonksiyon kavramını geliştirirken, gezegenlerin yörüngelerini belirleme ile ilgili problemlerin formüle edilmesinde ve çözülmesindeki ilerlemelere olanak sağlamıştır.

Kepler Kline'ı (1972, akt. Balacheff, 2017) takip ederek geometrik eğrileri ve astronomik verileri kullanarak gezegenlerin konularının hesaplanmasını geliştirmiştir. Ancak bu hesaplamaları yörüngelerin neden eliptik olduğunu açıklayacak bir teori göstermeden yapmıştır. Ayrıca Kline 17. yüzyılda tanıtılan fonksiyonların çoğunun, hareket eden noktaların geometrik yörüngesi olan eğriler olarak incelendiğini ifade etmiştir.

Fonksiyon kavramının gelişimi geometri (eğri şeklinde ifade edilen) ve cebirsel (formül olarak ifade edilen) olmak üzere iki farklı şekilde gerçekleşmiştir. Euler fonksiyonların incelenmesinin geometriden ayrı tutarak (Kleiner, 1989) fonksiyonları analitik olarak karakterize etmiştir. Euler fonksiyonların değişken bir nicelik ve sabitlerden oluştuğunu ve bağımlı bağımsız değişken kavramını ifade eden bir tanım formüle etmiştir (Dhombres, 1988).

Fonksiyonlar, genellikle değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade etmek için kullanılır. Bu ilişki, bir değişkenin diğerine nasıl tepki verdiğini veya etkilendiğini göstermektedir. Bu, bir değişkenin başka bir değişkene bağlı olarak nasıl değiştiğini açıklamaktadır. Örneğin, bir değişkenin artması veya azalması diğer değişkenin benzer şekilde etkilenmesine neden olabilir. Bu tür ilişkiler, fonksiyonlar aracılığıyla matematiksel olarak ifade edilebilir. Matematikte, bir fonksiyon genellikle bir girdi değerini alır ve bir çıktı değeri üretir (Bayazit & Aksoy, 2013).

Leibniz'in 1673'te öne sürdüğü "fonksiyon" terimi, matematikte önemli bir evrimin başlangıcını işaret etmiştir (Ponte, 1992). Bu terimin kullanımıyla birlikte, sabit, değişken ve parametre gibi temel kavramlar matematik literatürüne girmiştir. Fonksiyon kavramı, değişkenler arasındaki ilişkilerin sadece grafiksel değil, aynı zamanda analitik (cebirsel) yöntemlerle de incelenmesine olanak tanımıştır. Bu incelemeler, fonksiyonların sonsuz sayıdaki değerleri için yapılarak nasıl davrandığını anlamak için önemli bir araç sağlamış ve fonksiyon kavramı matematiksel açıdan daha kesin bir tanım kazanmıştır (Bayazit & Aksoy, 2013).

Drichlet’in fonksiyon tanımı ise şu şekildedir:

> x ve y belli bir kural çerçevesinde birbirlerine bağlı iki değişken olsun. Eğer, x değişkenindeki her değişime karşın (x’e verilen her değere karşın) y değişkeninde de bir değişim söz konusu oluyorsa (bir ve yalnız bir y değeri elde ediliyorsa) y’ye x’in bir fonksiyonu denir. (Boyer, 1968, s. 600, akt., Bayazit & Aksoy, 2013)

Cantor'un kümeler teorisini ortaya atmasıyla, fonksiyon kavramının gelişimi yeni bir boyut kazanmıştır. Artık fonksiyonlar, iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeler olarak algılanmaya başlanmıştır. Bu, fonksiyonların sadece bir değişkenin diğerine nasıl bağlı olduğunu değil, aynı zamanda bir kümeden diğerine nasıl bir ilişki kurduğunu da ifade etmeye olanak sağlamıştır (Ponte, 1992).

Bu yeni perspektifle birlikte, küme kavramının rolü büyük önem kazanmıştır ve değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek için bir fonksiyonun tanımlı olduğu kümelerin gerekliliği kabul edilmiştir. 1939'da, Bourbaki fonksiyon kavramını, iki küme arasında yapılan eşlemeleri tanımlayan özel bir ilişki (bağıntı) olarak ifade etmiştir. Bu tanım, günümüzde modern matematik kitaplarında öğretilen fonksiyon kavramını içermektedir. Bourbaki'nin bu tanımı, fonksiyonların daha kesin ve genel bir anlayışını sağlamıştır, bu da matematiksel düşüncenin ilerlemesine önemli bir katkı sağlamıştır (Bayazit & Aksoy, 2013).

Bir fonksiyon, bir tanım kümesinden bir değer kümesine eşlemeler yapan bir bağıntıdır. Fonksiyonun temel özelliği, her tanım kümesi elemanının yalnızca bir değer kümesi elemanına eşlenmesidir. Başka bir deyişle, herhangi bir x değeri için yalnızca bir y değeri olabilir. Bu temel özellik, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için sağlanması gereken en önemli şarttır ve bu şartı sağlayan bağıntılara fonksiyon denir. Fonksiyonlar, matematikte çok geniş bir kullanım alanına sahiptir ve birçok matematiksel ve bilimsel konseptin temelini oluştururlar (Bayazit & Aksoy, 2013).

Fonksiyonların çeşitli temsillerinin ve bu kavrama ilişkin çok sayıda alt kavramın varlığı, fonksiyonların anlaşılmasını zorlaştıran önemli faktörlerdir. Bu çeşitlilik ve alt kavramlar, öğrencilerin fonksiyon kavramını kavramasını güçleştirebilir ve öğrenme sürecini karmaşık hale getirebilir (Eisenberg, 1991).

Polat ve Şahiner (2007) yaptıkları çalışmada; fonksiyonlar konusu; öğrencilerin, temel kavramlar arasında olan tanım kümesi, görüntü kümesi, bağıntı gibi karışıklıklar yaşadıkları kavramları ve tanımlama, dönüşüm yapma, modelleme gibi çeşitli becerileri içerdiğini ifade etmişlerdir. Literatürde, öğrencilerin fonksiyonun matematiksel dilini kavrama, günlük yaşam durumlarını cebirsel ve grafiksel fonksiyon gösterimleriyle ifade etme, fonksiyonların temel doğasını kavrama ve cebirsel gösterimdeki bağımsız ve bağımlı değişkenlerin işlevlerini anlama gibi konularda sıkça kavram yanılgılarına rastlandığı belirlenmiştir.

Fonksiyon konusundaki bilginin niteliğini incelemek, değerlendirmek ve açıklamak için farklı teorik yapılar kullanılabilir. Bu yapılar arasında işlemsel bilgi ve kavramsal bilgi düşünceleri bulunmaktadır (Hiebert & Lefevre, 1986).

Hiebert ve Lefevre'nin (1986) tanımına göre, işlemsel bilgi, bir konuyla ilgili kuralları, formülleri ve adımları uygulama yeteneğiyle ilgilidir ancak bu adımların neden ve nasıl çalıştığına dair derin bir anlayışı içermemektedir. Öğrenciler, belirli bir problemi çözmek için gerekli adımları takip edebilirler ancak bu adımların matematiksel kavramlarla ilişkisini anlamada zorlanabilirler. Bu düzeydeki öğrenciler, sembollerin, kuralların ve formüllerin mekanik kullanımını öğrenmiş olabilirler, ancak bu işlemlerin matematiksel bağlamlarını ve anlamlarını kavramayabilirler.

İşlemsel bilgi seviyesindeki bir öğrenciye $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu verildiğinde, bu öğrenci farklı x değerlerini yerine koyarak fonksiyonun değerlerini hesaplayabilir. Örneğin, x'in -1, 0 ve 2 olduğu durumları düşünelim.

Öğrenci, x = -1 için $f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$, x = 0 için $f(0) = 2(0) + 3 = 3$ ve x = 2 için $f(2) = 2(2) + 3 = 7$ gibi işlemleri yapabilir. Ancak, işlemsel bilgi seviyesindeki bu öğrenci, fonksiyonun doğrusal bir fonksiyon olduğunu ve x değerini ikiyle çarpıp üç ekleyerek değerler elde ettiğini bilmekle sınırlı olabilir. Fonksiyonun grafiksel temsilini veya doğrusal bir ilişkiyi anlayabilir ancak fonksiyonun matematiksel özelliklerini (örneğin, doğrusal olması, her x değeri için yalnızca bir ve yalnız bir y değeri üretmesi) tam olarak kavrayamayabilir. Dolayısıyla, sadece belirli x değerlerini yerine koyarak işlem yapabilir, ancak fonksiyonun tüm özelliklerini anlamayabilir.

Kavramsal bilgi, içeriği doğru ve zengin olan bir bilgi türüdür. Bu bilgi, yanılgı veya eksik öğrenme gibi kısıtlılıklardan uzak olup, bir kavramın temel niteliklerini anlamayı gerektirmektedir. Ancak, kavramsal bilgiyi sadece bu temel seviyede kavramak yeterli değildir (Bayazit & Aksoy, 2013). Hiebert ve Lefevre'nin (1986) ifade ettiği gibi, bir kavramın anlam kazanması, diğer kavramlarla ve önceden edinilmiş bilgilerle bağlantılı hale gelmesiyle gerçekleşmektedir. Bu ilişkisel boyut, kavramların gerçek dünya durumlarına uygulanması ve farklı bağlamlarda kullanılmasıyla da geliştirilebilir. Dolayısıyla, bir kavramın esası ve temel özelliklerinin anlaşılması, kavramsal bilginin gelişimi için temel bir adımdır, ancak bu bilginin zenginleşmesi ve derinleşmesi, kavramların farklı bağlamlarda kullanılması ve diğer kavramlarla ilişkilendirilmesiyle sağlanır.

Fonksiyonlarla ilgili kavramsal bilginin gelişimi için fonksiyonların özelliklerinin ve ilişkilerinin anlaşılması son derece önemlidir. Fonksiyonlar, belirli bir kurala göre birbirine bağlı olan öğeleri eşleyen özel bir bağıntı türüdür. Bu bağıntılar, kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesini oluşturmaktadır. Kartezyen çarpım ise, birinci ve ikinci bileşenleri farklı küme elemanlarından çaprazlama yöntemiyle seçilmiş tüm sıralı ikilileri içeren yeni bir kümedir (Bayazit & Aksoy, 2013).

Örneğin $A=\{1, 2, 3\}$ve $B=\{a, b, c\}$ kümesini ele alalım.

Kartezyen çarpım, A ve *B kümelerinin* çaprazlama yöntemiyle seçilen tüm sıralı ikilileri içerir. Yani, $A\times B=\{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$

Şimdi, bu kartezyen çarpım kümesinden $\{(1,a), (2,a), (3,a)\}$ kümesini bir alt küme olarak seçelim ve bunu bir fonksiyon olarak düşünelim. Örneğin, $f{:}A\rightarrow B$ fonksiyonunu ele alalım ve $f{:}A \rightarrow B$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, fonksiyonumuz A kümesindeki her elemanı *B* kümesindeki *a* elemanına eşler. Yani $f(1)= a$, $f(2)=a$ ve $f(3)=a$ şeklinde bir eşleme yapılır.

Bu örnekte, fonksiyon kavramı, kartezyen çarpım ve bağıntı kavramları arasındaki ilişkiyi açıkça görebiliriz. Fonksiyon, kartezyen çarpımın bir alt kümesi olarak tanımlanabilir ve bu bağlamda fonksiyonların kavramsal bilgisinin gelişimi için bu ilişkilerin anlaşılması büyük önem taşır.

Fonksiyon kavramının iki ana özelliği vardır. İlk olarak, tanım kümesinden alınan her elemanın değer kümesine yalnızca bir ve yalnız bir elemana eşlenmesi gerekliliğidir (Bayazit & Aksoy, 2013). Yani, her girdi değeri (tanım kümesinden) fonksiyon tarafından yalnızca bir çıktı değerine (değer kümesinden) eşlenmelidir. Bu özellik, her girdiye karşılık tek bir çıktı olması gerektiğini vurgulamaktadır.

İkinci olarak, herhangi bir giriş değeriyle ilişkilendirilen çıkış değerinin belirlenmesi için belirli bir işlemsel zincir veya cebirsel kural kullanılması gerekli değildir. Yani, birinci koşul sağlandığı sürece, eşleme işlemi tamamen rastgele yapılabilir, herhangi bir özel işlem sırası veya belirli bir matematiksel kural gerekli değildir (Bayazit & Aksoy, 2013).

Öğrencilerin matematiksel kavramları anlama sürecinde karşılaştıkları zorluklar, bazen göründüğü kadar basit olmayabilir. Özellikle fonksiyonlar gibi temel kavramlar, farklı temsiller ve uygulama alanlarıyla birlikte düşünüldüğünde karmaşıklaşabilir. Örneğin, x ve y gibi notasyonlar içeren ifadelerin otomatik olarak fonksiyon olarak kabul edilmesi, gerçek bir fonksiyon olup olmadığını anlamak için öğrencilerin bazen zorlanmasına neden olabilir (Vinner, 1983).

Öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili bilgi düzeylerini anlamak ve açıklamak için başvurulabilecek bir başka teorik yapı, "kavram imajı" kavramıdır (Tall & Vinner, 1981). Kavram imajı, öznenin herhangi bir matematiksel kavrama yönelik olarak geliştirdiği zihinsel yapıları ifade etmektedir. Bu yapılar, öğrencinin o kavramı nasıl anladığını ve kullanabildiğini yansıtmaktadır. Resimlerden grafiklere, sembollerden cebirsel ifadelere, modellere ve gerçek yaşam durumlarına kadar çeşitli unsurları içermektedir (Bayazit & Aksoy, 2013).

Öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin kavram imajları oldukça çeşitlidir. Kimi öğrenciler için, fonksiyon, matematiksel bir ifade, bir formül, bir denklem veya bir aritmetik işlem olarak açıklanabilirken, diğerleri bir fonksiyonu, bir kümeden diğerine her bir öğe için yalnızca bir eşleşme yapılarak tanımlanan bir ifade olarak belirtebilir. Bazıları ise, bir koordinat sisteminde her noktaya tam olarak bir noktanın karşılık geldiği bir eğri olarak ifade edebilir (Vinner, 1983).

Sierpinska (1992), öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama süreçlerini belirli kategorilere ayırmıştır. Bu kategoriler şu şekildedir:

1) Bazı öğrenciler, fonksiyonu denklemler aracılığıyla ifade edilen bir matematiksel ilişki olarak algılarlar.
2) Bazı öğrenciler, fonksiyonu yeni bir matematiksel kavramı anlamak veya çözmek için bir başlangıç noktası olarak görürler.
3) Bazı öğrenciler, fonksiyon kavramını denklem çözme süreciyle bağdaştırır ve fonksiyonu bir denklemi çözmek için kullanılan bir araç olarak görürler.
4) Bazı öğrenciler, fonksiyonu matematiksel bir formül veya ifade olarak değerlendirirler ve fonksiyonu bu formülle temsil ederler.
5) Bazı öğrenciler, fonksiyonu matematiksel bir işlem veya prosedür olarak algılarlar ve fonksiyonu bu işlem süreciyle ilişkilendirirler.
6) Bazı öğrenciler, fonksiyonu grafik çizme sürecinde kullanılan bir araç veya yardımcı olarak görürler ve fonksiyonu grafikleri çizmek için bir araç olarak değerlendirirler.

İlgili Çalışmalar

cK¢ teorisi ile yapılmış ulusal ve uluslararası alan yazında az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmektedir.

Yazgan (2006) çalışmasında; geometrik yer kavramıyla ilgili öğrencilerin anlayışlarını cK¢ modeliyle incelemiştir. Çalışma İç Anadolu bölgesinde yer alan bir büyükşehirdeki özel kurs yerinde devam eden 12 tane 10. Sınıf öğrencilerinin ikişerli gruplar halinde oluşturduğu bir etkinliktir. Öğrencilerden geometrik yer ile ilgili 5 tane soruyu yanıtlamaları istenmiştir. Öncelikle sorulardaki kavramların kavramsal yapıları ortaya çıkarılmıştır ve daha sonra öğrenci cevapları incelenerek geometrik yer kavramı ile ilgili kavrayışlar analiz edilmiştir. Son olarak yapılan analizler birbirleriyle karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. Öğrencilerin geometrik yer ile ilgili anlayışlarının sezgisel olduğu, uygun olmayan anlayışlara sahip oldukları ve bu anlayışların doğruluğunu incelemeksizin yaptıkları sonucu ortaya çıkmıştır.

Uysal (2019) çalışmasında; öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme sürecinde ortaya koydukları argümantasyon ve kanıt durumlarını inceleyerek aralarındaki ilişkiyi cK¢ modeliyle analiz etmiştir. Bu amaçla argümantasyon ve kanıt sürecinde kullanılan farklı tekniklere göre aralarındaki ilişkinin nasıl değişiklik gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Çalışmanın katılımcıları, Ankara'da bir devlet üniversitesinin 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında matematik eğitimi bilim dalının ikinci ve üçüncü sınıfında okuyan 4 öğretmen adayından oluşmaktadır. Çalışmanın verileri öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerle toplanmış olup verilerin analizi cK¢ modeliyle zenginleştirilmiş Toulmin modeliyle yapılmıştır. Matematik problemlerinin çözüm sürecinde öğretmen adaylarının argümantasyon ile kanıt süreci arasında;" yapısal ve bilişsel süreklilik, yapısal süreklilik-bilişsel mesafe, yapısal mesafe-bilişsel süreklilik, yapısal ve bilişsel mesafe biçiminde" olduğu ortaya çıkmıştır. Bilişsel mesafenin olduğu durumların öğretmen adaylarını zorladığı görülürken yapısal mesafenin olduğu durumlar etkilememiştir. Bunun nedeninin cebirsel problemlerin genel olarak tümdengelim bir yapıya sahip olması olarak düşünülmüştür. Bundan dolayı seçilen kanıt yöntemlerinin de iki süreç arasındaki ilişkiyi etkilemediği söylenmiştir.

Çalık Uzun (2012) çalışmasında; sınıf öğretmenleri adaylarının temel matematik dersindeki bilgi ve anlayışlarını cK¢ modeliyle belirlemiş ve incelemiştir. Çalışmanın verileri öğretmen adaylarına yapılan sınavlar ve görüşmelerle toplanmıştır. Nitel araştırma yöntemi ile yürütülen çalışmada" Küme, Denklem, Fonksiyon ve Sayılar" konularından hazırlanan sınavlar 61 öğretmen adayına uygulanmış bunlardan 26 öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının sorulara verdikleri cevaplardaki her türlü bilgi ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının; doğru ya da hatalı sonuca ulaştırsa da kısa yoldan çözüme ulaşma, doğru sonuç veren bir bilgiye ulaştıklarında bunları yeni durumlara aktarma ve belli durumlarda kısmi genellemelere ulaşma gibi 10 genel kavrayışa sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Maracci (2003) çalışmasında; lisans öğrencilerinin lineer cebir problemlerini çözmede yaşadıkları zorlukları ve hataları belirlemek için cK¢ modelini kullanmıştır. Çalışmada lineer kombinasyon, lineer bağımlılık/bağımsızlık, üreteçler konuları üzerinde durulmuştur. Çalışma, birinci sınıfta orta ve yüksek başarı düzeyine sahip beş öğrenciyle yürütülmüştür. İlk sömestr bitiminde aksiyomatik bir yaklaşımla vektör uzayı teorisinin kavramları öğrencilere gösterilmiş ve daha sonra öğrenciler daha ileri düzey bir derse katılmışlardır. Öğrencilere bireysel görüşmelerde çözmeleri için üç farklı problem verilmiş ve bu süreçte yaşadıkları güçlükler belirlenmiştir.

Miyakawa'nın (2004) çalışması, geometri konularından yansıma simetrisi ile ilgili kanıt gerektiren sorularla yürütülmüş olup çalışmanın analizi cK¢ modeli ile yapılmıştır. Çalışmada simetri ile ilgili kuralların teorik bir analizi ve simetri oluşturma sürecinin analizi yapılmıştır. Bundan dolayı, aynı kuralı kullanmayı gerektiren çizim ve kanıt kullanabilecekleri problemlerin sorulduğu 25 9.sınıf öğrencisi, bir tanesi 3 kişilik olacak biçimde 11 grup haline getirilerek gözlemlenmiştir. Fransa'da yürütülen bu çalışmada öğrencilerin işbirlikli olarak çalışmaları ve sorulara cevap vermeleri istenmiştir. Çalışmada öğrenciler, simetri için diklik ve eşit mesafenin gerekliliğini bilmelerine rağmen kanıt sürecinde doğru kullanamamışlardır.

Murilloa ve Vivier (2013) çalışmalarında; bir eğriye teğet çizme kavramını ve hesaplamasını incelemek için 2010 yılında Meksika'da lise ve ortaokul öğretmenleriyle bir atölye tasarımından bahsetmiştir. Bu çalışmanın katılımcıları ise dördü lise ve biri ortaokulda öğretmenlik yapan beş matematik öğretmenidir. Bu tasarım işbirlikli öğrenme, kendini yansıtma ve ağırlıklı olarak Balacheff tarafından geliştirilen ve düzenlenen cK¢ kavram (concept)-bilme (knowing)-anlayış (conception) modeli kullanılarak yapılmıştır. Bu modelin ağırlıklı olmasındaki amaç katılımcıların teğet ile ilgili kavramları anlamaya, kavramlar arası ilişkileri birbirlerine bağlamaya, bilgilerini geliştirmeye ve yeniden düzenlemeye daha çok olanak tanımasıydı. Bu çalışmada teğet kavramıyla beraber eğri kavramı da incelenmiş olup öğretmenlerin karasızlıklar yaşadığı ve ifadelerinde zorlandıkları görülmüştür.

Vittori (2018) çalışmasında; sınıfta matematik tarihini anlatırken öğrencilere verilen belirli görevleri cK¢ modeliyle analiz etmeyi amaçlamıştır. Bu dersin cK¢ modeliyle ele alınması, matematiğin tarihsel boyutunu öğrencilerin bir kavramdan diğer kavrama bağ kurmasını ve hatta öğrenmesi gereken yeni görevleri nasıl oluşturduğunu görme fırsatı vermiştir.

Voltolini (2018) çalışmasında; 3. döngüde (ilkokulun sonu, üniversitenin başlangıcı) geometri öğrenmek için kağıt kalem etkinliklerine dijital teknolojiyi entegre ederek cK¢ teorisiyle incelemiştir. Öğrencilere bir cetvel ve bir pergel ile üçgen oluşturma sorusunun, dijital ortama aktarılması ve bunun öğrenme üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Öğrencilerin üçgenin farklı kavramlarını tanımaları ve önerilen diğer durumu çözmeleri açısından öğrenci eylemlerinin analiz edilmesi ve değerlendirilmesi cK¢ modeli dörtlüleri (P, R, L, Σ) ile ele alınmıştır. Bir dizi operatör ve kontrollerle açıklanan stratejiler gözlemlerle karşılaştırılarak ele alınmıştır. Harekete geçirilen operatörlerin (R) ve kontrollerin (Σ) tanımlamasıyla 34 öğrencinin her biri ayrı bir üçgen tasarlamışlardır.

Pedemonte ve Balacheff (2016) yaptıkları çalışmada; öğrencilerin geometri dersinde problem çözme konusundaki kavramlarını belirlemek ve kanıtlamayla olan ilişkilerini analiz etmek için Toulmin'in modelini cK¢ ile zenginleştirerek yaptıkları etkinlikleri göstermişlerdir. Çalışmanın problemi, cK¢ modelinin öğelerini (temsiller, operatörler, kontrol) gözlemlemek daha kolay olduğu için Cabri Geometri yazılımı üzerinden oluşturulmuştur. Öğretim deneyi iki İtalyanca sınıfında (11. ve 12. sınıf) ve bir Fransızca sınıfında (12. sınıf) olan 30 öğrencinin ikili gruplar halinde çalışması ile oluşturulmuştur. Çalışmada öğrencilerin anlayışlarının kanıt oluşturma sürecindeki rolü analiz edilmiştir.

Bölüm 3

Yöntem

Araştırmanın Türü

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon gibi fonksiyonlara ait alt kavramlar ile ilgili bilgilerini ve matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak amacıyla yapılan bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden olan durum çalışması kullanılmıştır.

Nitel araştırmalar, sosyal veya insan sorunlarını inceleyen ve bireylerin veya grupların bu sorunlara verdikleri anlamlara odaklanan bir yaklaşımı benimser. Bu tür araştırmalar, yorumlayıcı ve kuramsal çerçeveleri kullanarak araştırma problemlerini inceler. Araştırmacılar, doğal ortamlardaki insan ve yerlere duyarlı veri toplama yöntemlerini tercih ederler ve toplanan verileri tümevarım ve tümdengelimli yaklaşımlarla analiz ederek örüntüler ve temalar ortaya çıkarırlar. Sonuç olarak ortaya çıkan yazılı raporlar veya sunumlar, katılımcıların seslerini yansıtan, araştırmacının derinlemesine düşüncelerini içeren, sorunların karmaşıklığını açıklayan ve literatüre yeni bir katkı yapma veya değişim çağrısı yapma potansiyeline sahip olan bir içeriğe sahiptir (Creswell, 2021).

Nitel araştırmacılar genellikle çalıştıkları konu veya sorunu deneyimleyen katılımcılardan veri toplamak için saha çalışmaları yaparlar. Bu çalışmalarda, araştırmacılar katılımcılarla doğrudan konuşarak ve kendi doğal ortamlarında davranışlarını ve hareketlerini gözlemleyerek bilgi edinirler. Doğal ortamda gerçekleşen bu etkileşimler, zaman içinde yüz yüze iletişim halinde olma imkânı sağlar. Nitel araştırmacılar, veri toplamak için dokümanları incelemek ve davranışları gözlemlemek gibi doğrudan yaklaşımları tercih ederler. Araştırmacılar genellikle açık uçlu soruları kullanarak kendi araçlarını oluştururlar, ancak bu araçlar diğer araştırmacılar tarafından geliştirilen standart anket veya ölçeklere dayanmaz. Ayrıca veri toplamak için kendi araştırma araçlarını geliştirme ve kullanma eğilimindedirler. Nitel araştırma sürecinde, araştırmacılar yazarların literatürden getirdiği veya kendi yorumlarından ziyade, katılımcıların sorun veya problem hakkındaki görüşlerine odaklanırlar. Katılımcıların yorumları, konuyla ilgili farklı bakış açılarını ve çeşitli görüşleri ortaya koyar, böylece araştırmacılara zengin bir anlayış sağlar (Creswell, 2021).

Durum çalışması 1980'li yıllardan itibaren eğitim araştırmalarında yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmış olan bir yöntemdir. Bu yöntem araştırılan konunun bir yönünün derinlemesine incelenmesine olanak sağlar ve bazı genel teorilerin anlaşılmasını sağlama amacı vardır. Durum çalışması sosyal olguların ayrıntılı bir şekilde çözümlemesini yaparak araştıran bir yöntemdir ve bir olayın çeşitli olgularla ilişkisini inceleyerek araştırılan konuya bütüncül bir nitelik kazandırır ve diğer yöntemlerle gözden kaçabilecek ince ayrıntıları ortaya çıkarmaya imkân verir (Özmen & Karamustafaoğlu, 2019).

Durum verisi ise, bir durum hakkında toplanan tüm bilgileri içerir; bunlar mülakatlar, gözlemler, dokümanlar ve diğer insanların ifadeleri gibi çeşitli kaynaklardan elde edilen verileri kapsar. Bu bilgiler, incelenen durumla ilgili birikmiş bilgiyi temsil eder ve durum analizi için temel ham verileri sağlar. Durum verisi, bireyler için özellikle mülakatlar, klinik kayıtlar, geçmiş bilgiler, istatistiksel veriler, üretilen içerikler ve kişilik testleri gibi kaynaklardan elde edilen bilgileri içerebilir (Patton, 2018).

Durum çalışmasında; katılımcıların yaptığı açıklamalar, görüşmelerden ve diğer veri kaynaklarından toplanan bilgiler birleştirilerek durum hakkında karar verilmeye çalışılır. Genellikle 'ne', 'nasıl' ve 'niçin' gibi sorulara cevap arandığında, katılımcı davranışları kontrol edilemediğinde, içerik değiştirilmek istendiğinde ya da olay ile içerik arasındaki sınırlar net olmadığında durum çalışmaları kullanılabilir (Özmen & Karamustafaoğlu, 2019).

Bu çalışmada da öğretmen adaylarının cK¢ teorisi bağlamında fonksiyon kavramına ilişkin anlayışları detaylı bir şekilde inceleneceği ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemaları ortaya çıkarılmak istendiği için durum çalışması yönteminin uygun olduğu düşünülmüştür.

Katılımcılar

Çalışma 2022-2023 akademik yılında Ankara'daki bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programında öğrenim gören her sınıf düzeyinden ikişer olmak üzere, akademik ortalamalarına göre başarılı olan kendini iyi ifade edebilen toplam sekiz öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrencilerin seçiminde akademik ortalamalarının yanında onları tanıyan ders sorumlularının da görüşlerine başvurulmuştur.

Pinto ve Tall (1998, akt., Weber, 2003) tarafından yapılan çalışmaya göre, lisans öğrencileri, ileri düzey matematiksel kavramları anlamada farklı yaklaşımlar benimseyebilirler. Bazı öğrenciler, kavramın resmi tanımı ve mantıksal sonuçları üzerinde yoğunlaşarak anlayışlarını geliştirirler. Bu öğrenciler, kavramı soyut bir şekilde ele alır ve temel prensipleri üzerinde odaklanır. Diğer yandan, bazı öğrenciler ise kavramları anlamak için daha sezgisel bir yaklaşım benimserler. Bu öğrenciler, kavramın tanımını anlamak için daha somut örnekler ve deneyimler kullanabilirler. Onlar için kavramlar, soyut düşünce yerine somut örneklerle ilişkilendirilerek daha iyi anlaşılabilir. Bu çalışma da; cK¢ teorisi bağlamında fonksiyon kavramına ilişkin anlayışları ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemalarının analizinde fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon gibi fonksiyonlara ait alt kavramlar, farklı anlayışlarla karşılaşma, geniş bir bakış açısı ve çeşitlilik sağlayacağı düşüncesiyle lisans öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir.

Balacheff (2017) yaptığı çalışmada kontrol yapısının; seçim yapma, operatör seçme, geri bildirimi değerlendirme, karar verme, problem çözme sürecinin gelişimini yargılama gibi davranışları içereceğini belirtmiştir. Ve bu üstbilişsel davranışları ortaya çıkarmanın oldukça zor olduğunu ve bu zorluğun üstesinden gelmek için, öğrencilerin sözlü etkileşimlerinin bir parçası olan bu davranışlarını ortaya çıkarmak için çiftler halinde çalışılarak bir deneysel ortam hazırlanması gerektiğini savunmuştur. Bu nedenle bu çalışmada da her sınıf düzeyinden iki öğrencinin birlikte çalışması düşünülmüştür.

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri, fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon gibi fonksiyonlara ait alt kavramlar ile ilgili olan iki teoremin yazılı olarak kanıtlanması ve kanıtlama sürecinde gerçekleştirilen klinik mülakatların video ile kayıt altına alınmasıyla toplanmıştır. Bu iki teorem “ $f: A \rightarrow B$, f fonksiyonu birebirdir ⇔ $\forall\ C, D \subset A$ için $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu gösteriniz” ve “$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de tersi varsa $g\, o f$ bileşke fonksiyonunun da tersi olduğunu ve bu fonksiyonun f^{-1} o g^{-1} bileşkesine eşit yani $(g\ o\ f)^{-1}$ = f^{-1} o g^{-1} olduğunu gösteriniz” dir.

Öğretmen adayları ile yapılan çalışma çevrim içi olarak yürütülmüş ve öğretmen adaylarının yazılı sorular üzerinde tartışmaları sağlanmıştır. Bu şekilde öğretmen adaylarının fonksiyon kavramıyla ilgili anlayışlarını daha iyi belirleyebilmek ve aralarındaki tartışmalar sayesinde süreci daha doğru yorumlayabilmek amaçlanmıştır. Buchbinder ve Zaslavsky (2019) yaptıkları çalışmada, öğrenci çiftleriyle çalışarak kanıtlamada örneklerin rolünü incelemişlerdir. Buradan yola çıkarak amacımıza yönelik her sınıf düzeyinden ikişer öğrencinin oluşturduğu gruplara, yazılı uygulama yapılarak cevaplarının kâğıtlara yazılması istenmiştir. Her öğrenci farklı ortamlardan uygulamaya katılarak teoremlerin cevaplarını bireysel olarak yazılı bir şekilde sunmuştur. Uygulama esnasında öğrencilerin düşüncelerini sesli olarak açıklamaları istenmiş ve verdikleri cevapların daha iyi analizinin yapılması ve anlayışlarının belirlenmesi için zaman zaman sorular sorularak süreç video ile kayıt altına alınmıştır. Birinci sınıftan iki öğrenciyle toplam beş oturum yapılmıştır. İkinci sınıftan iki öğrenci ile dört oturum yapılmıştır. Üçüncü sınıftan iki öğrenci ile üç oturum yapılmıştır. Dördüncü sınıftan iki öğrenci ile üç oturum yapılmıştır. Her bir oturum süresi kırk dakika sürmüştür ve oturumlar arasında 10 dakikalık aralar verilerek uygulama tamamlanmıştır. Uygulama esnasında araştırmacı zaman zaman analiz sürecinde katkısının olacağını düşündüğü gözlem notları almıştır.

Veri Toplama Araçları

Öğretmen adaylarına, araştırmacı ve alan uzmanı öğretim üyesi ile birlikte fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon gibi fonksiyonlara ait alt kavramların kullanılmasını gerektiren, öğrencilerin anlayışlarını ortaya çıkarmaya uygun olduğu düşünülen iki teorem çevrim içi yazılı olarak sunulmuştur ve cevapları yazılı olarak alınmıştır. Öğrencilerin bu teoremleri birlikte tartışarak kanıtlamaları istenmiştir. Toplanan yazılı cevaplar, tartışmalar sırasındaki video kayıtları ve gözlem notları çalışmanın verileri olarak kullanılmıştır.

Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmada elde edilen verilerin nasıl analiz edildiği açıklanmıştır. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları cevaplar cK¢ teorisinin bileşenlerine göre incelenmiştir. Uygulanan yazılı soruların yanıtlarının yer aldığı öğrenci çalışma kâğıtları, çözüm sürecinin video kayıtları ve araştırmacının gözlem notları cK¢ teorisi bağlamında fonksiyon kavramına ilişkin anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemalarına göre değerlendirilmiştir.

Araştırmada nitel çalışmalara uygun olarak verilere betimsel analiz uygulanmıştır. Nitel araştırma yöntemi olan durum çalışmasının analizinde kullanılan betimsel analizde veriler araştırma problemine cevap almak için düzenlenir, alıntılarla desteklenir ve okuyucuya sunulur. Betimsel analizde veriler tasvir edilir ve kavramsal çerçeve ile yorumlanır (Özmen & Karamustafaoğlu, 2019).

Öğretmen adaylarının fonksiyon kavramında sahip oldukları anlayışları belirleyebilmek için video görüntüleri ve cevap kâğıtları incelenmiştir. Öğrencilerin her iki teoreme verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre detaylı bir şekilde analizi yapılarak kullandıkları operatörler belirlenmiş ve üst bir başlık altında ifade edilmiştir. Öğrenciler Ö1, Ö2, Ö3… şeklinde kodlanarak verdikleri cevaplar tek tek ele alınarak kullandıkları operatörler belirlenmiştir. Bu operatörler modeldeki orijinal simgesi korunarak R harfi ile gösterilmiş, kaçıncı operatör olduğu alt indis olarak ifade edilmiştir. Aynı zamanda üst indis olarak kullanılan – işareti operatörün hatalı olduğunu belirtmektedir. Bu anlatılanları örnekler ile açıklayacak olursak;

R_5: Eşitliğin olması için eşitliğin sağının ve solunun birbirini kapsaması gerekir yani $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ ise $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ ve $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ olmalıdır.

$y \in f(C \cap D) \Rightarrow y \in f(C) \cap f(D)$ o zaman $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ dır. $y \in f(C) \cap f(D) \Rightarrow y \in f(C \cap D)$ o zaman $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$'dır, operatöründe görüldüğü gibi 5. Operatör olduğu ve doğru olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır.

$R^{-}{}_{21}$: $f: A \rightarrow B$'ye tanımlı bir fonksiyon için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ise f birebir fonksiyondur, operatörü ise 21.operatör olduğu ve hatalı olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır.

cK¢ teorisinin diğer bileşeni olan temsil kümesi modelin orijinal simgesine bağlı kalınarak L harfi ile gösterilmiştir. L temsil kümesi operatör ve problem kümesinde olan her türlü cebirsel dil, matematik yazılımlar, grafik, sembol, simge vb. gösterimlerden oluşan küme olduğu için iki teoremin analizi bittikten ve operatörler belirlendikten sonra genel bir analizi yapılarak ifade edilmiştir. Bu durum aşağıdaki gibi örneklendirilebilir;

L: Boş kümenin görüntüsünü $f(\emptyset) = \emptyset$ ifadesi ile gösterme.

L: "$f(C \cap D) \in B$" ifadesini yazma.

L: Fonksiyonun tersi olma özelliğini sözel olarak belirtme.

L: g fonksiyonunun tersi ile g fonksiyonunun bileşkesinin eşitliğini $(g^{-1}\ o\ g) = I_B$ şeklinde gösterme.

Öğrencilerin yaptıkları açıklamalara ve verdikleri cevaplara bakılarak sahip oldukları anlayışların dayandıkları kontrol yapıları mümkün olduğunca belirlenmeye çalışılmıştır. Ancak öğrencilerin yaptıkları işlemleri doğrulamayı, öğrenci ile ortam döngüsünün dinamik dengeye ulaşıp ulaşamadığını yani öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini denetlemeyi, karar almayı ve yargıda bulunmayı sağlayan bu bileşeni ortaya koymak oldukça zordur. Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde öğrencilerin kullandıkları bilgileri, matematiksel dili ve sembolleri neden ve nasıl kullandıklarını açıklayamadıklarının ve yaptıkları hataların farkına varamadıklarının gözlemlenmesi kontrol yapılarının ortaya çıkarılmasındaki güçlüğü doğrular niteliktedir. Bu anlatılanları örnek ile açıklayacak olursak;

Ö6: …tamam eşitliği göstermiş oluyoruz her iki yönde de göstereceğiz.

A: Her iki yönde göstereceğiz derken ne mesela her iki yönden kastın?

Ö6: Hocam belki cebirden dolayı böyle bir şey olmaya başladı hem soldan hem sağdan ancak ve ancak gibi muhabbeti yani.

Öğrencilerin kullandığı $R^{-}{}_{16}$: Eşitlik gösterilirken gerek ve yeter koşulun (ancak ve ancak) sağlanması gerekir, hatalı operatörü ile karşılaştığımız bu durum için belirlenen kontrol önermesi "P ile Q birer önerme ise $P \Leftrightarrow Q$ bileşik önermesi, $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$" olarak kabul edilmiş ve ilgili bölümde belirtilmiştir.

Öğrencilerin teoremlere verdikleri cevaplar ve onlarla yapılan görüşmeler tekrar belirlenmiştir. Analizde kararsız kalınan bölümlerde araştırmacı, alan uzmanı akademisyenle tartışarak ortak bir düşüncede uzlaşma sağlanmış ve analizin son haline karar vermiştir.

Bölüm 4

Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde fonksiyon kavramı ile ilgili verilen iki teoremin, her sınıf düzeyinde iki öğrenci ile yapılan uygulamalarının cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre analizinden elde edilen bulgular; öğrencilerle yapılan görüşmelerden ve yazılı kâğıtlarından belirlenen operatörler (R), öğrencilerin kullandıkları gösterimler (L) ve öğrencilerin çözümlerini dayandırdıkları tahmin edilen kontrol yapısı (∑) örnek öğrenci cevapları ile birlikte sunulmuştur. Öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalardan ve yazılı kâğıtlarından yola çıkılarak belirlenen operatörler iki teorem için de ayrı ayrı sınıf düzeylerine göre sunulmuştur. Operatörlerle ilgili bulguların ve yorumların yanı sıra operatör kümesinde olan her türlü cebirsel dil, matematik yazılımlar, sembol ve simge gibi gösterimler (Balacheff & Gaudin, 2002) ve kontrol yapıları ile ilgili bulgular ve yorumlar da ayrı başlıklar altında sunulmuştur.

Fonksiyonlar Konusunda Belirlenen Operatörler

Birinci Teorem

$f: A \to B$, f fonksiyonu birebirdir $\Leftrightarrow$ $\forall\ C, D \subset A$ için $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu gösteriniz.

Birinci Sınıf. Ö1 ve Ö2 teoremi okuduktan sonra çift yönlü olan ancak ve ancak bağlacının gerekliliğinden dolayı fonksiyonun birebir olduğunu kabul edip eşitliğin doğru olduğunu göstereceklerini daha sonra da eşitliğin doğruluğunu kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstereceklerini açıklayarak kanıta nasıl başlayacaklarını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Bu aşamada R_1: Ancak ve ancak önermesinde önce sol tarafı kabul edip sağ tarafın doğruluğu gösterilirken sonra sağ tarafın doğruluğu kabul edilip sol tarafın doğruluğu gösterilir, operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Burada birebir fonksiyonun tanımını, tanım kümesinden aldıkları her elemanın görüntüleri eşit ise bu elemanların da birbirine eşit olacağını ifade ederek ve R_2: $f: A \to B$ olsun $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow$

$x_1 = x_2$ oluyor ise f birebir fonksiyondur, operatörünü kullanarak yaptıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 2 ve Şekil 3). Her iki öğrenci de kanıta başladıklarında kullandıkları ifadelerin ve tanımların matematiksel gösterimlerine yani sembol kullanımlarının doğru bir şekilde ifade edilmesi üzerinde zaman harcamışlardır. Ö2 kullandığı sembollerin anlamını ve gerekçesini ifade edebilirken Ö1 bu sembollerin aslında ne anlama geldiğini bilmesine rağmen nerede ve nasıl kullanması gerektiği konusunda sıkıntılar yaşamıştır. Ö1 arkadaşı Ö2'nin açıklamaları ile birlikte derste gördükleri önceden bildiği doğruları kullanarak ifadeleri anlamak ve içselleştirmek yerine biçime odaklanarak ikna olmuştur. Yapılan görüşmeler bunu gösterir niteliktedir;

Ö2: Kanıtın başına da parantez içinde sağa doğru giden ise'yi yapalım.

Ö1: Soyut matematikteki gibi paranteze alalım tamam.

Ö2: Sonra da asıl kanıtımıza başlayacağız sadece gösterim olarak karışıklık çıkmasın istedim o zaman şey diyeceğiz.

Ö1: Ben öyle demeyeyim yani çünkü iki tane ise kullanırız bu sefer de ben direk şey diyeyim.

Ö2: İki tane ise kullanmıyoruz ki burada şey kullanacağız karşılıklı kapsama olduğunu göstermek isteyeceğiz tabi orada eleman seçtiğinde tabi ise'yi kullanacağız da bir sorun yaratacağını düşünmüyorum ben.

Ö1: Yazayım o zaman şimdilik.

Her iki öğrenci de birebir fonksiyon ve fonksiyon tanımlarını doğru bir şekilde yapmışlardır ve R_3:$f: A \to B$'ye tanımlı bir fonksiyon ise $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ dir, operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 2 ve Şekil 3). Öğrenciler R_2 ve R_3 operatörlerini doğru bir şekilde kullanmalarına rağmen Ö1 sembol kullanımında yine kararsızlık yaşamıştır ve Ö2'nin açıklamalarıyla ikna olmuştur. Yapılan görüşmeler de bunları gösterir niteliktedir;

Ö1: Her x_1, $x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ olur ve hatta ancak ve ancak da diyebiliriz aslında burada çünkü $x_1 = x_2$ ise $f(x_1)$ de $f(x_2)$ sağlar çünkü f bir fonksiyon olsun diye kabul etmiştik o yüzden de ancak ve ancak da koyabiliriz hani önce 1-1 dir şeklinde tanım yaptığımızda f A'dan B'ye giderken her x_1, $x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ diyebiliriz.

Ö2: Ama ancak ve ancak demeye gerek yok ki zaten başında bir fonksiyon olduğunu belirttik o yüzden $x_1 = x_2$ise $f(x_1) = f(x_2)$ zaten fonksiyonun tanımından geliyor.

Ö2: Şey için dedim matematiksel dil için zaten f 1-1 dir ancak ve ancak her x_1, $x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ cümle bitmiş oluyor aslında o koşula girmeye hiç gerek kalmıyor sanırım.

Ö1: Evet şöyle yazabiliriz f birebir olduğundan her x_1, $x_2 \in C$ ve D içinde yine aynı şekilde sağlar.

Ö2: Sonuçta bu f olduğu için bizim bunları B'den almamız gerekiyor yani $f(C \cap D)$ de B'nin bir elmanı ise o zaman $C \cap D$ ise A'nın bir elemanı olacak.

Öğrenciler kanıta başlamak için C ve D kümeleri üzerinde çalışacaklarını ifade ederek elemanları aldıkları kümeleri belirlemişlerdir. Ve R_4: $f: A \to B$ f fonksiyonu A kümesinde tanımlı olduğu için A 'nın tüm alt kümelerinden alınan elemanlar için f birebir fonksiyon olma koşulunu sağlar, operatörünü kullanarak A' nın her alt kümesinden aldıkları elemanların da teoremin koşullarını sağlayacağını ve bu kümeler üzerinde işlem yapabileceklerini belirtmişlerdir. Ve fonksiyonun birebir olma koşulunu kabul edip eşitliği gösterebilmeleri için eşitlik kavramını doğru bir şekilde R_5: Eşitliğin olması için eşitliğin sağının ve solunun birbirini kapsaması gerekir yani $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ ise $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ ve $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ olmalıdır. $y \in f(C \cap D) \Rightarrow y \in f(C) \cap f(D)$ o zaman $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ dır. $y \in f(C) \cap f(D) \Rightarrow y \in f(C \cap D)$ o zaman $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ dır, operatörünü kullanarak belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 2 ve Şekil 3). Bu eşitliği göstermek için A'nın alt kümesi olan C ve D 'nin kesişim kümesinin tanım ve değer kümelerini, $R^-{}_6$: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve ∀ C, D ⊂ A için $C \cap D \in A$ ise $f(C \cap D) \in B$ olur, hatalı operatörünü kullanarak ifade etmişlerdir. Ö2 tanım kümesinden alınan her elemanın fonksiyon tarafından oluşturulan görüntü kümesinin tanımladığı R_7: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve ∀ C, D ⊂ A için $y \in f(C \cap D)$ ise $\exists\, x \in C \cap D$ vardır ve $f(x) = y$ ile gösterilir, operatörünü doğru bir şekilde ifade etmiştir (Bkz. Şekil 2). Fakat Ö1 bu gösterimin örten fonksiyon tanımı olduğunu ifade ederek $R^-{}_8$: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon örten ise her $y \in f(C \cap D)$ ise $\exists$ x vardır ki $x \in C \cap D$ ve $f(x) = y$'dir, hatalı operatörünü kullanmalarını sağlamıştır (Bkz. Şekil 3). Burada her iki öğrenci de değer ve görüntü kümelerinin ne olduğunu bilmelerine rağmen matematiksel gösterim olarak değer kümesi ile görüntü kümesinin farkını anlayamamışlardır.

Öğrenciler görüntü kümesinden aldıkları her elmanın mutlaka tanım kümesinde bir karşılığı olacağını örtenliğin tanımı olan değer kümesindeki tüm elemanların en az bir tanım kümesinde karşılığı olması ifadesi ile karıştırmışlardır. Aslında doğru bir şekilde ifade ettikleri bu tanımları matematiksel gösterim ve sembollerin anlamlarının tam olarak içselleştiremedikleri için kullandıkları operatörlerinin anlamlarını düşünmeden sembolik bir dil oluşturmaya odaklandıkları görülmektedir. Bu süreçte Ö1'nin arkadaşını ikna etmek için R_9: Fonksiyonun tanım kümesinde boşta eleman kalamaz ama f'nin değer kümesinde boşta elaman kalabilir , R_{10}: Birebir ve örten olan bir fonksiyonun tersi vardır, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrenciler elemanları aslında görüntü kümesinden aldıklarını dolayısıyla bu değerin tanım kümesinde bir elemana karşılık gelmesi gerekliliğinin örtenlik ile ilgisi olmadığını anlamlandırmadan kanıta devam etmişlerdir.

Öğrencilerin kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine belirli bir formu veya şekli düşünerek biçime odaklandıkları için ritüel kanıt şemasına sahip oldukları görülmüştür. Yapılan görüşmeler bunu gösterir niteliktedir;

Ö2: Her $y \in f(C \cap D)$ ise öyle bir x vardır ki $x \in C \cap D$ de ve $f(x) = y$.

Ö1: benim kafam karıştı

Ö2: yoo kafanın karışacak bir şey yok hatta bir ara soyuta bunu kullanmıştık hatırlıyor musun bilmiyorum

Ö1: hı hı en bir x eleman vardır ki x ∈ $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$ f(x)=y biçiminde bu aslında örtenlik değil mi

Ö1: Hı hı en bir x eleman vardır ki $x \in C \cap D$, $f(x) = y$.

Ö2: Dimi bu örtenlik oldu.

Ö1: Çünkü bir saniye bu örtenlik oldu biraz.

Ö2: Doğru her y için doğru doğru örtenlik oldu.

Ö1: Bunu söyleyebilmek için f'in örten olması gerekiyor.

Ö1: f birebir ama mesela f örten olmak zorunda değil mesela f'nin tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak fonksiyon olduğu için ama f'nin değer kümesinde boşta elaman kalabilir.

Ö2: Doğru evet doğru dedin anladım doğru.

Ö1: Tersinir bir fonksiyon olmak zorunda değil.

A: Nasıl ilerleyeceğiz peki burada denediniz mi ilerlemeyi?

Ö2: İlerleyince hani dedik ya öyle bir x vardır diye $x \in C$ ve $x \in D$ olmuş oluyor aslında ve $f(x) = y$ kuralımız hala duruyor şimdi buradan y' ye geçiş yapacağız ya yani aslında şey demiş olacağız $f(x) \in f(C)$ olmuş olacak…

Ö1: Az öncekiyle mi ilerleyelim diyorsun sen.

Ö2: Aynen bir mantıklı geldi bu örtenlik tanımı gibi ama yine de şey geçiş yaparken sonuçta biz y ile başladık ve sonunda y bulmamız gerekiyor…

Ö1: Görüntü kümesinden aldığımız her f(x) ler için ve $f(C \cap D)$ ler için baktığımız zaman her f(x)∈ $f(C \cap D)$ ler için öyle bir x var bana göre de var ve x ∈ $C \cap D$ de …

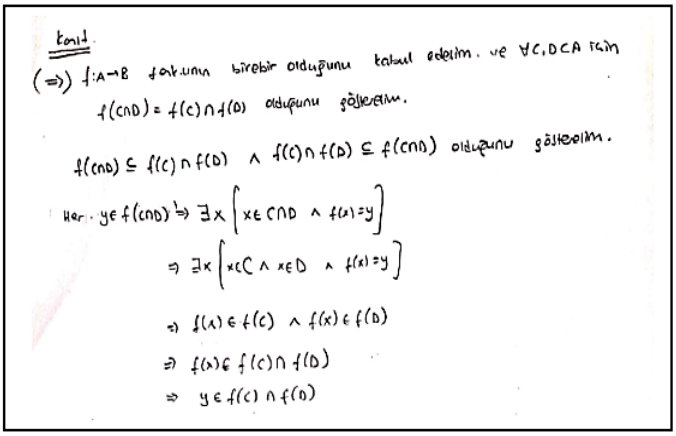
Ö2 kanıtına devam ederken R_5, $R^-{}_6$ ve $R^-{}_8$ operatörlerini ve $f(C \cap D)$'den aldığı bir y elemanın görüntü kümesi tanımından tanım kümesinde yani $C \cap D$ 'de en az bir x elamanı olacağını ifade etmiş, bu x elemanının kesişimin tanımından dolayı her iki kümeye de ait olduğunu söylemiş ve $f(x)$'i oluşturarak bu görüntünün de $f(C)$ ve $f(D)$ görüntülerinin elemanı olduğunu yine görüntü kümesi tanımından oluşturmuştur ve R_{11}: $x \in C \cap D \Leftrightarrow x \in C \wedge x \in D$ dedir. Ve $f(x) = y$ olduğundan $x \in C \wedge x \in D \Leftrightarrow [f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)]$ dir. Ve $[f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)] \Leftrightarrow f(x) \in [f(C) \cap f(D)]$'dir, operatörünü kullanarak $f(C \cap D)$'den aldığı elemanı $f(C) \cap f(D)$'de göstererek alt küme tanımının gerekliliğini yapmıştır ve $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ olduğunu göstermiştir (Bkz. Şekil 2). Yapılan görüşmelerde $R^-{}_8$ hatalı operatörü kullanmaya devam ederek yaptığı işlemi açıklayamamıştır.

Ö2 örtenlik tanımı ile görüntü kümesinin tanımını karıştırdığını fark etmeyerek kanıtına devam etmiştir. Ö2 kanıtın bu kısmında genellenebilir durumlar ve tanımlar kullanarak doğru matematiksel adımları takip etmiş olmasına rağmen kanıt sürecini anlamlandırmak ve doğru geçişleri sağlamaktan ziyade kanıtın belirli bir formu veya şekli olduğunu kabul ederek önceden bildiği doğruları kullanmıştır. Dolayısıyla Ö2'nin ritüel kanıt şemasına sahip olduğu tespit edilmiştir. Ö2'nin açıklamaları aşağıda verilmiştir;

Ö2: Ben karşılıklı olarak kapsama yapıyorduk ya eşitliği göstermek için ilk başta $f(C \cap D)$'den bir eleman aldım bir y elemanı aldım ve bu aynı y elemanın $f(C) \cap f(D)$ de bulmak istiyorum kapsamayı gösterebilmek için sonra bir tane x tanımladım bu x'in $C \cap D$'de olduğunu söyledim ve kuralım $f(x) = y$ olduğunu söyledim ….

Şekil 2

Ö2'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


Kanıt.

$(\Rightarrow)$ $f: A \to B$ fonksiyonun birebir olduğunu kabul edelim. ve $\forall C, D \subset A$ için $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu gösterelim.

$f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D) \wedge f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$ olduğunu gösterelim.

Her $y \in f(C \cap D) \Rightarrow \exists x \left[x \in C \cap D \wedge f(x) = y \right]$

$\Rightarrow \exists x \left[x \in C \wedge x \in D \wedge f(x) = y \right]$

$\Rightarrow f(x) \in f(C) \wedge f(x) \in f(D)$

$\Rightarrow f(x) \in f(C) \cap f(D)$

$\Rightarrow y \in f(C) \cap f(D)$

Ö1 eşitliğin ilk tarafı olan $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ göstermek için Ö2 ile aynı R_5, $R^-{}_6$, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanmasına ve aslında aynı işlem adımlarını takip etmesine rağmen kanıtına $C \cap D$'den yani tanım kümesinde bir eleman alarak başlamış ve daha sonra aldığı bu elemanın görüntüsünü oluşturup görüntü kümesi tanımını kullanarak devam etmiştir. Yani $f(C \cap D)$'den bir elaman alarak alt kümenin tanımı gereği aynı elemanın $f(C) \cap f(D)$'de olması gerektiği bilgisini anlamlandırmadan ve gerekçelerini açıklamadan tanım kümesinden bir eleman alarak kanıtına devam etmiştir (Bkz. Şekil 3). Ö1'in açıklamaları aşağıda verilmiştir;

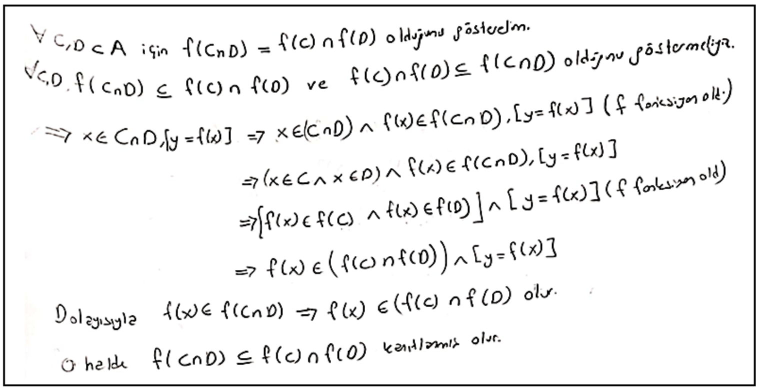
A: Sende mi buradan gidiyorsun?

Ö1: Evet hocam ben birbirinin alt kümesi olduğunu göstermeliyiz dedikten sonra $x \in C \cap D$ ile başlamak istedim o arada biraz düşündüm hani biraz kafam karıştı oradan ilerlemek istemedim o yüzden $x \in C \cap D$ olsun diye başladım…

Ö1 görüntü kümesi olan $f(C \cap D)$'den bir eleman aldığında eğer $f(C) \cap f(D)$'de de aynı elamanın olduğu gösteriliyorsa alt kümeden bahsedileceğini bilmesine rağmen kanıtına bu şekilde başlamamış, sonrasında doğru ve anlamlı işlem basamaklarını takip ederek kanıtını tamamlamıştır. Ö1 aslında $x \in C \cap D$ aldığı elemanın $f(x) \in f(C \cap D)$ şeklinde görüntüsünü oluşturarak işlemlerini matematiksel olarak doğru ve anlamlı bir şekilde yapmıştır fakat kanıtının açıklamasını yapması istendiğinde tanım kümesinden bir eleman alarak başlaması gerektiğini ifade etmiştir. Kanıtındaki tüm aşamaları ve kavramları bilmesine rağmen açıklamasındaki hatayı fark edememiştir. Buda Ö1'nin matematiksel olarak doğru bir dil kullanarak sembolik dile çok önem verdiğini ve daha çok biçime odaklandığını ama bazı adımları içselleştirmediğini göstermektedir. Bu süreçte Ö1'nin ritüel kanıt şemasına sahip olduğu görülmektedir.

Şekil 3

Ö1'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$\forall C, D \subset A$ için $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu gösterelim.
$\forall C, D.\ f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ ve $f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$ olduğunu göstermeliyiz.
$\Rightarrow x \in C \cap D, [y = f(x)] \Rightarrow x \in (C \cap D) \wedge f(x) \in f(C \cap D), [y = f(x)]$ (f fonksiyon old.)
$\Rightarrow (x \in C \wedge x \in D) \wedge f(x) \in f(C \cap D), [y = f(x)]$
$\Rightarrow [f(x) \in f(C) \wedge f(x) \in f(D)] \wedge [y = f(x)]$ (f fonksiyon old)
$\Rightarrow f(x) \in (f(C) \cap f(D)) \wedge [y = f(x)]$
Dolayısıyla $f(x) \in f(C \cap D) \Rightarrow f(x) \in (f(C) \cap f(D)$ olur.
O halde $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ kanıtlanmış olur.

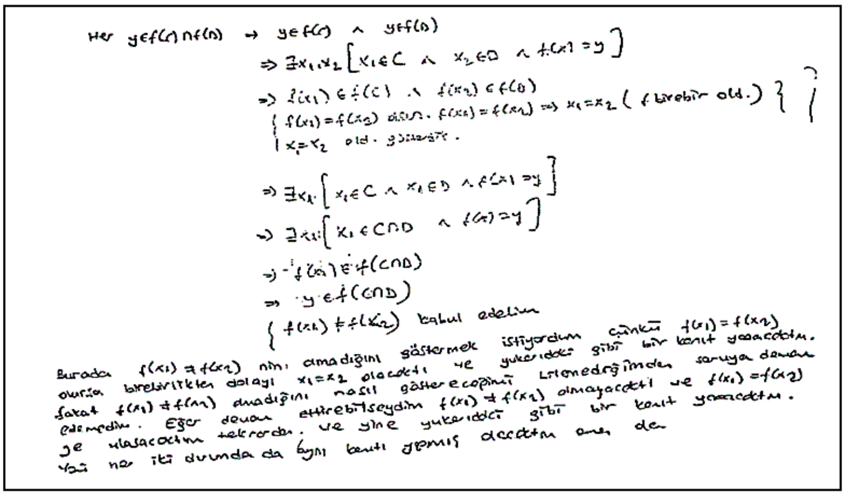
Ö2 eşitliğin diğer tarafını gösterirken bu sefer $f(C) \cap f(D)$'den bir eleman seçip $f(C \cap D)$'de olduğunu göstermesi gerektiğini belirterek kanıtına devam etmiştir. Görüntü kümesinden aldığı y elemanının $x_1\ ve\ x_2$ şeklinde tanım kümesinden elemanlarının olabileceğini söyleyerek bu değerlerin birbirlerine eşit olma durumlarını ve eşit olmama durumlarını incelemesi gerektiğini ifade etmiştir. Eğer $x_1\ ve\ x_2$ elemanlarını aynı kabul ederse bunun fonksiyonun tanımı gereği görüntülerinin de aynı olacağını söyleyerek R_3 operatörünü belirtmiştir ve R_5, $R^{-}{}_8, R_{11}$ operatörlerini kullanarak kanıtını tamamlamıştır (Bkz. Şekil 4). Ö2 bu $x_1\ ve\ x_2$ elemanlarının fonksiyonun birebir olduğu kabulünden görüntü kümesinden alınan y elemanının $x_1\ ve\ x_2$ olan değerlerinin aynı olması gerektiğini söyleyememiş ve anlamlandıramamıştır. Ve Ö2 $x_1\ ve\ x_2$ elemanlarının farklı olma koşulunda görüntülerinin de farklı olacağını söyleyerek birebir fonksiyon tanımını belirttiği ve R_{12}: $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f$

(x_2) oluyor ise f birebir fonksiyondur, operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Yapılan görüşmelerde fonksiyon tanımı olarak kullandığı R_3 ile birebir fonksiyon tanımı olarak kullandığı R_2 operatörlerinin farkının olup olmadığı sorulduğunda yaptığı bu tanımların doğruluğunu hocasının söylediğini ifade ederek göstermiştir. Ö2 kanıt sürecinde kendini ikna ederken ve yaptıklarının kontrolünü sağlarken hocalarının açıklamalarını gerekçe olarak sunmuştur ve dolayısıyla otoriter kanıt şemasına sahip olduğu tespit edilmiştir. Ö2'nin yaptığı açıklamalar bunları gösterir niteliktedir;

> Ö2: Hatta hocada bize bunu anlatırken şey yapmıştı eee $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ dengi olan yazım $x_1 \neq x_2$ ise $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$' dir. Bu tanımladım ben öyle bir x_1 vardır ki $x_1 \in C$ dir ve $f(x) = y$ dir diye aynı kuralı devam ettirdim ve öyle bir x_2 vardır ki $x_2 \in D$ ve $f(x) = y$ dir dedim sonra $f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_2) \in f(D)$ geldi burada şöyle ara bir parantez açtım $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$' dir. Çünkü fonksiyon olduğundan dolayı böyledir dedim birebirlik tanımıdır bunlar birbirine denktir. Bunlar birbirlerine denktir başlangıçta söylediklerim ama $x_1 = x_2$ise $f(x_1) = f(x_2)$'yi birebirlik ile karıştırmayın demişti bunlar birbirinden farklı şeyler bu zaten fonksiyonun doğası gereği böyledir demişti bize .

Şekil 4

Ö2'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Öğrencilerin her ikisi de $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ olduğunu göstermek için $f(C) \cap f(D)$'den bir y elemanı alıp $f(C \cap D)$'de aynı elemanı göstermeleri gerektiğini söylemelerine rağmen görüntü kümesinden aldıkları y'nin tanım kümesindeki x değerlerini belirlerken zorlanmışlardır. Ve aralarında tartışırlarken Ö1, x'leri aldıkları C ve D kümelerinin A'nın her alt kümesinden seçilebileceği için bu kümelerin boş küme de olabileceğini ileri sürmüştür. Ö2, Ö1'nin bu açıklamalarına karşı, aldıkları y elemanının tanım kümesinde olan x değerinin $C \cap D$'de olduğunu dolayısıyla kesişimlerinde eleman olan kümelerin boş küme olamayacağını belirtmiştir. Ve R_{13}: Elemanı olan küme boş küme değildir, R_{14}: Boş küme her kümenin alt kümesidir, R_{15}: f: $A \to B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere A'daki elemanın B'de bir elemana karşılık gelmesi gerekir. Ve boş kümenin görüntüsü boştur yani $f(\emptyset) = \emptyset$ dir, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen konuşma aşağıdadır;

Ö2: Yok şey oluyor $x \in C$ ve $x \in D$ dedim ya o zaman direk şey derim bunları aynı x'miş gibi kabul edip $x \in C \cap D$ demiş olurum ve $f(x) = y$'idi buradan da $f(x) \in f(C \cap D)$'ye geçmiş oldum başlangıçtaki o $f(x)$'de aslında y' idi $y \in f(C \cap D)$ olmuş oldu. Ama ben böyle düşünmedim şöyle yaptım her ikisinden farklı x'ler verdim. Seçerken mesela x_1 seçtim dedim ki öyle bir x_1 vardır ki $x_1 \in C$ ve $f(x) = y$ biçiminde.

Ö1: Ama şey boş küme de olabilir C boş küme de olabilir çünkü her C ve D için sağlaması gerekiyor hani illa böyle bir eleman olması da şart değil.

Ö2: Hmm bir dakika o zaman öyle düşünelim.

Ö1: C ve D boş kümelerde olabilir hatta bunların kesişimleri de boş küme olabilir belki kendileri de boş küme olabilir veya kesişimleri boş küme de çıkabilir.

Ö2: Dur sorunun başlangıcında ne demiş gerçi her alt kümesi için demiş doğru boş küme de A'nın sonuçta alt kümesi bak birincide o ilk kapsamada sıkıntı çıkmaz çünkü $f(C \cap D)$'den bir y eleman aldığımızda bir x belirledik ve direk $C \cap$

D'de bir eleman bulduk zaten kesişimlerinde eleman varsa demek ki bunlar boş küme değil burada bir sıkıntı çıkmıyor ama.

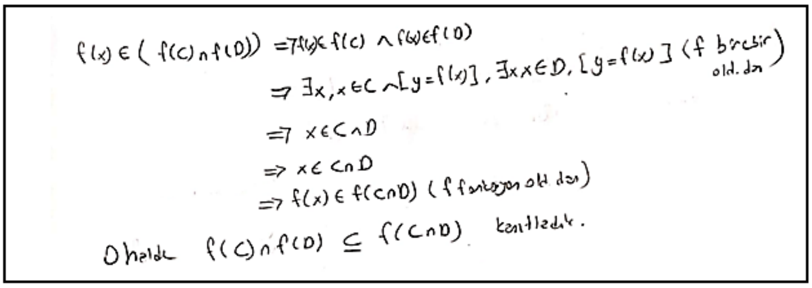
Ö2: Fonksiyon oluşundan deriz sonuçta $f(C)$'de öyle bir eleman varsa bu fonksiyon oluşundan sonuçta var olmayan bir şeyi karşı tarafa nasıl aktarırsın ki hani bağlayabilirsin A'dan B'ye tanımlıyoruz ya A'daki o elemanın B'de bir karşılık bulması gerekiyor bir karşılık bulduysa demek ki başlangıcı yani tanım kümesinde bir eleman varmış yani boş değilmiş öyle düşünelim.

Ö1 $f(C) \cap f(D)$'den aldığı y elemanını $f(\ C \cap D)$'de de göstermesi gerektiğini açıklayarak aldığı bu y elemanının kesişimin tanımı gereğinden hem $f(C)$ hem de $f(D)$'de olacağını ifade etmiştir. Daha sonrasında fonksiyonun tanımını kullanarak $x_1\ ve\ x_2$ değerlerine sahip olabileceğini fakat fonksiyonun birebir olma kabulünden dolayı bu y değerlerinin aynı x değerine sahip olması gerektiğini doğru ve anlamlı bir şekilde açıklamıştır. Ve R_2, R_5, $R^-{}_6$, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanarak kanıtını tamamladığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 5). Ö1'in yaptığı açıklamalar aşağıdadır;

Ö1: f'nin birebir olduğunu kabul etmiştik ve $f(C) \cap f(D)$ ise $f(\ C \cap D)$'yi kanıtlıyorduk o yüzden $f(C) \cap f(D)$'den bir eleman aldık bu eleman $f(x)$ eleman dedik eee $f(x) \in f(C) \cap f(D)$ ise $f(x) \in f(C)$'dedir $f(x) \in f(C)$ ve $f(x) \in f(D)$ sonra öyle bir x vardır ki $x \in C$ ve $y = f(x)$ biçiminde ve öyle bir x var ki $x \in D$ ve $y = f(x)$ biçiminde ve bir tane x değeri yazdım bunu f'in birebir olmasından dolayı yazdım çünkü aksi takdirde iki tane x değeri olsaydı hani bu iki tane x değeri sadece bir tane mi y değerine gidecekti öyle olsaydı zaten birebir olmazdı o sebeple bir tane x olmalı dedim.

Şekil 5

Ö1'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$f(x) \in (f(C) \cap f(D)) \Rightarrow f(x) \in f(C) \wedge f(x) \in f(D)$

$\Rightarrow \exists x, x \in C \wedge [y = f(x)], \exists x\, x \in D, [y = f(x)]$ (f birebir old. dan)

$\Rightarrow x \in C \wedge D$

$\Rightarrow x \in C \cap D$

$\Rightarrow f(x) \in f(C \cap D)$ (f fonksiyon old. dan)

O halde $f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$ kanıtladık.

Ö1 yaptığı kanıtta birebir fonksiyonun gerekliliğini nerede ve nasıl kullandığını Ö2'ye açıklamasına rağmen Ö2 ikna olmayarak ve eğer bu şekilde ortak bir x değeriyle yazılabiliyorsa neden ise yerine ancak ve ancak bağlacını kullanıp çift yönlü olarak sağladığını kabul etmediklerini sorgulamıştır. Ö2 burada daha önceden derste öğrendikleri kanıt akışını anlamlandırmadan yaptığı kanıta aktarmak istemiştir. Ö2'nin bu ifadesinde R^{-}_{16}: Eşitlik gösterilirken gerek ve yeter koşulun (ancak ve ancak) sağlanması gerekir, operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin her ikisi de bu teoremde göstermeye çalıştıkları eşitlik ifadesinin kanıtında neden ancak ve ancak bağlacıyla ifade edemeyeceklerini açıklayamamışlardır. Eşitliğin ilk kısmını gösterirken fonksiyonun birebir olma koşuluna gerek olmadığını ancak eşitliğin diğer tarafında geçişleri sağlayabilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğini dolaysıyla kanıtın doğrudan tersine dönemeyeceğini bu yüzden de ancak ve ancak bağlacını kullanamayacaklarını açıklayamamışlardır. Ö1 fonksiyonun birebir olma özelliğini kullandığı yeri anlamlı ve doğru bir şekilde açıklamıştır. Fakat eşitliğin ilk tarafında tanım kümesinden eleman alarak kanıtına devam ettiği ve alt küme tanımını bilmesine rağmen eleman seçiminde yaptığı bu hatayı fark edemediğinden dolayı farklı bir şekilde kanıtına devam ettiğini düşünerek ancak ve ancak bağlacını kullanamayacağını açıklamıştır. Ö2 ise eşitliğin ilk kısmında fonksiyonun birebir olmasının gerekmediğini diğer yönünü gösterirken fonksiyonun tanımından dolayı aynı görüntüye sahip farklı x değerleri olabileceğini ancak bunu ortak bir x değerinde yazabilmek ve y elemanının $f(C \cap D)$'de gösterebilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğini görememiştir ve kanıtı tamamlayamamıştır. Öğrencilerin her ikisi de matematiksel dil ve sembolik kullanımında derste gördüklerini ve hocalarının dediklerini yaptıkları işlemlere aktarma eğiliminde olup doğru bir şekilde ifade ettikleri düşünceleri bile anlamlandıramamışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Yapılan görüşmeler bunları gösterir niteliktedir;

Ö2: Ama oradan oraya geçiş kolaydı da diğer türlü sonuçta mesela yukarıdaki şey var ya ilk yaptığımız mesela kapsama onu en aşağıdan yukarıya götürebilir misin? Tekrar karşılıklı olarak ancak ve ancak yapıp ise yapmadan hani kanıt yaparken bazen direk tersine de koyuyoruz ya ok.

Ö1: Şuraya mı $f(C \cap D)$=…. Burası mı?

Ö2: Mesela en sonunda $y \in f(C) \cap f(D)$ bulduk ya oradan tekrar tersine ok yapıp yukarıya çıkabilir misin ?

Ö1: Oradan çıkamayız bence.

Ö2: He niye çıkamayız şey deriz en basitinden $y \in f(C) \cap f(D)$ ise y yerine $f(x)$ deriz $f(x) \in f(C) \cap f(D)$ deriz sonra $f(x) \in f(C)$ ve $f(x) \in f(D)$ demesi kolay olur buraya kadar gelebiliriz ama öyle bir x vardır dedik ya ona geri dönebilir miyiz sence?

Ö1: Buradan geri dönemeyiz galiba ya neden geri dönemeyiz onu düşünüyorum.

Ö2: Çünkü bak geri dönemeyiz dedik ama sen az önce sen bir şekilde geçebildin oraya aslında aynısını yazmış oldun yukarıdakinin.

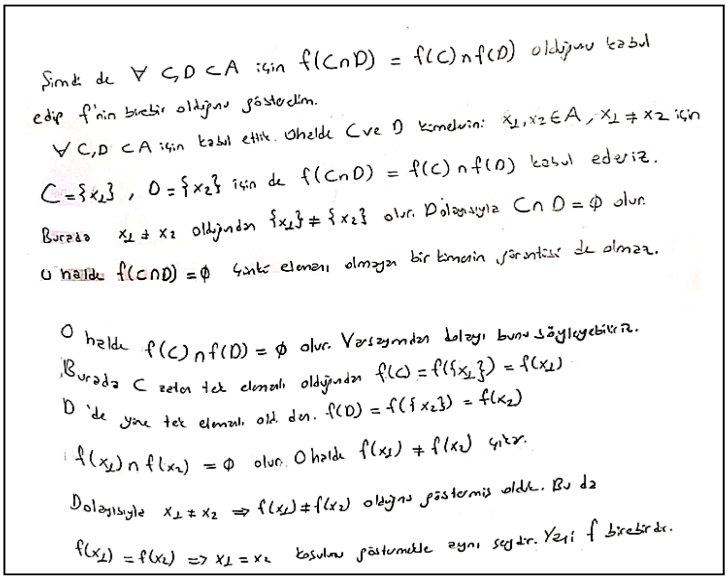
Ö1: Aslında ben direk geri dönmeye çalışmadım farklı bir şey yazdım $f(x) \in f(C) \cap f(D)$ diye yazdım öncekini düşünmeden buradan sonra yapmaya çalıştım f birebir olduğundan tek bir x vardır dedim.

Ö1 kanıtına devam ederken $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu tek nokta kümesi vererek göstermeye çalışmış ve verilenlere uygun olacak şekilde kabul üzerinde yerleştirerek genel sonuca varmak istemiştir. Ö1'in bu süreçte R_2, R_{12}, R_{15}, R_{17}: C ve D kümelerin ikisi de tek nokta kümesi olsun ve bunlar $\{x_1\}$ ve $\{x_2\}$ dir , R_{18}: Birbirinden farklı C ve D tek nokta kümelerinin kesişimleri boş kümedir, yani $C \cap D = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ dir ve R_{19}: Ara kesitleri boş küme olan kümeler birbirinden farklıdır, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 6). Ö1, C ve D kümelerini sırasıyla $\{x_1\}$ ve $\{x_2\}$ tek nokta kümesi olarak oluşturmuş ve birbirinden farklı bu kümelerin kesişimlerinin boş küme olacağını ve dolayısıyla görüntülerinin de boş küme olacağını belirtmiştir. Ve eşitliliği kullanarak $f(C) \cap f(D)$'nin boş kümeye eşit olduğunu dolayısıyla kesişimleri boş küme olan iki görüntünün birbirinden farklı olacağını söyleyerek birebirliği gösterdiğini belirtmiştir. Ö1, her C ve D kümesi için bu eşitliği kabul ederek tek nokta kümelerini oluşturduğunu dolayısıyla A kümesinin her alt kümesi için sağladığını ifade ederek kanıtı tamamlamıştır (Bkz. Şekil 6). Ö1'in bu süreçte genel durumları göz önünde bulundurarak amaçlarına yönelik tanımlar, teoremler ve önceden kabul edilmiş diğer doğrular kullanarak kanıt oluşturduğu için dönüşümsel kanıt şemasına sahip olduğu tespit edilmiştir. Ö1'in açıklamaları bu durumu göstermektedir;

> Ö1: ….. C ve D kümelerine her türlü şey yapabilirim kombinleyebilirim C ve D kümelerini ikisine de tek nokta mesela C kümesine tek nokta x_1 dedim D kümesine de tek nokta x_2 dedim ve $x_1, x_2 \in A$ olsun ve x_1 ile x_2 farklı olsun dedim çünkü hepsi için sağlanıyorsa yani her C, D altküme A için sağlanıyorsa zaten C ve D'ye tek nokta x_1 ya da tek nokta x_2 desek de yine sağlanır…. dolayısıyla C ve D kümesi zaten farklı ve dolayısıyla $C \cap D$ boş küme olur o halde boş kümelerin görüntüsü olamaz zaten boş kümedir ….

Şekil 6

Ö1'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


Şimdi de $\forall\, C, D \subset A$ için $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ olduğunu kabul
edip f'nin birebir olduğunu gösterdim.
$\forall\, C, D \subset A$ için kabul ettik. Ohalde C ve D kümelerini: $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ için
$C=\{x_1\}$, $D=\{x_2\}$ için de $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ kabul ederiz.
Burada $x_1 \neq x_2$ olduğundan $\{x_1\} \neq \{x_2\}$ olur. Dolayısıyla $C\cap D = \emptyset$ olur.
O halde $f(C\cap D) = \emptyset$ çünkü elemanı olmayan bir kümenin görüntüsü de olmaz.
O halde $f(C)\cap f(D) = \emptyset$ olur. Varsayımdan dolayı bunu söyleyebiliriz.
Burada C zaten tek elemanlı olduğundan $f(C) = f(\{x_1\}) = f(x_1)$
D'de yine tek elemanlı old. dan. $f(D) = f(\{x_2\}) = f(x_2)$
$f(x_1)\cap f(x_2) = \emptyset$ olur. O halde $f(x_1) \neq f(x_2)$ çıkar.
Dolayısıyla $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğunu göstermiş olduk. Bu da
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ koşulunu göstermekle aynı şeydir. Yani f birebirdir.

Ö2 kanıtına devam ederken $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için $C\cap D$ kümesini tek nokta kümesi alarak kanıtına devam etmek istemiştir. Kesişim kümesi ile bu tek nokta kümesinin farkını alarak başka bir küme oluşturmak istemiş fakat bu kümeden kendisini çıkarttığında boş kümenin geleceğinin farkına varamamış ve tek nokta kümesinin ne anlama geldiği konunda sıkıntı yaşamıştır. Kanıt sürecinde R_2, R_{12}, R_{17}, R_{19} ve R_{20}: $C\cap D = \{x_1\}$, $C\cap D\backslash\{x_1\} = \{x_2\}$ olsun $x_1 \neq x_2$ dir, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 7). Ö2'nin bununla ilgili açıklamaları şu şekildedir;

> Ö2: … f'nin 1-1 olduğunu göstermek içinde her x_1, $x_2 \in A$ için $f\,(x_1) = f\,(x_2)$ ise $x_1 \neq x_2$ iken $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$'dir olduğunu göstermemiz gerekiyor dedim sonra bir şey yapmaya çalıştım hala devamını getiremedim ama bir şey yazdım $C\cap D$ tek nokta x_1 olduğunu kabul ettim sonrasında x_2'de $C\cap D\backslash\{x_1\}$ olsun dedim bu durumda x_1 ve x_2 birbirinden farklı olmuş olur çünkü ara kesitleri boş küme olduğundan bunların aynı olma şansı yok dedim sonra şey olarak f'in 1-1 olduğunu gösterebilmem için bu x_1 ve x_2'nin birbirinden farklı olduğunu öğrendiğimden $x_1 \neq x_2$ ise diye başladım …

Daha sonra Ö1 ile yaptığı görüşmelerde onun yaptığı kanıta ikna olup aynı kanıt adımlarını izlemiş ve R_2, R_{12}, R_{15}, R_{17}, R_{18} ve R_{19} operatörlerini kullanarak kanıtı tamamladığını ifade etmiştir. Ö2 de genel durumları göz önünde bulundurarak amaçlarına yönelik tanımlar, teoremler ve önceden kabul edilmiş diğer doğrular kullanarak kanıtı tamamlamıştır. Bu yüzden Ö2'nin de dönüşümsel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö1 ve Ö2'nin aralarında geçen görüşme aşağıdadır;

Ö2: $C \cap D$'yi tek nokta x_1 olarak kabul ettim x_2'yi de $C \cap D\backslash\{x1\}$ dedim çünkü böyle seçersem x_1, x_2 den farklı olacak.

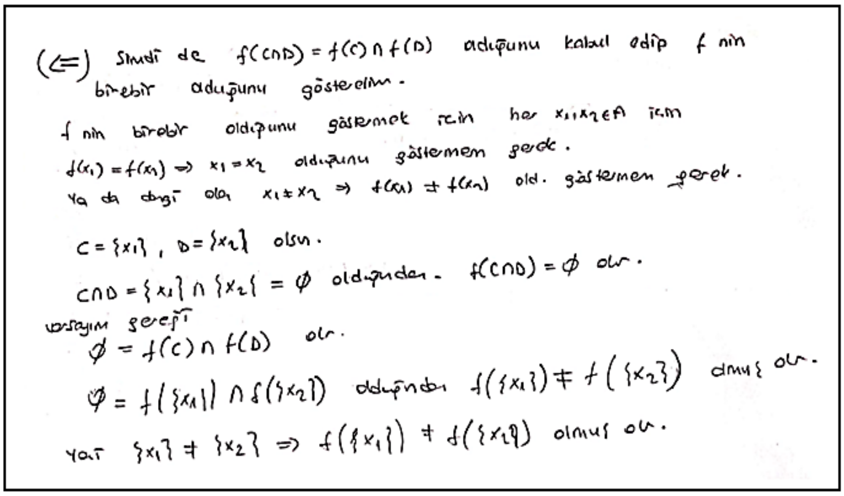
Ö1: Direk C'yi de tek nokta x_1 D'yi de tek nokta x_2 seçsen daha kolay olur bence.

Ö2: Oradan nereye varıyorsun.

Ö1: İstediğimizi seçebiliriz C ve D'yi ama daha kolay olması için ikisine de tek nokta bir küme dedikten sonra bunların kesişimleri boş küme olacak şekilde daha kolaylaşır işimiz direk hani ben oradan yaptım.

Şekil 7

Ö2'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



($\Leftarrow$) Simdi de $f(C\cap D) = f(C) \cap f(D)$ adığunu kabul edip f nin birebir aduğunu gösterelim.

f nin birebir oldığunu göstermek için her $x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oldığunu göstermem gerek.

Ya da dengi olan $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ old. göstermem gerek.

$C = \{x_1\}$, $D = \{x_2\}$ olsun.

$C \cap D = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ oldığundan. $f(C\cap D) = \emptyset$ olr.

varsayım gereği

$\emptyset = f(C) \cap f(D)$ olr.

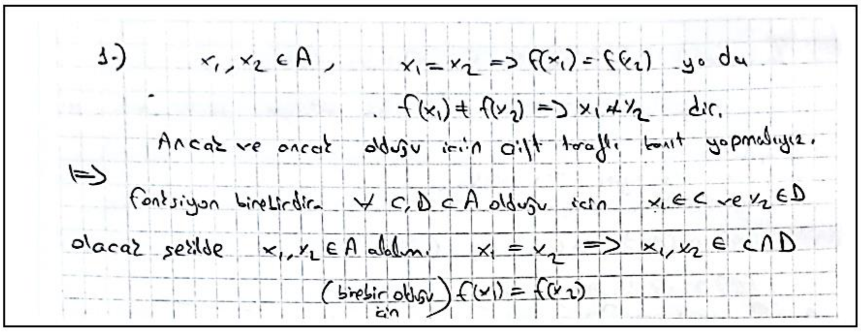
$\emptyset = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$ oldığundan $f(\{x_1\}) \neq f(\{x_2\})$ olmuş olr.

yani $\{x_1\} \neq \{x_2\} \Rightarrow f(\{x_1\}) \neq f(\{x_2\})$ olmuş olr.

İkinci Sınıf. Ö3 ve Ö4 teoremi okuduktan sonra çift koşullu mantık bağlacı olan ancak ve ancak gerektirmesinden dolayı fonksiyonun birebir olduğunu kabul edip eşitliğin doğru olduğunu göstereceklerini daha sonra da eşitliğin doğruluğunu kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstereceklerini açıklayarak kanıta nasıl başlayacaklarını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Ve öğrencilerin R_1 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin her ikisi de kanıta başlarken elemanları hangi kümeden alacaklarını belirlemede zorlanmışlardır ve birebir fonksiyonunun tanımını yaparken fonksiyon olma koşulu ile karıştırarak $R^-{}_{21}$: $f\colon A \to B$'ye tanımlı bir fonksiyon için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ise f birebir fonksiyondur, hatalı operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 8 ve Şekil 9).

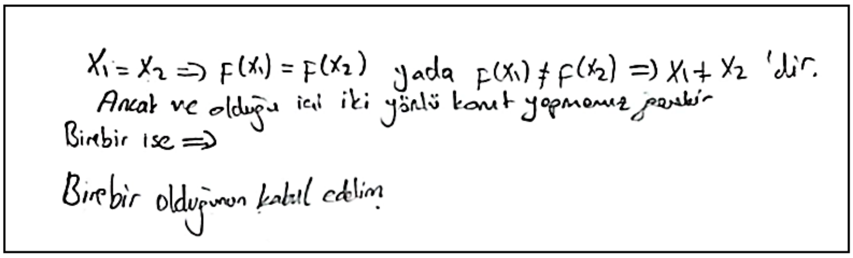
Şekil 8

Ö4'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


1-) $x_1, x_2 \in A$, $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ yoldu
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ dir.
Ancak ve ancak olduğu için çift taraflı kanıt yapmalıyız.
$\Leftarrow$ fonksiyon birebirdir. $\forall\, C, D \subset A$ olduğu için $x_1 \in C$ ve $x_2 \in D$
olacak şekilde $x_1, x_2 \in A$ alalım. $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in C \cap D$
(birebir olduğu için) $f(x_1) = f(x_2)$

Şekil 9

Ö3'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$X_1 = X_2 \Rightarrow F(X_1) = F(X_2)$ yada $F(X_1) \neq F(X_2) \Rightarrow X_1 \neq X_2$ 'dir.
Ancak ve olduğu için iki yönlü kanıt yapmamız gerekir
Birebir ise $\Rightarrow$
Birebir olduğunun kabul edelim

Ö3 ve Ö4 elemanlarını C ve D kümelerinden ayrı ayrı seçmeye karar verdiklerinden tanımladıkları birebir fonksiyonun dengi olan, tanım kümesinden aldığı her elemanın görüntülerinin de farklı olması tanımını hatalı bir şekilde belirtmişlerdir ve $R^-{}_{22}$: $f\colon A \to B$, $y = f(x)$bir fonksiyon için $f\,(x_1) \neq f\,(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ oluyor ise f birebir fonksiyondur, hatalı operatörü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 8 ve Şekil 9). Yapılan görüşmelerde bu durum görülmektedir,

Ö4: Evet ama şimdi C ve D 'den mi alsak onu? Çünkü C ve $D \subset A$ için diyor ya. Yani x_1'i C 'den aldım x_2'yi D 'den alsak.

Ö4: Şimdi, her C ve $D \subset A$ için $x_1 \in C$ ve $x_2 \in D$ olacak şekilde $x_1,\ x_2 \in\ A$ alalım.

Ö3: O zaman şöyle yazalım, açıklayalım. Her C ve $D \in A$ 'nın da alt kümesi olduğu için dedik. Şimdi ne diyelim?

Ö4: Şimdi fonksiyonunun birebir olduğunu kabul etmiştik ya biz. Şimdi $x_1 = x_2$ diyeceğim ama x_1 farklı bir kümede ve x_2 farklı bir kümede. O zaman bence tersinden gidelim, $f(x_1) \neq f(x_2)$ idi ya, ise $x_1 \neq x_2$ idi. Birebirliğin diğer tanımı.

Öğrenciler aralarında tartışarak elemanların hangi kümelerden seçeceklerine karar vermeye çalışmışlardır. Yaptıkları işlemlerin doğruluğunu ya da nedenini açıklayamadan matematiksel dil kullanmaya çalışmışlar ve sadece sembol kullanımına odaklanmışlardır. Ö4 eşitliği göstermek için matematiksel olarak doğru olmayan ve bir mantığa oturtamadığı ifadeleri eşitliği göstermek adına kullanma girişiminde bulunmuştur. Ö4 tanım kümesinden aldığı elemanın görüntüsüne eşit olacağını belirterek hatalı operatör kullanmıştır. Tanım kümesinden aldığı bir elemanın fonksiyonun görüntü kümesi tanımından görüntü kümesinde bir elemanı vardır ancak Ö4 bu bilgiyi yanlış kavramış ve oluşan görüntüleri kümelerin görüntüsüne eşitlemiştir. Ö4 kendini ikna etmek için özel durumlar oluşturmaya çalışmıştır ve indüktif kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö4'ün $R^{-}{}_{23}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ise $f(x_1), f(x_2)$ eşittir $f(C \cap D)$ dir. Ve $x_1, x_2 \in C$ ve $x_1, x_2 \in D$ o zaman $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(C)$, $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(D)$ dir, hatalı operatörü kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 10). Ö4'ün Ö3 ile aralarındaki görüşme aşağıda verilmiştir;

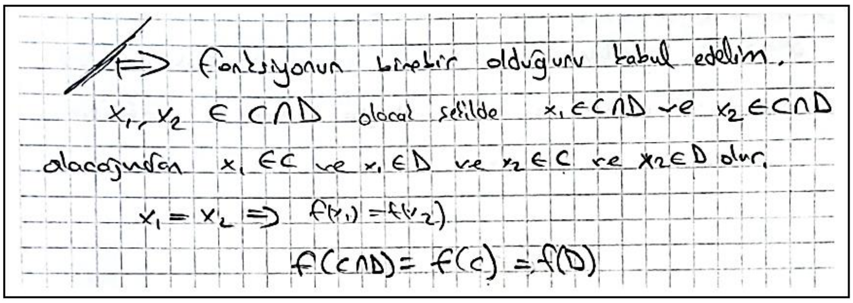
Ö3: Böyle desek daha mantıklı olmaz mı? $x_1, x_2 \in\ C \cap D$ dedik ya, $x_1 \in C$, $x_2 \in D$, zaten $x_1 = x_2$ olduğu için.

Ö4: ....Bence var ya, biz şurada hata yapmış olabiliriz. Hani x_1'i C 'den x_2'yi D 'den aldık ya, bunun yerine x_1, x_2'yi direk $C \cap D$ 'den alsak bence daha doğru bir işlem yaparız diye düşünüyorum şu anda.

Ö4: Şimdi x_1, $C \cap D$ 'nin elemanıydı ya, $f(C \cap D)$ eşittir x_2 de hem C hem de D 'nin elemanı ya, hani oradan ben sadece C 'yi kabul etsem $f(C)$'ye eşitleşem o da aynı zamanda $f(D)$'ye eşitlesem.

Şekil 10

Ö4'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Ö3 ve Ö4 aralarında tartışırken her ikisi de eşitliği nasıl göstereceğini doğru bir şekilde açıklayarak R_5 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö4 eşitliğin varlığını gösterebilmek için $f(C \cap D)$'den bir eleman alarak alt kümenin tanımı gereği aynı elemanın $f(C) \cap f(D)$ olması gerektiğini ve diğer tarafı gösterebilmek için de $f(C) \cap f(D)$'den aldığı y elemanını $f(C \cap D)$'de göstermesi gerektiğini açıklamıştır. Ö3 ise eşitlik kavramının varlığını gösterebilmek için ne yapılması gerektiğini bilmesine rağmen bunun nasıl yapılacağını açıklayamamış, hangi kümelerden eleman alması gerektiğinin farkına varamamış ve işlem adımlarına geçememiştir. Ayrıca matematiksel olarak genel bir terimi ifade etmesi için kullanılan x_1 ve x_2 gibi adlandırılan değerleri sadece yazım benzerliğinden dolayı sıralı ikili terimleriyle karıştırmış neden böyle bir ifade kullandığını anlamlı bir şekilde açıklayamamıştır ve derslerde hocalarının da aynı şekilde yaptığını söylemiştir. Ve $R^-{}_{24}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ve bu elemanlar sıralı ikilidir, hatalı operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Ö3 sıralı ikili kavramının anlamını ve işlevini düşünmeden, sembollerin niteliğini ve niceliğini bilmeden kanıt sürecinde kullanmıştır. Ö3'ün bu süreçte dayanağı olmayan sembolik kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö3 ile Ö4 'ün aralarında geçen görüşme aşağıda verilmiştir;

Ö3: Hocam benim aklıma şimdi geldi de, şöyle yapıyorduk. Eşitlikte her iki tarafın da birbirini kapsadığını göstermemiz gerekiyor.

Ö3: $f(C \cap D)$'nin, $f(x) \in f(C) \cap f(D)$'nin alt kümesi olduğuna, aynı zamanda da $f(x) \in f(C) \cap f(D)$'nin $f(C \cap D)$'nin alt kümesi olduğunu göstermemiz lazım.

Ö4: $f\ (x_1)$, $f\ (x_2)\ \ \in f(C \cap D)$ alalım. Ya eşitliğin hani sağından solundan elemanlar alıp bunların birbirini kapsadığını gösteriyorduk ya.

Ö3: Tamam da bence şöyle yapalım. Şimdi biz hani $C \cap D$ 'den bir eleman alacağız ya

Ö4: Evet.

Ö3: Doğru mu? $C \cap D$ 'den eleman alacağız. Bunların sıralı ikili olması lazım.

Ö4: Hayır neden sıralı ikili olsunlar?

Ö3: Hatırlasana öyle yapıyorduk ya. Yani sen buradan mesela x_1 elemanıdır...hıı doğru, o zaman.

Ö4: Öyle bir şey olmak zorunda değil.

Ö4 kanıtına $f(C \cap D)$'den bir y elemanı alarak başlamış bu y elemanını $f(C) \cap f(D)$'de olduğunu R_5, R_7, R_{11} operatörlerini kullanarak gösterdiği belirlenmiştir. Ö4 matematiksel işlem olarak bir hata yapmamasına rağmen fonksiyonun görüntü kümesi tanımından yazabildiği $x_1 \in C \cap D$ ifadesindeki x_1'in kesişimden dolayı aynı eleman olduğunu görememiştir ve fonksiyonun tanımından yazabileceği $f(\,x_1) \in f(C)$ ve $f(\,x_1) \in f(D)$ ifadelerini fonksiyonun birebir olmasından dolayı yazdığını ifade etmiştir (Bkz. Şekil 11). Ö4 kesişim kümesini, görüntü kümesini ve fonksiyonun birebir olma özelliğini doğru bir şekilde matematiksel dil kullanarak açıklamıştır fakat kanıt sürecinde yaptığı geçişleri anlamlı bir şekilde oluşturamamış ve ifade edememiştir. Ö4 kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederek tamamlamıştır. Bu da Ö4'ün ritüel kanıt şemasına sahip olduğunu göstermektedir. Ö4 'ün görüşmede yaptığı açıklama aşağıdadır;

> Ö4: $x_1 \in C \cap D$ ise $x_1 \in C$ ve $x_1 \in D$ oldu. Şimdi $x_1 \in C$ ve$x_1 \in D$ idi ya, e bu birebirdi. O zaman $f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_1) \in f(D)$ olmaz mı? Fonksiyon birebir olduğu için.

> Ö4: $f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_1) \in f(D)$ olmuş oldu. Ve bağlacı dediğim şey zaten kesişim için kullanıyorduk onu. Otomatik olarak $f(x_1) \in f(C) \cap f(D)$ oldu.

Ö3 ise kanıt sürecinde Ö4'ün yaptığı açıklamalara ikna olarak onun yaptığı işlemleri takip etmiştir. Ve Ö4'ün söylediği ifadeleri onaylayarak kanıt sürecinde pasif olarak hareket etme eğilimini göstermiştir (Bkz. Şekil 12). Ö3 bu süreçte Ö4 ile aynı R_5, R_7, R_{11} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin her ikisi de eşitliğin ilk tarafını doğru bir şekilde yaptıklarını ifade ederek eşitliğin diğer tarafını $f(C) \cap f(D)$'den bir eleman alarak bu elemanı $f(C \cap D)$'de göstermeleri gerektiğini söylemişlerdir. Ancak bu eşitlik kavramının kanıtında ancak ve ancak kullanabileceklerini kanıtın çift taraflı olarak sorunsuz bir şekilde gittiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin ${R^-}_{16}$ hatalı operatörü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 11 ve Şekil 12). Bunu neden bu şekilde düşündükleri sorulduğunda Ö3 hocalarının da derste bu şekilde yaptığını ifade etmiştir. Ö3'ün kendisini ikna etme sürecinde bu açıklamalarıyla otoriter kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Öğrenciler ancak ve ancak ile eşitlik ifadelerinin nasıl gösterildiğini ve nasıl kullanıldığını bilmelerine rağmen bu kavramları kanıtlama sürecine matematiksel dil olarak doğru bir şekilde aktaramamış ve açıklayamamışlardır. Burada ancak ve ancak kullanamayacaklarını, eşitliğin ilk tarafının kanıtında fonksiyonun birebir olması gerekmediğini ikinci kısımda ortak x değeri yazabilmek ve geçişleri sağlayabilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğini anlamlandıramamışlardır. Öğrencilerin her ikisi de matematiksel dil ve sembol kullanımını derste gördükleri ve ders sorumlusunun söylediği şekilde yaptıkları işlemlere aktarma eğilimi göstermiş ve doğru ifade ettikleri düşüncelerini bile kanıtlama sürecinde anlamlandırmada güçlük yaşamışlardır. Öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Görüşmede öğrencilerin arasında geçen konuşma aşağıdaki şekildedir;

Ö4: Şimdi $f(x_1) \in f(C) \cap f(D)$ olacak şekilde bir eleman alsak. Acaba tersi sağlıyor mu diye bir kontrol edelim mi? Şimdi $f(x_1) \in f(C) \cap f(D)$ olsun. O zaman $f(x_1) \in f(C)$ hem de $f(x_1) \in f(D)$ olmuş oluyor.

Ö3: Burada ancak ve ancak sağlar. Ancak ve ancak olur burada.

Ö4: Olur değil mi? Çift taraflı geri dönüyor. Birebir olduğu için de şunu sağlıyor tekrardan, dönüyor.

Ö3: Bence öyle yapalım. Ancak ve ancak olur. İki yönlü de ...

Ö4: O zaman şimdi biz eşitliğin her iki tarafını da kanıtlamış olduk. Sağladığını da göstermiş olduk.

A: Onu da göstermeniz gerekmiyor mu?

Ö3:Hocamız bize iki yönlü de oluyorsa oku atın geçin diyordu.

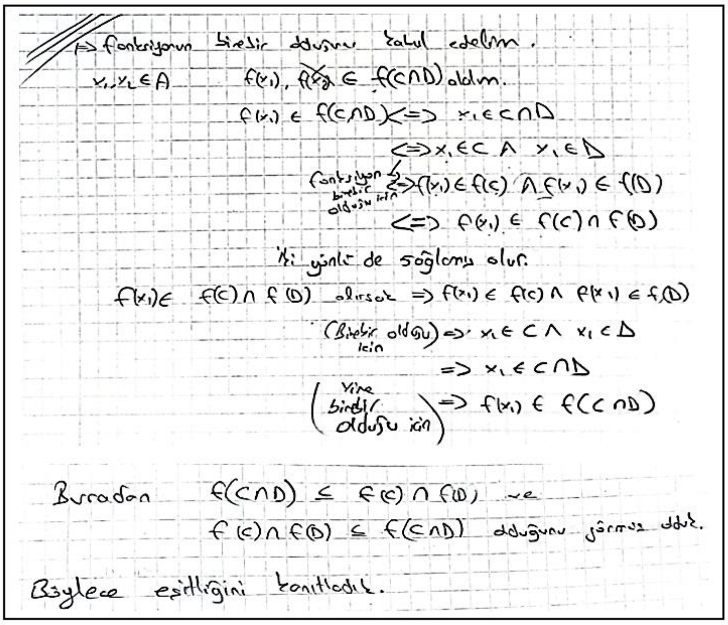
Ö4: Yani direk hani oku göstersek hocam, çift taraflı bir ok yapsak, işte $f(x_1) \in f(C) \cap f(D)$ aldıysak, $f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_1) \in f(D)$ olmuş oluyor. O zaman birebir olduğu için $f(x_1) \in C$....Ne?

Ö3: Şimdi sağ taraftan sol tarafa gitmeye çalışıyoruz.

Ö4: Eşitliğin iki tarafını da göstermek, ancak ve ancak olduğu için iki taraflı kanıt yapmamız gerekiyordu. Biz şu an kanıt biri yapmış olduk ama geri dönüp hani diğer tarafı kanıtlamamış olduk. O zaman yarım yapmış oluyoruz. Yani soru daha bitmedi. Şu anda her $C, D \subset A$ için $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olursa eğer fonksiyonun birebir olduğunu göstermemiz gerekiyor.

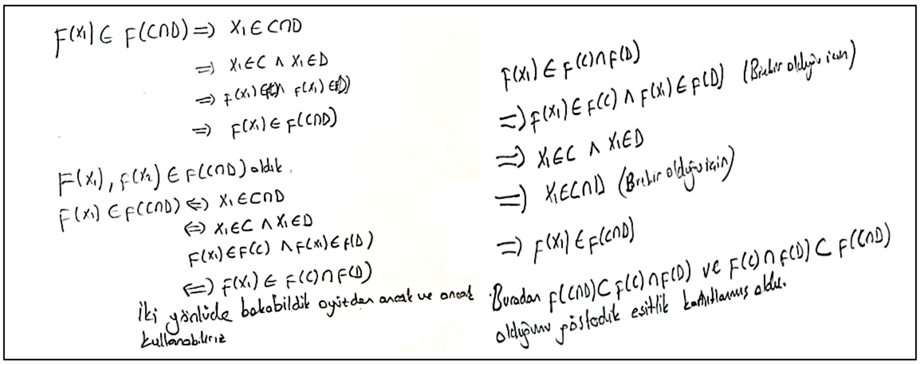
Şekil 11

Ö4'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 12

Ö3'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Ö3 ve Ö4 eşitliğin ilk tarafını kanıtladıklarını ve kendileri için doğru bir kanıt olduğunu söyleyerek ancak ve ancak bağlacının diğer tarafını göstermeleri gerektiğini söylemişlerdir. Yani $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliğini kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeleri gerektiğini ifade etmişlerdir. Aralarında konuşurken birebir fonksiyonun tanımını yanlış yaptıklarını fark edip hatalarını düzeltmişlerdir ve R_2 ve R_{12} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 13 ve Şekil 14). Ö3 ve Ö4'ün aralarında geçen görüşme aşağıda verilmiştir;

Ö3: Hayır, hayır, hayır... $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$...Biz onu sürekli olduğunu karıştırıyorduk ya zaten $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$.

Ö4: Bence $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ birebir olduğunu böyle göstermiş oluruz diyoruz. Tekrar bak bence. Ne düşünüyorsun?

Ö3: Evet evet, onu yanlış yazmışım.

Ö4: $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ birebirlik demekti değil mi?

Ö3: Evet.

Ö4: Tamam. Ya da tam tersi $x_1 \neq x_2$ise...Aynen $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ demeliyiz.

Öğrenciler eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeleri gerektiğini bilmelerine rağmen kanıtlarına ilk kısımda ilerledikleri gibi $C \cap D$ ve $f(C \cap D)$' den eleman alarak devam etmişlerdir. Öğrencilerin kanıt sürecinin nasıl olacağına dair sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. Öğrenciler fonksiyonun birebir olduğunu kanıtlama sürecinde nasıl gösterecekleri, hangi matematiksel işlemleri yapmaları gerektiği konusunda yeterli bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir. Ö3 kanıt sürecinde görüntü kümesinden aldığı elemanları tanım kümesinin elemanı olarak göstermiş ve matematiksel olarak anlamlı ifadeler kullanmamıştır. Ö3'ün, kanıt sürecinde zorlandığında çoğunlukla Ö4'ün izlediği yolları takip ettiği gözlemlenmiştir. Ö3'ün genellikle matematiksel gösterim ve sembollerde anlamlı ve doğru bir dil kullanmadığı, matematiksel kavramlarda eksikleri olduğu görülmektedir. Ö3 kanıtının sonunda fonksiyonun birebir olduğunu mantıksal ve anlamlı gerekçelerle ifade edememiş ve kanıtı tamamlayamamıştır. Bu süreçte Ö3 yaptığı işlemleri açıklayamamış ve doğru bir matematiksel dil oluşturamamıştır. Bu yüzden Ö3'ün kullandığı operatörler belirlenememiştir (Bkz. Şekil 13). Ö4 ise kanıt sürecinde aktif rol oynayarak bu sürece yön vermiştir. Ö4, matematiksel dil ve sembol kullanımında Ö3 kadar sıkıntı yaşamaz iken fonksiyonun tanımı, birebir fonksiyonunun tanımı gibi önemli ve temel matematiksel kavramlarda eksikleri olduğu belirlenmiştir. Ö4 kanıt sürecinde kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine belirli bir formu veya şekli düşünerek biçime odaklandığı için ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö4 kanıtın son kısmında pasif kalarak Ö3'ün yaptığı işlem adımlarını takip etmiştir fakat bunun doğru bir kanıt olmadığının farkına varmıştır ve kanıtı tamamlayamamıştır (Bkz. Şekil 14). Yapılan görüşmeler bunu gösterir niteliktedir;

Ö4: Şimdi $f(x_1) \in f(C \cap D)$ dedik ya yukarıda da biz $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu göstermiştik. O zaman aynı zamanda $f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_1) \in f(D)$ olmuş oluyor. Aynı şekilde de $f(x_2) \in f(C)$ ve $f(x_2) \in f(D)$ olmuş oluyor.

Ö4: Evet $f(x_1) \in f(C)$, $f(x_1) \in f(D)$ aynı zamanda $f(x_2) \in f(C)$, $f(x_2) \in f(D)$ olmuş oldu. Benim burada $x_1 = x_2$ olduğunu göstermem gerekiyor o zaman.

Ö3: O zaman şöyle; $f(x_1) \in C$ ve $f(x_1) \in D$, $f(x_2) \in C$ ve $f(x_2) \in D$ dedikten sonra, $x_1 = x_2$ diyeceğiz.

Ö4: Şimdi ben, şu son kısımda hani $x_1 = x_2$'yi göstermeye çalışıyoruz ya biz... $x_1 = x_2$ olduğunu göstermeye çalışıyoruz ama bunu ben göremedim orada. Şimdi x_1 eleman dedik. x_1, $x_2 \in C$ oluyor dedik. x_1, $x_2 \in D$ oluyor dedik. Ama x_1 neden eşit dedik x_2'ye? Orada bir tam emin olamadım ben.

Ö4: x_1, $x_2 \in C$ ve x_1, $x_2 \in D$ olmuş oluyor.

Ö3: O zaman da $x_1 = x_2$... $x_1 = x_2$ diyorum.

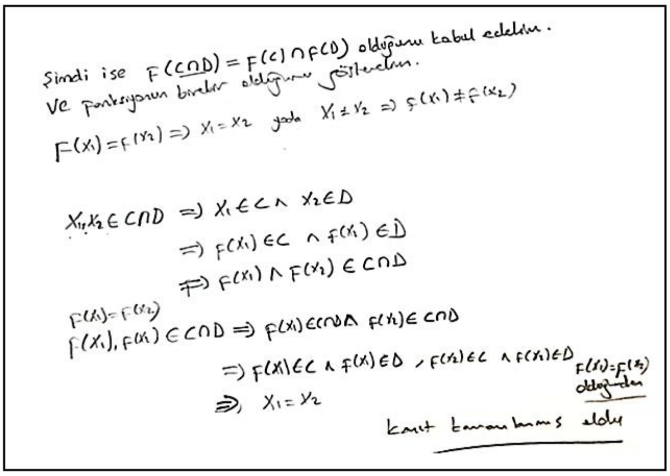
Ö4: Tamam.

Ö3: Sonra da şunu yazıyorum. Kanıt tamamlanmış oldu. Tamam mı bu?

Ö4: Tamam olsun.

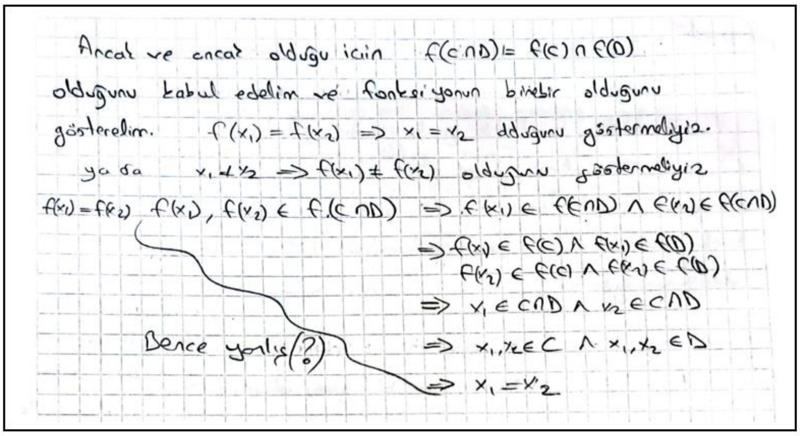
Şekil 13

Ö3'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 14

Ö4'ün birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Üçüncü Sınıf. Öğrenciler teoremi okuduktan sonra birebir fonksiyonun tanımını kullanarak eşitliğin sağlandığını göstermeleri gerektiğini ifade etmişlerdir. Fakat ancak ve ancak önermesinde ne yapmaları gerektiğini ve önermenin ne anlama geldiğini açıklayamamışlardır. Yani önce fonksiyonun birebir olduğunu kabul edip eşitliği göstermeleri gerektiğini daha sonrada eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeleri gerektiğini görememişlerdir. Öğrenciler teoremin kanıtında nasıl ilerlemeleri gerektiğini anlamlandıramamış ve açıklayamamışlardır. Kanıta birebir fonksiyonun tanımını yaparak başlamışlar fakat fonksiyon birebir ise böyle bir eşitlikten bahsedilebileceğini anlamamışlardır. Dahası fonksiyon tanımı ve birebirlik tanımı gibi kavramların açıklarken kararsızlıklar yaşamışlardır. Öğrencilerin fonksiyonun birebir olma koşulunu R_2 operatörünü kullanarak yaptıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 15 ve Şekil 16). Aralarındaki konuşma bunu göstermektedir;

Ö5: Tanımdan gideceğiz, birebirliğin tanımı neydi $f\ (x_1) = f\ (x_2)$, $x_1 = x_2$ olduğu zaman birebirdir diyoduk onu yazalım $f\ (x_1)= f\ (x_2)$ iken $x_1 = x_2$ doğru mu hatırlıyorum sanki tersi miydi böyle miydi ya?

Ö6: Bir dakika $f\ (x_1)= f\ (x_2)$, $x_1 = x_2$ ama zaten böyle olmak zorunda.

Ö5: Yok yok yok tamam doğru hatırlıyorum.

Ö6: Çünkü verilenlerde birebirlik olma var ve bir özelliği kanıtlamamızı istiyorsa eğer bu birebirliği kullanacağız soru söylemişse bize öncelikle birebirliğin tanımını yazalım nasıl bir kullanımına geçebiliriz diye onu yazdık sonrasında da eşitliği kanıtlamaya çalışacağız.

Ö5: Evet birebirlik tanımından yararlanarak önce onu kullanacağımızı biliyoruz o bilgi biz de boşu boşuna verilmemiştir diye düşündük.

Ö6 kanıtında, venn şeması ile çizim yaparak teoremin doğru olduğunu önce kendi içinde içselleştirip ilerlemek istemiştir. Ö6 bu şekilde direk eşitliği görebildiğini ama bunun kanıt için yeterli olmadığını ifade etmiştir. Ö5 ise kanıtın çok aşikâr olduğunu kâğıda dökmekte zorlandığını ifade etmiştir. Öğrencilerin her ikisi de içsel olarak teoremin doğruluğunu ifade ederken bunu matematiksel dile dönüştürmekte zorluk yaşamışlar hatta kanıtı tamamlayamamışlardır. Öğrencilerin her ikisi de kanıt sürecine görsel kanıtları veya sezgilerini kullanarak başlamışlardır. Bu da öğrencilerin algısal kanıt şemasına sahip olduklarını göstermektedir. Öğrencilerin aralarındaki görüşme bunu doğrular niteliktedir;

Ö5: Sanki böyle çok basit bir şeyle gösterecekmişiz gibi geliyor fakat kâğıda dökemedim sanki. Buna şey diyesim geliyor. Aşikâr deyip geçesim geliyor.

Ö6: Venn şeması kanıt olsaydı ben çok rahat kanıtlardım.

Ö6: Yani şuan değil. İlk önce soruyu görür görmez sezgilerimle dedim ki C ve D'yi ayrı ayrı alsam ve bu kümeleri kesiştirsem eğer bu kümeler birebir olduğu için bu kesişim kümesi C ile D 'nin kesişiminin görüntüsüne yine eşit olur diye direkt aslında kümeden de görebiliyorum. Kafamdaki küme şemasından da çok rahat görebiliyordum.

A: Bunu ben bu şekilde sezgisel olarak yaptım venn şemasında gösterdim diyorsun doğru mu?

Ö6: Evet.

A: Ama bu senin için yeterli mi?

Ö6: Yok yeterli değil o yüzden kanıt yapmak için çabalamaya başladım çünkü venn şeması tam kanıt sağlamaz bizim için.

Ö6 kanıtına $C \cap D$ kümesinden eleman seçip eşitlikte yerine koyarak ilerlemek istemiştir fakat aldığı elemanları direkt görüntülerine eşitleyerek fonksiyon ve birebirlik kavramlarıyla ilgili matematiksel olarak anlamlı olmayan işlemlerle kanıtına devam etmiştir. Ö6 bu işlemlerin mantığını, görüntü kümelerini nasıl oluşturduğunu anlamlı bir şekilde ifade edememiştir. Bu süreçte sadece özel değerler oluşturarak içsel olarak kendini ikna etmeye çalışmıştır. Fakat bu işlemleri matematiksel olarak doğru argümanlarla destekleyememiştir. Ö6'nın bu işlemlerde R_4 ve $R^-{}_{23}$ operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö6 kanıta ayrıca kesişimde olmayan bir eleman seçerek devam etmek istemiş ve R_{15}, R_{19} ve $R^-{}_{25}$: $x_1 \in C \wedge x_1 \notin D\ veya\ x_1 \in D \wedge x_1 \notin C$ ise $C \cap D = \emptyset$ olur, hatalı operatörünü kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 15). İşlemlerini açıklarken ancak ve ancak gerektirmesindeki gibi çift taraflı kanıtlaması gerektiğini ifade ederek eşitlik kavramının doğruluğunu göstermek için karşılıklı kapsamaları gerektiğini açıklayamamıştır. Eşitlik kavramını cebir dersinde öğrendiği ancak ve ancak önermesinin işleyiş süreciyle karıştırarak kanıtına aktarmak istemiştir ve $R^-{}_{16}$ operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Ö6 kanıtına R_{15}, R_{19}, $R^-{}_{23}$ ve $R^-{}_{26}$: [$\forall\, x_2 \in C\ \wedge \forall\, x_2 \notin$

$D] \wedge [\forall\, x_3 \in D \wedge \forall\, x_3 \notin C]$ ise $C \cap D$'nin tümleyenidir, hatalı operatörleri kullanarak devam ettiği belirlenmiştir (Bkz. Şekil 15).

Ö6 seçtiği elemanların kesişimde olması ve olmaması durumlarını incelemiştir. Bunun nedenini de derste hocalarının bir soru üzerinde yaptığı işlem bilgisini kanıtını genelleştirmek için kullanmak istemiştir. Fakat öğrendiği bilgilerin aktarmasında ve kanıtın genelleme özelliğinin sağlanmasında işlemlerini doğru ve anlamlı bir matematiksel dil ile ifade edememiştir. Ö6 derste gördüğü bilgi ile kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederek kanıt sürecine aktarmak istemiştir ve bu nedenle ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö6'nın yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö6: Ben hocalarımızdan şöyle görüyordum hani doğal sayılar üstünden mesela sıfırdan büyük deyince sıfırdan küçükleri alıyordu yani tüm sağlayabilecek durumları taramış oluyordu.

Ö6 seçtiği elemanları soldan sağa ve sağdan sola eşitlikte yerine koyarak eşitliğin sağlandığını gösterdiğini ifade etmiştir. Ö6 kanıtını, sezgisel olarak anlamlandırarak tamamlamaya çalışmış ancak matematiksel olarak doğru ve anlamlı bir dil kullanamamıştır. Ö6'nın yaptığı işlemleri anlamlandıramadığı ve matematiksel kavram ve sembollerin ne anlama geldiğini tam olarak açıklayamadığı gözlenmiştir. Ö6 kanıtın bu sürecinde kümeden seçtiği elemanları hipotezinde yerine koyarak teoremin doğruluğunu göstermeye çalışmış ve indüktif kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö6'nın yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö6: Şöyle yapalım $x_1,\ x_2\ \in\ C \cap D$ olsun veya alalım diye başlayalım. Öncesinde tabi birebir ve C, $D \subset A$ olduğu kabul edilecek diyelim. Sonra diyorum ki C, D kümesinin x bir eleman olsun dediğim için bunu alıyorum. Bu aynı zamanda C'nin ve D'nin alt kümesi olduğundan şey C'nin ve D'nin eleman olduğunu biliyorum eşitlikte mesela $f(x_1)$ oluyor direkt olarak. C'den ben bir eleman alayım bu da x_1 olsun. x_1 oluyor eşittir diyorum $f(x_1)$ kesişim $f(x_1)$'in zaten görüntüsü tek f fonksiyon olduğu için x_1'in görüntüsü tek bundan dolayı $f(x_1) = f(x_1)$ buluyorum.

Ö6: …Tamam eşitliği göstermiş oluyoruz her iki yönde de göstereceğiz.

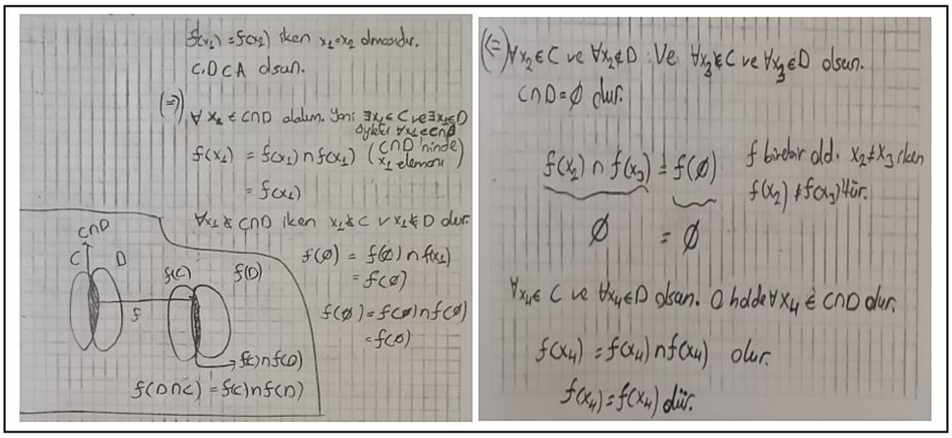
A: Her iki yönde göstereceğiz derken ne mesela her iki yönden kastın?

Ö6: Hocam belki cebirden dolayı böyle bir şey olmaya başladı hem soldan hem sağdan muhabbeti ancak ve ancak gibi muhabbeti yani.

Ö6: Tersini yapmak istediğim aslında şuydu benim C ve D’den öyle elemanlar alayım ki C ve D’de ortak olmasın yani C’de varken D’de olmasın D’de varken C’de olmasın yani böyle bir küme düşünelim … bu sefer ikisinin kesişmediği noktalarla ilgilenmek istedim içgüdüsel olarak oradan da tersine doğru yani eşitliği tersine kullanarak daha basit göstereceğimi düşündüm $C \cap D$’nin boş küme olduğunu biliyorum f boş kümesinde boş küme olacağı aşikar ondan dolayı da tekrar boş kümenin eşitliğine gelmiş oldum.

Şekil 15

Ö6’nın birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



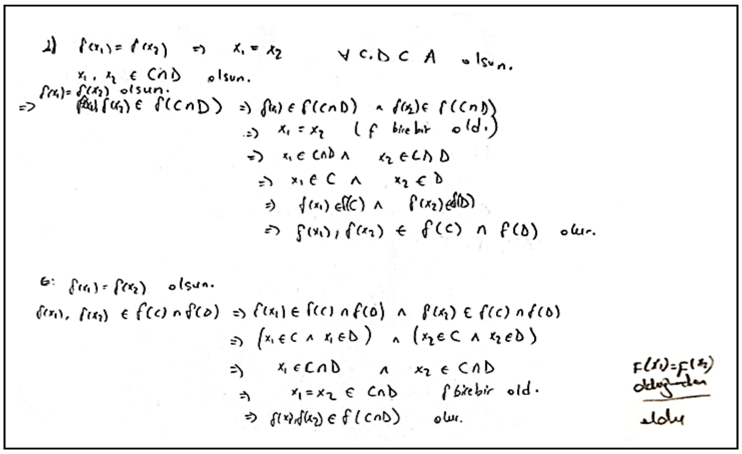
Ö5 kanıtına $f(C \cap D)$’den eleman alarak $f(C) \cap f(D)$’de göstermeye çalışarak başlamıştır. Aslında doğru bir şekilde nasıl ilerlemesi gerektiğini bilmesine rağmen bunu matematiksel dil ile ifade edememiştir. Ö5 birebir fonksiyonun tanımını kullanmak için görüntüleri eşit iki eleman seçerek kabulü üzerinden kanıt yapmaya çalışmıştır, burada kanıtın nasıl yapılması gerektiğini ve bir kanıta nasıl başlanacağını, kabul edilen varsayımdan kanıt içerisinde nasıl yararlanılacağını anlamlandıramamıştır. Ö5 işlemlerinde neden birebirlik tanımını kullandığını açıklayamamış eşitliğin ilk tarafını birebir fonksiyon şartı olmaksızın fonksiyon tanımından gösterebileceğini ifade edememiştir. Ö5 teoremde verilen bilgileri anlamlandırmadan kullanma eğiliminde olarak özel durumlar oluşturmuş ya da fonksiyon tanımından çıkarılabilecek durumları birebir fonksiyon olmasından dolayı söyleyebileceğini ifade ederek fonksiyon tanımı ve birebirlik kavramı arasında kafa karışıklığı yaşamıştır.

Ö5 seçtiği elemanları fonksiyonun tanımından yazabildiğini anlamlandırmadan ezbere olarak matematiksel bir dil kullanma eğilimi göstermiştir. Eşitlik ifadesini ancak ve ancak olarak kullanmıştır ve birebirliği nasıl işlemine aktardığını açıklayamamıştır. Ö5'in kanıt sürecinde $R_2, R_7\ ve\ R_{11}$ operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 16). Bu süreçte Ö5'in kanıtı bir tür rutin veya alışılmış bir uygulama olarak kabul ettiği ve kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederek kanıt oluşturmaya çalıştığı gözlenmiştir. Dolayısıyla Ö5'in ritüel kanıt şemasına sahip olduğu söylenebilir. Ö5'in görüşme sürecindeki açıklamaları aşağıdadır;

> Ö5: …Önceliklerim $f(C \cap D)$'den bir eleman alıp bu elemanın hem $f(C)$ hem $f(D)$'de olduğunu göstermeye çalışmam gerekiyordu ama iki saattir ben biraz daha farklı düşünüyordum bir de birliğe biraz fazla uzak kalmışım birebirlikten yola çıkarak oraya gitmeye çalışıyordum fakat birebirliği bu süreçte kullanacağımı şu an fark ettim ona yönelik bir işlem yapacağım şu an.
>
> A: Bu senin için yeterli oldu mu kanıttır tamam ben bu soruyu tamamladım diyor musun?
>
> Ö5: Hocam şöyle diyorum aslında hani yine ufak tefek yerlerde kafamda soru işaretleri olabiliyor ama benim için yeterli bir kanıt bu.
>
> A: Nerede kafanda soru işareti var?
>
> Ö5: Hocam şöyle şimdi $x_1 \in C$ ve D ise direkt ben bunu $f(x_1) \in f(C)$ diyebilir miyim sorusu kafamda oluşuyor mesela.

Şekil 16

Ö5'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



2) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ $\quad \forall C, D \subset A$ olsun.

$x_1, x_2 \in C \cap D$ olsun.

$f(x_1)=f(x_2)$ olsun.

$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in f(C \cap D) \Rightarrow f(x_1) \in f(C \cap D) \wedge f(x_2) \in f(C \cap D)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebir old.)

$\Rightarrow x_1 \in C \cap D \wedge x_2 \in C \cap D$

$\Rightarrow x_1 \in C \wedge x_2 \in D$

$\Rightarrow f(x_1) \in f(C) \wedge f(x_2) \in f(D)$

$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in f(C) \cap f(D)$ olur.

$\supseteq$: $f(x_1)=f(x_2)$ olsun.

$f(x_1), f(x_2) \in f(C) \cap f(D) \Rightarrow f(x_1) \in f(C) \cap f(D) \wedge f(x_2) \in f(C) \cap f(D)$

$\Rightarrow (x_1 \in C \wedge x_1 \in D) \wedge (x_2 \in C \wedge x_2 \in D)$

$\Rightarrow x_1 \in C \cap D \wedge x_2 \in C \cap D$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \in C \cap D$ f birebir old.

$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in f(C \cap D)$ olur.

$F(x_1)=F(x_2)$ olduğundan

olduğu

Ö6 ise yaptığı kanıt sürecinde eksik bilgileri olduğunun farkında olmasına rağmen nasıl bir yol ilerlemesi gerektiğini bulamamış ve kanıtını doğru bir şekilde tamamlayamamıştır. Ö6'nın yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö6: Eksik argümanlarım olabilir mesela birebirlik hiç kullanmadım farkındayım daha fazla işlem satırı olması gerekiyor farkındayım ama Venn şeması bile beni ikna edebilecek düzeyde az çok sezebiliyor muyuz ne oluyor bilmiyorum sezgisel bir şey aslında bunu kanıtlamak benim için argüman seviyesinde eksik kalır şuan için.
>
> A: Şu an beni ikna ediyor ama kanıt olduğunu düşünmüyorum yeterli olduğunu düşünmüyorum mu diyorsun?
>
> Ö6: Yazdıklarım kanıtı ifade eder mi tam olarak ifade edemez ama böyle bir şey yazı olsa derim ki tamam kabul.

Öğrencilerin her ikisi de yaptıkları kanıtta eşitliği ancak ve ancak ifadesi ile karıştırmışlardır. Aslında eşitlik kavramının gerekliliğini bilmelerine rağmen kullandıkları bu bilginin ne olduğunu anlamlandıramamışlardır. Öğrenciler eşitlik kavramının bu teoremde ancak ve ancak gibi düşünülmemesi gerektiğini ifade edememişlerdir. Eşitliğin ilk kısmını gösterirken fonksiyonun birebir olma koşuluna gerek olmadığını ancak eşitliğin diğer tarafında geçişleri sağlayabilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğini dolaysıyla kanıtın doğrudan tersine dönemeyeceğini bu yüzden de ancak ve ancak bağlacını kullanamayacaklarını açıklayamamışlardır. Dolayısıyla buradaki eşitlik kavramının ancak ve ancaktaki gibi doğrudan iki yönlü gösterilemeyeceğini kavrayamamışlardır. Yani yaptıkları bu açıklamaların aslında eşitlik kavramında her iki tarafın birbirini kapsadığı anlamına geldiğini fark edememişlerdir. Ve öğrencilerin $R^{-}{}_{16}$ operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 15 ve Şekil 16). Öğrencilerin yapılan görüşmedeki açıklamaları bunu doğrular niteliktedir;

Ö5: Eşitlikten hocam eşit olması için ikisinin de gerek ve yeter koşulu göstermesi gerekiyor.

Ö6: Hocam eşitlik bize sol varken sağın garantisidir sağ varken de solun garantisidir oluyor gibi hissediyorum ben hani ancak ve ancak gibi düşünüyorum.

Ö6: Evet sezgilerimiz böyle olduğunu söylüyor.

Ö5: Evet hocam eşittir olduğunu gösterebilmem için ancak ve ancak ibaresini kullanmam gerekiyor bu yüzden de bir soldan sağa doğru kanıtı yaptım bir de sağdan sola doğru kanıtı yaptım ve ikisinin de birbirine dönebildiğini bu şekilde göstermiş oldum doğrudan dönmüyor fakat hani tek tek alıp yaptığımda daha bir bütün olacak geri dönebildiğini gördüğüm için bu ikisinin birbirine eşit olduğunu ifade ediyorum.

Ö6: Eşitlik çift yönlü olduğu için hem mesela soldan bir eleman alıp yapıyorsak sağdan da bir eleman alarak solu bulmamız lazım böyle düşünüyorum.

Dördüncü Sınıf. Öğrenciler teoremi okuduktan sonra ancak ve ancak gerektirmesinin açıklamasını yaparak önce fonksiyonun birebir olduğunu kabul edip eşitliği göstermeleri gerektiğini daha sonra da eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeleri gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin R_1, R_2 ve R_{12} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ve öğrenciler kanıta tanım ve görüntü kümesinin elemanlarını belirterek başlamış $f(C \cap D)$’den eleman alarak $f(C) \cap f(D)$’de göstermeleri gerektiğini söylemişlerdir. Öğrenciler $C \cap D$ kümesinin A ‘nın altkümesi olduğunu dolayısıyla f altındaki görüntüsünün de B‘nin altkümesi olacağını ifade ederek kümelerinin tanım ve değer kümesini belirtmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin R_4, R_7 ve R_{27}: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve $\forall\ C, D \subset A$ için $C \cap D \subset A$ ise $f(C \cap D) \subset B$ olur, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 17 ve Şekil 18). Öğrencilerin aralarında geçen konuşma aşağıda verilmiştir;

Ö8: $C \cap D$‘ den herhangi bir eleman alsak $x_3 \in C \cap D$ desek mesela bu durumda C ve $D \subset A$ olduğu için $C \cap D$’de A ‘nın altında olacaktır. Dolayısıyla $x_3 \in A$ dır.

Ö8: Herhangi bir eleman için $C \cap D$’nin görüntüsünü bulduk dolayısıyla bütün elemanlar için yani bütün elemanların bu şekilde görüntüsü olduğunu görmüş olduk şuan $y_3 \in f(C \cap D)$’dır. Tamam sonra da bu görüntünün aynı zamanda $f(C) \cap f(D)$ eşit olduğunu göstermemiz lazım.

Ö7: Yok $f(C \cap D)$ diyor ya yani C ve D kümelerinin kesişiminin görüntüsüyle ilgileniyorum şuan ilk aşamada bunu bulmaya çalıştım. O zaman $C \cap D$’yi küme olarak tanımlamam gerekiyor benim.

Ö8: Tamam C ve D ‘de A ‘nın bir alt kümesi olduğu için $C \cap D$’de A‘nın bir alt kümesi olacak.

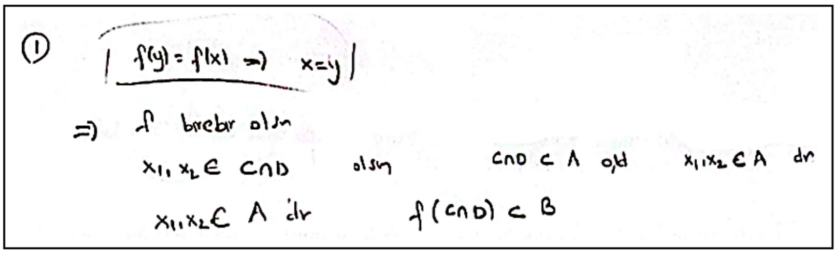
Ö8: İçerdeki A’nın alt kümesi olduğundan B‘nin de alt kümesidir. Bu şekilde eleman tanımlayabiliriz.

Ö7: O halde $C \cap D$’nin görüntü kümesi de B’nin alt kümesidir. A ve B ‘nin alt kümelerini aldığımız için hmmm.

Ö8: $f(C \cap D) \subset B$‘dir. Şuan bunu bulmuş olduk.

Şekil 17

Ö7'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


① $|\, f(y) = f(x) \Rightarrow x = y \,|$

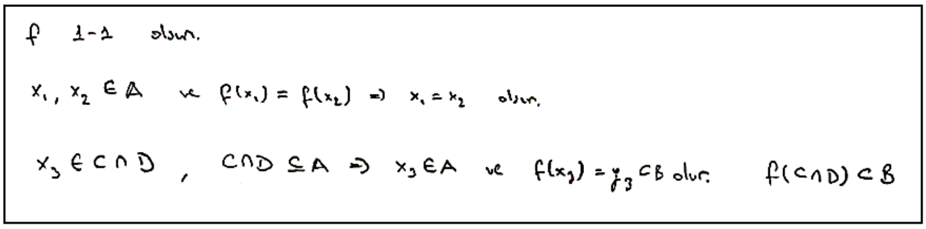
$\Rightarrow$ f birebir olsun

$x_1, x_2 \in C \cap D$ olsun $C \cap D \subset A$ old. $x_1, x_2 \in A$ dır

$x_1, x_2 \in A$ dır $f(C \cap D) \subset B$

Şekil 18

Ö8'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


f 1-1 olsun.

$x_1, x_2 \in A$ ve $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olsun.

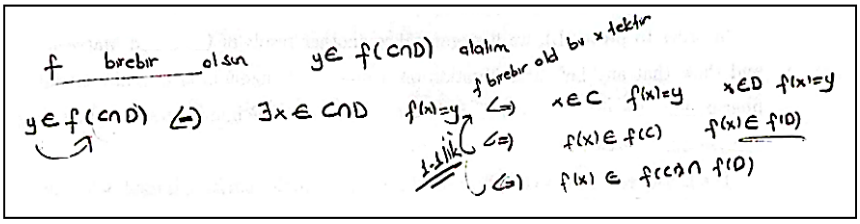
$x_3 \in C \cap D$, $C \cap D \subseteq A \Rightarrow x_3 \in A$ ve $f(x_3) = y_3 \in B$ olur. $f(C \cap D) \subset B$

Ö7 , $f(C \cap D)$'den eleman alarak $f(C) \cap f(D)$'de olduğunu doğru bir şekilde R_7 $ve\ R_{11}$ operatörlerini kullanarak göstermesine rağmen fonksiyonun birebir olma şartını kullanmadığını bu yüzden de yaptığı işlemlerden emin olamadığını dile getirmiştir. Ö7 eşitliğin ilk kısmını gösterirken fonksiyonun birebir olması gerekmediğinin zaten fonksiyon tanımı gereği bu işlemleri yapabileceğinin farkında olmamıştır. Eşitlik kavramının çift taraflı gerektirme olduğunu söyleyerek $f(C) \cap f(D)$'den elaman alarak $f(C \cap D)$'de gösterebildiğini ifade ederek $R^-{}_{16}$ operatörünü kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 19). Ö7'nin açıklamaları aşağıda verilmiştir;

> Ö7: Bakıyorum tekrar tersten gitsem mesela çift taraflı gerektirme olması lazım ki eşitliğini gösterebileyim. Varsayalım ki $f(C) \cap f(D)$'den bir $f(x)$ aldım bu durumda $f(x)$ hem $f(C)$ de hem de $f(D)$ olmak durumunda ve görüntü kümesi olduğu için $f(C)$ ve $f(D)$ $f(C)$ hem C de hem D'dedir bunu söyleyebilirim x hem C'de hem D'de olduğu için x kesişimdedir. Ve $f(x) = y$'dir bu da zaten yine y'nin… yani gösteriliyor aslında çift taraflı gerektirme sağlıyor.

Şekil 19

Ö7'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Öğrenciler eşitliği nasıl göstermeleri gerektiğini R_5 operatörünü kullanarak doğru bir şekilde ifade etmişlerdir ve söyledikleri kavramlar arasındaki karışıklığı gidermişlerdir. Öğrencilerin yapılan görüşmedeki açıklamaları aşağıda verilmiştir;

Ö8: Bir tarafın diğerinin alt kümesi olduğunu göstermem lazım karşılıklı olarak yani.

A: Karşılıklı olarak bunların alt kümesi olduğunu göstermem lazım niye dediniz?

Ö7: Eşit olabilmesi için.

Öğrenciler kanıtlarına $f(C) \cap f(D)$'den elaman alıp $f(C \cap D)$'de göstermeye çalışarak devam etmişlerdir. Ö7ve Ö8 görüntülerin kesişiminden aldıkları elemanın hem $f(C)$ hem de $f(D)$'de olduğundan fonksiyonun tanımı gereği tanım kümesinden farklı elemanlara eşit olabileceğini fakat fonksiyonun birebir olma koşulu sayesinde görüntüleri aynı olan fonksiyonların tanım kümesindeki değerlerinin de aynı olacağını söyleyerek geçişleri doğru ve anlamlı bir şekilde yapmışlardır. Ö8 kanıt sürecinde eşitliğin ilk tarafında fonksiyonun birebir olmasının şart olmadığını ama ikinci kısmı gösterirken $f(C) \cap f(D)$'den aldıkları elemanı $f(C \cap D)$'de gösterebilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğinin farkına varmıştır ve kanıtının doğru bir şekilde açıklamıştır. Fakat Ö8'in kâğıdı incelendiğinde (Bkz. Şekil 20) bunları matematiksel bir dil ile kâğıda dökmemiştir. Bu yüzden Ö8'in kullandığı operatörler belirtilirken açıklamalarından yararlanılmıştır. Ö7 ise eşitliğin ilk tarafını gösterirken de $f(C \cap D)$'den aldığı elemanın fonksiyonun birebir olmasından dolayı tek bir x değerine gideceğini belirterek eşitliğin ilk kısmında da birebir fonksiyon olma şartını kullanmaları gerektiğini söylemiştir (Bkz. Şekil 21). Burada görüntü kümesinden aldığı bir elmanın tanım kümesinden aynı x değerine sahip olsa da olmasa da bu değerlerin fonksiyonun tanımından oluşturduğu aynı görüntüye gideceğini dolayısıyla bu elemanı $f(C) \cap f(D)$'nin elemanı olarak gösterebileceğinin farkına varmamıştır. Öğrencilerin her ikisinin de bu kanıt sürecinde R_2, R_5, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 20 ve Şekil 21). Öğrencilerin görüşmede yaptıkları açıklama aşağıda verilmiştir;

Ö7: Bu sefer de $f(C) \cap f(D)$'den aldığım bir elemanın $f(C \cap D)$'de olduğunu göstererek onun alt kümesi olduğunu göstermem lazım zaten sağlıyor yani $f(C) \cap f(D)$'den bir $f(x)$ aldığımda $f(x)$ hem $f(C)$'de hem de $f(D)$'de oluyor kesişimden geldiği için $f(x)$, $f(C)$ ve $f(x)$, $f(D)$'de ise x, C'de ve x, D'dedir. O halde x, $C \cap D$'dir.

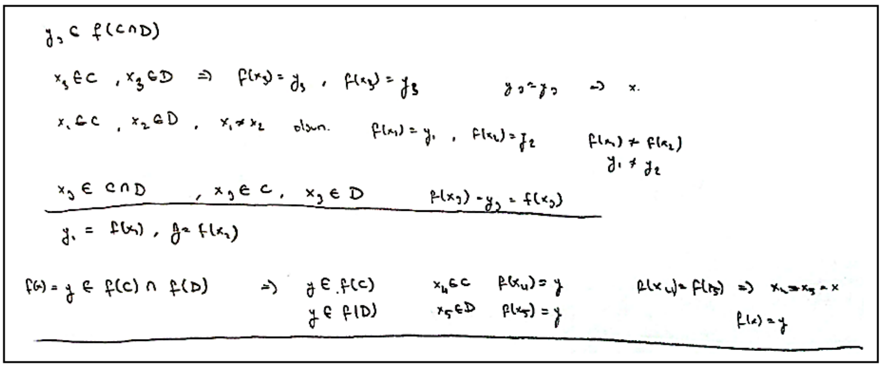
Ö8: Şimdi bir dakika sağ tarafta bir eleman aldığımız da $f(C) \cap f(D)$'den bir y eleman alalım $y \in f(C) \cap f(D)$ bu durumda y hem $f(C)$'de hem $f(D)$'dedir. y, $f(C)$'de ise öyle bir $x \in C$ vardır ki $f(x)$ hatta buna x_4 diyelim mesela $f(x_4) = y$'dir aynı şekilde y, $f(D)$'de ise öyle bir x_5 elemanı vardır ki D'de $f(x_5) = y$' dir. Aynı zamanda ben bu fonksiyonun 1-1 olduğunu bildiğimden ikisi de y'ye eşit ise $f(x_4) = f(x_5)$ise $x_4 = x_5$ dir. Bunu bulmuş oldum 1-1 liğin tanımını kullanarak $x_4 = x_5$ eşit olması durumu neyi gösterdi bana hmm bu bulmuş olduğum x_4 ve x_5 elemanı birbirine eşit ise x_4 diyelim biz ikisine birlikte yani x elemanı diyelim hatta x elemanı hem C'dedir hem de D'dedir dolayısıyla $C \cap D$'de yer almaktadır x böylece son kısımda $f(x)$ olmuş oluyor $f(x) = y$ çıkıyor en azından kafama yattı.

Ö8: Eşitliğin sol tarafından sağ tarafına doğru giderken birebirliği kullanmıyoruz ama sağ tarafından sol tarafına giderken birebirliği kullanıyoruz.

Ö7: Aslında soldan sağa giderken de kullanıyoruz şöyle en az bir x vardır diyoruz ya aslında tek bir x vardır çünkü birebir yani birden fazla x olamaz aslında bu noktada kullanmış oluyoruz galibi çünkü $f\ (x_1) = y$ ve $f\ (x_2) = y$ diyemiyorum çünkü $C \cap D$, A'nın alt kümesi ve f fonksiyonu birebir dolayısıyla tek bir x vardır.

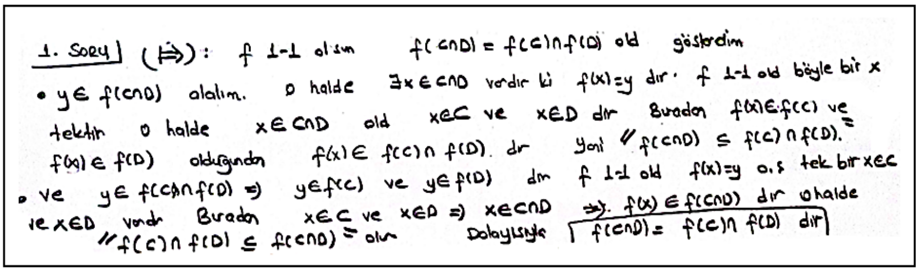
Şekil 20

Ö8'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$y_3 \subset f(C \cap D)$
$x_3 \in C$, $x_3 \in D$ $\Rightarrow$ $f(x_3) = y_3$, $f(x_3) = y_3$ $y_3 = y_3$ $\Rightarrow$ x.
$x_1 \in C$, $x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ olsun. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$
$y_1 \neq y_2$
$x_3 \in C \cap D$, $x_3 \in C$, $x_3 \in D$ $f(x_3) = y_3 = f(x_3)$
$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$
$f(x) = y \in f(C) \cap f(D)$ $\Rightarrow$ $y \in f(C)$ $x_4 \in C$ $f(x_4) = y$ $f(x_4) = f(x_5)$ $\Rightarrow$ $x_4 = x_5 = x$
$y \in f(D)$ $x_5 \in D$ $f(x_5) = y$ $f(x) = y$

Şekil 21

Ö7'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


1. Soru) $(\Rightarrow)$: f 1-1 olsun $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ old gösterdim
• $y \in f(C \cap D)$ alalım. o halde $\exists x \in C \cap D$ vardır ki $f(x) = y$ dır. f 1-1 old böyle bir x tektir o halde $x \in C \cap D$ old $x \in C$ ve $x \in D$ dir Buradan $f(x) \in f(C)$ ve $f(x) \in f(D)$ olduğundan $f(x) \in f(C) \cap f(D)$. dır yani "$f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$."
• ve $y \in f(C) \cap f(D) \Rightarrow y \in f(C)$ ve $y \in f(D)$ dır f 1-1 old $f(x) = y$ o.ş tek bir $x \in C$ ve $x \in D$ vardır Buradan $x \in C$ ve $x \in D \Rightarrow x \in C \cap D \Rightarrow f(x) \in f(C \cap D)$ dır o halde "$f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$" olur Dolayısıyla $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ dır

Öğrenciler kanıtlarına eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeye çalışarak ilerleyeceklerini açıklamışlardır. Ö7 kanıtına görüntü kümesinden görüntüleri aynı olan iki eleman alıp bunların tanım kümesinde iki farklı elemana gitmesini göstererek çelişki yoluyla kanıt yapmaya çalışmıştır. Ö7 kanıt sürecinde yapması gerekeni doğru bir şekilde ifade etmiş ve çelişkiyle kanıt yönteminde 1 ise 0 sonucuna ulaşarak yanlış bir önermedir yargısına varacağını ve bu şekilde çelişki oluşturabileceğini açıklayarak yapması gereken işlemleri içsel olarak anlamlandırmış ve doğru bir şekilde açıklamıştır. Ö7'nin bu süreçte R_{28}: $f: A \to B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ 'nin doğru $f(x_1) = f(x_2)$'nin olduğunu kabul edip çelişki oluşturulursa çelişkiyle kanıttır ve R_{29}:1 ise 0 önermesinin sonucu 0’dır, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö7’nin görüşmelerde yaptığı açıklama aşağıda verilmiştir;

> Ö7: Yani şey kabul ettik ya birebir olmasın bunun için ne dedik mesela birebir olmaması için x_1, x_2 ‘den farklı iken görüntüleri aynı olsun dolayısıyla $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ olduğunu kabul ettim ve birebir olamadığını kabul ettim burada da çelişkiye varmam lazım ki bu gerektirme yanlış olsun ve dolayısıyla çelişkiye düştüm deyip önermenin doğruluğunu gösterebileyim ama nasıl çelişkiye düşebiliriz onu da bilemedim yani 1 ise 0’lık bir sonuç elde etmem lazım ki bu önerme yanlıştır diyeyim. Dolayısıyla çelişki vardır o halde birebirdir diyebileyim ama burada nasıl bir çelişkiye düşebiliriz onu da çok bilemedim.

Ö7 kanıtına devam ederken çelişkiyle kanıt yönteminden devam edememiştir C ve D kümelerini birbirinden farklı tek nokta kümeleri olarak oluşturmuştur ve bu kümelerin kesişimlerinin boş küme olacağını ve dolayısıyla görüntülerinin de boş küme olacağını belirtmiştir. Ve eşitliliği kullanarak $f(C) \cap f(D)$‘nin boş kümeye eşit olduğunu dolayısıyla kesişimleri boş küme olan iki görüntünün birbirinden farklı olacağını söyleyerek birebirliği gösterdiğini belirtmiştir. Ö7 bu süreçte doğru işlem adımlarını takip etmesine rağmen her C ve D kümesi için bu eşitliği kabul ederek tek nokta kümelerini oluşturduğunu dolayısıyla A kümesinin her alt kümesi için sağladığını anlamlandıramamış ve doğru işlem adımlarını takip etmesine rağmen kanıtı tamamladığını fark edememiştir. Ve yaptığı bu işlemin özel bir örnek olduğunu ifade ederek tek bir durum için geçerli olduğunu düşünmüştür. Ö7’nin bu süreçte R_{15}, R_{17}, R_{18}, R_{19} ve R_{30}: Kesişimi boş küme olan C ve D kümeleri ayrık kümedir, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 22). Ö7 kanıtın bu aşamasında daha fazla ilerleyemediğini kanıtı tamamlayamadığını söylemiştir. Öğrenciler aralarında geçen konuşmada bu durum için aynı fikre sahip olduklarını dile getirmişlerdir. Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö7: x_1, x_2’den farklı deyip hmmm $f\ (x_1)$ ve $f(x_2)$ görüntüleridir. $x_1 \neq x_2$ ise hani C ve D tek nokta kümesi gibi olsa mesela x_1 C’nin x_2 D’nin olsa gerçi biz

kesişimden aldık biz bunları kesişimleri boş kümedir bu yüzden görüntüleri de boş olur hani oradan gitmeye çalışacaktım ama bilemedim öyle yapsak olmaz mı? C ve D'nin kesişimi boş küme olsun o halde x_1 C'de iken D'de olamaz ya da x_2 D'de iken C'de olamaz ve bunlar farklıdır bu durumda $f\ (x_1)$ ve $f(x_2)$'de $f(C)$ ve $f(D)$'dedir ve bunlarda verilen eşitlikten dolayı boş kümenin görüntüsü boş küme olacağı için $f(C) \cap f(D)$'de boş küme olmalı dolayısıyla bu kesişimde olmadığını görürüz f $(x_1), f(x_2)$'den farklıdır deriz. Ama bu sadece tek nokta kümesi için mi geçerli?

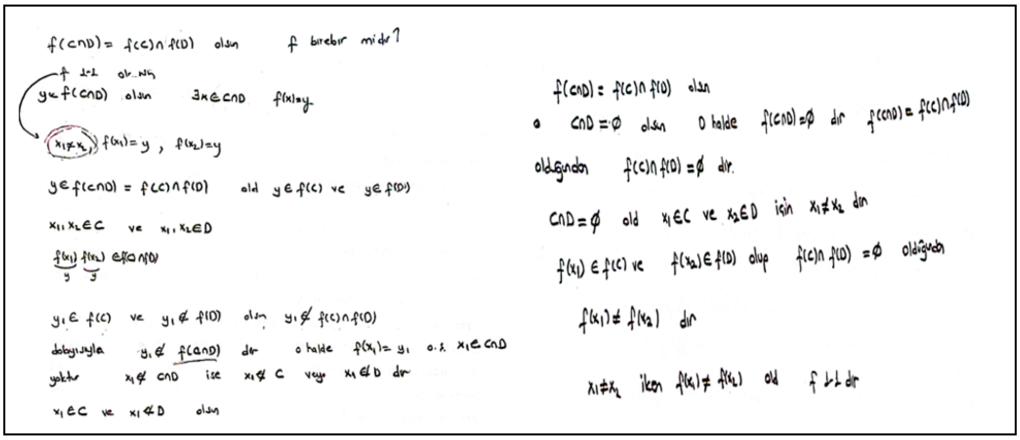
Ö7: Kesişimin boş küme olma durumunda C ve D'nin ayrık küme olması durumunu yazdım buradan birebirlik çıkıyor ama kesişimleri boştan farklıysa bu durumda ne yapabiliriz onu genel çerçevede bilmiyorum. Bu sadece ayrık kümeler için birebir olduğunu göstermişim gibi oldu kesişimlerinde bir eleman varsa bunu nasıl gösterebiliriz onu bilmiyorum.

Ö7: Bu sadece ayrık kümelerde geçerli bir durum oldu.

Ö8: Evet yani bu sadece tek bir durum için geçerli olur.

Şekil 22

Ö7'nin birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



$f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ olsun f birebir midir?

f 1-1 olmasın

$y \in f(C\cap D)$ olsun $\exists x \in C\cap D$ $f(x)=y$

$x_1 \neq x_2$, $f(x_1)=y$, $f(x_2)=y$

$y \in f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ old $y \in f(C)$ ve $y \in f(D)$

$x_1, x_2 \in C$ ve $x_1, x_2 \in D$

$\underbrace{f(x_1)}_{y}\ \underbrace{f(x_2)}_{y} \in f(C)\cap f(D)$

$y_1 \in f(C)$ ve $y_1 \notin f(D)$ olsun $y_1 \notin f(C)\cap f(D)$

dolayısıyla $y_1 \notin f(C\cap D)$ dır o halde $f(x_1) = y_1$ o.ş. $x_1 \in C\cap D$ yoktur $x_1 \notin C\cap D$ ise $x_1 \notin C$ veya $x_1 \notin D$ dır

$x_1 \in C$ ve $x_1 \notin D$ olsun

$f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ olsun

$C\cap D = \emptyset$ olsun O halde $f(C\cap D) = \emptyset$ dır $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ olduğundan $f(C)\cap f(D) = \emptyset$ dır.

$C\cap D = \emptyset$ old $x_1 \in C$ ve $x_2 \in D$ için $x_1 \neq x_2$ dir

$f(x_1) \in f(C)$ ve $f(x_2) \in f(D)$ olup $f(C)\cap f(D) = \emptyset$ olduğundan

$f(x_1) \neq f(x_2)$ dir

$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ old f 1-1 dir

Ö8 ise Ö7'den farklı olarak tanım kümesinden farklı değerler alıp bunların görüntülerinin de farklı olacağını göstermeye çalışarak doğrudan kanıt yöntemini kullanmaya çalışmıştır. Ö8'in R_{31}: $f\colon A \to B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2\ \in A$

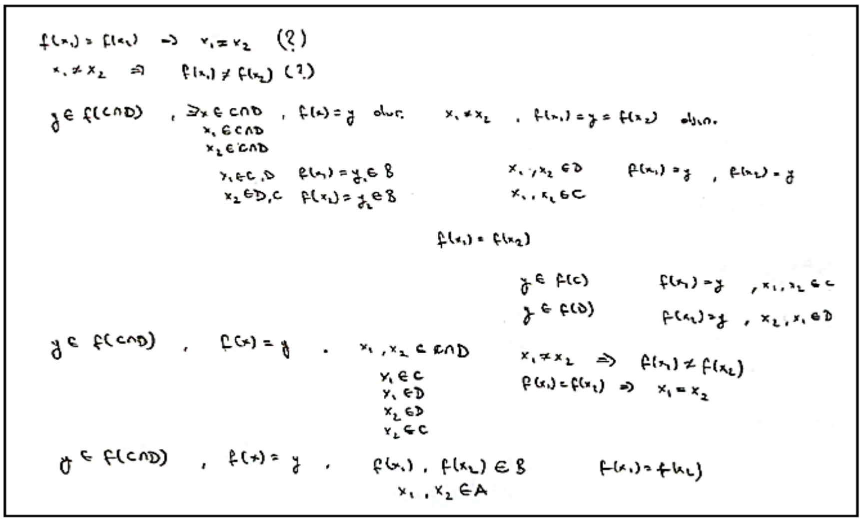
için $x_1 \neq x_2$'nin doğru olduğunu kabul edip $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ doğruluğu gösterilirse doğrudan kanıttır, operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Ö8 kanıt sürecinde ne yapması gerektiğini doğru bir şekilde açıklamasına rağmen bunu matematiksel dile dönüştürememiş kanıtını tamamlayamamıştır (Bkz. Şekil 23). Ö8'in görüşmelerde yaptığı açıklama aşağıda verilmiştir;

> Ö8: ….çelişkiden değil de düz devam etmeye çalışsak buradan bir şey elde edebilir miyiz acaba?
>
> Ö8: Şuradan gitmeye çalışsak hani $y \in f(C \cap D)$ dedik değil mi tamam bunun için öyle bir x vardır ki $f(x) = y$'dir şimdi biz bunu zaten biliyoruz desek ki tanım kümesinde iki tane eleman alsak $x_1, x_2 \in C \cap D$ alalım. $x_1 \neq x_2$ iken $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ olduğunu göstermemiz lazım $x_1 \neq x_2$ deyip bir yere gidebilir miyiz acaba?

Öğrencilerin her ikisi de farklı kanıt yöntemlerini ifade etmiş ve ne yapmaları gerektiğini doğru bir şekilde açıklamışlardır. Kullandıkları matematiksel ifadelerin ve sembollerin anlamlarını açıklamada doğru ve anlamlı ifadeler kullanmışlardır. Öğrencilerin her ikisi de kanıt sürecinin neredeyse tamamında genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak tanımlardan, teoremlerden ve kanıt yöntemlerinden yararlanmaya çalışmışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Fakat öğrenciler kanıt yöntemlerini doğru bilmelerine ve matematiksel sembolleri doğru kullanmalarına rağmen kanıt sürecini tamamlayamamışlardır.

Şekil 23

Ö8'in birinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



İkinci Teorem

$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de tersi varsa $g\, o f$ bileşke fonksiyonunun da tersi olduğunu ve bu fonksiyonun f^{-1} o g^{-1} bileşkesine eşit yani $(g\ o\ f)^{-1}$ = f^{-1} o g^{-1} olduğunu gösteriniz.

Birinci Sınıf. Öğrenciler teoremi okuduktan sonra f ve g fonksiyonlarının tersi var ise bu fonksiyonların birebir ve örten fonksiyonlar olduğunu ifade ederek $g\, o f$ bileşke fonksiyonunun tersi var ise bileşke fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermeleri gerektiğini açıklamışlardır ve teoremi nasıl kanıtlamaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö1 kabullerinde yer alan f ve g fonksiyonlarının da birebir ve örten fonksiyonlar olduğunu göstermeleri gerektiğini söylemiştir (Bkz. Şekil 24). Ö1 fonksiyonun tersi var ise bunun da bir teorem olduğunu ifade ederek bu teoremin doğruluğunu da göstermeleri gerektiğini savunmuştur. Ö2 ise bunun zaten kabulleri olduğunu dolayısıyla f ve g fonksiyonlarının tersi olduğu için birebir ve örten olduklarını söyleyebileceklerini ve bu koşullar altında $g\, o f$ bileşke fonksiyonunun birebir ve örten fonksiyon olduğunu göstermelerinin yeterli olacağını ifade etmiştir (Bkz. Şekil 25). Ö1 bu süreçte R_{10} , R_{32}: Bir fonksiyonun tersi var ise tersi de fonksiyondur, R_{33}: A ve B kümeleri için $f: A \to B$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f birebir ve örten ise o zaman $f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonu f'nin tersidir ve R_{34}: B ve C kümeleri için $g: B \rightarrow C$ fonksiyonu verilmiş olsun (Bkz. Şekil 24). Eğer g birebir ve örten ise o zaman $g^{-1}: C \rightarrow B$ fonksiyonu g'nin tersidir, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö2'nin ise bu süreçte R_{10}, R_{33} ve R_{34} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 25). Ö1 ve Ö2 'nin ifade ettikleri operatörlerde ve açıklamalarında genel tanım, mantıksal çıkarımlar kullanarak başka teoremlerden de yararlandıkları görülmüş ve dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen konuşma aşağıdadır;

Ö1: … t fonksiyonun tersinin var olması çünkü her iki fonksiyonun da tersinin de bir fonksiyon olduğuydu hatırlarsan ben öyle hatırlıyorum.

Ö1: Kabul ettiğimize göre şunu düşünebiliriz f birebir ve örten g de birebir ve örtendir. Ama bunu kanıtlamamız gerekir mi diye düşündüm bu da sonuçta bir teorem ve bunu da kanıtlamamız gerektiğini düşünerek ben bunu kanıtlamaya başlamıştım öncesinde aslında hoca sınavda yaptırırken kanıtlamaya gerek duymamıştı ama.

Ö2: Bence şey olduğundan kanıtlamaya gerek yok çünkü varsa direk $g\,of$ fonksiyonun tersinin de olduğunu göster dedi ya $g\,of$'un birebir ve örten olduğunu göstermemiz gerekiyor. Çünkü kabulümüz bu zaten fonksiyonun tersi varsa fonksiyonunu kabul ettiysek aslında birebir ve örten olduğunu da kabul etmiş oluyoruz.

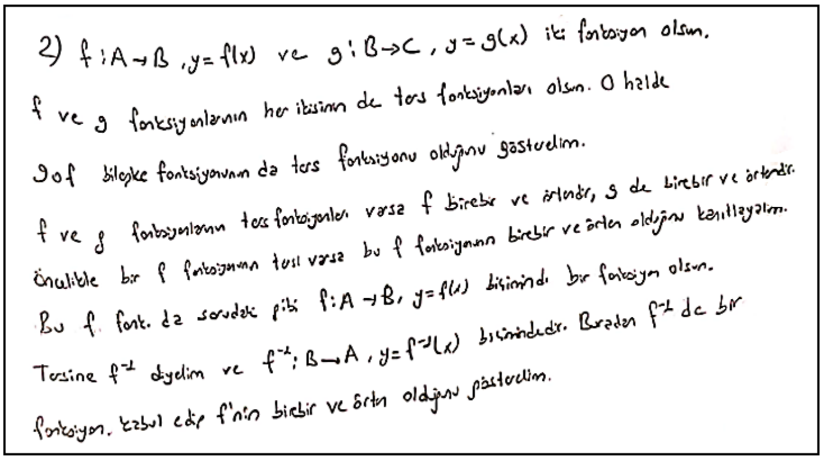
Ö1: İşte bu da aslında bir teorem ya hani fonksiyonlarının tersinin olması da bir teorem ya fonksiyonun tersi varsa birebir ve örtendir de bir teorem olduğu için öncesinde bunu kanıtlayalım daha sonrasında hani $g\,of$'un birebir ve örten olup olmadığına bakmak istiyordum hani bunu da çünkü kanıtlamaya gerek duydum ben.

Ö2: Bak diyor ki f ve g fonksiyonlarının ikisinin de tersinin var olduğunu söylemiş ya zaten fonksiyonlarının tersi olduğunu söylüyorsa bunların birebir ve örten olduğunu da kabul ediyor artı olarak senin burada bir kanıt yapmana gerek yok

Ö1: Aslında öyle hani bunu kabul ediyorsak f ve g ikisi de birebir ve örtendir.

Şekil 24

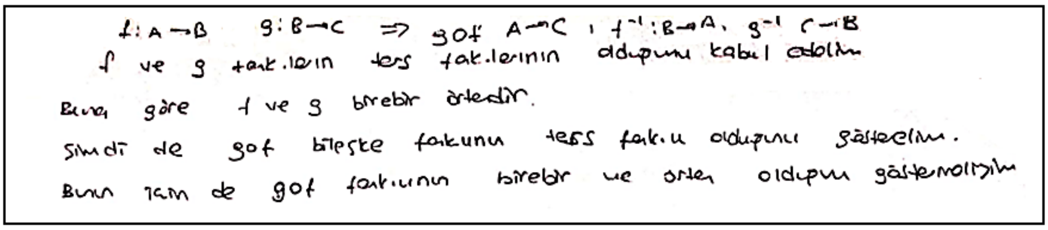
Ö1'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



2) $f: A \to B$, $y = f(x)$ ve $g: B \to C$, $y = g(x)$ iki fonksiyon olsun.
f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de ters fonksiyonları olsun. O halde
g o f bileşke fonksiyonunun da ters fonksiyonu olduğunu gösterelim.
f ve g fonksiyonlarının ters fonksiyonları varsa f birebir ve örtendir, g de birebir ve örtendir.
Öncelikle bir f fonksiyonunun tersi varsa bu f fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu kanıtlayalım.
Bu f fonk. da sorudaki gibi $f: A \to B$, $y = f(x)$ biçiminde bir fonksiyon olsun.
Tersine f^{-1} diyelim ve $f^{-1}: B \to A$, $y = f^{-1}(x)$ biçimindedir. Buradan f^{-1} de bir
fonksiyon. kabul edip f'nin birebir ve örten olduğunu gösterelim.

Şekil 25

Ö2'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



$f: A \to B$ $g: B \to C$ $\Rightarrow$ $g o f$ $A \to C$, $f^{-1}: B \to A$, g^{-1} $C \to B$
f ve g fonk.ların ters fonk.larının olduğunu kabul edelim
Buna göre f ve g birebir örtendir.
Şimdi de g o f bileşke fonk.unu ters fonk.u olduğunu gösterelim.
Bunun için de g o f fonk.unun birebir ve örten olduğunu göstermeliyim

Öğrenciler, $g\, of$ bileşke fonksiyonunun birebir olduğunu, görüntüleri eşit ise tanım kümesinden aldıkları elemanların da birbirine eşit olacağını ifade ederek göstermişlerdir. Öğrenciler $g\, of$ bileşke fonksiyonunun $g\, of(x_1) = g\, of(x_2)$ şeklinde birbirine eşit görüntülerini oluşturarak bileşkenin tanımından $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olarak ifade etmişlerdir. Kabulleri gereği g fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliğini göstermişlerdir ve f fonksiyonunun birebir olmasından yararlanarak $x_1 = x_2$ olduğunu doğru bir şekilde ifade ederek bileşke fonksiyonunun birebirliğini göstermişlerdir (Bkz. Şekil 26 ve Şekil 27). Yaptıkları işlemleri doğru matematiksel dil kullanarak ve içsel olarak anlamlandırarak ifade etmişlerdir. Öğrencilerin her ikisinin de R_2, R_{35}: $f\!: A \to B$, $y = f(x)$ve $g\!: B \to C$, $y = g(x)$ise $g\, of\!: A \to C$ fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $(gof)(x) = g(f(x))$

şeklinde tanımlanan fonksiyona bileşke fonksiyon denir, R_{36}: $g\, of : A \rightarrow C$ bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in A$ için $(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyor ise gof birebir fonksiyondur ve R_{37}: $g: B \rightarrow C$, $y = g(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $g\,(x_1)$= $g\,(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$oluyor ise g birebir fonksiyondur, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 26 ve Şekil 27). Öğrencilerin bu süreçte genel durumları göz önünde bulundurarak amaçlarına yönelik tanımlar, teoremler ve önceden kabul edilmiş diğer doğrular kullanarak kanıt oluşturdukları için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları söylenebilir. Öğrenciler ile yapılan görüşmedeki açıklamaları bu durumu göstermektedir:

Ö2: gof A’dan C’ye.

Ö1: f A’ den B’ ye g’de B’den C’ye olduğu için gof’da A’dan C’ye olur önce şey yapalım mı biz görüntüleri eşittir diye başlayalım.

Ö2: Aynen ben de öyle başladım.

Ö1: O zaman şimdi şöyle her $x_1, x_2 \in A$ için diye başlayacağım ama bir saniye öyle dersek.

Ö2: Doğru dedin her $x_1, x_2 \in A$ için sonuçta gof’un tanım kümesinden alıyorsun $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$ olsun diyorsun buradan $x_1 = x_2$ olduğunu göstermeye çalışacağız.

Ö2: Hayır her $x_1, x_2 \in A$ için $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$ olsun.

Ö1: Tamam öyle başlayalım o zaman $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$ ise.

Ö2: Bileşkenin tanımından dolayı $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olur aynen.

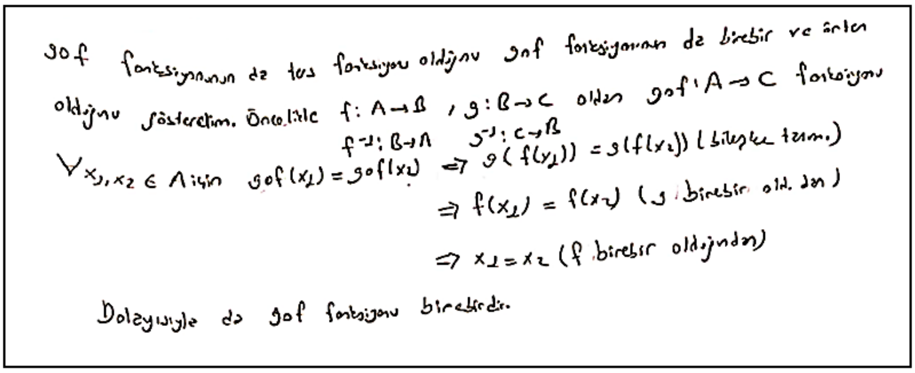
Ö1: Tamam bileşkenin tanımından $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olur.

Ö2: Burada da g’nin birebir olduğunu kullanacağız g birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ çıkacak sonra da burada da f’nin birebir olduğunu kullanacağız bu seferde $x_1 = x_2$ çıkacağız direk $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ geldi.

Ö1: Aynen

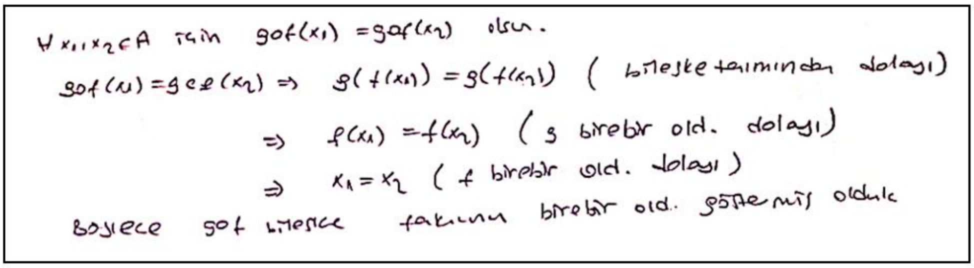
Şekil 26

Ö1'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


gof fonksiyonunun da tüm fonksiyon olduğunu gof fonksiyonunun da birebir ve örten olduğunu gösterelim. Öncelikle $f: A \to B$, $g: B \to C$ olsun $gof: A \to C$ fonksiyonu
$f^{-1}: B \to A$ $g^{-1}: C \to B$
$\forall x_1, x_2 \in A$ için $gof(x_1) = gof(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (bileşke tanımı)
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g birebir old. dan)
$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebir olduğundan)
Dolayısıyla da gof fonksiyonu birebirdir.

Şekil 27

Ö2'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$\forall x_1, x_2 \in A$ için $gof(x_1) = gof(x_2)$ olsun.
$gof(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (bileşke tanımından dolayı)
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g birebir old. dolayı)
$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebir old. dolayı)
Böylece gof bileşke fonksiyonun birebir old. göstermiş olduk

Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten bir fonksiyon olduğunu göstermek için bileşke fonksiyonunun değer kümesinden aldıkları her elemanın tanım kümesinde en az bir tane değeri olacağını ifade etmişlerdir. Ve $g\,of$ bileşke fonksiyonu için $g\,of\,(x_1) = g\left(f(x_1)\right) = c$ ifadesini yazarak g fonksiyonunun örtenliğinden en az bir $f(x_1) \in B$ olacağını ve f fonksiyonunun örtenliğinden de en az bir tane $x_1 \in A$ olacağını söyleyerek bileşke fonksiyonunun örtenliğini doğru bir şekilde göstermişlerdir.

Öğrenciler işlemlerini doğru matematiksel dil ve semboller ile göstermiş ve anlamlandırarak açıklamışlardır. Öğrencilerin her ikisinin de R_{35}, R_{38}: f: A→ B bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde ∃ $a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman f bir örten fonksiyondur ve R_{39}: $g: B \to C$, bir fonksiyon olmak üzere ∀ $c \in C$ için $c = g(b)$ olacak şekilde ∃ $b \in B$ bulunabiliyorsa o zaman g bir örten fonksiyondur ve R_{40}: $g\,of: A \to C$ bir fonksiyon ise $\forall\, c\ \in C$ için $c = (gof)(a)$ olacak şekilde $\exists\ a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman ise gof bir örten fonksiyondur, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 28 ve Şekil 29). Öğrencilerin bu süreçte genel durumlar arasında geçişler yaparak tanımlardan ve teoremlerden yararlandıkları için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen konuşma bunu doğrular niteliktedir,

Ö2: Bu sefer de görüntü kümesindeki özür dilerim değer kümesindeki bütün C'ler için öyle bir A bulmalıyız ki $g\ of(a) = c$ ona bakmalıyız öyle mi diye her $c \in\ C$ için öyle bir $a \in A$ var.

Ö1: Aynen $g\ of(a) = c$ olsun tamam bunu göstermemiz gerekiyor.

Ö2: Aynen öyle şimdi g fonksiyon olduğu için $g(b) = c$ olacak şekilde $b \in B$ vardır.

Ö2: Ben de aslında aynı şeyi yapmaya çalıştım eee dedim ya $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ var şimdi bu b aslında $f(a)$'nın bir görüntüsü olacak anladın mı $f(a) = b$ olacak şekilde a eleman var aslında.

Ö1: Bu g örten olduğundan oldu.

Ö2: Aynen g örten olduğundan.

Ö1: Daha sonra en az bir $b \in B$ içinde zaten en bir $a \in A$ vardır $g(b) = c$ ve $f(a) = b$ bu da f'in örtenliğinden dolayı geldi en az bir $b \in B$ için en az $a \in A$ vardır $f(a) = b$'dir ve $g(b) = c$'dir.

Ö2: Aynen buradan b yerine aslında $f(a)$ yazdığımızda da $g(f(a))$ olur.

Ö1: b gördüğümüz yere $g(f(a))$

Ö2: $g\ of(a)$ olduğunda olur ne yaptın?

Ö1: En az bir $c \in\ C$ içinde her $c \in\ C$ için de en az bir $a \in A$ bulduk ki $g\ of(a) = c$ dolayısıyla $g\ of$ örtendir.

Ö2: $g\,of$ örtendir.

Ö1: Birebir olduğunu da zaten göstermiştik o halde $g\,of$ fonksiyonu birebir ve örten olduğunda tersi de vardı.

Şekil 28

Ö1'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları

$\forall c \in C, \exists a \in A\ [gof(a) = c]$ gösterelim.

$\forall c \in C \Rightarrow \exists b \in B\ [g(b) = c]$ (g örten old. dan)

$\Rightarrow \exists a \in A\ [g(b) = c \wedge f(a) = b]$ (f örten old. dan)

$\Rightarrow \exists a \in A\ [g(f(a)) = c]$

Dolayısıyla gof örtendir

O halde gof fonksiyonu birebir ve örten old dan tersi de vardır.

$(gof)^{-1}$, gof fonksiyonun tersidir ve $(gof)^{-1}$ de birebir ve örtendir.

Şekil 29

Ö2'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları

Şimdi gof bileşke fonk.unun örten old gösterelim.

Yani $\forall c \in C, \exists a \in A\ [gof(a) = c]$ olur mu onu göstereceğiz.

g örten old. dan $g(b) = c$ olacak şekilde $b \in B$ var. vardır.

ve f örten old. dan $f(a) = b$ olacak şekilde $a \in A$ vardır.

$c = g(b) = g(f(a)) = gof(a)$ olduğundan gof örtendir.

Böylece gof bileşke fonk.unun ters fonk.u da vardır.

o da $(gof)^{-1}$ ile gösterilir ve o da birebir ve örtendir.

Öğrencilerin her ikisi de kanıtlarına eşitliğin her iki tarafını $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkeye alarak bir fonksiyonun tersiyle bileşkesi birim (özdeşlik) fonksiyonunu vereceğini ifade ederek devam etmişlerdir. Öğrenciler kullandıkları fonksiyonun tersi, birim fonksiyon gibi matematiksel kavramları doğru bir şekilde açıklayarak doğru ve anlamlı bir matematiksel dil kullanmışlardır. Ö1, $(g\,o\,f)^{-1} = f^{-1}$ o g^{-1} eşitliğinin her iki tarafını $g\,of$

bileşke fonksiyonu ile bileşkesini aldığında eşitliğin her iki tarafından da x yani birim fonksiyon geleceğini ifade etmiştir ve $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$'dir bilgisini kullanarak aynı değere eşit olan değerlerin de birbirine eşit olacağını belirtmiştir. Ö1'in kanıt sürecinde $R^{-}{}_{41}$: $g\ o\ f$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olduğu için eşitliğin her iki tarafı da $g\ o\ f$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesi alınır, R_{42}: Birim fonksiyonda tanım kümesinden alınan her elemanın görüntüsü kendisine eşittir, R_{43}: Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim (özdeşlik) fonksiyonudur R_{44}: $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$'dir ve R_{45}: $f\colon A \rightarrow B$, $y = f(x)$ ve g: $B \rightarrow C$, $y = g(x)$ ise $g\ of\colon A \rightarrow C$ fonksiyon olsun. Eğer $g\ of$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten ise o zaman $(gof)^{-1}\colon C \rightarrow A$ fonksiyonu $g\ of$ bileşke fonksiyonunun tersidir, operatörlerini kullandığı tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 30). Ö2'nin ise R_{41}, R_{42}, R_{43} ve R_{45} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 31). Ö1 ve Ö2'nin bu süreçte genel durumlar arasında geçişler yaparak tanımlardan ve teoremlerden yararlandıkları için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen görüşme bunu doğrular niteliktedir,

> Ö1: Peki bir de bir şey diyeceğim gof fonksiyonun hani birebir ya sadece birebir fonksiyonlar için bileşke olmayı yapabiliyorduk her tarafı gof ile bileşkelediğimizde gof birebir ve örten olduğundan her tarafı gof ile bileşkesini alabiliyorduk.
>
> Ö1: gof ile tersinin bileşkesini alırsak x geliyor.
>
> Ö2: Ne yapacağız biliyor musun şey bileşkeye soktuğumuzda şey gelecek özdeşlik fonksiyon vardı ya $I(x)\ I(y)$ şeklinde onlar gelecek ordan da direk…bir yazsana bak
>
> Ö1: Ama bir şey soracağım ilk başta eşit mi kabul mü edeceğiz?
>
> Ö2: Hala eşit kabul edip eşitliği bozmadan her iki tarafın gof ile bileşkesini alacağız anladın mı gof'un tersinde gof eşittir $f^{-1}og^{-1}$ o…$(gof)^{-1}(x)o(gof)(x) = f^{-1}og^{-1}\ o\ (gof)$.

Ö1: Ben şey yapacağım ya gof' un tersiyle gof'u bileşkeye alacağım x gelecek oradan $f^{-1}og^{-1}$ yine gof ile bileşkeye alacağım oradan da x gelecek diyeceğim ki aynı sayıya eşit aynı ifadeye eşit olan ifadeler eşittir diyeceğim oradan eşitliği söyleyeceğim hani öyle aksiyom var ya $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$'yi söyleyebiliyorduk böyle bir aksiyom vardı eşit olan şeyler bir birine eşittir gibi bir şeydi…oradan direk bir şeyler yapacağım.

Öğrenciler bir fonksiyon tersiyle bileşkeye girdiğinde birim fonksiyonunu verir bilgisini kullanarak eğer $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise bu iki fonksiyonun bileşkesinin birim fonksiyonu vereceğini ifade emişlerdir. Bu yüzden $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesini almaları gerektiğini açıklayarak kanıtlarına devam etmişlerdir. Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini aldıklarında C kümesine ait birim fonksiyonunu elde edeceklerini söyleyerek kanıtlarına başlamışlardır. Ö1 ve Ö2 yaptıkları tüm işlemleri, nasıl yaptıklarını açıklayarak ve doğru matematiksel dil kullanarak ifade etmişlerdir. Öğrenciler $(g\,of)\,o(f^{-1}og^{-1})$ bileşke işleminde bileşkenin birleşme özelliğini kullanarak parantez kaydırmışlardır $g\,o(f\,of^{-1})og^{-1}$ işlemini oluşturmuşlardır ve bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $f\,of^{-1}$ bileşkesinin B kümesine ait birim fonksiyon olacağını ifade etmişlerdir. Daha sonrasında $goI_Bog^{-1} = goI_B(g^{-1})$ elde ettikleri bu işlemde birim fonksiyonun tanımını kullanarak kendisine verilen değeri yine kendisine döndüren bir fonksiyon olmasından dolayı gog^{-1} bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ve oluşan gog^{-1} bileşke fonksiyonunu yine bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak C kümesine ait birim fonksiyon olacağını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 30 ve Şekil 31). Öğrenciler bu süreçte aynı operatörleri kullanmışlardır. Öğrencilerin bu süreçte R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{46}: $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_C$ tir ve $g^{-1}: C \to B$ ye tanımlanan g^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan C'den alınan eleman yine C kümesinde görüntü oluşturur, R_{47}: $f: A \to B, y = f(x)$ ve $g: B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\,of: A \to C$ olan bileşke fonksiyonlarının birleşme özelliği vardır,

R_{48}: $fof^{-1} = I_B$ dir ve $f^{-1}: B \rightarrow A$ ya tanımlanan f^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan B'den alınan eleman yine B kümesinde görüntü oluşturur ve R_{49}: $gog^{-1} = I_C$ tir ve $g^{-1}: C \rightarrow B$'ye tanımlanan g^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan C'den alınan eleman yine C kümesinde görüntü oluşturur, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 30 ve Şekil 31). Ö1 ve Ö2'nin bu süreçte genel durumlar arasında geçişler yaparak tanımlardan ve teoremlerden yararlandıkları için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen konuşma aşağıdadır;

Ö2: $(gof)o(f^{-1}og^{-1})$ dimi.

Ö1: Evet eşittir I_C çıkacak mı acaba? I_C dediğimiz fonksiyon birim fonksiyon ve C'ye eşit olan bir fonksiyon.

Ö1: I_C'ye eşit olursa eğer çünkü g^{-1} C'den B'ye bir fonksiyon.

Ö2: I_C'yi neye göre aldın.

Ö1: C'den B'ye bir fonksiyon g^{-1} hani I_C olması lazım söylediğimizin.

Ö1: g^{-1} C'den B'ye gidiyor ya g^{-1} tanım kümesi C olduğu için.

Ö1: Parantezleri kaldırdık.

Ö2: O zaman ortadaki fof^{-1} var ya tekrar orayı paranteze alıp g^{-1} yazacağız tekrar anladın mı orayı ortada ki fof^{-1} olacak.

Ö1: Evet onu paranteze alabiliriz yani burada birleşme kuralı mıydı? Birleşme kuralı gereği yazalım hatta oraya.

Ö1: Zaten fof^{-1} i f^{-1} B'den A'ya idi.

Ö1: O zaman I_A gibi bir şey olabilir olabilir değil öyle hani fof^{-1} f^{-1} B'den A'ya olduğu için ıııı I_B olacak pardon.

Ö2: He dimi yani goI_Bog^{-1} tamam.

Ö1: I_B dediğimiz şeyde.

Ö2: I_B içine aldığını şey yapıyordu direk olduğu gibi çıkarıyordu.

Ö1: Direk B diye çıkartacak.

Ö2: O zaman şey mi yapacağız $go(I_B og^{-1})$.

Ö2: Bu seferde $go(I_B og^{-1})$ buradan da I_B ile g^{-1} bileşkeye soktuğumuzda.

Ö1: Ama I_B'yi nasıl çıkaracağız.

Ö2: I_B'yi çıkarmayacağız.

Ö1: Ortada I_B var çünkü ortada I_B olduğu için g ile g^{-1} ini bileşkeye sokabiliyor muyuz?

Ö2: Yok sokamıyoruz o değişmiyor bak ne yapacağız biliyor musun? I_B'yi g^{-1} ile bileşkeye sokacağız hani şöyle düşün gof' u sen $g(f(x))$ diye yazabiliyorsan I_B bileşke g^{-1} de I_B nin içinde sanki g^{-1} varmış gibi yazacaksın anladın mı demek istediğimi? Yani o I_B'de içindekini g^{-1} şeklinde çıkartacak.

Ö1: Evet evet şimdi anladım $go(I_B og^{-1})$ g^{-1} deyip de içine de şey mi diyeceğiz g^{-1} inde b ya da g^{-1} ….g^{-1} diye mi bırakalım?

Ö2: Aynen hı hı öyle yani gog^{-1} çıkacak en son.

Ö1: $go(I_B(g^{-1}))$ $g^{-1}(x)$ gibi bir şey yazmayacak mıyız?

Ö2: He yok yok direk g^{-1} diye çıkacak.

Ö1: g^{-1} diye yazarsak bileşkenin tanımında.

Ö2: g^{-1} de C'den A'yaydı ya.

Ö1: g^{-1} C'den B'ye idi .

Ö2: Ay özür dilerim şey gof'un ay doğru evet aynen doğru.

Ö1: g^{-1} C'den B'ye.

Ö2: C'den B'ye ise.

Ö1: $I_B o g^{-1}$ ne olur o zaman.

Ö2: O zaman o da I_C diye çıkacak.

Ö1: I_C diye mi çıkar?

Ö2: Hı hı değer kümesine göre yazmıyor muyduk?

Ö1: Öyle de saçma olur ya.

Ö1 ve Ö2 daha sonra dan ise $f^{-1} o g^{-1}$ bileşke fonksiyonu ile gof bileşke fonksiyonun bileşkesini alarak A kümesine ait birim fonksiyonu elde edeceklerini söyleyerek kanıta devam etmişlerdir. Öğrenciler $(f^{-1} o g^{-1})\ o(g\ of)$ bileşke işleminde bileşkenin birleşme özelliğini kullanarak parantez kaydırmışlardır $f^{-1} o(g^{-1}\ og)\ of$ işlemini oluşturmuşlardır ve bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $(g^{-1}\ og)$ işleminin B kümesine ait birim fonksiyon olacağını ifade etmişlerdir. Daha sonrasında $f^{-1} o I_B o f\ = f^{-1} o I_B(f)$ elde ettikleri bu işlemde birim fonksiyonun tanımından kendisine verilen değeri yine kendisine döndüren bir fonksiyon olmasından dolayı $f^{-1} of$ bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ve oluşan $f^{-1} of$ bileşke fonksiyonunu yine bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak A kümesine ait birim fonksiyon olacağını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 30 ve Şekil 31). Öğrenciler yaptıkları açıklamaları ve kullandıkları kavramları içsel olarak anlamlandırarak doğru bir matematiksel dil kullanmışlardır. Öğrenciler bu süreçte aynı operatörleri kullanmışlardır.

Öğrencilerin bu süreçte $R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{47}, R_{50}$: $(f^{-1}$ o $g^{-1})\ o(gof) = I_A$ dır ve $f{:}\,A \to B$ tanımlanan f fonksiyonun tanım kümesi olan A'dan alınan eleman yine A kümesinde görüntü oluşturur, R_{51}: $(g^{-1}\ o\ g) = I_B$ dir ve g: $B \to C$'ye tanımlanan g fonksiyonun tanım kümesi olan B'den alınan eleman yine B kümesinde görüntü oluşturur ve R_{52}: $f^{-1} of = I_A$ dır ve $f{:}\,A \to B$ tanımlanan f fonksiyonun tanım kümesi olan A'dan alınan eleman yine A kümesinde görüntü oluşturur, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 30 ve Şekil 31). Öğrencilerin bu süreçte genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak, aralarında geçişler yaparak tanımlardan ve teoremlerden yararlandıkları için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen görüşme aşağıdadır;

Ö2: Şimdi $f^{-1}og^{-1}\ i\ (gof)$ ile bileşkeye sokucaz buradan da aynı şey ortadaki $g^{-1}\ o\ g$ sokmuş olucaz.

Ö1: Birleşme kuralından $f^{-1}o(g^{-1}\ o\ g)of$ olucak dimi birleşme kuralından bu da $(g^{-1}\ o\ g)$'de zaten g B'den C'ye olduğu için I_B dir.

Ö2: evet f^{-1} tersi bileşke I_B ile de f'yi bileşkeye soktuğumuzda o direk f diye çıkacak f'de A'dan B'ye olduğundan…

Ö1: Şimdi bir saniye burada da yine aynı şekilde $I_B(f)$ diye bilir miyiz şeyden bileşke tanımından $f^{-1}oI_B(f)$ diye ilir miyiz?

A: Demin yukarı da dediniz ki gof ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşkeye soktum I_C elde edicem dediniz sonra bunu elde ettiniz şimdi tersinde $f^{-1}og^{-1\prime}\ i\ (gof)$ ile bileşkeye soktuğunuz da peki ne olur?

Ö1: I_A bulmamız gerekiyor.

Ö1: Evet en başta şey demiştik I_A olduğunu gösterebilirsek birbirinin tersi olduğunu göstermiş oluruz.

Ö1: İşte hocam oraya gelirken $f^{-1}oI_B(f)$ onun f olduğunu söyledik birim fonksiyon tanımından.

Ö1: $f^{-1}of = I_A$ f' de A'dan B'ye olduğu için buranında I_A çıkması lazım f'in tanım kümesinden I_A olur bu kadar I_A olur dolayısıyla gof un tersi $f^{-1}og^{-1}$ olur bu şekilde hocam.

Öğrenciler tanım kümesinden aldıkları x elamanlarının görüntü kümesi tanımı gereği $f(x)$ şeklinde gösterildiklerini bilmelerine rağmen seçtikleri x elemanını fonksiyonların sembolik gösterimlerinde ifade edip etmemeleri konusunda kararsızlık yaşadıkları görülmüştür. Öğrenciler x'in tüm bileşke fonksiyon işlemindeki tanım kümesi olan x'leri simgelediğinin, fonksiyonun tanımı gereği iç kümenin tanım kümesinden elemanları alarak görüntü kümelerini oluşturmaları gerektiğinin farkına varamamışlardır. Öğrencilerin aralarında geçen görüşme aşağıdadır;

Ö1: Bu arada yanına x yazmadık hocam biraz eksik gibi oldu $f^{-1}of$ yazdık hani diğerinde de aynı şekilde yanlarına hiç x yazmadık A , B gibi şeyler yazmadık.

A: Sen şey dedin ya demin hiç x demedik hani $(gof)^{-1}(x)$ gibi bir şey demedik eksik mi ki diye bir cümle kurdun diye hatırlıyorum değil mi neyi kastettin orada?

Ö2: Hocam bence eksik değil ya sadece tanım kümesi değer kümesiyle gösteriyoruz ya şeyi özdeşlik olduğunu yani nerden nereye gittiğini bilmemiz yeterli olacaktır diye düşündüm ben.

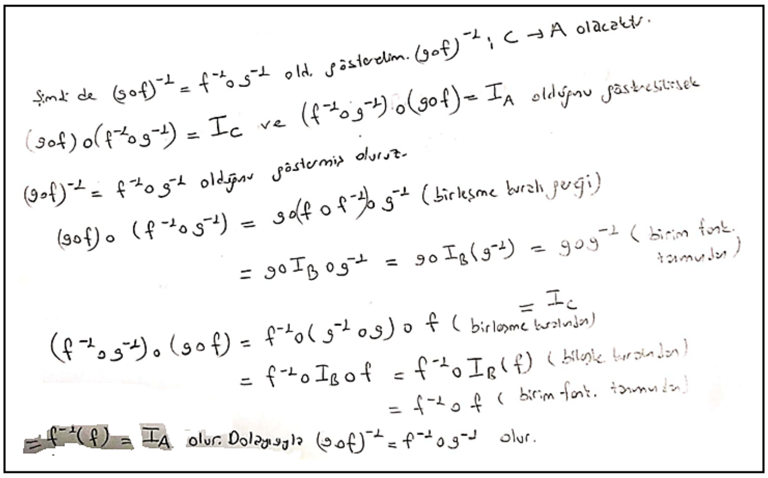
Ö1: Normalde yazardık aslında ama yazmasak da olur gibi geldi sonradan çünkü hani fonksiyonu gösteriyoruz o yüzden hani böyle de olur gibi geldi bana bilmiyorum ne düşünüyor.

Ö2: Hocam ben fonksiyonu hani bir fonksiyonu işte f'yi A'dan B'ye gösterdik ya bu özdeşlik dediğimizde aynı kümeden aynı kümeye olan bir fonksiyon olduğu için x'e gerek duymadım ben çünkü tanım kümesi ve değer kümesini göstersek yeterli olur diye düşündüm yani kümelerle bunu halledebileceğimizi düşündüm

Ö1: Çünkü şöyle hocam f'i yazarız x diye ama hani az önce mesela ne yaptık f^{-1}'de falan da yazdık en son f^{-1}'inde mesela ne yazacağız onu da B dediğimizde $f(x)$ mi? Yazacağız mesela yanına parantez içinde f'in yanına x yazacağız ama f^{-1}' ini de yaptık az önce g^{-1}'ni de yaptık onlara biraz C'de yazabiliriz B'de yazabiliriz onların yerine ama onlar biraz karışıklık gösterebilir bence hani o yüzden direk fonksiyon yazdık hani onlara girmedik daha fazla karışıklık olmasın diye o şekilde.

Şekil 30

Ö1'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



$(gof)^{-1}: C \to A$ olacaktır.

Şimdi de $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ old. gösterelim. $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_A$ olduğunu gösterebilirsek

$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_C$ ve

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermiş oluruz.

$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = go(fof^{-1})og^{-1}$ (birleşme kuralı gereği)

$= goI_Bog^{-1} = goI_B(g^{-1}) = gog^{-1}$ (birim fonk. tanımından)

$= I_C$

$(f^{-1}og^{-1})o(gof) = f^{-1}o(g^{-1}og)of$ (birleşme kuralından)

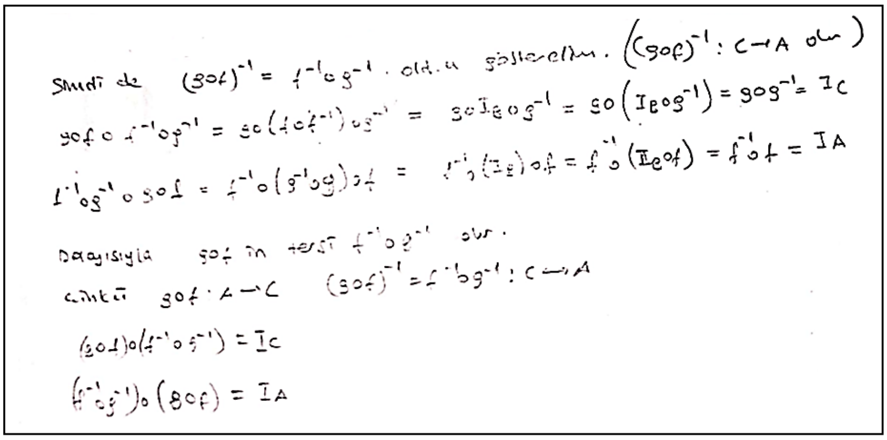
$= f^{-1}oI_Bof = f^{-1}oI_B(f)$ (bileşke kuralından)

$= f^{-1}of$ (birim fonk. tanımından)

$= f^{-1}(f) = I_A$ olur. Dolayısıyla $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olur.

Şekil 31

Ö2'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şimdi de $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$. old.u gösterelim. ($(gof)^{-1}: C \to A$ olur)

$gofof^{-1}og^{-1} = go(fof^{-1})og^{-1} = goI_Bog^{-1} = go(I_Bog^{-1}) = gog^{-1} = I_C$

$f^{-1}og^{-1}ogof = f^{-1}o(g^{-1}og)of = f^{-1}o(I_B)of = f^{-1}o(I_Bof) = f^{-1}of = I_A$

Dolayısıyla gof in tersi $f^{-1}og^{-1}$ olur.

çünkü $gof: A \to C$ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}: C \to A$

$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_C$

$(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_A$

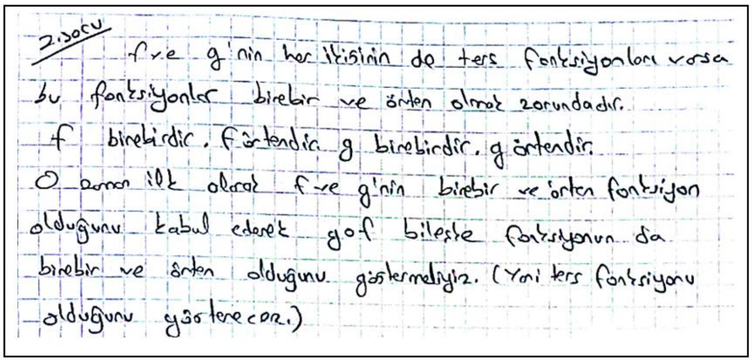
İkinci Sınıf. Öğrencilerin her ikisi de teoremi okuduktan sonra f ve g fonksiyonlarının tersi var ise birebir ve örten olduğunu kabul ederek önce $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersi olabilmesi için birebir ve örten olduğunu göstereceklerini ifade etmişlerdir. Daha sonra ise $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin $f^{-1}og^{-1}$ e eşit olduğunu göstereceklerini belirtmişlerdir ve her ikisinin de R_{10} operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 32 ve Şekil 33). Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö4: Tamam. Şimdi fonksiyonun tersinin olabilmesi için hem f'in hem de g'nin birebir ve örten olması gerekiyor fonksiyonların. Fonksiyonların birebir ve örten olduğunu kabul edip yani hem f birebir örten, hem g birebir ve örten olacak. f ve g birebir ve örten olduğu için her ikisi de, g bileşke f'in birebir ve örten olduğunu göstereceğiz. Bu birincisi yani aslında iki hani a - b şıkkı varmış gibi sorunun. Önce bunu göstereceğiz daha sonrasında da bu fonksiyonun f'in tersi bileşke g'nin tersinin, g bileşke f 'in tersine eşitliğini kanıtlayacağız. Yani onu göstereceğiz. Yani iki aşamalı.

Ö3: Evet, bence de yani iki tane soru var. Önce f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de birebir ve örten olduğunu gösterip sonrasında $g\,of$ bileşke fonksiyonunun da aynı şekilde birebir ve örten olduğunu gösterdiğimizde yani bunun tersi olduğunu göstermiş olacağız.

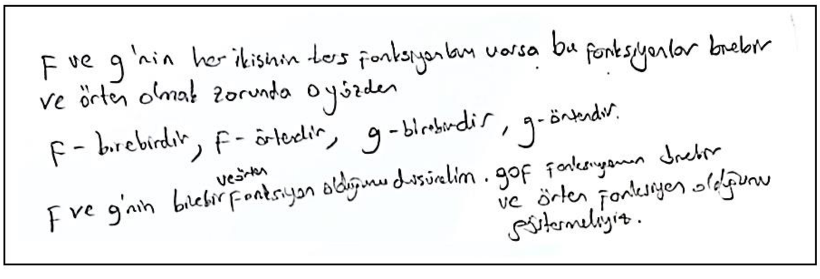
Şekil 32

Ö4'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


2. soru
f ve g'nin her ikisinin de ters fonksiyonları varsa bu fonksiyonlar birebir ve örten olmak zorundadır.
f birebirdir. f örtendir. g birebirdir. g örtendir.
O zaman ilk olarak f ve g'nin birebir ve örten fonksiyon olduğunu kabul ederek gof bileşke fonksiyonun da birebir ve örten olduğunu göstermeliyiz. (Yani ters fonksiyonu olduğunu göstereceğiz.)

Şekil 33

Ö3'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


F ve g'nin her ikisinin ters fonksiyonları varsa bu fonksiyonlar birebir ve örten olmak zorunda o yüzden
F - birebirdir, F - örtendir, g - birebirdir, g - örtendir.
F ve g'nin birebir ve örten fonksiyon olduğunu düşünelim. gof fonksiyonunun birebir ve örten fonksiyon olduğunu göstermeliyiz.

Ö3 ve Ö4, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir olduğunu, görüntüleri eşit ise tanım kümesinden aldıkları elemanların da birbirine eşit olacağını ifade ederek göstermişlerdir. Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu f ve g fonksiyonlarının birebir olmasından yararlanarak göstermişlerdir. $g\,of$ bileşke fonksiyonunun $g\,of(a) = g\,of(a')$ şeklinde birbirine eşit görüntülerini oluşturarak bileşkenin tanımından $g\left(f(a)\right) = g\left(f(a')\right)$ olarak ifade etmişlerdir. Öğrenciler f fonksiyonunun görüntülerini $f(a) = b$ ve $f(a') = b'$ olarak tanımlamışlardır ve $g\,(b) = g\,(b')$ eşitliğini oluşturmuşlardır. Kabulleri gereği g fonksiyonunun birebirliğinden $b = b'$ eşitliğini göstermişlerdir ve tekrar bu eşitlikte fonksiyonun görüntülerini yerine yazarak $f(a) = f(a')$ eşitliğini elde etmişlerdir. Ve f fonksiyonunun birebir olmasından yararlanarak $a = a'$ olduğunu doğru bir şekilde ifade ederek bileşke fonksiyonunun birebirliğini göstermişlerdir (Bkz. Şekil 34 ve Şekil 35). Öğrenciler tanımları ifade ederken elemanları hangi kümeden aldıklarını ve görüntülerinin hangi kümede oluştuğunu göstermek gibi bazı matematiksel gösterimleri ve sembolleri kullanmamışlardır. Ö3 ve Ö4' ün kanıt sürecinin bu aşamasında R_2, $R_{35}, R_{36}\ ve\ R_{37}$ operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 34 ve Şekil 35). Öğrencilerin daha önceden derste gördükleri bilgileri ve tanımları içselleştirmeden bu kanıt sürecinde kullandıkları görülmüştür. Öğrenciler kanıtın belirli bir formu veya şekli olduğunu kabul ederek ve önceden bildiği doğruları kullanarak kanıt sürecini tamamlamışlardır ve ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen görüşme aşağıda verilmiştir;

Ö3: Ama şöyle yazalım. f birebir ise dedik, yanına küçük not yazalım, sağ tarafına. f birebir ise $f(x_1)$= $f(x_2)$ise $x_1 = x_2$. Diğeri deneyip; g birebir, o zaman g (x_1)= g (x_2) ise $x_1 = x_2$.

Ö4: Tamam.

Ö3: Şimdi ben şöyle diyorum soruda. $g\,of(a) = g\,of(a')$, öyle olmaz mı?

Ö4: Bir saniye. Şimdi $g\,of(a) = g\,of(a')$mü diyeceğiz?

Ö3: Aynen aynen. $g\left(f(a)\right) = g\left(f(a')\right)$ oldu. O zaman ben zaten $f(a)$'ya ne demiştim? b demiştim, doğru mu?

Ö4: Evet

Ö3: Biz $f(a)$'ya zaten b olsun dedik. b' de $f(a')$ olsun dedik. O yüzden $g\ (b) = g\ (b')$ oldu.

Ö4: Aynen yani aslında $f(a) = f(a')$ oldu.

Ö3: Aynen o zaman da $b = b'$...Yani bunu niye dedik? g birebir çünkü.

Ö4: Aynen g, f fonksiyonu birebir olduğu için, evet.

Ö3: Tamam bundan sonra da şunu dememiz lazım $f(a) = f(a')$.

Ö4: Çünkü b dediğim şey $f(a)$'dı.

Ö3: Çünkü $f(a) = b$, bir de ne? $f(a') = b'$

Ö4: Aynen. f'de birebir olduğu için $a = a'$ olmuş oldu.

Ö3: Çünkü $f(a) = b$, $f(a') = b'$...Buraya kadar sıkıntı var mı?

Ö4: Yok yok doğru. Şimdi buradan da...

Ö3: Tamam, ise o zaman da $a = a'$ olur.

Ö4: Evet o da f birebir olduğu için.

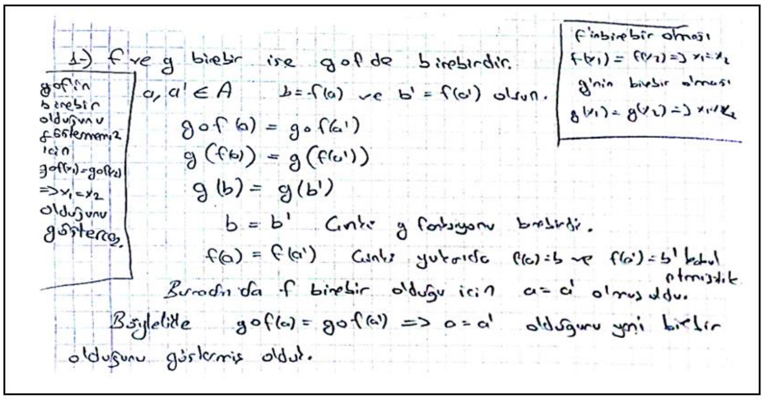
Ö3: f birebir...

Ö4: f birebir olduğu için $a = a'$ olmuş oldu. Böylelikle $g\ of$ birebir yani.

Ö4: Yani en sonunda $g\ of(a) = g\ of(a')$ ise $a = a'$ göstermiş olduk.

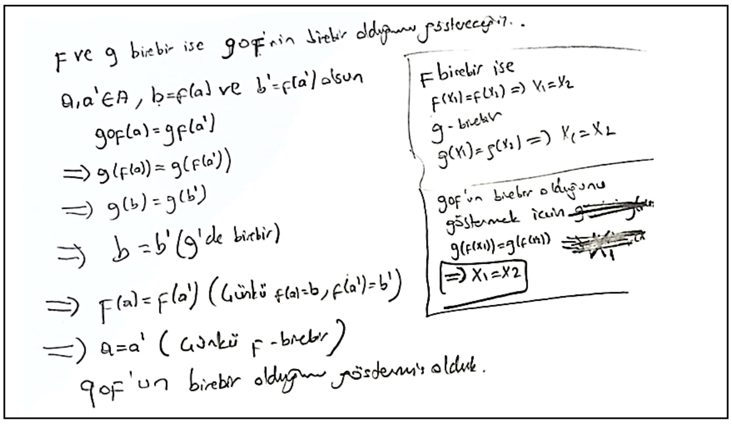
Şekil 34

Ö4'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 35

Ö3'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



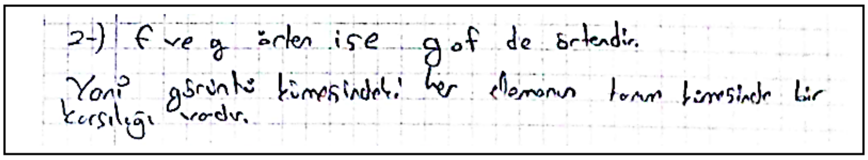
Ö3 ve Ö4 kanıtlarına $g\,of$ bileşke fonksiyonun örten olduğunu göstererek devam etmişlerdir. Aralarında örten fonksiyonun tanımını tartışırken her iki öğrenci de fonksiyonun tanımını ve tanım kümesini doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Öğrenciler tanım kümesinden alınan elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu görüntü kümesinin elemanlarının değer kümesine ait olduğunu ifade edememiş ve görüntü kümesi kavramlarını karıştırmışlardır (Bkz. Şekil 36 ve Şekil 37). Ve her iki öğrencinin de R_{53}: Bir fonksiyonun tanım kümesinde açıkta eleman kalamaz ve $R^{-}{}_{54}$: Bir fonksiyon örten ise görüntü kümesinde açıkta eleman olamaz, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 36 ve Şekil 37). Öğrencilerin aralarında yaptıkları görüşme bunu doğrular niteliktedir;

Ö4: Aynen. $g\,of$ 'de örtendir. Şimdi de bunu göstereceğiz. Şimdi örtenlik dediğim şey neydi? Önce onu hatırlayalım bir. Görüntü kümesindeki her elemanın tanım kümesinde bir x değeri vardı. Doğru mu hatırlıyorum?

Ö3: Örten demek zaten fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinden açıkta eleman kalmaması gerekiyor, o şart, fonksiyonun şartı. Ama örten fonksiyonda ise görüntü kümesinden açıkta elemanın kalmayacağı.

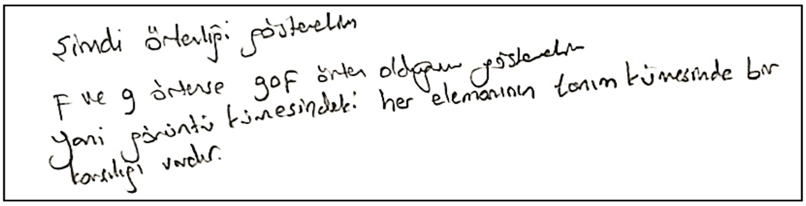
Şekil 36

Ö4'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


2-) f ve g örten ise gof de örtendir.
Yani görüntü kümesindeki her elemanın tanım kümesinde bir karşılığı vardır.

Şekil 37

Ö3'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


Şimdi örtenliği gösterelim
f ve g örtense gof örten olduğunu gösterelim
Yani görüntü kümesindeki her elemanın tanım kümesinde bir karşılığı vardır.

Öğrenciler örtenliğin tanımında yaptıkları hatayı fark edememiş ve kanıtlarını $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten olduğunu f ve g fonksiyonlarının örten olmasından yararlanarak göstermişlerdir. Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonu için $g\,of(x) = c$ ifadesini yazarak g fonksiyonunun örtenliğinden en az bir $f(x) \in B$ olacağını ve f fonksiyonunun örtenliğinden de en az bir tane $x \in A$ olacağını söyleyerek bileşke fonksiyonunun örtenliğini göstermişlerdir. Öğrenciler görüntü kümesi ile değer kümesinin arasındaki farkı anlamlandıramamış olmalarına rağmen doğru matematiksel dil ve sembol kullanmışlardır (Bkz. Şekil 38 ve Şekil 39). Öğrencilerin yazdıkları ifadelerdeki tanım ve değer kümelerinin gösteriminde ve örten fonksiyonunun tanımında kullandıkları matematiksel dilin doğru ve anlamlı olduğu tespit edilmiştir. Bu da bize öğrencilerin doğru matematiksel dil ve sembol kullanmalarına rağmen yazdıkları ifadelerin tam olarak ne anlama geldiğini kavrayamadıklarını doğru sembolik dili kullanmaya odaklandıklarını göstermektedir.

Öğrencilerin her ikisinin de R_{35}, R_{38}, R_{39}, ve R_{40} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 38 ve Şekil 39). Öğrencilerin kanıt sürecinin genelinde derslerde hocalarından gördükleri şekilde yapma eğiliminde olup kavramların anlamlarını içselleştirmedikleri daha çok sembolik dili kullanmaya odaklandıkları görülmüştür. Öğrencilerin teoremi kanıtlama sürecinde genellenebilir tanım ve kavramları içselleştirmeden kullanarak daha çok biçime önem verdileri gözlemlenmiştir. Yani bir kanıtı matematiksel sembollerle ifade ettiklerinde bunun geçerli bir kanıt olacağını düşünmüşlerdir. Bu süreçte öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin aralarında geçen konuşma aşağıda verilmiştir;

Ö4: Her $c \in C$ için $g\ of(x) = c$ olacak şekilde.

Ö3: $x \in A$ olduğunu göstermemiz lazım.

Ö3: Tamam, şimdi her $c \in C$ için g bileşke $f(x) = c$ olacak şekilde $x \in A$ olduğunu göstereceğiz.

Ö4: Aynen.

Ö3: O zaman g örten olduğundan her $c \in C$ için $f(x) \in B$ var.

Ö4: Evet, B eleman...Her $c \in C$ için B eleman $f(x)$ var, aynen öyle.

Ö3: f örten olduğundan da her $f(x) \in B$ için de $x \in A$ var.

Ö4: Aynen öyle. E bizim de zaten amacımız bu değil miydi?

Ö3: Aynen. $g\ of$ örtendir. Bence oldu.

Ö4: Bence de oldu.

Ö4: Şimdi hem $g\ of$ 'un birebir ve örten olduğunu bulmuş olduk. Birebir ve örten ise $g\ of$ ‘in tersi de vardır diyeceğiz.

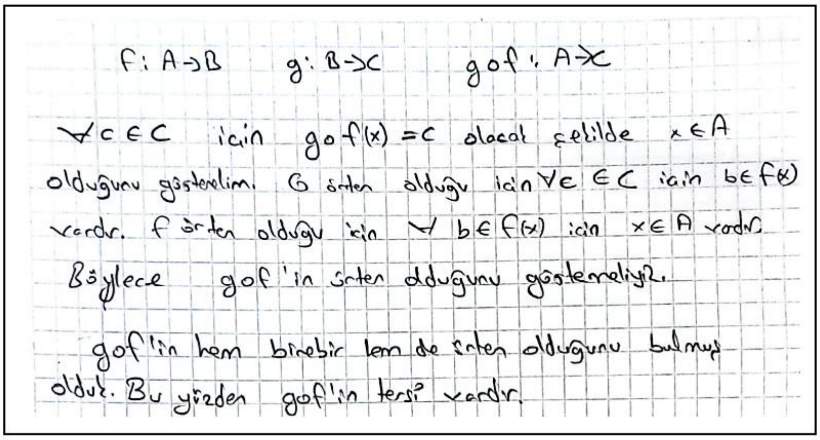
Ö3: $g\,of$ birebir ve örten olduğunu gösterdik. O yüzden $g\,of$ 'un tersinin olduğunu...

Ö4: Tersi vardır.

Ö3: Tersi vardır.

Şekil 38

Ö4'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



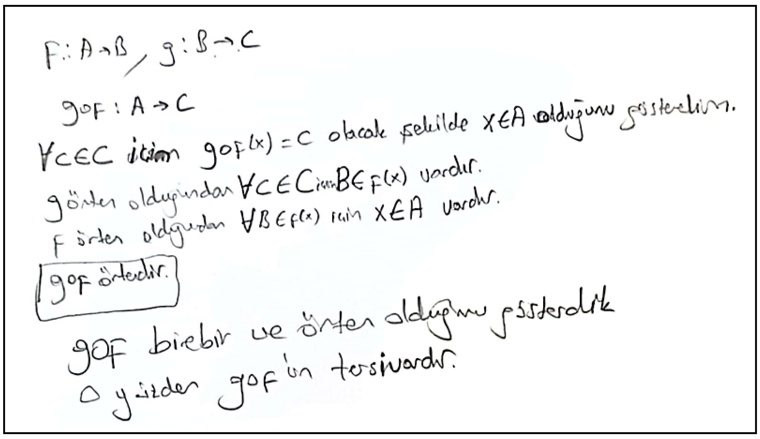
$f: A \to B$ $g: B \to C$ $gof: A \to C$

$\forall c \in C$ için $gof(x) = c$ olacak şekilde $x \in A$ olduğunu gösterelim. G örten olduğu için $\forall c \in C$ için $b \in f(x)$ vardır. f örten olduğu için $\forall\, b \in f(x)$ için $x \in A$ vardır. Böylece gof'in örten olduğunu göstermeliyiz.

gof'in hem birebir hem de örten olduğunu bulmuş olduk. Bu yüzden gof'in tersi vardır.

Şekil 39

Ö3'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



$f: A \to B$, $g: B \to C$

$gof: A \to C$

$\forall c \in C$ için $gof(x) = c$ olacak şekilde $x \in A$ olduğunu gösterelim.

g örten olduğundan $\forall c \in C$ için $B \in f(x)$ vardır.

f örten olduğundan $\forall B \in f(x)$ için $x \in A$ vardır.

gof örtendir.

gof birebir ve örten olduğunu gösterdik

O yüzden gof'un tersivardır.

Ö4 $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin $f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermeye çalışırken ilk teoremde yaptıkları eşitlik kavramında izledikleri yolu bu teoreme aktarmak istemiştir. Ö4 burada daha önceden gördükleri ve yaptıkları işlemleri başka sorularda kullanma eğilimini göstermiştir. Ö4 teoremde ne yapması gerektiğini düşünmeden, bazen aynı kavramaların gösteriminde farklı yolların olabileceğini fark etmeden daha önceden ifade ettiği doğru olduğunu bildiği bir kavramı veya teoremi yeni bir teoremi gösterirken kullanmak istemiştir. Ö4'ün görüşmede yaptığı açıklamaları aşağıda verilmiştir;

> Ö4: $f^{-1}og^{-1}$...Şimdi her ikisinin de birebir ve örten olduğunu kabul ediyoruz zaten, tersleri varsa. O zaman şimdi yine aynısını yapmayacak mıyız? Çift taraflı gitmeyecek miyiz eşitlik varsa? $g\,of$ 'in tersinin; $f^{-1}og^{-1}$ alt kümesi olduğunu aynı zamanda da $f^{-1}og^{-1}, g\,of$ 'in tersinin alt kümesi olduğunu göstermemiz gerekmiyor mu?

Öğrenciler kanıtlarına devam ederken $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin $f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermek için bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $g\,of$ ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonlarının bileşkesini aldıklarında eğer birim fonksiyonu elde ederlerse $f^{-1}og^{-1}$'nin $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersi olduğunu söyleyebileceklerini ifade etmişlerdir. Fakat ne yapacaklarını doğru bir şekilde ifade etmelerine rağmen öğrenciler $g\,of(x) = a$ gibi bileşke fonksiyonunun bir görüntüsünü oluşturarak, fonksiyonların tersini bulurken x'i yalnız bırakıp y cinsinden yazarak yaptıkları cebirsel işlem bilgilerini bileşke fonksiyonuna aktarmışlardır. Eşitliğin her iki tarafında f ve g fonksiyonlarının tersi ile bileşkesini alarak $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersini bulmuşlardır. Daha sonra buldukları $x = f^{-1}(a)og^{-1}(a)$ fonksiyonun tersi ile $g\,of$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini alarak $g\,ofof^{-1}(a)og^{-1}(a)$ işleminde, bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak kanıtlarını tamamlamışlardır (Bkz. Şekil 40 ve Şekil 41). Fakat bileşke fonksiyonun hangi özelliklerini kullandıklarını ve birimlerin hangi kümeye ait olduklarını ifade etmeden birim fonksiyon elde ettiklerini belirtmişlerdir. Öğrenciler burada bileşke fonksiyonun eşitini bulmaları gerekmediğinin zaten bunu teoremde verdiğinin farkına varamamışlardır. Öğrenciler kanıtlarında işlem geçişlerini doğru bir şekilde ifade etmişlerdir fakat $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan bileşkesini almamışlardır. Burada bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla sağdan ve soldan işleme girdiğinde de birim fonksiyonu veriyorsa bu fonksiyon için $g\, of$ bileşke fonksiyonunun tersidir diyebileceklerini ifade etmemişlerdir.

Öğrenciler işlemlerinde fonksiyonların tersinin tanım ve değer kümelerini belirtmekte eksiklikler yapmışlardır ve buldukları birim fonksiyonların hangi kümeye ait olduklarını belirtmemişlerdir. Öğrenciler kanıt sürecini tam ve doğru bir şekilde tamamlayamamışlar ve matematiksel dil ve sembol kullanımlarında eksiklikler yapmışlardır. Öğrencilerin bu süreçte R_{42}, R_{43}, R_{45} ve $R^{-}{}_{56}$: $f: A \to B$, $y = f(x)$ve $g: B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\, of: A \to C$ fonksiyon olsun. Eğer $g\, of$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten ise o zaman $(gof)^{-1}: C \to A$'dır ve $x \in C$, $y \in A$ için $g\, of(x) = y$ olup $(gof)^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y)\, og^{-1}(y) = x'$dir ve R_{55}: Eşitliğin her iki tarafına da aynı işlemi uygularsam eşitlik bozulmaz, operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 40 ve Şekil 41). Ö3 ve Ö4 kanıt sürecinde daha önce öğrendikleri ve bir fonksiyonun tersini bulurken kullandıkları cebirsel işlemleri bileşke fonksiyonun tersini bulmak için kanıt sürecine aktarmışlardır. Öğrencilerin yapılan görüşmedeki açıklamaları aşağıda verilmiştir;

Ö4: Hocam en son $g\, of(x) = a$ dedik.... a, c'den bir eleman olacak şekilde. Sonra sol taraftan g'nin birim...şey tersini aldık pardon. g'nin tersi bileşke $g\, of(x) = g^{-1}(a)$ oldu. Daha sonrasında g'nin tersi bileşke g dediğim şey birim fonksiyona eşit oluyordu. O zaman $f(x) = g^{-1}(a)$ olmuş oldu. Daha sonrasında her tarafın...Bu seferde soldan f^{-1}gidersek de $f^{-1}of = f^{-1}og^{-1}(a)$ oldu. $f^{-1}of$ dediğimiz şey x 'e eşitti birim fonksiyon. O zaman $x = f^{-1}(a)og^{-1}(a)$ Şimdi bu bulduğumuz x değerini $f^{-1}(a)og^{-1}(a)$'yı, en üste hani $g\, of(x) = a$ demiştik ya ...

Ö3: Evet

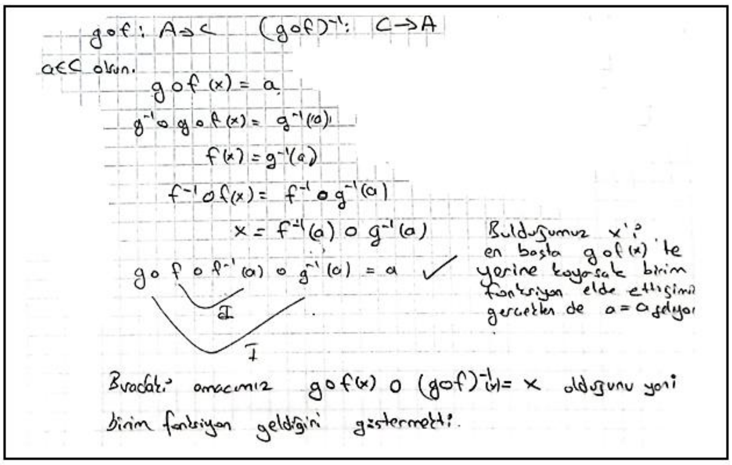
Ö3: diyorum ki, şöyle de...Örneğin; fof^{-1}eşittir $f^{-1}of$ neye eşit, I'ya eşit, değil mi? Yani birim fonksiyon. Tamam mı?

Ö4: Bulduğumuz x'i en başta $g\, of(x)$'e yerine koyarsak birim fonksiyon elde ettiğimizden gerçekten de $a = a$ geliyor.

Ö4: Şimdi bizim bunu yapmamızdaki amaç yani birim fonksiyon olduğunu göstermemizdeki amaç bir fonksiyonun tersiyle fonksiyonun kendisinin bileşkesini alırsak birim fonksiyona eşit oluyor. Yani fonksiyonun tersiyle fonksiyon birbirlerine gelip gidiyor sadece birim fonksiyon ortada kalmış oluyor. Amacımız bunu göstermekti. Bunu göstermemizdeki amaç da $g\, of$ yani bileşke...O aslında bir fonksiyon ya, hani $g\, of$ dediğim şey atıyorum h diye bir fonksiyon olsun. hoh^{-1} birim fonksiyon olduğunu gösterirsek demek ki bunlar birbirinin tersidir diyebilirdik.

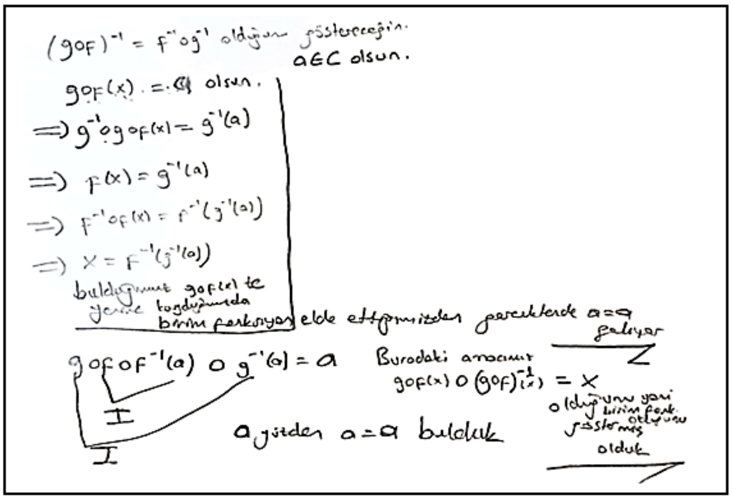
Şekil 40

Ö4'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 41

Ö3'ün ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Üçüncü Sınıf. Öğrenciler teoremi okuduktan sonra bir fonksiyonun tersi varsa birebir ve örten olmalıdır bilgisinden yararlanarak $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersi varsa fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiğini söyleyerek kanıtlarına başlamışlardır. Ve $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersini, f ve g fonksiyonlarının tersi olduğundan dolayı bu fonksiyonların birebir ve örten olmasından yararlanarak göstereceklerini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu süreçte R_2, R_{10}, R_{35}, R_{37}, R_{38} ve R_{39} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 42 ve Şekil 43). Ö5 ve Ö6'nın aralarında geçen konuşma aşağıda verilmiştir;

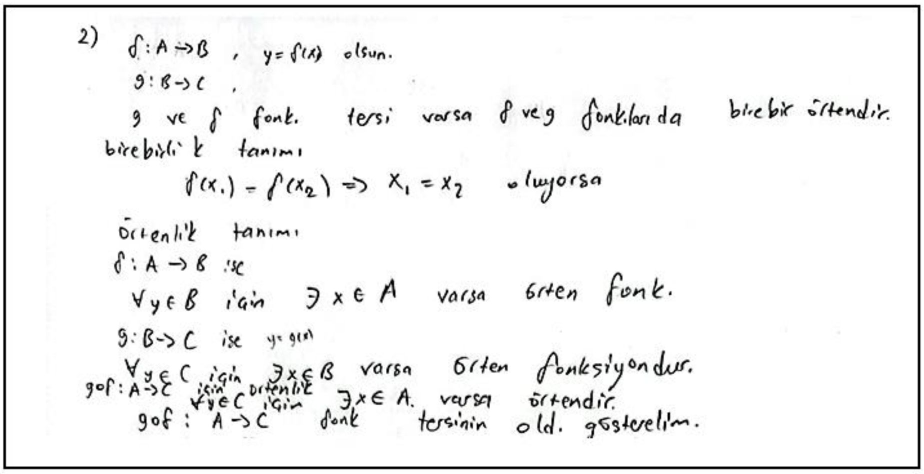
Ö5: Burada ne yapacağız burada ters bileşke fonksiyonun tersi varsa biz burada direk birebir ve örtenliği vardır diyeceğiz ve bunları kullanarak $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermeye çalışacağız o zaman.

Ö6: Zaten bak kabulleri de yaz da $f\!: A \to B$ $g\!: B \to C$ ya bu ikisi arasında güzel bir bağlantı sağlayıp $A \to C$ bir $g\,of$ fonksiyonu oluştururuz.

Ö5: Tersi varsa birebir ve örten olduğunu zaten direkt söyleyeceğiz f ve g'nin tersleri varsa f'de birebir örtendir g'de birebir örtendir bunu not edeceğiz şimdi buraya.

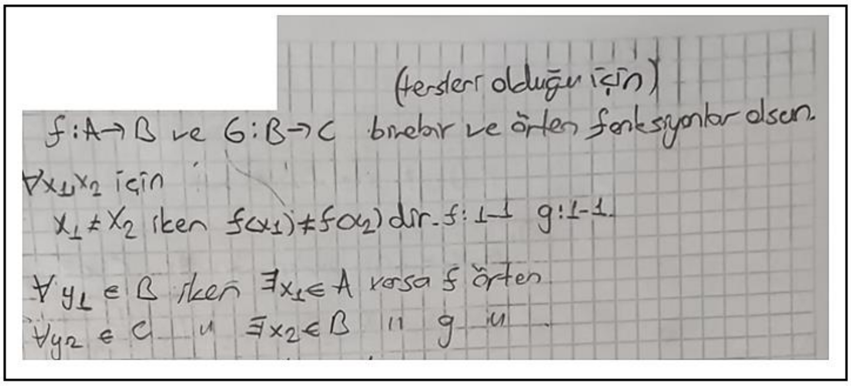
Şekil 42

Ö5'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


2) $f: A \to B$, $y = f(x)$ olsun.
$g: B \to C$,
g ve f fonk. tersi varsa f ve g fonk.ları da birebir örtendir.
birebirlik tanımı
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa
örtenlik tanımı
$f: A \to B$ ise
$\forall y \in B$ için $\exists x \in A$ varsa örten fonk.
$g: B \to C$ ise $y = g(x)$
$\forall y \in C$ için $\exists x \in B$ varsa örten fonksiyondur.
$gof: A \to C$ için örtenlik $\forall y \in C$ için $\exists x \in A$. varsa örtendir.
$gof: A \to C$ fonk tersinin old. gösterelim.

Şekil 43

Ö6'nın ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



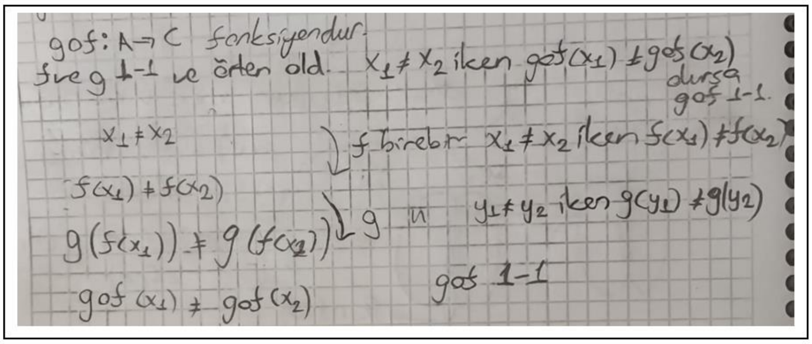
Ö6 kanıtında $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu f ve g fonksiyonlarının birebir olmasından yararlanarak göstermiştir. Ö6 birebir fonksiyonunun, tanım kümesinden alınan elemanlar birbirinden farklı ise görüntülerinin de farklı olacağı tanımını kullanarak göstermiştir. Ö6 tanım kümesinden aldığı $x_1 \neq x_2$ birbirinden farklı iki elemanın $f(x_1) \neq f(x_2)$ görüntülerinin de farklı olacağını f fonksiyonunun birebirliğinden göstermiştir. Ve daha sonra g fonksiyonunun birebirliğinden yararlanarak $g\,(f(x_1)) \neq g\,(f(x_2))$ bileşke fonksiyonunun görüntülerinin de farklı olacağını ifade etmiş ve $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebirliğini göstermiştir (Bkz. Şekil 44). Ö6 kanıt sürecinde kullandığı kavramların anlamlarını ve gösterimlerini doğru bir matematiksel dil kullanarak ifade etmiştir. Ve bu süreçte R_{12}, R_{35}, R_{57}: $g\,of\colon A \to C$ bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (gof)(x_1) \neq (gof)(x_2)$ ise gof birebir fonksiyondur ve R_{58}: g: $B \to C$, $y = g(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in B$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g\,(x_2)$ oluyor ise g birebir fonksiyondur, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 44). Ö6'nın doğru matematiksel dil kullanımına özen göstererek operatörlerinde genellenebilir durumları ve tanımları kullandığı görülmüştür. Bu yüzden de kanıt sürecini dönüşümsel kanıt şeması ile tamamladığı belirlenmiştir. Ö6'nın görüşmede yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö6: $x_1 \neq x_2$ aldım f birebir olduğundan dolayı $x_1 \neq x_2$ ise $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ dedim sonrasında $g\,(f(x_1)) \neq g\,(f(x_2))$ dedim çünkü $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ iken g

kümesine yazarsan g'nin birebirliğinden bunun eşit olmadığını söylerim sonra bunu düzenleyerek $(gof)(x_1) \neq (gof)(x_2)$ bu durumdan dolayı başlangıçta da $x_1 \neq x_2$ aldığımdan dolayı gof birebirdir.

Şekil 44

Ö6'nın ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları

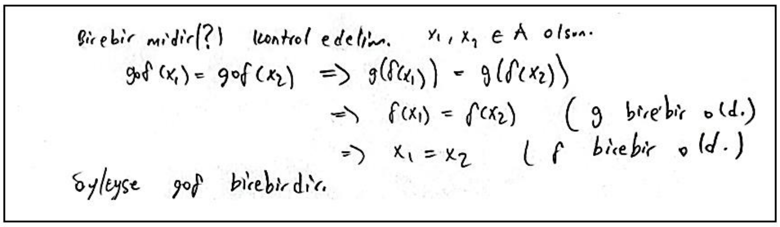


Ö5 ise kanıtında $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu, değer kümesinden alınan aynı görüntülerin tanım kümesinde aynı eleman ile eşleşiyorsa birebir fonksiyondur tanımından yararlanarak göstermiştir. Ö5 $g\,of$ bileşke fonksiyonunun $g\,of(x_1) = g\,of(x_2)$ şeklinde birbirine eşit görüntülerini oluşturarak bileşkenin tanımından $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olarak ifade etmiştir. Kabulleri gereği g fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliğini göstermiştir ve f fonksiyonunun birebir olmasından yararlanarak $x_1 = x_2$ olduğunu doğru bir şekilde ifade ederek bileşke fonksiyonunun birebirliğini göstermiştir (Bkz. Şekil 45). Ö5 yaptığı işlemlerin ve kavramların anlamlarına yönelik açıklamalarında doğru matematiksel dil ve sembol kullanmıştır. Ö5'in bu süreçte kullandığı operatörler R_2, R_{35}, R_{36} ve R_{37} olarak belirlenmiştir (Bkz. Şekil 45). Ö5'in kullandığı ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumlar, tanımlar ve teoremler arasında geçişlerde bulunarak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladığı görülmüştür. Ö5'in görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö5: Hocam bende ben direkt şöyle göstereyim şimdi ya da direkt anlatayım aynı şey olacak zaten şimdi şöyle hocam $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu gösterdiğim zaman ben birebirliği göstermiş oluyordum. O yüzden ben yine aynı şekilde görüntü kümesinden eleman alıcam $g\,of(x_1) = g\,of(x_2)$ iken ne oldu ben bunu düzenleyip yazdım $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olmuş oldu g birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ oldu f de birebir olduğundan x de $x_1 = x_2$ oldu ve sonuç olarak görüntü kümesinden aldığım elemanlar tanım kümesindeki elemanlara eşit oldu ve bu yüzden $g\,of$ birebirdir dedim.

Şekil 45

Ö5'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


Birebir midir(?) kontrol edelim. $x_1, x_2 \in A$ olsun.

$gof(x_1) = gof(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g birebir old.)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebir old.)

Söyleyse gof birebirdir.

Ö5 ve Ö6, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten bir fonksiyon olduğunu göstermek için bileşke fonksiyonunun değer kümesinden aldıkları her elemanın tanım kümesinde en az bir tane değeri olacağını ifade etmişlerdir. Ve $g\,of$ bileşke fonksiyonu için $g\,of\,(x_1) = g\,(f(x_1)) = c$ ifadesini yazarak g fonksiyonunun örtenliğinden en az bir $f(x_1) \in B$ olacağını ve f fonksiyonunun örtenliğinden de en az bir tane $x_1 \in A$ olacağını söyleyerek bileşke fonksiyonunun örtenliğini doğru bir şekilde göstermişlerdir (Bkz. Şekil 46 ve Şekil 47). Öğrenciler işlemlerini doğru matematiksel dil ve semboller ile göstermiş ve anlamlandırarak açıklamışlardır. Öğrencilerin her ikisi de aynı operatörleri kullanmıştır. Öğrencilerin bu süreçte $R_{35}, R_{38}, R_{39}\ ve\ \ R_{40}$ operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 46 ve Şekil 47). Öğrencilerin kanıtın bu sürecinde doğru matematiksel dil kullanımına özen göstererek operatörlerinde genellenebilir durumları ve tanımları kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin kanıt sürecini dönüşümsel kanıt şeması ile tamamladıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

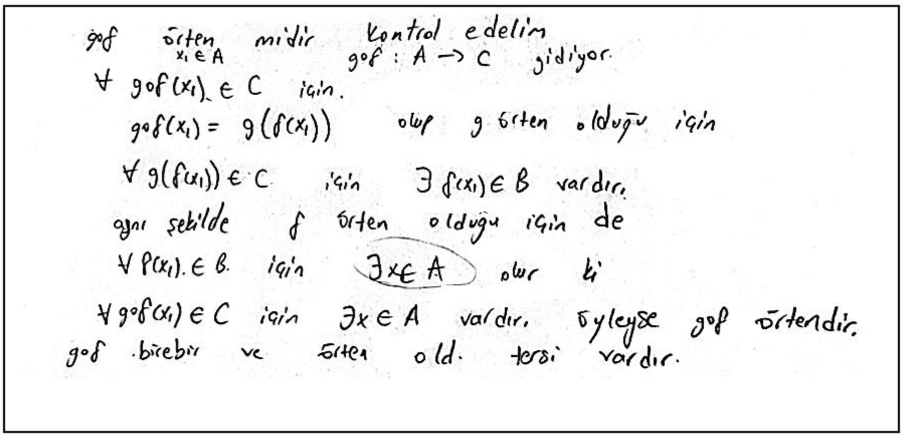
Ö5: $g\,of$ hocam $A \rightarrow C$'ye gidiyor $g\,of$.

Ö5: Her $g\, of\ (x_1) \in C$ için en az bir x_1 elemandır a var mı yok mu bunu arıyorum aslında bunun için her $g\, of\ (x_1)$ yani bunu da $g\ \big(f(x_1)\big) \in C$ için g'nin örten olduğundan ben şunu söyleyebiliyordum en az bir $f(x_1)$ elemandır b var olduğunu g'nin oradan olduğundan söyleyebiliyordum daha sonra her $f(x_1)$ elemandır b içinde en az bir tane $x \in A$ var bunuda f örten olduğu için söyleyebiliyorum sonuç olarak C'den aldığım bir eleman her eleman için en az bir tane x'den en az bir tane A'dan x elemanı bulabildiğim için $g\, of$ örtendir dedim.

Ö6: Ben şu şekilde yaptım hocam $g\, of$ örten mi diye bir başlık açmışım önce bir soru işareti koymuşum bunu araştıracağım her $y_1 \in C$ olsun en az bir tane $f(x_1)$ elemandır b vardır yani $f(x_1)$ olarak seçtim aslında içine yazacağım şeyi basitlik sağlasın bana diye $y = g\ \big(f(x_1)\big)$ iste yani böyle bir g örten olduğu için en az bir tane $f(x_1)$ var g'nin örtenliğini kullanıyoruz burada sonrasında $f(x_1)$'de yani her $f(x_1)$için en az bir tane $x_1 \in A$ vardır burada da f'in örtenliğini kullanmış olduk sonuç olarak $g\, of$'dan yola çıkarak g'nin ve f'nin örtenliklerini sırayla yani zincir gibi kullanarak $g\, of$'un örten olduğunu söyledim.

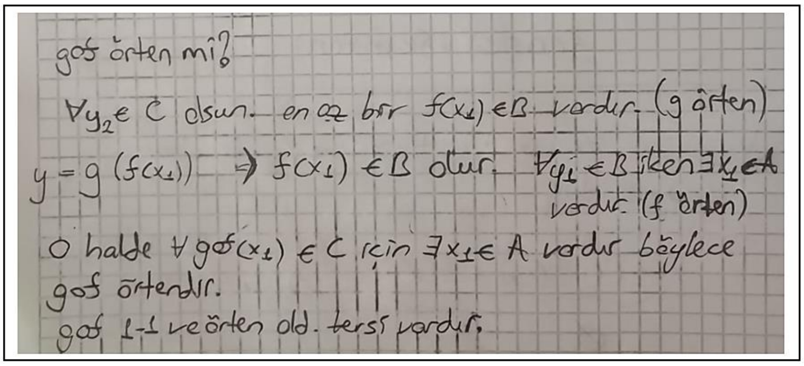
Şekil 46

Ö5'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 47

Ö6'nın ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Ö5 kanıt sürecinde $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir ve örten olduğu için tersinin olduğunu ve eğer tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesi alındığında birim fonksiyonu vereceğini, bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak ifade etmiştir (Bkz. Şekil 48).

Ö5 $(g\,of)\,o(f^{-1}og^{-1})$ bileşke işleminde bileşkenin birleşme özelliğini kullanarak parantez kaydırmıştır $g\,o(f\,of^{-1})og^{-1}$ işlemini oluşturmuştur ve bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $f\,of^{-1}$bileşkesinin birim fonksiyon olacağını ifade etmiştir. Daha sonrasında $goIog^{-1}$ elde ettiği bu işlemde birim fonksiyonunun kendisine verilen değeri yine kendisine döndüren bir fonksiyon olmasından dolayı gog^{-1} bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ve oluşan gog^{-1} bileşke fonksiyonunu yine bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak kanıtını tamamlamıştır (Bkz. Şekil 48). Ö5'in işlemlerinde ters ve birim fonksiyonların tanım ve değer kümelerini belirtmediği ve kavramların açıklamalarını yaparken matematiksel dil ve sembol kullanımlarında eksiklikleri olduğu görülmüştür. Ö5'in bu süreçte R_{42}, R_{43}, R_{45} ve R_{47} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 48). Ö5'in görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö5: Bundan sonrası için yapmamız gereken şey hocam $g\,of$'un tersi olduğunu ben buldum ve bu tersinin de $f^{-1}og^{-1}$ eşit olduğunu göstermem gerekiyordu ve ben buraya yazdım zaten ifade ettim bu arada biz $g\,of$ birebir ve

örten olduğu için tersi vardır ve tersiyle bileşke girdiğinde de birim fonksiyonu vermelidir ben bunu tanımda söyleyebiliyorum o zaman ben $g\,of$ ile $f^{-1}og^{-1}$ işleme yani bileşke aldığım zaman birim fonksiyonu veriyor mu vermiyor mu bunu kontrol ettim bunun içinde bileşke aldığımda fonksiyonlarda birleşme özelliği olduğundan buradaki parantezleri kaydırabiliyorum yani $g\,of$ bileşke…..

Ö5 kanıtına devam ederken $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan bileşkesini almamıştır. Ö5 bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla sağdan ve soldan işleme aldıklarında da birim fonksiyon olup olmadığına bakmaları gerektiğini fark edememiştir. Dahası diğer teoremde gösterdikleri eşitlik kavramında kullandığı bilgileri buraya aktararak eşitlik kavramını ancak ve ancak bağlacı gibi düşünerek $R^{-}{}_{16}$ operatörünü kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 48). Ö5 açıklamalarında tersine işlem yaparak birim fonksiyondan da $g\,of$ ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesine ulaştığını ve kanıtını tamamladığını belirtmiştir. Ö5 birinci teoremin çözümünde yaptığı eşitlik kavramı ile ilgili hatalı bilgisini bu kanıta aktarmak istemiş kendisinin daha önceden ifade ettiği doğru olduğuna inandığı bir kavramı veya teoremi yeni bir teoremi gösterirken kullanmak istemiştir. Bu da Ö5'in ritüel kanıt şemasına sahip olduğu göstermektedir. Ö5'in görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö5: Yani hocam burada kastettiğimiz ilk başta birinci teoremdeki eşitlik hani ben $g\,of$ bileşke $f^{-1}og^{-1}$'nin birim fonksiyonuna eşit olduğunu göstermem gerekiyor ve eşit olduğunu göstermek için de hem gerek koşul sağlanması gerekiyor hem de yeter koşulu sağlanması gerekiyor.

A: Yeter koşul dediğin şey nedir ?

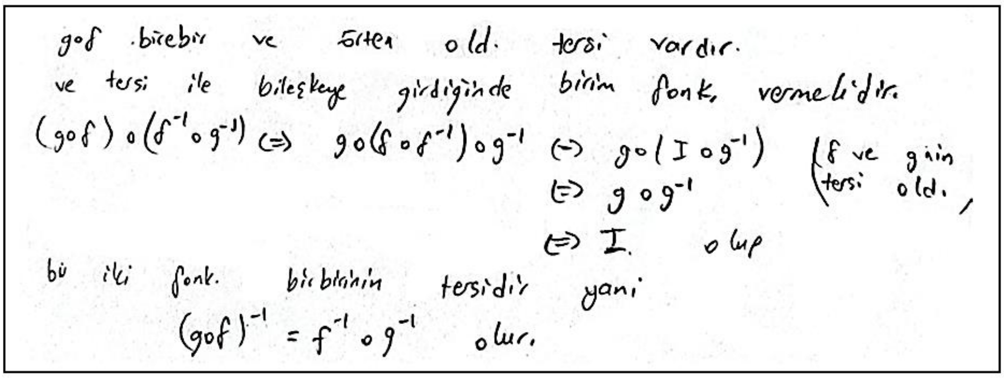
Ö5I: Hocam ancak ve ancak mantık konusundaki ancak ve ancağı kullanıyoruz.

Ö5 : Şu hocam şimdi biz burada eşitliğini gösterebilmek için soldan sağa eşit olduğunu göstermem lazım ve aynı şekilde sağdan sola da eşit olduğunu göstermem lazım.

Ö5: Tamam soldan sağa dediğim şey şu hocam $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermem gerekiyor ve aynı şekilde birim fonksiyon alıp üzerine işlemler yaparak $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermem gerekiyor geriye dönebiliyor mu birbirine eşit mi?

Şekil 48

Ö5'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



gof birebir ve örten old. tersi vardır.
ve tersi ile bileşkeye girdiğinde birim fonk. vermelidir.
$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) \Leftrightarrow go(fof^{-1})og^{-1} \Leftrightarrow go(Iog^{-1})$ (f ve g'nin tersi old.)
$\Leftrightarrow gog^{-1}$
$\Leftrightarrow I$ olup
bu iki fonk. birbirinin tersidir yani
$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olur.

Ö6 kanıt sürecinde $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir ve örten olduğu için bir tane tersi olduğunu belirtmiştir. Ve eğer tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesi alındığında birim fonksiyonu vereceğini, bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak ifade etmiştir (Bkz. Şekil 49). Ö6 kanıt sürecinde fonksiyonların tersinin tanım ve değer kümelerini ifade etmiş ve her fonksiyon için görüntü kümesi oluşturmuştur. Ö6 bileşke fonksiyonun tanımından yararlanarak, fonksiyonların görüntülerini bileşke fonksiyonunda yerine yazarak birim fonksiyonu elde ettiğini göstermiş ve kanıtını tamamlamıştır (Bkz. Şekil 49). Ö6 yaptığı işlem adımlarında doğru matematiksel dil ve semboller kullanmasına rağmen önceden öğrendiği yöntem ve cebirsel işlemlerden yola çıkarak devam ettiği görülmüştür. Dahası bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini sağdan ve soldan işleme aldıklarında da birim fonksiyon olup olmadığına bakması gerektiğini fark edememiştir.

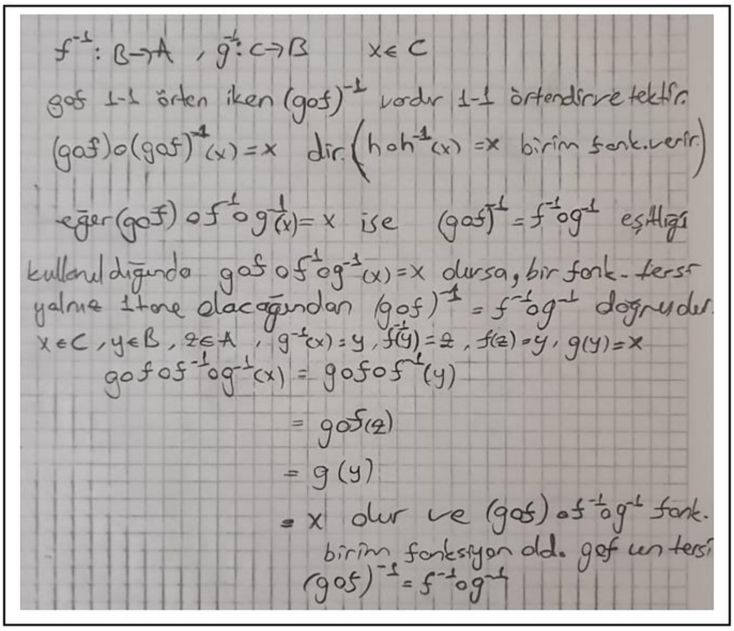
Ö6'nın bu süreçte R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{59}: f: $A \to B$ ve f^{-1}:$B \to A$ fonksiyonları için $x \in A$, $y \in B$ için $f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ dır. Bu sebeple $x \in A$ ve $y \in B$ için $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x))$= $f^{-1}(y) = x$ ve $f\text{o}f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ elde edilir, R_{60}: g: $B \to C$ ve g^{-1}: $C \to B$ fonksiyonları için $x \in B$, $y \in C$ için $g(x) = y$ ise $g^{-1}(y) = x$ dır. Bu sebeple $x \in B$ ve $y \in C$ için $g^{-1}og(x) = g^{-1}(f(x))$= $g^{-1}(y) = x$ ve $gog^{-1}(y) = g(g^{-1}(y)) = g(x) = y$ elde edilir ve R_{61}: Tersi olan fonksiyonların yalnızca bir tane tersi vardır, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 49). Ö6 önceden öğrendiği bir bilgiyi ya da doğruluğundan emin olduğu işlem adımlarını yapacağı kanıta aktarmak istemiştir. Bu yüzden Ö6'nın ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö6'nın görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö6: Hocam ben f'in ve g'nin tersleri olduğunu göstermiştim birebir olduğunu söyledim sonra $g\,of$'un birebir ve örten olduğundan dolayı $g\,of$'un tersinin olabileceğini söyledim sonrasında $g\,of$ ile $(gof)^{-1}$işleme sokulduğunda x'ler yani C'den bir x elemanı aldığımda x'e eşit olacağını yani birim fonksiyon olacağını söyledim sonrasında dedim ki eğer dedim $(gof)o(f^{-1}og^{-1})$ birim elemanı veriyorsa ve bizdeki buradaki eşitlik $(gof)^{-1}$ 'un tersinin $(gof)^{-1}$ olduğunu söylüyor ya gösterim yapılmış veya işte öyle midir ? Benim için en büyük sorunlardan birisi öyle midir? Bence işte bu eşitlik var iste dedim $(gof)^{-1}$ yani $f^{-1}og^{-1}$eşittit diye kabul ederim dedim ve bunu göstermeye çalışacağım.
>
> Ö6: Evet x koyuyorsanız x alacaksınız y koyuyorsanız y alacaksınız bu şekilde yaptım sonrasında dedim ki eğer dedim$(gof)o(f^{-1}og^{-1})$ eşittir x ise $(gof)^{-1}$eşittir $(gof)^{-1}$ eşitliğini kullanaraktan bunun birim fonksiyon olduğunu gösterebiliyorsak tersininde bir tane olacağından dolayı dedim bu eşitlik gösterilmiş

olur dedim yani gof'un tersi yerine $f^{-1}og^{-1}$'i kullandığımızda bunu sağlıyorsa doğrudur dedim.

Şekil 49

Ö6'nın ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



$f^{-1}: B \to A$, $g^{-1}: C \to B$ $x \in C$

gof 1-1 örten iken $(gof)^{-1}$ vardır 1-1 örtendir ve tektir.

$(gof)o(gof)^{-1}(x) = x$ dir. ($hoh^{-1}(x) = x$ birim fonk. verir)

eğer $(gof)\, o f^{-1} o g^{-1}(x) = x$ ise $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ eşitliği

kullanıldığında $gof\, o f^{-1}og^{-1}(x) = x$ olursa, bir fonk. tersi

yalnız 1 tane olacağından $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ doğrudur.

$x \in C$, $y \in B$, $z \in A$, $g^{-1}(x) = y$, $f^{-1}(y) = z$, $f(z) = y$, $g(y) = x$

$gofof^{-1}og^{-1}(x) = gofof^{-1}(y)$

$= gof(z)$

$= g(y)$

$= x$ olur ve $(gof)of^{-1}og^{-1}$ fonk. birim fonksiyon old. gof un tersi

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

Öğrenciler birbirlerine ikna etmek için yaptıkları kanıtları kendi aralarında tartışmışlardır. Ö5, Ö6'nın yaptığı kanıtta kanıtın özel değerler veriyormuş gibi olduğunu bu yüzden kafasına yatmadığını ifade ederken Ö6'nın hatalı ve eksik yaptığı yerleri fark etmiştir. Ö5 kendi kanıtının doğruluğunu göstermek için soyut matematik dersinde böyle yaptıklarını bu yüzden de bu yöntemi kullandığını ifade etmiştir. Bu da Ö5'in ritüel kanıt şemasına sahip olduğunu göstermektedir. Ö6 Ö5'in kanıtını ikna edici bulurken kendi yaptığı kanıttaki hatalarını görememiştir. Ö5 ve Ö6 görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö5: Birleşme özelliğini kullandım.

Ö6: Tabi tabi bunu biliyorum evet yani hocamızdan çok net hatırlıyorum.

Ö5: Soyut matematikte hep böyle yaptığımdan benim aklıma hep bu böyle.

Ö5: Sanki böyle gösterdiğin zaman şöyle bir şey oluşuyor ben de hani x aldım hepsini yerleştirdim x'e ulaşmak için sonuca kadar çabaladım gibi hani özel değerler veriyormuşsun gibi veya işte o ana eşit dediğini söyledin o da ona eşitlediğini söyledin gibi geliyor ona doğru aynı şeye çıkıyor.

Ö6: Kendi küme tanımları var zaten soruya en baştan başlarsak A, B'nin f'in tanım görüntü kümesi olduğunu b'nin tanım c'nin de g'nin görüntü kümesi olduğunu.

Ö5: Doğru inanıyorum sadece gösterim yani böyle arada bırakıyor.

Ö6: Şunu gördün mü burada da belirttim ben terslerinden hangileri nereye gittiğini falan söyledim sadece bu kümelerden alınan elemanların bu şekilde hareketsel giderek birim elemanı bulacağını gösterdim.

Dördüncü Sınıf. Öğrenciler teoremi okuduktan sonra f ve g fonksiyonları ters ise bu fonksiyonların birebir ve örten olduğunu dolayısıyla $g\, of$ bileşke fonksiyonunun tersinin olabilmesi için öncelikle fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermeleri gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö7, $g\, of$ bileşke fonksiyonunun tersi olduğunu gösterdikten sonra tersinin $f^{-1}og^{-1}$ 'ne eşit olduğunu eşitlik kavramını kullanarak göstereceğini ifade etmiştir. Burada Ö7 daha önceden yaptığı doğruluğundan emin olduğu bir işlemi yapacağı kanıta aktarmak istemiştir. Bu yüzden Ö7'nin ritüel kanıt şemasına sahip olma eğilimi gösterdiği düşünülmüştür. Fakat daha sonra arkadaşı ile karşılıklı fikir alış verişlerinde bulunarak bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Bu kısım ile ilgili bilgiler aşağıda detaylı bir şekilde sunulmuştur. Öğrencilerin bu süreçte R_2, R_{10}, R_{33}, R_{34}, R_{37}, R_{38} ve R_{39} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö7: Ben dedim ki f ve g tersinir fonksiyonlar olduğu için ve tersi olan fonksiyonların birebir ve örten olması gerektiğini biliyorum bu bilgi benim elimde var. $g\, of$'nin tersi olduğunu söyleyebilmem için de bunun da yine birebir ve örten fonksiyon olduğunu gösterirsem tersi vardır deme hakkına sahip olurum ve sonrasında da bu verilen eşitliği karşılıklı kapsama bağıntısıyla göstermem gerekli.

Ö8 : Yani çünkü ifadenin ilk kısmında fonksiyonun her ikisinin de tersi varsa $g\,of$ fonksiyonunun da tersi olduğunu sonra da bu eşitliğin olduğunu yine iki adımda yapmamız gerekiyor öncelikle şuan ilk adımı yapacağız yani $g\,of$ fonksiyonunun tersi olduğunu göstermemiz lazım fonksiyonun tersinin olması içinde birebir ve örten olması gerekiyor birebir ve örten olduğunu gösterdiğimiz anda fonksiyonun tersi olduğunu göstermiş olacağız.

Ö7 ve Ö8, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir olduğunu, görüntüleri eşit ise tanım kümesinden aldıkları elemanların da birbirine eşit olacağını ifade ederek göstermişlerdir. Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonunun $g\,of(x_1) = g\,of(x_2)$ şeklinde birbirine eşit görüntülerini oluşturarak bileşkenin tanımından $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$ olarak ifade etmişlerdir. Kabulleri gereği g fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliğini göstermişlerdir ve f fonksiyonunun birebir olmasından yararlanarak $x_1 = x_2$ olduğunu doğru bir şekilde ifade ederek bileşke fonksiyonunun birebirliğini göstermişlerdir (Bkz. Şekil 50). Ö7, kullandığı kavramları ve yaptığı geçişleri doğru bir şekilde matematiksel dil kullanarak ifade etmiştir. Ö8, ise yaptığı açıklamaları ve kullandığı kavramları ifade ederken doğru matematiksel dil kullanmasına rağmen bunu yazıya (Bkz. Şekil 50) eksik bir şekilde aktarmıştır. Öğrencilerin bu süreçte R_2, R_{35}, R_{36} ve R_{37} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 50). Ö8, ifadelerini yazıya dökememesine rağmen yaptığı açıklamalarda, tanımlardan ve genellenebilir durumlardan yararlandığı için öğrencilerin her ikisinin de dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları söylenebilir. Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö7: Bileşkeden bahsedebiliyorsak tanım… $f: A \to B$, $g: B \to C$ tanımlarsam $g\,of: A \to C$ o zaman A'dan alacağız.

Ö7: $x_1, x_2 \in A$ olsun $g\,of(x_1) = g\,of(x_2)$ olsun bu durumda $g\,(f(x_1)) = g\,(f(x_2))$'dir.

Ö8: Evet.

Ö7: Ve g birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$'dir.

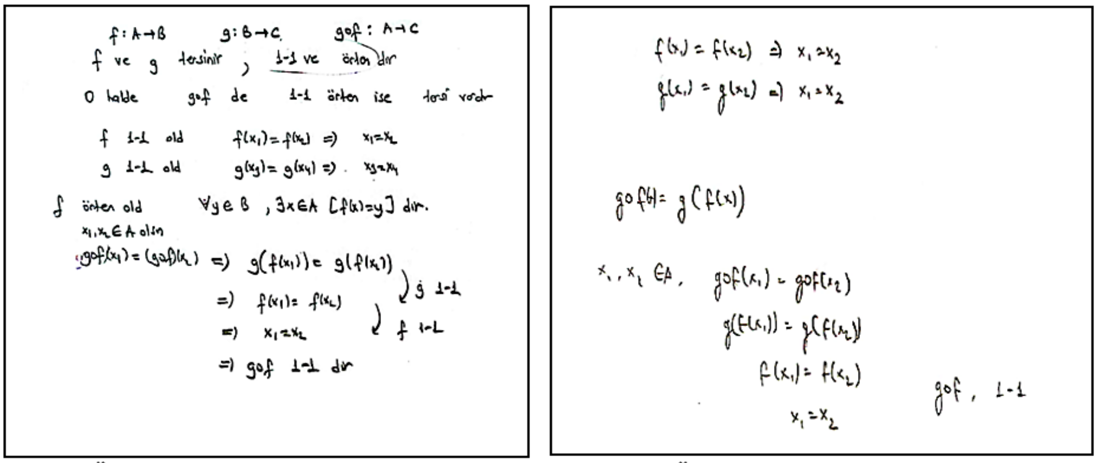
Ö8: $f(x_1) = f(x_2)$ sonra da f birebir olduğundan $x_1 = x_2$ 'dir.

Ö7: Evet .

Ö8: Dolayısıyla $g\ of$ birebirdir.

Şekil 50

Ö7 ve Ö8'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



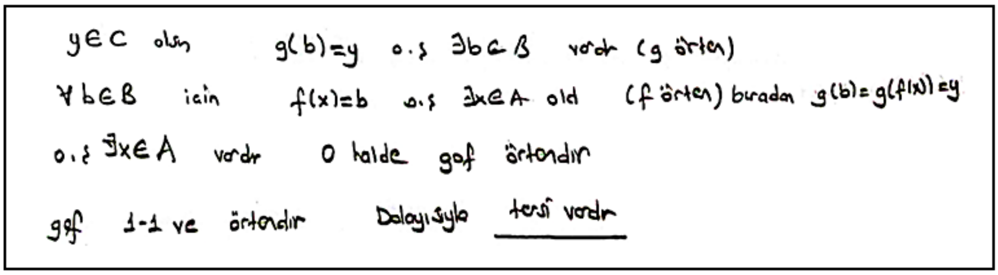
a) Ö7 'nin cevabı   b) Ö8'in cevabı

Ö7, kanıtına $g\ of$ bileşke fonksiyonunun örten bir fonksiyon olduğunu göstermek için bileşke fonksiyonunun değer kümesinden aldıkları her elemanın tanım kümesinde en az bir tane değeri olacağını ifade etmişlerdir. Ve $g\ of$ bileşke fonksiyonu için $g\ of\ (x_1) = g\left(f(x_1)\right) = c$ ifadesini yazarak g fonksiyonunun örtenliğinden en az bir $f(x_1) \in B$ olacağını ve f fonksiyonunun örtenliğinden de en az bir tane $x_1 \in A$ olacağını söyleyerek bileşke fonksiyonunun örtenliğini doğru bir şekilde göstermiştir (Bkz. Şekil 51). Ö7 kullandığı kavramlar ve yaptığı işlemlerde doğru ve anlamlı bir matematiksel dil kullanmıştır. Ö7'nin bu süreçte R_{35}, R_{38}, R_{39} ve R_{40} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 51). Ö7'nin görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö7: Şimdi f fonksiyonu örtense eğer f fonksiyonu ben $A \to B$ tanımlarsam B'den aldığım her y eleman için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir x elemanının A'da olması gerekir bu zaten genel tanım şimdi buradan yola çıkarak $g\,of: A \to C$ tanıladığım için C'den bir y elemanı seçtim ve dedim ki g fonksiyonu üzerinden g örten olduğu için $g(b) = y$ olacak şekilde en az bir $b \in B$ vardır. Bu g'nin örtenliğinden gelen bir durum zaten $b \in B$ olduğu için ve f örten olduğu için her $b \in B$ için $f(x) = b$ olacak şekilde $x \in A$ vardır bu da f'in örtenliğinden gelen bir durum bu durumda $g\left(f(x)\right)$ yani $g\,of\,(x) = \mathrm{y}$ olacak şekilde $x \in A$'nın olduğunu görmüş olduk. O halde bileşke fonksiyonu da örtendir dedim. Buradan da birebir ve örten olduğu için de tersi vardır dedim.

Şekil 51

Ö7'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları


$y \in C$ olsun $g(b)=y$ o.ş $\exists b \in B$ vardır (g örten)
$\forall b \in B$ için $f(x)=b$ o.ş $\exists x \in A$ old (f örten) buradan $g(b)=g(f(x))=y$
o.ş $\exists x \in A$ vardır O halde gof örtendir
gof 1-1 ve örtendir Dolayısıyla tersi vardır

Ö8, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten bir fonksiyon olduğunu görüntü kümesinin değer kümesine eşit olması bilgisini kullanarak göstermiştir. Ö8 'in örtenliği doğru bir şekilde anlamlandırdığı görülmesine rağmen bunu kanıta aktarırken matematiksel dil kullanımında eksikleri olduğu tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 52). Ö8'in bu süreçte R_{62}: Bir fonksiyon örten ise görüntü kümesi değer kümesine eşittir, R_{63}: f: $A \to B$ bir fonksiyon örten ise $f(A) = B$ dir, R_{64}: g: $B \to C$ bir fonksiyon örten ise $g(B) = C$ dir ve R_{65}: f: $A \to B$, $y = f(x)$ ve g: $B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\,of: A \to C$ bir fonksiyon örten ise $g\,of(A) = C$ dir, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 52). Ö7 ve Ö8 kullandığı operatörlerde genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak tanımlardan, teoremlerden ve önceden kabul edilmiş diğer doğrulardan veya prensiplerden yararlandıkları görülmüştür. Ö7 ve Ö8'in bu süreçte dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Ö8'in görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

> Ö8: Görüntü kümesinin değer kümesine eşit olması demek yani değer kümesiyle görüntü kümesinin eşit olması demek yani bu şart sağlanıyorsa örtendir derim sağlanmıyorsa örten değildir.
>
> Ö8: Şu şekilde f' in ve g'nin örten olduğunu biliyorum f örten ise $f(A) = B$'ye eşittir. g örtense $g(B) = C$'ye eşittir. şimdi $g\, of(A) = C$ eşitliğini kontrol edeceğim yine aynı şekilde birebirlikte yaptığımız gibi $g\, of(A) = C$'ye eşit $g\,(f(A)) = C$'yi göstermeye çalışacağım g içerisinde $f(A)$'yı $f(A)$'nın neye eşit olduğunu biliyorum B'ye $f(A)$ yerine B yazıyorum $g(B)$, $g(B)$'nin de neye eşit olduğunu biliyorum C'ye dolayısıyla direkt olarak $C = C$ çıkmış oluyor.

Şekil 52

Ö8'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları

$g \circ f : A \to C$

$g \circ f(A) = C$

$g(f(A)) = C$

$g(B) = C$

$C = C$

$f(A) = B$

$g(B) = C$

Öğrencilerin her ikisi de bir fonksiyon tersiyle bileşkeye girdiğinde birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak eğer $g\, of$ bileşke fonksiyonun tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise bu iki fonksiyonun bileşkesinin yine birim fonksiyonunu vereceğini ifade etmişlerdir. Ve $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan $g\, of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesini almaları gerektiğini açıklayarak kanıtlarına devam etmişlerdir (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54). Öğrenciler ilk etapta birim fonksiyonların hangi kümeye ait olduğunu yanlış belirlemişlerdir. Öğrencilerin bu süreçte R_{42}, R_{43} ve R_{47} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54). Öğrencilerin görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö8: Şöyle yapamaz mıyız aslında şimdi biliyoruz ki bir fonksiyon tersiyle bileşkesi birim fonksiyonu verecek bütün fonksiyonların tersiyle bileşkesi birim fonksiyonu verir. Dolayısıyla ben buradaki fonksiyonu yani $g\ of$ fonksiyonunun tersi olduğunu iddia ettiğimiz $f^{-1}\ o\ g^{-1}$ ile bileşkeye sokarsam birimi vermesi gerekiyor birimi veriyor mu? Diye kontrol ederim birimi veriyorsa evet tersi budur birimi vermiyorsa hayır tersi bu değildir .

Ö7: Yani doğru bu ikisinin bileşkesini aldığında tabi çift taraflı olarak $g\ of$ ile $f^{-1}\ o\ g^{-1}$ bileşkesini aldığımda birim elde ediyorsam ve benzer şekilde $f^{-1}\ o\ g^{-1}$ ile $g\ of$'un bileşkesini alırsam ve çift taraflı olarak da birim fonksiyonu elde ediyorsam bu benim için birbirinin tersi olduğunu gerektirir zaten fonksiyonun tersi tanımı da bu öğrendiğimiz kadarıyla o yüzden bu eşitliği göstermemiz yeterli olur.

Ö8: Yani seçmiş olduğum bir küme yani $g\ of\ A \rightarrow C$ bu da dolayısıyla $A \rightarrow A$ olan birim fonksiyon olmuş olacak.

Ö7: I_A diyeceğiz yani.

Ö8: Evet.

A: O zaman onu da belirtelim her şeyi detaylı söylemem lazım.

Ö8: Şimdi bizim işlemimiz neydi $g\ of$ o($f^{-1}\ o\ g^{-1}$) dimi.

Ö7: Evet burada fof^{-1}'den I_A elde ettik zaten.

Ö8 işlemlerine devam ederken fof^{-1} bileşke fonksiyonundan elde ettiği birim fonksiyonu ile g^{-1} fonksiyonunu yer değiştirdiğini bunu da bileşke fonksiyonunun yer değişme özelliğinden olduğunu $R^{-}{}_{66}$: Bileşke fonksiyonunun yer değiştirme özelliği vardır, hatalı operatörünü kullanarak belirtmiştir. Ö7 buradaki hatayı fark etmeden yer değişme özelliğini kullanmanın gereksiz olacağını R_{35} ve R_{42} operatörlerini kullanarak belirtmiştir. Öğrencilerin her ikisi de bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını yaptıkları işlemlerde birim fonksiyon ile fonksiyonun tersini yer değiştirdiklerinde kanıtın doğruluğunun değişmeyeceğini birim fonksiyon özelliğinden kaynaklandığını görememişlerdir. Öğrencilerin görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö8: Yani bu işlemi yaptığımız zaman neydi bileşkenin birleşme özelliği vardı aradaki parantezleri kaldırdık sonra bileşkenin yer değiştirme özelliği vardı f ve f^{-1}'ni birim olarak I_A olarak yazdık.

Ö7: Burada değişme özelliğini kullanıp $go\ g^{-1}oI_A$ diyebilirim ve g ve g^{-1} bileşkesi de yine birim olacak birimlerin bileşkesi yine birim olacak dolayısıyla birim fonksiyonu elde etmiş olduk ya da hiç değişmeye de gerek yok aslında birim ile g^{-1} bileşkesi g^{-1} de diyebiliriz.

Ö7: Yani $I_Ao\ g^{-1}\ g^{-1}$ dedim çünkü birim fonksiyonla herhangi bir fonksiyonun bileşkesi o fonksiyonu verecektir yine yani g^{-1} olacak ve sonuçta $go\ g^{-1}$kalmış olacak $go\ g^{-1}$ de I_B dir yani birim fonksiyondur.

Ö8: Bileşkenin özelliklerini kullandık. Öncelikle bileşkenin birleşme özelliğini kullandık aradaki parantezleri kaldırdık sonrada bileşkenin yer değiştirme özelliğini kullandık hatta ilkinde kullanmadık bile diğerinde kullandık zaten $fo\ f^{-1}$ burada yan yana duruyor bunlar I_A olmuş oluyor sonra g^{-1} ile I_A'yı yer değiştirdik yer değiştirme özelliğinden.

Ö7: Aslında yer değiştirmeye gerek bile yok çünkü birim fonksiyon ile herhangi bir fonksiyonun bileşkesi de yine o fonksiyonu verecek.

Öğrenciler kanıtlarına hatalarını fark ederek, $g\ of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini aldıklarında C kümesine ait birim fonksiyonunu elde edeceklerini söyleyerek kanıtlarına başlamışlardır. Ö7 ve Ö8 yaptıkları tüm işlemleri, , nasıl yaptıklarını açıklayarak ve doğru matematiksel dil kullanarak ifade etmişlerdir. Öğrenciler $(g\ of)\ o(f^{-1}og^{-1})$ bileşke işleminde bileşkenin birleşme özelliğini kullanarak parantez kaydırmışlardır $g\ o(f\ of^{-1})og^{-1}$ işlemini oluşturmuşlardır ve bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $f\ of^{-1}$ bileşkesinin B kümesine ait birim fonksiyon olacağını ifade etmişlerdir. Daha sonrasında $goI_Bog^{-1} = goI_B(g^{-1})$ elde ettikleri bu işlemde birim fonksiyonun tanımını kullanarak kendisine verilen değeri yine kendisine döndüren bir fonksiyon olmasından dolayı gog^{-1} bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ve oluşan gog^{-1} bileşke fonksiyonunu yine bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak C kümesine ait birim fonksiyon olacağını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54).

Öğrenciler yaptıkları işlem adımlarını ve kullandıkları kavramların anlamlarını doğru bir şekilde ifade etmelerine rağmen matematiksel dil ve sembol kullanımında eksiklikler yapmışlardır. Öğrencilerin her ikisinin de aynı operatörleri kullandığı tespit edilmiştir. Bunlar R_{46}, R_{47}, R_{48} ve R_{49} operatörleri olarak belirlenmiştir(Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54). Öğrenciler yaptıkları açıklamalarda ve matematiksel sembol kullanımlarında eksikleri olmasına rağmen kullandıkları ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumlar, tanımlar ve teoremler arasında geçişlerde bulunarak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladıkları görülmüştür. Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamaları bunları doğrular niteliktedir;

Ö8: $(gof)o(f^{-1}\,o\,g^{-1})$ yaptığımız da $gof\;\; A \to C$ gidiyor $f^{-1}\,o\,g^{-1}$'de $C \to A$'ya gidiyor dolayısıyla ben bu işlemi $A \to A$'ya gider I_A olmasını beklerim.

Ö8: Aaa pardon bu C'nin birimi ya A'nın değil.

Ö7: $f^{-1}\,o\,g^{-1}$, $C \to A$'ya gidiyor, $g\;of\!: A \to C$'ye gidiyor ve dolayısıyla $(gof)o(f^{-1}\,o\,g^{-1})$ dersem $C \to A$'ya $A \to C$'ye gideceği için $C \to C$'ye I_C olması gerekir.

A: $go\;g^{-1}$ ne olacak dolayısıyla.

Ö8: I_C olacak.

A: O zaman $f o\, f^{-1}$ neye eşittir.

Ö8: Bu da $B \to B$'ye gider.

Ö7: g bileşke aldım oradaki birleşme özelliğinden dolayı $fo\,f^{-1}$'i parantez içinde düşünüp g^{-1} dışarı attım ve $fo\,f^{-1}$'den dolayı $B \rightarrow A$'ya $A \rightarrow B$'ye yani I_B olması gerekiyor bunun hmmm I_B sonrasında $go\,g^{-1}$'i düşündüm birim fonksiyon bunların bileşkesi $go\,g^{-1}$ verir bu da I_C dir dedim.

Öğrenciler kanıtlarına $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonu ile gof bileşke fonksiyonun bileşkesini alarak A kümesine ait birim fonksiyonu elde edeceklerini söyleyerek kanıta devam etmişlerdir. Öğrenciler $(f^{-1}og^{-1})\,o(g\,of)$ bileşke işleminde bileşkenin birleşme özelliğini kullanarak parantez kaydırmışlardır $f^{-1}o(g^{-1}\,og)\,of$ işlemini oluşturmuşlardır ve bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $(g^{-1}\,og)$ işleminin B kümesine ait birim fonksiyon olacağını ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54). Daha sonrasında $f^{-1}oI_Bof\ = f^{-1}oI_B(f)$ elde ettikleri bu işlemde birim fonksiyonun tanımından kendisine verilen değeri yine kendisine döndüren bir fonksiyon olmasından dolayı $f^{-1}of$ bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ve oluşan $f^{-1}of$ bileşke fonksiyonunu yine bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak A kümesine ait birim fonksiyon olacağını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Öğrenciler yaptıkları işlemlerde fonksiyonların tanım ve değer kümelerini doğru bir şekilde göstererek kanıt sürecini tamamlamışlardır (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54).

Öğrenciler kanıt sürecinin genelinde kullandıkları kavramların anlamlarını, yaptıkları işlem geçişlerini doğru bir şekilde ifade etmiş ve içsel olarak anlamlandırmışlardır. Ö7, kanıt sürecinde matematiksel dil ve sembollerin doğru bir şekilde kullanmasına özen gösterdiği ve bunu kâğıdına aktarma konusunda dikkatli davrandığı görülmüştür. Ö8 ise kanıt sürecinde aktif rol oynamasına, matematiksel kavramları doğru bir şekilde ifade etmesine ve anlamlandırmasına rağmen bu ifadeleri matematiksel dil ve sembol kullanımına aktarmada eksiklikler yapmıştır. Öğrencilerin her ikisinin de aynı operatörleri kullandığı tespit edilmiştir. Bunlar R_{47}, R_{50}, R_{51} ve R_{52} operatörleri olarak belirlenmiştir (Bkz. Şekil 53 ve Şekil 54). Öğrencilerin kullandıkları ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak, tanımlar ve teoremler arasında geçişler yaparak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladıkları görülmüştür. Öğrencilerin görüşmelerde yaptığı açıklamalar aşağıda verilmiştir;

Ö7: Evet yine I_C kalmış oldu yani bu aslında I_B ve g^{-1} bileşkesinden g^{-1} kalmasından kaynaklandı sonuç olarak da I_C elde etmiş oldum. İkinci tarafta da $(f^{-1}\, o\, g^{-1})o(gof)$ yine g^{-1} ve g'yi parantez içerisinde düşündüm $g^{-1}og$ den $B \rightarrow C$'ye $C \rightarrow B$'ye I_B .

Ö8: I_B geliyor.

Ö7: $f^{-1}oI_Bof$ I_B ve f bileşkesinden f olacak dedim $A \rightarrow B$'ye $B \rightarrow A$'ya yine f fonksiyonunu elde etmiş oluyorum ve $f^{-1}of$ diye düşünürsem bu da I_A olmuş oluyor.

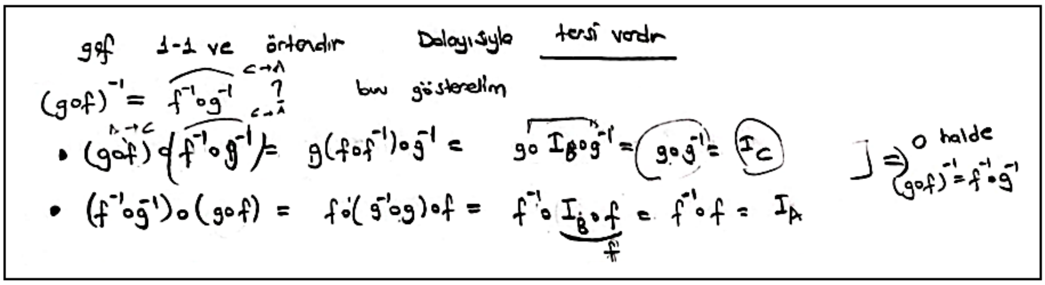
Ö7: gof'in tersi $f^{-1}\, o\, g^{-1}$ ise bunlar sağ ve soldan bileşkelerinin birim fonksiyon olması gerekiyor dedik. Bu yüzden de sağ ve soldan bileşkelerini aldık. Birincide $(gof)o(f^{-1}\, o\, g^{-1})$'den I_C birim fonksiyonunu elde etmiş olduk ikinci yaptığımızda $(f^{-1}\, o\, g^{-1})o(gof)$'dan da I_A birim fonksiyonu elde etmiş olduk. Bileşke fonksiyonları birim oldu ancak tanım kümeleri farklı oldu.

Ö7: Her ikisinde de birim fonksiyonu elde ettiğimiz için evet tersi vardır ve tersi $f^{-1}\, o\, g^{-1}$ dir.

Ö8: Evet bunu ifade eder.

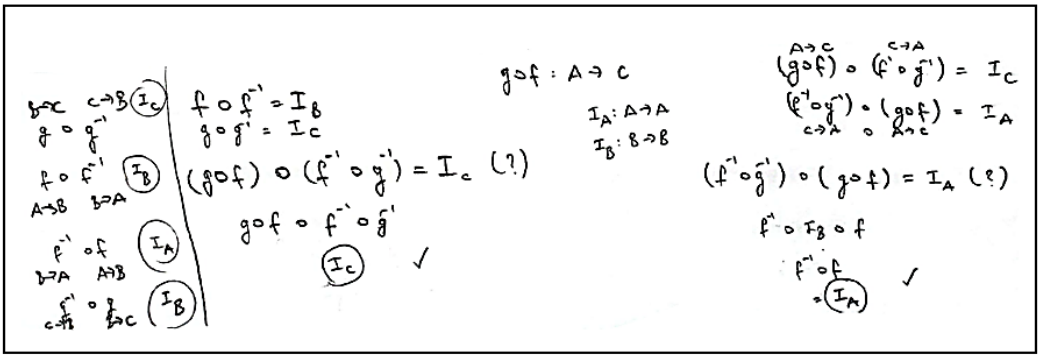
Şekil 53

Ö7'nin ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Şekil 54

Ö8'in ikinci teoremin kanıtına yönelik yazdıkları



Fonksiyonlar Konusunda Belirlenen Temsiller (Gösterimler)

Öğrencilerin görüşmelerde yaptıkları açıklamalara ve kâğıtlara yazdıklarına bakılarak elde edilen operatörlerde yer alan cebirsel dil, matematik yazılımlar, sembol ve simge gibi 104 tane gösterim belirlenmiştir. Öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kullandıkları gösterimler incelendiğinde daha çok matematiksel dil ve sembol kullanımını tercih ettikleri söylenebilir. Bu gösterimler aşağıda yer almaktadır;

L: Ancak ve ancak önermesini ⇔ sembolü ile gösterme.

L: Her kelimesini ∀ sembolü ile gösterme.

L: İse sözcüğünü ⇒ sembolü ile gösterme

L: Aldıkları elemanların kümeye ait olma durumlarını ∈ sembolü ile gösterme.

L: Kümeden aldıkları elemanları x_1, x_2 şeklinde belirleme.

L: Bir fonksiyonun birebir olma koşulunu $f\ (x_1)= f\ (x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$ ifadesi ile gösterme

L: "$\forall x_1, x_2\ \in A$" ifadesini yazma.

L: Bir bağıntının fonksiyon olma koşulunu $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ifadesi ile gösterme.

L: Alt kümelerin sahip olduğu özelliği sözel olarak belirtme.

L: $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliğini $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ ve $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ ifadesi ile gösterme.

L: "$y \in f(C \cap D) \Rightarrow y \in f(C) \cap f(D)$ " ifadesini yazma.

L: "$y \in f(C) \cap f(D) \Rightarrow y \in f(C \cap D)$ " ifadesini yazma.

L: Alt küme ifadesini belirtirken ⊂ sembolü ile gösterme.

L: Küme işlemlerinden kesişim kümesini ∩ sembolü ile gösterme.

L: "$C \cap D \in A$" ifadesini yazma.

L: "$f(C \cap D) \in B$" ifadesini yazma.

L: "$\forall\ C, D \subset A$" ifadesini yazma.

L: f fonksiyonunun görüntüsünü $f(x) = y$ ifadesi ile gösterme.

L: "en az" kelimesini ∃ sembolü ile gösterme.

L: $C \cap D$'den aldıkları elemanların görüntüsünü $f(C \cap D)$ ifadesi ile gösterme.

L: " $y \in f(C \cap D) \Rightarrow \exists\ x \in C \cap D$" ifadesini yazma.

L: Bir bağıntının fonksiyon olma gerekliliğini sözel olarak belirtme.

L: Fonksiyonun tersi olma koşulunu birebir ve örten olması özelliği ile belirtme.

L: Ve sözcüğünü ∧ sembolü ile gösterme.

L: "$x \in C \cap D \Leftrightarrow x \in C \wedge x \in D$" ifadesini yazma.

L: "$x \in C \wedge x \in D \Leftrightarrow [f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)]$" ifadesini yazma.

L: "$[f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)] \Leftrightarrow f(x) \in [f(C) \cap f(D)]$" ifadesini yazma.

L: Birebir fonksiyonunun olma koşulunu sembollerle gösterme.

L: " $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ "ifadesini yazma.

L: Boş kümenin özelliğini sözel olarak belirtme.

L: Boş kümeyi $\emptyset$ sembolü ile gösterme.

L: Boş kümenin görüntüsünü $f(\emptyset) = \emptyset$ ifadesi ile gösterme.

L: Eşitlik ifadesini $\Leftrightarrow$ sembolü ile gösterme. (eşitlik ifadesi (=)yerine ancak ve ancak ifadesini kullanma).

L: Tek nokta kümelerinin elemanlarını $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ şeklinde gösterme.

L: Keşişim kümesinin özelliğini sözel olarak belirtme.

L: "$C \cap D = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$" ifadesini yazma.

L: Bir birinden farklı olan $\mathrm{x}_1 ve\ \mathrm{x}_2$ elemanlarını $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ ifadesi ile gösterme.

L: C keşişim D'nin tek nokta kümesi olmasını $C \cap D = \{\mathrm{x}_1\}$ ifadesi ile gösterme.

L: C kesişim D kümesinden aldığı elemanın x_1 den farklı olduğunu $C \cap D \backslash \{x_1\} = \{x_2\}$ şeklinde gösterme.

L: Bir fonksiyonun birebir olma koşulunu $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)\ \Rightarrow x_1 \neq x_2$ ifadesi ile gösterme.

L: " $x_1, x_2 \in C \cap D$ ise $f(x_1) = f(x_2) = f(C \cap D)$" ifadesini yazma.

L: " $x_1, x_2 \in C$ ise $f(x_1) = f(x_2) = f(C)$" ifadesini yazma.

L: "$x_1, x_2 \in D$ ise $f(x_1) = f(x_2) = f(D)$" ifadesini yazma.

L: Kümeden aldıkları $x_1, ve\ x_2$ elemanlarını sıralı ikili şeklinde belirtme.

L: $C \cap D$'den aldıkları elemanı " $x_1, x_2 \in C \cap D$" şeklinde gösterme.

L: Aldıkları elemanların kümeye ait olmama durumlarını $\notin$ sembolü ile gösterme.

L: C ve D kümesinde ortak elemanının olmamasını $C \cap D = \emptyset$ şeklinde gösterme.

L: "$\mathrm{x}_1 \in C\ \wedge \mathrm{x}_1 \notin D$" ifadesini yazma.

L: "$\mathrm{x}_1 \in D\ \wedge \mathrm{x}_1 \notin C$" ifadesini yazma.

L: C keşişim D'nin tümleyenini $[\forall\, x_2 \in C\ ve\ \forall\, x_2 \notin D]\ ve\ [\forall\, x_3 \in D\ ve\ \forall\, x_3 \notin C]$ ifadesi ile gösterme.

L:" $C \cap D \subset A$" ifadesini yazma.

L:" $f(C \cap D) \subset B$" ifadesini yazma.

L: Fonksiyonun birebir olmama durumunu "$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1)= f\ (x_2)$" şeklinde gösterme.

L: 1 ise 0 önermesinin doğruluk değerini sözel olarak belirtme.

L: Ayrık kümelerin özelliğini sözel olarak belirtme.

L: Fonksiyonun tersinin var olma özelliğini sözel olarak belirtme.

L:f: $A \rightarrow B$ fonksiyonunun tersini f^{-1}: $B \rightarrow A$ şeklinde gösterme.

L: g: $B \rightarrow$ C fonksiyonunun tersini g^{-1}: $C \rightarrow B$ ifadesi ile gösterme.

L:f: $A \rightarrow B$ ve g: $B \rightarrow C$ fonksiyonların bileşkesini $g\ of$: $A \rightarrow C$ ifadesi ile gösterme.

L: Bileşke fonksiyonunu $(gof)(x) = g(f(x))$ ifadesi ile gösterme.

L: Bileşke fonksiyonunun birebir olma koşulunu $(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonunun birebir olma koşulunu $g\ (x_1)= g\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ifadesi ile gösterme.

L: "$\forall x_1, x_2 \in B$ " ifadesini yazma.

L: f örten fonksiyonunu matematiksel sembol ve ifadelerle belirtme.

L: " $\forall\ b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde $\exists\ a \in A$" ifadesini yazma.

L: g örten fonksiyonunu matematiksel sembol ve ifadelerle belirtme

L: "$\forall\ c\ \in C$ için $c = g$ (b) olacak şekilde $\exists\ b\ \in B$" ifadesini yazma.

L: gof örten fonksiyonunu matematiksel sembol ve ifadelerle belirtme.

L: “$\forall\ c\ \in C$ için $c = (gof)(a)$ olacak şekilde $\exists\ a \in A$” ifadesini yazma.

L: Bileşke fonksiyonunun özelliğini sözel olarak belirtme.

L: Birim fonksiyonunun özelliğini sözel olarak belirtme.

L: Birim fonksiyonunu I harfi ile gösterme.

L: Eşitlik belitlerini sözel olarak belirtme.

L: $g\ of: A \rightarrow C$ fonksiyonunu tersini $(gof)^{-1}: C \rightarrow A$ şeklinde gösterme.

L: gof fonksiyonu ile gof fonksiyonunun tersinin bileşkesinin eşitliğini $(gof)o(f^{-1}og^{-1})$= I_C seklinde gösterme.

L: Bileşke fonksiyonunun özelliğini sözel olarak belirtme.

L: f fonksiyonu ile f fonksiyonunun tersi ile bileşkesinin eşitliğini $fof^{-1} = I_B$ ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonu ile g fonksiyonunun tersinin bileşkesinin eşitliğini $gog^{-1} = I_C$ ifadesi ile gösterme.

L: gof fonksiyonunun tersi ile gof fonksiyonunun bileşkesinin eşitliğini $(\ f^{-1}\ \mathrm{o}\ g^{-1})$ $o(gof) = I_A$ seklinde gösterme.

L: g fonksiyonunun tersi ile g fonksiyonunun bileşkesinin eşitliğini $(g^{-1}\ o\ g) = I_B$ şeklinde gösterme.

L: f fonksiyonunun tersi ile f fonksiyonunu bileşkesinin eşitliğini $f^{-1}of = I_A$ ifadesi ile gösterme.

L: Örten fonksiyon olma koşulunu sözel olarak belirtme.

L: Eşitliğin bozulmama gerekliliğini sözel olarak belirtme.

L: “$(gof)^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y)\ og^{-1}(y) = x$” ifadesini yazma.

L: $g\ of$ bileşke fonksiyonunun görüntüsünü $(g\ of)(x) = y$ ifadesi ile gösterme.

L: $g\ of$ bileşke fonksiyonunun ters görüntüsünü $(gof)^{-1}(y) = x$ ifadesi ile gösterme.

L: " $x \in C$, $y \in A$" ifadesini yazma.

L: gof bileşke fonksiyonunun birebir olma koşulunu sembollerle gösterme.

L: "$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (gof)(x_1) \neq (gof)(x_2)$" ifadesini yazma.

L: Bir fonksiyonun birebir olma koşulunu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow\ g(x_1) \neq g\ (x_2)$ ifadesi ile gösterme.

L: f fonksiyonunun ters görüntüsünü $f^{-1}(y) = x$ ifadesi ile gösterme.

L: f fonksiyonunun tersi ile f fonksiyonun bileşkesinin eşitliğini $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x))$= $f^{-1}(y) = x$ ifadesi ile gösterme.

L: f fonksiyonu ile f fonksiyonunun tersinin bileşkesinin eşitliğini $fof^{-1}(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$ ifadesi ile gösterme.

L: "$x \in A$, $y \in B$" ifadesini yazma.

L: g fonksiyonunun görüntüsünü $g(x) = y$ ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonunun ters görüntüsünü $g^{-1}(y) = x$ ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonunun tersi ile g fonksiyonunun bileşkesinin eşitliğini $g^{-1}og(x) = g^{-1}(f(x))$= $g^{-1}(y) = x$ ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonu ile g fonksiyonunun tersinin bileşkesinin eşitliğini $gog^{-1}(y) = g\left(g^{-1}(y)\right) = g(x) = y$ ifadesi ile gösterme.

L: "$x \in B$, $y \in C$" ifadesini yazma.

L: Fonksiyonun tersinin var olma özelliğini sözel olarak belirtme.

L: Örten fonksiyon olma koşulunu sözel olarak belirtme.

L: f fonksiyonunun örten olma koşulunu "$f(A) = B$" ifadesi ile gösterme.

L: g fonksiyonunun örten olma koşulunu "$g(B) = C$" ifadesi ile gösterme.

L: $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten olma koşulunu "$g\,of(A) = C$" ifadesi ile gösterme.

Fonksiyonlar Konusunda Belirlenen Kontrol Yapıları

Balacheff (2013) tarafından belirtildiği üzere, kontrol yapısını matematiksel terimlerden oluşan operatörlerden ayırmak zor ve genellikle belirsizdir. Bundan doyalı öğrencilerin kullandıkları operatörlere ait tüm kontrol yapıları belirlenememiştir. Öğrencilerin kavramsal anlayışlarını sorgulamak ve doğruluğunu kanıtlamak için kontrol yapısının güvenilir ve geçerli olması gereklidir. Bu nedenle, problemin çözüm sürecinde öğrencinin adımlarını denetleyen kontrol yapısı, aksiyomlar, varsayımlar, tanımlar ve teoremlerle uyumlu olmalıdır. Bu uyum, öğrencinin çözüm adımlarının mantıklı bir şekilde ele alındığını ve doğru sonuçlara ulaşıldığını gösterir.

Pedemonte (2005) çalışmasında, öğrenciler doğru operatörleri kullandıklarında, bunun genellikle bir matematiksel kuralın veya teoremin doğru bir şekilde uygulandığı anlamına geldiğinden ve bu durumun kanıtta bir teorem ile desteklenebilir olduğundan bahsetmiştir. Ancak, eğer öğrenciler matematiksel olarak geçerli olmayan operatörleri kullanıyorlarsa, bu durumun doğru bir şekilde kanıta dayandırılmasının mümkün olamayacağını ifade etmiştir. Bu nedenle, öğrencilerin düşünme tarzını ve mantıksal adımlarını anlamak için daha çok kullandıkları hatalı operatörler dikkate alınarak öğrencilerin düşünme tarzlarından ve yaptıkları açıklamalardan kontrol yapıları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu sayede, öğrencilerin gerçek anlama düzeyi ve potansiyel yanlış anlamaları daha iyi anlaşılabilir ve öğrenme süreçleri daha etkili bir şekilde desteklenebilir olduğu düşünülmüştür.

Çalışmada, öğrenciler fonksiyonlara ait tanım kümesi, görüntü kümesi, değer kümesi, birebir ve örten fonksiyon tanımları gibi kavramları bildikleri halde matematiksel dil kullanımında zorlandıkları görülmüştür. Ve $R^{-}{}_{8}$: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon örten ise her $y \in f(C \cap D)$ ise $\exists\ x$ vardır ki $x \in C \cap D$ ve $f(x) = y$'dir ve $R^{-}{}_{54}$: Bir fonksiyon örten ise görüntü kümesinde açıkta eleman olamaz, hatalı operatörlerini kullanan öğrencilerin " A, B iki küme ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman f'ye bir örten fonksiyon denir" bilgisinden hareketle böyle bir yaklaşım sergiledikleri kabul edilebilir. Ö1 ve Ö2 öğrencilerin aralarındaki görüşme aşağıdadır;

Ö2: Her $y \in f(C \cap D)$ ise öyle bir x vardır ki $x \in C \cap D$ de ve $f(x) = y$.

Ö1: Hı hı en az bir x eleman vardır ki $x \in C \cap D$, $f(x) = y$.

Ö2: Di mi bu örtenlik oldu.

Ö1: Çünkü bir saniye bu örtenlik oldu biraz.

Ö2: Doğru her y için doğru doğru örtenlik oldu.

Ö1: Bunu söyleyebilmek için f' in örten olması gerekiyor.

Ö1: f birebir ama mesela f örten olmak zorunda değil mesela f'nin tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak fonksiyon olduğu için ama f'nin değer kümesinde boşta eleman kalabilir.

Öğrencilerin sık kullandığı $R^{-}{}_{16}$: Eşitlik gösterilirken gerek ve yeter koşulun (ancak ve ancak) sağlanması gerekir, hatalı operatörü ile karşılaştığımız bu durum için belirlenen kontrol önermesi "P ile Q birer önerme ise $P \Leftrightarrow Q$ bileşik önermesi, $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$" olarak kabul edilebilir. Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6 ve Ö7 eşitlik kavramının gereklilikleri ile çift koşullu mantık bağlacı olan ancak ve ancağın gerekliliklerini birbirine karıştırmışlardır. Ö6 ile yapılan görüşme aşağıdadır;

Ö6: …tamam eşitliği göstermiş oluyoruz her iki yönde de göstereceğiz.

A: Her iki yönde göstereceğiz derken ne mesela her iki yönden kastın?

Ö6: Hocam belki cebirden dolayı böyle bir şey olmaya başladı hem soldan hem sağdan muhabbeti ancak ve ancak gibi muhabbeti yani.

Ö3 ve Ö4 öğrencilerinin ifade ettikleri $R^{-}{}_{21}$: $f: A \rightarrow B$'ye tanımlı bir fonksiyon için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ise f birebir fonksiyondur, hatalı operatörünü fonksiyonun tanımı olan "$f: A \rightarrow B$'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek ve şart; $a \in A$ için

$f(a) = b_1$ ve $f(a) = b_2$ iken $b_1 = b_2 \in$ B olmasıdır", bilgisinden hareketle kullandıkları kabul edilebilir. Diğer bir kullandıkları $R^{-}{}_{22}$: $f: A \rightarrow B$, y= $f(x)$ bir fonksiyon için $f\ (x_1) \neq f\ (x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ oluyor ise f birebir fonksiyondur, hatalı operatörü ile karşılaştığımız bu durum için birebir fonksiyonun diğer tanımı olan " $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in A$ için $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ oluyor ise f birebir fonksiyondur" kontrol önermesi kabul edilebilir. Ö3 ve Ö4 ile yapılan görüşme aşağıdadır;

Ö3: Hayır, hayır, hayır... $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$...Biz onu sürekli olduğunu karıştırıyorduk ya zaten $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$.

Ö4: Bence $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ birebir olduğunu böyle göstermiş oluruz diyoruz. Tekrar bak bence. Ne düşünüyorsun?

Ö3: Evet evet, onu yanlış yazmışım.

Ö4: $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ birebirlik demekti değil mi?

Ö3: Evet.

Ö4: Tamam. Ya da tam tersi $x_1 \neq x_2$ise...Aynen $f\ (x_1)\neq f\ (x_2)$ demeliyiz.

Ö3 ve Ö4 ifade ettikleri $R^{-}{}_{23}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ise $f(x_1), f(x_2)$ eşittir $f(C \cap D)$ dir. Ve $x_1, x_2 \in C$ ve $x_1, x_2 \in D$ o zaman $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(C)$, $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(D)$'dir, hatalı operatörü "A, $B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere eğer $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ise o zaman A'ya, B'nin bir altkümesi denir. Ve $A \subseteq B$ ya da $B \supseteq A$ şeklinde gösterilir" ve "A kümesi B kümesinin alt kümesi ve B kümesi de A kümesinin alt kümesi ise, A ile B kümeleri birbirine eşittir, denilir ve bu durum, $A = B$ simgesiyle gösterilir. A, $B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$" bilgilerinden hareket ile kullandıkları kabul edilebilir.

Ö3'ün ifade ettiği diğer bir $R^-{}_{24}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ve bu elemanlar sıralı ikilidir, hatalı operatörü ile karşılaştığımız bu durum için sıralı ikili tanımı olan " n >1 için A_1, A_2,…, A_n kümeler olsun. $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in A$ olmak üzere (a_1, a_2,…, a_n) öğesine sıralı n –li denir.

$(a_1, a_2,\ldots, a_n) = (b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2,\ldots, a_n = b_n$

a_i öğesine (a_1, a_2,…, a_n) sıralı n –lisinin i. bileşeni denir.

$n = 2$ için sıralı ikili tanımı $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c, b = d$ ile verilir "

kontrol önermesini kullanmış olabilir.

Ö3 ve Ö4 'ün ifade ettikleri $R^-{}_{56}$: $f: A \to B$, $y = f(x)$ve g: $B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\, of: A \to C$ fonksiyon olsun. Eğer $g\, of$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten ise o zaman $(gof)^{-1}: C \to A$ dur ve $x \in C$, $y \in A$ için $g\, of(x) = y$ olup $(gof)^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y)\, og^{-1}(y) = x$ dir, hatalı operatörünü reel sayılarda tanımlı iki fonksiyonun toplamı ve çarpımı gibi fonksiyonlar üzerinden işlemleri ifade eden "$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verildiğinde her $x \in \mathbb{R}$ için $f + g$ toplamı ve $f.g$ çarpımı $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f.g) = f(x).g(x)$ şeklinde tanımlanır" kontrol önermesini kullanmış olabilirler. Öğrenciler reel sayılar üzerinde yapılabilen bu işlemlerdeki özellikleri bileşke fonksiyonunda kullanmak istedikleri düşünülebilir.

Ö8 'in kullandığı $R^-{}_{66}$: Bileşke fonksiyonun yer değiştirme özelliği vardı, hatalı operatörü için yine reel sayılarda tanımlı iki fonksiyonun toplamı ve çarpımı gibi fonksiyonlar üzerinden işlemleri ifade eden "$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verildiğinde her $x \in \mathbb{R}$ için $f + g$ toplamı ve $f.g$ çarpımı $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f.g) = f(x).g(x)$ şeklinde tanımlanır" kontrol önermesini kullandığı düşünülebilir. Ö8'in reel sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonlardaki işlemler üzerinden yapabildiği yer değiştirme kuralını, bileşke fonksiyonuna aktararak bileşkedeki fonksiyonların sırasını değiştirdiğinde bir bileşke tanımlanmasının gerekmediğini ya da tanımlamak mümkün olsa da bu bileşke fonksiyonların eşit olmak zorunda olmadığı konusunda kafa karışıklığı yaşadığı görülmüştür.

Bölüm 5

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Sonuçlar Ve Tartışma

Bu araştırma kapsamında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, fonksiyonun tersi ve bileşke fonksiyon gibi fonksiyonlara ait alt kavramlar ile ilgili bilgilerini en iyi şekilde analiz etmek ve matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak için Balacheff 'in geliştirdiği cK¢ (conception, knowing, concept) teorisi ile kanıt sürecindeki eylemlerindeki tüm anlayışların incelenmesi ve bu anlayışlara ait operatörlerde ifade edilen kanıt şemalarının analiz edilmesi amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarının, kanıtlamaları istenen iki teoreme verdikleri yanıtların cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre analizinden ve uygulama esnasında yapılan görüşmelerden hareketle belirlenen operatörlere yer verilmiştir. Katılımcılara ait operatörler aşağıda tabloda sunulmuştur.

Tablo 10

Öğrencilerin kullandıkları operatörler

KATILIMCILAR	R (Operatörler Kümesi)
Ö1	$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R^{-}_{6}, R_7, R^{-}_{8}, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{15}, R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{32}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R^{-}_{41}, R_{42}, R_{43}, R_{44}, R_{45}, R_{46}, R_{47}, R_{48}, R_{49}, R_{50}, R_{51}, R_{52},$
Ö2	$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R^{-}_{6}, R_7, R^{-}_{8}, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R^{-}_{16}, R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{20}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R^{-}_{41}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{46}, R_{47}, R_{48}, R_{49}, R_{50}, R_{51}, R_{52},$
Ö3	$R_1, R_2, R_5, R_7, R_{11}, R_{10}, R_{12}, R^{-}_{16}, R^{-}_{21}, R^{-}_{22}, R^{-}_{24}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{53}, R^{-}_{54}, R_{55}, R^{-}_{56}$
Ö4	$R_1, R_2, R_5, R_7, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R^{-}_{16}, R^{-}_{21}, R^{-}_{22}, R^{-}_{23}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{53}, R^{-}_{54}, R_{55}, R^{-}_{56}$
Ö5	$R_2, R^{-}_{6}, R_7, R_{10}, R_{11}, R^{-}_{16}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{47}$
Ö6	$R_2, R_4, R_{10}, R_{12}, R_{15}, R^{-}_{16}, R_{19}, R^{-}_{23}, R^{-}_{25}, R^{-}_{26}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{57}, R_{58}, R_{59}, R_{60}, R_{61},$

Ö7	R_1, R_2, R_4, R_5, R_7, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{15}, $R^-{}_{16}$, R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{27}, R_{28}, R_{29}, R_{30}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{40}, R_{42}, R_{43} , R_{46}, R_{47}, R_{48}, R_{49}, R_{50}, R_{51}, R_{52}
Ö8	R_1, R_2 , R_4, R_5, R_7, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{27}, R_{31}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}, R_{42}, R_{43}, R_{46}, R_{47}, R_{48}, R_{49}, R_{50}, R_{51}, R_{52}, R_{62}, R_{63}, R_{64}, R_{65}, $R^-{}_{66}$,

Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Birinci Teoremde Ortaya Çıkan Anlayışlarının ck¢ Teorisine Göre İncelenmesine Yönelik Sonuçlar Ve Tartışma

Ö1 ve Ö2, teoreme başladıklarında R_1, R_2 operatörlerini kullanmışlar ve sembollerin ne anlama geldiğini bilmelerine rağmen nerede ve nasıl kullanmaları gerektiği konusunda sıkıntılar yaşamışlardır. Arkadaşı Ö2'nin açıklamaları ve derslerde gördükleri, Ö1'in matematiksel ifadeleri anlamak ve içselleştirmek yerine, daha çok biçime odaklanarak ikna olmasına yardımcı olmuştur. Ö1 kanıtında R_3, R_4, R_5,$R^-{}_6$, $R^-{}_8$ kullanmış ve burada matematiksel gösterim olarak değer kümesi ile görüntü kümesini karıştırmış ve örtenliğin tanımını kullandığını düşünmüştür. Ö1 aslında doğru bir şekilde ifade ettiği tanımları, matematiksel gösterim ve sembollerin anlamlarını tam olarak içselleştirmediği için kullandığı operatörlerin anlamlarını düşünmeden sembolik bir dil oluşturmaya odaklanmıştır. Ve bu süreçte arkadaşını ikna etmek için gereksiz yere R_9 ve R_{10} operatörlerini kullanmıştır. Öğrenciler yaptıkları hataları fark etmeden işlemlerine devam etmişlerdir. Ö1, R_5, $R^-{}_6$, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanarak kanıtına doğru bir şekilde devam etmesine rağmen eşitlik kavramını gösterirken yanlış kümeden eleman alarak devam etmiştir. Ö1 kanıt sürecinin neredeyse tamamında elemanları hangi kümeden alması gerektiği konusunda zorluk yaşamıştır. Ö1'in kullandığı R_{13}, R_{14} ve R_{15} operatörleri yaşadığı zorlukları gösterir niteliktedir. Bu da Ö1'in matematiksel olarak doğru bir dil kullanarak sembolik dile çok önem verdiğini ve daha çok biçime odaklandığını ama bazı adımları içselleştirmediğini göstermektedir. Ö1 bu süreçte genellikle matematiksel dil ve sembol kullanımında derste gördüklerini ve hocalarının dediklerini yaptığı işlemlere aktarma eğiliminde olup doğru bir şekilde ifade ettiği düşünceleri bile anlamlandıramamıştır.

Ö2 kullandığı sembollerin anlamını ve gerekçesini ifade edebilmiştir. Ö2 R_3, R_4, $R_5, R^-{}_6$ operatörlerini ve tanım kümesinden alınan her elemanın fonksiyon tarafından oluşan görüntü kümesinin bize sağladığı R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanarak kanıtına devam etmiştir. Ancak Ö1'nin kullandığı $R^-{}_8$ yanlış operatörle değer ve görüntü kümelerinin ne olduğunu bilmesine rağmen matematiksel gösterim olarak değer kümesi ile görüntü kümesini karıştırmıştır. Çünkü asıl odaklandığı şey, ifade ettikleri bu tanımları matematiksel gösterim ve sembollerin anlamlarını tam olarak içselleştiremeden matematiksel dil oluşturarak kanıtı tamamlamaktır. Ö2 eşitliğin diğer tarafını gösterirken bu sefer $f(C) \cap f(D)$'den bir eleman seçip $f(C \cap D)$'de olduğunu göstermesi gerektiğini söyleyerek R_3, $R_5, R^-{}_8$ ve R_{11} operatörlerini kullanmıştır. Ö2 bu x_1 ve x_2 elemanlarının birebir fonksiyon olma özelliğinden geldiğini görüntü kümesinden alınan y elemanının x_1 ve x_2 olan değerlerinin aynı olması gerektiğini söyleyememiş ve anlamlandıramamıştır. Ve Ö2 x_1 ve x_2 elemanlarının farklı olma koşulunun da incelenmesi gerektiğini söyleyerek R_{12} operatörünü kullanmıştır. Yapılan görüşmelerde kullandığı R_3 ile R_2 operatörlerinin farkının olup olmadığı sorulduğunda yaptığı bu tanımların doğruluğunu hocasının söylediklerini ifade ederek göstermiştir. Ö2 kanıt sürecinde kendini ikna ederken ve yaptıklarının kontrolünü sağlarken hocalarının açıklamalarını gerekçe olarak sunmuştur. Ö2, Ö1'nin yaptığı açıklamalar ve kullandığı operatörler karşısında seçtikleri elemanlar ile ilgili R_{13}, R_{14} ve R_{15} operatörlerini kullanmıştır. Ö1 kanıtın bu sürecinde yaptıkları açıklamalar ile ritüel kanıt şemasına sahip olduğu Ö2'nin ise ritüel ve otoriter kanıt şemalarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö3 ve Ö4 teoremin kanıtına başladıklarıda R_1 operatörünü kullanmış ve elemanları hangi kümeden alacaklarını belirlemede zorlanmışlardır. Ö4 kanıtına $R^-{}_{21}$, $R^-{}_{22}$ ve $R^-{}_{23}$ hatalı operatörlerini kullanarak devam etmiştir. Ö4, matematiksel olarak doğru olmayan ve mantıklı bir şekilde desteklenemeyen ifadeleri eşitlik olarak göstermeye çalışmıştır. Ö4 kanıtına $f(C \cap D)$'den bir y elemanı alarak başlamış, bu y elemanını $f(C) \cap f(D)$'de olduğunu R_5, R_6, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanarak gösterdiği belirlenmiştir. Ö4 matematiksel kavramları ve ifadeleri doğru bir şekilde ifade etmesine ve bu bilgileri doğru bir şekilde matematiksel dil ile kullanmasına rağmen kanıt sürecinde yaptığı geçişleri anlamlı bir şekilde oluşturamamış ve açıklayamamıştır. Ö4 kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederek tamamlamıştır. Ö4'ün yaptığı açıklamalardan ritüel ve indüktif kanıt şemalarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö3 kanıtına $R^{-}{}_{21}$, $R^{-}{}_{22}$ yanlış operatörü kullanarak devam etmiştir. Ö3 elemanların hangi kümelerden seçileceğine karar vermeye çalışırken matematiksel dil kullanmaya çalışmış ancak bu işlemlerin doğruluğunu veya nedenini açıklayamamıştır. Ö3 eşitliği nasıl göstereceğini doğru bir şekilde açıklamıştır ve R_5 operatörünü kullanmıştır. Fakat eşitlik kavramının tanımını doğru yapmasına rağmen nasıl göstereceğini açıklayamamış ve kanıta doğru bir şekilde devam edememiştir. Ayrıca kullandığı x_1 ve x_2 değerlerini sadece yazım benzerliğinden dolayı sıralı ikili terimleriyle karıştırmış neden böyle bir ifade kullandığını anlamlı bir şekilde açıklayamayarak $R^{-}{}_{24}$ hatalı operatörünü kullanmıştır. Ö3'ün bu süreçte dayanağı olmayan sembolik kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö5 ve Ö6 teoremi okuduktan sonra fonksiyonun tanımı ve birebirlik tanımını yaparken kararsızlık yaşamıştır ve ancak ve ancak önermesinde ne yapacağını, teoremi nasıl kanıtlayacağını açıklayamamıştır. Ö5 R_2 operatörünü kullanarak kanıtın aşikar olduğunu ama kağıda dökmekte zorlandığını ifade etmiştir. Ö6, kanıta başlamadan önce kendi içinde konuyu anlamak ve kavramak için kümeyle çizim yaparak ilerlemek istemiştir. Bu şekilde doğrudan eşitliği görebildiğini ancak bunun kanıt için yeterli olmadığını ifade etmiştir. Ö5 ve Ö6 içsel olarak teoremin doğruluğunu ifade ederken bunu matematiksel dile dönüştürmekte zorluk yaşayarak kanıtı tamamlayamamıştır. Bu süreçte Ö5 ve Ö6'nın algısal kanıt şemasına sahip oldukları görülmektedir.

Ö5 kanıtına $f(C \cap D)$'den eleman alarak $f(C) \cap f(D)$'de göstermeye çalışarak başlamıştır. Ö5, aslında doğru bir şekilde nasıl ilerlemesi gerektiğini bilmesine rağmen, bu düşüncelerini matematiksel terimlerle ifade edememiştir. Ö5, fonksiyonun tanımından elemanları yazabileceğini anlamadan, sadece ezbere bir şekilde matematiksel terimler kullanma eğilimi göstermiştir. Ö5'in kanıt sürecinde R_2, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Dolayısıyla Ö5'in ritüel kanıt şemasına sahip olduğu görülmüştür.

Ö6 yaptığı işlemlerin mantığını ve görüntü kümelerini nasıl oluşturduğunu anlamlı bir şekilde ifade edememiştir. Bu süreçte, sadece özel değerlerle işlem yaparak kendini içsel olarak ikna etmeye çalışmıştır. Ancak, bu işlemleri matematiksel olarak doğru argümanlarla destekleyememiştir. Ö6 'nın bu işlemlerde R_4, $R^-{}_{23}$, R_{15},R_{19} ve $R^-{}_{25}$ operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Bu süreçte Ö6 'nın indüktif kanıt şemasına sahip olduğu görülmüştür.

Ö7 ve Ö8 teoremi okuduktan sonra ne yapması gerektiklerini doğru bir şekilde ifade etmişler ve R_1, R_2 ve R_{12} operatörlerini kullanmışlardır. Ö7 ve Ö8 kanıta tanım ve görüntü kümesinin elemanlarını belirterek başlamış $f(C \cap D)$'den eleman alarak $f(C) \cap f(D)$'de göstermeleri gerektiğini söylemişlerdir. Öğrenciler burada eşitlik kavramının gereği olan karşılıklı olarak kapsamayı yapmışlardır fakat bunun farkına varamamışlardır. Öğrenciler $C \cap D$ kümesinin A 'nın altkümesi olduğunu dolayısıyla f altındaki görüntüsünün de B'nin altkümesi olacağını ifade ederek kümelerinin tanım ve değer kümesini belirtmişlerdir. Ve R_4,R_7, R_{27} operatörlerini kullanmışlardır. Ö7, R_7 ve R_{11}operatörlerini kullanarak kanıtına devam etmiştir fakat fonksiyonun birebir olma şartının nerede kullanacağı ile ilgili sorunlar yaşamıştır. Ö7 kanıt sürecinde doğru adımlarla ilerlemesine rağmen eşitlik kavramı ile ancak ve ancak önermesini karıştırmış ve $R^-{}_{16}$ operatörünü kullanmıştır. Ö7 ve Ö8 aralarında yaptıkları görüşmeden sonra eşitlik kavramını göstermek için eşitliğin her iki tarafının da birbirini kapsaması gerektiğini söyleyerek R_5 operatörünü kullanmışlardır. Ö7 bu kanıt sürecinde R_2, R_5, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullanarak doğru ve anlamlı bir şekilde işlemlerini yapmıştır fakat eşitliğin ilk kısmını gösterirken fonksiyonun birebir olma şartının olması gerektiğini ifade etmiştir.

Ö8 yaptıkları bu kanıt sürecinde eşitliğin ilk tarafında fonksiyonun birebir olmasının şart olmadığını ama ikinci kısmı gösterirken $f(C) \cap f(D)$'den aldıkları elemanı $f(C \cap D)$'de gösterebilmek için fonksiyonun birebir olması gerektiğinin farkına varmıştır ve kanıtının bu sürecini doğru bir şekilde ifade etmiştir. Fakat Ö8'in kâğıdı incelendiğinde bunları matematiksel bir dil ile kâğıda dökmemiştir. Bu yüzden Ö8'in kullandığı operatörler belirtilirken açıklamalarından yararlanılmıştır. Öğrencilerin her ikisinin de bu kanıt sürecinde R_2, R_5, R_7 ve R_{11} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö7 ve Ö8'in kanıt sürecinde genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak tanımlardan, teoremlerden ve kanıt yöntemlerinden yararlanmaya çalışarak geçerli bir kanıt oluşturmuş olsalar da yaptıkları işlemlerde tam olarak ne yaptıklarını içselleştirememişlerdir. Öğrencilerin kanıt sürecinde dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları görülmüştür.

Ö1 kanıtına devam ederken $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu tek nokta kümesi vererek göstermeye çalışmış ve verilenlere uygun olacak şekilde kabul üzerinde yerleştirerek genel sonuca varmak istemiştir. Ö1, her C ve D kümesi için bu eşitliği kabul ederek tek nokta kümelerini oluşturduğunu dolayısıyla A kümesinin her alt kümesi için sağladığını ifade ederek R_2, R_{12}, R_{15}, R_{17}, R_{18} ve R_{19} operatörleri ile kanıtı tamamlamıştır. Ö1'in bu süreçte genel durumları göz önünde bulundurarak amaçlarına yönelik tanımlar, teoremler ve önceden kabul edilmiş diğer doğrular kullanarak kanıt oluşturduğu için dönüşümsel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö2 daha önceden derste öğrendikleri kanıt akışlarının ne olduğunu anlamlandırmadan $R^{-}{}_{16}$ yanlış operatörünü kullanmış bunu ve işlemlere aktarmak istemiştir. Ö2 eşitliğin ilk kısmında fonksiyonun birebir olmasının gerekmediğini diğer yönünü gösterirken fonksiyonun birebir olması gerektiğini görememiştir ve kanıtı tamamlayamamıştır. Ö2 matematiksel dil ve sembol kullanımında derste gördüklerini ve hocalarının dediklerini yaptığı işlemlere aktarma eğiliminde olmuştur. Bu da Ö2'nin ritüel kanıt şemasına sahip olduğunu göstermektedir.

Ö2 kanıtına devam ederken $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için $C \cap D$ kümesini tek nokta kümesi alarak kanıtına devam etmek istemiştir ve R_2, R_{12}, R_{17}, R_{19} ve $R^{-}{}_{20}$ operatörlerini kullanmıştır. Daha sonra Ö1 ile yaptığı görüşmelerde onun yaptığı kanıta ikna olup aynı kanıt adımlarını izleyerek ve

$R_2, R_{12}, R_{15}, R_{17}, R_{18}$ ve R_{19} operatörlerini kullanarak kanıtı tamamladığını ifade etmiştir. Ö2 de genel durumları göz önünde bulundurarak amaçlarına yönelik tanımlar, teoremler ve önceden kabul edilmiş diğer doğrular kullanarak kanıtı tamamlamıştır. Bu yüzden Ö2'nin de dönüşümsel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö3 ve Ö4 eşitlik kavramının kanıtında ancak ve ancak kullanabileceklerini kanıtın çift taraflı olarak sorunsuz bir şekilde gittiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin $R^{-}{}_{16}$ hatalı operatörü kullandıkları belirlenmiştir. Bunu neden bu şekilde düşündükleri sorulduğunda Ö3 hocalarının da bu şekilde yaptığını ifade etmiştir. Ö3'ün kendini ikna etme sürecinde bu açıklamalarıyla otoriter kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö3 ve Öğrenciler ancak ve ancak ile eşitlik ifadelerinin nasıl gösterildiğini ve nasıl kullanıldığını bilmelerine rağmen işlemlerine bu kavramları matematiksel dil olarak doğru bir şekilde aktaramamış ve açıklayamamışlardır. Ö3 ve Ö4 $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeleri gerektiğini ifade etmişlerdir. Aralarında konuşurken birebir fonksiyonun tanımını yanlış yaptıklarını fark edip hatalarını düzeltmişlerdir ve R_2 ve R_{12} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin kanıt sürecinin nasıl olacağına dair ciddi anlamda bilgi eksiği olduğu belirlemiştir. Ve öğrenciler önemli ve temel matematiksel kavramları göstermekte sorun yaşamışlardır. Ö4 bu süreçte daha aktif katılım göstermiştir ve kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine belirli bir formu veya şekli düşünerek biçime odaklandığı için ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö4 İspatın son kısmında arkadaşının kullandığı ifadelere ikna olmamasına rağmen aynı işlem adımlarını takip ederek kanıtını doğru ve anlamlı bir şekilde tamamlayamamıştır.

Ö3 yaptığı işlemlerde görüntü kümesinden aldığı elemanları tanım kümesinin elemanı olarak göstererek matematiksel olarak anlamlı ifadeler kullanmamıştır. Ö3 tüm bu kanıt sürecinde zorluklar yaşamıştır ve çoğu zaman Ö4'ün yaptığı işlem adımlarını takip etmiştir. Ö3'ün genellikle matematiksel gösterim ve sembollerde anlamlı ve doğru bir dil kullanmadığı, matematiksel kavramlarda eksikleri olduğu tespit edilmiştir. Ö3 kanıtının sonunda fonksiyonun birebir olduğunu mantıksal ve anlamlı gerekçelerle ifade edememiş ve kanıtı tamamlayamamıştır. Bu süreçte Ö3 ‘ün kullandığı operatörler belirlenememiştir. Ö3 ‘ün kanıt sürecinde kendini ikna etmek için özel örnekler vermeye çalıştığı ve indüktif kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö5 ve Ö6 kanıt sürecinde eşitlik kavramını ancak ve ancak ifadesi ile karıştırmıştır ve $R^{-}{}_{16}$ yanlış operatörü kullanmıştır. Ö6 kanıtına R_{15}, R_{19}, $R^{-}{}_{23}$ ve $R^{-}{}_{26}$ operatörleri kullanarak devam etmiştir. Ö6 derste gördüğü bilgi ile kanıtı anlamak veya içselleştirmek yerine, sadece belirli adımları takip ederek kanıt sürecine aktarmak istemiştir ve bu nedenle ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö6 seçtiği elemanları soldan sağa ve sağdan sola eşitlikte yerine koyarak eşitliğin sağlandığını gösterdiğini ifade etmiştir. Ö6 kanıtını, sezgisel olarak anlamlandırarak tamamlamaya çalışmış ancak matematiksel olarak doğru ve anlamlı bir dil kullanamamıştır. Ö6’nın yaptığı işlemleri anlamlandıramadığı ve matematiksel kavram ve sembollerin ne anlama geldiğini tam olarak açıklayamadığı gözlemlenmiştir. Ö6’nın indüktif kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ö6 yaptığı kanıt sürecinde eksik bilgileri olduğunun farkında olmasına rağmen nasıl bir yol ilerlemesi gerektiğini bulamamış ve kanıtını doğru bir şekilde tamamlayamamıştır.

Ö7 kanıtına eşitliği kabul edip fonksiyonun birebir olduğunu göstermeye çalışarak ilerleyeceğini açıklamış ve çelişki yoluyla kanıt yapmaya çalışmıştır. Ö7 kanıt sürecinde yapması gerekeni doğru bir şekilde ifade etmiş ve çelişkiyle kanıt yönteminde 1 ise 0 sonucuna ulaşarak çelişki oluşturmaya çalıştığını doğru bir şekilde açıklamıştır ve R_{28}, R_{29} operatörlerini kullanmıştır. Ö7 bütün yapması gereken adımları doğru ve anlamlı olarak açıklamış olmasına rağmen bunları matematiksel dile dökerek ifade edememiştir.

Ö7, C ve D kümelerinde birbirinden farklı tek nokta kümeleri oluşturmuştur ve bu kümelerin kesişimlerinin boş küme olacağını ve dolayısıyla görüntülerinin de boş küme olacağını belirtmiştir. Ve eşitliliği kullanarak $f(C) \cap f(D)$‘nin boş kümeye eşit olduğunu dolayısıyla kesişimleri boş küme olan iki görüntünün birbirinden farklı olacağını söyleyerek birebirliği gösterdiğini belirtmiştir. Ö7 bu süreçte doğru işlem adımlarını takip etmesine rağmen her C ve D kümesi için bu eşitliği kabul ederek tek nokta kümelerini oluşturduğunu dolayısıyla A kümesinin her alt kümesi için sağladığını anlamlandıramamış ve doğru işlem adımlarını takip etmesine rağmen kanıtı tamamladığını fark edememiştir. Ve yaptığı bu işlemin özel bir örnek olduğunu ifade ederek tek bir durum için geçerli olduğunu düşünmüştür. Ö7'nin bu süreçte R_{15}, R_{17}, R_{18}, R_{19} ve R_{30} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö7 kanıtın bu aşamasında daha fazla ilerleyemediğini kanıtı tamamlayamadığını söylemiştir. Ö7 ve Ö8 aralarında geçen konuşmada bu durum için aynı fikre sahip olduklarını dile getirmişlerdir.

Ö8 ise Ö7'den farklı olarak tanım kümesinden farlı değerler alıp bunların görüntülerinin de farklı olacağını göstermeye çalışarak doğrudan kanıt yöntemini kullanmaya çalışmıştır. Ö8 bunu R_{31}operatörünü kullanarak ifade etmiştir ve ne yapması gerektiğini doğru bir şekilde açıklamasına rağmen bunu matematiksel dile dökememiş ve kanıtını tamamlayamamıştır.

Ö7 ve Ö8'in her ikisi de kullandıkları matematiksel ifadelerin ve sembollerin anlamlarını açıklamada doğru ve anlamlı ifadeler kullanmışlardır. Ö7 ve Ö8'in kanıt yöntemlerini doğru bilmelerine ve matematiksel sembolleri doğru kullanmalarına rağmen birinci teoremin son kısmındaki kanıt sürecini tamamlayamamışlardır. Bu kanıt sürecini, içsel olarak anladıkları ve ifade ettikleri kavramları daha çok matematiksel dil ve sembol kullanmaya odaklanarak geçirmişlerdir. Ö7 ve Ö8'in her ikisi de kanıt sürecinde dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir.

Knapp (2005), öğrencilerin matematiksel kanıtlama sürecinde farklı problemler için farklı kanıt şemalarına sahip olmalarının mümkün olduğundan bahsetmiştir. Harel ve Sowder'ın önerdiği üç sınıf kanıt şeması, öğrencilerin genel matematiksel gelişim süreçlerini temsil ederken, her problem veya matematiksel iddia farklı bir kanıt şeması kullanabilir. Öğrenciler, bir problemi çözmek veya bir iddiayı doğrulamak için çeşitli matematiksel yeteneklerini ve kanıt şeması kullanabilirler. Örneğin, bazı problemler daha çok görsel veya somut gerekçeler gerektirirken, diğerleri daha çok analitik veya mantıksal gerekçeler gerektirebilir. Çalışmamızda elde ettiğimiz veriler bu bilgilerle örtüşmektedir. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde her bir öğrencinin kanıtın farklı bölümlerinde farklı kanıt şemalarına sahip oldukları görülmektedir. Otoriter kanıt şemasına sahip öğrencilerin Ö2 ve Ö3 oldukları görülmüştür. Ö1, Ö2, Ö4, Ö5 ve Ö6 öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Dayanağı olmayan sembolik kanıt şemasına sadece Ö3'ün sahip olunduğu görülmektedir. İndüktif kanıt şemasına ise Ö3, Ö4 ve Ö6 öğrencilerin sahip oldukları belirlenmiştir. Ö5 ve Ö6 öğrencilerin algısal kanıt şemasına sahip oldukları görülmüştür. Dönüşümsel kanıt şemasına sahip öğrencilerin Ö1, Ö2, Ö7 ve Ö8 oldukları belirlenmiştir. Birinci, ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinin kanıt şemaları incelendiğinde daha çok dışsal ikna kanıt şemasına ve deneysel kanıt şemasına sahip oldukları görülmektedir.

Öğrencilerin fonksiyon kavramlarına dair bilgi ve kanıt yetenekleri birbirinden farklılık göstermektedir. Örneğin, Ö1 ve Ö2, matematiksel kanıtlarda sembol kullanımını önemsemişlerdir. Ancak, Ö2 sembollerin anlamını başarılı bir şekilde açıklarken, Ö1 sembollerin kullanımında zorlanmış ve daha çok biçime odaklanmıştır. Her iki öğrenci de birebir fonksiyon kavramını doğru bir şekilde kullansa da, görüntü kümesi ile değer kümesi arasındaki farkı kavrayamamışlardır. Özellikle, Ö1'in sembollerin anlamını bilmesine rağmen bazı adımları içselleştirememesi ve biçime aşırı odaklanması dikkat çekicidir. Öğrencilerin teoremleri kanıtlama süreçlerinde farklı yaklaşımları vardır. Örneğin, Ö3 ve Ö4, teoremi okuduktan sonra fonksiyonun birebir olması gerekliliğini dikkate alarak kanıta başlamışlardır. Ancak eksik matematiksel işlem bilgisi ve sembol kullanımında zorluklar yaşamışlardır. Ö5 ve Ö6 ise teoremi okuduktan sonra birebir fonksiyonun tanımını kullanarak kanıtlamaya çalışmışlardır. Ancak "ancak ve ancak" bağlacının nasıl kullanılacağını anlamakta zorlanmışlardır.

Öğrencilerin çoğunun $R^{-}{}_{16}$ hatalı operatörünü kullanmaları ve ⇒ (ise) , ⟺ (ancak ve ancak) gibi mantık bağlaçlarındaki kullanımlarda yaptıkları hatalar; mantık kavramına ait sembollerin anlamlarını ve kullanım yerlerini anlamlı bir şekilde öğrenemediklerini, teoremlerin kanıtını yaparken matematiksel sembolleri ezbere kullandıklarını gösterdiği düşünülmektedirBu elde ettiğimiz sonuç Selden ve Selden'in (1995) yaptığı çalışmada elde ettiği bulgularla örtüşmektedir. Selden ve Selden (1995), üniversite öğrencilerinin mantık kullanımında belirgin güçlü alanlar bulunmasına rağmen, birçok zayıf alanın da olduğunu ifade etmiştir. Bu zayıf alanlar genellikle matematiksel ifadelerin tam olarak anlaşılmaması ve doğru bir şekilde kullanılmamasıyla ilgilidir. Çalışmamızda; öğrencilerin fonksiyonun tanımını, birebir olma özelliğini ve görüntü kümesi tanımını sözel olarak ifade etmelerine rağmen zaman zaman kavramsal olarak bazı karışıklıklar yaşadıkları ve kavramları matematiksel dil kullanarak ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür. Bu nedenle, matematik eğitiminde öğrencilerin bu zorluklarla başa çıkmasına ve matematiksel dil becerilerini geliştirmesine odaklanmak önemlidir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İkinci Teoremde Ortaya Çıkan Anlayışlarının ck¢ Teorisine Göre İncelenmesine Yönelik Sonuçlar Ve Tartışma

Öğrencilerin hepsi teoremi okuduktan sonra f ve g fonksiyonlarının tersi var ise bu fonksiyonların birebir ve örten fonksiyonlar olduğunu kabul ederek $g\, of$ bileşke fonksiyonunun tersi olduğunu yani bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermeleri gerektiğini açıklayarak teoremi nasıl kanıtlamaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö1 kabullerinde yer alan f ve g fonksiyonlarının da birebir ve örten fonksiyonlar olduğunu göstermeleri gerektiğini söylemiştir. Ö1 fonksiyonun tersinin gerekliliklerinin de bir teorem olduğunu ifade ederek bu teoremin doğruluğunu da göstermeleri gerektiğini savunmuştur. Ö'in bu süreçte R_{10} , R_{32}, R_{33} ve R_{34} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö3 ve Ö4'ün R_{10} operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö5 ve Ö6'nın bu süreçte R_2, R_{10}, R_{35}, R_{37}, R_{38} ve R_{39} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.

Ö7 $g\, of$ bileşke fonksiyonunun tersi olduğunu gösterdikten sonra tersinin $f^{-1}og^{-1}$ 'ne eşit olduğunu eşitlik kavramını kullanarak göstereceğini ifade etmiştir. Ö7 burada eski kullandığı bilgiyi ya da daha önceden yaptığı doğruluğundan emin olduğu bir işlemi yapacağı kanıta aktarmak istemiştir. Bu yüzden Ö7'nin ritüel kanıt şemasına sahip olma eğilimi gösterdiği düşünülmüştür. Öğrencilerin bu süreçte R_2, R_{10}, R_{33}, R_{34}, R_{37}, R_{38} ve R_{39} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.

Ö1, Ö2, Ö5, Ö7, Ö8 $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir olduğunu, görüntüleri eşit ise tanım kümesinden aldıkları elemanların da birbirine eşit olacağını ifade ederek göstermişlerdir. Öğrencilerin R_2, R_{35}, R_{36} ve R_{37} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö6 ise kanıtına $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu f ve g fonksiyonlarının birebir olmasını kullanarak devam etmiştir. Ö6 birebir fonksiyonunun, tanım kümesinden alınan elemanlar birbirinden farklı ise görüntülerinin de farklı olacağı tanımını kullanarak göstermiştir. Ve bu süreçte R_{12}, R_{35}, R_{57}ve R_{58} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin kullandıkları ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak, tanımlar ve teoremler arasında geçişler yaparak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladıkları görülmüştür.

Ö3 ve Ö4 kanıtlarına $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu, görüntüleri aynı ise tanım kümesinde oluşan değerlerin de birbirine eşit olmasını göstererek devam etmişlerdir. Öğrenciler $g\,of$ bileşke fonksiyonun birebir olduğunu f ve g fonksiyonlarının birebir olmasından yararlanarak göstermişlerdir. Öğrencilerin tanımları ifade ederken elemanları nereden aldıklarını ve görüntülerini hangi kümelerde oluşturduklarını gösterirlerken bazı matematiksel ifadeleri ve sembolleri eksik olarak kullandıkları görülmüştür. Ö3 ve Ö4' ün kanıt sürecinin bu aşamasında R_2, R_{35}, R_{36} ve R_{37} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö3 ve Ö4 kanıtlarına $g\,of$ bileşke fonksiyonun örten olduğunu göstererek devam etmişleridir. Aralarında örten fonksiyonun tanımını tartışırken her iki öğrenci de fonksiyonun tanımı ve tanım kümesini doğru bir şekilde ifade ederken tanım kümesinde alınan elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu görüntü kümesinin elemanlarının değer kümesine ait olduğunu ifade edememiş ve görüntü kümesi kavramlarını karıştırmışlardır. Ve her iki öğrencinin de R_{53} ve $R^{-}{}_{54}$ operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.

Ö3 ve Ö4 örtenliğin tanımında yaptıkları hatayı fark edememiştir ve kanıtlarını $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten olduğunu f ve g fonksiyonlarının örten olmasından yararlanarak göstermişlerdir. Ö3 ve Ö4 görüntü kümesi ile değer kümesinin arasındaki farkı içsel olarak anlamlandıramamış olmalarına rağmen doğru bir matematiksel dil ve sembol kullanmışlardır. Bu da bize öğrencilerin doğru matematiksel dil ve sembol kullanmalarına rağmen yazdıkları ifadelerin tam olarak ne anlama geldiğini kavrayamadıklarını doğru sembolik dili kullanmaya odaklandıklarını göstermektedir. Ö3 ve Ö4 her ikisinin de R_{35}, R_{38}, R_{39} ve R_{40} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin kanıt sürecinin genelinde derslerden ve hocalarından öğrendiklerini aktarma eğiliminde olup kavramların anlamlarını içselleştirmedikleri daha çok sembolik dili kullanmaya odaklandıkları görülmüştür. Bu süreçte öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir.

Ö1, Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö7 kanıtlarına $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örten bir fonksiyon olduğunu göstermek için bileşke fonksiyonunun değer kümesinden aldıkları her elemanın tanım kümesinde en az bir tane değeri olacağını ifade ederek devam etmişlerdir. Öğrenciler işlemlerini doğru matematiksel dil ve semboller ile göstermiş ve anlamlandırarak açıklamışlardır. Öğrencilerin hepsi de aynı operatörleri kullanmıştır. Öğrencilerin bu süreçte $R_{35},\ R_{38},\ R_{39}\ ve\ R_{40}$ operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö8 ise $g\,of$ bileşke fonksiyonunun örtenliğini görüntü kümesinin değer kümesine eşit olması bilgisini kullanarak göstermiştir. Ö8'in örtenliği doğru bir şekilde anlamlandırdığı görülmesine rağmen bunu kâğıda aktarırken matematiksel dil kullanımında eksikleri olduğu tespit edilmiştir. Ö8'in bu süreçte R_{62}, R_{63}, R_{64} ve R_{65} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin kanıtın bu sürecinde doğru matematiksel dil kullanımına özen göstererek operatörlerinde genellenebilir durumları ve tanımları kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin kanıt sürecini dönüşümsel kanıt şeması ile tamamladıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin her ikisi de kanıtlarına eşitliğin her iki tarafını $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkeye alarak bir fonksiyonun tersiyle bileşkesi birim (özdeşlik) fonksiyonunu vereceğini ifade ederek devam etmişlerdir. Öğrenciler kullandıkları fonksiyonun tersi, birim fonksiyon gibi matematiksel kavramları doğru bir şekilde açıklayarak doğru ve anlamlı bir matematiksel dil kullanmışlardır. Ö1'in kanıt sürecinde $R^{-}{}_{41}$, R_{42}, R_{43} operatörleri kullandığı tespit edilmiştir. Ö2'nin ise R_{41}, R_{42}, R_{43} ve R_{45} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö1 ve Ö2'nin bu süreçte genel durumlar arasında geçişler yaparak tanımlar ve teoremler kullandığı için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir.

Ö1 ve Ö2 bir fonksiyon tersiyle bileşkeye girdiğinde birim fonksiyonunu verir bilgisini kullanarak eğer $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise bu iki fonksiyonun bileşkesinin birim fonksiyonu vereceğini ifade emişlerdir. Bu yüzden $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesini almaları gerektiğini açıklayarak kanıtlarına devam etmişlerdir. Öğrenciler bu süreçte aynı operatörleri kullanmışlardır. Öğrencilerin bu süreçte R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{46}, R_{47}, R_{48} ve R_{49} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu süreçte genellenebilir durumları düşünerek, aralarında geçişler yaparak tanımlar ve teoremler kullandığı için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir.

Ö4 $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin $f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermeye çalışırken ilk teoremde yaptıkları eşitlik kavramında izledikleri yolu bu teoreme aktarmak istemiştir. Ö4 burada daha önceden gördükleri ve yaptıkları işlemleri başka sorularda kullanma eğilimini göstermiştir. Ö4 teoremde ne yapması gerektiğini düşünmeden, bazen aynı kavramaların gösteriminde farklı yolların olabileceğini fark etmeden daha önceden ifade ettiği doğru olduğunu bildiği bir kavramı veya teoremi yeni bir teoremi gösterirken kullanmak istemiştir. Bu da Ö4'ün ritüel kanıt şemasına sahip olduğunu göstermektedir.

Ö3 ve Ö4 kanıtlarına devam ederken $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin $f^{-1}og^{-1}$ olduğunu göstermek için bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak $g\,of$ ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonlarının bileşkesini aldıklarında eğer birim fonksiyonu elde ederlerse $f^{-1}og^{-1}$'nin $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersi olduğunu söyleyebileceklerini ifade etmişlerdir. Fakat ne yapacaklarını doğru bir şekilde ifade etmelerine rağmen öğrenciler $g\,of(x) = a$ gibi bileşke fonksiyonunun bir görüntüsünü oluşturarak, fonksiyonların tersini bulurken x'i yalnız bırakıp y cinsinden yazarak yaptıkları cebirsel işlem bilgilerini bileşke fonksiyonuna aktarmışlardır. Eşitliğin her iki tarafında f ve g fonksiyonlarının tersi ile bileşkesini alarak $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersini bulmuşlardır.

Öğrenciler kanıtlarında işlem geçişlerini doğru bir şekilde ifade etmişlerdir fakat $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan bileşkesini almamışlardır. Burada bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla sağdan ve soldan işleme girdiğinde de birim fonksiyonu veriyorsa bu fonksiyon için $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersidir diyebileceklerini ifade etmemişlerdir. Öğrenciler işlemlerinde fonksiyonların tersinin tanım ve değer kümelerini belirtmekte eksiklikler yapmışlardır ve buldukları birim fonksiyonların hangi kümeye ait olduklarını belirtmemişlerdir. Öğrenciler kanıt sürecini tam ve doğru bir şekilde tamamlayamamışlar ve matematiksel dil ve sembol kullanımlarında eksiklikler yapmışlardır. Ö3 ve Ö4'ün bu süreçte R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{56} ve R_{55} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö3 ve Ö4 kanıt sürecinde daha önce öğrendikleri ve bir fonksiyonun tersini bulurken kullandıkları cebirsel işlemleri bileşke fonksiyonun tersini bulmak için kanıt sürecine aktarmışlardır. Öğrencilerin teoremi kanıtlama sürecinde genellenebilir tanım ve kavramları içselleştirmeden kullandıkları derslerden öğrendiklerini aktarmaya çalıştıkları ve daha çok biçime önem verdileri gözlemlenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin ritüel kanıt şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir.

Ö5 ve Ö6 kanıt sürecinde $g\,of$ bileşke fonksiyonunun birebir ve örten olduğu için tersinin olduğunu ve eğer tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesi alındığında birim fonksiyonu vereceğini, bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak ifade etmiştir. Ö5 işlemlerinde ters ve birim fonksiyonların tanım ve değer kümelerini belirtmediği ve kavramların açıklamalarını yaparken matematiksel dil ve sembol kullanımlarında eksiklikleri olduğu görülmüştür. Ö5'in bu süreçte R_{42}, R_{43}, R_{45} ve R_{47} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir.

Ö6 kanıt sürecinde fonksiyonların tersinin tanım ve değer kümelerini ifade etmiş ve her fonksiyon için görüntü kümesi oluşturmuştur. Ö6 bileşke fonksiyonun tanımından yararlanarak fonksiyonların görüntülerini bileşke fonksiyonunda yerine yazarak birim fonksiyonu elde ettiğini göstermiş ve kanıtını tamamlamıştır. Ö6 yaptığı işlem adımlarında doğru matematiksel dil ve semboller kullanmasına rağmen önceden öğrendiği yöntem ve cebirsel işlemlerden yola çıkarak devam ettiği görülmüştür. Dahası bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini sağdan ve soldan işleme aldıklarında da birim fonksiyon olup olmadığına bakması gerektiğini fark edememiştir. Ö6'nın bu süreçte R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{45}, R_{59}, R_{60} ve R_{61} operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Ö6 önceden öğrendiği bir bilgiyi ya da doğruluğundan emin olduğu işlem adımlarını yapacağı kanıta aktarmak istemiştir. Bu yüzden Ö6'nın ritüel kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö7 ve Ö8'in her ikisi de bir fonksiyon tersiyle bileşkeye girdiğinde birim fonksiyonu verir bilgisinden yararlanarak eğer $g\,of$ bileşke fonksiyonun tersi $f^{-1}og^{-1}$ ise bu iki fonksiyonun bileşkesinin yine birim fonksiyonunu vereceğini ifade etmişlerdir. Ve $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesini almaları gerektiğini açıklayarak kanıtlarına devam etmişlerdir. Ö7 ve Ö8 ilk etapta birim fonksiyonların hangi kümeye ait olduğunu yanlış belirlemişlerdir. Ö7 ve Ö8'in bu süreçte R_{42}, R_{43} ve R_{47} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.

Ö8 işlemlerine devam ederken fof^{-1} bileşke fonksiyonundan elde ettiği birim fonksiyonu ile g^{-1} fonksiyonunu yer değiştirdiğini bunu da bileşke fonksiyonunun yer değişme özelliği olduğunu $R^{-}{}_{66}$ hatalı operatörü kullanarak belirtmiştir. Öğrencilerin her ikisi de bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını yaptıkları işlemde birim fonksiyon ile fonksiyonun tersini yer değiştirdiklerinde kanıtın doğruluğunun değişmeyeceğini birim fonksiyon özelliğinden kaynaklandığını görememişlerdir. Ö7 burada ki hatayı fark etmeden yer değişme özelliğini kullanmanın gereksiz olacağını R_{35} ve R_{42} operatörlerini kullanarak belirtmiştir.

Ö7 ve Ö8 kanıtlarına hatalarını fark edip birim fonksiyonların hangi kümeye ait olduklarını doğru bir şekilde $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini alarak C kümesine ait birim fonksiyonunu elde edeceklerini söyleyerek kanıtlarına başlamışlardır. Ö7 ve Ö8 yaptıkları işlem adımlarını ve kullandıkları kavramların anlamlarını doğru bir şekilde ifade etmelerine rağmen matematiksel dil ve sembol kullanımında eksiklikler yapmışlardır. Öğrencilerin her ikisinin de aynı operatörleri kullandığı tespit edilmiştir. Bunlar R_{46}, R_{47}, R_{48} ve R_{49} operatörleri olarak belirlenmiştir. Ö7 ve Ö8 yaptıkları açıklamalarda matematiksel sembol kullanımlarında eksikleri olmasına rağmen kullandıkları ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumlar, tanımlar ve teoremler arasında geçişlerde bulunarak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladıkları görülmüştür.

Ö1 ve Ö2 ise $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonu ile gof bileşke fonksiyonun bileşkesini alarak A kümesine ait birim fonksiyonu elde edeceklerini söyleyerek kanıta devam etmişlerdir. Ö1 ve Ö2 yaptıkları açıklamalar ve kullandıkları kavramları içsel olarak anlamlandırarak doğru bir matematiksel dil kullanmışlardır. Öğrenciler bu süreçte aynı operatörleri kullanmışlardır. Ö1 ve Ö2'nin bu süreçte R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{42}, R_{43}, R_{47}, R_{50} ve R_{52} operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu süreçte genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak, aralarında geçişler yaparak tanımlar ve teoremler kullandığı için dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir.

Ö5 kanıtına devam ederken $g\,of$ bileşke fonksiyonu ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu sağdan ve soldan bileşkesini almamıştır. Ö5 bileşke fonksiyonun değişme özelliğinin olmadığını dolayısıyla sağdan ve soldan işleme aldıklarında da birim fonksiyon olup olmadığına bakmaları gerektiğini fark edememiştir. Dahası diğer teoremde gösterdikleri eşitlik kavramında kullandığı bilgileri buraya aktararak eşitlik kavramını ancak ve ancak gibi düşünerek $R^{-}{}_{16}$ hatalı operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Ö5 açıklamalarında tersine işlem yaparak birim fonksiyondan da $g\,of$ ile $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonunu bileşkesine ulaştığını ve kanıtını tamamladığını belirtmiştir. Ö5 kendi kanıtının doğruluğunu göstermek için soyut matematik dersinde hep böyle yaptıklarını bu yüzden de bu yöntemi kullandığını ifade etmiştir. Bu da Ö5'in ritüel kanıt şemasına sahip olduğunu göstermektedir.

Ö7 ve Ö8 kanıtlarına $f^{-1}og^{-1}$ bileşke fonksiyonu ile $g\,of$ bileşke fonksiyonunun bileşkesini alarak A kümesine ait birim fonksiyonu elde edeceklerini söyleyerek kanıta devam etmişlerdir. Ö7 ve Ö8 yaptıkları işlemlerde fonksiyonların tanım ve değer kümelerini doğru bir şekilde göstererek kanıt sürecini tamamlamışlardır. Öğrenciler kanıt sürecinin genelinde kullandıkları kavramların anlamlarını, yaptıkları işlem geçişlerini doğru bir şekilde ifade etmiş ve içsel olarak anlamlandırmışlardır. Ö7 kanıt sürecinde matematiksel dil ve sembollerin doğru bir şekilde kullanmasına özen göstermiş ve bunu kâğıdına aktarma konusunda daha dikkatli davranmıştır. Ö8 ise kanıt sürecinde aktif rol oynamasına, matematiksel kavramları doğru ifade etmesine ve içsel olarak anlamlandırmasına rağmen bu ifadeleri matematiksel dil ve sembol kullanımına aktarmada eksiklikler yapmıştır.

Ö7 ve Ö8 her ikisinin de aynı operatörleri kullandığı tespit edilmiştir. Bunlar R_{47}, R_{50}, R_{51} ve R_{52} operatörleri olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin kullandıkları ifadelerde ve operatörlerde genellenebilir durumları göz önünde bulundurarak, tanımlar ve teoremler arasında geçişler yaparak dönüşümsel kanıt şeması ile kanıt sürecini tamamladığı görülmüştür.

Öğrenciler, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersinin varlığı durumunda bileşke fonksiyonunun birebir ve örten olması gerektiğini belirtmişlerdir. Özellikle, $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersini, f ve g fonksiyonlarının tersi olduğundan dolayı bu fonksiyonların birebir ve örten olmasından yararlanarak göstermeye çalışmışlardır. Ancak, bu süreçte bazı öğrenciler matematiksel dil ve sembol kullanımında eksiklikler göstermiştir. Öğrencilerin kanıt sürecindeki eksiklikleri ve zorlukları, matematiksel dil bilgisindeki eksikliklerden kaynaklanmaktadır. Ayrıca, "ancak ve ancak" bağlacının kullanımı konusunda da belirli karışıklıklar yaşanmıştır. Öğrencilerin daha kapsamlı ve doğru kanıtlar oluşturabilmeleri için matematiksel sembollerle işlemler yapmaktan ziyade genel tanımları daha iyi anlamaları ve genellenebilir durumları daha etkili bir şekilde kullanmaları önemlidir.

Öğrencilerin kullandığı kanıt şemaları incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö7 ve Ö8'in dönüşümsel kanıt şemasına sahip oldukları görülmüştür. Ö3, Ö4, Ö5 ve Ö6 öğrencilerinin sahip oldukları bir diğer kanıt şemasının ise ritüel kanıt şeması olduğu görülmüştür. Ayrıca Ö7'nin ritüel kanıt şemasına sahip olma eğilimi gösterdiği düşünülmüştür.

Öğrencilerin çoğu fonksiyonlar ile ilgili kavramları bilmelerine ve soruları doğru bir şekilde anlamalarına rağmen kanıt sürecinde kullandıkları ifadeleri ve işlem adımlarını içselleştirmedikleri görülmüştür. Öğrenciler, kanıt sürecinde önceden edindikleri bilgileri ve derslerde gördükleri işlem adımlarını bu sorulara aktarma eğilimini göstermişlerdir.

Pedemonte (2007) yaptığı çalışmada, deneyler sırasında bazı öğrencilerin teoremi bilmelerine rağmen kanıtı yapamadıklarını görmüştür. Yaptığımız çalışmada elde ettiğimiz bulgular Pedemonte'nin (2007) çalışması ile örtüşmektedir. Bu bulgular, öğrencilerin sadece matematiksel teoremleri ezberlemekle yetinmeyip, aynı zamanda bu teoremleri anlamaları ve kanıtlama becerilerini geliştirmeleri gerektiğini göstermektedir. Bu nedenle, matematik eğitiminde, öğrencilere sadece sonuçları değil, aynı zamanda matematiksel kanıtların nasıl oluşturulduğunu ve doğrulandığını anlama ve uygulama fırsatları sağlanmalıdır.

Öğrencilerin çoğu fonksiyonlara ait alt kavramları olan görüntü kümesi, değer kümesi, birebirlik ve örtenlik gibi kavramları ifade ederken kafa karışıklığı yaşamışlardır. Özüdoğru 'nun (2006) yaptığı çalışmada öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kavramları tam olarak tanımlayamadıkları ve özellikle tanım kümesi ile değer kümesi kavramlarını karıştırdıkları tespit edilmiştir. Bu da çalışmamızda elde ettiğimiz bulgular ile örtüşmektedir. Genellikle görüntü kümesi tanımı ile örtenliğin tanımını birbirleri ile karıştırırken birebirliğin tanımı ile fonksiyonun tanımını karıştırmışlardır. Öğrencilerin hepsi ilk başta fonksiyonun birebir olma şartını kanıtın hangi aşamasında ve hangi işlem adımında kullanacağını bulamamışlardır. Öğrencilerden çok azı fonksiyonun birebir olma şartının kullanıldığı yeri ve gerekçesini açıklayabilmiştir. Bu öğrenciler Ö1, Ö7 ve Ö8'dir. Fakat Ö7 eşitliğin ilk kısmında da birebir fonksiyon olma şartını kullanmaları gerektiğini söyleyerek burada kafa karışıklığı yaşamıştır. Öğrenciler teoremde verilen fonksiyonun birebir olma şartını neden ve nasıl kullanacaklarını düşünmeden sadece kanıtı doğru sembolik dil kullanarak tamamlama eğilimi göstermişlerdir. Bunun sebebi öğrencilerin daha çok sembolik dile önem vermesi ve kavramları doğru bir şekilde anlamlandıramamasıdır.

Öğrencilerin zorlandığı bir diğer kavram ise eşitlik kavramını göstermek olmuştur. Öğrenciler eşit kavramını ancak ve ancak bağlacı gibi düşünerek hareket etmişlerdir. Matematiksel olarak bazı durumlarda bu mümkün olsa da bu teoremde eşitlik kavramını ancak ve ancak bağlacının yaptığı işlevde kullanamazlar. Çünkü kanıtın olabilmesi için eşitliğin ilk kısmında fonksiyonun birebir olması gerekmez iken ikinci kısımda fonksiyonun birebir olması gerekmektedir. Bu yüzden bu teoremde işlem doğrudan sağdan sola ve soldan sağa doğru yapılamaz. Bu da bu teoremde ancak ve ancak bağlacını kullanmayacağımızı göstermektedir.

Öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili sahip oldukları bilginin niteliğini incelemek, değerlendirmek ve açıklamak için farklı teorik yapılar kullanılabilir. Daha öncesinde de açıkladığımız gibi bu yapılar arasında işlemsel bilgi ve kavramsal bilgi düşünceleri bulunmaktadır (Hiebert & Lefevre, 1986). Bir Öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili bilgi düzeylerini anlamak ve açıklamak için başvurulabilecek bir başka teorik yapı, "kavram imajı" kavramıdır (Tall & Vinner, 1981). Çalışmamızda yer alan cK¢ teorisi bize öğrencilerin sahip olduğu bilgileri daha detaylı ve kapsamlı bir şekilde inceleme fırsatı vermiştir. Çalışmamızda; cK¢ teorisi bir kavrama ait anlayışları, öğrencinin sahip olduğu tüm düşünce sistemleri olarak tanımladığından kanıt şemaları belirlenirken daha fazla netlik sağlamıştır.

Öneriler

Araştırmanın sonucunda belirlenen anlayışlar çalışmaya katılan 8 ortaöğretim matematik öğretmen adayı ile sınırlı olduğundan daha fazla öğretmen adaylarıyla çalışmalar yürütülebilir. Çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına verilen fonksiyon kavramıyla ilgili iki teoremin uygulaması yaklaşık dört oturum sürmüştür. Yapılan çalışma genişletilerek daha fazla teorem veya soru ile gerçekleştirilebilir ve detaylı bir sonuç almak için uygulama süresi artırılabilir.

Literatür incelendiğinde özellikle ulusal alan yazında matematik eğitimiyle ilgili cK¢ teorisi ile yapılan oldukça az sayıda çalışma olduğu görülmüştür (Yazgan, 2006; Çalık Uzun, 2012; Uysal, 2019). Bu nedenle matematikte başka konu ve kavramlara yönelik çalışmalar yapılarak literatüre katkı sağlanabilir.

Nakiboğlu (2006), kavram yanılgılarının nedenlerini açıklarken öğretmenlerin konuya tam olarak hâkim olmamaları veya kendi içlerinde bulunan bazı kavram yanılgılarından kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Bu nedenle hizmet içinde çalışan öğretmenlerin matematik kavramlarıyla ilgili sahip oldukları anlayışlar öğretim süreci için çok önemlidir. Dolayısıyla benzer çalışma kurumlarda görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleriyle yürütülerek sahip oldukları anlayışlar incelenebilir ve böylelikle öğrencilerde oluşabilecek hatalı öğrenmeler ve kavram yanılgıları en aza indirilebilir.

Çalışmada, öğrenciler önceden sahip oldukları ve bazı problemlerde doğru sonuçlar veren bilgileri yeni karşılaştıkları sorularda yaptıkları işlem adımlarına aktarma eğilimleri göstermişlerdir. Bu durum onların hata yapmalarına ve kavram yanılgılarının oluşmasına neden olmaktadır. Matematiksel kavram yanılgısı, bir öğrencinin uzun süredir doğru olarak kabul ettiği, ancak aslında yanlış olan bir kavramı veya anlayışı ifade eder. Bu yanılgılar, matematiksel gerçeklerle çelişebilir ve öğrencinin doğru problem çözme becerilerini engelleyebilir (Erbaş ve diğerleri, 2010).

Pedemonte ve Balacheff (2016) yaptıkları çalışmada; öğrencilerin geometri dersinde problem çözme konusundaki kavramlarını belirlemek ve kanıtlamayla olan ilişkilerini analiz etmek için Toulmin'in modelini cK¢ ile zenginleştirerek yaptıkları etkinlikleri göstermişlerdir. cK¢ teorisi öğrencilerin sahip olduğu tüm bilmeleri detaylı bir şekilde analiz etmeye olanak sağladığı için fonksiyon kavramına ilişkin öğrencilerin sahip olduğu kanıt şemalarının belirlenmesini netleştirmiş ve kolaylaştırmıştır. cK¢ modeli ile başka öğretim teorileri veya modelleri entegre edilerek öğrencilerin farklı matematik kavramlarındaki anlayışları daha iyi analiz edilebilir. Ayrıca bu sayede öğrencilerin sahip oldukları doğru ya da hatalı tüm anlayışlar belirlenirken oluşmuş olan hatalı öğrenmeler ve kavram yanılgılarının giderilmesine yönelik uygulamalar yapılabilir.

Çalışmada öğrencilere sorulan iki teorem fonksiyon kavramına ait bazı alt kavramları içermektedir. Bu durum çalışma sırasında öğrencilerin sahip oldukları anlayışları ve bu anlayışlara ait operatörleri, gösterimleri ve kontrol yapılarını belirlerken zaman zaman zorluklar yaşanmasına sebep olmuştur. Balacheff (1995) anlayışın doğru bilgilerden, hatalardan ve engellerden kendi içinde oluşması için çevresi ile dinamik denge durumuna getiren tüm düşünce sistemidir şeklinde tanımlamıştır. Bu tanım anlayışın esnekliğini ve belirlenirken yaşanan zorlukları doğrular niteliktedir. Araştırmacılara, belli bir konu ya da kavrama özgü anlayışların tespit etmeleri için kullanmaları önerilmektedir. Çünkü böylece anlayışa ait operatörler, gösterimler ve kontrol yapıları bileşenlerinin belirlenmesi açısından daha anlaşılır olabilir ve daha fazla katkı sağlayabilir.

Kaynaklar

Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 111-129.

Ayyıldız, N. (2010). *6. sınıf matematik dersi geometriye merhaba ünitesine ilişkin kavram yanılgılarının giderilmesinde öğrenme günlüklerinin etkisinin incelenmesi* (Master's thesis, Sosyal Bilimler Enstitüsü). Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

Baki, A. 2006. Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi. 3. Basım. *İstanbul: Derya Kitabevi.*

Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique, Paris. *J. Vrin*.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In *Séminaire de l'équipe DidaTech, IMAG* (pp. 219-244). IMAG Grenoble.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216, 235.

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. Cahier Leibniz 65.

Balacheff, N. (2000). A modelling challenge: untangling learner knowledge. In *L'apprentissage, une approche transdisciplinaire (JIOSC 2000)* (pp. 7-16). Institut des Sciences Cognitives et de la Communication.

Balacheff, N. (2013). cK¢, A Model to Reason on Learners' Conceptions. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Balacheff, N. (2010). *Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective* (pp. 115-135). Springer US.

Balacheff, N. (2017). cK¢, a model to understand learners' understanding--Discussing the case of functions. *El calculo y su ensenanza*, *9*(Jul-Dic), 1-23.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2003). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In *XII° école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 1-32). La Pensée Sauvage éditions.

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü). Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Baştürk, S. (2007). Dönemin İlk Dersine Başlamada Farklı Bir Yaklaşım ve Türev Kavramıyla İlgili Öğrenci Kavramları.16. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, 5-7 Eylül Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Tokat-Türkiye, 102-107.

Bayazit, İ., & Aksoy, Y. (2013). Fonksiyon kavramı: epistemolojisi, algı türleri ve zihinsel gelişimi. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, *29*(1), 1-9.

Bingölbali, E., Arslan, S., Zembat, İ. Ö.(2016). Matematik eğitiminde teoriler. *Ankara*: *Pegem Akademi*.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. P. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, 41-63.

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in mathematics: *Didactique des Mathématiques, 1970-1990.* New York: Kluwer.

Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.

http://guy-brousseau. com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire_V5. pdf.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 129-147.

Cedran, D. P., & Kiouranis, N. M. M. (2019). Teoria dos campos conceituais: visitando seus principais fundamentos e perspectivas para o ensino de ciências. *Actio: docência em ciências*, *4*(1), 63-86.

Creswell, J. W.(2021). Nitel araştırma yöntemleri, beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni. *Ankara: Siyasal Kitapevi*.

Çalık Uzun, S. (2012). *Sınıf Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Anlayışlarının Ck¢ Teorisine Göre İncelenmesi* (Doktora tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

de Vittori, T. (2018). Histoire des mathématiques en classe: pour une analyse au niveau des conceptions des elèves. In *Espace Mathématique Francophone-EMF 2018*.

Dhombres, J. (1988). Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18è siècle. *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, *9*, 23-68.

Driver, R., & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*,*5*(1), 61-84

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Springer Netherlands.

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B., & Ersoy, Y. (2010). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, *34*(152).

Erdoğan, A., & Erdoğan, E. (2013). Didaktik durumlar teorisi ışığında ilköğretim öğrencilerine matematiksel süreçlerin yaşatılması. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(1), 17-34.

Graeber, A., & Johnson, M. (Eds.) (1991). *Insights into secondary school students' understanding of mathematics*. College Park, University of Maryland, MD

Gür, B. S. (2004). Matematik felsefesi. *Kadim Yayınları*.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1), 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

Heibert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. J *Research in Mathematics Education*, *21*(1), 33–46.

Karaçay, T.(2016). Soyut matematik akıl yürütmenin başlangıcı. *Ankara: Seçkin Yayıncılık*.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282-300.

Knapp, J. E. S. S. I. C. A. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. *Retrieved February*, *29*, 2020.

Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 20-35.

Kuncar, H. N., & Breigheith, M. (2002). Misconceptions in mathematics. In *Mathematics and Mathematics Education* (pp. 122-134).

LE, I. (2018). Duo d’artefacts numerique et materiel pour l’apprentissage de la geometrie au cycle 3. *Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques (version provisoire-prépublication)*, 53.

Maracci, M. (2003). Difficulties in vector space theory: a compared analysis in terms of conceptions and tacit models. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 229-236.

Miyakava, T. (2004). Reflective symmetry in construction and proving. *Proceedings Of The 28th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*, *3*, 337–344.

Murillo, R. E. P., & Vivier, L. (2013). Teachers’ conceptions of tangent line. *The journal of mathematical behavior*, *32*(2), 209-229.

Nakiboğlu, C. (2006). Fen ve teknoloji öğretiminde yanlış kavramalar*. Fen ve teknoloji öğretimi*, 191-217.

Nasibov, F. & Kaçar, A. (2005). Matematik ve Matematik Eğitimi Hakkında, Kastamonu Eğitim Dergisi 339-346, Cilt:13 No:2.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Teaching Standards for School Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Teaching Standards for School Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, D. P. (2011). *Teaching for understanding: What it is and how to do it*. Routledge.

Otero, M. R., Arlego, M. J. F., & Prodanoff, F. (2015). Teaching the basic concepts of the Special Relativity in the secondary school in the framework of the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud. *Il Nuovo Cimento*, *38*.

Özmen, H. & Karamustafaoğlu, O. (2019). Eğitimde Araştırma Yöntemleri. *Ankara*: *Pegem Akademi.*

Özüdoğru, M. (2006). The perceptions of students about the concept of function. *Journal of Theory and Practice in Education*, *12*(4), 909-927.

Patton, M.Q. (2018). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. *Ankara: Pegem Akademi*.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 104-122.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23-41.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et demonstration. *Recherche en didactique des mathématiques*, *25*(3), 313–348.

Polat, Z. S., Şahiner, Y. (2007). Bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. *Eğitim ve Bilim*, *32* (146), 89-95.

Ponte, J. P. D. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8.

Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of functions: Summary and overview. G. Harel ve Ed. Dubinsky (Eds.), *The concept of function aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 1-16). United States of America: Mathematical Association of America.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational studies in mathematics*, *29*(2), 123-151.

Selden, A. & Selden, J. (1999). The role of logic in the validation of mathematical proofs. Technical Report. No. 1999-1. *Online Submission*.

Senemoğlu, N. (2007). Gelişim öğrenme ve öğretim kuramdan uygulamaya. *Ankara*: *Gazi Kitabevi*.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 23-58.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Umay, A. (1996). Matematik öğretimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi Sayı*, *12*(12), 145-149.

Uysal, R. (2019). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir alanındaki argümantasyon ve* kanıt *süreçleri arasındaki ilişkinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167-181.

Vergnaud, G. (2007). ¿ En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?. *Investigações em ensino de ciências*, *12*(2), 285-302.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2), 83-94.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels?. *Journal for the Study of Education and Development*, *36*(2), 131-161.

Vergnaud, G. (2013). Conceptual development and learning. *Revista Qurriculum*, *26*, 39-59

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Weber, K. & Alcock, L.J. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, *56*, 209–234.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational studies in mathematics*, *48*, 101–119.

Weber, K. (2003). A Procedural Route toward Understanding the Concept of Proof. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 395-401.

Yazgan, G. (2006). *cK¢ Modeline Göre 10. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Yer Kavramına İlişkin Kavramaları Üzerine Bir Araştırma* (Yayımlanmamış Yüksek lisans tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences*, 37-85.

Zembat, İ. Ö. (2015a). Sayıların farklı algılanması – Sorun sayılarda mı, öğrencilerde mi, yoksa öğretmenlerde mi?. M. F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (s. 41-60). *Ankara: Pegem Akademi.*

Ekler

Ek 1. Belirlenen Operatörler

R_1: Ancak ve ancak önermesinde önce sol tarafı kabul edip sağ tarafın doğruluğu gösterilirken sonra sağ tarafın doğruluğu kabul edilip sol tarafın doğruluğu gösterilir.

R_2: $f: A \to B$ olsun $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyor ise f birebir fonksiyondur.

R_3:$f: A \to B$'ye tanımlı bir fonksiyon ise $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ dir.

R_4: $f: A \to B$ f fonksiyonu A kümesinde tanımlı olduğu için A 'nın tüm alt kümelerinden aldığım elemanlar içinde f' in birebir fonksiyon olma koşulunu sağlar.

R_5: Eşitliğin olması için eşitliğin sağının ve solunun birbirini kapsaması gerekir yani $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ ise $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ ve $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ olmalıdır. $y \in f(C \cap D) \Rightarrow y \in f(C) \cap f(D)$ o zaman $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ dır. $y \in f(C) \cap f(D)$ $\Rightarrow y \in f(C \cap D)$ o zaman $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ dır.

$R^{-}{}_6$: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve $\forall$ C, D $\subset$ A için $C \cap D \in A$ ise $f(C \cap D) \in B$ olur.

R_7: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve $\forall$ C, D $\subset$ A için $y \in f(C \cap D)$ ise $\exists\, x \in C \cap D$ vardır ve $f(x) = y$ ile gösterilir.

$R^{-}{}_8$: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon örten ise her $y \in f(C \cap D)$ ise $\exists\, x$ vardır ki $x \in C \cap D$ ve $f(x) = y$'dir.

R_9: Fonksiyonun tanım kümesinde boşta eleman kalamaz ama f'nin değer kümesinde boşta elaman kalabilir.

R_{10}: Birebir ve örten olan bir fonksiyonun tersi vardır.

R_{11}: $x \in C \cap D \Leftrightarrow x \in C \wedge x \in D$ dedir. Ve $f(x) = y$ olduğundan $x \in C \wedge x \in D \Leftrightarrow [f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)]$ dir. Ve $[f(x) \in f(C)] \wedge [f(x) \in f(D)] \Leftrightarrow f(x) \in [f(C) \cap f(D)]$'dir.

R_{12}: f: A→ B, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyor ise f birebir fonksiyondur.

R_{13}: Elemanı olan küme boş küme değildir.

R_{14}: Boş küme her kümenin alt kümesidir.

R_{15}: $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere A'daki elemanın B'de bir elemana karşılık gelmesi gerekir. Ve boş kümenin görüntüsü boştur yani $f(\emptyset) = \emptyset$ dir.

$R^-{}_{16}$: Eşitlik gösterilirken gerek ve yeter koşulun (ancak ve ancak) sağlanması gerekir.

R_{17}: C ve D kümelerin ikisi de tek nokta kümesi olsun ve bunlar $\{x_1\}$ ve $\{x_2\}$ dir.

R_{18}: Birbirinden farklı C ve D tek nokta kümelerinin kesişimleri boş kümedir, yani $C \cap D = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ dir.

R_{19}: Ara kesitleri boş küme olan kümeler birbirinden farklıdır.

R_{20}: $C \cap D = \{x_1\}$, $C \cap D \backslash \{x_1\} = \{x_2\}$ olsun $x_1 \neq x_2$ dir.

$R^-{}_{21}$: $f: A \rightarrow B$'ye tanımlı bir fonksiyon için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ise f birebir fonksiyondur.

$R^-{}_{22}$: $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$bir fonksiyon için $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ oluyor ise f birebir fonksiyondur.

$R^-{}_{23}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ise $f(x_1), f(x_2)$ eşittir $f(C \cap D)$ dir. Ve $x_1, x_2 \in C$ ve $x_1, x_2 \in D$ o zaman $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(C)$, $f(x_1)\ ve\ f(x_2)$ eşittir $f(D)$ dir.

$R^-{}_{24}$: $x_1, x_2 \in C \cap D$ ve bu elemanlar sıralı ikilidir.

$R^-{}_{25}$: $x_1 \in C \wedge x_1 \notin D\ veya\ x_1 \in D \wedge x_1 \notin C$ ise $C \cap D = \emptyset$ olur.

$R^{-}{}_{26}$: $[\forall\, x_2 \in C\ \wedge \forall\, x_2 \notin D] \wedge [\forall\, x_3 \in D \wedge \forall\, x_3 \notin C]$ ise $C \cap D$'nin tümleyenidir.

R_{27}: $f: A \to B$ ye tanımlı fonksiyon ve $\forall\, C, D \subset A$ için $C \cap D \subset A$ ise $f(C \cap D) \subset B$ olur.

R_{28}: f: $A \to B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ 'nin doğru $f(x_1) = f(x_2)$'nin olduğunu kabul edip çelişki oluşturulursa çelişkiyle kanıttır.

R_{29}: 1 ise 0 önermesinin sonucu 0'dır.

R_{30}: Kesişimi boş küme olan C ve D kümeleri ayrık kümedir.

R_{31}: $f: A \to B$, $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$'nin doğru olduğunu kabul edip $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$ doğruluğu gösterilirse doğrudan kanıttır.

R_{32}: Bir fonksiyonun tersi var ise tersi de fonksiyon olma koşullarını sağlar.

R_{33}: A ve B kümeleri için $f: A \to B$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f birebir ve örten ise o zaman $f^{-1}: B \to A$ fonksiyonu f'nin tersidir.

R_{34}: B ve C kümeleri için g: $B \to C$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer g birebir ve örten ise o zaman $g^{-1}: C \to B$ fonksiyonu g'nin tersidir.

R_{35}: $f: A \to B$, $y = f(x)$ve g: $B \to C$, $y = g(x)$ise $g\,of: A \to C$ fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $(gof)(x) = g(f(x))$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bileşke fonksiyon denir.

R_{36}: $g\,of: A \to C$ bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in A$ için $(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyor ise gof birebir fonksiyondur.

R_{37}: g: $B \to C$, $y = g(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $g\,(x_1) = g\,(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$oluyor ise g birebir fonksiyondur.

R_{38}: f: A→ B bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde $\exists\, a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman f bir örten fonksiyondur.

R_{39}: g: $B \to C$, bir fonksiyon olmak üzere $\forall\, c \in C$ için $c = g(b)$ olacak şekilde $\exists\, b \in B$ bulunabiliyorsa o zaman g bir örten fonksiyondur.

R_{40}: $g\,of: A \rightarrow C$ bir fonksiyon ise $\forall\, c\ \in C$ için $c = (gof)(a)$ olacak şekilde $\exists\ a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman ise gof bir örten fonksiyondur.

$R^{-}{}_{41}$: $g\ o\ f$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olduğu için eşitliğin her iki tarafı da $g\ o\ f$ bileşke fonksiyonu ile bileşkesi alınır.

R_{42}: Birim fonksiyonda tanım kümesinden alınan her elemanın görüntüsü kendisine eşittir.

R_{43}: Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim (özdeşlik) fonksiyonudur.

R_{44}: $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$'dir.

R_{45}: $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ ve g: $B \rightarrow C$, $y = g(x)$ ise $g\,of: A \rightarrow C$ fonksiyon olsun. Eğer $g\,of$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten ise o zaman $(gof)^{-1}: C \rightarrow A$ fonksiyonu $g\,of$ bileşke fonksiyonunun tersidir.

R_{46}: $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_C$ tir ve $g^{-1}: C \rightarrow B$ ye tanımlanan g^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan C'den alınan eleman yine C kümesinde görüntü oluşturur.

R_{47}: $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ ve g: $B \rightarrow C$, $y = g(x)$ ise $g\,of: A \rightarrow C$ olan bileşke fonksiyonlarının birleşme özelliği vardır.

R_{48}: $fof^{-1} = I_B$ dir ve $f^{-1}: B \rightarrow A$ ya tanımlanan f^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan B'den alınan eleman yine B kümesinde görüntü oluşturur.

R_{49}: $gog^{-1} = I_C$ tir ve $g^{-1}: C \rightarrow B$'ye tanımlanan g^{-1} fonksiyonun tanım kümesi olan C'den alınan eleman yine C kümesinde görüntü oluşturur.

R_{50}: $(f^{-1}\,\mathrm{o}\,g^{-1})\ o(gof) = I_A$ dır ve $f: A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonun tanım kümesi olan A'dan alınan eleman yine A kümesinde görüntü oluşturur.

R_{51}: $(g^{-1}\ o\ g) = I_B$ dir ve g: $B \rightarrow C$'ye tanımlanan g fonksiyonun tanım kümesi olan B'den alınan eleman yine B kümesinde görüntü oluşturur.

R_{52}: $f^{-1}of = I_A$ dır ve $f: A \to B$ tanımlanan f fonksiyonun tanım kümesi olan A'dan alınan eleman yine A kümesinde görüntü oluşturur.

R_{53}: Bir fonksiyonun tanım kümesinde açıkta eleman kalamaz.

$R^-{}_{54}$: Bir fonksiyon örten ise görüntü kümesinde açıkta eleman olamaz.

R_{55}: Eşitliğin her iki tarafına da aynı işlemi uygularsam eşitlik bozulmaz.

$R^-{}_{56}$: $f: A \to B$, $y = f(x)$ve $g: B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\ of: A \to C$ fonksiyon olsun. Eğer $g\ of$ bileşke fonksiyonu birebir ve örten ise o zaman $(gof)^{-1}: C \to A$'dır ve $x \in C$, $y \in A$ için $g\ of(x) = y$ olup $(gof)^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y)\ og^{-1}(y) = x'$dir.

R_{57}: $g\ of: A \to C$ bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (gof)(x_1) \neq (gof)(x_2)$ ise gof birebir fonksiyondur.

R_{58}: g: $B \to C$, $y = g(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in B$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g\ (x_2)$ oluyor ise g birebir fonksiyondur.

R_{59}: f: $A \to B$ ve $f^{-1}: B \to A$ fonksiyonları için $x \in A$, $y \in B$ için $f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ dır. Bu sebeple $x \in A$ ve $y \in B$ için $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x))$= $f^{-1}(y) = x$ ve $f\mathrm{o}f^{-1}(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y$ elde edilir.

R_{60}: g: $B \to C$ ve $g^{-1}: C \to B$ fonksiyonları için $x \in B$, $y \in C$ için $g(x) = y$ ise $g^{-1}(y) = x$ dır. Bu sebeple $x \in B$ ve $y \in C$ için $g^{-1}og(x) = g^{-1}(f(x))$= $g^{-1}(y) = x$ ve $g\mathrm{o}g^{-1}(y) = g\big(g^{-1}(y)\big) = g(x) = y$ elde edilir.

R_{61}: Tersi olan fonksiyonların yalnızca bir tane tersi vardır.

R_{62}: Bir fonksiyon örten ise görüntü kümesi değer kümesine eşittir.

R_{63}: f: $A \to B$ bir fonksiyon örten ise $f(A) = B$ dir.

R_{64}: g: $B \to C$ bir fonksiyon örten ise $g(B) = C$ dir.

R_{65}: f: $A \to B$, $y = f(x)$ ve g: $B \to C$, $y = g(x)$ ise $g\ of: A \to C$ bir fonksiyon örten ise $g\ of(A) = C$ dir.

R^{-}_{66}: Bileşke fonksiyonunun yer değiştirme özelliği vardır.

EK-A: Araştırma Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu/ Araştırma Etik Komisyonu Onay Bildirimi

Tarih: 16/05/2023 12:52
Sayı: E-35853172-600-00002846756
00002846756

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Rektörlük

Sayı : E-35853172-600-00002846756 16.05.2023
Konu : Merve KAZANCI GEZİCİ Hk. (Etik Komisyon İzni)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 05.04.2023 tarihli ve E-51944218-600-00002784974 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi tezli yüksek lisans programı öğrencisi **Merve KAZANCI GEZİCİ**'nin **Dr. Öğr. Üyesi Meltem SARI UZUN** danışmanlığında yürüttüğü **"Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyon Anlayışlarının cK¢ Teorisi Bağlamında Kanıt Şemaları ile İncelenmesi"** başlıklı tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **25 Nisan 2023** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Sibel AKSU YILDIRIM
Rektör Yardımcısı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu: AB1FAF10-CD00-404F-9662-C29F311AEA2A Belge Doğrulama Adresi: https://www.turkiye.gov.tr/hu-ebys

Adres: Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara
E-posta:yazimd@hacettepe.edu.tr İnternet Adresi: www.hacettepe.edu.tr Elektronik Ağ: www.hacettepe.edu.tr
Telefon: 0 (312) 305 3001-3002 Faks:0 (312) 311 9992
Kep: hacettepeuniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Duygu Didem İLERİ
Bilgisayar İşletmeni
Telefon: .

EK-B: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

* tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
* görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
* başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
* atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
* kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
* bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…..…/……/…….

(İmza)

Ad SOYADI

EK-C: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu

31/05/2024

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı: Matematik Öğretmen Adaylarının cK¢ Teorisi Bağlamındaki Fonksiyon Anlayışlarının Kanıt Şemaları İle İncelenmesi

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
31/05 /2024	217	311884	27/05 /2024	% 9	2392402721

Uygulanan filtreler:
1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı: Merve KAZANCI

Öğrenci No.: N20137283

Ana Bilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi — İmza

Programı: Matematik Eğitimi

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

(Unvan, Ad Soyadı, İmza)

EK-Ç: Thesis/Dissertation Originality Report

31/05/2024

HACETTEPE UNIVERSITY
Graduate School of Educational Sciences
To The Department of Mathematics and Science Education

Thesis Title: *Investigation Of Preservice Mathematics Teachers' Conceptions Of Function In The Context Of cK¢ Theory With Proof Schemes*

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
31/05 /2024	217	311884	27/05 /2024	% 9	2392402721

Filtering options applied:
1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname: Merve KAZANCI

Student No.: N20137283 Signature

Department: Mathematics and Science Education

Program: Mathematics Education

Status: ☒ Masters ☐ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.

ADVISOR APPROVAL

APPROVED
(Title, Name Lastname, Signature)

EK-D: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım haklan bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına ilişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü/ Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)
- o Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren … ay ertelenmiştir. (2)
- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

……… /……… /………

(imza)

Öğrencinin Adı SOYADI

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü Üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.

(2) Madde 6.2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3.şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

(3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü Üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir

**Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.*