HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

CEBİRSEL DÜŞÜNME KAPSAMINDA ÖĞRETİM PROGRAMLARININ KARŞILAŞTIRMASI: TÜRKİYE, SİNGAPUR, İNGİLTERE VE KANADA ÖRNEKLERİ

Zeynep GÜRSOY

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2024

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

CEBİRSEL DÜŞÜNME KAPSAMINDA ÖĞRETİM PROGRAMLARININ KARŞILAŞTIRMASI: TÜRKİYE, SİNGAPUR, İNGİLTERE VE KANADA ÖRNEKLERİ

COMPARISONS OF CURRICULUMS IN TERMS OF ALGEBRAIC THINKING: THE CASES OF TURKIYE, SINGAPORE, ENGLAND, CANADA

Zeynep GÜRSOY

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2024

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Zeynep GÜRSOY'un hazırladığı "Cebirsel Düşünme Kapsamında Öğretim Programlarının Karşılaştırması: Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada Örnekleri" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Doç. Dr. Mesture KAYHAN ALTAY	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Doç. Dr. Zeynep Sonay AY	İmza
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Işıl İŞLER BAYKAL	İmza

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 10 / 06 / 2024 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Hakkı MİRİCİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Bu araştırmada Türkiye'de 2018-2019 eğitim öğretim yılından beri uygulanmakta olan Matematik Dersi Öğretim Programı ile Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) matematik dersi öğretim programlarını cebir öğrenme alanı ve cebirsel düşünme açısından karşılaştırarak benzerlik ve farklılıklarını ortaya çıkarılmıştır. Uluslararası düzeyde geçerli TIMSS ve PISA değerlendirmelerinde Türkiye'ye kıyasla daha yüksek ortalama ölçek puanlarına sahip olmaları ve farklı kıtalarda bulunmaları sebebiyle Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) ülkelerinde uygulanan matematik dersi öğretim programları veri kaynakları olarak ele alınmıştır. Ülkelerin, 5-8. sınıfa karşılık gelen sınıf düzeylerindeki cebir öğrenme alanı, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri bileşenleriyle birlikte kavramlar ve süreç çeşitlerine göre üç farklı boyutta doküman analizi yöntemiyle incelenmiştir. Cebir öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları ve kazanımlar arasındaki benzerlik ve farklılıklar yatay bir karşılaştırma ile ortaya konulmuştur. Karşılaştırma sonucunda Kanada (Ontario) öğretim programında, cebirsel düşünmeye yönelik incelenen kazanımların genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dillerine dair içeriğinin dengeli olduğu görülmüştür. Çeşitli cebir kavramların her sınıf düzeyinde ve uygun şekilde verilmesi, farklı süreçleri desteklemesi, ifadelerin daha kapsayıcı ve kazanımlara yönelik rehber açıklamalar ile örnek uygulamaların detaylı olduğu görülmüştür. Elde edilen verilerin gelecekteki öğretim programı inceleme ve geliştirme çalışmalarında, uzmanlara ve araştırmacılara cebirsel düşünme ve cebir öğrenme alanı için kaynak oluşturması beklenmektedir.

Anahtar Kelimler: Cebir, cebir öğrenme alanı, cebirsel düşünme, ön cebir, matematik dersi öğretim programı, karşılaştırmalı eğitim.

Abstract

In this study, similarities and differences were revealed by comparing the Mathematics Curriculum, which has been implemented in Turkey since the 2018-2019 academic year, with the mathematics curricula of Singapore, England and Canada (Ontario) in terms of algebra learning domain and algebraic thinking. The curriculums implemented in Singapore, England and Canada (Ontario) were taken as data sources since they have higher average scale scores than Turkey in internationally valid TIMSS and PISA assessments and are located on different continents. The algebra learning domain at the grade levels corresponding to grades 5-8 in the countries were examined by document analysis method in three different dimensions according to the concepts and process types together with the generalized arithmetic, functional thinking and modeling languages components of algebraic thinking. The similarities and differences between the sub-learning areas and outcomes of the algebra learning domain were revealed through a horizontal comparison. As a result of the comparison, it was seen that the content of objectives examined for algebraic thinking in Canadian (Ontario) curriculum was balanced in terms of generalized arithmetic, functional thinking and modeling languages. It was observed that various algebraic concepts were given at each grade level and properly, that they supported different processes, the expressions were more inclusive, and the guiding explanations and sample applications for the outcomes were detailed. It is expected that the data obtained will serve as a resource for experts and researchers for algebraic thinking and algebra learning domain in future curriculum review and development studies.

Keywords: Algebra, algebra learning domain, algebraic thinking, pre-algebra, mathematics curriculum, comparative education.

Teşekkür

Danışmanım olmayı kabul ederek bana sabırla rehberlik eden ve her aşamada desteğini hissettiren değerli danışmanım Doç. Dr. Zeynep Sonay AY başta olmak üzere, Doç. Dr. Mesture KAYHAN ALTAY'a ve kıymetli katkılarıyla bana ilham olan Dr. Öğr. Üyesi Işıl İŞLER BAYKAL'a ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her süreçte sevgi dolu kucaklamalarıyla bana güç veren oğlum Kerem'e ve kızım İnci'ye, desteğini esirgemeyen sevgili eşime, benim için her duasında zihin açıklığı dileyen babama, maddi ve manevi tüm desteği için anneme çok teşekkür ederim.

Sonu olmayan bu yola çıkabilmemde bana cesaret veren arkadaşım Gamze'ye de ayrıca teşekkür ederim. Beni bu yolculukta destekleyen, cesaretlendiren ve yanımda olan tüm dostlarıma ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Hepinizin desteği benim için çok kıymetliydi.

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar

DOE: İngiltere Eğitim Departmanı

İMÖP: İngiltere Matematik dersi Öğretim Programı

KMÖP: Kanada (Ontario Eyaleti) Matematik Dersi Öğretim Programı

MDÖP: Matematik Dersi Öğretim Programı

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

NCTM: Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)

OECD: Ekonomik İşbirliği ve Gelişme Örgütü (Organisation of Economical Co-operation and Development)

OMOE: Ontario Eyaleti (Kanada) Eğitim Bakanlığı

PISA: Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assessment)

SMOE: Singapur Eğitim Bakanlığı

SMÖP: Singapur Matematik Dersi Öğretim Programı

TIMSS: Uluslararası Matematik ve Fen Çalışmasındaki Eğilimler (Trends in International Mathematics and Science Study)

TMÖP: Türkiye Matematik Dersi Öğretim Programı

Bölüm 1

Giriş

Problem Durumu

Matematik, sayılar ve işlemler arasındaki ilişkilerin ve düzenlerin ortaya çıkarıldığı, semboller, şekiller ve örüntülerden oluşan bir bütündür; cebir ise harfleri ve sembolleri kullanarak bu bütünü temsil etmek için kullanılan bir araçtır (Kieran, 1992). Matematiğin kendine has ve evrensel olan dili, okul matematiğinde aritmetikle başlarken, somuttan soyuta doğru öğrencilerin bilişsel gelişimine göre şekillenen matematik öğrenme süreci, cebir kavramının dahil olmasıyla birçok öğrenci için aniden sembollerin dünyasına girmek ve matematiğin soyut yüzüyle karşılaşmak zorunda kalmaları demektir (Mason, 2008). Bu zorluk sebebiyle matematiksel kavramların kazandırılması, somut ve sonlu yaşam modellerinden yola çıkılarak öğrencilerin bilgiyi yapılandırabileceği bir sistematiğe ihtiyaç duymaktadır. Bu ihtiyaç ise diğer alanlarda da olduğu gibi matematik öğretim programlarını mecburi hale getirmektedir (Dikkartın Övez 2012; TTKB, 2005). Matematik eğitiminde kavramsal bilgiye ve anlamaya dikkat çeken öğretim programında, matematik kavramlarının gelişimi için matematiksel düşüncenin gelişiminin de önemli olduğuna değinilmiştir (TTKB, 2008). "Matematiksel düşünme; aritmetiksel düşünme, geometrik düşünme, cebirsel düşünme gibi düşünme çeşitlerini kapsamaktadır." (Türkoğlu, 2017, s.6).

Cebir kavramının tarihsel gelişiminde birçok kişi tarafından farklı tanımları yapılmış ve cebirin farklı alanlarda kullanılan, farklı görevleri gerçekleştirmek için kullanılsa da temelde somut kavramları soyutlaştırmaya, yani gerçek dünyadaki kavramları matematik dünyasına aktarmaya yarayan ve sayısal ilişkiler ile bunların arasındaki değişimleri kendine has sembolik dille ifade eden bir araç olduğu ifade edilmiştir (Kaput, 2008). Cebir kavramının temeli okul cebirinden çok önce başlamakta ve matematiksel durumlar arasındaki aritmetik ilişkileri analiz edebilmeyi sağlayan cebirsel düşünme, işlemler ve sayılar arasındaki ilişkileri, manipülasyonları ve gösterimler arasında dönüşümler yapılmasını, tahmin etme ve doğrulama gibi süreçleri ve akıl yürütme gibi matematiksel muhakeme becerilerini içeren düşünme sürecidir (Kieran, 2004; Kaf, 2007; Baki ve Bütüner, 2011). O halde matematiksel düşünmenin en önemli bileşenlerinden birinin cebirsel düşünme olduğu anlaşılmakta olup, cebirsel düşünmeye zemin hazırlayan en önemli bileşenin de aritmetiksel düşünme olduğu çıkarımına varılabilir. Özellikle cebir öncesi dönemde örüntüler (desenler) ve ilişkiler, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik olarak da adlandırılan ilişkisel düşünme boyutuna köprü vazifesi görebilir. Cebirsel düşünme sürecinin gelişimi incelendiğinde karşımıza Driscoll (1999) tarafından teorik olarak ortaya konulan ve zihnin matematiksel alışkanlıklarının alt boyutlarından biri olan, zihnin cebirsel alışkanlıkları çıkmaktadır. Belirli düşünme biçimleri alışkanlık haline getirildiğinde öğrenciler cebirle ilgili bazı öğrenme çıktılarına yönlendirilirler ve bu da öğrencilerin matematik problemleriyle karşılaştıkları zaman belirli düşünce kalıplarını uygulama alışkanlığı kazanmalarını sağlar. Zihnin cebirsel alışkanlıklarının oluşturulması ve geliştirilmesiyle cebirsel düşünme gelişecek ve böylece matematiğin öğrenciler açısından zor olarak algılanan (Dede ve Argün, 2003) cebir, öğrenciler için aşılması kolay bir zorluk olacaktır (Kaput, 2000).

Matematiğin örüntüleri ve ilişkileri kapsayan bir bilim olması cebirsel düşünmeyi ve cebir öğretimini önemli ve ayrıcalıklı kılmaktadır. Uluslararası geçerliği olan 4. sınıf ve 8. sınıf seviyelerindeki öğrencilerden oluşan ülke örneklemlerini değerlendiren TIMSS ve 15 yaşındaki öğrencilerden oluşan ülke örneklemlerini değerlendiren PISA değerlendirmelerinin sorularının öğrenme alanları bazında dağılımı TIMSS için %30 Sayılar, %30 Cebir, %20 Geometri ve %20 Veri ve Olasılık öğrenme alanları olurken ayrıca cebir öğrenme alanını kendi içerisinde konu alanlarına ayrıldığında %20'si ifadeler, işlemler ve denklemlerden oluşurken; %10'u ise ilişkiler ve fonksiyonlardan oluşmaktadır (MEB, 2020). Matematik yeterlik düzeyleri incelendiğinde TIMSS için, yalnızca üst düzeydeki öğrencilerin cebirsel ifadeler ve fonksiyonlara ilişkin temel bilgilerini kullanabilme yeterlikleri, ileri seviye öğrenciler için ise “akıl yürütme becerilerini kullanarak doğrusal denklemleri çözebilme ve genelleme yapabilme” becerilerinin yanı sıra “doğrusal fonksiyonları ve cebirsel ifadeleri anlayabilme” yeterlikleri vurgulanmıştır (MEB, 2020). Millî Eğitim Bakanlığı tarafından 2020 yılında yayımlanan TIMSS ön raporuna göre, Türkiye’den sekizinci sınıf matematik değerlendirmesine katılan örneklemdeki öğrencilerin, cebirdeki ortalama ölçek puanı, ortalama matematik ölçek puanının altında kalmıştır. Ortalama matematik ölçek puanıyla birinci sıraya yerleşen Singapur örneklemindeki öğrencilerin cebir ortalama ölçek puanı, matematik ortalamasının üstündedir. Uluslararası değerlendirmelerdeki ölçek puanlarıyla ilk sıralarda yer alan Singapur’un matematik öğretim programı, matematik eğitimcileri ve araştırmacıları tarafından merak konusu olmaktadır. Türkiye’nin 20. sırada yer aldığı bu sonuç listesinde OECD ülkelerinden biri olan İngiltere 13. sırada bulunmakta olup cebir ortalama ölçek puanı, matematik ortalama ölçek puanına göre önemsenecek düzeyde düşüktür. OECD’ye üye olan diğer bir ülke olarak Kanada 2019 TIMSS uygulamasına sekizinci sınıf örneklemiyle dahil olmamıştır. 2018 yılında uygulanmış olan PISA değerlendirmesinin ön raporunda (MEB, 2019) Kanada matematik alanı performansında 12. sırada yer alırken, Singapur 2. sırada, İngiltere (Birleşik Krallık) 18. sırada, Türkiye ise 42. sıradadır.

Tablo 1

Ülkelerin TIMSS 2019 8. sınıflar düzeyinde matematik ölçek puanları ve cebir puanları

	Ortalama Matematik Ölçek Puanı	Cebir Ölçek Puanı
Singapur	616	619
İngiltere	515	504
Türkiye	496	493
Kanada*	-	-

*Kanada TIMSS 2019 verileri, 8. sınıf düzeyinde uygulamaya katılmadığı için, mevcut değildir.

Farklı yıllarda uygulanmış olan 2011, 2015, 2019 TIMSS değerlendirmeleri raporlarında Türkiye için matematik alanı 8. sınıf verileri karşılaştırıldığında alt düzey ve alt düzey altı öğrenci oranında düşüş olurken, orta düzey ve üst düzey öğrenci oranları artmıştır (MEB, 2020). 2019 TIMSS matematik alanı Türkiye 8. sınıf örneklemi verilerine göre öğrenciler Veri ve Olasılık öğrenme alanında başarılı olurken, Cebir ve Geometri öğrenme alanlarında düşük performans göstermişlerdir.

2018 yılında uygulanmış olan PISA değerlendirmesi Türkiye ön raporu MEB tarafından (MEB, 2019) hazırlanmıştır. Raporda matematik okuryazarlığı kapsamında olan matematik alanı için matematiksel süreçler ve temel matematik yetenekleri, matematiksel içerik alanları ve gerçek yaşam bağlamları olmak üzere üç farklı boyut tanımlanmıştır (MEB, 2019). Matematiksel içerik alanları boyutunu oluşturan soru dağılımının %25'i cebir öğrenme alanının kapsadığı ve cebirsel düşünme için de önemli bir konu olan "Değişim ve İlişkiler"den oluşmaktadır. Matematik alan performansında Türkiye 454 puan ortalamasıyla OECD ülkeleri arasında 33. sırada iken genel ülke sıralamasında 42. sıradadır. Tablo 2'de seçilen bazı ülkelerin matematik alanındaki performansları verilmiştir. 2018 PISA'da Türkiye'nin ortalama matematik puanı ve performansı önceki yıllarda gösterilen matematik performanslarına göre artmıştır (MEB, 2019). 2018 PISA ön raporunda, 2019 TIMSS'deki gibi matematik alanının boyutları ayrıca değerlendirilmemiştir.

Tablo 2

Bazı Ülkelerin PISA 2018 ve 2022 Matematik Alan Performansları ve Puanları

	Ülke Sıralaması	OECD Ülkeleri Arasındaki Sıralaması	Puan ortalaması
	2018/2022	2018/2022	2018/2022
Singapur	2/1	-	569/575
Kanada	12/9	17/5	512/497
İngiltere (UK)	18/14	13/10	502/489
Türkiye	42/39	33/32	454/453

Uluslararası değerlendirmelerde sıralama olarak Türkiye'nin önünde olan ülkelerin matematik dersi öğretim programları ile ülkemizde uygulanmakta olan programın benzerlikleri ve farklılıklarını tespit etmek ve eleştirel bir bakış açısıyla değerlendirmek amacıyla birçok araştırma yapılmıştır (Gürses, 2022; Kaytan, 2007; Bacakoğlu, 2022; Bütüner ve Güler, 2017). Yukarıda bahsi geçen ve farklı kıtalarda yer alan üç ülkenin ve Türkiye'de 2018-2019 eğitim öğretim yılından beri uygulanmakta olan matematik dersi öğretim programının cebir öğrenme alanı ve cebirsel düşünme boyutları bağlamında karşılaştırıldığı bir eğitim araştırması tespit edilmemiştir.

Karşılaştırmalı eğitim araştırmaları farklı ülkelerde, benzer veya farklı kültürlere sahip olan veya farklı eğitim felsefelerini temel alan çeşitli toplumlarda, bölgelerde, tarihi dönemlerde uygulanmış veya uygulanmakta olan eğitim sistemlerini veya eğitime etki eden faktörleri bütün olarak ya da eğitim sistemlerinin bileşenlerini oluşturan ögeleri karşılaştırarak benzer veya farklı yönlerini tespit ederek incelemeyi sağlar (Ergün, 1985). Uluslararası değerlendirmelerle elde edilen veriler aracılığıyla, eğitim sistemlerinde reform ya da güncelleme yapacakları zaman farklı ülkelerin eğitim sistemlerini ve sistemlerin bileşenlerini karşılaştırmalı olarak inceleyip, sorunları ele alırken geniş çaplı çözümler üretebilmektedirler (Ergün, 1985).

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada'da (Ontario Eyaleti) uygulanmakta olan matematik dersi öğretim programlarının, cebirsel düşünme kapsamında Türkiye'de okutulan 5, 6, 7 ve 8. sınıflar ile eşdeğer olan sınıf düzeyleri cebir kazanımlarının doküman analizi yöntemi kullanılarak elde edilecek veriler ile karşılaştırıp, benzerliklerini ve farklılıklarını ortaya çıkarmaktır. Bu çalışmanın, gelecekte cebirsel düşünme ve cebir öğrenme alanı ile ilgili yapılacak araştırmalar için literatüre katkıda bulunması, matematik dersi öğretim programlarıyla ilgili inceleme ve geliştirme çalışmaları için araştırmacılara ve program geliştirme alanında çalışsan uzmanlara yardımcı olması umulmaktadır.

Problem Cümlesi

Araştırmada "Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) Matematik Dersi Öğretim Programlarında yer alan cebir öğrenme alanı, cebirsel düşünmenin gelişimi ve aşamaları, ele alınan içerik, kazanımlar ve öğrenme süreci açısından farklılıklar ve benzerlikler nelerdir?" problemine cevap aranacaktır.

Alt problemler

1. Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) Matematik Dersi Öğretim Programlarında yer alan cebirle ilgili öğrenme kazanımlarının cebirsel düşünme açısından benzer ve farklı yönleri nasıldır?
2. Ülkelerin öğretim programlarında cebir öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları arasındaki benzerlik ve farklılıklar nelerdir?

Sınırlılıklar

Bu çalışma Türkiye'de uygulanmakta olan güncel Matematik Dersi Öğretim Programı ile karşılaştırmak amacıyla seçilen ülkelerin (veya ülkeleri temsilen eyaletlerin) aynı sınıf düzeylerindeki öğrenciler için hazırlanmış ve erişilebilen, İngilizce dilinde yazılmış matematik dersi öğretim programlarından edinilecek verilerle sınırlıdır.

Cebir ve cebir öğrenme alanı ile ilgili verilerle sınırlıdır.

Bölüm 2

Kuramsal Çerçeve ve İlgili Araştırmalar

Cebir Kavramı ve Tarihsel Gelişimi

Cebir, yüzyıllardır geliştirilen ve gelişmekte olan insan etkinliği matematiğin bir alt dalıdır. Baki ve Bütüner'e göre (2011) cebir kavramının tarihsel gelişimini anlamak hem öğrenenler hem de öğretenler için cebirin doğasını anlayabilmelerine yardımcı olacaktır. Adını, bu adı taşıyan Harezmi'nin kitabındaki "Al Cabr" ifadesinden alan cebir için birçok tanım yapılmıştır; en genel tanımıyla cebir, aritmetiğin genelleştirilmiş şekli, örüntülerin, kuralların sembollerle ifade ediliş biçimidir (Dede ve Peker, 2007). Cebir, matematiğin soyut olan doğasını, sembollerle ifade ederek matematiksel model oluşturmayı sağlar. Model oluşturma çabası cebirin tarihsel gelişimine bakıldığında önce sözel olarak, sonra kısaltmalar kullanılarak, sonrasında da sembollerin kullanılmaya başlanmasıyla gelişmiş ve belli bir standarda ulaşarak günümüze kadar gelmiştir (Bütüner, 2008).

Cebirsel denklemlerin sözel olarak ifade edildiği ve düz yazıyla yazıldığı Eski Mısır'dan günümüze ulaşan iki papirüsten biri olan Rhind papirüsünde (M.Ö 2000-1000) birinci dereceden bir bilinmeyenli birçok denklem ve yanlışı deneme yolu kullanılarak çözülmüş, orantısal düşünmenin belirlendiği denklem çözümleri yer almaktadır (Baki ve Bütüner, 2011).

Babillilerin, eski Mısır'a göre daha gelişmiş bir cebir anlayışına sahip oldukları, Babil tabletlerinde (M.Ö 2000) yine sözel olarak ifade edilmiş, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözümleriyle uğraşmış olmalarından anlaşılmaktadır. Babilliler denklem çözümlerinde orantısal bir akıl yürütme yerine geometrik bir düşünce biçimi kullanmış, bilinmeyen ifadenin karesini göstermek için, aynı bilinmeyen kenar uzunluğuna sahip karenin alanıyla ifade etmişler, yine birçok çözümde kare ve dikdörtgenin alanını kullanmış, çevre uzunluklarından faydalanmışlardır (Baki ve Bütüner, 2011).

Eski Yunan'da cebir denilince ilk akla gelen kişi Euclid de (M.Ö 300) elementlerde cebir problemlerini sözel olarak ifade etmiş ve Babilliler gibi geometrik yapılar üzerinde çözüm yapmaya çalışmıştır. Her ne kadar bilinmeyen ifadeleri geometrik şekiller kullanarak çözmeye çalışsalar da hâlâ cebir kavramı ortaya çıkmamıştır. Bu alanda önemli çalışmaları olan ve denklem çözümlerinde sembolik ifadeler ve analitik bir bakış açısı getiren diğer bir eski Yunan matematik bilgini Diophantus (M.S 250) "Arithmetica" adlı eserinde çok değişkenli denklem çözümleriyle uğraşmış fakat genel bir çözüm algoritması ve sistematik bir yöntem geliştirememiş olsa da cebire yaptığı en büyük katkılardan biri cebirsel gösterimde kısaltmalar kullanması olmuştur (Baki ve Bütüner, 2011).

Hintli matematik bilgini Brahmagupta da (M.S 628) cebirsel ifadeleri gösterirken kısaltmalardan yararlanmıştır. Sözel olarak yaptığı çözümlerde geometrik bir düşünce yapısına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Diğer Hintli matematik bilginleri de cebir alanında birçok çalışma yapmış ve kayda değer katkılar sunmuşlardır ve ilk defa negatif sayıların ve irrasyonel sayıların varlığını ortaya koyup bu alana büyük katkılar sunmuşlardır (Baş, 2019; Baki ve Bütüner, 2011).

Cebirin geometriden ayrışıp ayrı bir bilim dalı olmasına en büyük katkısı olan Harezmi, 825 yılında yazdığı "Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah" kitabında cebirsel eşitliklerin hangi süreçlerden geçirilerek çözüleceğini açıklamış, tüm lineer ve ikinci dereceden denklemlerin indirgenebileceği altı farklı gösterim sunmuş, "algorithm" ve "algebra" terimlerini Avrupalı matematikçilere ilk kazandıran ve ilham veren olmuştur (Bütüner ve Baki, 2011).İslam dünyasında birçok isim Hint, Çin ve Yunan matematiğini sentezlemiş, geliştirilmesine öncülük etmiş, cebir kavramının tarihsel gelişimine büyük katkılarda bulunmuşlardır (Baş, 2019).

Günümüzde bilinmeyen ifade yerine kullanılan "x" ise Harezmi'nin bilinmeyeni "şey" kelimesiyle ifade etmesinden ilham alınıp ilk olarak, İspanyolca'da aynı anlama gelen “xei” kelimesine çevrilmiş ve Descartes (17. yy) tarafından kısaltılıp “x” olarak kullanılmasını sağlamıştır (Boz, 2015).

Cebir kavramının tarihsel gelişimine bakıldığında, cebir öğretimi için cebir öncesi aritmetik dönem, bilinmeyeni temsil amacıyla harfli ifadelerin kullanılmaya başlanması ve cebirsel ifadeler olarak somuttan soyuta doğru öğrencilerin karşısına çıkması, sonrasında bilinmeyenli denklemlerin ve eşitsizliklerin çözülmeye başlanması bu kavramın tarihsel gelişiminde geçirdiği süreçlere benzerdir. Baykul (2009) cebirsel ifadelerin öğretiminde daha etkili bir yol olarak öncelikle sözel ifadelerin kullanılması gerektiğini, sonrasında ise sembollerin kullanılmasının kavramın doğru yapılandırılmasında etkili olacağını belirtmiştir. Kavramın tarihsel gelişiminin öğrencilere sunulması, konunun onlar için sıkıcı olmasının üstesinden gelebileceği ve bu konuda karşılaştıkları matematiksel zorlukların aslında kavramın epistemolojik yapısıyla alakalı olduğu bilgisini verebileceği düşünülmektedir (Dede ve Argün, 2003).

Matematik Eğitiminde Cebir

Matematik eğitiminde matematiksel kavramların tanımları, bu kavramların anlamlarını iletmede ve anlamsal olarak bütünlük sağlamada önemli bir yere sahiptir (Çakıroğlu, 2015). Matematik eğitimi ve öğretimi sırasında kullanılan matematiksel dilin ana unsurları olan kavramlar ve tanımları matematiksel düşüncelerin gelişmesi için bir temel oluşturmaktadır. Öğrencilerin bulunduğu öğrenme dönemine ve seviyesine uygun, mevcut bilgileri göz önüne alınarak aynı kavramın farklı düzeylerde anlaşılır tanımını yapmak mümkündür. Önemli olan kavram tanımının herkesçe kabul edilebilir, net ve kesin bir şekilde yapılması ve böylece matematiksel dilin hem öğreten hem de öğrenen tarafından aynı şekilde anlaşılıp matematiksel iletişimin sağlanabilmesidir (Zembat 2013).

Somut gösterim biçimleri kavramların öğrenci zihninde doğru yapılandırılmasına yardımcı olur. Bu noktada kavram tanımlarının eğitsel olarak sahip olması gereken unsurlar şu şekilde sıralanabilir (Winicki-Landman ve Leikin, 2000):

- Öğrencinin ön bilgileri üzerine inşa edilmesi,
- Öğrencinin yakınsak gelişim alanının dikkate alınarak yapılandırılması,
- Sezgisel olması.

Çocuklarda matematiksel kavramların gelişimine yardımcı olma konusunda en temel adım kavramın doğru yapılandırılmasıdır. Bunu sağlayacak olan matematik öğretmenlerinin de kendi alanlarına hâkim ve pedagojik alan bilgisi ışığında kavram tanımlarını derinlemesine düşünebiliyor olmaları ve bir kavrama ait farklı tanımları yaparken bu tanımların eşdeğer olması gerektiğini, tanımların taşıması gereken özellikleri bilmesi, öğretim yaptığı sırada sınıfının seviyesine uygun tanımları seçebilmesi, yapabilmesi açısından önemlidir (Çakıroğlu, 2015). Cebir denilince öğrencilerin aklına yalnızca harfli ifadelerin gelmesi, cebir kavramının tanımının değil, öğretim programında cebir öğrenme alanının ilk kazanımında geçen "cebirsel ifade" kavramının üzerinde durulması, bu kavrama yönelik zorlukların başında gelmektedir (Bingölbali,ve Özmantar, 2015). Sayılar arasındaki aritmetik ilişkileri matematik diliyle ifade etmeyi sağlayan cebir, gerçek dünya problemlerini matematik dünyasına aktarırken matematiksel bir model oluşturabilmeyi sağlar.

Öğrencilerin somut işlemler döneminden soyut işlemler dönemine geçişlerinde en önemli uygulama alanlarından biri olan, matematik eğitiminde bir öğrenme alanı olarak karşımıza çıkan cebir konularının öğretimine bakıldığında, temelinde aritmetik düşünme ile başlayan ve gelişen derin bir muhakeme becerisi olan cebirsel düşünmenin varlığı görülmektedir (Yenilmez ve Ev Çimen, 2016).

Cebir, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin İlkeler ve Standartları'ndaki beş içerik alanından birisidir (NCTM, 2000). Van de Walle (2010) cebirsel düşünmenin okul öncesinde başlayıp, lise yılları boyunca devam ettiğini ve cebirsel düşünmenin okul matematiğindeki "cebir" kavramı dışında günlük hayatta en çok faydalanılan matematiksel beceri olduğunu belirtmiştir.

Erken Cebir ve Cebir Öncesi

Erken cebirin bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmasıyla, küçük çocukların cebirsel düşünmeyi öğrenemeyeceğiyle ilgili varsayımlar birçok matematik eğitimi araştırmacısı tarafından sorgulanmaya başlanmış (Kieran, 2004; Blanton vd., 2015; Blanton vd., 2017; Bråting vd., 2019) ve cebirsel düşünmenin tohumlarının erken cebir olarak isimlendirilen dönemde atıldığı, öğrencilerin okul öncesi dönemde karşılaştıkları basit aritmetik ve ilkokuldaki geleneksel aritmetikle birlikte buna paralel olarak cebirsel düşüncelere de sahip oldukları ve genellemeler yapmalarının ilerleyen okul cebirinde faydalı olduğu çıkarımına ulaşılmıştır (Cai vd.; 2005; Carraher vd., 2006; Bråting vd., 2019; Walkoe ve Levin, 2020). Subramaniam ve Banerjee (2011) ise bu durumu aritmetiğin cebir için bir temel olmadığını, aslında aritmetiğe temel oluşturanın cebir olduğunu ve öğrencilerin aritmetiği “cebir gözleri” ile görmeleri gerektiğini belirtmiş, bunun okul cebirinden çok önce geliştiğini savunmuşlardır. Cebir öğretiminin merkezinde kabul edilen değişken kavramı, cebirdeki yapıyı, modeli ve genellemeyi biçimlendirmek için gereklidir. Fakat cebir öncesi dönemde öğrencilerin, cebire özel harf ve semboller kullanmadan da sembolik olmayan cebirsel genellemelere ulaşılabilecekleri; nicelikler arası ilişkileri çözmek, yapıları fark etmek, değişimi inceleyip genellemek ve problem çözmek gibi düşünme yolları geliştirilebilmektedir (Kieran, 2004).

Okul öncesi dönemden itibaren çocuklar oynadıkları oyunlarla cebirsel düşünmeye kaynak sağlayan birçok deneyime sahip olurlar (Walkoe ve Levin, 2020). Örneğin Blanton ve Kaput (2011) anaokulundaki öğrencilerin fonksiyonel düşünmeleriyle ilgili hazırladıkları köpek sayısı ile toplam göz ve kuyruk sayısı probleminde, çocukların gözlemleyebildikleri nesneler üzerinden nicelikleri karşılaştırabildiklerini ve sözlü olarak bir genellemeye ulaşabildiklerini ortaya çıkarmıştır. İki adet köpek resmi verilen çocuklar gözleri ikişer nokta, kuyrukları da birer çizgiyle temsil ederek, iki köpeğe ait toplam göz ve kuyruk sayısını ifade etmiş, sonrasında bir köpek daha eklemenin toplam göz ve kuyruk sayısının nasıl değişeceğini tanımlamaları istendiğinde; bir köpek eklemenin, iki göz ve bir kuyruğun daha ekleneceği anlamına geldiğini ifade edebilmeleri, erken çocuklukta fonksiyonel düşünmenin mevcut olduğunu ortaya çıkarmaya yardım etmiştir (Blanton ve Kaput, 2011).

Cebir öncesi olarak adlandırılan dönemi farklı bir yaklaşımla tanımlamaya çalışan Walkoe ve Levin (2020) tarafından bu dönemdeki bilişsel kaynaklar “cebirsel düşünmenin tohumları” olarak adlandırılmıştır. Cebirsel düşünmenin tohumlarının bir çocuğun yaşantısında erken dönemlerde oluşturulması halinde, gerçek dünyayla etkileşime girdikçe gelişeceğini ve bireylerin gelecekteki yaşantılarını daha anlamlı kılabilecek ve buna yardımcı olacak soyut modeller olarak cebirsel yapılar, fikirler ve kavramlar için kaynak haline geleceği özellikle vurgulanmıştır. Cebirsel düşünme tohumlarından biri olarak nitelendirilen “denge” kavramı ile eşittir sembolü arasındaki ilişkisel durumun çocuklar tarafından fark edilebildiği, aynı zamanda gerçek yaşamdan “zaman ve havuzun suyla dolması” örneğini çocukların deneyimlemeleri halinde, çocuklar havuzun suyla dolmasını beklerlerken aynı zamanda, zaman (bekleme süresi) ve havuzdaki su miktarı arasında ilişkisel bir durum fark edebilir, bunu tahmin edebilir ve akıl yürütebilirler (Walkoe ve Levin, 2020).

Erken çocukluk döneminde olan ilkokul öğrencileriyle yapılan matematik eğitimi araştırmalarında, araştırmacılar öncelikle eşittir sembolü üzerinde durmuş ve eşittir sembolünün hesaplanacak nicelikler yerine, bu nicelikler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmayı sağlayan “ilişkisel” bir sembol olarak görülmesi yönünde çalışmalar yapmıştır (, Stephens vd., 2015; Walkoe ve Levin, 2020). Araştırmalarda eşittir sembolünün hesaplama yapmak için bir işaret olarak görülmesi ve soldan sağa doğru okunması yerine; iki taraf arasında bulunan ilişkisel duruma dikkat çekilmesi için kullanılan birkaç boşluk doldurmalı veya bilinmeyen sayı yerine soru işareti sembolü olan aritmetik işlemlerin öğrenciler tarafından çözülmesi veya doğru-yanlış olarak ifade edilmesi istendiğinde, en başta “=” sembolünü “solundaki işlemin sonucunu vermelidir” şeklinde düşünen öğrencilerin, erken cebir dersleri sonrasında sembolün iki taraf için de bir ilişki durumunu belirttiğini anladıkları (Stephens vd., 2015) ve simetrik bir bakış açısına yönlendirerek, her iki tarafa da aynı müdahalelerin yapılmasıyla da çocukların cebirsel düşüncelerinin ortaya çıkışını zenginleştirmekte yararlı olacağı, bu yararın okul cebirine katkı sağlayacağı belirtilmiştir (Matthews vd., 2012).

Cebir öğrenimi ve başarısıyla ilgili yapılan araştırmalarda, cebir müfredatının geleneksel aritmetikten sonra verilmesinin, ikinci kademe ve ortaokul seviyesinde soyut kavramlara sahip cebirin anlaşılmasının sağlanmasında yetersiz kaldığı, cebirin ilkokuldan başlayarak ortaöğretimin sonuna kadar müfredatın bütünleyici bir parçası olması gerektiği öne sürülmüştür (Carraher ve Schliemann, 2007; Chimoni vd., 2019). Eşitliğin ilişkisel durumu, aritmetik işlem özelliklerinin birer genelleme olduğu, sayı problemi çözerken değişken yerine bir sembol veya resim gibi bilinmeyen sayıyı temsil edebilecek farklı araçların kullanılabileceği, nicelikler arasındaki ilişkinin tablo oluşturma gibi farklı temsillerle ortaya çıkarılabileceği durumların okul cebiri öncesi öğrencilere tanıtılması, cebirsel düşünmenin gelişmesini sağlarken “cebir” kavramını anlamlandırmalarına da yardımcı olmaktadır (Stephens vd., 2015). Ayrıca cebirin ilkokul boyunca tanıtılmasının okul cebir konularının erkenden verilmesi olarak değil, cebirsel düşünmenin gelişimini destekleyecek tümevarımsal ve tümdengelimli muhakeme biçimlerinin geliştirilebilmesi için zemin hazırlayıcı olarak anlaşılması gerekmektedir (Kieran, 2011; Cai ve Knuth, 2011).

Aritmetikten Cebire Geçiş

Cebir denilince akla ilk olarak sayıların sembollerle temsil edildiği, çoğunlukla ise bu semboller yerine harflerin kullanıldığı bir gösterim biçimi gelir. Aritmetik dönemden cebire geçerken işlemsel öğrenmenin, kavramsal öğrenme önüne geçmesiyle öğrenciler soyut düşünme becerilerini geliştirmekte zorluklar yaşayabilirler. Bu sebeple cebir öncesi aritmetik dönem yalnızca aritmetik işlemlerin yapılıp, istenilenin Bulunmasıyla yüzeysel kalmamalıdır. Kieran (2004), aritmetikten cebire başarılı bir geçişin için öğretimde, beş ayarlama gerektirdiğini öne sürmektedir. Bunlar; yalnızca sayısal cevapların hesaplanmasına değil, sayılar ve semboller arasındaki ilişkilere odaklanmak; işlemlere ve bu işlemlerin tersine yapma ve geri alma fikrine odaklanma; bir problemi sadece çözmek yerine hem temsil etmeye hem de çözmeye odaklanmak; yalnızca sayılar yerine hem sayılara hem de harflere odaklanmak; eşittir işaretinin anlamına tekrar tekrar odaklanmaktır. İlkokul matematiğinde cebire girişin, aritmetiksel düşünmenin geliştiği somut işlem döneminden, ortaokul matematiğinde ve ilerideki dönemde gerekli olan ve gitgide karmaşıklaşan soyut düşünmeye ve özelinde cebirsel düşünmeye yönlendirmesi beklenmektedir (Stephens vd., 2015; Chimoni vd., 2019) Öğrenciler için genelleştirilmiş aritmetikle birlikte kurallı örüntüler, eşitlik ve değişken gibi cebirsel kavramlara zemin hazırlayan ve kavramsal anlayışı derinleştiren bir köprü görevi gören kavramların önemi üzerinde durulmalıdır (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2011). Sayı örüntülerinde, örüntülerin adımları ile sayılar arasındaki aritmetiğin genellenebilmesi ve bunu iyi ifade edebilme deneyimi fonksiyon kavramı için uygun bir zemin oluştururken, sayılar ve aritmetik işlemlerin özellikleriyle ilgili deneyimler de sayılar yerine simgeler kullanma ve cebirsel ifadeler için kavramsal bir temel oluşturmaya yardımcı olur (Torres vd., 2023).

Hesaplama yaparken kullanılan aritmetik işlemlerin özelliklerine bakıldığında, bu özelliklerin öğrenciler için bir anlam ifade etmesi sayılardan cebire geçiş sürecine açıklık getirmektedir (Van de Walle, 2019). Aritmetikten cebire geçerken, öğrencilerin problem çözme süreçlerini inceleyen matematik eğitimciler, farklı türlerde sunulan problemlerin farklı çözüm stratejileri geliştirilmesini sağlarken bu iki alan arasında kurulan ilişkiyi yoğunlaştırdığı belirtilmiştir (Akkan vd., 2019). Sınıf seviyeleri arttıkça soyut ifadelerin dahil olmaya başladığı bu süreçte, aritmetik ile cebir arasında bulunan matematiksel ilişkilerin vurgulanması, cebirsel ifadelerde kullanılan dilin aritmetik dile göre daha teknik olduğunun, aralarındaki benzerliklerin yanında birçok farklılıkları olsa bile birbirinden bağımsız düşünülmemesi gerektiğinin öğretenler tarafından öğrenenlere aktarılması gerekmektedir (Akkan vd., 2019; Van de Walle vd., 2019). Öğrencilerin cebir kavramını anlamaları ve doğru yapılandırmaları yanında, cebirsel düşünme becerilerini de geliştirebilmeleri için birçok bilişsel süreçten geçmek zorunda oldukları bu süreçte, onlar için en büyük yardımcı öğretmenlerdir (NCTM, 2000; Van de Walle vd., 2019).

NCTM (2000) tarafından yayımlanan "Okul Matematiğinin Prensipleri ve Standartları" adlı bildiri kitabında içerik standartları Sayı ve İşlemler, Cebir, Geometri ve Ölçme, Veri Çözümlenmesi ve Olasılık olmak üzere beş farklı standart olarak ayrılmış ve bu içerik standartlarının birbirleriyle sürekli bir ilişki halinde oldukları belirtilmiştir. Cebir standardı, akla ilk cebirin simgelerle ifade edilen yapısını getirse de aslında büyük bir bölümü öğrencilerin cebir öğrenme alanından önce öğrendiği ve aritmetiği deneyimlediği sayılar üzerine inşa edilir. Ayrıca cebir standardının kapsadığı düşünceler, okul matematiği dediğimiz standartlar içerisinde büyük ve önemli bir paya sahiptir. NCTM (2000) cebir konusundaki yeterliğin sadece öğrencilerin okul yaşamı için değil, gerçek dünyada üniversiteye hazırlıkta ve iş dünyasına hazırlıkta önemli olduğu vurgulanmış ve tüm öğrencilerin cebir öğrenmesi gerektiği üzerinde durmuştur.

NCTM tarafından 1998 yılında düzenlenen ulusal sempozyumda bildirilerin yayımlandığı "K-14 Müfredatında Cebirin Doğası ve Rolü" adı altında toplanan kayıtlar incelendiğinde, anahtar kelimelerin cebir öğretimi, cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme olarak sık sık tekrarlandığı görülmüş ve cebirsel düşünmenin okul öncesi dönemden başlayarak tüm sınıf seviyelerindeki matematik için olan önemi özellikle vurgulanmıştır.

Cebirsel Düşünme

Cebir matematiksel bir dil ve problem çözme aracı olmasının yanı sıra bir düşünme aracıdır (Kieran, 1992). Cebir yalnızca matematiğin bir konusu, yalnızca okul matematiğinde bir öğrenme alanı adı değildir. Cebirin tam anlamıyla kavranması, sayı ve şekil örüntüleri (desenleri) ve bu örüntüler arasındaki matematiksel ilişkinin yine matematiksel bir dil ile açıklanabilmesi, matematiksel bir model oluşturan ifadenin yazılabilmesi, farklı nicelikler (değişkenler) arasındaki ilişkinin günlük hayat problemlerinde de fark edilmesi şeklinde ilgili birçok örnek verebilmek mümkündür (Kaput ve Blanton, 1999).

Matematiksel düşünmenin özel bir hali olan cebirsel düşünme, cebir öğrenme alanı kavramlarından çok önce gelişen ve okul öncesi dönemden, ortaöğretimin sonuna kadar öğretim programlarına dahil edilmesinin önemi uzun yıllardır vurgulanmakta olan muhakeme becerisidir (NCTM, 2000). Sayılar veya şekiller arasındaki aritmetik örüntülerin fark edilmesiyle, günlük hayattaki sayısal değişkenler arasında bulunan ilişkileri matematiksel olarak kavrayabilmeyi sağlayan cebirsel düşünmenin desteklenmesi ve geliştirilebilmesi için geleneksel öğretim yöntemlerinden uzak, öğrenciyi muhakeme etmeye yönlendirecek metotlar tercih sebebi olmalıdır. Bilişsel gelişimde kavramlara ait şemaların oluşumu ve birbiriyle ilişkilendirilmesi sürecinde, cebir öncesi ve cebir konu alanındaki bilgilerin kavramsal olarak doğru yapılandırılması da cebirsel düşünme becerilerini geliştirmektedir (Yenilmez ve Teke, 2008).

Gerçek dünyadaki sayı ve şekil örüntülerini temsil edebilmek ve aritmetik işlemleri gerçekleştirebilmek ve bulunan örüntülerin genelleştirilebilir ifadeler olarak yazılmasında cebir önemli araçlardan biridir (NCTM, 2000). Sayılarla dört işlem yaparak aritmetiği öğrenen öğrenciler, geometrik şekilleri öğrenirken çevre ve alan hesabı yapabilmek için genellemelere ihtiyaç duyar. Okul cebiriyle tanışmadan önce genellemelerle tanışan öğrenciler için aritmetiksel düşünmenin gelişimi, cebirsel düşünmeye temel teşkil ettiğinden önemlidir (Kieran, 2004). Bilinmeyeni bulmak, tahminlerde bulunup ulaşılan sonuçların doğruluğunu kontrol ederek sonucun sağlamasını yapmak, bilinmeyenler arasındaki işlemsel ilişkileri matematiksel olarak ifade edebilmek için cebir gerekliyken, geçirilen tüm bu zihinsel süreçler için ise cebirsel düşünmenin gelişimi gereklidir (Drisscoll, 1999).

Cebirsel Düşünmenin Gelişimi

Ülkelerin matematik dersi müfredatları incelendiğinde hepsinde farklılık olmaksızın cebir öğretiminden önce geleneksel aritmetik gelmektedir. Cebir kavramının bir öğrenme alanı olarak öğrencilerin karşısına çıkmadığı fakat cebirsel düşünme becerisinin gelişiminde temel kabul edilen aritmetik ve akıcı hesaplamaya odaklanılan okul matematiğinde, erken sınıflarda matematiksel düşüncelerin kavramsal gelişimi sınırlandırılmıştır (Blanton ve Kaput, 2005; Chimoni vd., 2018). Erken cebirle birlikte uygun öğretimin sunduğu avantajlar sayesinde, sezgisel olarak cebirsel düşünme bileşenlerinin daha belirgin hale geldiği gelişimsel yolları inceleyen Radford (2014), sembolik olmayan cebirsel düşünmenin oluşumunu boylamsal bir araştırmayla incelemiş ve cebirsel düşüncelerin erken gelişiminin, öğrencilerin cebir kavramlarını anlamlandırmalarını kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Birçok araştırmada cebirsel düşünmenin gelişimini desteklemek amacıyla örüntülerin ve işlem özelliklerinin genellenmesi ele alınmıştır (Herbert ve Brown, 1997; Booker, 2009; Cai ve Knuth, 2011; Kilpatrick, 2011; Cooper ve Warren, 2011; Moss ve London Mcnab, 2011)

En erken beşinci sınıf düzeyinde, aslında öğrencilerin daha önceki sınıf seviyelerinde geometrik şekillerin çevrelerini ve alanlarını bulmak için kullanabildikleri bazı formüllerin (2.(a+b), 3a, 4a, a.b gibi) aniden cebir kavramı adı altında görmeleri, cebirsel kavramların anlaşılmasında zorluklara sebep olmaktadır (Chimoni vd., 2018). Dolayısıyla bazı formüllerin mantığının kavranabilmesi cebir için önemliyken aslında cebirsel düşünmenin gelişimi için de önemlidir (Kieran, 2007).

Cebir, fonksiyonlar ve matematiksel modelleme için bir araç olarak kullanılır. Bu bakış açısıyla, cebirsel düşünme öğrencilere cebirin gerçek hayattaki kullanımlarını ve alaka düzeyini gösterir (Herbert ve Brown, 1997). Gerçek dünya problemlerinde örüntüleri ve kuralları aramak, ifade etmek ve genelleştirmek; denklemler, tablolar ve grafikler kullanarak matematiksel fikirleri temsil etmek; girdi ve çıktı kalıplarıyla çalışmak, koordinat sistemi üzerine aktarılabilmesi ve geliştirilmesi, cebirle ilgili becerileri geliştiren matematiksel etkinliklerdir. Fonksiyonlar ve matematiksel modelleme, bu cebirsel fikirleri uygulayarak çıkarımda bulunabilen öğrenciler için bağlamları temsil eder (Kriegler, 2008).

Cebir denilince akla ilk olarak sayıların harflerle gösterilmesi gelse de cebir, çok sayıda matematiksel özelliklerle iç içe olduğu için cebirsel düşünmeyi de tek bir tanımla açıklamak zordur (Driscoll, 1999). Kaput (2008) ilköğretimden başlayarak ortaöğretimin sonuna kadar var olan sınıf düzeylerindeki cebirin çok yönlü özelliklerini detaylandırıp, üç temel içeriğe indirgemiş ve bunları bir sarmal olarak ele almıştır; genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve genellemelerin modelleme diliyle uygulanması.

Genelleştirilmiş Aritmetik. Genelleştirilmiş aritmetiğin sayılar arasındaki ilişkileri, işlemlerin manipülasyonu ve özellikleri, denklemlerin dönüşümü ve çözümü olarak ifade edilmesi tercih edilmiştir. Genelleştirilmiş aritmetik sayılar, işlemler, eşittir işareti, eşitlik, denklem, ifade ve değişken kavramlarını içermektedir (Kaput, 2008; Chimoni vd., 2018). Aritmetiğin genellenmesi, aritmetikten cebire geçişte öğrenciler tarafından sembollerin öneminin ve anlamının kavranabilmesi ve problem çözerken kavramların modellerle nasıl genellenebileceğininin anlaşılması, somuttan soyuta geçiş döneminde karşılaşılan zorlukların üstesinden gelebilmek için önemlidir (Kieran ve Chalouh, 1993; NCTM, 2000). Cebirsel düşünmenin merkezi olarak kabul edilen genelleme, aritmetiğin genellenmesi (Kaput, 1999) sürecinde, öğrencilerin deneyimledikleri aritmetik işlemlerin özellikleri üzerinde durarak aritmetikten cebire geçişte köprü görevi görebilmektedir (Radford, 2008). Örneğin “15 + 9 = 9 + 15” işleminde, eşittir sembolünün her iki tarafındaki toplamın birbirine eşit olduğunun anlaşılması, eşittir sembolünün yalnızca sonuç ifade etmediği, aynı zamanda her iki taraf için de bir dengede olma durumunu belirttiği öğrenciler tarafından kavrandığında, “a + 9 = 9 + a” ifadesinde “a” yerine yazılabilecek herhangi bir sayı için de bu denge durumunun devam ettiği kavratılıp, “a + b = b + a” şeklinde bir genellemeye ulaşılabilmesi, toplama işleminin değişme özelliğiyle ilgili çıkarım yapılabilmesini sağlarken kavramsallaştırılabilmesi için de önemlidir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010, s 304-305). Toplama işleminin değişme özelliği, birleşme özelliği, etkisiz eleman, ters eleman ve toplama ve çıkarma arasındaki ters ilişkinin kavranması, yine aynı şekilde çarpma işleminin değişme özelliği, birleşme özelliği, etkisiz eleman, yutan eleman, ters eleman ve dağılma özelliği ile çarpma ve bölme arasındaki ters ilişkinin bilinen niceliklerden yola çıkılarak, gerekirse somut modeller yardımıyla desteklenerek genellemelere ulaşılması, aritmetik işlemlerin özelliklerinin kavramsallaştırılabilmesini sağlar.

Radford (2008) aritmetiğin genelleştirilmesi sürecinde sayı örüntülerinin önemine vurgu yapmış ve cebirsel genellemelerle arasındaki farkı belirtmiştir. Sayı örüntülerindeki ortak özelliğin fark edilmesi ve örüntüdeki diğer terimler arasında ortak özelliğin bulunup bulunmadığının kontrol edilerek incelenmesi, örüntünün bütününe değil de belirli bir parçasına odaklanılması, sayı örüntüsünün genel terimi gibi matematiksel bir model oluşturma amacının olmaması, genelleştirilmiş aritmetik ile cebirsel genelleme arasındaki en büyük ayrımlardan biridir. Sayı örüntüsünde parçadan bütüne gidebilmek veya verilmeyen herhangi bir adımı bulabilmek için örüntü genellemesini-kuralını cebirsel olarak ifade etmek cebirsel genellemeyi, genelleştirilmiş aritmetikten ayırmaktadır (Torres vd., 2023). Cebirsel genelleme, sayı örüntülerinde büyük denilebilecek bir adımını oluşturabilmeyi sağlamaktadır (NCTM, 2000). Cebirsel genellemenin oluşturulması, parçadan bütüne giden tümevarımsal muhakeme ile nicelikler arası ilişkileri matematiğin cebir diliyle temsil ederek ortaya koymayı amaçlar (Radford, 2008; Kriegler 2008; Ünlü, 2022). Kriegler (2008) cebirsel düşünmenin bileşenlerinde, cebirsel düşünmenin temellerinden olan genelleştirilmiş aritmetiğin dayandığı kavramları; kavramsal tabanlı hesaplama stratejileri, oran-orantı ve tahmin olarak belirtmiştir.

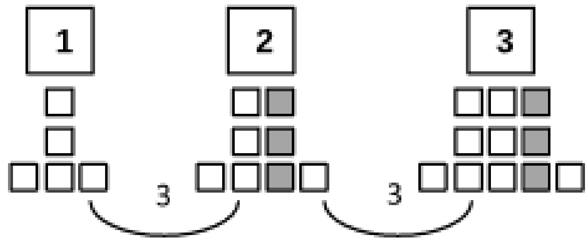
Fonksiyonel Düşünme. Okul hayatı boyunca öğrencilerde gelişmesi beklenen akıl yürütme becerileri temel düzeylerde, tekrar eden şekil örüntüleri ve sayı örüntüleri ile başlayarak somut düşünme becerilerinin gelişmesiyle başlar ve nicelikler arasında ilişkilerin kurulmasına yardımcı olur. Sınıf seviyesi ilerledikçe aynı miktarda artan veya azalan sayı örüntüleri ve şekil örüntüleriyle, sayılar arasındaki ilişkilerin ortaya çıkarılması düşünme becerilerinin somuttan soyuta doğru ilerlemesine yardımcı olur (Martins vd., 2023). İleri düzeylerde, öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin gelişebilmesi için, nicelikler arası ilişkilerin ve işlevlerin ortaya konduğu akıl yürütme becerilerinin gelişmesi önemlidir. Fonksiyonel düşünme, aynı anda değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin genelleştirilmesini ifade ederken bu aşamada sayısal ve şekilsel örüntüleri (desenleri) cebirsel ifade olarak belirtebilme; cebirsel bir genellemeye ulaşarak bu genellemeyi anlamlandırabilmeyi ve sözel ve matematiksel olarak ifade edebilmeyi sağlar (Radford, 2008; Blanton vd., 2017; Ünlü, 2022). Fonksiyonel düşünmede değişken, cebirsel ifade ve denklem kavramları merkezdedir fakat genelleştirilmiş aritmetik bileşenindeki kavramlara göre farklı yoruma sahiptir. Aynı zamanda değişim, eş zamanlı değişim, uygunluk kavramlarını da açıklamaktadır (Kaput, 2008; Chimoni vd., 2018).

Gerçek dünya bağlamlarında örüntüleri (desenleri) ve kuralları arama, birebir eşleme, ifade etme, genelleştirme, denklem, tablo, grafik kullanarak veya sözlü olarak matematiksel fikirleri temsil etme, fonksiyonel düşünmenin kavramsal yapılarını oluşturur (Kriegler, 2008). Problem çözerken değişkenlerin değerleri arasında oluşan ilişkilerin ortaya çıkarılması, açıklanması ve tartışılması, fonksiyonel düşünmenin desteklenmesini sağlar (Kaput vd., 2008).

Erken cebir döneminde öğrencilerin fonksiyonel düşünmeyi öğrenebilecekleri ve bu düşüncenin ilkokul matematiğiyle birlikte gelişebileceğini destekleyen matematik eğitimi araştırmacıları (Doorman vd., 2012; Wilkie ve Clarke, 2016; Pittalis vd., 2020), eş zamanlı değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin sözlü olarak ifade edilebileceğini ve öğrencilerin genellemelere ulaşabileceğini desteklemektedirler (Blanton vd., 2015; Blanton vd., 2017). Fonksiyonel düşünmenin gelişimiyle ilgili yapılan araştırmalarda erken cebirle birlikte en çok karşılaşılan örüntü (desen) kavramı üç farklı bakış açısıyla ele alınmıştır. *Tekrar eden (özyinelemeli)* örüntülerde (Şekil 1), yalnızca eksik adımların bulunması veya inşa edilmesi beklenirken, *eş zamanlı değişime (kovaryasyon)* dikkat çeken örüntülerde (Şekil 2) adım sayısı ile örüntüdeki nicelik ya da desenler arasında meydana gelen değişimin ilişkisinin ortaya çıkarılması beklenir. İki nicelik arasında aynı anda meydana gelen değişimin analiz edilmesi, bağımlı ve bağımsız değişkenleri tespit edebilmeyi ve meydana gelen eş zamanlı değişimi ifade etmeyi sağlar. *Örüntü (desen) kuralına* dikkat çekmek isteyen örüntülerde ise (Şekil 3) adım sayısı (bağımsız değişken) ile her adımda sabit kalan nicelik varsa tespit edilmesi ve adıma karşılık gelen nicel ifadenin (bağımlı değişken ve sabit terim) matematiksel bir model ile tanımlanması ve ifade edilmesi; bir genellemeye ulaşılması beklenmektedir.

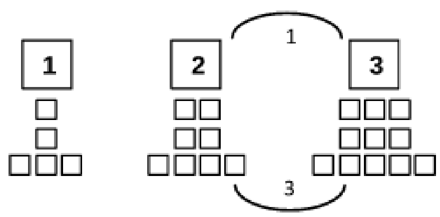
Şekil 1

Tekrar Eden (Özyinelemeli) Örüntü (Steinweg vd., 2023, s. 7)



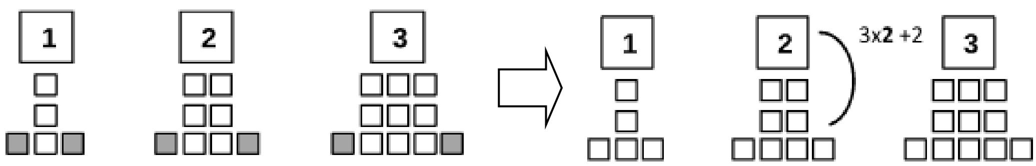
Şekil 2

Eş Zamanlı Değişime Dikkat Çeken Örüntü (Steinweg vd., 2023, s. 7)



Şekil 3

Örüntü Kuralının Matematiksel Bir Model ile İfade Edilmesi İstenen örüntü (Steinweg vd., 2023, s. 8-9)



Modelleme Dilleri. Modelleme dilleri çeşitli problem durumları aracılığıyla dolaylı olarak sunulan kuralların genelleştirilmesini, problemlerin matematik dünyasına aktarılarak matematiksel bir dille ifade edilmesidir. Cebirsel düşünmenin son bileşeni olarak nitelendirebileceğimiz modelleme dili, aritmetiğin genellenmesinin ardından fonksiyonel düşünmenin sonucunda nicelikler arasındaki ilişkilerin tablo veya grafiklerle ortaya çıkarılmasıyla ulaşılan genellemenin matematik diliyle ifade edilmesidir (Kaput, 2008; Chimoni vd., 2018).

Tüm bunlar cebirsel düşünme sürecindeki temel bileşenler olarak ele alınsa da aslında cebirsel düşünme süreçleri temel akıl yürütme türlerinden ayırt edilemez. Öğrenciler matematik yaparken hem cebirsel düşünme süreçlerine hem de akıl yürütmeye kendilerini maruz bırakırlar. Kieran ve Jeannotte'ye göre (2017) öğrencilerin cebirsel görevlerle uğraşırken geçirdikleri süreçler ve ulaştıkları sonuçlar kullandıkları akıl yürütme biçimlerine de bağlıdır. Bireylerin bir genelleme geliştirmeye çalıştığı aşamada üretilen tahminler, tümevarımsal akıl yürütmenin gerekli olduğunu göstermiş ve bu muhakeme biçiminin, ortak noktaların belirlenmesinde ve genellemelerin ortaya çıkarılmasında önemli bir rol oynarken tümdengelimsel akıl yürütme ise sınırlı genellemelerden daha doğru genellemelere ulaşabilmek için önemlidir (Rivera ve Becker, 2007; Ellis, 2007). Bu sebeplerle, öğrencilerin cebirle ilgili görevlerle uğraştıkları süreç ve ulaştıkları sonuçlar kullandıkları muhakeme biçimlerine bağlıdır.

Blanton ve Kaput (2005) cebirsel düşünmeyi öğrencilerin aritmetik ve sembolik ifadelerdeki yapılar, bu yapılar arasındaki ilişkiler, geometrik şekil veya desenlerle sayılar arasındaki ilişkiler, tablo, grafik ve sayı doğrularındaki sayısal yapılar arasındaki ilişkiler gibi matematiksel ifadelerle bunlar arasındaki ilişkileri tanımlamalarını ve açıklamalarını sağlayan zihin alışkanlığı olarak tanımlamışlardır.

Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları. Cuoco vd. (1996) zihinsel alışkanlıkları matematiğe özgü ve genel olarak ikiye ayırmış, Goldenberg (1996) ise Zihnin Matematiksel Alışkanlıkları'na (ZMA) göre matematikçilerin bu alışkanlıklara cebirsel yaklaştıklarını belirterek bu yaklaşımları; iyi bir hesaplama yapma, soyutlamayı kullanma, parçalara ayırma, durumları genişletme ve durumları temsil etme şeklinde beş maddede açıklamıştır.

Zihin alışkanlığı denilince akla ilk gelen araştırmacılardan biri olan Driscoll (1999) ise genellikle altıncı sınıftan onuncu sınıf düzeyine kadar geçen süreçte, öğrencilere cebiri öğretmenin ileriki öğrenmeler için çok önemli olduğunu vurgulamış ve Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları'nın (ZCA) çatısını tanımlamıştır. Daha önceki çalışmalarında üç temel cebirsel "zihin alışkanlığı" olduğunu ortaya koyan Driscoll (1999) bunları; matematiksel işlemleri yapmak ve tersini yapmak, fonksiyonları tanımlamak ve temsil etmek için kurallar oluşturmak, belirli sayılardan bağımsız hesaplamalar üzerinde düşünmek (hesaplamadan soyutlamaya) olarak ifade etmiştir.

Yapma/Tersini yapma: Etkili cebirsel düşünme bazen tersine çevrilebilirliği ile, yani, matematiksel süreçleri uygulamanın yanı sıra uygulanılan süreçleri geri alabilmeyi de içerir. Aslında bu, belirli bir hedefe ulaşmak için belirli bir süreci yürütme değil, aynı zamanda ulaşılan yanıttan başlangıç noktasına kadar geriye doğru çalışabilecek kadar süreci iyi anlama kapasitesini de içerir. Yapmak/tersini yapmak (geri almak) sayıları ve ifadeleri birbirinden ayırma ve yeniden bir araya getirme kapasitesini de içerir (Drisscoll, 1999; Kilpatrick vd., 2001).

Fonksiyonları temsil etmek için kurallar oluşturmak: Cebirsel düşünme açısından kritik olan iyi tanımlanmış fonksiyonel kurallarla, eşitliğin iki tarafındaki durumların birbiriyle ilişkili olan durumlarını temsil etmek, ifade etmek için kalıpları tanıma ve verileri organize etme kapasitesidir. Bu zihin alışkanlığı yapma/tersini yapma alışkanlığının doğal bir tamamlayıcısıdır. Çünkü işlevsel bir kuralın tersine nasıl çalıştığını anlama kapasitesi onu genellikle daha erişilebilir ve kullanışlı bir süreç haline getirir (Kieran, 1996; Driscoll, 1999).

Hesaplamadan soyutlamaya: Bu alışkanlık hesaplamalar için kullanılan belirli niceliklerden bağımsız olarak düşünme kapasitesidir. Cebirin belirli özelliklerinden olan soyutlama kavramı, burada karşımıza cebirsel düşünmenin, aritmetikte bağlı olduğu belirli sayılardan bağımsız hesaplamalar hakkında düşünebilmeyi, yani sistem düzenliliğini bu hesaplamaları yapmadan da düşünebilmeyi ve soyutlamayı içermektedir (Driscoll, 1999). Zihnin üçüncü alışkanlığı olan hesaplamadan soyutlamaya iyi bir örnek verecek olursak; “6000 sayısının %8’i mi yoksa 8000 sayısının %6’sı mı daha büyüktür?” sorusu sorulduğunda, bu soruyu cevaplamak için yüzde hesabı yapmadan iki niceliğin de birbirine eşit olduğu sonucuna ulaşabilecekleri bilgi birikimine sahiptirler.

Cebirsel Düşünmenin Temel Boyutları

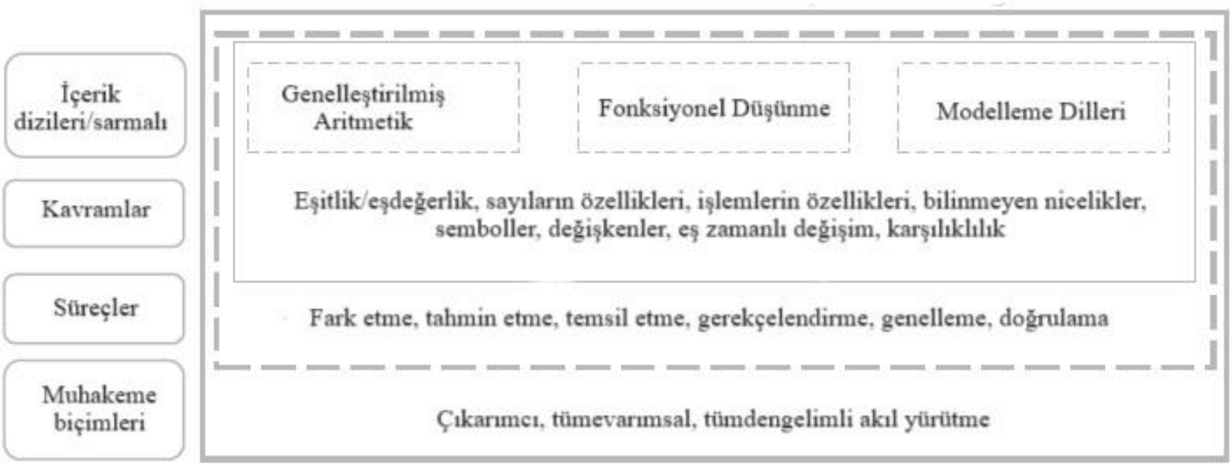
Zihnin tüm cebirsel alışkanlıklarını ve bu süreci kapsayan cebirsel düşünme, matematiksel bir yansıma biçimi ve eylem olarak ifade edilebilirken, bu düşünmenin sadece sayılar yerine harfli ifadelerin kullanılmasına dayandığını söylemek büyük bir yanılgı olur (Radford, 2014). Kaput (1999) cebirsel düşünmeyi açıklarken farklı temalardan bahsetmiştir. Bunlar; aritmetik ve örüntülerden genelleme, sembollerin anlamlı kullanımı, sayı sistemindeki yapılar üzerine çalışılması, örüntü ve fonksiyonların çalışılması ve matematiksel modelleme süreci (Kaput, 1999; Van de Walle, 2012) olmak üzere beş tema altında açıklanmıştır. Kaput daha sonra Blanton (2005) ile yaptıkları bir çalışmada cebirsel düşünmeyi ikiye ayırmışlardır; ilişkisel düşünme ve fonksiyonel düşünme. İlişkisel düşünme, sayılar ve aritmetik işlemlerden oluşan genelleştirilmiş aritmetik olarak da adlandırılabilirken, fonksiyonel düşünme ise; anlama, kullanma veya sentez yapma ilişkilerinden herhangi birini içeren sembolleri, grafikleri veya tabloları kapsamaktadır.

Tüm bunlar cebirsel düşünme sürecindeki sarmallar olarak ele alınsa da aslında cebirsel düşünme süreçleri temel akıl yürütme türlerinden ayırt edilemez. Öğrenciler matematik yaparken hem cebirsel düşünme süreçlerine hem de akıl yürütmeye kendilerini maruz bırakırlar. Kieran ve Jeannotte’ye göre (2017) öğrencilerin cebirsel görevlerle uğraşırken geçirdikleri süreçler ve ulaştıkları sonuçlar kullandıkları akıl yürütme biçimlerine de bağlıdır. Bireylerin bir genelleme geliştirmeye çalıştığı aşamada üretilen tahminler, tümevarımsal akıl yürütmenin gerekli olduğunu göstermiş ve bu muhakeme biçiminin, ortak noktaların belirlenmesinde ve genellemelerin ortaya çıkarılmasında önemli bir rol oynarken tümdengelimsel akıl yürütme ise sınırlı genellemelerden daha doğru genellemelere ulaşabilmek için önemlidir (Rivera ve Becker, 2007; Ellis, 2007). Bu sebeplerle, öğrencilerin cebirle ilgili görevlerle uğraştıkları süreç ve ulaştıkları sonuçlar kullandıkları muhakeme biçimlerine bağlıdır.

Chimoni ve arkadaşları (2018) tüm bu yaklaşımların üzerinde çalışmış ve cebirsel düşünmeyi dört temel boyutta inceleyerek (Şekil 4) cebirin temel içerik dizileri (sarmalı), temel cebirsel kavramlar, cebirsel süreçler ve muhakeme biçimlerini tutarlı bir şekilde tanımlamış ve analiz etmişlerdir:

Şekil 4

Cebirsel Düşünmenin Temel Boyutları (Chimoni vd., 2018, s. 61)



1. Boyut: İçerik Sarmalı; üç temel içerik dizisindeki yapı ve ilişkileri incelemek; genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme.

   1.1. Genelleştirilmiş aritmetik: Sayılar ve özellikleri, işlemler ve özellikleri, işlem prosedürleri, bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerde bilinmeyen niceliği hesaplama, eşittir sembolünün işlemsel olarak kullanılması.

   1.2. Fonksiyonel düşünme: Örüntülerde bir düzenin fark edilmesi ve buna yönelik bir genelleme geliştirilmesi, ardışık terimlerin bulunması, nicelikler arasındaki ilişkiyi tespit etme ve uygun sembol, tablo, grafik gibi farklı temsilleri kullanma, cebirsel ifadeye uygun sözel ifadeyi belirtme, eş zamanlı değişimin fark edilmesi, eşittir sembolünün ilişkisel olarak kullanılması.

1.3. Modelleme: İki değişken arasındaki ilişki hakkında varsayımda bulunma, temsil etme, sonuçları karşılaştırma, gerekçelendirme ve genelleme.

2. Boyut: Kavramlar; temel cebirsel kavramları anlama, eşittir işareti, eşitlik, denklemler, sayıların özellikleri, işlemlerin özellikleri, değişkenler, bilinmeyen nicelikler, semboller, eş zamanlı değişim (Kaput, 2008).

3. Boyut: Süreçler; fark etme, varsayımda bulunma, temsil etme, genelleme, gerekçelendirme ve doğrulama gibi benzerlik ve farklılıkların araştırılmasına ve yapı ve ilişkilerin doğrulanmasına yönelik süreçlerin uygulanması (Blanton vd., 2011).

4. Boyut: Muhakeme biçimleri; sonuçlara ulaşılmasını sağlayan tümevarımsal, tümdengelimsel ve çıkarımsal akıl yürütme (muhakeme) biçimlerinin kullanılması (Jeannotte ve Kieran, 2017).

Temel Cebirsel Kavramlar ve Kavramların Öğretimi

Cebirsel İfade ve Öğretimi

Cebirin, niceliklerin ve sayıların harflerle temsil edilmesi gibi yapılardan oluşması, bu yapılar arasında işlemlerin gerçekleştirilmesi ve yapısal özelliklerine yönelik anlamlandırılmasıyla oluşan cebirsel ifadeler, okul cebirinde öğrencilerin karşılaştığı ilk kavramdır (MEB, 2018). Bu sebeple cebirsel ifadenin tanımının iyi yapılması gerekmektedir. Cebirsel ifade; en az bir harf (veya değişken) ve işlem içeren ifade olarak tanımlandığında, tek başına olan “a” cebirsel ifadesinin aslında a’nın bir katı olduğu yani “1.a” şeklinde yazılabileceği ve hem bir harfe hem de çarpma işlemine sahip olduğu açıklaması verilmelidir. Aritmetikte sayılarla ve hesaplamalarla somut nesnelerin sayılarına odaklanırken, cebirsel ifadelerde somut nesne sayısını veya nicelikleri harfle temsil ederek ifade etmeye odaklanılır (Gürefe, 2022). Cebirsel ifadelerde harfli temsilleri görmezden gelmeleri veya tüm sayıların yanında aynı harf varmış gibi işlem yapmaları da karşılaşılan zorluklardan biridir (Tirosh vd., 1998). Örneğin “3x+7” ifadesinin cebirsel bir yapı olmasının göz ardı edilerek “10x”e veya “10”a eşit olduğunun iddia edilmesi gibi. Benzer bir örnek ise “x+y” cebirsel ifadesinin “xy” olarak kabul edilmesine de verilebilir. Bu gibi zorlukların kalıcı ve yanlış öğrenmeye sebebiyet vermemesi için aritmetik işlemlerin gerçek anlamları üzerinde durulması ve işlemlerin özelliklerinin de iyi kavranması önemlidir (Kieran, 1992; Warren, 2003; Gürefe, 2022). Cebirsel ifadelerin sözlü olarak ifade edilebilmesi veya tam tersi sözlü olarak ifade edilenin cebirsel ifadeye dönüştürülmesi, öğrencilerin cebirsel düşünme sürecinde de doğru genellemelere ve matematiksel modellere ulaşabilmeleri için önemlidir (Cai ve Knuth, 2011).

Değişken Kavramı ve Öğretimi

Birden fazla değer alabilen veya belirli bir niceliği temsil eden ve cebirsel ifade yapılarında yer alması gereken değişkenlerin öğrenciler tarafından doğru yapılandırılması önemlidir (Asquith vd., 2007). Değişkenleri temsil eden harflerin nesne isimlerinin veya birimlerin kısaltması olmadığı üzerinde durulması ve cebirsel ifadede değişken yerine yazılan sayının sonucu nasıl etkilediği gibi eş zamanlı değişime dikkat çekilmelidir (Gürefe, 2022). Örneğin benzer terimleri ve benzer olmayan terimlerin nasıl toplandığını anlatırken, “5 elma + 2 armut” ifadesinde “elmalarla armutlar aynı değildir toplanmaz” ifadesi kullanılabilirken, “5e+2a” gibi bir temsil kullanılması, cebirsel ifadelerdeki değişkenin nesne isminin kısaltması gibi anlaşıldığı bir yanılgıya sebep olabilir. “7m” cebirsel ifadesinin “7 metre”nin kısaltması değil “m’in 7 katı” olduğu belirtilmelidir. Yine de öğrenciler problem çözerken, değişkenleri kendi istedikleri harflerle yazabilir. Değişkenin yer tutucu özelliği, bilinmeyen anlamında kullanımı ve değişen nicelik anlamları bulunduğu cebirsel yapıya göre değişmektedir (Van de Walle vd., 2019). Değişkenin kullanım amaçlarına uygun örneklerle desteklenmesi, doğrusal artan veya azalan örüntülerde genellemeye ulaşma, problem çözerken bilinmeyeni değişken ile temsil etme, “a+b=8” gibi bir ifadede hem a'nın hem b'nin birbirine göre alacağı değerlerin değiştiğini fark etme gibi örnekler çeşitlendirilebilir (Gürefe, 2022).

Eşitlik Kavramı ve Öğretimi

Okul cebiri öncesi öğrencilerin eşit sembolü ile karşılaşması, aritmetik işlemlerde hesaplama yaparken sonucu yazmak için kullanmaları ile gerçekleşmekte ve işlemsel görevde sonucunu yazarken kullanılan "=" sembolü, soldan sağa doğru ve her zaman sonuç odaklı bir anlam kısıtlamasına sebep olabilmektedir (Kieran, 1981; Stephens vd., 2006). Eşit sembolünün öğretiminde solunda ve sağında yazan ifadelerin arasında olan, iki tarafın da birbirine eşit olduğu bir "denge" durumunun varlığının vurgulanması, yani eşit sembolünün iki nicelik veya iki ifade arasında bir denklik ilişkisini temsil ettiği anlaşılmalıdır (Alibali vd., 2007; Asquith vd., 2007). İlişkisel durumun farkındalığı, denklem çözerken ezberlenen algoritmalar yerine, sağ ve sol taraf arasında bulunan dengeyi korumayı sağlar. Öğrencilere eşittir sembolünü daha iyi kavratabilmek için tahterevalli ve eşit kollu terazi gibi günlük hayatta karşılaşabilecekleri somut veya sanal materyaller kullanılarak ilişkisel durumu somutlaştırılabilir (Van de Walle, 2019; Güven Akdeniz, 2022). Eşittir sembolünün farklı görevlerinin olduğunun anlaşılması, denklem kavramının anlaşılmasında ve ayrıca eşitsizlik kavramının anlaşılmasında önemlidir

Denklem Kavramı ve Öğretimi

Denklem kavramı okul matematiğinde öğrencilerin en sık karşılaştığı ve okul cebiriyle birlikte problem çözerken başvurdukları en önemli konulardan biridir (Knuth vd., 2006; Ertekin, 2022). Denklem, eşit sembolünün bir tarafındaki ifadenin diğer tarafa eşit olması durumu veya bir tarafındaki cebirsel ifadenin diğer taraftaki ifadeye eşit olması durumu şeklinde açıklanabilir. Osborne ve Wilson (1992) denklemi, eşit sembolünün kullanıldığı bir açık önerme olarak ifade etmiştir. Okul cebirinde denklemle ilk defa karşılaşan öğrenciler, problemleri denklem kurarak cebir diliyle ifade etmeyi öğrenirler. Fakat denklemi çözerken hep aynı algoritmaları kullanmaları kavram yanılgılarına ya da hatalara sebep olabilir. Bu yüzden işlemlerin özellikleri üzerinde durulmalı ve eşittir sembolünün ilişkisel anlamı doğru yapılandırılmalıdır (Knuth vd., 2006). Denklemlerde değişkenin bilinmeyen olarak görev alması, denklemin derecesine ve değişkenin tanımlı olduğu sayı kümesine göre değişkenin alacağı değerin veya değerlerin bunlar göz önünde bulundurularak denklemin çözülmesiyle, elde edilen ve denklemde yerine yazıldığında eşitliği doğrulayan değişken değerleri, denklemin çözüm kümesini oluşturmaktadır (Kieran, 1997). Denklem çözerken kullanılan bazı stratejileri Kieran (1992) sayı bilgisinin kullanımı, sayma tekniklerinin kullanımı, geriye doğru çalışma (ters işlem), karşılaştırma, aynı işlemi eşitliğin korunumu için her iki tarafa da uygulama gibi belirtmiştir. Denklem çözme ve öğretiminde çeşitli somut veya sanal materyaller kullanılabilmektedir; eşit kollu terazi, sayma pulları ve cebir karoları gibi sanal olarak da çeşitli kaynaklardan (NLVM) edinilebilecek sanal manipülatifler, öğrenciler için denklem kurmayı ve değişkenin değerini bulmayı somutlaştırabilmektedir.

Eşitsizlik Kavramı ve Öğretimi

Cebirsel denklemlerle eşitliğin korunumu üzerinde durulmasının ardından bilişsel olarak eşitsizlik kavramına hazır olan öğrenciler okul cebirinde eşitsizliklerle tanışır (NCTM, 2000). Eşitlik kavramının dengeyle açıklandığı durumda eşitsizlik iki taraf arasında oluşan bir dengede olmama durumudur (Kieran, 2004). Öğrenciler, karşılaştıkları eşitsizlik ifadelerini cebirsel olarak ifade edebilmeleri ve eşit sembolü yerine “<, >, ≥, ≤” gibi sembollerin kullanımında “en az, en çok, en fazla, maksimum, minimum” gibi sözel ifadelerin karşılığının hangi sembolle yazılabileceği konusunda zorluk yaşamaktadırlar (Bingölbali ve Özmantar, 2015). Eşitliğe karşın eşitsizlik kavramının kendi yapısından dolayı, epistemolojik olarak öğrencilere zor gelmesi kaçınılmazdır (Boero ve Bazzini, 2004).

Örüntü Kavramı ve Öğretimi

Matematik hem yaşadığımız dünyada bulunan hem de zihnimize etki eden kalıpları (örüntüleri) anlamaya çalışan ve yaşayan, bu örüntüleri keşfetmek için çabalamayı gerektiren, sadece sayılarla değil aslında örüntülerle ilgili bir bilimdir (Schoenfeld, 1992).

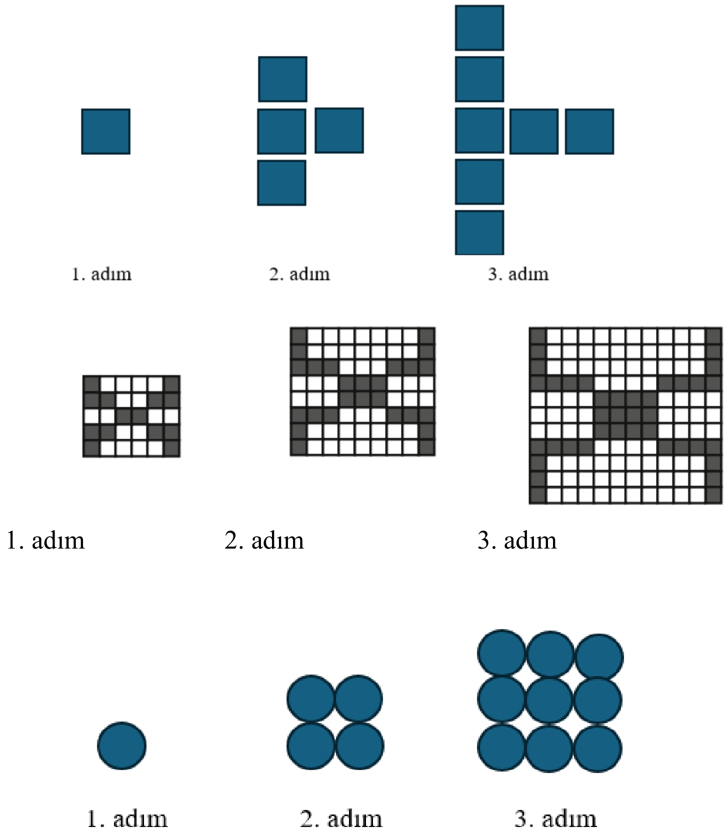
Günlük yaşamda doğada karşılaştığımız veya kendi hayatımızda oluşturduğumuz rutinler, sesler, müzik ritimleri, renkler gibi örüntüleri aramak ve keşfetmek matematiğin kalbidir (Schoenfeld, 1992). Clements ve Sarama (2007), küçük çocuklara genellemeleri gözlemleme ve sözlü olarak ifade etme fırsatı sağlandığında, örüntüyü oluşturan kalıpların anlaşılması, devam ettirilebilmesi ve oluşturulabilmesinin matematiksel ilişkileri fark etmelerine ve anlamalarına yardımcı olurken, cebirsel düşünmenin temellerini oluşturabileceğini belirtmektedir.

Örüntü (desen) tanımları incelendiğinde (Threlfall, 1999; Guerrero ve Rivera, 2002; Olkun ve Toluk Uçar, 2006) sayı veya şekillerden oluşan, belirli bir düzene sahip olan ve bu düzenin dikkat çektiği ve genellenebildiği düzenlerdir. Örüntüyü oluşturan adımlar veya terimler arasındaki ilişkilere göre çeşitlendirilebilen örüntülerde, aynı desen biriminin (pattern core) tekrar ettiği öz-yinelemeli/tekrar eden (tekrarlayan) örüntüler ve desenin bir kurala göre arttığı veya azaldığı (değişen) örüntüler olarak ikiye ayrılabilir (Lijedahl, 2004). Haftanın günleri, aylar, mevsimler gibi günlük hayattaki örüntüler öz-yinelemeli örüntülere örnek teşkil ederken, sayı veya şekillerin ABAB…, 123123… şeklinde devam ettiği örüntülerde, birim desenin uzunluğu örüntüde bir düzen oluşturur ve bu örüntülerde elemanların sayısal değerleri önemli değildir (Liljedahl, 2004).

Değişen örüntülerden olan sayı örüntülerinde (sayı dizilerinde), elemanların sayısal değerleri önemlidir ve başlangıç elemanından itibaren her bir adımda elemanın alacağı değer bir önceki elemana bağlıdır. 1, 5, 9, 13 … gibi sayı örüntülerinde, örüntü kuralı sabit artışlı iken, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$… gibi sabit bir oranda azalarak değişen sayı dizileri de örüntü oluşturmaktadır. Şekil 5’te şekil örüntüleri için farklı örnekler sunulmuştur.

Şekil 5

Geometrik Şekillerle Oluşturulan Örüntü Modelleri



Sabit değişen (doğrusal) şekil örüntüsü

Kare kurbağa deseni örüntü görevi (Rivera, 2010, s. 299)

Değişen (ikinci dereceden) şekil örüntüsü

Örüntülerde sonraki adımların bulunması, terimlerin hesaplanarak oluşturulması gibi görevler, aritmetiğin genellenmesi ile devam ettirilecek adımlarda yakın terimleri bulmak için kolaylık sağlarken, uzak terimleri hesaplayabilmek için örüntü genellemesine (örüntü kuralı) yani cebirsel bir genellemeye ulaşmak önemlidir (Rivera, 2010). Aksi takdirde örüntü temelli bir cebir öğretiminde, fonksiyonel düşünmeyi geliştirecek adım sayısı ve terimin niceliği arasındaki ilişkiyi ortaya koyamamak, cebirsel düşünmenin gelişmesine de engel olacak ve değişken kavramının yapılandırılmasını desteklemeyecektir (Liljedahl, 2004; Palabıyık ve Akkuş İspir, 2011).

Örüntü ve ilişkilerle ilgili en sık görülen zorluk ve kavram yanılgısı, yakın terimlerin hesaplamalı olarak bulunabilirken, uzak terimin (n.) bulunamaması, uzak terimi (n. terim) bulmaya yönelik cebirsel genellemeye ulaşılamaması veya sözel olarak ifade edilebilen genellemenin cebirsel olarak ifade edilememesi olarak ortaya çıkmaktadır (Zaskis vd., 2008). Öğrencilerin şekil örüntülerinde, sonraki adımları çizerek elde etmesi ve aritmetik genellemeyi keşfederek cebirsel bir genellemeye ulaşmaya çalışmaları, yapılandırılmış bir öğretim için anlamlı öğrenmeyi desteklemektedir (Özyıldırım Gümüş, 2022). Değişen sayı veya şekil örüntülerinde, adım sayısı ile terim arasındaki anlamlı nicel ilişkiyi ortaya çıkarabilmek için kullanılan tablo gösterimi, genellenmiş aritmetikten fonksiyonel düşünmeye geçişte farklı temsillerden biri olarak kullanılabilmektedir (Van de Walle vd., 2010).

Karşılaştırmalı Eğitim Araştırmaları ve Önemi

Son yüzyıllarda yaşanan teknolojik gelişmeler, toplumun birer ferdi olan insanların da bireysel gelişimlerini gündeme getirmiştir. Gelişmekte olan ülkelerin ve toplumların benzer gelişim basamaklarını çıkmak zorunda olmaları, gelişim esnasında aynı sorunlarla başa çıkmak zorunda kalmalarına ve birbirlerinin deneyimlerinden yararlanmak durumunda kalmalarına sebep olmuştur (Ergün, 1985). İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra ekonomik kalkınma ve demokratikleşme için bireysel ve toplumsal gelişimin en temel unsuru olan eğitim ve eğitim hakkındaki politik tartışmalar, ilerleyen yıllarda fırsat eşitliği ve eğitimin demokratikleşmesi konularına yer verilmeye başlanmıştır (Mattheou, 2009; Rizvi ve Lingard, 2009).

Ülkelerin 20. yüzyılda gerçekleştirdikleri eğitim reformuyla birlikte çoğu ülkede, toplumların üst tabakalarına ayrıcalık olarak görülmekte olan eğitimden, devlet yükümlülüğü olarak görülen zorunlu yaygın eğitime geçilmiştir. Eğitim sistemleri ülkelerin toplumsal yapılarına ve devletlerin politikalarına göre yeniden şekillenmiştir. Reformlarla birlikte eğitim eşitliği, fırsat eşitliği, eğitime erişim gibi kavramlar da gündeme gelmiş ve çeşitli bağlamlarda ülkelerin eğitim sistemleri karşılaştırmalı eğitim araştırmacıları tarafından bilimsel olarak sorgulanmış ve araştırılmıştır. Eğitim sistemlerinin niteliği ve verimliliği ile ilgili çıktıların, ülkelerin eğitim sistemlerinin ve devlet politikalarının karşılaştırılmasıyla objektif olarak ortaya konulabilmesi için, eğitim sistemlerinin temel ögeleri olan öğretim programlarının amaçları, hedefleri, içerikleri, eğitimcilerin nitelikleri, öğretim süreci gibi temel özelliklerin bilinmesi karşılaştırmalı olarak incelenip ülkelerin gelişimine ne gibi katkılarının olduğunun belirlenmesi önemlidir (Bakioğlu vd., 2017; Mattheou, 2009; Ergün 1985). Karşılaştırmalı eğitim araştırmalarında amaç, benzerlik veya farklılıkları göstermenin yanında bunları izah etmek, bilgilendirmek, ikna etmektir (Balcı, 2018). Karşılaştırmalı eğitimle ilgili tanımlamalar değiştikçe tercih edilen araştırma yöntemleri de farklılık göstermektedir. Karşılaştırmalı eğitim konusunda yapılan araştırmalar türlerine göre farklı şekilde sınıflandırılırken (analitik, betimsel, değerlendirme ve keşfedici gibi) (Phillips, 2006), araştırmanın amacına göre araştırma yöntemleri de farklılaşmaktadır. Bunlar; fonksiyonel analiz yöntemi, istatistiksel yöntem, örnek olay yöntemi, problem inceleme yöntemi, saf karşılaştırma yöntemi gibi karşılaştırmalı eğitim araştırması için seçilebilecek yöntemlerdir (Ergün, 1985; Er, 2021).

Karşılaştırmalı Eğitim Araştırmalarında Temel Yöntemler

Eğitimin karmaşık ve çok yönlü bir boyuta sahip olması, eğitim sistemleri incelenip karşılaştırılırken araştırılması ve göz önünde bulundurulması gereken sosyal, kültürel, politik, dinsel gibi farklı unsurlara da dikkat edilmelidir (Aydın, 2018). Karşılaştırması yapılacak olan eğitim sistemine ait ögeler net olarak belirlenmeli ve belirtilmelidir. Eğitim tarihiyle eğitim tarihi, öğretim programıyla öğretim programı vb. aynı ögeler karşılaştırılmalıdır. Bilgiye dayanan karşılaştırmalı araştırmalar ülkeler arası düzeyde yapılabileceği gibi, ülkelerin kendilerine ait eğitim sistemlerinde yer alan bir öge için derinlemesine bir analiz yapılabilir veya tarihsel gelişimleri de incelenip, karşılaştırılabilir (Er, 2021). Karşılaştırmalı eğitimin bir yöntem mi yoksa bir disiplin mi olduğuna dair tartışmalar gerçekleşmiş ve farklı araştırmacılar farklı yorumlarda bulunmuştur (Bereday, 1964; Garrido, 1996; Ergün, 1985). Karşılaştırmalı eğitimde temel olarak araştırma yaklaşımları yatay ve dikey yaklaşım olmak üzere ikiye ayrılmıştır.

Yatay Yaklaşım. Karşılaştırmalı eğitim araştırmacılarının en sık başvurduğu (Erdoğan, 2015) yaklaşım olan yatay yaklaşım, ülkelerin aynı dönemdeki benzer ögelerinin veya özelliklerinin önceden belirlenen kriterlere göre karşılaştırılmasıdır. Akademik başarı, eğitim ve öğretimde yaşanan problemler, yüksek öğrenime geçiş, öğretmen yetiştirme vb. gibi konular paralel olarak karşılaştırılır (Aydın, 2018).

Dikey Yaklaşım. Karşılaştırmalı eğitim araştırmalarında farklı ülkelerin eğitim sistemleri ve sistem unsurları karşılaştırılırken, yalnızca bir ülkenin kendi tarihsel sürecinde meydana gelen değişimler de incelenmektedir. Bu değişimlerin tarihsel süreciyle ilgili araştırmalarda dikey yaklaşım kullanılmaktadır (Ültanır, 2000). Örneğin, Osmanlının son döneminden günümüze öğretmen yetiştirilmesi veya lise düzeyindeki matematik eğitimiyle ilgili olan değişimler, sosyal, kültürel, politik veya ekonomik farklılıklar da göz önünde bulundurularak karşılaştırılır.

Ülkelerin Eğitim Sistemleri ve Matematik Öğretim Programlarının Gelişimi

Türkiye'de Eğitim Sistemi

Merkezi yönetime sahip Türkiye, eğitim sistemini yönetim şekline göre yapılandırmış olan ve bütün eğitim politikaları ve eğitimle ilgili tüm etkinlikleri Millî Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir ülkedir. Cumhuriyetin ilanından bu yana eğitim alanında birçok reform yapılmıştır. 1997 yılından itibaren zorunlu eğitim süresi 8 yıla çıkarılmıştır. Ülkelerin 2000'li yıllara doğru eğitim sistemlerinde gerçekleştirdikleri reform hareketine ayak uyduran Türk eğitim sisteminde davranışçı yaklaşım ve öğretmen merkezli anlayış geride bırakılarak, öğreneni merkeze alan yapılandırmacı yaklaşım anlayışıyla öğretim programları yenilenmiş, 2004 yılında pilot olarak uygulanmaya başlanmış ve 2005 yılından itibaren yürürlüğe konulmuştur. 2005 yılı itibariyle lise eğitimi en az 4 yıl olmak üzere düzenlenmiş ve 2013-2014 eğitim öğretim yılı itibariyle 4 yıl temel eğitim birinci kademe (ilkokul), 4 yıl temel eğitim ikinci kademe (ortaokul), 4 yıl ortaöğretim (lise) olmak üzere zorunlu eğitim süresi 12 yıla tamamlanmıştır. 1-4. Sınıfa kadar olan ilkokul eğitimi 66 ay ile 10 yaş arasındaki çocukları, 5-8. Sınıfa kadar olan ortaokul eğitimi 10 yaş ile 14 yaş arası çocukları, 9-12. Sınıfa kadar olan ortaöğretim eğitimi ise 14 yaş ile 18 yaş arası öğrencileri kapsamaktadır. 66 ay ile 18 yaş arası eğitim zorunlu tutulmuştur ve ücretsizdir.

Türkiye'de Matematik Dersi Öğretim Programlarının Gelişimi

Cumhuriyetin ilanından sonra günümüze kadar birçok kez matematik dersi öğretim programları yenilenmiş, geliştirilmiştir ve uygulanmıştır. Temel matematik bilgisini günlük hayatta kullanabilmeye odaklanmış olan öğretim programları incelendiğinde ilk olarak karşımıza çıkan 1926 ve 1931 yılı ortaokul matematik dersi programlarında, hesap (aritmetik) ve hendese (geometri) konularına ait soyut kavramların günlük yaşamdaki somut karşılıklarıyla anlatılması ve konuların uygulamalı olarak öğrencilere bol örneklerle öğretilmesi üzerinde durulmuştur (Kömleksiz ve Gökmenoğlu, 2018).

1938 öğretim programıyla birlikte kullanılan terimler, 1932 yılında başlatılan dil reformu sonrası 1936 yılında terimlerin Türkçe karşılıklarının yazılmaya karar verilmesi ile M. K. Atatürk tarafından geometriye birçok Türkçe terim kazandırılmıştır (Tekin,1988). Geometri (hendese) de bu terimlerden biridir. Programa bakıldığında ilk kez "cebir" kavramı görülmekle birlikte yine önceki programlardaki aritmetik ve geometri konuları yer almakta olup işlenişle ilgili bilgi verilmemiştir (Kömleksiz ve Gökmenoğlu, 2018).

Kömleksiz ve Gökmenoğlu (2018) tarafından incelenen 1949 ve 1990 öğretim programında strateji, yöntem ve teknik kavramlarına hiç değinilmemiş olduğu, 1977 öğretim programında sadece yöntemin bahsinin geçtiği, yöntem ve tekniğin aynı anda verildiği ilk programın 1998 yılı programı olduğu belirtilmiştir. Yapılandırmacı öğrenme kuramıyla yenilenen 2005 öğretim programı birçok açıdan zengin olduğu gibi hem strateji hem yöntem hem de teknik kavramlarından bahsetmiştir. 2013-2014 eğitim öğretim yılında 4+4+4 eğitim sistemine geçilmesiyle birlikte, 5. sınıf ortaokul düzeyine dahil edilmiş ve öğretim programı yeniden düzenlenmiştir. 2013 yılı programına bakıldığında strateji ve yöntemlerden bahsederken, teknik kavramından bahsedilmemiştir. 2017-2018 eğitim öğretim yılında uygulanmaya başlayan yeni öğretim programı günümüzde uygulamada olan son programdır. Matematik eğitiminde strateji, yöntem ve teknik kavramlarından bahsedilse de aslında bu kavramlara yeterince yer verilmediği sonucuna ulaşılmıştır (Kömleksiz ve Gökmenoğlu, 2018).

Matematik Öğretim Programlarında Cebir Öğrenme Alanının Yeri

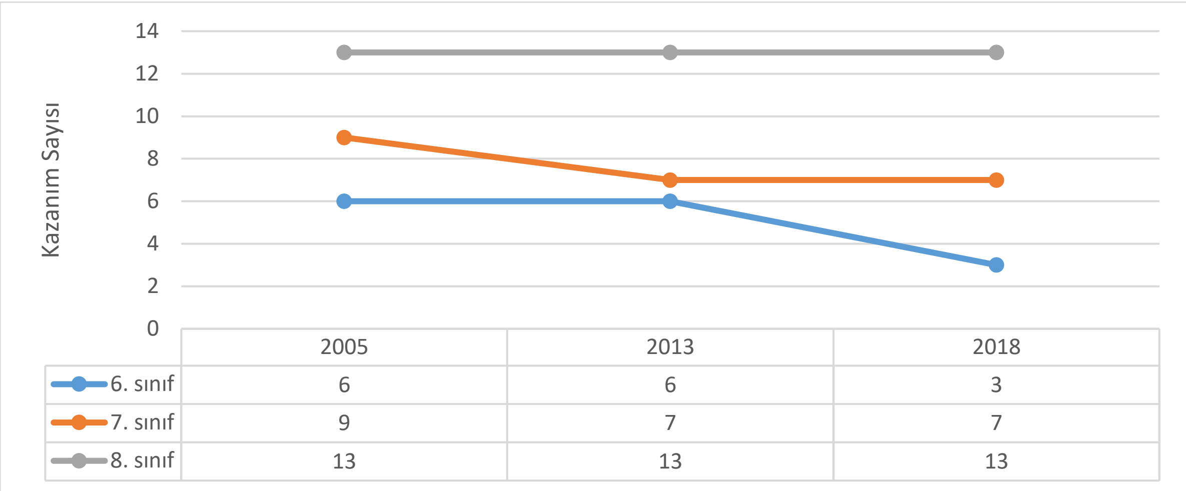
Tarihsel gelişimine bakıldığında, Harezmi'den günümüze cebirin bir dizi sıralı işlemler ve uygulamalarıyla birlikte ifadelerin sembolik bir dille gösterilmesi, okullarda uygulanan öğretim programlarındaki cebir öğrenme alanına etki etmiştir. Cebirin yalnızca bir dizi aritmetik işlemlerle, belirli kuralları takip ederek anlamı kavranamamış sembolik ifadelerin hesaplanması gibi görülmesi, cebirle ilgili birtakım zorlukları da beraberinde getirmiştir (Kieran, 2007; Ususkin, 1988; Toluk Uçar, 2018). Eşittir sembolünün yalnızca soldan sağa doğru okunması, iki taraf arasında bulunan ilişkisel durumun tespit edilmesinin önüne geçerken, cebirle ilgili etkinliklerde yalnızca nicel bir değer bulunmaya odaklanılması, sayılar arasında aritmetik işlemlerin yapılmasındaki tek amacın yine bir sayıya ulaşmak olması ve bu işlemlerin özellikleri ile işlemler arasındaki ilişkilerin ortaya konulamaması, cebirsel ifadelerin yalnızca birer harfli ifade olarak görülmesi ve harfli ifadelerin yalnızca bir sayısal değerinin olduğunun düşünülmesine yol açarak, değişken kavramının anlaşılmasının da önüne geçmiş ve cebirle ilgili zorlukların aşılamamasına sebebiyet vermiştir (Toluk Uçar, 2018). Okul cebirinde karşımıza çıkan yaklaşımlar, öğretim programlarına da yansımış ve eğitim reformlarıyla birlikte cebir öğretimi de kavramsal temelli ve süreç odaklı olarak ele alınmaya başlanmıştır (NCTM, 2000).

Cumhuriyetin ilanıyla birlikte çeşitli alanlarda reformlar yapılmış, hazırlanan öğretim programları dönemin ihtiyaçlarına göre şekillenmiştir. Ortaokul seviyesinde toplam 10 öğretim programı uygulamaya konulmuş ve geliştirildikleri dönemlerde popüler olan matematik hareketlerinin etkisi, programlarda göz önünde bulundurulmuştur (Toluk Uçar, 2018). Cebir öğrenme alanıyla ilişkili kavramlar 1926 ve 1931yıllarında uygulanan öğretim programlarında "cebir" olarak yer almazken, "denklem ve denklem çözme", "değişim" ve "doğrusallık" kavramlarına yer verilmiştir. 1938 yılı öğretim programında ilk kez cebir kavramının geçtiği "cebir ve aritmetik" konusu içerisinde sadece "denklem ve denklem çözümleri" ile "özdeşlik"lere yer verilmiştir. 1977, 1990 ve 1998 programları incelendiğinde "değişken", "değişim" kavramlarına yer verilmezken bu kavramların kullanıldığı "denklem ve denklem çözümleri”, “ifadelerin denkliği”, “eşitsizlik”, “özdeşlik”, “doğrusallık” gibi kavramlara yer verilmiştir (Toluk Uçar, 2018).

2005 yılında öğrenciyi merkeze alan, yapılandırmacı yaklaşımın benimsendiği ve uygulanmaya başlanıp, sonrasında geliştirilmeye ve yenilenmeye devam eden öğretim programlarında cebir kavramı ilk olarak 6. sınıfta bir öğrenme alanı olarak verilmiş ve alt öğrenme alanlarına bölünmüştür. Şekil 6’da 2009, 2103 ve 2018 öğretim programlarında yer alan kazanım sayılarının yıllara göre değişimi verilmiştir.

Şekil 6

Cebir Öğrenme Alanı Kazanım Sayılarının Sınıflara ve Yıllara Göre Dağılımı



8. sınıf cebir öğrenme alanı kazanım sayıları 2005, 2013 ve 2018 yıllarında sabit kalırken, 7. sınıf kazanımları 2013 yılında azalmış ve sonrasında sabit kalmış, 6. sınıf kazanım sayıları ise 2018 yılında yarıya düşmüştür.

Cebir için köprü vazifesi gören ve fonksiyonel düşünmenin gelişiminde önemli bir rol oynayan “örüntü ve ilişkiler” alt öğrenme alanı, yapılandırmacı yaklaşım ile 2005 öğretim programında yer almış ve sonraki programlarda da yine alt öğrenme alanı olarak verilmiştir. Toluk Uçar (2018) tarafından öğretim programlarındaki cebir kazanımları Kieran’ın (1996) cebir etkinliklerine dair geliştirdiği sınıflama ve NRC (1998) tarafından geliştirilen öğretim programlarında cebir içeriklerinin değerlendirilme ölçütleri kapsamında analiz edilmiştir. Yapılandırmacı yaklaşım ışığında geliştirilmiş olan 2005, 2013, 2017 öğretim programlarında cebir içeriklerinin fonksiyonel, yapısal, temsilsel ve modelleme yaklaşımlarını içerdiği sonucuna ulaşılmıştır. Cebiri bir etkinlik olarak kavramsallaştıran Kieran'ın (1996) geliştirdiği cebir etkinlikleri sınıflandırması çerçevesinde yapılan analizde ise 2005, 2013 ve 2017 öğretim programlarının üretimsel, dönüşümsel ve meta düzey sınıflandırmalarının üçünü de kapsadığı sonucuna ulaşılmıştır (Toluk Uçar, 2018).

Tablo 3

Cebir Öğrenme Alanı, Alt Öğrenme Alanları Kazanım Sayılarının Yıllara Göre Değişimi (MEB)

Sınıf Seviyesi	Alt Öğrenme Alanları	2005	2013	2018
6. Sınıf	Örüntüler ve İlişkiler	2	-	-
	Cebirsel İfadeler	1	6	3
	Eşitlik ve Denklem	3	-	-
7. Sınıf	Örüntüler ve İlişkiler	2	-	-
	Cebirsel İfadeler	2	-	3
	Eşitlik ve Denklem	5	4	4
	Doğrusal Denklemler	-	3	-
8. Sınıf	Örüntüler ve İlişkiler	1	-	-
	Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler	4	4	4
	Eşitlik ve Denklem	5	2	-
	Doğrusal Denklemler	-	4	6
	Eşitsizlikler	3	3	3

Singapur'da Eğitim Sistemi ve Matematik Dersi Öğretim Programı

Küçük bir ada devleti olan ve bağımsızlığını 1965'te ilan eden Singapur, farklı milletlerden oluşan bir halka sahiptir. Bu farklılık sebebiyle birçok dini ve dili bünyesinde barındıran Singapur devletinin milli dili Malay diliyken, resmi dil olarak Mandarin Çincesi, Tamil ve İngilizceyi kabul etmiştir. Politik olarak İngiltere'ye bağlılığını sürdüren bu ada devletinde, diğer Asya ülkelerine göre büyük sayılabilecek bir oranda, halkın neredeyse %95,4'ü okur-yazardır (Bakioğlu ve Göçmen, 2020). Bağımsızlığını ilan ettiği 1965 yılından bu yana eğitim sistemine verdiği önemle ve 1993 yılında yaptığı eğitim reformlarıyla Singapur, uluslararası sınavlarda öğrencilerinin gösterdiği başarısı ile adından çokça söz ettirmeye devam etmektedir.

Singapur'da eğitim sosyal hareketliliğin ve sistemin önemli bir sağlayıcısıdır. Hiçbir çocuğun maddi durumu nedeniyle eğitim olanaklarından mahrum kalmaması, yoksul ailelerin çocuklarını hedef alan okul öncesi eğitime yatırım yapılması ve ilkokullarda akademik olarak zayıf kalan öğrencilerin hem İngilizce hem de matematikte seviyelerinin yükseltilmeye çalışılması ve böylece onların gelecekteki öğrenmelerinin temelini geliştiren programlara yatırım yapılması sayesinde her çocuğa eğitimde eşit fırsatlar sunmaktadır (Kaur ve Leong, 2021).

Singapur'da ilköğretim, ortaöğretim ve yükseköğretime yönelik eğitim çoğunlukla devlet tarafından desteklenmektedir. Özel ve kamu ayırmaksızın tüm kurumlar eğitim bakanlığına kayıtlı olmak zorundadır. Eğitim dili İngilizce olan okul sisteminde öğrenciler sadece "Ana Dil" dersine yönelik eğitimlerini ana dillerinde almaktadırlar. İlköğretim, ortaöğretim ve ortaöğretim sonrası eğitim olarak üç aşamada gerçekleşen Singapur eğitim sisteminde, zorunlu eğitim 7 yaşta başlar ilköğretim ile başlar ve ortaöğretim sonuna kadar devam eder. Okul sistemi ve yaşa göre öğrenim seviyeleri Şekil 7'de gösterilmiştir.

Şekil 7

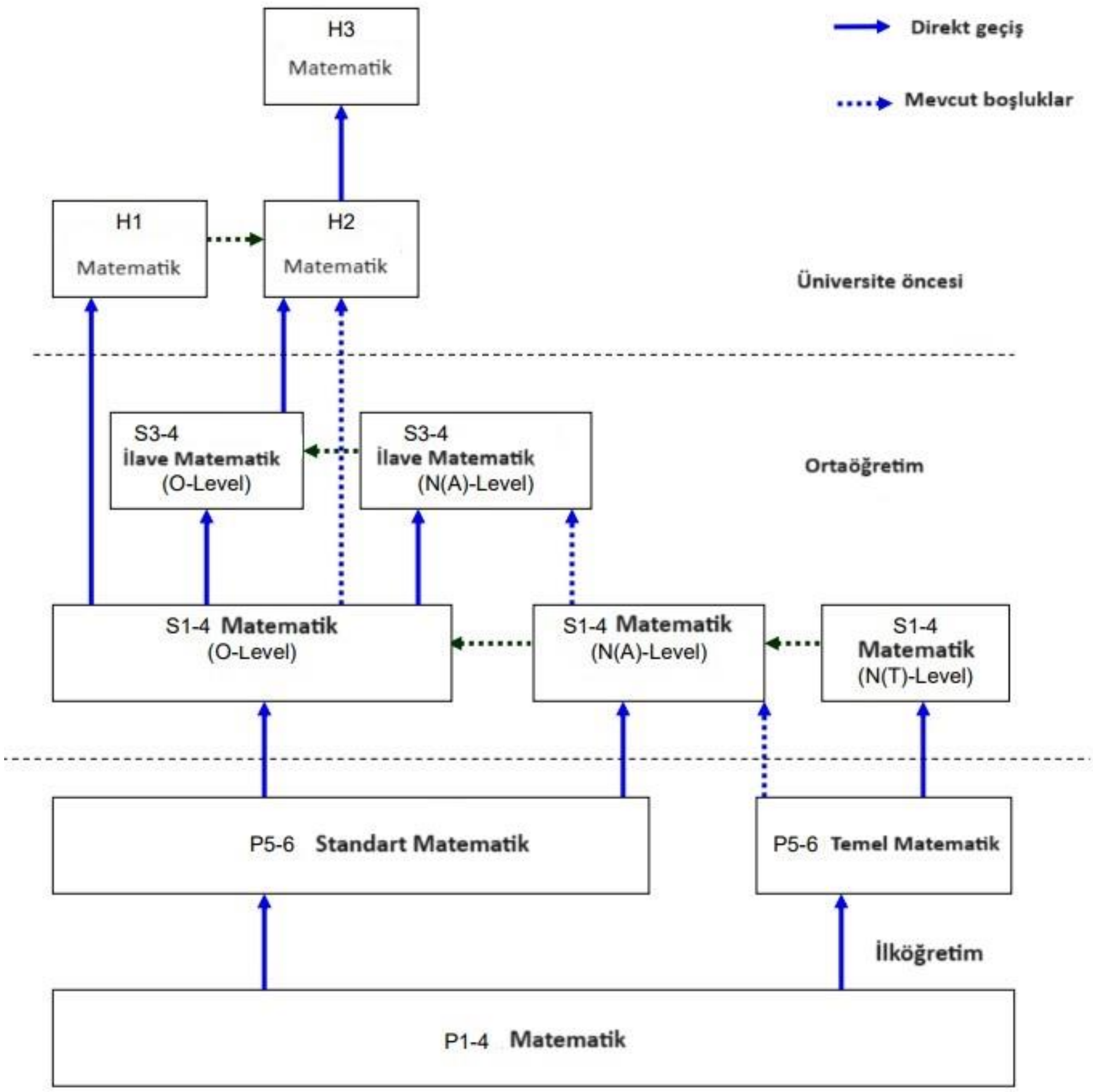
Singapur Eğitim Sistemi ve Yaşa Göre Öğrenim ve Sınıf Seviyeleri (Bozkurt vd., 2019, s. 157)

	Yaş	Öğrenim Seviyeleri		
	22 – 25	Üniversite		
	17 – 21	Teknik Eğitim	Politeknik	Kolej
Zorunlu Eğitim	13 – 16	Normal (Akademik/Teknik)	Özel/Hızlı	
	11 – 12	Uyum Basamağı (P5 – P6)		
	7 – 10	Temel Basamak (P1 – P4)		
	4 – 6	Okul Öncesi		

Singapur matematik dersi öğretim programı ilköğretim kademesinde (P1-4) tüm öğrencilere sabit bir müfredat sunarken, standart P5-6 matematik müfredatının bir alt kümesi olan temel P5-6 matematik müfredatı, ilk dört yılda matematik dersinde yer alan bazı önemli kavram ve becerileri yeniden ele alır. Öğrenciler standart ya da temel matematik müfredatlarından birine, yetenekleri doğrultusunda öğretmenleri tarafından yönlendirilir. Temel matematik müfredatı, standart matematik müfredatına göre daha sadedir fakat yıllık toplam ders saati temel matematikten fazladır (SMOE, 2020a). O-Level matematik müfredatı standart matematik müfredatını temel alır ve bulunduğu ortaöğretim kademesinde en kapsamlı olanıdır. Şekil 8'de aynı kademede soldan sağa müfredat içerikleri daha temel kavramlar üzerinde yoğunlaşmaktadır. Öğrencilerin seviyelerine göre uygulanan müfredatlar, matematiğin hiyerarşik yapısına uygun ve kendi içlerinde sarmal bir yapıya sahip olacak şekilde tasarlanmıştır.

Şekil 8

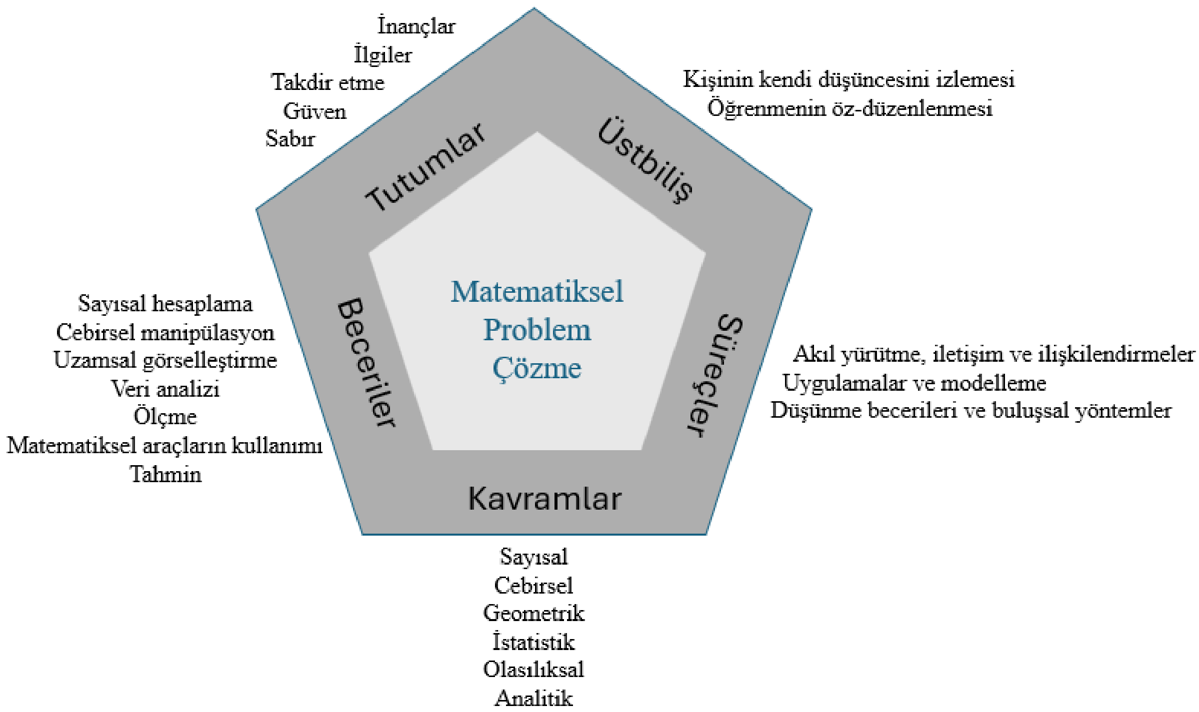
Singapur Matematik Dersi Öğretim Programlarının Tasarımı ve İlişkileri (SMOE, 2020a, s. 9)



Singapur matematik dersi çerçevesi, merkezinde matematiksel problem çözme olan bir beşgen (Şekil 9) oluşturmaktadır. 21. yy becerilerini de yansıtan çerçeve; ilkokuldan yükseköğretim öncesine kadar her seviyede matematiğin öğretilmesi, öğrenilmesi ve değerlendirilmesi için yön gösterir ve rehberlik sağlar (SMOE, 2020).

Şekil 9

Singapur Matematik Dersi Müfredatı Çerçevesi



Kavramsal anlayışın hâkim olduğu matematik çerçevesinin amacı, öğrenci merkezli bir eğitim anlayışı sunmak, daha ilgi çekici ve teknoloji destekli bir öğrenme ortamı oluşturmak, öğrencilerin yaşantılarında daha fazla çeşitliliği ve yaratıcılığı desteklemek için öğretmenlerin bu bileşenlere odaklanmalarına destek olmaktır (SMOE, 2020). Sayısal, cebirsel, istatistiksel, olasılıksal ve analitik olarak kategorize edilen temel kavramlar üzerinde durulur ve öğrencilerin birbirine bağlı kavramları matematik uygulamalarında kullanabilmeleri beklenir. Süreçleri oluşturan muhakeme becerilerinin temel amacı öğrencilerin, matematiksel bilgiyi edinmek ve ardından bu bilgiyi farklı gerçek dünya problemlerini çözmek için kullanabilmeleridir. Üst biliş, rutin olmayan problemleri çözerek öğrencinin kendi düşüncelerini kontrol edebilmesini ve geliştirebilmesini sağlamaktadır. SMÖP bu çerçeveyi merkeze alarak yapılandırılmış, öğrencilerin erken yaşta derse yönelik olumlu tutum geliştirmelerini desteklemiş ve öğrencilerin yaşamları boyunca başarılı birer vatandaş olabilmeleri için güçlü bir matematik temeline ihtiyaçları olduğunu ve bunu sağlamayı hedeflemiştir (SMOE, 2020).

İngiltere'de Eğitim Sistemi ve Matematik Dersi Öğretim Programı

Birleşik Krallık'ta bulunan dört ülkeden biri olan ve anayasaya dayalı monarşiyle yönetilen İngiltere'de, eğitim sistemi uzun tarihsel ve köklü bir yapıya sahiptir. Eğitim sisteminin tarihsel gelişimi incelendiğinde (Howson ve Rogers, 2013) 1800'lerden itibaren devlet tarafından eğitime yapılan desteğin arttığı ve okullaşma oranının yükseldiği görülmektedir. İlköğretim kademesi 1880 yılından bu yana zorunluyken ulusal bir müfredata sahip olmayan ülkede, 1960'lı yıllardan sonra gerçekleştirilen uluslararası eğitim karşılaştırmalarında matematik ve fen bilimleri alanlarındaki düşük öğrenci performansları sebebiyle İngiliz eğitim sistemi, ulusal müfettişleri tarafından incelenmiş ve 1988 yılından itibaren ulusal bir öğretim programı uygulamaya konulmuştur (Howson ve Rogers, 2013). Ulusal müfredat uygulanırken eğitim sisteminde yerelleşmeye izin verilmesi, okulların bireysel öğretim programlarını planlamaları konusunda onları özgür bırakmaktadır (Bakioğlu ve Ülker, 2020).

Eğitim sistemi, zorunlu eğitimi 1988 yılındaki reformla birlikte 4 aşamalı anahtar evreler (key stages) olarak tanımlamış ve uygulamaya başlanmıştır. 5-11 yaşları arasında öğrencilere Anahtar Evre 1 (1-2. sınıflar) ve Anahtar Evre 2 (3-6. sınıflar) olmak üzere 6 yıllık zorunlu ilkokul eğitimleri verilirken, 11-14 yaşları arasında Anahtar Evre 3 (7-9. sınıflar) ve 14-16 yaşları arasında Anahtar Evre 4 (10-11. sınıflar) zorunlu olan ortaöğretim eğitimi verilmektedir (Bakioğlu ve Ülker, 2020). İngiltere'de eğitimin devlet eliyle sunulması, 5 yaşından 19 yaşına kadar eğitimin ücretsiz ve 5-16 yaşlar arası eğitimin zorunlu olması, öğrencilerin entelektüel beceriler kazanmasını, sorgulayıcı düşünme becerilerinin gelişmesini, araştırmaya yönelik ilgilerinin artmasını, insanlar arasındaki her türlü farklılıklara karşı saygılı olmalarını, İngilizceyi etkili bir şekilde kullanabilmelerini, bilimi ve matematiği temel alan bir eğitime sahip olmalarını amaçlamış

(Saylık ve Saylık, 2015; ve entelektüel bir kesim oluşmasını destekleyerek ilkeleri arasında yer vermiştir (Lauwerys, Neff ve Varış, 1979 akt. Yaldız vd., 2020).

Tablo 4

İngiltere Eğitim Sisteminde Anahtar Evrelerin Yaşa Göre Dağılımı (Bakioğlu ve Ülker, 2020)

	Sınıf Düzeyleri (Year)	Yaş (Age)
Anahtar Evre 1 (KS1)	Y1, Y2	5-7
Anahtar Evre 2 (KS2)	Y3, Y4	7-9
	Y5, Y6	9-11
Anahtar Evre 3 (KS3)	Y7, Y8, Y9	11-14
Anahtar Evre 4 (KS4)	Y10, Y11	14-16

İlköğretim kademesini oluşturan Anahtar Evre 1 ve Anahtar Evre 2'yi tamamlayan öğrenciler, öğretim süresi boyunca gördükleri derslerden oluşan genel bir sınava girerler ve bunun sonucunda değerlendirilirler. Ortaöğretime geçişte öğrencilerin değerlendirme sonuçlarına göre, ilgi ve yetenekleri doğrultusunda gidebilecekleri farklı okulla yönlendirme yapılır. Akademik eğitime veya mesleki eğitime devam edilen farklı okul türleri bulunmaktadır. Akademik eğitime devam eden öğrenciler yüksek öğretime devam ederken, akademik anlamda daha az içeriğe sahip mesleki eğitime yönlendirilen öğrenciler ise okulu bitirince iş hayatına hemen başlayabilmektedir (Yaldız vd., 2020).

İngiltere'de matematik dersi müfredatı, öğrencilerin kavramsal anlayış geliştirmelerini, matematiksel işlemlerde akıcı olmalarını ve muhakeme becerilerini geliştirmelerini amaçlamaktadır. Farklı disiplinlerle matematiksel bilgiyi ilişkilendirmenin önemi üzerinde durulan öğretim programı, kullanılacak öğretim materyallerini öğretmenin kararına bırakmış ve Anahtar Evre 1 düzeyinde yazılı ve zihinsel işlem akıcılığına engel olacağı için hesap makinesi kullanımını desteklememiştir (İMÖP, 2013). Anahtar Evre 2'de matematik dersi müfredatında öğrencilerin aritmetik işlemlerde akıcılığa sahip olmaları ve git gide zorlaşan problemleri çözerken kullanacakları cebir diliyle tanışırlar. Y7, Y8, Y9 Ortaöğretime başlarken Anahtar Evre 3 matematik dersi müfredatı, sınıf düzeylerine göre ayrılmamış ve çerçeve olarak verilmiştir. Bu aşamada öğrenciler için sınıf düzeylerine göre çalışma planlarının hazırlanması okullara bırakılmıştır. Öğrencilerin rutin ve rutin olmayan problemleri çözerken işlemleri akıcı bir şekilde gerçekleştirmeleri, matematiksel muhakeme becerileri ve yetkinlik geliştirmeleri için matematiğin diğer disiplinlerle olan bağlantısının önemine yer verilmiştir. Öğrencilerin Anahtar Evre 4'e geçebilmeleri için yeterliğin sağlanması bu evrede gerçekleşmektedir. İleri ortaöğretimi oluşturan Anahtar Evre 4'te, öğrenciler bulundukları okula göre alacakları matematik eğitimi de temel veya ileri seviye olarak değişmektedir.

Kanada'da (Ontario) Eğitim Sistemi ve Matematik Dersi Öğretim Programı

Uluslararası sınavlarda öğrencilerin gösterdiği yüksek performansla dikkat çeken Kanada; Ontario, Quebec, British Columbia, Alberta, Prens Edward Adası, Yukon, Manitoba gibi 10 eyaletten oluşmaktadır. Yerli halkın, İngilizlerin, Fransızların ve farklı ülkelerden göç eden insanların bulunduğu Kanada'da milli eğitim bakanlığı gibi bir genel birim bulunmazken, genel bir milli eğitim politikası da bulunmamaktadır. Her eyaletin, birbirine benzeyen kendine ait eğitim politikası vardır. Bu sebeple merkezi bir yaklaşımla tüm Kanadalı öğrencileri değerlendirmek eğitim araştırmacıları için zor bir konudur (Bakioğlu ve Pekince, 2020). Kanada eğitim sistemini oluşturan eyaletlerin eğitim sistemlerinde ortak olan beş amaç şu şekilde sıralanabilir; öğrencilerin bilişsel gelişimini sağlamak, ilgi ve yeteneklerine göre tercih edecekleri bir mesleğe hazırlamak, ahlaki gelişimlerini sağlamak, Kanada vatandaşlığı bilincini sağlamak ve kişisel gelişimlerini desteklemektir (Taşdan, 2018). Farklı kültürel kökenlere ve farklı anadillere sahip bireylerin hepsi eşit haklara sahiptir. Eyaletlere göre zorunlu eğitime başlama yaşı değişmekle birlikte genel olarak 6-16 yaş arası 10 yıllık zorunlu temel eğitim mevcuttur.

Ontario müfredatı, öğrencilerin bilişsel gelişimleri ve gerek akademideki uzmanlardan gerekse iş piyasasından aldığı dönütlere göre uzman eğitimciler tarafından geliştirilmektedir. Program öğrencilerin gelişimlerine uygun, güçlü yönlerini ve ilgi alanlarını destekleyerek ihtiyaçlarına göre güncellenmektedir (Ontario Ministry of Education, 2024). Zorunlu öğrenme beklentileri (kazanımlar), öğrenme beklentilerine eşlik eden öğretmen destekleri, müfredat bağlamı ile program planlama ve değerlendirme bilgileri olarak dört temel ögeden oluşmaktadır.

Tablo 5

Kanada Ontario Eyaleti Eğitim Sisteminde Sınıf Düzeylerinin (Grade) Yaşa Göre Dağılımı (OASDI, 2024)

		Sınıf Düzeyi	Yaş
İlköğretim	Okul öncesi	Anaokulu	4-5
	İlkokul (Primary)	Grade 1-3	6-8
	Ortaokula hazırlık (Junior)	Grade 4-6	9-11
	Ortaokul (Intermediate)	Grade 7-8	12-13
	Ortaöğretim	Grade 9-12	14-17

Nüfus yoğunluğunun en fazla olduğu eyalet olan Ontario'da ilköğretim programı 1'den 8. sınıfa kadardır (**Tablo 5**). Zorunlu temel eğitime 6 yaşını doldurmuş olduğu ilk Eylül ayında başlayan öğrenciler için ilköğretimin amacı, her öğrenciye kendi potansiyellerini keşfederek geliştirmelerini sağlayabilecek, sağlam bir temel sağlamaktır (Ontario Ministry of Education [OMOE], 2020). Zorunlu eğitim 1. sınıftan (Grade 1) başlayarak lise diplomasına hak kazanılan 12. sınıfın (Grade 12) sonuna kadar devam etmektedir. Ontario eğitim sistemine bakıldığında, zorunlu eğitime başlama yaşı ve sınıf düzeyleri Türk eğitim sistemiyle paralellik gösterirken, Ontario'da ilköğretim 6+2 olarak ilkokul ve ortaokula ayrılırken, Türkiye'de 4+4 şeklinde ayrılmaktadır (Sağlam vd., 2022). Ayrıca sınıf düzeyleri dışında benzerlikten çok farklılıklar mevcuttur (Sağlam vd., 2022).

İlköğretim kademesinde temel matematiksel becerilerin kazanılması ve geliştirilmesini amaçlayan matematik dersi müfredatı (OMOE, 2020), her sınıf seviyesinde aynı öğrenme alanlarını içerir ve sarmal bir yapıya sahiptir. Matematik eğitiminde sosyal ve duygusal öğrenme becerileri, sayılar, cebir, veri, uzamsal duyu (geometri) ve finansal okuryazarlık olarak beş farklı öğrenme alanı bulunmaktadır. Sosyal ve duygusal öğrenme becerileri ile matematiksel süreçleri de ayrı ayrı sınıf düzeylerinde ele alan öğretim programı, öğrencilerin matematik kavramlarını ve becerilerini öğrenmeleri için desteklemek, öğrenme yeteneklerini geliştirmek için duygusal öğrenme becerilerini geliştirmeye odaklanmaktadır. Öğrencilerin matematik dersiyle birlikte duygularını tanımlayıp yönetebilmeleri, stres kaynaklarıyla başa çıkabilmeyi, öğrenme azimlerini ve motivasyonlarını pozitif yönde geliştirebilmeyi, arkadaşlık ilişkileri kurup etkili iletişimi efektif kullanabilmeyi, kritik ve yaratıcı düşünme becerilerini geliştirebilmeleri sosyal duygusal becerilerin gelişmesi için öğretim programı ve sağlanan öğrenme ortamlarıyla desteklenmektedir. Öğrencilerin ruh sağlığı ve refahının önemsendiğini vurgulayan öğretim programında, öğretmenler ve diğer eğitimcilerin, öğrencilerin tüm ihtiyaçlarının karşılanmasını sağlamaları için öğrencilere uygun fırsatların sunulduğu öğrenme ortamlarının önemine sık sık vurgu yapılmaktadır (OMOE, 2020).

Ontario öğretim programının sahip olduğu sarmal yapı, öğrencilerin kavramları keşfederek, somuttan soyuta yapılandırabileceği bir düzen sunmaktadır. İlköğretimde ve ortaöğretimde öğrencilerin konular arası bağlantılar kurmalarına yardımcı olan ve öğrenmeyi zenginleştiren disiplinler arası uygulama fırsatları, öğrencilerin düşünme süreçlerine ve akıl yürütme becerilerine katkı sağlamaktadır. Finansal okuryazarlık, STEM eğitimi, yerel kültür ve tarih, okuryazarlık, eleştirel düşünme ve eleştirel okuryazarlık, matematiksel okuryazarlık, çevre eğitimi gibi beceriler Ontario müfredatında neredeyse her öğrenme alanı beklentilerine yerleştirilmiş ve gelişimi için çeşitli fırsatlar sunulmuştur. Kritik düşünme ve problem çözme, yenilikçilik, yaratıcılık ve girişimcilik, dijital okuryazarlık gibi transfer edilebilir beceri ve niteliklerin modern dünyada öğrencilerin kendi yetenek ve becerilerine göre yer edinebilmeleri için önemli olduğu ve geliştirilmesi gerektiği üzerinde durulmuştur. Matematiğin güzelliğinin önemine ayrıca yer veren programda, matematiğin gerçek yaşamla olan bağlantılarına yer verilmiş ve kaos gibi görünen problemlerinin estetik bir şekilde çözülebildiği ve ulaşılan sonucun öğrencide huzur hali oluşturduğu belirtilmiştir.

İlköğretim matematik dersi müfredatında 1'den 8'e kadar bütün sınıf seviyelerinde sayılar, işlemler, cebir, veri, uzamsal düşünme ve finansal okuryazarlık olarak altı temel öğrenme alanından oluşan programda, alt öğrenme alanları ve kazanımlar ve kazanımlara rehber olan ifadeler, öğrencilerin bilişsel gelişim düzeyine göre yapılandırılmıştır.

İlgili Araştırmalar

Cebir ve Cebirsel Düşünme Bağlamında Yapılmış Ulusal Araştırmalar

Kablan, Baran ve Hazer (2013) tarafından ilköğretim ikinci kademe matematik dersi öğretim programındaki (MEB, 2009) tüm hedef davranışlar yenilenmiş Bloom taksonomisi çerçevesinde, bilişsel süreçler bağlamında incelenmiş ve analiz edilmiştir. Cebir öğrenme alanına ait hedef davranışlar tüm kazanımların 6. sınıflar için %7,2'sini, 7. sınıflar için %11,4'ünü, 8. sınıflar için ise %18,8'ini oluşturduğu tespit edilmiştir. Cebir öğrenme alanı kazanımlarının tümü hatırlama, anlama, uygulama, analiz etme-değerlendirme-yaratma bilişsel süreçlerine göre analiz edildiğinde, kazanımların %49'u anlama, %%57,1'i uygulama süreçlerinden oluştuğu tespit edilirken, üst düzey bilişsel süreçleri kapsayan analiz etme-değerlendirme- yaratma grubuna ait kazanım tespit edilememiştir.

Kuzu, Çiçek ve İğdeli (2023) Türkiye ve Almanya (Kuzey Ren-Vestfalya) matematik dersi öğretim programlarını cebir öğrenme alanı bağlamında karşılaştırmalı olarak inceleyerek, kazanım ve öğrenme çıktılarının benzerlik ve farklılıklarını araştırmış, yenilenmiş Bloom taksonomisinin bilgi ve bilişsel süreç boyutlarına göre sınıflandırmışlardır. Her iki öğretim programında da kazanım ifadelerinin kısa, açık ve geniş zaman cümleleri olarak hazırlandığı ve günlük hayat bağlamıyla ilişkilendirildiği görülmüştür. Türkiye'ye ait öğretim programında kazanımların, her sınıf düzeyi için farklılaşan sarmal bir yapıda olduğu ve daha ayrıntılı ifadelere yer verildiği yönünde farklılıklar tespit edilirken, Almanya müfredatında ise kazanımların sınıf seviyelerine göre bölündüğü ve benzer öğrenme çıktılarının birleştirilerek tek bir kazanımda verildiği tespit edilmiştir. Her iki müfredatta da kazanımların ve öğrenme çıktılarının içeriklerinin sınıf seviyesi ilerledikçe yoğunlaştığı, basitten karmaşığa doğru bir hiyerarşiye sahip oldukları yönünde benzerlikler tespit edilmiştir. Yenilenmiş Bloom taksonomisine göre yapılan sınıflandırmada, her iki programın da ağırlıklı olarak bilgi boyutunun kavramsal ve işlemsel adımlara yönelik hazırlandığı, bilişsel süreçler bağlamında ise yer yer farklılaştıkları görülmüştür. Almanya programında kavramsal bilgilerin daha çok analiz düzeyinde olduğu ve bilişsel süreç boyutunun, üst düzey bilişsel beceriler dikkate alınarak hazırlandığı, bu sebeple de öğrenme çıktılarının Türkiye programına göre daha yüksek basamaklara sahip olduğu görülmüştür. Kavramların anlamlandırılması ve üst düzey bilişsel becerilerin kazanılması sürecinde, gerçek yaşam problemleri ve süreç temelli öğretim modelleri dikkate alınmasının önemine değinilerek, öğretim ortamları ve programlarının tasarlanırken öğrencilerin ihtiyaçlarına uygun bir biçimde, teknoloji entegrasyonuyla tasarlanmasının faydalı olabileceği önerisinde bulunulmuştur.

Yenilmez ve Teke (2008) tarafından yenilenen matematik öğretim programındaki etkinliklerin (MEB, 2005) öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisinin araştırıldığı çalışmada, tek gruplu ön test-son test deneysel desen kullanılmış ve 6. sınıfa devam eden 24 öğrenci örnekleme rastlantısal olarak dahil edilmiştir. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri ve gelişimlerini belirlemek amacıyla araştırmacılar tarafından, Altun'un (2005) yayımladığı örnek sorular baz alınarak, "Cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimi" testi hazırlanmış ve uygulanmıştır. Ön test ve son test sonuçları arasında yapılan nicel analizler sonucu cebirsel düşünme düzeylerinin ilk üçünde son test lehine anlamlı farklılıklar tespit edilmiştir. Fakat ileri düzey olan dördüncü düzeyde istatistiksel olarak anlamlı kabul edilebilecek bir fark ortaya çıkmamıştır. Son düzeyin öğrenciler açısından üçüncü düzeye göre karmaşık olmasından ve işlem özellikleriyle ilgili bilgilerinin eksikliğinden dolayı cebirsel ifadelerle işlemlerde zorlandıkları belirtilmiştir. Ayrıca araştırmada cinsiyet, başarı ve ilgi faktörleri de incelenmiş olup, kız öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri açısından gelişim ortalamalarının erkek öğrencilere göre daha yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Yenilenen öğretim programındaki etkinliklerin, cebirsel düşünmenin gelişimine katkı sağladığı ortaya çıkarılmıştır.

Yapılandırmacı yaklaşımla cebir öğretiminin, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisinin araştırıldığı çalışmada Çağdaşer (2008) örneklemini 6. sınıf 55 öğrencinin oluşturduğu, ön test-son test deneysel bir araştırma yapmıştır. Uygulanmakta olan öğretim programındaki cebir öğrenme alanı ve kazanımları çerçevesinde, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerini ve gelişimlerini tespit edebilmek amacıyla, Altun (2005) tarafından hazırlanan ve alt sorular hariç 20 sorudan oluşan “Cebirsel Düşünme Düzeyi Belirleme Testi” uygulanmıştır. Bunun yanı sıra, öğrencilerin matematik dersine karşı olan tutumlarını ortaya çıkarmak amacıyla tutum ölçeği de kullanılmış ve araştırma sonuçlarında öğrenci tutumlarına ve değişimlerine de yer verilmiştir. Süreçte cebir öğretiminde yapılandırmacı yaklaşıma uygun tasarlanan 10 farklı etkinlik kullanılmış ve son test sonuçlarına göre öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinde anlamlı bir artış tespit edilirken ve özellikle matematik başarısı düşük öğrencilerin derse karşı tutumlarının olumlu yönde değişmesine katkıda bulunduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca yüksek başarıya sahip öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin, daha düşük başarılı öğrencilere kıyasla fark edilir derecede yüksek olduğu tespitler arasındadır.

Ayber (2017) genelleme aracılığıyla cebirsel düşünmenin gelişimini, doküman incelemesi metoduyla ortaokul matematik ders kitaplarında, farklı yayınların kitaplarında genelleme süreçlerine nasıl yer verildiğini araştırmış ve karşılaştırmıştır. Yapılan incelemede kitaplarda yer alan görev ve etkinliklerin genellemeleri öğrencilere hazır olarak sunduğu ve üzerinde bir muhakeme yapılmadan, genellemeleri keşfetmelerini ve ifade edebilmelerini sağlayan genelleme durumlarına yeterli yer verilmediği tespit edilmiştir. Cebirsel düşünme ve gelişimi için oldukça önemli olan şekil ve sayı örüntülerinde, örüntü kurallarının genellemesinin öğrencilere hazır olarak verildiği, bu sebeple de niceliksel muhakemeye yönelik öğrencide herhangi bir beceri geliştirmeyeceği vurgulanmıştır. Öğrencilerin aritmetik işlemleri akıcı yapabilmelerini sağlayan ve bunu geliştiren giriş düzeyindeki genelleme süreçlerine ders kitaplarında daha sık yer verilirken, daha ileri düzey genelleme yapabilmeyi gerektiren ve muhakeme becerilerini geliştiren analiz, sentez ve soyutlama süreçlerine çok daha az yer verildiği sonucuna ulaşılmıştır. Karşılaştırılan kitapların ortak özellikleri ve farklılıkları sunulmuş, ayrıca cebirdeki örüntü, eşit işareti, değişken kavramının cebirsel düşünme için önemine yer verilmiş olup, ülkemizde fırsat eşitliğini sağlaması beklenen ve matematik dersi için birincil kaynak olarak kullanılan ders kitaplarında cebirsel düşünmenin giriş aşamasından ileri düzeye geçişini sağlayacak görev ve etkinliklere yeterince yer verilmediği ve farklı yayınevlerine ait ders kitaplarının birbirine paralel hazırlanmadığı, birinin diğerine göre daha yetersiz kaldığı özellikle vurgulanmıştır. Öğrencilerin kendi genellemelerini inşa edebilmeleri için, ders kitaplarında öğrencilere genelleme durumlarının hazır olarak verilmemesi, öğrencilerin kendi genellemelerini keşfederek oluşturmalarını sağlayacak etkinliklere yer verilmesinin önemi vurgulanmıştır.

Cebirsel düşünmenin temel bileşenlerinden biri olan fonksiyonel düşünmenin okul cebiri öncesi gelişimini ve fonksiyonel ilişkilerin genellenebilme düzeyini üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinde araştıran Türkmen ve Tanışlı (2019), fonksiyonel düşünme düzeylerine göre (Blanton vd. 2015; Stephens vd., 2017) elde ettikleri verileri analiz etmiştir. Öğrencilerin sınıf düzeyleri arttıkça fonksiyonel düşünmenin varlığının da arttığı aynı zamanda beşinci sınıf öğrencilerinde fonksiyonel ilişkileri değişken kullanarak açıklama ve bir genellemeye ulaşabilme yüzdesinin yüksek olduğu tespit edilmiştir. Üçüncü ve dördüncü sınıf düzeylerinde, niceliklerin değişimlerinin sözlü olarak öğrenciler tarafından ifade edilebildiği ve fonksiyonel düşünmenin erken cebir döneminde de öğrencilerde mevcut olduğu belirtilmiştir. Üçüncü sınıf öğrencilerinin değişken kullanarak bir genellemeye ulaşmaya çalışmaları, tam olarak doğru notasyonu oluşturamasalar bile çabaladıkları tespit edilirken, dördüncü sınıf düzeyinde doğru notasyonla genellemeye ulaşabilen öğrencilerin varlığına vurgu yapılmıştır. Ayrıca ilkokul öğretim programında aritmetik işlemler arasındaki ilişkilerin vurgulanmasının ve örüntülerle ilgili kazanımların yer almasının fonksiyonel düşünmeyi ve fonksiyonel ilişkilerin genellenebilmesine olumlu etki sağlayabildiği ifade edilmiştir. Değişken kavramının altıncı sınıf öncesinde de öğrenciler tarafından kavranabileceği, buna yönelik cebirsel düşünme ve özelinde fonksiyonel düşünmeyi destekleyici içeriklerin ve etkinliklerin öğretim programında yer almasının önemi vurgulanmıştır.

Bozkurt, Çırak Kurt ve Tezcan (2019) tarafından yapılan doküman incelemesi araştırmasında, Türkiye'de okutulan ortaokulun aynı düzeydeki Singapur matematik öğretim programının cebir öğrenme alanı özelinde karşılaştırıldığı çalışmada iki ülkeye ait öğretim programları, alt öğrenme alanları, kazanım sayıları, içerik ve sıralama, uygulama yönergeleri bakımından içerik analizi ve betimsel analiz yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Kazanımlar sınıflandırılırken Bloom taksonomisinden yararlanılmış ve benzer ve farklı yönleri ortaya çıkarılmıştır. Cebir öğrenme alanı kazanımlarının Bloom taksonomisine göre, Türkiye matematik öğretim programının Singapur'a göre bilgi basamağı ve üst düzey bilişsel beceriler içeren analiz, sentez ve değerlendirme basamaklarının daha az bulunduğu tespit edilmiştir. Singapur matematik öğretim programının, Türkiye matematik programındaki içerikleri kapsadığı ve bunun yanında cebir öğrenme alanı için çok daha fazlasını içerdiği yorumunda bulunulmuştur. Ayrıca cebir kavramlarının ele alınışıyla ilgili, cebirsel düşünmenin doğru gelişimi için kazanımların sıralamalarına dikkat edilmesi hususu vurgulanmıştır.

Palak (2022) doküman analizini kullanarak 1990, 1998, 2005, 2013 ve 2018 yıllarına ait ortaokul matematik dersi öğretim programlarını ardışık olarak, cebir öğrenme alanı kapsamında genel hedefler-özel hedefler, cebirsel muhakeme biçimleri, ölçme değerlendirme, öğretim ilkeleri gibi çeşitli bağlamlarda incelemiş ve karşılaştırmıştır. Hedef davranış ve kazanım sayılarının git gide sadeleştirilerek azaltıldığı fakat yoğunlaştırıldığı, aynı zamanda ders sürelerinin artırılarak matematik dersi içeriğinin öğrencilere derinlemesine kazandırılmaya çalışıldığını belirtmiştir. Karşılaştırmada yer alan temalardan biri olan cebirsel muhakeme için Kaput (1999) tarafından tanımlanmış olan cebirsel muhakeme biçimleri (genelleştirilmiş aritmetik, sembol kullanımı, sayı sistemlerindeki yapı, fonksiyonel düşünme ve modelleme) bağlamında incelenen hedef davranış ve kazanımlar analiz edilmiştir. 6, 7 ve 8. sınıf hedef davranış ve kazanımlarının cebirsel muhakeme biçimleriyle ilişkilendirildiği çalışmada, güncellenen öğretim programlarında yer alan davranışların sınıflara göre dağılımlarına yer verilmiş ve sayısal olarak hangi öğretim programı hangi muhakeme biçimine en çok yer vermiş, karşılaştırılmıştır. Hedef/davranış ve kazanım sayılarının neredeyse her güncellenen öğretim programında azaltılması sebebiyle frekansı azalsa da yüzdesel olarak bakıldığında muhakeme biçimlerinin yer alma oranlarının farklılaşabildiği vurgulanmıştır. Karşılaştırılan diğer temalarda ardışık öğretim programları incelenmiş ve yıllara göre değişen genel amaçların beceri sınıflandırmalarına göre dağılımı ortaya çıkarılırken, ölçme ve değerlendirme boyutu incelendiğinde, davranışçı yaklaşımın etkisiyle hazırlanan öğretim programlarında yalnızca sonuç odaklı bir yaklaşım bulunduğu, yapılandırmacı yaklaşımla birlikte öğrenciyi merkeze alan 2005 yılı öğretim programıyla köklü bir değişime gidildiği ve alternatif ölçme ve değerlendirme yöntemlerinin programa dahil edilerek süreç odaklı ölçme ve değerlendirme yaklaşımlarına da büyük oranda yer verildiği belirtilmiştir. Öğretim ilkeleri, öğretim yöntem, teknik ve stratejileri, problem çözmeye olan bakış açıları bağlamında cebir öğrenme alanı karşılaştırmalı olarak incelenmiş, benzerlik ve farklılıklar ortaya çıkarılmıştır.

Aktürk (2023), Millî Eğitim Bakanlığı tarafından öğrencilere ücretsiz dağıtılan 3, 4 ve 5. sınıf matematik dersi kitaplarındaki görevlerde, sunulan cebirsel düşünmeyi öğrenme fırsatlarını içerik analizi metoduyla incelemiştir. Çözümlü örnekleri ve görevleri araştırırken, Blanton vd. (2015) tarafından oluşturulan ve ilkokul öğrencilerinin cebirsel düşüncelerini geliştirebilmek için ne yapmaları beklendiğini temsil eden beş büyük fikri kavramsal çerçeve olarak kullanmıştır. Bunlar; eşdeğerlik, ifadeler, denklemler ve eşitsizlikler (EEEI), genelleştirilmiş aritmetik (GA), fonksiyonel düşünme (FT), değişken (Var) ve orantısal akıl yürütme (PR) olarak tanımlanmıştır. İlkokul matematik dersi kitaplarının, öğrencilerin cebirsel düşünmeleri için olması gereken öğrenme fırsatlarının yalnızca yarısını içerdiği tespit edilmiştir. Aktürk (2023), bu durumu görev sayısının azlığı veya çokluğuyla ilgili olarak değil, sunulan fırsat çeşitliliğinin az olduğuyla ilgili mevcut duruma dikkat çekmiştir. Araştırmada, cebirsel düşünmeye fırsat sağlayan görevlerin %50 oranında varlığı ortaya çıkarılmıştır. Erken cebirin, öğrencileri cebirsel düşünmenin doğasında bulunan süreçlere maruz bırakmasıyla, cebirsel düşünmenin gelişebileceğine değinmiş ve uluslararası geçerliği olan TIMSS gibi değerlendirmelerde, öğrencilerin başarılı olamamasının sebebinin maruz kaldıkları sınırlı fırsatlar nedeniyle gerçekleşmiş olduğu vurgulanmıştır. Ders kitabının hazırlanmasını ve geliştirilmesini sağlayan otoritelere ve yazarlara, öğrencilere cebirsel düşünceyi daha iyi öğrenebilmelerini sağlayacak öğrenme fırsatları yaratabilmek için fırsat çeşitliliğinin ve sayısının artırılması ve geliştirilmesi önerilerinde bulunulmuştur.

Cebirsel Düşünme Bağlamında Yapılmış Uluslararası Çalışmalar

Hemmi vd. (2020) İsveç 1-9. sınıf matematik dersi öğretim programındaki cebir yaklaşımlarını, komşu ülkeleri olan ve kültürleriyle birlikte okul sistemlerindeki benzerlikten ötürü, Estonya ve Finlandiya'nın öğretim programındaki cebir müfredatı yaklaşımlarıyla karşılaştırmıştır. Öğretim programlarının içeriği, hedefleri ve ölçme değerlendirme kriterleri dahil tüm bölümler EEEI (eşitlik, eşitsizlik ve denklem), GA (genelleştirilmiş aritmetik), FT (fonksiyonel düşünme), PR (orantısal düşünme), VAR (değişken, bilinmeyen) olmak üzere beş büyük cebir fikrine yönelik analiz edilmiş ve içerikler sınıflandırılarak karşılaştırılmıştır. Bu üç ülke birbirine komşu olması ve benzer kültürlere sahip olmalarına karşın, matematik dersi öğretim programlarının cebir bağlamında farklı bakış açılarına sahip olduğu tespit edilmiştir. İsveç öğretim programında denklem çözümleri üzerinde detaylandırmadan durulduğu, Estonya ve Finlandiya'da ise denklem çözmeye yönelik daha detaylı kazanım ifadelerinin bulunduğu tespit edilmiştir. Finlandiya müfredatının, matematiksel akıl yürütme süreçlerini açıkça belirtmiş ve öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişmesini destekleyici ifadelere yer vermiş olduğu tespit edilmiştir. İsveç müfredatında ifadelerin kısa ve öz olması, detaylandırılmaması dikkat çekerken, Estonya ilkokul kademesinde genelleştirilmiş aritmetiği destekleyecek detaylı içeriğe sahip olması fakat fonksiyonel düşünmeyi ve orantısal düşünmeyi destekleyecek ifadelerin yer almadığı tespit edilmiştir. Finlandiya müfredatında fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek fonksiyonel ilişkilere yönelik içeriklerde derinlemesine kavrama gibi detaylı ifadelere yer verilirken, İsveç daha çok örüntü ve desenler, ardından doğrusal ilişkiler ve fonksiyonlar üzerinde durmuştur. Estonya'da ise ortaokul düzeyinde fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek içeriğe ortaokul kademesinde yer verilmiş ve farklı temsiller üzerinde durulmuştur. Genel olarak üç ülkenin de beş büyük cebir fikri bağlamında müfredat içerikleri incelendiğinde ulaşılan sonuçlar, benzerlik ve farklılıkların bulunduğu, farklılıkların sebebinin ülkelerin farklı eğitim felsefelerine sahip olmalarından kaynaklanabileceği ve bu sebeple öğrencilerin uluslararası değerlendirmelerde başarı sıralamalarında müfredat içeriğinin etkisinin tek başına araştırılmasının yeterli olmadığı fakat anlamlı bir sonuca ulaşılabileceği vurgulanmıştır.

Ling ve Ghazali (2014) Malezya'daki 11 yaşında ve 5. sınıf düzeyinde olan beş öğrencinin, okul cebiriyle tanışmadan önceki cebirsel düşünmelerini keşfetmek ve anlamak için nitel yöntem kullanarak araştırmıştır. Geometrik şekillerden oluşan örüntülerle ilgili soruları çözerken benzerlik ve farklılıkların tespiti, ayrım yapma, sınıflandırma ve etiketleme, algoritma arama gibi süreçlerin cebir öncesi dönemde öğrencilerde var olduğunu düşündükleri ve örüntüyü-deseni tanıma, genişletme, oluşturma ve genelleme gibi süreçleri öğrenebileceklerini destekleyen araştırmacılar, bunların gözlem ve röportaj ile ortaya çıkarılabileceğini düşünerek, seçtikleri 5. sınıf beş öğrenciye bilişsel gelişimlerine uygun olan üç adet ön cebir problemi sormuş ve öğrencilerin soruları çözerken sesli düşünmeleri istenmiştir. Öğrencilere sunulan ilk problem Kaput ve Blanton'dan (2001) uyarlanan “masa” problemi, ikinci problem Pugalee'den (2004) uyarlanan “üçgensel sayı” problemi, üçüncü soru ise yine Kaput ve Blanton'dan (2001) uyarlanan “döşeme” problemidir. Öğrenciler sesli düşünerek ve yazarak problemleri çözmeye çalışmış ve araştırmacılar buldukları sonuçları açıklamalarını isteyerek hangi ön cebirsel bilgilere sahip olduklarını ve cebirsel düşünme basamaklarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Öğrenciler örüntülerde desen arama, deseni tanıma, deseni açıklama, deseni devam ettirme, algoritma arama gibi ön cebirsel düşünme çıkarımlarına sahip olurken, örüntüyü genelleme aşamasına geçemedikleri tespit edilmiştir. Sabit artan örüntülerde öğrencilerin ön cebirsel düşünme süreçlerinde zorlanmadıkları fakat “üçgensel sayı” örüntüsünde deseni çizerek devam ettirdikleri fakat sabit artış olmadığı için genellemeye ulaşamadıkları tespit edilmiştir. Elde edilen araştırma sonuçlarında, ilkokul öğrencilerinin cebirsel düşünmelerinin geliştirilmesinde, örüntü ve desenlerin incelenmesinin önemli bir yeri olduğu vurgulanarak, 5. sınıf düzeyindeki öğrencilerin daha fazla sayı ve şekil örüntüleriyle çalışma fırsatlarının artırılması gerektiği önerisinde bulunulmuştur.

Lentz (2018) okul cebiriyle daha önce tanışmamış ve akademik olarak aynı standartta eğitim görüyor olan 11 yaşında ve 6. sınıf toplam 4 öğrenciyle gerçekleştirdiği öğretim deneyi desenli nitel araştırmasında, öğrencilerin mevcut cebirsel düşünme bileşenlerini, hazırladığı örüntü görevlerine yaklaşımlarını ve çözümlerini video kaydı ve yazılı belgeler ile incelemiş ve karşılaştırmıştır. İki gruba ayrılan ve çiftler halinde çalışan öğrencilerin büyüyen örüntülere yaklaşımı ve örüntüleri genelleme becerilerinden yola çıkarak iki farklı kategori elde eden Lentz (2018) öğrencilerin farklı düşünme becerilerine göre büyüyen-artan örüntü görevlerine yaklaşımlarının da farklılaştığını tespit etmiştir. Büyüyen-artan örüntüleri modellemek için somut materyaller kullanarak bir genellemeye ulaşmaya çalışan öğrencilerin, genelleştirilmiş aritmetikten (özyinelemeli-lokal) fonksiyonel düşünmeye (işlevsel-global) geçmeyi gerçekleştiremedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Uzamsal ve soyut düşünme becerilerine sahip öğrencilerin ise herhangi bir manipülatife ihtiyaç duymadan, yalnızca kâğıt kalem kullanarak büyüyen-artan örüntü görevlerini tamamladıkları ve fonksiyonel (işlevsel-global) düşünme bileşenine rahatlıkla ulaşabildikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin cebir öncesi dönemde farklı sayı ve şekil örüntüsü görevleriyle karşılaşmalarının, cebirsel düşünmenin temel bileşenlerinden olan genelleştirilmiş aritmetiğin gelişmesini sağladığı ve cebirde başarılı olabilmeleri için iyi bir başlangıç olacağı tavsiyesinde bulunmuştur.

Bråting ve arkadaşları (2019), İsveçli öğrencilerin ulusal ve uluslararası değerlendirmelerdeki cebir konularında yaşadıkları düşük başarının nedenlerini araştırmak için, ilkokul matematik dersi müfredatını ve İsveç'te öğretmenlerin kullanmayı en çok tercih ettiği iki ilkokul (1-6.) matematik ders kitabını, sundukları cebirsel düşünmenin gelişimi fırsatları kapsamında incelemiştir. Doküman analizi için analitik çerçeve olarak Blanton vd. (2015) tarafından ortaya konulan, cebirsel düşünmede büyük fikirler olarak adlandırdıkları; EEEI (eşdeğerlik, ifadeler, denklemler ve eşitsizlikler), GA (genelleştirilmiş aritmetik), FT (fonksiyonel düşünme), Var (değişken), P (orantısal akıl yürütme) beş büyük fikre göre müfredat ve ders kitapları analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlarda fonksiyonel düşünme, ifadeler ve denklemler büyük fikirlerinin hem matematik dersi müfredatında hem de matematik ders kitaplarında yeterince temsil edildiği fakat, aritmetikten cebire geçişte köprü görevi görebilen ve çeşitli genellemelere ulaşılan genelleştirilmiş aritmetiğin hem müfredattaki kazanım ifadelerinde hem de ders kitaplarındaki içeriklerde yeterince yer almadığı ve geliştirilmediği tespit edilmiştir. Ayrıca Blanton vd. (2015) tarafından cebir için büyük fikirlerin, cebirin yalnızca önemli yönlerini kapsadığını ve cebirsel düşünme fırsatlarını sınıflandırırken analitik çerçeve olarak yetersiz kaldığı belirtilmiştir.

Chimoni ve arkadaşları (2019) erken cebir dönemiyle birlikte, okul cebirinin öğrenilmeye başlandığı dönemi de dahil ederek 4, 5, 6 ve 7. sınıf 684 öğrenci örneklemiyle yaptıkları nitel çalışmada, öğrencilerin farklı türdeki erken cebirsel görevleri çözme becerileri arasındaki ilişkileri test eden bir modeli araştırmışlardır. Cebirsel düşünmenin bileşenlerinden olan genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dillerinin sırasıyla kendinden bir öncekine zemin hazırladığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetik görevlerinde daha başarılı oldukları ve başarılı olunan görevden sonra fonksiyonel düşünme görevlerini çözebildikleri vurgulanırken, bu iki görevi başarıyla tamamlayan öğrencilerin ise modelleme dilleriyle ilgili görevleri çözmeye devam edebildikleri ortaya çıkarılmıştır.

Türkiye ile İlgili Yapılmış Matematik Dersi Karşılaştırmalı Eğitim Araştırmaları

Erbilge (2019) karşılaştırmalı olarak araştırdığı tez çalışmasında, Türkiye ile PISA ve TIMSS gibi uluslararası geçerliği olan sınavlarda istikrarlı başarılarından dolayı Kanada (Ontario Eyaleti) ve Hong Kong (Çin)'un öğretim programlarını ortaokul düzeyindeki matematik dersi bağlamında karşılaştırarak amaç ve program ögeleri arasındaki benzerlik ve farklılıkları ortaya koymuştur. Öğretim programlarında hedefler karşılaştırıldığında başarıyı etkileyecek düzeyde belirgin bir fark görülmemiştir. Türkiye ve Kanada'nın alt öğrenme alanlarının birbirine benzerken, Hong Kong öğretim programında yer alan alt öğrenme alanlarının ve kazanımlarının farklılaştığı tespit edilmiş ve bunun da ülkelerin ilkokul seviyesindeki öğretim programlarında yer verilen içeriklerin farklı olmasından kaynaklandığı belirtilmiştir. Hong Kong öğretim programında diğerlerinden farklı olarak kazanımların pekiştirilerek kalıcı öğrenmenin sağlanabileceği konulara yer verilirken, Kanada öğretim programında öğrencilerin buluş yoluyla öğrenmelerini sağlayacak desteklere yer verilmiştir. Ayrıca öğrenme ve öğretme süreçlerinde yararlanılan bilişim teknolojilerinin programlarda hangi seviyede yer aldığı karşılaştırıldığında, Kanada'nın matematik öğretiminde bilişim teknolojilerinin önemini daha fazla vurguladığı ve kazanımlar açıklamalarında ilişkilendirdiği tespit edilmiştir. Hong Kong ve Kanada öğretim programlarında, süreç ve ürün odaklı olan alternatif ölçme ve değerlendirme yaklaşımlarına yönelik uygulamaların öğretmenler için detaylandırılmış olduğu, fakat 2018 yılında uygulamaya konulan Türkiye öğretim programında bu konuda tercihin öğretmene bırakıldığı, ayrıntılı ve çeşitli şekilde yeterli bilginin öğretim programında yer almadığı tespit edilmiştir.

Serçe (2020) ortaöğretim seviyesindeki matematik dersi öğretim programlarını Türkiye ile PISA ve TIMSS gibi uluslararası geçerliği olan sınavlarda Türkiye'ye kıyasla daha iyi derecelere ve istikrarlı bir başarıya sahip olan Estonya, Kanada (Alberta Eyaleti) ve Singapur karşılaştırmıştır. Yapılan karşılaştırmalı araştırmada öğretim programlarının genel özellikleri, amaç, içerik, öğrenme ve öğretme süreci, ölçme ve değerlendirme açılarından benzerlik ve farklılıkları ortaya çıkarılmıştır.

Öztürk ve Diker Coşkun (2022) Kanada (Ontario Eyaleti) ve Türkiye ortaöğretim matematik dersi müfredatlarını çeşitli alt problemler altında karşılaştırmalı olarak incelemiştir. Her iki öğretim programı da öğrenciyi merkeze alarak hazırlanmış olmasına rağmen, Ontario matematik dersi öğretim programında öğrencilerin öğrenmelerini bireyselleştirmeleri üzerinde durulurken, Türkiye'de böyle bir amacın olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca Türkiye matematik dersi öğretim programında matematik tarihine, tarihsel süreçlerin gelişimine ve katkıda bulunan bilim insanlarına yer verilirken Ontario öğretim programında yer verilmediği tespit edilmiştir. Ortaöğretim öğrenme alanlarının benzerlikleri ve farklılıkları incelendiğinde, bazı konuların müfredatlarda karşılıklı olarak bulunmadığı ya da farklı isimlendirildiği belirtilmiştir. Türkiye'de 11 ve 12. sınıflar, öğrencilerin seçtiği alanda matematik dersinde farklılaşma olmadan devam etmekteyken, Ontario'da yükseköğretimde seçmek istedikleri mesleklere uygun olarak matematik derslerinin farklılaştığı ve öğrencinin kendi isteği doğrultusunda seçebileceği farklılıklar arasında yer almaktadır. Ölçme ve değerlendirme süreci iki ülkede de farklıdır ve Ontario'da bu süreç öğretmene bırakılmış, öğrencinin eksik öğrenmelerini tespit etmeye ve desteklemeye yönelik olurken; Türkiye matematik dersi öğretim programında bakanlık tarafından öğretmene esneklik sağlamaksızın belirlenmiş ve öğrencinin alacağı puanların dönem sonu ortalamasına göre başarı odaklıdır. Öğretim programları arasındaki içerik, ölçme değerlendirme ve öğrenme-öğretme süreçlerindeki benzerlik ve farkları ortaya çıkaran çalışmada öğretim programlarının okulda uygulanmasını sağlayan öğretmene düşen görevler de ifade edilip karşılaştırılmıştır. Bu araştırmada, Türkiye ortaöğretim matematik dersi öğretim programının Ontario ile karşılaştırıldığında, öğrencilerin uluslararası sınavlarda elde ettikleri başarının kaynaklarından biri olarak kabul edilen müfredata, uygulanması sürecine ve uygulayıcısının sahip olduğu yetkinliklere dikkat çekerek, programın geliştirilmesi ve güncellenmesi konusunda önerilerde bulunmuştur.

Bağdat ve Özkale (2022) Kanada (Ontario Eyaleti) ortaokul matematik dersi öğretim programını incelemiş ve Türkiye ile belirli açılardan karşılaştırmıştır. Eleştirel düşünme ve okuryazarlık, disiplinler arası ve bütünleşik öğrenmeyi destekleyen STEM eğitimi, kodlama gibi farklı temalara sahip olan öğretim programında, öğrencilerin sosyal ve duygusal öğrenme becerileriyle iç içe geçmiş matematiksel süreç becerileri dikkat çekmiş ve bu becerilerin birlikte gelişmesinin sonucu öğrencilerde hangi matematiksel süreç becerilerinin gelişiminin destekleneceğinin açıklanmış olduğu görülmüştür. Finansal okuryazarlığı da sosyal duygusal öğrenme becerileri gibi bir öğrenme alanı olarak ele alan Kanada (Ontario) öğretim programında, günlük hayatta öğrencilerin karşılaştığı para değeri, vergiler, finansal suçlar gibi konuları kapsayan geniş bir çerçevede sunulmuştur. Kazanım odaklı değil, beceri geliştirme ve gerçek yaşamda matematik okuryazarlığı temalarına yönelik ilgi uyandıran bir yapıda olan öğretim programının, öğretmenlere yönelik rehber ifadelere ve dikkat edilmesi gereken notlara sahip olmasının, Türkiye’de uygulanan öğretim programına göre daha bütüncül olduğu belirtilmiştir.

Ismail Amet ve Kaleli Yılmaz (2022) tarafından yapılan Türkiye ve Yunanistan’da aynı ortaokul seviyelerinde uygulanan matematik dersi öğretim programlarında içerikler karşılaştırılmıştır. Yunanistan’a ait programda disiplinlerarası yaklaşımların daha çok olduğu ve bu yaklaşımın amaçlarının ve temel kavramlarının kapsandığı detaylı bir dökümana sahip olduğu tespit edilmiştir. Kazanım sayısının Türkiye’ye göre daha çok olduğu fakat ders sayısının az olduğu belirtilmiş ve öğrenme alanları ve alt öğrenme alanları arasındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya çıkarılmıştır. Türkiye programında farklı olarak doğrusal denklemler, kümeler ve benzerlik gibi alt öğrenme alanları yer alırken, Yunanistan programında fonksiyonlar ve trigonometri gibi farklı alt öğrenme alanları olduğu belirtilmiştir. Öğretim materyalleri ve matematiksel çizimler konusunda Türkiye programının zayıf kaldığı ve öğrencilere destek olabilecek uygulamalı etkinliklerin ve materyallerin programa eklenebileceği tavsiyesinde bulunmuştur.

Işıkoğlu (2023) uluslararası değerlendirmelerde başarılarıyla dikkat çeken Singapur, Kanada (Ontario Eyaleti) ve İngiltere’nin matematik dersi öğretim programlarını Türkiye ortaokul matematik dersi öğretim programı ile PISA’da yer alan matematik alanlarından biri olan matematik okuryazarlığı açısından karşılaştırarak değerlendirmiştir. Öğretim programlarının içeriklerini genel hatlarıyla inceleyip sınıflandırırken içerik analizi ve betimsel analiz kullandığı nitel araştırmasında, ülkelerin öğretim programlarına yönelik benzerlik ve farklılıklar ışığında önerilerde bulunmuştur. Kazanımları genel içerik alanlarına, matematiksel içerik alanlarına, matematiksel süreçlere ve matematiksel yeterliklere göre sınıflandırmış ve gerek niceliksel gerekse içerik olarak karşılaştırmıştır. İngiltere'nin öğretim programının çerçeve olarak kaldığı, diğer ülkelere kıyasla kazanım içeriklerinin genel ifadeler verilerek detaylandırılmadığı ve yetersiz örnekler sunulduğunu tespit etmiştir. Diğer öğretim programları incelendiğinde ise en detaylı içeriğe ve finansal okuryazarlık gibi öğrenme alanına sahip olan Kanada (Ontario) öğretim programının, öğretmenler için çok fazla açıklamaya ve örneğe sahip olmasının aslında öğretmeni kısıtlayabileceği dolaylı olarak belirtilirken, Singapur müfredatının sayı olarak Türkiye'den az kazanıma sahip olması fakat kazanım açıklamalarında yer alan önerilerin öğretmenlere rehber olmasının öğretmenler için avantaj sağlayabileceği ve öğretimde bir standardın elde edilebileceği belirtilmiştir.

Ay (2023) Türkiye ve Kanada'nın Ontario Eyaleti'ne ait 3. sınıf matematik derslerinde kullanılan öğretim programlarını, her ülkeden seçilen birer sınıfta karşılaştırmalı durum çalışması ile çeşitli bağlamlarda karşılaştırılmış ve benzerlik-farklılıkları ortaya çıkarılmıştır. Bu süreçte ülkelerde uygulanmakta olan öğretim programları, üç aylık süre boyunca yapılan sınıf içi gözlemler, öğretim etkinlikleri, öğretmen rolleri, öğretmen ve öğrenci arasındaki etkileşim, sınıf kültürü, öğretim yöntem ve teknikleri, ölçme ve değerlendirme yaklaşımları ve öğrencilerin sınıf içinde mevcut fiziksel imkanları gibi alanlar karşılaştırılmıştır. Araştırma sonucunda, matematik dersi öğretim programlarında yer alan genel hedeflerin ve becerilerin Türkiye'de daha genel ve yüzeysel olduğu, Kanada'da ise üst düzey becerilere yönelik daha fazla detay bulunduğu, benzerlikler mevcutken farklılıkların çoğunlukta olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenlerin sınıf içindeki etkinlikleri karşılaştırıldığında, Kanada'da öğrenci merkezli ve üst düzey sorgulama yoluyla öğrencilerin üst düzey matematiksel görevleri içeren problemlerin çözülürken tartışıldığı görülürken, Türkiye'de sınıf içi etkinliklerde ağırlıkla öğretmen merkezli ders işlendiği ve sınıf içi etkileşimin Kanada'daki kadar olmadığı tespit edilmiş, bu farklılığın öğretim programlarındaki farklılıktan kaynaklandığı vurgulanmıştır. Kanada'da yer alan okulların fiziki yapısının Türkiye'ye göre daha iyi olması, öğrencilere sunulan sınıfların fiziki imkanlarını da etkilediği, ayrıca ülkelerin eğitim öğretime ve öğretmen yetiştirmeye ayrılan kaynaklarının, nüfusa ve kültürel yapısına ait farklılıklarının, sınav sistemleri gibi farklı faktörlerin de bulunduğu belirtilerek benzerlik ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Matematik Dersi ile Uluslararası Yapılmış Karşılaştırmalı Eğitim Araştırmaları

Li (2007), ABD, Hong Kong, Çin (Anakara) ve Singapur'un sekizinci sınıf düzeylerinde matematik müfredatlarındaki cebir konusuna ait ders materyallerini ve öğretim sistemleri arasındaki benzerlik ve farklılıkları karşılaştırmalı eğitim araştırmasıyla kültürel bağlamları da göz önünde bulundurarak incelemiştir. Çin'e ait sekizinci sınıf matematik dersi kitaplarının iki cikt şeklinde "Cebir" ve "Geometri" olarak ayrıldığını belirtmiş, karşılaştırma yaptığı diğer üç ülkenin ise aynı sınıf düzeyindeki ders kitaplarının tek bil cilt halinde olduğunu tespit etmiştir. Singapur, Hong Kong ve Çin ders kitaplarındaki cebir içeriğinin ABD ile benzer olduğu fakat, ABD'ye göre daha fazla ileri düzey cebir içeriklerine sahip olduğunu belirtmiştir. Cebir içeriğinin dört ülkeye ait ders kitaplarında benzer şekilde sunulmuş olduğu ve kültürel anlamda bir farklılığa rastlanmadığı ifade edilse de konu içeriğinin zayıflığı tekrar vurgulanmıştır. ABD ders kitaplarında, öğrencilere cebir içeriğine ait daha fazla uygulama sunulurken diğer ülkelerin ders kitaplarında içerik anlatımına yoğunlaşılması, öğrencilere daha az uygulamanın sunulmasına sebep olmuştur. Bu sebeple ABD ders kitaplarında öğrencilerin bilgiyi derinlemesine kavramalarının önüne geçildiği fakat Asya ülkelerine ait ders kitaplarında içeriğin derinlemesine verilmesinin öğrencilerin cebir bilgilerini yapılandırmasını kolaylaştırdığı ileri sürülmüştür. Ders kitaplarındaki içeriklerin öğretmenlerin öğretme ve öğrencilerin öğrenme süreçlerine destek olacak şekilde, kullanıldığı ülkenin tercih ettiği eğitim yaklaşımına göre düzenlenmiş olduğu ve cebir içerikleri incelendiğinde ülkelerin kültürlerine ait etkilerin de görüldüğü ifade edilmiştir. Ülkelerin eğitim sistemleri ve kullandıkları öğretim materyallerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesinin olumlu yönlerinin olduğu ve karşılıklı örnek alınarak öğretim yöntemleri veya kullanılan araç gereçlerin geliştirilmesinde önemli rol oynayabileceği önerisinde bulunulmuştur.

Ruddock vd. (2008) İngiltere Anahtar Evre 2 (Y4, Y5, Y6) müfredatını bilim, okuryazarlık, matematik bağlamlarında Çin (Taipei), Hong Kong, Singapur, Hollanda, Ontario ve Letonya müfredatları ile karşılaştırmış, benzerlik ve farklılıkları ortaya çıkarmıştır. İngiltere’nin matematik müfredatının yapısının içerik olarak diğer ülkelerle benzerlik gösterdiği, öğretme sürecine yapılan vurgunun tüm ülkelerde benzer şekilde öğrenciyi merkeze alarak belirtildiği tespit edilmiştir. Öğrenme alanlarına ait hedef içeriklerinin karşılaştırılması sonucunda İngiltere'nin sayı müfredatı, diğer müfredatların çoğundan daha dar ve daha az talepkâr olduğu, diğerlerinde hesaplama üzerinde daha çok durulduğu tespit edilmiştir. Buna karşılık, veri işlemede, İngiltere müfredatının diğerlerinden daha geniş ve daha zorlu olduğu, geometride, İngiltere'de görselleştirme ve dönüşümsel geometriye yapılan vurgunun diğer ülkelerde yetersiz kaldığı sonuçlarına ulaşılmıştır. Genel olarak, İngiltere'nin matematik müfredatının içeriğinin çoğu diğer müfredatla paralellik gösterdiği tespit edilmiştir.

Lee (2017) Ontario’nun uluslararası sınavlarda gösterdiği matematik başarısını iyileştirebilecek unsurları araştırmak için bu sınavlarda başarılarıyla dikkatleri çeken Singapur ve Şangay’ın (Çin) sosyokültürel bağlamlarını, öğretmen yeterliliklerini, matematik müfredatlarını, ölçme değerlendirme yöntemlerini, sınıf içi etkinliklerini ve öğrencilerin matematik öğrenmeye karşı tutum ve motivasyonlarının nasıl olduğunu karşılaştırmalı olarak araştırmıştır. Matematik öğretmenlerinin niteliklerinin yüksek olması ve eğitimin aralıksız devam etmesinin öğrenci başarıları için çok önemli olduğunu vurgulamıştır. Ontario (Kanada) müfredatının yenilikçi bir yaklaşımla öğrencilerin matematiksel becerilerini ileri seviyeye taşıması beklenirken, eğitim paydaşları olan öğretmenler, öğrenciler ve veliler matematiğe keşif temelli yaklaşım sunan güncel müfredattan memnun kalmadıklarını belirtmiştir. Öğretim programlarının yapısını inceleyen Lee (2017) üçünün de odak noktalarında problem çözme olduğunu, Ontario ve Singapur'un sarmal bir yaklaşımla kavramları tekrar tekrar verirken, Şangay (Çin) müfredatının dikkatli ve dinamik bir şekilde tasarlanmış doğrusal yapıda olduğunu tespit etmiştir. Araştırmacı üç ülkenin (eyaletin) matematik dersi öğretim programlarını karşılaştırdığında matematiksel beceriler ve tercih edilen yaklaşım bağlamında en kapsamlı olanının Singapur'a ait olduğu çıkarımına ulaşmıştır.

Bölüm 3

Yöntem

Araştırma Yöntemi

Bu araştırmada Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) ülkelerine ait ve halihazırda eğitim-öğretim sürecinde kullanılmakta olan matematik dersi öğretim programları cebir öğrenme alanı kapsamında karşılaştırılacağı için nitel araştırma yöntemi tercih edilmiş olup, veriler doküman incelemesi ile toplanacaktır. “Nitel araştırmalarda gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi veri toplama yöntemleri kullanılmakta, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konması hedeflenmektedir” (Yıldırım ve Şimşek, 2008) Nitel araştırmada gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler analiz edilir. (Kıral, 2020). Toplanan verileri analiz ederken betimsel ve içerik analizi dışında söylem analizi, doküman analizi gibi teknikler de kullanılmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2016).

Doküman analizi, basılı ve elektronik olmak üzere tüm belgeleri incelemek ve belgelerin içeriğini titizlikle ve sistematik olarak analiz etmek için kullanılan, sistemli bir nitel araştırma yöntemidir (Wach, 2013; Kıral, 2020). Pek çok yazılı ve elektronik doküman, teknolojinin gelişmesi ve internetin yaygınlaşmasıyla birlikte kolay ulaşılabilir hale gelmiştir. Doküman analizi yapacak olan araştırmacı, araştırdığı konunun niteliğine göre dokümanı ilgili yerden kendisi edinmektedir (Kıral, 2020) Dokümanların hazırlanma amaçları araştırma gündeminden bağımsızdır ve araştırmacının ilgili araştırmaya olan merakı, dokümana bir nitelik kazandırmaktadır (Kıral, 2020).

Dokümanların analiz süreci, farklı araştırmacılar tarafından farklı şekillerde sınıflandırılmış olsa da bu süreçte ortak olan unsurlar; araştırmacının dokümanın asıl amacı, üretilme nedeni ve hedef kitleyi göz önünde bulundurduğu verilerin, dikkatli ve odaklanılmış bir şekilde yeniden okunması ve gözden geçirilmesidir (Kıral, 2020). Doküman analizi yönteminde veriler içerik analizine tabii tutulmadan önce kategoriler veya temalar oluşturulup, bunlara bağlı kodlamalar yapılmalıdır. Kodlaması yapılan içerikler ilgili temanın veya kategorinin altına yerleştirildikten sonra, elde edilen veriler araştırmacının isteği doğrultusunda sayısal olarak ifade edilebilir ve raporda toplanan verileri yorumlama kısmında kullanılabilirler (Yıldırım ve Şimşek, 2016; Kıral, 2020).

Öğretim programları, herkes tarafından erişilebilir durumda olduğu için araştırma etiğine aykırı bir hâl bulunmamaktadır. Yapılacak araştırmada öğretim programları, cebir öğrenme alanı ana teması altında incelenip, elde edilen veriler alt temalara ve kodlara ayrılacak ve karşılaştırma yapılacaktır.

Veri Kaynakları

Çalışmada incelenecek olan dokümanlar; Türkiye Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018), Singapur Matematik Dersi Öğretim Programı (SMOE, 2020a; SMOE 2020b), İngiltere Matematik Dersi Öğretim Programı (DOE, 2013), Kanada Ontario Eyaleti Matematik Dersi Öğretim Programı (OMOE, 2020) dokümanları cebir öğrenme alanı ve cebir öğrenme alanına ile ilgili kazanımlar dahil olacak şekilde problemlere cevap aranacaktır.

Türkiye matematik dersi öğretim programına aşağıdaki adresten ulaşılmıştır:

https://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445-MATEMAT%C4%B0K%20%C3%96%C4%9ERET%C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf

Singapur matematik dersi öğretim programlarına aşağıdaki adreslerden ulaşılmıştır:

https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.pdf

İngiltere matematik dersi öğretim programınlarına aşağıdaki adresten ulaşılmıştır:

https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

Kanada (Ontario Eyaleti) matematik dersi öğretim programına aşağıdaki adresten ulaşılmıştır:

https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/elementary-mathematics

Veri grubunu oluşturan diğer ülkelerin öğretim programlarında, Türkiye'de okutulan 5 ve 6. sınıf düzeyleri Singapur'da P5 ve P6, İngiltere'de Y5 ve Y6, Kanada'da (Ontario) ise 5 ve 6. sınıf düzeylerine denktir. Türkiye'deki 7 ve 8. sınıf düzeyleri ise Singapur'da S1 ve S2, İngiltere'de Y7 ve Y8, Kanada'da (Ontario) ise 7 ve 8. sınıf düzeylerine denk gelmektedir.

Aşağıda karşılaştırması yapılan ülkelere ait öğretim programlarında kazanım sayılarının ve varsa uygulamaya yönelik içerik sayılarının öğrenme alanlarına göre dağılımı sunulmuştur. SMÖP "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanını ayırmadığı için 5. sınıf düzeyinde öğrenme alanı içeriği analiz edilmiştir. İMÖP Anahtar Evre 3 (Y7, Y8, Y9) matematik dersi kazanımlarını, bütün bir şekilde liste halinde yayınlamış ve yalnızca öğrenme alanlarına ayırmıştır. Cebirsel düşünme için incelenirken cebire ait içeriğin tamamı ele alınmış olup öğrenme alanlarına ayrılmamıştır.

Tablo 6

TMÖP 6. Sınıf Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarına Yönelik Kazanım Sayısı ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı	Açıklama Sayısı
Sayılar ve İşlemler	Doğal sayılarla işlemler	4	3
	Çarpanlar ve katlar	5	4
	Kümeler	1	2
	Tam sayılar	3	5
	Kesirlerle işlemler	8	11
	Ondalık gösterim	8	8
	Oran	3	4
Cebir	Cebirsel ifadeler	3	4
Geometri ve Ölçme	Açılar	3	1
	Alan ölçme	5	6
	Çember	3	3
	Geometrik cisimler	5	7
	Sıvı ölçme	3	3

Veri İşleme	Veri toplama ve değerlendirme	2	3
	Veri analizi	3	1
Toplam		59	65

Tablo 7

TMÖP 7. Sınıf Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarına Ait Kazanım ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı	Açıklama Sayısı
Sayılar ve İşlemler	Tam sayılarla işlemler	5	8
	Rasyonel sayılar	4	3
	Rasyonel Sayılarla İşlemler	5	4
	Oran ve orantı	7	10
	Yüzdeler	4	3
Cebir	Cebirsel ifadeler	3	6
	Eşitlik ve denklem	4	4
Geometri ve Ölçme	Doğrular ve açılar	2	3
	Çokgenler	5	6
	Çember ve daire	3	2
	Cisimlerin Farklı Yönlerden Görünümleri	2	4
Veri İşleme	Veri analizi	4	4
Toplam		48	57

Tablo 8

TMÖP 8. Sınıf Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarının Kazanım ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı	Açıklama Sayısı
Sayılar ve İşlemler	Çarpanlar ve katlar	3	2
	Üslü ifadeler	5	4
	Kareköklü ifadeler	8	7
Cebir	Cebirsel ifadeler ve özdeşlikler	4	11
	Doğrusal denklemler	6	9
	Eşitsizlikler	3	4
Geometri ve Ölçme	Üçgenler	5	9
	Dönüşüm geometrisi	3	10
	Eşlik ve benzerlik	2	6
	Geometrik cisimler	6	16
Veri İşleme	Veri analizi	2	1
Olasılık	Basit olayların olma olasılığı	5	10
Toplam		52	89

Tablo 9

SMÖP 5. Sınıf Sıralı Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre Kazanım ve Öğrenme Deneyimleri Sayısı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Konu	İçerik Sayısı	Öğrenme Deneyimi Sayısı
Sayılar ve Cebir	Tam sayılar	10 milyona kadar olan sayılar	1	2
		Dört işlem	4	5
	Kesirler	Kesir ve bölme	2	3
		Dört işlem	6	5
	Ondalık sayılar	Dört İşlem	3	7
	Yüzde	Yüzde	5	8
	Orantı	Orantı	7	4
	Oran ve hız	Oran	3	3
Ölçme ve Geometri	Alan ve hacim	Üçgenin alanı	3	3
		Küp ve prizma hacmi	6	8
	Geometri	Açılar	4	3
		Üçgenler	3	7
		Paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk	2	5
İstatistik	Veri analizi	Bir veri kümesinin ortalaması	2	2
Toplam			51	65

Tablo 10

SMÖP 6. Sınıf Öğrenme Alanları, Alt Öğrenme Alanları ve Konulara Ait İçerik Sayıları ve Öğrenme Deneyimi Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Konu	İçerik Sayısı	Öğrenme Deneyimi Sayısı
Sayılar ve Cebir	Kesirler	Dört işlem	3	4
	Yüzde	Yüzde	3	5
	Orantı	Orantı	2	3
	Oran ve hız	Uzaklık, zaman ve hız	4	3
	Cebir	Cebir	5	3
Ölçme ve Geometri	Alan ve hacim	Çemberin çevresi ve alanı	3	6
		Küp ve prizma hacmi	5	3
	Geometri	Özel dörtgenler	1	1
		Açınımlar	3	4
İstatistik	Veri temsili ve yorumlama	Pasta grafikler	2	4
Toplam			31	36

Tablo 11

SMÖP 7. Sınıf Matematik Dersi Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanları

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	İçerik Sayısı
Sayılar ve Cebir	Sayılar ve işlemler	7
	Oran ve orantı	3
	Yüzde	6
	Oran ve hız	3
	Cebirsel ifadeler ve formüller	8
	Fonksiyonlar ve grafikler	5
	Denklemler ve eşitsizlikler	4
Geometri ve Ölçme	Açılar, üçgenler ve çokgenler	7
	Ölçme (alan ve hacim)	5
İstatistik	Veri işleme ve analizi	4
Toplam		52

Tablo 12

SMÖP 8. Sınıf Öğrenme Alanı ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre İçerik Sayısının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	İçerik Sayısı
Sayılar ve Cebir	Oran ve orantı	2
	Cebirsel ifadeler ve formüller	8
	Fonksiyon ve grafikler	2
	Denklemler ve eşitsizlikler	6
Geometri ve Ölçme	Eşlik ve benzerlik	5
	Pisagor teoremi ve trigonometri	3
	Ölçme (yüzey alanı ve hacim)	1
İstatistik	Veri işleme ve analizi	6
	Olasılık	2
Toplam		35

Tablo 13

İMÖP 6. Sınıf Öğrenme Alanları ve Konuların Zorunlu Öğrenme Çıktıları ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Konu	Öğrenme Çıktıları	Notlar ve Rehberlik (Yasal Olmayan)
Sayı	Sayı ve basamak değeri	4	1
	Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme	9	6

	Kesirler (ondalık ve yüzdeler dahil)	11	7
Oran ve orantı	Oran ve orantı	4	4
Cebir	Cebir	5	5
Ölçme	Ölçme	7	5
Geometri	Şekillerin özellikleri	5	3
	Pozisyon ve yön	2	2
İstatistik	İstatistik	2	4
Toplam		49	37

Tablo 14

İMÖP Anahtar Evre 3 (Y7, Y8, Y9) Öğrenme Alanları ve Kazanım Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı
Sayı	16
Cebir	16
Oran, orantı ve değişim oranları	10
Geometri ve ölçme	16
Olasılık	4
İstatistik	3
Toplam	65

Tablo 15

KMÖP 5. Sınıf Sıralı Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre Kazanım ve Açıklama Sayıları

Öğrenme Alanı	Alt Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı	Açıklama Sayısı
Sosyal-Duygusal Öğrenme Becerileri			
Sayı	Sayı Hissi – Tam sayılar	2	16 – 11
	Sayı Hissi – Kesirler, ondalıklar ve yüzdeler	5	23 – 16
	İşlemler – Özellikler ve ilişkiler	9	41 – 45
Cebir	Örüntüler ve İlişkiler	4	19 – 7
	Denklemler ve Eşitsizlikler	4	11 - 12
	Kodlama	2	8 - 5
	Modelleme	1	1 - 3
Veri	Veri okuryazarlığı	6	26 - 8
	Olasılık	2	5 - 2
Uzamsal Duyu	Geometrik ve uzamsal muhakeme	5	22 - 3

	Ölçme	6	24 - 5
Finansal Okuryazarlık	Para ve mali durum	6	10 - 7
Toplam		52	206 - 124

Tablo 16

KMÖP 6. Sınıf Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarına Ait Kazanım ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt öğrenme alanı	Kazanım sayısı	Açıklama sayısı
Sosyal-duygusal öğrenme becerileri			
Sayı	Sayı Hissi – Rasyonel sayılar	3	26 - 13
	Sayı Hissi – Kesirler, ondalıklar ve yüzdeler	3	13 - 11
	İşlemler – Özellikler ve ilişkiler	12	44 – 39
Cebir	Örüntüler ve İlişkiler	4	22 - 8
	Denklemler ve Eşitsizlikler	4	10 - 9
	Kodlama	2	13 - 8
	Matematiksel modelleme	1	1 - 3
Veri	Veri okuryazarlığı	6	30 - 10
	Olasılık	2	7 - 2
Uzamsal Duyu	Geometrik ve uzamsal muhakeme	4	16 - 5
	Ölçme	6	32 – 3
Finansal Okuryazarlık	Para ve mali durum	5	10 - 2
Toplam		52	224 - 113

Tablo 17

KMÖP 7. Sınıf Matematik Dersi Öğrenme Alanları ve Alt Öğrenme Alanlarının Kazanım Sayısına Göre Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt öğrenme alanı	Kazanım sayısı	Açıklama sayısı
Sosyal-duygusal öğrenme becerileri			
Sayı	Sayı Hissi – Rasyonel sayılar	7	37 - 20
	İşlemler	10	68 – 33
Cebir	Örüntüler ve İlişkiler	4	21 - 5
	Denklemler ve Eşitsizlikler	4	12 - 10
	Kodlama	2	10 - 10
	Matematiksel modelleme	1	1 - 3
Veri	Veri okuryazarlığı	6	26 - 5
	Olasılık	2	6 - 2
Uzamsal Duyu	Geometrik ve uzamsal muhakeme	4	16 - 3

	Ölçme	7	26 – 13
Finansal Okuryazarlık	Para ve mali durum	6	13 - 5
Toplam		52	

Tablo 18

KMÖP 8. Sınıf Öğrenme Alanı ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre Kazanım ve Açıklama Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Alt öğrenme alanı	Kazanım sayısı	Açıklama sayısı
Sosyal-duygusal öğrenme becerileri			
Sayı	Sayı Hissi – Rasyonel ve irrasyonel sayılar	4	39 - 17
	İşlemler	8	47 - 41
Cebir	Örüntüler ve İlişkiler	4	24 - 4
	Denklemler ve Eşitsizlikler	4	15 - 11
	Kodlama	2	12 - 7
	Matematiksel modelleme	1	1 - 3
Veri	Veri okuryazarlığı	6	26 - 6
	Olasılık	2	7 - 2
Uzamsal Duyu	Geometrik ve uzamsal muhakeme	4	11 - 9
	Ölçme	4	17 - 5
Finansal Okuryazarlık	Para ve mali durum	6	12 - 6
Toplam		52	

Verilerin Analizi

Veri kaynaklarını oluşturan öğretim programları araştırmanın yazılı dokümanlarını oluşturmaktadır. Dokümanları incelemeye yönelik süreç şu şekilde ilerlemiştir:

1. Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) matematik dersi öğretim programlarına, ülkelerin veya eyaletlerin ilgili kurumlarının resmi internet sitelerinden ulaşılmıştır.
2. Dokümanları cebirsel düşünme çerçevesinde inceleyerek analiz edebilmek için önceki araştırmalar incelenmiş ve bu araştırmanın kuramsal temelini oluşturan bölümde detaylarına yer verilip, belirli bir inceleme çerçevesi ortaya çıkarılmıştır. Dokümanlar Chimoni vd. (2018) tarafından derlenen cebirsel düşünmenin temel

bileşenleri, kavramları ve süreçleri olmak üzere üç boyutu kapsamında analiz edilecektir. Dördüncü boyutu oluşturan muhakeme biçimleri çalışmaya dahil edilmemiştir.

3. İngilizce dilinde yazılmış olan dokümanlar araştırmacı tarafından Türkçeye çevrilmiş ve bu çeviriler, bir uzman ve bir İngilizce öğretmeni tarafından kontrol edilip, doğruluğu onaylanmıştır.

4. Bu araştırmaya konu olan kazanımlar, dört ülke yan yana olacak şekilde, sınıf düzeylerine ayrılarak Ek A'da sunulmuştur.

Tablo 19

Verilerin Analizi Sürecinde Kullanılacak Ana Tema, Alt Temalar ve Kodlar (Chimoni vd., 2018)

CEBİRSEL DÜŞÜNME (Ana Tema)			
1. Boyut	Cebirsel Düşünmenin Temel Bileşenleri (Alt Tema)		
	Genelleştirilmiş aritmetik	Fonksiyonel düşünme	Modelleme dilleri
	(Kodlar: Sayıların özellikleri, işlemlerin özellikleri, semboller, harfli ifade, eksik sayı, bilinmeyen nicelikleri harfle gösterme)	(Kodlar: Örüntü, desen, nicelikler arası ilişkiler, değişkenler arası ilişkiler, bağımlı ve bağımsız değişken, eş zamanlı değişim, birebir eşleme)	(Kodlar: Matematiksel bir model oluşturma ve grafik, tablo gibi farklı temsil biçimlerini kullanarak problem çözme)
2. Boyut	Kavramlar (Alt Tema)		
	Kodlar: Eşit sembolü, eşitlik, denklik, eşitsizlik, sayı özellikleri, işlem özellikleri, örüntü, değişken, birebir eşleme, eş zamanlı değişim, bilinmeyen nicelik.		
3. Boyut	Süreçler (Alt Tema)		
	Kodlar: Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme, genelleme, doğrulama		

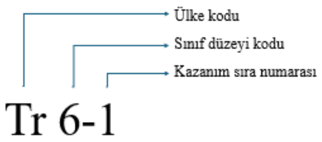
Bu yazılı dokümanlardaki cebir öğrenme alanı ve ona ait alt öğrenme alanlarının programlarda nasıl ele alındığı, alt öğrenme alanlarının kapsadığı kazanım ifadelerinin benzerlikleri ve farklılıkları, cebir öğrenme alanı için ön koşul oluşturan diğer alt öğrenme alanları ve bunların kapsadığı kazanım ifadeleri içerik analizi öncesinde araştırmacı ve bir uzman tarafından oluşturulacak olan alt temalara bağlı kodlarla tespit edilerek betimsel analiz ve içerik analizi yapılacaktır.

Kodlama Yönergesi

Bu araştırmada problemlere cevap aranırken kazanımların sınıflandırılması için belirli kodlamalar yapılmıştır. Kazanımlar ait oldukları öğretim programlarında sırasıyla ülkelere, sınıf düzeylerine ve Ek 1 üzerinde verilen sıralamalarına göre kodlanmıştır. Türkiye için “Tr”, Singapur için “Sin”, İngiltere için “İng”, Kanada (Ontario) için “Ka” kodları, kazanımların ait olduğu öğretim programlarının ülkelerini belirtmek için kullanılacaktır.

Şekil 10

Kazanım için örnek kodlama



Tablo 20

Doküman Incelemesinde Kullanılan Analiz Çerçevesinin Uygulanmış Örneği

Kazanım Kodu	Kazanım ifadesi	Cebirsel düşünme bileşeni	Kavram	Süreç
Tr 5-1	Kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur.	Fonksiyonel düşünme	Örüntü (desen)	Fark etme
Sin 5-1	Sayı dizilerindeki örüntüler	Fonksiyonel düşünme	Örüntü (desen)	-
Sin 8-13	İki değişkenli doğrusal denklemlerin grafiği.	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme
Sin 6-1	Bilinmeyen bir sayıyı temsil etmek için bir harf kullanma.	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelik	Genelleme

İng 6-4	İki bilinmeyenli bir denklemi sağlayan sayı çiftlerini bulur.	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Fark etme, doğrulama
İng 7-3	Kavramların ve kelimelerin ifadelerini, denklemleri, eşitsizlikleri, terimleri ve çarpanları anlar ve kullanır.	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eşitlik, eşitsizlik	Temsil etme, genelleme
Ka 7-11	Gerçek yaşam durumlarını temsil etmek, analiz etmek, tahminlerde bulunmak ve içgörü sağlamak için matematiksel modelleme sürecini uygulamak	Modelleme dilleri	Eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme, genelleme, doğrulama

Tablo 20’de yer alan “Sin 5-1” kodlu kazanım ifadesinde herhangi bir süreç tespit edilememiş ve bu durum tabloda “tespit edilemedi” anlamında “-” ile gösterilmiştir. “İng 7-3, Sin 8-13” kodlu kazanımlarda birden çok kavrama yer verilmiştir. Kavramların sayısal değerlerinin grafik üzerinde gösterimi, kazanım ifadesinin kendisine değil, incelenen sınıf düzeyinde toplamda kaç kez tekrar edildiğine yönelik veri sunmaktadır. Tespit edilen veya edilemeyen süreçlere yönelik de kavramlardaki gibi bir sınıflandırma yapılmıştır. Bir ifadede birden çok süreç tespit edildiği takdirde tabloda yer verilmiştir. Bulgularda sunulan grafiklerde, tespit edilen boyutların kodlarına yönelik veriler sunulmuştur.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Bu çalışmada kullanılacak olan dokümanlar, ülkelerin eğitimden sorumlu birimlerine ait resmi internet adreslerinden temin edilmiştir. Doküman analizinde elde edilen bulguların kararlılığı, tekrarlanabilirliği ve doğruluğu güvenirlik için önemlidir (Özkan, 2023). Bu sebeple araştırmacı kararlılığı sağlayabilmek için kodlama sürecini belirli aralıklarla tekrarlayarak yeniden verileri analiz edilmiştir. Tema, alt temalar ve kodlara yönelik analiz, alanda uzman iki kişi tarafından tekrarlanmış ve analizler sonucunda ortak görüş bildirilmiştir.

Bölüm 4

Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario) matematik dersi öğretim programlarında yer alan cebir öğrenme alanları arasındaki benzerlikler ve farklılıkları ortaya çıkarmak amacıyla alt problemlere yönelik bulgular verilecektir.

Birinci Alt Probleme Ait Bulgular ve Yorum

Cebir öğrenme alanına ait kazanımlar; TMÖP 6. sınıf düzeyinde 3 kazanım, SMÖP 6. sınıf düzeyinde 5 kazanım, İMÖP 6. sınıf düzeyinde 5 kazanım, KMÖP 6. sınıf düzeyinde 11 kazanım olmak üzere betimsel olarak analiz edilmiş, Chimoni vd. (2018) tarafından bütüncül olarak oluşturulmuş cebirsel düşünme boyutlarının birinci boyutunu oluşturan, içerik dizilerine (genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme, modelleme dilleri) göre sınıflandırılmıştır. Sonrasında cebir temel kavramlarının incelendiği ikinci boyut, kazanımlardaki süreçlerin ortaya çıkarıldığı üçüncü boyut ve muhakeme biçimlerinin ortaya çıkarıldığı dördüncü boyut için içerik analizi yapılmış ve kazanımların cebirsel düşünme boyutlarını kapsayan veya destekleyen ifadeleri tespit edilmiştir.

5. Sınıf Düzeyi Cebirsel Düşünmenin Boyutlarına Yönelik Bulgular

Ülkelerin öğretim programları incelenirken, TMÖP ve İMÖP 5. sınıf düzeyinde, öğrenme alanı olarak cebir bulunmamaktadır. Fakat sayılar ve işlemler öğrenme alanlarında yer alan ifadeler, cebirsel düşünmenin boyutlarına göre incelendiğinde, örüntü temelli bir yaklaşımla aritmetikten cebire geçişi destekleyecek ve fonksiyonel düşünme becerisine katkı sağlayabilecek ifadeler olduğu tespit edilmiştir. SMÖP’te 5. Sınıf düzeyinde bir öğrenme alanı “Sayılar ve Cebir” olarak belirtilmiş olup, bir bütün olarak ele alındığı fakat cebir alt öğrenme alanı bulunmadığı tespit edilmiştir. KMÖP ise cebir öğrenme alanına, 5. sınıf düzeyinde ve alt öğrenme alanlarıyla birlikte detaylı bir şekilde yer vermiştir.

Örüntü genelleme görevleri genellikle sınıfta öğrencileri bir örüntü tanımlamaya, yakın veya uzak bir terimin değerini bulmaya ve ardından sembolleri kullanarak altta yatan fonksiyonel ilişkiyi ifade etmeye dahil etmek için kullanılır. Bu nedenle, cebirsel düşüncenin teşvikinde temel süreçler olduğu söylenebilir. KMÖP cebir öğrenme alanına sahip olduğu için tek başına cebirsel düşünmenin boyutları açısından incelemek yerine, diğer ülkelerin okul cebiri öncesi 5. sınıf düzeyinde bulunan ön cebire yönelik kazanım ifadeleri; genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri ile ilişkili olduğu tespit edilen kazanımlar ile benzer ve farklı yönleri açısından incelenmiştir (Tablo 21).

Tablo 21

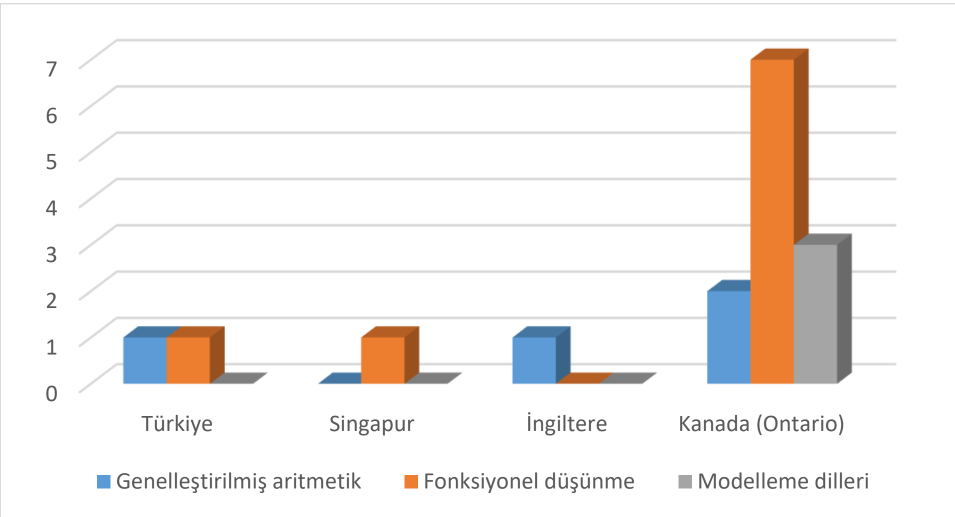
5. Sınıf Cebirsel Düşünme ile İlişkili Kazanımların Boyutlara Göre Analizi

Kazanım Kodu	Cebirsel düşünme dizisi	Kavramlar	Süreçler	Öğrenme Alanı
Tr 5-1	Fonksiyonel düşünme	Örüntü	Temsil etme, gerekçelendirme	Sayılar ve İşlemler
Tr 5-2	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri, bilinmeyen nicelik	Fark etme	Sayılar ve İşlemler
Sin 5-1	Fonksiyonel düşünme	Örüntü	-	Sayılar ve Cebir
İng 5-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşit sembolü	-	Sayılar
Ka 5-1	Fonksiyonel düşünme	Örüntü, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 5-2	Fonksiyonel düşünme	Örüntü	Temsil etme	Cebir
Ka 5-3	Fonksiyonel düşünme	Örüntü, değişken	Varsayımda bulunma, temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 5-4	Fonksiyonel düşünme	Örüntü, eş zamanlı değişim, birebir eşleme	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 5-5	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	Temsil etme	Cebir
Ka 5-6	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Varsayımda bulunma, doğrulama	Cebir
Ka 5-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, değişken	Doğrulama	Cebir

Ka 5-8	Fonksiyonel düşünme	Eşitsizlik, değişken	Doğrulama, temsil etme	Cebir
Ka 5-9	Modelleme dili	Değişken	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 5-10	Modelleme dili	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Cebir
Ka 5-11	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 5-12	Modelleme dilleri	-	Temsil etme, varsayımda bulunma, doğrulama	Cebir

Şekil 11

Öğretim Programlarında 5. Sınıf Cebirsel Düşünme Bileşenleri



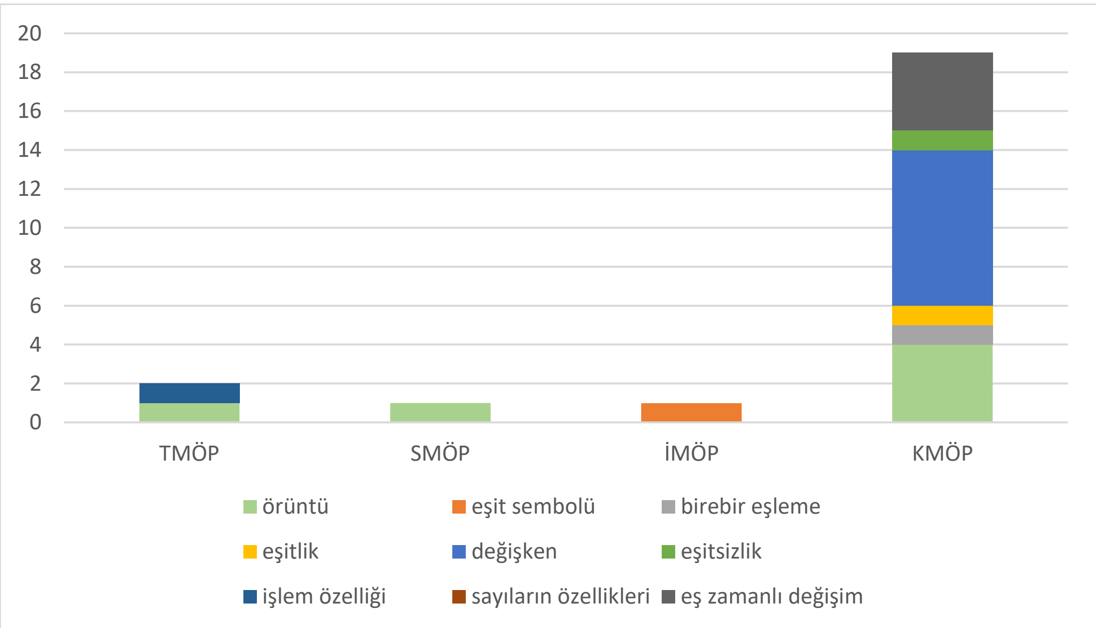
TMÖP'e göre KMÖP hem cebir öğrenme alanına sahip olması hem de yer verdiği cebir kavramlarının çeşitli olması sebebiyle dikkat çekmektedir. KMÖP cebirsel düşünme bileşenlerinin tümüne yer verirken, elde edilen bulgulara göre fonksiyonel düşünmeye yönelik daha fazla sayıda destekleyici ifade tespit edilmiştir. Kazanım ifadelerinde fonksiyonel düşünmeye yönelik en sık tekrar eden kavramın "örüntü (pattern)" olduğu tespit edilmiştir.

Sayı ve şekil örüntülerinde desen veya kural bulmaya yönelik uygulama örnekleri KMÖP ve TMÖP'te yer verilirken, İMÖP ve SMÖP de yer verilmemiştir. 5. sınıf düzeyinde ele alınan kazanım ifadelerinde yer alan cebir kavramlarının sıklığı Şekil 12'de verilmiştir. KMÖP'te cebir öğrenme alanının ayrıca verilmesi ve farklı cebir kavramlarına yer verilmesi diğer programlara göre fark edilir şekilde çeşitlidir.

Tablo 21'de genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik ifadelerde fark etme, temsil etme, doğrulama süreçlerine yer verilirken, fonksiyonel düşünmeye yönelik ifadelerde ise süreçlerin fark etme, temsil etme, genelleme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme, doğrulama gibi daha fazla süreci desteklemeye yönelik olduğu tespit edilmiştir. SMÖP ve İMÖP'te süreçlere yönelik ifadeler yer almadığı için tespit edilememiş ve "-" ile tabloda gösterilmiştir. Modelleme dillerine yönelik yalnızca KMÖP'te bulunan 3 kazanımda ise fark etme, temsil etme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama gibi süreçlerin desteklendiği, aynı zamanda modelleme dillerine yönelik ifadelerin muhakeme biçimlerinin tümünü kapsayabileceği bulgularına ulaşılmıştır.

Şekil 12

5. Sınıf İncelenen Kazanımlarda Yer Alan Kavramlar ve Kavramların Kullanım Sıklığı

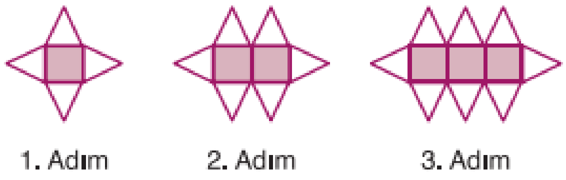


Şekil 13

TMÖP 5. Sınıf Fonksiyonel Düşünmeyi Destekleyici Kazanıma Yönelik Uygulama Örneği (MEB, 2018, s. 51)

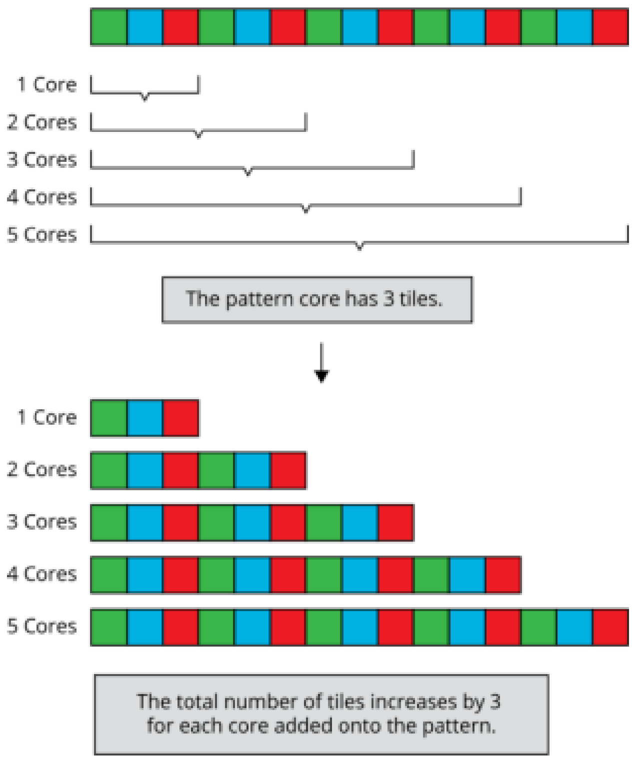
Örneğin 7'den başlayarak üçer ilave etmek suretiyle oluşan sayı örüntüsünün 6. adımını bulunuz. Koleksiyonuna birinci haftada 7 bilye ile başlayan Büşra, sonraki her hafta 3 bilye ilave ederse 5 hafta sonra koleksiyonunda kaç bilye olur?

Örneğin aşağıdaki şekil örüntüsünde kare ve üçgen sayılarını sayı örüntüsü olarak belirtmeye veya istenilen adımda kaç tane kare veya üçgen olacağını bulmaya yönelik çalışmalara yer verilir.



Şekil 14

KMÖP 5. sınıf fonksiyonel düşünmeyi destekleyici kazanıma yönelik uygulama örneği (OME, 2020, s. 295)



Tr 5-1 kodlu kazanımda sabit artan ve kuralı verilen örüntülerin eksik adımlarını veya istenen adımlarını oluşturmaya yönelik kazanım, sayılar arasındaki ilişkilerin fark edilmesini sağlayan fonksiyonel düşünmeyi desteklemektedir. Ayrıca şekil örüntülerinde günlük yaşamdaki kültürel ögelere dikkat çekilmesi günlük yaşam bağlamıyla örüntüleri ilişkilendirmektedir. Tr 5-2 kodlu kazanım ise çarpma ve bölme arasındaki ilişkiye dikkat çekmiş ve bilinmeyen sayıyı bulmak için çarpma ve bölme işlemleri arasındaki ters ilişkinin kullanılmasını vurgulamıştır. İşlemlerin özelliklerinin ve aralarındaki ilişkinin cebirsel düşünmede genelleştirilmiş aritmetik boyutunu desteklemektedir.

Sin 5-1 kodlu içerik ifadesinde yalnızca sayı dizilerindeki örüntülere dikkat çekilmiş ve öğrenme deneyimlerindeki açıklama sayı örüntülerinin açıklanması istenmiştir. SMÖP standart olan P5 sınıf düzeyinde örüntü ve süslemelerle ilgili içeriğe sahip değildir. Fakat temel P5 temel matematik müfredatında, P1-4. sınıfa kadar olan temel kavramların yeniden ele alınması sebebiyle sayı örüntülerine (desen) yer verilmiştir.

Ülkelerin programları incelendiğinde; İMÖP cebir öncesi dönemden cebire geçişte ve fonksiyonel düşünmenin gelişiminde önemli bir yeri olan, örüntü ve süslemeyle ilgili hedef davranış veya kazanıma yer vermemiştir. Resmi gereklilikler adı altında verilen hedef davranışlar incelendiğinde İng 5-1 kodlu “Eşittir sembolünün anlamını anlamak dahil olmak üzere toplama, çıkarma, çarpma ve bölme ile bunların birleşimini içeren problemleri çözer.” hedefine yer verilmiştir. Eşittir sembolünün anlamının kavranması, sembolün her iki tarafı arasındaki sayıların ve işlemlerin arasında denge durumunda bir ilişki olduğunun anlaşılması için cebirsel düşünmede ve gelişiminde önemli bir yere sahiptir. Eşittir sembolünün anlamının anlaşılması cebir içeriği için ön bilgi oluşturmaktadır. İMÖP’te resmi olmayan notlar ve rehberlik açıklamaları incelendiğinde işlem özelliklerine yer verildiği görülmüş olup, verilmeyeni bulma sayı problemlerinde bilinmeyen, verilmeyen sayı ifadesi yerine eksik-kayıp (missing) sayı problemi ifadesi kullanılmıştır. Resmi gereklilikler altında ve resmi olmayan notlar ve rehberlik altında herhangi bir örüntü veya süsleme (pattern) ifadesine rastlanılmazken, kesirleri ve ondalık sayıları da içeren doğrusal sayı dizilerinin tanınması ve bulunup adımlar arasındaki kuralın tespit edilmesine yönelik rehberlik notu tespit edilmiştir.

TMÖP 5. Sınıf kazanımlarında adımlar arası farkın sabit olduğu (doğrusal) sayı ve şekil örüntülerine Tr 5-1 kodlu kazanımda yer vermiştir. Kazanım açıklamalarında kuralı verilen örüntülerin istenen adımını bulmaya yönelik örnekler verilirken, ayrıca farklı geometrik şekillerle oluşturulan şekil örüntülerine yönelik örneğe yer verilmiş olup ardından, tarihi ve kültürel eserlerdeki süsleme örneklerine yer verilmesi vurgusu yapılmıştır. Cebir öğretiminde önemli bir yere sahip olan “eşittir” sembolüyle ilgili herhangi bir kazanım veya örnek içeriği tespit edilmemiştir.

6. Sınıf Düzeyinde Cebirsel Düşünmenin Boyutlarına Yönelik Bulgular

Sırasıyla TMÖP, SMÖP, İMÖP ve KMÖP 6. sınıf düzeyindeki cebir öğrenme alanına ait kazanımlar analiz edilmiş ve tespit edilen alt temalara Tablo 22’de yer verilmiştir.

Tablo 22

6. Sınıf Cebir Öğrenme Alanı Kazanımlarının Cebirsel Düşünme Boyutlarına Göre Analizi

Kazanım Kodu	Cebirsel düşünme dizisi	Kavramlar	Süreçler	Öğrenme Alanı
Tr 6-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler, değişken	Temsil etme	Cebir
Tr 6-2	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Fark etme	Cebir
Tr 6-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelik	Temsil etme	Cebir
Sin 6-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 6-2	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	Temsil etme, gerekçelendirme, genelleme	Sayılar ve Cebir
Sin 6-3	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 6-4	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Fark etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir

Sin 6-5	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik	Doğrulama	Sayılar ve Cebir
İng 6-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir
İng 6-2	Fonksiyonel düşünme	Örüntü	Fark etme	Cebir
İng 6-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler, değişken	Temsil etme, genelleme	Cebir
İng 6-4	Fonksiyonel düşünme	Bilinmeyen nicelikler, eş zamanlı değişim	Fark etme, doğrulama	Cebir
İng 6-5	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme	Cebir
Ka 6-1	Fonksiyonel düşünme	Sayıların özellikleri, eş zamanlı değişim, örüntü	Fark etme, temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 6-2	Modelleme dilleri	Değişken, örüntü	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 6-3	Fonksiyonel düşünme	Değişken, bilinmeyen nicelikler, örüntü	Varsayma, temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 6-4	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim, örüntü	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 6-5	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Cebir
Ka 6-6	Genelleştirilmiş aritmetik	Sayıların özellikleri	-	Cebir
Ka 6-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir
Ka 6-8	Fonksiyonel düşünme	Eşitsizlik, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama, temsil etme	Cebir
Ka 6-9	Modelleme dilleri	Bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 6-10	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Cebir

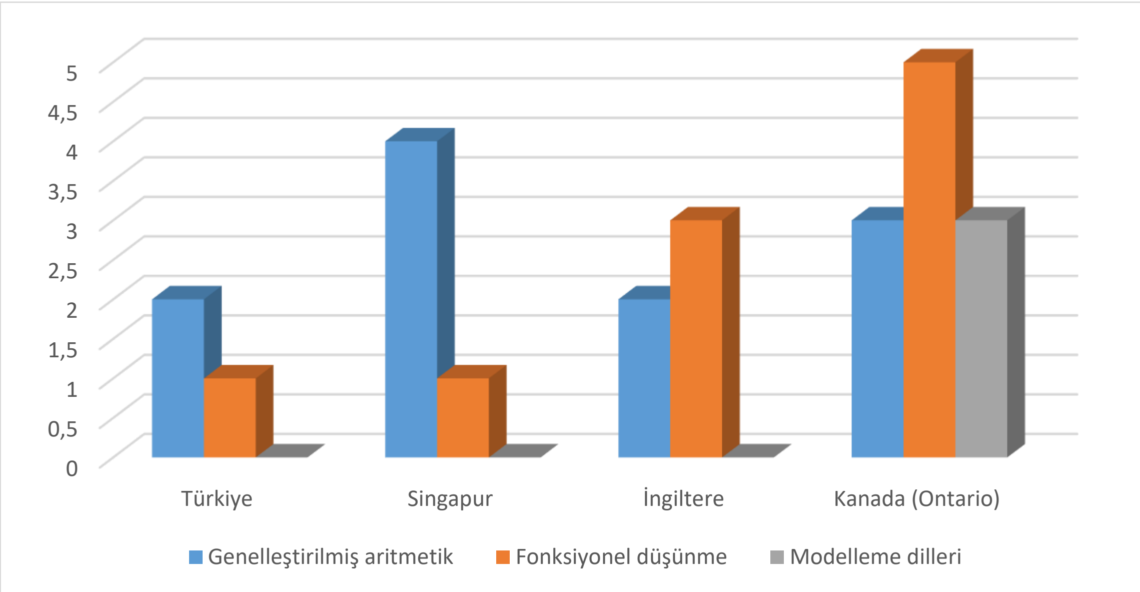
Ka 6-11	Modelleme dilleri	-	Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme, genelleme, doğrulama	Cebir

6. sınıf düzeyinde TMÖP, İMÖP ve KMÖP "değişken" kavramına yer verirken, SMÖP'te bu kavrama yer verilmediği tespit edilmiştir. Öğretim programlarının hepsinde bilinmeyen nicelik yer almaktadır, cebirsel ifadelerle ilgili kazanım açıklamalarında yalnızca TMÖP kullanılan harfin veya sembolün değişken olarak adlandırıldığına yer vermiştir. KMÖP'ün diğer programlara göre daha bütüncül kazanım ifadelerine sahip olduğu için, birçok süreç becerisini de kapsadığı görülmüştür.

Kazanımların bulunduğu öğrenme alanı içerisindeki dağılımı, cebirsel düşünmenin birinci boyutu olan genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri olarak Şekil 15'te verilmiştir.

Şekil 15

6. Sınıf Öğretim Programlarında Cebir Öğrenme Alanı Kazanımlarının Cebirsel Düşünme Bileşenlerine Göre Dağılımı



Şekil 15'de TMÖP cebir öğrenme alanında bulunan toplam 3 kazanımın cebirsel düşünme boyutları verilmiştir. Modelleme dillerine yönelik kazanım ifadesi bulunmadığı tespit edilmiştir. Fonksiyonel düşünmeyi destekleyen kazanım ifadesinde, cebirsel ifadenin değerini değişkenin farklı değerleri için hesaplamada doğal sayılarla sınırlı kalınmıştır.

SMÖP cebir öğrenme alanında toplam 5 kazanım bulunmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetiği destekleyen 4 kazanım ifadesi bulunurken, yalnızca 1 ifadenin fonksiyonel düşünmeyi desteklediği tespit edilmiştir. Genelleştirilmiş aritmetiğe fonksiyonel düşünmeye oranla daha fazla yer veren TMÖP ve SMÖP benzerlik göstermektedir.

İMÖP cebir öğrenme alanında toplam 5 kazanım bulunmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik bileşeninde 2 kazanım ifadesi tespit edilirken, fonksiyonel düşünme bileşenini destekleyen 3 ifade tespit edilmiştir. Kazanım ifadelerinde yer alan sayı dizilerinin genellenmesi, iki bilinmeyenli denklemi sağlayan sayı çiftlerinin bulunması ve iki değişkenin birbirine göre alabileceği değerlerin tahminine yönelik ifadeler, fonksiyonel düşünmeyi destekleyici olarak tespit edilmiştir. Ayrıca rehberlik notlarında, geometrik şekillerin çevre ve alan formüllerinin cebirsel ifade oldukları hatırlatılmış ve fen bilimlerindeki formüllerin de eşitlik içerdiğine dikkat çekilerek, genelleştirilmiş aritmetik için önemli olan ve ilişkisel düşünmenin temelini oluşturan eşit sembolüne vurgu yapılmıştır.

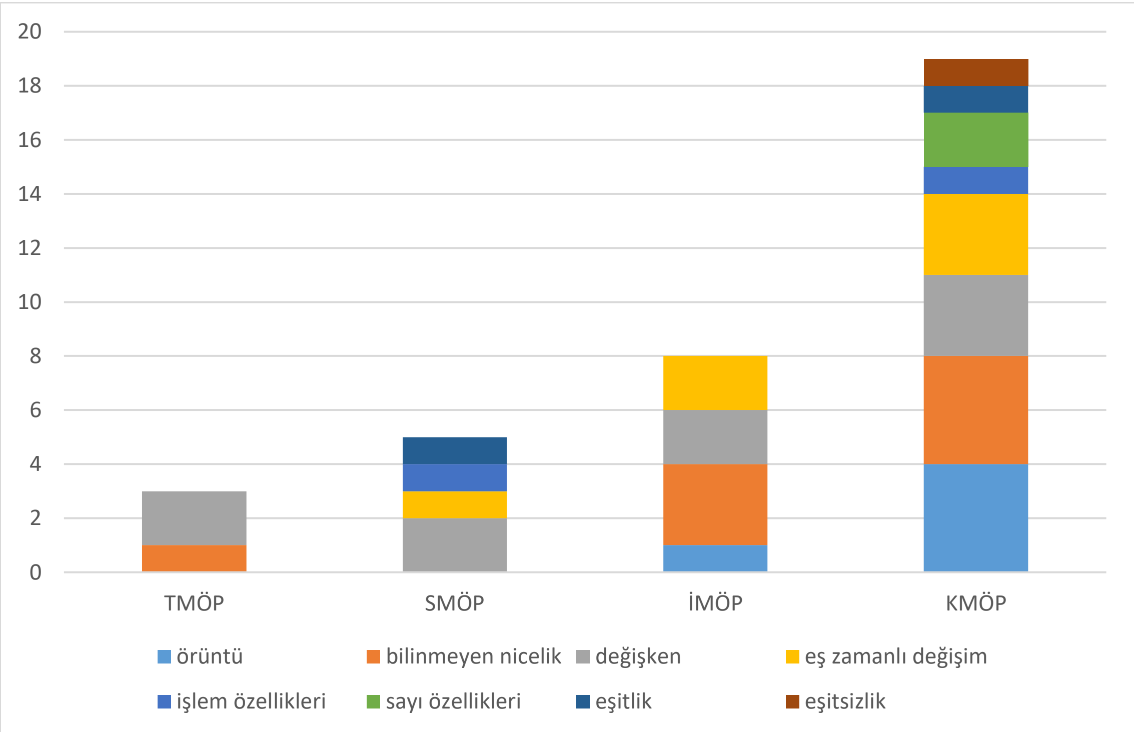
KMÖP cebir öğrenme alanında toplam 11 kazanım bulunmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik bileşeninde 3 kazanım, fonksiyonel düşünme bileşeninde 5 kazanım ve modelleme dilleri bileşeninde 3 kazanım olduğu tespit edilmiştir. Modelleme dillerini destekleyecek kazanımlara yer verilmesi, bir kazanım ifadesinde birden çok kavramın ve sürecin yer almasıyla KMÖP diğer ülke programlarından belirgin bir şekilde ayrılmaktadır.

Cebirsel düşünmeyi destekleyen cebir kavramlarına yönelik kazanımlar kodlarıyla Tablo 22'de yer almaktadır. En sık yer verilen kavramın değişken olması; TMÖP, SMÖP ve İMÖP'te okul cebirine 6. sınıf düzeyinde başlanmasından kaynaklanmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik cebirsel ifade yazma veya sözlü olarak ifade etme, basit bağlamda denklem çözme, bilinmeyen nicelikleri hesaplama ve eşitsizlik gibi kavramların dağılımı Şekil 16’daki gibidir. Fonksiyonel düşünmenin gelişiminde önemli bir yeri olan örüntüye ve eş zamanlı değişime (kovaryasyon) 6. sınıf düzeyinde yer verilmesi, nicelikler arası ilişkilerin anlaşılması açısından önem taşımaktadır. TMÖP ve SMÖP’te örüntülerde nicelikler arasındaki ilişkilerin genellenmesine ve eş zamanlı değişime dikkat çeken doğrusal ifadelere yer verilmediği tespit edilmiştir.

6. sınıf düzeyinde programlarda yer alan cebir kazanımlarında, kavramlar incelendiğinde TMÖP yalnızca bilinmeyen nicelik ve değişken kavramına yer verirken diğer programlarda değişken kavramının yanı sıra eş zamanlı değişime de yer verilmiştir. Eşitsizlik ve sayı özelliklerine yer veren KMÖP, örüntü kavramını da en sık kullanan programdır. Eş zamanlı değişim ve örüntü kavramının yer aldığı kazanımların fonksiyonel düşünmeyi destekleyici olması İMÖP ve KMÖP için fonksiyonel düşünmeye yönelik kazanım niceliğini de etkilemiştir. Aynı kazanımda birden çok kavram kullanıldığı tespit edilmiş ve belirlenen kavramlara **Tablo 22**’de yer verilmiştir.

Şekil 16

6. Sınıf Cebir Kazanımlarında Yer Alan Kavramların ve Kullanım Sıklıkları



Kazanımlara yönelik tespit edilen süreçler incelendiğinde, cebirsel ifadeyi oluşturmaya veya yorumlamaya yönelik temsil etme ve genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama gibi süreçlere ulaşılırken, TMÖP'te yazılı temsil, sözel temsil ve değişkeni fark etmeye yönelik birer süreç olduğu tespit edilmiştir. KMÖP çoğu kazanım ifadesinde birden çok kavrama yer verdiği gibi birden çok sürece de yer vermiştir. Modelleme dillerine dahil edilen kazanımda hem genelleştirilmiş aritmetik hem de fonksiyonel düşünmeye destek olan ve yalnızca problemlerin çözümü değil yorumlanmasına da yer verilmesiyle çıkarımsal muhakeme türünün desteklendiği tespit edilmiştir.

7. Sınıf Düzeyi Cebirsel Düşünme Boyutlarına Yönelik Bulgular

Sırasıyla TMÖP, SMÖP, İMÖP ve OMÖP 7. sınıf seviyesi cebir öğrenme alanına ait kazanımlar analiz edilmiş ve tespit edilen alt temalara Tablo 9'da yer verilmiştir. İMÖP Anahtar Evre 3'e ait kazanımlar 7, 8 ve 9. Sınıf seviyelerine ayrılmadan bir bütün halinde verilmiştir. Bu araştırmada İMÖP kazanımları sınıf seviyelerine göre ayrılmadan incelenmiştir.

Tablo 23

7. sınıf düzeyi kazanımlarının cebirsel düşünme boyutlarına göre analizi

Kazanım Kodu	Cebirsel düşünme dizisi	Kavramlar	Süreçler	Öğrenme Alanı
Tr 7-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	-	Cebir
Tr 7-2	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri, değişken	-	Cebir
Tr 7-3	Fonksiyonel düşünme	Örüntü, değişken, birebir eşleme	Temsil etme, genelleme	Cebir
Tr 7-4	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Fark etme, doğrulama	Cebir
Tr 7-5	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme	Cebir
Tr 7-6	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir

Tr 7-7	Modelleme dilleri	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, doğrulama	Cebir
Sin 7-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-2	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	Fark etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-4	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler, değişken	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-5	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Temsil etme, genelleme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-6	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 7-7	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin7-8	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 7-9	Fonksiyonel düşünme	Değişken	-	Sayılar ve Cebir
Sin 7-10	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-11	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-12	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-13	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Fark etme	Sayılar ve Cebir
Sin 7-14	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 7-15	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 7-16	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 7-17	Modelleme dilleri	Eşitlik, değişken	Temsil etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir

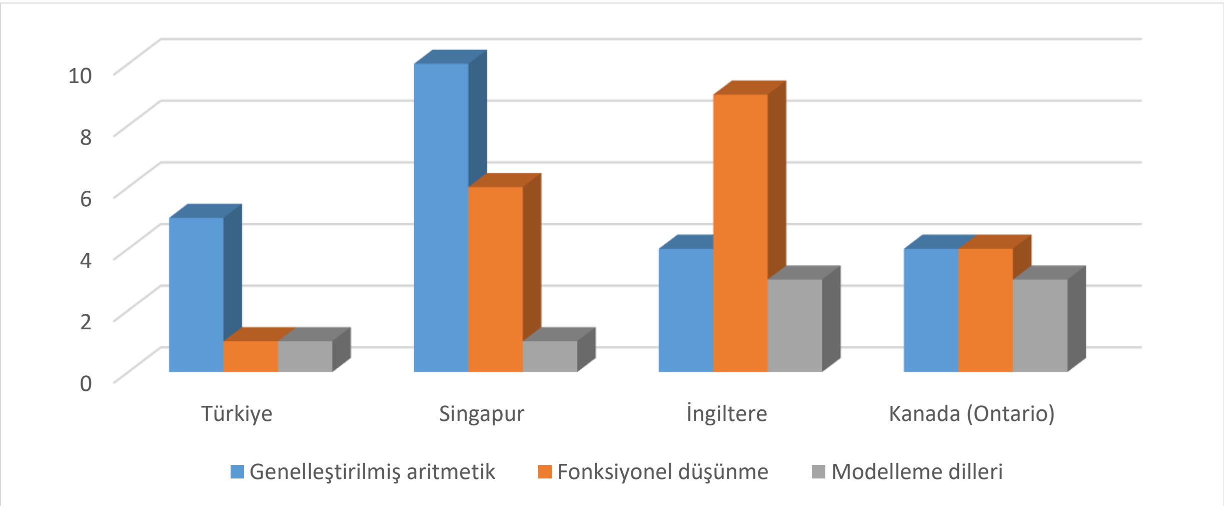
İng 7-1	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	Temsil etme	Cebir
İng 7-2	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Fark etme	Cebir
İng 7-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eşitlik, eşitsizlik	Temsil etme, genelleme	Cebir
İng 7-4	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, işlem özellikleri	Fark etme	Cebir
İng 7-5	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
İng 7-6	Modelleme dili	Değişken	Temsil etme, genelleme	Cebir
İng 7-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, doğrulama	Cebir
İng 7-8	Fonksiyonel düşünme	Değişken	-	Cebir
İng 7-9	Modelleme dilleri	Eşitlik, eş zamanlı değişim, değişken	Fark etme, temsil etme, genelleme	Cebir
İng 7-10	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Fark etme, genelleme	Cebir
İng 7-11	Fonksiyonel düşünme	Eşitlik, değişken, işlem özellikleri, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, Doğrulama	Cebir
İng 7-12	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Varsayımda bulunma, doğrulama	Cebir
İng 7-13	Modelleme dilleri	-	Varsayımda bulunma	Cebir
İng 7-14	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Doğrulama	Cebir
İng 7-15	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Genelleme	Cebir
İng 7-16	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Genelleme	Cebir
Ka 7-1	Fonksiyonel düşünme	Sayıların özellikleri, eş zamanlı değişim, örüntü	Fark etme, temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 7-2	Fonksiyonel düşünme	Değişken, örüntü	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 7-3	Fonksiyonel düşünme	Değişken, bilinmeyen nicelikler, örüntü	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir

Ka 7-4	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim, birebir eşleme, örüntü	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 7-5	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, işlem özellikleri	-	Cebir
Ka 7-6	Genelleştirilmiş aritmetik	Sayıların özellikleri	-	Cebir
Ka 7-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir
Ka 7-8	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitsizlik, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir
Ka 7-9	Modelleme dili	Eşitlik	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 7-10	Modelleme dili	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Cebir
Ka 7-11	Modelleme dili	-	Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, kanıtlama, genelleme, doğrulama	Cebir

Tablo 23'te verilen kazanımların cebirsel düşünme boyutu bileşenleri analiz edilmiş ve Şekil 17'da kazanımların program içince nasıl bir dağılıma sahip olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Şekil 17

7. Sınıf Öğretim Programı Cebir Öğrenme Alanı Kazanımlarının Cebirsel Düşünme Bileşenlerine Göre Dağılımı



TMÖP cebir öğrenme alanında bulunan toplam 7 kazanımdan 5'i cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik bileşenini desteklerken, fonksiyonel düşünme bileşeninde 1 kazanım, modelleme dilleri bileşeninde 1 kazanım bulunmaktadır. Fonksiyonel düşünmeyi destekleyen 1 kazanımın, örüntü ve ilişkilerle ilgili olduğu tespit edilmiştir.

SMÖP cebir öğrenme alanında niceliksel olarak en yüksek kazanım sayısına sahiptir. Cebirsel düşünme bileşenlerine göre incelenen 16 kazanımdan 10'u genelleştirilmiş aritmetik, 6'sı fonksiyonel düşünme ve 1'i modelleme dillerini desteklediği tespit edilmiştir.

İMÖP cebir öğrenme alanında toplam 16 kazanıma sahiptir. Kazanımlar cebirsel düşünme bileşenlerine göre incelendiğinde 4 kazanım genelleştirilmiş aritmetik, 9 kazanım fonksiyonel düşünme, 3 kazanım ise modelleme dillerini kapsamaktadır.

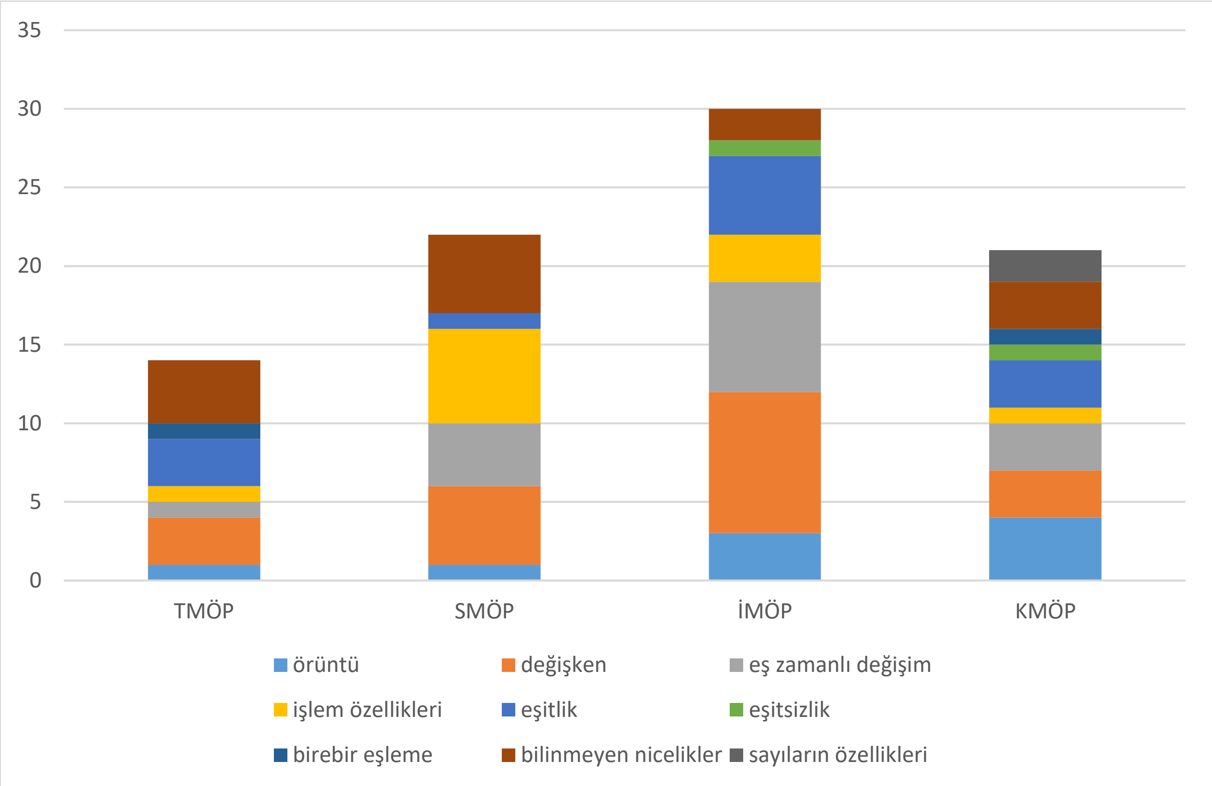
KMÖP cebir öğrenme alanında bulunan 11 kazanımın cebirsel düşünme bileşenlerine göre incelenmesiyle, 4 kazanımın genelleştirilmiş aritmetik, 4 kazanımın fonksiyonel düşünme ve 3 kazanımın modelleme dilleri bileşenlerini kapsadığı tespit edilmiştir.

7. sınıf düzeyinde incelenen cebir öğrenme alanlarında, SMÖP ve İMÖP'te fonksiyonel düşünmeye yönelik kazanım sayısının önceki sınıf seviyesine göre belirgin bir şekilde artmış olduğu görülmektedir. Yine de SMÖP genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik daha fazla içeriğe sahipken, İMÖP'te fonksiyonel düşünmeye yönelik ifadelerin sayıca daha fazla oluşu ve KMÖP'te ise bileşenlerin birbirine yakın sayılarda yer almış olduğu tespit edilmiştir.

Örüntü temelli cebir öğretimi yaklaşımı ile dikkat çeken KMÖP, 7. sınıf seviyesinde örüntülerde en fazla destekleyen içeriğe sahip olurken, değişkenler arası ilişkilerin incelendiği ve fonksiyonel düşünmenin gelişimini destekleyen eş zamanlı değişim en az TMÖP'te iken en fazla SMÖP ve İMÖP'te tespit edilmiştir. (Şekil 18)

Şekil 18

7. Sınıf Kazanımlarında Kullanılan Cebirsel Düşünmeyi Bileşenlerine Ayırmaya Yardımcı Cebirsel Kavramlar ve Kullanım Sıklıkları



Kazanım ifadelerinde vurgulanan süreçler incelendiğinde cebirsel düşünmenin temel bileşenlerinde genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dillerine yönelik sınıflandırılan kazanımlarda, süreçler incelendiğinde temsil etme sürecinin genelleştirilmiş aritmetiği; eş zamanlı değişime dikkat çeken ifadelerde ise fark etme, gerekçelendirme süreçlerinin fonksiyonel düşünmeyi; varsayma, doğrulama, gerekçelendirme gibi süreçlerin ise modelleme dillerini sınıflandırmada yardımcı olduğu görülmüştür. Bir kazanım veya hedef öğrenme ifadesinin, bir veya birden çok süreci belirtebildiği gibi, hiçbir süreci belirtmemiş de olabileceği tespit edilmiştir.

8. Sınıf Düzeyi Cebirsel Düşünme Boyutlarına Yönelik Bulgular

Sırasıyla TMÖP, SMÖP, İMÖP ve OMÖP 8. sınıf seviyesi cebir öğrenme alanına ait kazanımlar analiz edilmiş ve tespit edilen alt temalara Tablo 10'da yer verilmiştir. İMÖP

Anahtar Evre 3'e ait kazanımlar 7, 8 ve 9. Sınıf seviyelerine ayrılmadan bir bütün halinde verilmiştir. Araştırmada İMÖP kazanımları sınıf seviyelerine göre ayrılmadan incelenmiştir

Tablo 24

8. Sınıf Düzeyi Kazanımlarının Cebirsel Düşünme Boyutlarına Göre Analizi

Kazanım Kodu	Cebirsel düşünme dizisi	Kavramlar	Süreçler	Öğrenme Alanı
Tr 8-1	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken	Temsil etme	Cebir
Tr 8-2	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	Temsil etme	Cebir
Tr 8-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, işlem özellikleri	Fark etme	Cebir
Tr 8-4	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme	Cebir
Tr 8-5	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, değişken	Doğrulama	Cebir
Tr 8-6	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Fark etme	Cebir
Tr 8-7	Modelleme dilleri	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme, genelleme	Cebir
Tr 8-8	Modelleme dilleri	Değişken	Temsil etme	Cebir
Tr 8-9	Modelleme dilleri	Eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme	Cebir
Tr 8-10	Fonksiyonel düşünme	Eşitlik, değişken	Fark etme, doğrulama	Cebir
Tr 8-11	Fonksiyonel düşünme	Bilinmeyen nicelikler, eşitsizlik	Temsil etme, genelleme	Cebir
Tr 8-12	Fonksiyonel düşünme	Eşitsizlik	Temsil etme	Cebir
Tr 8-13	Fonksiyonel düşünme	Bilinmeyen nicelikler, eşitsizlik	Doğrulama	Cebir
Sin 8-1	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-2	Fonksiyonel düşünme	Bilinmeyen nicelikler	Fark etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 8-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 8-4	Genelleştirilmiş	Eşitlik, işlem	-	Sayılar ve

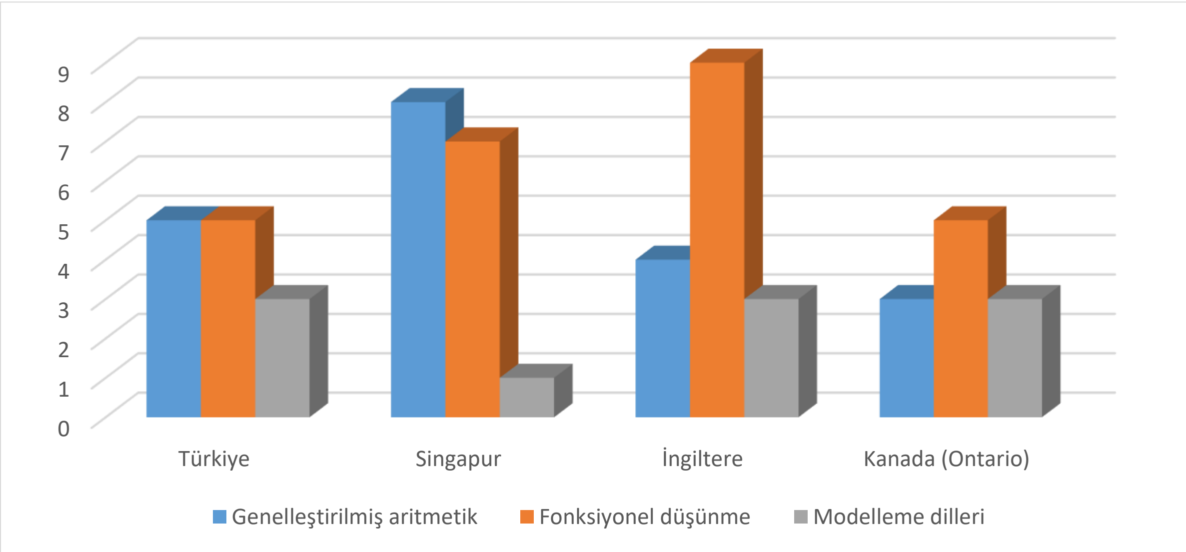
	aritmetik	özellikleri		Cebir
Sin 8-5	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-6	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelikler, işlem özellikleri	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-8	Genelleştirilmiş aritmetik	Bilinmeyen nicelik, işlem özellikleri	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 8-9	Fonksiyonel düşünme	-	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-10	Fonksiyonel düşünme	-	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-11	Fonksiyonel düşünme	Eşitlik, eşitsizlik	-	Sayılar ve Cebir
Sin 8-12	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Doğrulama, temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 8-13	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme	Sayılar ve Cebir
Sin 8-14	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Temsil etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 8-15	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri, bilinmeyen nicelik	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Sayılar ve Cebir
Sin 8-16	Modelleme dili	Bilinmeyen nicelik	Temsil etme, genelleme	Sayılar ve Cebir
İng 8-1	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	Temsil etme	Cebir
İng 8-2	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Fark etme	Cebir
İng 8-3	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eşitlik, eşitsizlik	Temsil etme, genelleme	Cebir
İng 8-4	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, işlem özellikleri	Fark etme	Cebir
İng 8-5	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
İng 8-6	Modelleme dilleri	Değişken	Temsil etme, genelleme	Cebir
İng 8-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Değişken, eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, doğrulama	Cebir

İng 8-8	Fonksiyonel düşünme	Değişken	-	Cebir
İng 8-9	Modelleme dilleri	Eşitlik, eş zamanlı değişim, değişken	Fark etme, temsil etme, genelleme	Cebir
İng 8-10	Fonksiyonel düşünme	Değişken	Fark etme, genelleme	Cebir
İng 8-11	Fonksiyonel düşünme	Eşitlik, değişken, işlem özellikleri, bilinmeyen nicelikler	Temsil etme, Doğrulama	Cebir
İng 8-12	Fonksiyonel düşünme	Değişken, eş zamanlı değişim	Varsayımda bulunma, doğrulama	Cebir
İng 8-13	Modelleme dilleri	-	Varsayımda bulunma	Cebir
İng 8-14	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Doğrulama	Cebir
İng 8-15	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Genelleme	Cebir
İng 8-16	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim	Genelleme	Cebir
Ka 8-1	Fonksiyonel düşünme	Değişke, eş zamanlı değişim, örüntü	Varsayımda bulunma, doğrulama	Cebir
Ka 8-2	Fonksiyonel düşünme	Örüntü	Temsil etme, genelleme	Cebir
Ka 8-3	Fonksiyonel düşünme	Bilinmeyen nicelikler, eş zamanlı değişim	Doğrulama	Cebir
Ka 8-4	Fonksiyonel düşünme	Eş zamanlı değişim, örüntü	Genelleme	Cebir
Ka 8-5	Genelleştirilmiş aritmetik	İşlem özellikleri	-	Cebir
Ka 8-6	Genelleştirilmiş aritmetik	Sayıların özellikleri	-	Cebir
Ka 8-7	Genelleştirilmiş aritmetik	Eşitlik, bilinmeyen nicelikler	Doğrulama	Cebir
Ka 8-8	Fonksiyonel düşünme	Eşitsizlik, bilinmeyen nicelikler, semboller	Doğrulama, temsil etme	Cebir
Ka 8-9	Modelleme dilleri	Bilinmeyen nicelikler, semboller	Temsil etme, genelleme, doğrulama	Cebir
Ka 8-10	Modelleme dilleri	Değişken, eş zamanlı değişim	Fark etme, temsil etme, doğrulama	Cebir

Ka 8-11	Modelleme dilleri	-	Fark etme, temsil etme, varsayımda bulunma, kanıtlama, genelleme, doğrulama	Cebir

Şekil 19

8. Sınıf Düzeyinde Cebir Öğrenme Alanı Kazanımlarının Cebirsel Düşünme Bileşenlerine Göre Dağılımı



TMÖP 8. sınıf cebir öğrenme alanına bakıldığında cebirsel düşünme bileşenlerini destekleyen kazanım sayılarında birbirine yakınlık görülmektedir. Toplam 13 kazanımın 5'i genelleştirilmiş aritmetik, 5'i fonksiyonel düşünme, 3'ü modelleme dillerini desteklemektedir.

SMÖP 8. sınıf cebir öğrenme alanında 16 kazanım bulunmaktadır. Cebirsel düşünme bileşenlerine göre kazanımlar incelendiğinde 8 kazanım genelleştirilmiş aritmetik, 7 kazanım fonksiyonel düşünme, 1 kazanım ise modelleme dillerini desteklemektedir. Fonksiyonlarla ilgili kazanımlar fonksiyonel düşünmeyi destekleyici olarak alınmıştır. Fonksiyonlar yalnızca SMÖP'te yer almaktadır.

İMÖP cebir öğrenme alanında toplam 16 kazanıma sahiptir. Kazanımlar cebirsel düşünme bileşenlerine göre incelendiğinde 4 kazanım genelleştirilmiş aritmetik, 10 kazanım fonksiyonel düşünme, 3 kazanım ise modelleme dillerini kapsamaktadır. Bileşenlere ayrılmasının ardından, toplam kazanım sayısının 17 çıkmasının sebebi olan İng 8-11 kodlu kazanımın, fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri bileşenlerini birlikte desteklediği tespit edilmiştir.

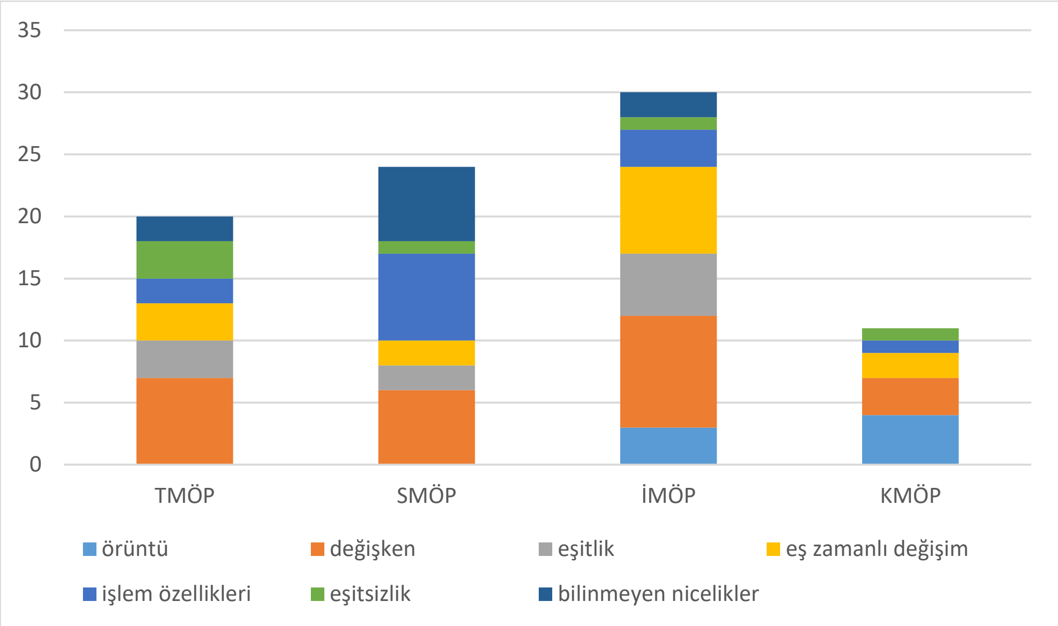
KMÖP incelendiğinde cebir öğrenme alanında bulunan toplam 11 kazanımın 3’ü genelleştirilmiş aritmetik, 5’i fonksiyonel düşünme, 3’ünün ise modelleme dillerini desteklediği tespit edilmiştir.

İMÖP Anahtar Evre 3’te yer alan tüm kazanımları tek bir liste şeklinde vermiş ve kazanımların sınıf seviyelerine göre ayrılmasını okula ve öğretmene bırakmıştır. 8. sınıf düzeyinde alınan tüm kazanımların analiz edilmesi sebebiyle fonksiyonel düşünmeye yönelik diğer programlara göre daha fazla içeriğe sahip olmasının sebebi bu şekilde açıklanabilir.

Şekil 20’de programlardaki 8. sınıf düzeyi kazanımlarda kullanılan cebir kavramlarının kullanım sıklığı görülmektedir. Niceliksel olarak en çok fonksiyonel düşünmeye yönelik kazanıma 8. Sınıf düzeyinde sahip olan TMÖP, eş zamanlı değişimi (doğrusal ilişkiler) fark ettirmeye yönelik ifadelere yer vermiştir. Programlarda cebir öğrenme alanına ait kazanım sayıları niceliksel olarak artmış ve cebirsel düşünmenin tüm bileşenlerini destekleyecek kazanımlara ve öğrenme çıktılarına yer verilmiştir. KMÖP örüntü ve eş zamanlı değişime istikrarlı bir şekilde tüm sınıf düzeylerinde yer vererek süreci bütünsel olarak desteklemiştir.

Şekil 20

8. Sınıf Kazanımlarında Kullanılan Cebirsel Düşünmeyi Bileşenlerine Ayırmaya Yardımcı Cebirsel Kavramlar ve Kullanım Sıklıkları



Kavramlar incelendiğinde, önceki sınıf seviyelerinde farklı kavramlara yer evren KMÖP 8. Sınıf düzeyinde kavram çeşitliliğini azaltmış olduğu görülmektedir. İMÖP ve SMÖP ise aynı ifadede birden çok farklı kavramın kullanılması sebebiyle, niceliksel olarak daha fazla kavrama sahipmiş gibi görülmektedir. TMÖP ise benzer şekilde bu sınıf düzeyinde kavram çeşitliliğini artırarak, farklı kavramları aynı ifade içerisinde kullanmıştır. Süreç boyutunda incelendiğinde, genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünmeye yönelik süreç ifadelerinin benzerliği fark edilirken, modelleme dillerine yönelik ifadelerde farklı süreçlere yer verildiği, özellikle KMÖP'te farklı süreç türlerinin desteklendiği görülmüştür.

İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

Ülkelerin öğretim programlarında cebir öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları arasındaki benzerlik ve farklılıkların neler olduğuna ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 25

Ülkelerin Cebir Öğrenme Alanlarına Ait Alt Öğrenme Alanları ve Kazanım Sayıları (KS)

	Türkiye	KS	Singapur	KS	İngiltere	KS	Kanada (Ontario)	KS
5. Sınıf Düzeyi							Örüntüler ve ilişkiler	4
							Denklemler ve eşitsizlikler	4
							Kodlama	3
							Matematiksel modelleme	1
6. Sınıf Düzeyi	Cebirsel ifadeler	3	Cebir	5	Cebir	5	Örüntüler ve ilişkiler	4
							Denklemler ve eşitsizlikler	4
							Kodlama	2
							Matematiksel modelleme	1
7. Sınıf Düzeyi	Cebirsel ifadeler	3	Cebirsel ifadeler ve formüller	8	Cebir	16	Örüntüler ve ilişkiler	4
	Eşitlik ve denklem	4	Fonksiyonlar ve grafikler	5			Denklemler ve eşitsizlikler	4
			Denklemler ve eşitsizlikler	4			Kodlama	2
							Matematiksel modelleme	1
8. Sınıf Düzeyi	Cebirsel ifadeler ve özdeşlikler	4	Cebirsel ifadeler ve formüller	8	Cebir	16	Örüntüler ve ilişkiler	4
	Doğrusal denklemler	7	Fonksiyonlar ve grafikler	2			Denklemler ve eşitsizlikler	4
	Eşitsizlikler	2	Denklemler ve eşitsizlikler	6			Kodlama	2
							Matematiksel modelleme	1

SMÖP'te cebir öğrenme alanı sayılardan ayrı tutulmamış fakat okul cebiriyle ilgili kazanımlara cebir alt öğrenme alanıyla birlikte, 6. sınıf düzeyinden itibaren yer verilmeye başlanmıştır. 7 ve 8. sınıf düzeylerinde alt öğrenme alanları çeşitlenmiş, kazanımlar alt öğrenme alanlarının kodlarıyla devam ettirilmiştir. Örneğin “Fonksiyonlar ve Grafikler” alt öğrenme alanı “N6” olarak kodlanmış, 7. Sınıf düzeyinde (S1) N6.1’den N6.5’e kadar verilmiş ve 8. sınıf düzeyinde (S2) N6.7 ile başlayıp N6.8 ile sonlanmıştır. Aynı alt öğrenme alanına yönelik kazanımların ardışık kodlarla verilmesi kendi içerisinde bir sarmal bir yapı oluşturmaktadır.

İMÖP’e ait cebir öğrenme alanı, alt öğrenme alanlarına ayrılmamıştır. 6. Sınıf düzeyinde kazanım ifadeleri incelendiğinde cebirsel ifadelere yönelik hedeflerin olması ve Anahtar Evre 3 (7, 8 ve 9. sınıf düzeylerini kapsayan) kazanımları, resmi kurum tarafından liste şeklinde verilmiş ve herhangi bir alt öğrenme alanına ayrılmamıştır. Kazanım ifadeleri incelendiğinde

KMÖP’e ait cebir öğrenme alanı her sınıf düzeyinde “örüntüler ve ilişkiler, denklemler ve eşitsizlikler, kodlama, matematiksel modelleme” olarak dört alt öğrenme alanına ayrılmıştır. Örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanı diğer programlarda hiçbir alt öğrenme alanında yer almazken, kodlama ve matematiksel modellemenin cebir öğrenme alanı altında yer alması dikkat çekmektedir. TMÖP yalnızca doğrusal ilişkiye sahip sayı örüntülerine, genel kuralın bulunmasına yönelik Tr 7-3 kodlu kazanımda yer vermiştir.

TMÖP temel kavramların ve işlem özelliklerinin genellenmesinin verildiği cebirsel ifadeler alt öğrenme alanı ile okul cebirine giriş yapmış ve her sınıf düzeyinde farklı öğrenme alanlarıyla cebir öğretimine devam etmiştir. Değişken kavramı tanıtılırken iki bilinmeyenli denklemlere yer verilmemiştir.

Tablo 26

Ülkelerin Öğretim Programlarında Yer Alan Cebir Öğrenme Alanlarının TMÖP'e Yönelik Benzerlik ve Farklılıkları

Benzerlikler	Farklılıklar
Alt öğrenme alanları ve kazanım ifadeleri incelendiğinde TMÖP, İMÖP ve KMÖP beklenen beceriyle birlikte verilmiştir. 5. sınıf düzeyinde TMÖP, SMÖP ve İMÖP cebir öğrenme alanına ve alt öğrenme alanlarına yer vermemektedir. Üç program da cebir öğretimine "cebirsel ifadeler" ile 6. sınıf düzeyinde başlamıştır. . Cebirsel ifadelerin sözlü olarak ifade edilmesi, işlemlerin farklı gösterimlerinin uygulanması TMÖP, SMÖP ve İMÖP'te 7. sınıfta verilmiştir. Dört programda 7. Sınıf düzeyinde denklem ve eşitliğe yer verilmiştir. Dört programda 8. Sınıf düzeyinde rasyonel sayılar içeren cebirsel ifadeler ve denklemlere yer verilmiştir. Programlarda özdeşlik kavramı yalnızca TMÖP'te var gibi görünse de diğerleri özdeşlik yerine temel formüller olarak isimlendirmiş ve aynı özdeşlikleri vermiştir. TMÖP, SMÖP ve İMÖP ikinci dereceden cebirsel ifadelerin çarpanlarına ayrılmasına yer vermiştir.	SMÖP'te kazanım ifadeleri konuyla ilgili olacak şekilde, ana hatlarıyla verilmiştir. 5. sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanı ve alt öğrenme alanlarına yer verilen tek öğretim programı KMÖP'tür. "Örüntüler ve ilişkiler" alt öğrenme alanına sahip tek öğretim programı KMÖP'tür ve tüm sınıf düzeylerinde bulunmaktadır. İMÖP tüm sınıf düzeylerinde, cebir öğrenme alanını alt öğrenme alanlarına ayırmayıp yalnızca öğrenme alanını ana tema olarak vermiştir. SMÖP 6. sınıf düzeyinde "Sayılar ve cebir öğrenme alanı" ana teması altında, cebiri alt öğrenme alanı olarak vermiştir ve kendi içinde alt temalara ayırmamıştır. SMÖP ve KMÖP 7. sınıf düzeyinde doğrusal denklemlere ve eşitsizliklere yer vermiştir. TMÖP'te 8. Sınıf düzeyinde yer alan "doğrusal denklemler" SMÖP'te 7. sınıf düzeyinde "fonksiyonlar ve grafikler" olarak ele alınmıştır. KMÖP tüm sınıf seviyelerinde "Kodlama ve Matematiksel Modelleme" alt öğrenme alanlarına yer vermiş ve cebiri kodlama uygulamalarıyla birleştirirken, gerçek yaşam durumlarını tablo ve grafik gibi farklı temsil yöntemlerini kullanarak analiz ve tahmin etme gibi becerileri desteklemiştir.

Programlarda yer alan cebir öğrenme alanı ve alt öğrenme alanları, sınıf düzeylerine göre benzerlik ve farklılık göstermektedir. KMÖP alt öğrenme alanlarına yönelik kazanımlara her sınıf düzeyinde ve öğrencilerin bilişsel düzeylerine uygun şekilde yer verirken, diğerlerinde doğrusal bir yapı fark edilmiştir.

6. sınıf düzeyinde programların tümü basit cebirsel ifadelere yer vermiştir. Bilinmeyen sayıyı, eksik sayıyı, örüntüdeki eksik adımı bulmaya yönelik cebirsel ifade yazma ve cebirsel ifadeye uygun sözel ifade oluşturma, değişkene değer vererek cebirsel ifadenin değerini hesaplama hedefleri karşımıza çıkmaktadır. TMÖP hariç diğer ülkeler doğrusal ilişkilere yönelik kazanım ve hedef içeriklerine yer vermiştir.

İMÖP 6. Sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanında hem kazanım ifadesinde hem de içeriğe yönelik rehber olarak verilen bölümde, matematik ve bilim dersinde öğrenilen formüllere dikkat çekmektedir. (

Şekil **21**) Benzer şekilde disiplinler arası öğrenmeye yer veren KMÖP, cebir öğrenme alanında verdiği örneklerle, öğrencilerin önceki geometri öğrenmelerine atıfta bulunarak veya fen bilimleri gibi farklı disiplinlerde öğrenilen formüllerle bağlantı kurarak cebire yönelik öğrencilerin öğrenme deneyimlerini genişletmektedir. (Şekil 22) Ayrıca her sınıf düzeyinde yer alan ve cebir öğrenme alanına ait kodlama alt öğrenme alanıyla da ilişkilendirilmiş rehber içeriklerin olduğu tespit edilmiştir.

Şekil 21

İMÖP 6. Sınıf Cebirsel İfadelerde Matematik ve Bilim Formüllerine Dikkat Çekme (s. 42-43)

Statutory requirements

Pupils should be taught to:

- use simple formulae

Notes and guidance (non-statutory)

- formulae in mathematics and science

Şekil 22

KMÖP 6. Sınıf Cebir Öğrenme Alanı, Eşitlik ve Eşitsizlik Alt Öğrenme Alanına Ait Rehber Not (s. 355)

Note

- When students are working with formulas, they are evaluating expressions.
- Replacing the variables with numerical values often requires the use of brackets. For example, the expression 4.5*m* becomes 4.5(*m*) and then 4.5(7) when *m* = 7. The operation between 4.5 and (7) is understood to be multiplication.
- Many coding applications involve algebraic expressions being evaluated. This may be carried out in several steps. For example, the instruction: “input 'the side of a square’, sideA” is instructing the computer to define the variable “sideA” and store whatever the user inputs into the temporary location called “sideA”. The instruction: “calculate sideA*sideA, areaA” instructs the computer to take the value that is stored in “sideA” and multiply it by itself, and then store that result in the temporary location, which is another variable called “areaA”.

7. sınıf düzeylerinde TMÖP eşitlik ve denklemlerle sınırlı kalırken, KMÖP denklem çözümüyle birlikte basit eşitsizliklerin çözümüne de yer vermiş ve eşitsizliklerin grafiksel gösterimi üzerinde durmuştur. SMÖP ve İMÖP iki değişken arasındaki ilişkinin gösterimini hem cebirsel olarak hem de kartezyen koordinat sisteminde grafiksel olarak gösterilmesi ve yorumlanması üzerinde durmuştur. SMÖP 7. sınıf düzeyinde doğrusal fonksiyonlarla birlikte “eğim” kavramını da vermiştir.

8. sınıf düzeyinde TMÖP ve SMÖP özdeşlikleri alırken, İMÖP ve KMÖP özdeşlik kavramına yer vermemiştir. TMÖP ve KMÖP birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerle sınırlı kalmış, SMÖP ve İMÖP ise ikinci dereceden denklemlerin çözümleri ve grafiksel gösterimlerine yer vermiştir.

6. sınıf düzeylerinde TMÖP yalnızca cebirsel ifadelerin ve kavramların tanıtılmasına yönelik kazanımlar verirken, SMÖP ve KMÖP cebirsel ifadelerle birlikte, basit doğrusal denklemlerin çözümüne yönelik kazanıma yer vermiş, İMÖP ise iki bilinmeyenli denklemde bilinmeyen sayı çiftlerini bulmalarına yönelik bir hedef ifadesine yer vermiştir. 7. Sınıf düzeylerinde SMÖP, İMÖP ve KMÖP doğrusal denklemlere ve doğrusal ilişkilere yer

verirken, TMÖP denklem ve eşitlik dışında farklı bir kavrama değinmemiştir. İMÖP ve KMÖP diğer ikisinden farklı olarak eşitsizliklere ve eşitsizliklerin grafiksel gösterimine vurgu yapmıştır. 8. Sınıf düzeylerinde tüm programlar daha yoğun bir cebir içeriğine sahip olmalarıyla birlikte, cebirsel ifadelerin çarpanlarına ayrılması konusunda TMÖP yalnızca tam kare ifadelerin çarpanlarına ayrılmasına yer vermiş, gruplandırarak çarpanlarına ayırmayı dahil etmemiştir. Aynı zamanda ikinci dereceden denklemlerin çözümüne veya grafiksel gösterimine de yer verilmemiştir. SMÖP ve İMÖP ise cebirsel ifadelerin çarpanlarına ayrılırken kullanılan yöntemlerin hepsini dahil etmiş ve ikinci dereceden denklemler ile grafiksel gösterimlerine de yer vermiştir. KMÖP'te doğrusal denklemler ve eşitsizliklere yer verilirken, ikinci dereceden denklemlerin grafik gösterimlerine yer verilmemiştir.

Bölüm 5

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde araştırma sonucu elde edilen bulgulara yönelik tartışmalara, sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Tartışma ve Sonuç

Araştırma problemlerine yönelik bulgularda Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada (Ontario Eyaleti) matematik dersi öğretim programlarının cebir öğrenme alanlarına ait veriler; cebirsel düşünmenin bileşenleri, alt öğrenme alanları ve kazanımların hiyerarşisi, öğretme-öğrenme sürecine yönelik açıklamalar ve örnek uygulamalar incelenmiştir.

Cebirsel düşünme; genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri gibi temel bileşenleri kapsayan ve bu bileşenlerin aslında sarmal bir yapı oluşturduğu ve muhakemeyi zorunlu kılan bir bütündür. Bilinmeyen niceliklerle, biliniyormuş gibi işlemler yapabilme yeteneği (Swafford & Langrall, 2000) olarak da tabir edilen cebirsel düşünmede, fonksiyonel düşünmenin önemli olduğu kadar genelleştirilmiş aritmetik de önemlidir. Booth (1988) öğrencilerin okul cebirinde yaşadıkları zorlukların cebirin epistemolojisinden çok, aritmetikte var olan sorunların düzeltilmemesinden kaynaklandığını belirtmiştir. Cebirsel düşünmenin aritmetiğin bir parçası olması, sayı ve işlem özelliklerinden yola çıkılarak genellemelere ulaşılması sayesinde, fonksiyonel ilişkilerin genellenebilmesine de temel oluşturmaktadır. SMÖP'te genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik daha fazla kazanım sayısının tespit edilmiş olması, bu temeli sağlam kılabilmek için olabileceği düşünülmektedir. Verschaffel vd. (2007) bir problem durumunu modellemek için aritmetik kullanımı gerektiğinde, öğrenciler için durumun daha karmaşık hale geldiğini ve cebirin kullanımında genelleştirilmiş aritmetiğin önemli bir rolü olduğunu belirtmiştir. Fonksiyonel düşünme özelinde bilinen veya bilinmeyen nicelikler arasındaki ilişkinin doğru bir genellemeyle ortaya çıkarılması ve yazılı temsil olarak belirtilebilmesi, genelleştirilmiş aritmetikte kazanılan deneyimlerle doğru ifade edilebilir.

İlkokulda örüntü bulma etkinlikleriyle cebirsel düşünmenin gelişiminin desteklenmesi, ardından aritmetikten cebire geçiş döneminde, öğrencilerin örüntülerin ilerleyen adımlarını hesaplayabilmek için daha pratik bir yol aramaları ve örüntülerin sahip oldukları kuralları, genellemeleri matematiksel olarak ifade etmelerini sağlayacak etkinliklerin yapılması, problem ve problemlerin çözümleri üzerinde düşünmeleri, cebir kavramına zemin hazırlarken cebirsel düşünmenin gelişimi için de etkili olmaktadır (Ayber, 2017; Palabıyık ve Akkuş İspir, 2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin dikkat çektiği Kanada (Ontario) öğretim programında, tüm sınıf düzeylerinde cebir öğrenme alanı, örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanıyla başlamaktadır ve her spesifik öğrenmeye detaylı şekilde uygulama örnekleri ve dikkat edilmesi gereken hususlar eklenmiştir. Diğer üç program incelendiğinde, 5-8. sınıf düzeylerinde örüntü ve ilişkilere yeterince yer verilmediği tespit edilmiştir. TMÖP 5. sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanı bulunmamaktadır ve sayı örüntüleriyle ilgili kazanım “Sayılar ve İşlemler” öğrenme alanı altında vermiştir; şekil örüntüleriyle oluşmuş desenlere kültürel ve tarihi ögelerden örnek verilerek gerçek yaşam bağlamında desteklenmesi sağlanmış fakat nicelikler arasındaki ilişkisel duruma dikkat çekilmemiştir. Bu durumun nicelikler arası ilişkilerin genellenebilmesi ve aritmetikten cebire geçişte anlamlı öğrenme sağlamakta yetersiz kalacağı, bu sebeple de okul cebirinde fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek ve geliştirecek bir temel olarak yetersiz kaldığı düşünülmektedir (Özyıldırım Gümüş, 2022). KMÖP değişken ve eşitsizlik gibi kavramlara 5. sınıf düzeyinde yer vermiştir. Yapılan araştırmalarda cebir öncesi dönemdeki öğrencilerin, değişim, eş zamanlı değişim, birebir eşleme gibi kavramları anlamlandırabileceği uygun bir öğrenme süreci geliştirildiği takdirde değişken kavramını anlayabilecekleri ve fonksiyonel ilişkilerle ilgili düşüncelere sahip olabilecekleri ortaya çıkarılmıştır (Blanton vd. 2017; Akın, 2020; Pittalis vd., 2020). Erken cebirde nicelikler arasındaki değişen ilişkilere ve değişkenlere yer verilmesinin öğrenciler için gelecekte yaşamaları muhtemel zorlukların önüne geçebileceği düşünülmektedir (Blanton vd., 2017; Akın, 2020).

6. sınıf düzeyinde cebirsel düşünme bileşenleri kapsamında incelenen kazanım ifadelerinde, bilinmeyen niceliğin harf ile temsil edilerek cebirsel ifade yazımı veya verilen cebirsel temsilin sözlü olarak ifade edilmesi, işlemlerin özelliklerinin uygulanması, denklemlerin basit bağlamda çözülmesi gibi nicelikler arasındaki eş zamanlı değişime dikkat çekmeyen kazanım ifadeleri, genelleştirilmiş aritmetik kapsamına alınmıştır. Değişken kavramının verilmesi, değişkene değer verilerek elde edilecek sonuçların yorumlanması, iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerde sayı çiftlerinin bulunması gibi kazanımların fonksiyonel düşünmeyi destekleyeceği ve nicelikler arası ilişkilerin fark edilmesinin sağlanacağı, bu sebeple fonksiyonel ilişkilerin daha erken sınıflarda tanıtılmasının öğrencilerin cebirsel düşünme ve farklı muhakeme biçimlerinin desteklenmesinin yararlı olacağı vurgulanmaktadır (NCTM, 2000). KMÖP, modelleme dillerini destekleyen ve tablo kullanımı, grafik çizimi, kod yazma gibi farklı temsillerin kullanılarak problem çözmeyi, tüm sınıf düzeylerinde standart algoritmalarla sınırlı tutmayıp, kodlama ve matematiksel modellemeye yer vererek cebirsel düşünmenin hem fonksiyonel düşünme hem de modelleme dilleri destekleyecek ifadelere yer vermesi dikkat çekmektedir. Diğer programlarda kazanım veya öğrenme hedef ifadeleri daha kısa tutulmuş, tahmin etme-doğrulama gibi süreçler veya muhakeme biçimleri açık ve net olarak yazılmamıştır.

İMÖP’te Anahtar Evre 2 programı, TMÖP ve SMÖP’e benzer şekilde hazırlanmış fakat, Anahtar Evre 3 öğretim programını yalnızca hedef öğrenmelerden oluşan liste şeklinde vermiş, sınıf düzeylerine göre ayırmamıştır. Bunun sebebi, her okulun idare ve öğretmenleri tarafından öğretim planı hazırlanmasına yasal zorunluğu olan bir çerçeve oluşturmaktır. NCETM (National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics) tarafından zorunlu olmayan, okullar için örnek bir uygulama rehberi hazırlanmıştır (Gökçe ve Aydoğan Yenmez, 2022). Bu sebeple cebirsel düşünme bileşenleri Anahtar Evre 2’de olan 6. sınıf düzeyi için incelendiğinde fonksiyonel düşünmeyi destekleyici kazanım ifadelerinin diğerlerine oranla daha fazla yer verildiği tespit edilirken, 7 ve 8. sınıfları içine alan Anahtar Evre 3’te sınıf düzeylerine göre analiz etmek zorlaşmıştır.

SMÖP'te tüm sınıf düzeylerinde genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik içeriğin diğer bileşenlere göre daha fazla olduğu tespit edilmiş, sınıf düzeyi arttıkça fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek ifadelerin sayıca arttığı görülmüştür. Diğer öğretim programlarında da benzer bulgulara rastlanması, sınıf düzeyi arttıkça doğrusal denklemlerin ve doğrusal ilişkilerin ortaya çıkarılmasını sağlayacak kazanımların işe koşulması ile açıklanabilir. Halbuki öğrenciler cebir öncesi dönemde, oluşturulan şekil örüntülerinde somut nicelikler arasındaki ilişkiyi anlayabilmekte, örüntülerde ilerleyen adımları tahmin edebilmekte ve fonksiyonel düşünmenin varlığı sözlü olarak ortaya çıkarılabilmektedir (Blanton ve Kaput, 2004; Cooper ve Warren, 2008; Steinweg vd., 2023).

Cebirsel düşünmede genelleştirilmiş aritmetik, nicelikler arasındaki aritmetik genellemeyi ifade edebilmeyi sağlarken, fonksiyonel düşünmeye temel oluşturmakta fakat nicelikler arasındaki ilişkileri genelleme yoluyla ifade edebilmekte yetersiz kalmaktadır. Bu sebeple değişken ve eş zamanlı değişime dikkat çeken ifadeler nicelikler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmayı, cebirsel bir genellemeye ulaşabilmeyi amaçladıkları sürece fonksiyonel düşünmenin gelişimini sağlayabilmektedir. Aritmetikten cebire geçişte 5 ve 6. sınıf düzeylerinde genelleştirilmiş aritmetiğe yönelik içerik ifadelerinin sayıca daha fazla olması, somut işlemler döneminden soyut işlemler dönemine geçmekte olan öğrenciler için bilişsel zorluktan kaçınmak olabilir. Cebirin problem çözmede bir araç olarak kullanılması, nicelikler arasındaki ilişkilerin ortaya çıkarılmasını gölgede bırakmakta ve cebirsel düşünmenin gelişimini zorlaştırmaktadır. Öğretim programları, ülkelerde resmi olarak uygulayıcılara bir çerçeve sunarken kimi programlarda öğretmenlere ve öğrencilere rehber olacak içeriklerin daha fazla ve detaylı yer alması, tüm öğrencilerin aynı örneklere ve içeriklere ulaşabilmesini desteklediği için fırsat eşitliği sağlayabilir. KMÖP'te kazanımların spesifik beklentiler olarak verilmesi ve beklentilere yönelik detaylı içeriklerin, önceki öğrenmeler de ele alınarak verilmesi bu duruma örnek teşkil edebilir. Bu sebeple cebirsel düşünmenin gelişimini destekleyecek içeriklerin artırılması, özellikle matematiksel süreç becerilerinin aktif olarak kullanılabileceği ve geliştirilebileceği fonksiyonel düşünmeyi ve farklı gösterim biçimlerini (modelleme dilleri) destekleyici matematiksel modelleme etkinliklerinin yer alması, öğrencilerin ileri sınıflarda karşılaşacakları cebir içeriklerini anlamlandırabilmelerini sağlayabilir (Türkmen ve Tanışlı, 2019).

İncelenen öğretim programlarında cebir öğrenme alanında disiplinler arası bakış açısıyla yer verilmiş olan KMÖP "Kodlama" alt öğrenme alanı, öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini ve modelleme dillerini geliştirebilecekleri içerikler sunmuştur. Gadanidis vd. (2021) problemlerin kod yazarak ve yürüterek, kodu kontrol ederek, değişken değişikliğinde sonucun nasıl değiştiğini kontrol ederek çözülmesinin, matematiksel durumların hesaplamalı temsillerinin oluşturularak öğrencilere farklı deneyimler sunduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin kendi cevaplarını kontrol edebilmeleri ve günlük hayatta okul cebirinin nerelerde kullanılabileceğine dair somut bir örnek oluşturmasıyla, eğitim sürecinde teknolojinin desteği doğal olarak daha kalıcı ve etkili bir öğrenme ortamı sunduğu için kavramların anlamlandırılmasını sağlamaktadır.

Cebir öğrenme alanları ve kazanım/hedef öğrenme ifadeleri incelendiğinde, öğrencilerin cebir öncesi dönemde veya diğer derslerde öğrenmiş oldukları çevre ve alan formülleri, yol ve hız formülleri gibi cebirsel genellemelerin kullanılarak oluşturulduğu formüllere dikkat çekilmiş olduğu görülmüştür. Öğrencilerin matematik dersinde veya fen bilimleri gibi derslerde karşılarına çıkan formüllerin de birer cebirsel ifade olduklarını ve bir kavramın niceliğinin değişimiyle, hesaplamalı sonucun nasıl değişebileceğini görebilmeleri fonksiyonel düşünmenin gelişimini destekleyeceği için, programlarda bu formüllerin hatırlatılması SMÖP, İMÖP ve KMÖP'te dikkat çekmektedir. TMÖP formüllere ilgili örnek vermemiş ve formüllere cebirsel bir yaklaşım sunmamıştır.

Ülkelerin öğretim programları, öğrencilerin aynı yaş grubuna denk geldiği seviyeler olarak ele alınıp, o şekilde karşılaştırılmıştır. Aynı sınıf düzeylerinde hem ortak hem de farklı cebir kazanımlarının olması, ifadelerin çok kapsayıcı veya çok sadeleştirilmiş olması sebebiyle karşılaştırılmalarını zor bir hale getirmiştir. Bu sebeple kazanımlara yönelik rehber içeriklerin verilmesi, karşılaştırmalı çalışmalar için kolaylık sağlayabilmektedir.

TMÖP, İMÖP ve SMÖP gibi öğretim programlarında, cebir öğretimine ikinci kademeden itibaren başlanılması, cebirsel düşünmenin de okul cebiriyle başlayacağı ya da gelişeceği gibi yanlış bir izlenim oluşturmamalıdır. Cebirsel düşünmeyi ortaya çıkaracak ve gelişmesini sağlayacak bir çerçevenin, öğrencilerin aritmetiğe cebirsel bir bakış açısı kazanabilmeleri için eğitimin ilk yıllarından itibaren başlanılması önerilmektedir (Stephens vd., 2017; Blanton vd., 2018). Öğretim programlarında ilkokul düzeyinden itibaren öğrencilerin farklı temsiller kullanma, değişimi inceleme, varsayımda bulunma, doğrulama, gerekçelendirme ve bir genellemeye ulaşma gibi üst düzey süreçleri deneyimleyebilmelerini sağlayacak içeriklerin olması gerek öğretmenler gerekse eğitim-öğretim materyallerini hazırlayan uzmanlar için yol gösterici olacaktır (Toluk Uçar, 2018). KMÖP gibi her sınıf düzeyinde sayılar öğrenme alanı ardından cebir öğrenme alanının yer alması veya SMÖP'teki gibi aritmetik ve cebirin öğrenme alanı olarak ayrılmadan, birlikte "Sayılar ve Cebir" şeklinde ele alınması, aritmetik ve cebirin birbirinden kopuk olmasının önüne geçebilir. Toluk Uçar (2018) da çalışmasında aritmetik ve cebir müfredatının ayrı ayrı hazırlanmasındansa, birlikte hazırlanması önerisinde bulunmuştur. Stephens vd. (2017) de araştırmalarında "önce aritmetik sonra cebir" yaklaşımının yararsız olduğunu ve aritmetik ile cebirin birbirinden keskin sınırlarla ayrılamayacağını belirtmiş, aritmetik düşünmenin gelişirken cebirsel düşünmenin de ortaya çıkması gerektiğini belirtmiştir.

Öneriler

Bu bölümde araştırma sonuçları doğrultusunda gelecek araştırmacılara ve uzmanlara yönelik öneriler sunulacaktır.

- Uluslararası sınavlarda ortalama ölçek puanın üzerinde değerlendirmelere sahip farklı ülkelerin cebir öğrenme alanları ya da tüm öğrenme alanları, yine cebirsel düşünme bileşenleri kapsamında incelenerek karşılaştırılabilir.
- İlköğretim ikinci kademe yazılı ders materyalleri, cebirsel düşünmeyi desteklemeye yönelik görevler bakımından araştırılabilir.
- İlköğretim ikinci kademe yazılı ders materyalleri cebirsel düşünmenin fonksiyonel düşünme ve modelleme dilleri bileşenleri kapsamında incelenebilir.
- Türkiye ile benzer kültürel yapılara sahip ülkelerin öğretim programları veya yazılı ders materyalleri cebirsel düşünmeye yönelik incelenebilir.
- Cebirsel düşünmeye yönelik farklı bir analiz çerçevesi kapsamında incelemeler yapılabilir.

Kaynaklar

Akkan, Y., Baki, A., Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online, 10*(3), 812-823.

Akkan, Y., Öztürk, M., Akkan, P., Küçük Demir, B. (2019). Ortaokul matematik öğretmenlerinin aritmetik ve cebir problemleri hakkındaki görüşleri ve inançları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21*(1), 156-176.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221–247.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Ay, Z. S. (2023). Comparison of 3rd grade mathematics classes in terms of mathematics curriculum and their implementation in the classroom environment: the case of Turkey and Canada (the provınce of Ontarıo). *Pedagogy, 95*(4), 500-519.

Bacakoğlu, T. Y. (2022). *Türkiye ve singapur ilkokul matematik dersi öğretim programlarının ve ders kitaplarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi*. Gazi Üniversitesi.

Baki, A., Bütüner, S. Ö. (2011). Cebirin tarihsel gelişimi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2*(3), 198–231.

Barbosa, A., Vale, I., Jablonski, S., Ludwig, M. (2022). Walking through Algebraic Thinking with Theme-Based (Mobile) Math Trails. *Education Science, 12,* 346. https://doi.org/10.3390/educsci12050346

Baş, M. (2019). Matematiğin tarihsel gelişimi ve matematik tarihinin matematik eğitiminde kullanılması. *Türk Akademik Yayınlar Dergisi, 3*(1), 1-22.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde Matematik Öğretimi 6-8. Sınıflar*. Pegem Akademi, Ankara

Bazzini, L., Tsamir, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education [PME28], 1, 137-166.

Bereday, G. Z. F. (1965). Comparative Method in Education. *British Journal of Educational Studies, 13* (2), 220-221.

Bingölbali, E. ve Özmantar, F. (2015). *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (5. Baskı). Pegem Akademi

Blanton, M., Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. Jinfa Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5–23). Springer.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children’s thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice.* (s. 27-49). Springer International Publishing.

Bråting, K., Madej, L., Hemmi, K. (2019). Development of algebraic thinking: opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24*(1), 27–49.

Boero, P., Bazzini, L. (2004). Inequalıtıes ın mathematıcs educatıon: the need for complementary perspectıves. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education [PME28], 1, 1-139.

Bütüner, S. Ö. (2008). Cebri yazma metotlarımız nasıl değişim gösterdi:Tarihe yolculuk. *İlköğretim Online, 7*(1), 218-222.

Bütüner, S. Ö., & Güler, M. (2017). Gerçeklerle Yüzleşme : Türkiye ' nin TIMSS Matematik Başarısı Üzerine Bir Çalışma. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(23), 161–184.

Boz, N. (2015). Matematiğintemel yapı taşı "değişken". Zembat, İ. Ö., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Şandır, H., Delice, A. (Ed.). *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (2. baskı) içinde (s:329-338). Pegem Akademi.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 5–15. https://doi.org/10.1007/BF02655892

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies of Mathematics, 98*, 57-76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. (2019). Investigating early algebraic thinking abilities: a path model. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. ⟨hal-02415996⟩

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed*.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461–555). Information Age.

Dede, Y., Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24,* 180-185.

Dede, Y., Peker, M. (2007). Öğrencilerin Cebire Yönelik Hata ve Yanlış Anlamaları:

Matematik Öğretmen Adayları'nın Bunları Tahmin Becerileri ve Çözüm Önerileri. *İlköğretim Online, 6*(1).

Department for Education (2013). *National curriculum in England: Mathematics programmesof study - key stages 1, 2 and 3. England.* Erişim Adresi: https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study Erişim Tarihi: 27.08.2023.

Dikkartın Övez, F. T. (2012). Matematik öğretim programlarının değerlendirilmesi (cebir öğrenme alanı. Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10,* 1243-1267. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0

Er, E. (2021). Karşılaştırmalı eğitimde yöntem ve araştırma. (eds. Gülcan, M. G. Ve Şahin, F.) *Karşılaştırmalı eğitim tematik bir yaklaşım* (1. Baskı). Pegem Akademi.

Ergün, M. (1985). *Karşılaştırmalı Eğitim*. Erişim adresi: https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/ismailgelen/134646/Tarihsel%20Surec%20Asamalari%20Kurulusu%20ve%20MA%20Jullien.pdf Erişim Tarihi: 27.08.2023.

Gülcan, M. G., Şahin, F. (2021). *Karşılaştırmalı eğitim tematik bir yaklaşım* (1. Baskı). Pegem Akademi.

Gürefe, N. (2022). Cebirsel ifade ve değişken kavramının öğretimi

Gürses, H. (2022). Matematik dersi öğretim programlarında 21. yüzyıl becerileri: Türkiye, Singapur, Finlandiya ve İngiltere karşılaştırması. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi.

Hemmi, K., Bråting, K., Lepik, M. (2020). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. Mathematical Thinking and Learning. DOI: 10.1080/10986065.2020.1740857. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Herbert, K., Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*, 340-344.

Hewitt, D. (2014). A symbolic dance: The interplay between movement, notation, and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 1–31. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857803

Howson, G., Rogers, L. (2014). Mathematics Education in the United Kingdom. In: Karp, A., Schubring, G. (eds) *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_13

Ismail Amet, E., Kaleli-Yılmaz, G. (2022). Comparison of 5th to 8th grade mathematics curricula in Turkey and Greece. International e-Journal of Educational Studies, 6 (12), 70-83. https://doi.org/10.31458/iejes.1080789

Işıkoğlu, Y. (2023). Ortaokul matematik dersi öğretim programlarının matematik okuryazarlığı açısından karşılaştırılması: Singapur, İngiltere, Kanada, Türkiye Örneği [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

Kablan, Z., Baran, T., Hazer, Ö. (2013). İlköğretim matematik 6-8 öğretim programında hedeflenen davranışların bilişsel süreçler açısından incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD), 14*(1), 347-366.

Kaf, Y. (2007). Matematikte model kullanımının 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişilerine etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Kaput, J. J. Ve Blanton, M. L. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of 3rd graders' performance on a state 4th grade assessment. In Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 99–107.

Kaur, B., Leong, Y.H. (2021). Overview of the School System and School Mathematics Curriculum in Singapore. In: Kaur, B., Leong, Y.H. (eds) *Mathematics Instructional Practices in Singapore Secondary Schools. Mathematics Education - An Asian*

Perspective. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8956-0_1

Kaytan, E. (2007). *Türkiye, Singapur ve İngiltere İlköğretim Matematik Öğretim Programlarının Karşılaştırılması*. Hacettepe Üniversitesi.

Kıral, B. (2020). Nitel bir veri analizi yöntemi olarak doküman analizi. *Siirt Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 15,* 170-189.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades. What is it?. *The Mathematics Educator (Singapore),* *8*(1), 139–151. https://gpc-maths.org/data/documents/kieran2004.pdf

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.

Kriegler, S. (2008.). Just What is Algebraic Thinking? https://www.shastacoe.org/uploaded/SCMP2/Fall_Content_Day_2013/Fall_Content_Day_2013_69/SCMP2_Winter_Content_Day_2014/SCMP2_Summer_Institute_2014/M-Algebraic_Thinking_Article_by_Kreigler.pdf

Kuzu, O., Çiçek, Y., İğdeli, Z. (2023). A Comparison of the Mathematics Curriculums in Turkey and Germany in the Context of Algebra Learning Domain. *Journal of Teacher Education and Lifelong Learning, 5*(1), 51-69. https://doi.org/10.51535/tell.1222957

Lee, K. Y. A. (2017). *Improving Ontario Mathematics Performance: A Comparative Study of Underlying Factors for Mathematics Achievements in Ontario-Canada, Singapore and Shanghai-China* [Master Theses, Harvard University]. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:37736809

Lentz, U. (2018). Algebraic thinking of sixth graders through the lens of multimodality [Doktora tezi]. The University of North Carolina, Charlotte.

Li, Y. (2007). Curriculum and culture: An exploratory examination of mathematics curriculum materials in their system and cultural contexts. *The Mathematics Educator, 10*(1), 21-38.

Ling, G. W. ve Ghazali, M. (2014). A study of Malaysian year 5 pupils' pre-algebraic thinking. *Asia Pacific Journal of Educators and Education, 29*, 105–124.

Martins, R., Viseu, F., Rocha, H. (2023). Functional Thinking: A Study with 10th-Grade Students. *Educational Science, 13*, 335. https:// doi.org/10.3390/educsci13040335

Mattheou, D. (2009). *The changing educational context and the quest for a new paradigm in comparative education*. Internatıonal Handbook Of Comparatıve Educatıon

MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2009). İlköğretim Matematik 6–8. Sınıflar Öğretim Programı Kitabı, Ankara.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). Matematik dersi öğretim Programı: İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar. Ankara.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.

Ontario Association of School Dictricts International [OASDI]. (2024). K-12 Education in Ontario Infographic. https://www.oasdi.ca/k-12-education-in-ontario/infographic/ (Erişim tarihi: 30 Nisan 2024)

Olkun, S., & Toluk Uçar, Z. (2018). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ayrıntı.

Ontario Ministry of Education [OMOE] (2020). *Math curriculum for grades 1-8*. Canada. Erişim Adresi: https://www.ontario.ca/page/new-math-curriculum-grades-1-8

Özkan, U. B. (2023). Doküman İnceleme Yönteminde Geçerlik ve Güvenirlik: Eğitim Bilimleri Araştırmaları Bağlamında Kuramsal Bir İnceleme. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 56, 823-848. DOI: 10.53444/deubefd.1258867

Öztürk, E. ve Diker Coşkun, Y. (2022). Türkiye ve Ontario Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programlarının Karşılaştırılması. *Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*

(AUJEF), 6(2), 188-202.

Palabıyık, U. ve Akkuş İspir, O. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30* (2), ss. 111-123.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674. DOI: 10.5951/jresematheduc-2020-0164

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes*. Educational Studies in Mathematics, 55*, 22–47.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Reserch Journal, 26,* 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Ruddock, G., Sainsbury, M., Clausen-May, T., Vappula, H., Patterson, E. W., Kispal, A., Pyle, K. (2008). *Comparison of the Core Primary Curriculum in England to those of Other High Performing Countries*. National Foundation for Educational Research.

Russell, S. J., Bastable, V., & Schifter, D. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 43–69). Springer.

Sağlam, A., Dağlı, H., Dağlı, B.Ç., Seziş, A., Güngör, Y. & Danışman, F. (2022). Kanada (Ontario) eğitim sistemine genel bir bakış. *Journal of Social and Humanities Sciences Research, 9*(89), 2285-2300. http://dx.doi.org/10.26450/jshsr.3352

Saylık, A. ve Saylık, G. (2015). İngiltere Eğitim Sistemi Üzerine Bir İnceleme: Amaç, Yapı ve Süreç Bakımından Türkiye Eğitim Sistemiyle Karşılaştırılması. *Route Educational and Social Science Journal, 2*(2), 652-671.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). Macmillan Publishing.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., İşler-Baykal, I., Gardiner, A. (2015). Just Say Yes to Early Algebra!. Teaching Children Mathematics, 22, 92-101. DOI:10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Singapore Ministry of Education (2020a). Mathematics syllabus: Primary one to six. Singapore. Erişim Adresi: https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

Singapore Ministry of Education (2020b). Mathematics syllabus: Secondary one to four. Singapore. Erişim Adresi:

https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.pdf

Steinweg, A., Twohill, A., Mc Auliffe, S. (2023). *ZADIE Functional Thinking through Patterning: Teacher Manual.* Dublin: CASTeL

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., Brizuela, B, M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. Cai, F. (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (ss. 386-420). National Council of Teachers of Mathematics.

Tirosh, D., Even, R. ve Robinson, N. (1998). Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 51–64. https://doi.org/10.1023/A:1003011913153

Toluk Uçar, Z. (2018). Öğretim programları açısından cebirsel düşünmeye yaklaşımlar. Özmantar, M. F., Akkoç, H., Kuşdemir Kayıran, B. ve Özyurt, M. (Ed.), Ortaokul matematik öğretim programları tarihsel bir inceleme (ss. 209-242). Pegem Akademi.

Torres, M.D., Moreno, A., Vergel, R., Cañadas, M. C. (2023). The evolution from “I think it plus three” towards “I think it is always plus three.” transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

Türkmen, H. ve Tanışlı, D. (2019). Cebir öncesi: 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 7*(1), 344-372. doi:10.14689/issn.2148-2624.1.7c1s.16m

Türkoğlu, D., Cihangir, A. (2017). Cebirsel düşünme becerisi üzerine bir meta-sentez çalışması. *Eğitim, Bilim ve Teknoloji Araştırmaları Dergisi, 2*(2), 25-39.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2010). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim*, (Çev. S. Durmuş). Nobel Yayıncılık. (2010, 7. baskı)

Yaldız, T., Yıldırım, E. & Arslan, S. (2020). İngiltere eğitim sistemi: Türkiye için bazı örnek uygulamalar*. The Journal of International Education Science, 22* (7), 22-40.

Yenilmez, K., Ev Çimen, E. (2016). Cebirsel ifadeler, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma. Elçi, A. N., Bukova Güzel, E., Cantürk Günhan, B. ve Ev Çimen, E. (eds.), *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları- öğrenenler ve öğretenler için* (ss. 309-333). Pegem Akademi.

Yenilmez, K., Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(15), 229–246.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). Nitel araştırma yöntemleri. (8. Baskı) Seçkin Yayıncılık

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık.

EK A: Sınıflara Göre Cebir ve Ön Cebirle İlgili Kazanımlar

	Türkiye	Singapur	İngiltere	Kanada (Ontario Eyaleti)
	Sayılar ve İşlemler Ö.A.	*Sayılar ve Cebir Ö.A.*	*Sayılar Ö.A.*	*Cebir Ö.A.*
5. SINIF	*Doğal Sayılar A.Ö.A.* 1) Kuralı verilen sayı örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur. a. Sadece adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalır. b. Şekil örüntülerine tarihi ve kültürel eserlerimizden örnekler (mimari yapılar, halı süslemeleri, kilim vb.) verilir. 2) Çarpma ve bölme işlemleri arasındaki ilişkiyi anlayarak işlemlerde verilmeyen ögeleri (çarpan, bölüm veya bölünen) bulur.	*Tam Sayılar A.Ö.A.* 1) Sayı dizilerindeki örüntüler	*Çarpma ve Bölme A.Ö.A.* 1) Eşittir sembolünün anlamını anlamak da dahil olmak üzere toplama, çıkarma, çarpma ve bölme ile bunların birleşimini içeren problemler çözer.	*Örüntüler ve İlişkiler A.Ö.A.* 1) Gerçek hayat bağlamlarında bulunan örüntüler de dahil olmak üzere, tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntüleri tanımlamak ve açıklamak. 2) Değer tabloları ve grafikler de dahil olmak üzere çeşitli gösterimleri kullanarak büyüyen ve küçülen örüntüler oluşturabilir ve birbirine dönüştürebilir. (Doğrusal örüntülerle sınırlı kalınır.) 3) Örüntü kurallarını belirler ve bunları örüntüleri genişletmek, tahminler yapmak ve bunları gerekçelendirmek ve tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntülerdeki eksik unsurları belirlemek için kullanır. (Adım sırası (x) veya adım değeri (y) belirlenir.) 4) Tam sayılar ile ondalık ve yüzdelik sayılar arasındaki ilişkileri göstermek için örüntüler oluşturabilir ve tanımlayabilir. *Denklemler ve Eşitsizlikler A.Ö.A.* 5) Kelimelerle anlatılanları, eş değer ilişkileri tanımlayan cebirsel ifadelere ve görsel temsillere dönüştürebilir. 6) Tam sayılar içeren cebirsel ifadeleri değerlendirebilir. 7) Çeşitli bağlamlarda 100'e kadar tam sayıları içeren denklemleri çözebilir ve çözümlerini doğrulayabilir. (Akış kartları bir strateji olarak örnek verilmiştir.) 8) Tek işlem ve 50'ye kadar tam sayı içeren

				eşitsizlikleri çözebilir ve çözümleri doğrulayıp grafiklerini çizebilir. (Sayı doğrusunda ve kartezyen sistemde) *Kodlama A.Ö.A.* 9) Kodlama kavram ve becerilerini kullanarak problemleri çözebilir ve matematiksel durumların hesaplamalı gösterimlerini oluşturabilir. 10) Koşullu ifadeler ve diğer kontrol yapılarını içeren kodlar da dahil olmak üzere kod yazarak ve çalıştırarak problemleri çözmek ve matematiksel durumların hesaplamalı temsillerini oluşturmak. 11) Mevcut kodu okuyup değiştirebilir ve kodda yapılan değişikliklerin sonuçları nasıl etkilediğini açıklayabilir. *Matematiksel Modelleme A.Ö.A.* 12) Gerçek yaşam durumlarını temsil etmek, analiz etmek, tahminlerde bulunmak ve bunlarla ilgili içgörü sağlamak için matematiksel modelleme sürecini uygulamak.
6. SINIF	Cebirsel İfadeler A.Ö.A. 1) Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. a. Cebirsel ifadelerde kullanılan harflerin sayıları temsil ettiği ve "değişken" olarak adlandırıldığı belirtilir. b. En az bir değişken ve işlem içeren ifadelerin "cebirsel ifadeler" olduğu vurgulanır. c. Terim, sabit terim, benzer terim ve katsayı kavramları ele alınır. 2) Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.	Sayılar ve Cebir Ö.A. Cebir A.Ö.A. 1) Bilinmeyen bir sayıyı temsil etmek için bir harf kullanma. 2) "a±3", "a×3 veya 3a", "a÷3 veya $\frac{a}{3}$" gibi basit cebirsel ifadelerin gösterimi, temsilleri ve yorumlanması. 3) Parantezler hariç basit doğrusal ifadelerin sadeleştirilmesi. 4) Basit doğrusal ifadelerin yerine koyma yoluyla değerlendirilmesi. 5) Katsayısı tam sayı olan basit doğrusal denklemleri sadece basit bağlamda çözme.	*Cebir Ö.A.* 1) Basit formüller kullanır. 2) Doğrusal sayı dizileri oluşturur. 3) Eksik sayı problemlerini cebirsel olarak ifade eder. 4) İki bilinmeyenli bir denklemi sağlayan sayı çiftlerini bulur. 5) İki değişkenin farklı kombinasyonlarını sıralar. Rehberlik notları: a. Öğrencilere halihazırda anladıkları matematiksel	*Örüntüler ve İlişkiler A.Ö.A.* 1) Gerçek yaşam bağlamlarında bulunan örüntüler de dahil olmak üzere tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntüleri tanımlayabilecek ve hangi büyüyen örüntülerin doğrusal olduğunu belirleyebilecek. (örüntü kuralı) 2) Değer tabloları, grafikler ve doğrusal büyüyen örüntüler için cebirsel ifadeler ve denklemler dahil olmak üzere çeşitli gösterimleri kullanarak tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntüler oluşturabilir ve bunları dönüştürebilir.

3) Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar.

a. Bu düzeyde 4a, $\frac{a}{5}$, $\frac{2\pm a}{5}$ biçimindeki cebirsel ifadelerin anlaşılmasına yönelik çalışmalara yer verilir. İşlemlere dayalı uygulamaların yanı sıra aşağıda örneklendiği gibi uygun modellerle çalışmalar yapılır.

durumlarda değişkenleri temsil etmek için sembol ve harflerin kullanımı tanıtılmalıdır. Örneğin; eksik sayılar, uzunluklar, koordinatlar ve açılar, matematik ve fen bilimlerinde formüller, eşdeğer ifadeler (a+b=b+a gibi), sayı örüntülerinin genellemeleri, sayı bulmacaları.

-

3) Örüntü kurallarını belirlemek ve bunları örüntüleri genişletmek, tahminde bulunmak ve gerekçelendirmek ve tekrar eden, büyüyen, küçülen örüntülerdeki eksik adımları belirlemek için kullanmak ve doğrusal büyüyen örüntülerdeki eksik adımları belirlemek için kullanmak ve bilinmeyen değerleri çözmek için örüntü kurallarının cebirsel gösterimlerini kullanmak.

4) Tam sayılar ve ondalık sayılar arasındaki ilişkileri göstermek için örüntüler oluşturmak ve tanımlamak.

Denklemler ve Eşitsizlikler A.Ö.A.

5) Araçları kullanarak tam sayıları içeren birinci dereceden tek terimleri toplar. Örneğin; 2m+3m=5m gibi. $x^2 ve\ xy$ ifadeleri ikinci derece kabul edilir.

6) Tam sayıları ve ondalık sayıları içeren cebirsel ifadeleri değerlendirir. Örneğin; 4,5m gibi.

7) Çeşitli bağlamlarda birden fazla terim ve tam sayı içeren denklemleri çözebilir ve çözümleri doğrulayabilir. (Akış kartlarının kullanımı örnek olarak verilmiştir.)

8) 100'e kadar olan tam sayıları ve iki işlem içeren eşitsizlikleri çözebilir, çözümleri doğrulayabilir ve grafiklerini çizebilir. (Sayı doğrusu ve kartezyen sistem)

Kodlama A.Ö.A.

9) Koşullu ifadeler ve diğer kontrol yapılarını içeren kodlar da dahil olmak üzere, etkili kod yazıp yürüterek sorunları çözebilir ve matematiksel durumların hesaplamalı temsillerini oluşturabilir.

10) Koşullu ifadeler ve diğer kontrol yapılarını

				içeren kod da dahil olmak üzere mevcut kodu okuyup değiştirebilir ve kodda yapılan değişikliklerin kodun sonuçlarını ve verimliliğini nasıl etkilediğini açıklayabilir. *Matematiksel Modelleme A.Ö.A.* 11) Gerçek hayattaki durumları temsil etmek, analiz etmek, tahminlerde bulunmak ve içgörü sağlamak için matematiksel modelleme sürecini uygulayabilir.
7. *SINIF*	*Cebirsel İfadeler A.Ö.A.* 1) Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. a. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işleminde uygun modeller kullanılır. 2) Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar. a. Örneğin 5 (x + 3) = 5x + 15 3) Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur. a. Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b. Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c. Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı 6n–3 olarak ifade edilir. ç. Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir. Eşitlik ve Denklem	*Sayılar ve Cebir Ö.A.* *Cebirsel İfadeler ve Formüller A.Ö.A.* 1) Sayıları harfler kullanarak temsil eder. 2) Gösterimleri sözlü ifade eder, yorumlar, tercüme eder. • ab as $a \times b$ • $\frac{a}{b}$ as $a \div b$ or $a \times \frac{1}{b}$ • a^2 as $a \times a$, a^3 as $a \times a \times a$, a^2b as $a \times a \times b$, ... • $3y$ as $y + y + y$ or $3 \times y$ • $3(x + y)$ as $3 \times (x + y)$ • $\frac{3+y}{5}$ as $(3 + y) \div 5$ or $\frac{1}{5} \times (3 + y)$ 3) Cebirsel ifadelerin ve formüllerin değerlendirilmesi. 4) Basit gerçek dünya durumlarını cebirsel ifadelere dönüştürme. 5) n. terim için cebirsel bir ifade bularak örüntü ve ilişkileri tanıma ve temsil etme. 6) Doğrusal ifadelerin toplanması ve çıkarılması. 7) Doğrusal ifadelerin sadeleştirilmesi. $-2(3x - 5) + 4x;$ $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ 8) Ortak çarpan parantezi kullanmak. *Fonksiyonlar ve Grafikler A.Ö.A.* 9) İki boyutlu kartezyen koordinatlar. 10) İki değişken arasındaki ilişkinin gösterimi olarak sıralı ikililerden oluşan bir kümenin grafiği 11) Doğrusal fonksiyonlar	*Cebir Ö.A.* 1) Aşağıdakiler dahil olmak üzere cebirsel gösterimi kullanın ve yorumlayın: . $a \times b$ yerine ab . $y + y + y$ ve $3 \times y$ yerine 3y . $a \times a$ yerine a^2, $a \times a \times a$ yerine a^3, $a \times a \times b$ yerine a^2b . $a \div b$ yerine $\frac{a}{b}$. katsayıların ondalık sayı yerine kesir olarak yazılması . parantezler 2) Bilimsel formüller dahil olmak üzere sayısal değerleri formüllere ve ifadelere yerleştirme. 3) Kavramların ve kelimelerin ifadelerini, denklemleri, eşitsizlikleri, terimleri ve çarpanları anlar ve kullanır. 4) Denkliği korumak için cebirsel ifadeleri basitleştirir ve değiştirir: . benzer terimlerin toplanması . bir terimin parantez üzerine dağıtılarak çarpılması . ortak çarpanların çıkarılması	*Örüntüler ve İlişkiler A.Ö.A.* 1) Gerçek hayattaki bağlamlarda bulunan örüntüler de dahil olmak üzere çeşitli yinelenen, büyüyen ve küçülen örüntüleri tanımlayıp karşılaştırabilir ve doğrusal büyüme modellerini sabit hızlara ve başlangıç değerlerine göre karşılaştırır. 2) Doğrusal büyüme modelleri için cebirsel ifadeler ve denklemler de dahil olmak üzere çeşitli gösterimleri kullanarak tam sayılar ve ondalık sayılar içeren yinelenen, büyüyen ve küçülen modeller oluşturur ve dönüştürür. 3) Örüntü kurallarını belirler ve bunları örüntüleri genişletmek, tahminlerde bulunmak ve bunları gerekçelendirmek ve tam sayılar ve ondalık sayılar içeren tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntülerdeki eksik öğeleri belirlemek için kullanır ve doğrusal büyüyen örüntülerdeki bilinmeyen değerleri çözmek için örüntü kurallarının cebirsel gösterimlerini kullanır. 4) Tam sayılar arasındaki ilişkileri göstermek için örüntüler oluşturur ve tanımlar. *Denklemler ve*

A.Ö.A.

4) Eşitliğin korunumu ilkesini anlar.

a. 7 + 2 = ▲+3 gibi eşitliklerin bozulmaması için ▲yerine gelecek sayıyı bulmaya yönelik çalışmalar yapılır.

b. Ekleme ve çıkarma durumlarında eşitliğin korunduğunu göstermek için terazi veya benzeri denge modellerine yer verilir.

c. Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya çıkarılması ve iki tarafın aynı sayıyla çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitliğin korunması ele alınır.

5) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.

6) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.

a. Denklemlerdeki katsayılar tam sayılardan seçilir.

7) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.

y=ax+b

12) Doğrusal fonksiyonların grafiği

13) Dikey değişimin yatay değişime oranı olarak doğrusal bir grafiğin eğimi (pozitif ve negatif eğim)

Denklemler ve Eşitsizlikler A.Ö.A.

14) Denklem kavramı

15) Bir bilinmeyenli doğrusal denklemlerin çözümü.

16) Doğrusal denklemlere indirgenebilen basit kesirli denklemlerin çözümü.

$\frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}=3;$

$\frac{3}{x-2}=6$

17) Problemleri çözmek için bir değişkenli doğrusal bir denklem formüle etme (model oluşturma).

. iki veya daha fazla terimli çarpanların genişletilmesi

5) Standart matematiksel formülleri anlama ve kullanma, özneyi değiştirmek için formülü yeniden düzenleme.

6) Görevleri ve işlemleri cebirsel ifadelere veya formüllere dönüştürerek ve grafikleri kullanarak modellemek.

7) Bir değişkenli doğrusal denklemleri çözmek için cebirsel yöntemleri kullanmak. (yeniden düzenleme gerektiren tüm formlar dahil)

8) Dört bölgenin tamamındaki koordinatlarla çalışma

9) Kartezyen düzlemdeki x ve y eşitliklerini kullanarak bir değişkenli doğrusal ve ikinci derece denklemlerin grafiklerini tanır, çizer ve üretir.

10) Matematiksel ilişkileri hem cebirsel hem de grafiksel olarak yorumlar.

11) İki değişkenli verilmiş bir doğrusal denklemi y=mx+c standart formuna indirger; bu tür doğrusal denklemlerin eğimini, kesişme noktalarını sayısal, grafiksel ve cebirsel olarak hesaplar ve yorumlar.

12) Eş zamanlı doğrusal denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için, verilen x değeri için y değerini tahmin etmek ve bunun tam tersini yaparak doğrusal ve

Eşitsizlikler A.Ö.A.

5) Araçları kullanarak tam sayıları içeren birinci derece olan tek terimlileri toplayabilir ve çıkarabilir.

6) Tam sayılar ve ondalık sayılar içeren cebirsel ifadeleri değerlendirir.

7) Çeşitli bağlamlarda birden fazla terim, tam sayı ve ondalık sayı içeren denklemleri çözer ve çözümleri doğrular.

8) Birden fazla terim ve tam sayı içeren eşitsizlikleri çözer ve çözümleri doğrulayıp grafiklerini çizer.

Kodlama A.Ö.A.

9) Tanımlanmış bir sayı ve/veya alt program ve diğer kontrol yapıları tarafından etkilenen olayları içeren kod da dahil olmak üzere verimli kod yazarak ve çalıştırarak problemleri çözer ve matematiksel durumların hesaplamalı temsillerini oluşturur.

10) Tanımlanmış bir sayı ve/veya alt program ve diğer kontrol yapıları tarafından etkilenen olayları içeren kod da dahil olmak üzere mevcut kodu okuma ve değiştirme ve kodda yapılan değişikliklerin sonuçları ve kodun verimliliğini nasıl etkilediğini açıklama.

Matematiksel Modelleme A.Ö.A.

11) Gerçek yaşam durumlarını temsil etmek, analiz etmek, tahminlerde bulunmak ve içgörü sağlamak için matematiksel modelleme sürecini uygulamak.

			ikinci dereceden grafikleri kullanır. 13) Parçalı doğrusal, üstel ve karşılıklı grafikler de dahil olmak üzere çeşitli fonksiyonların verilen grafiklerinden bağlamsal problemlere yaklaşık çözümler bulmak. 14) Terimden terime ya da konumdan (adımdan) terime kuralından bir dizinin terimlerini üretme. 15) Aritmetik dizileri tanır ve n. terimi bulur. 16) Geometrik dizileri tanır ve ortaya çıkan diğer dizileri değerlendirir.	
8. *S* *I* *N* *I* *F*	Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler A.Ö.A. 1) Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar. a. Terim, katsayı ve değişkenin anlamları üzerinde durulur. Sabit terimin de bir katsayı olduğu vurgulanır. b. x+5, 3x, x^2, $-6y^2$, a^2.b, 2a+2b gibi temel cebirsel ifadeler üzerinde durulur. 2) Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar. a. y(3y-2), (2x+3)(5x-1) gibi işlemler üzerinde durulur. b. Cebirsel ifadelerdeki katsayılar tam sayılardan seçilir. c. Cebirsel ifadelerle çarpma işlemini modellerle yapmaya yönelik çalışmalara yer verilir. 3) Özdeşlikleri modellerle açıklar. a. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ve $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ özdeşlikleriyle sınırlı kalınır. b. Özdeşliklerdeki katsayılar tam	*Sayılar ve Cebir Ö.A.* *Cebirsel İfadeler ve Formüller A.Ö.A.* 1) Cebirsel ifadelerin çarpımının açılımı-genişletilmesi. 2) Bir formülün öznesini değiştirme. 3) Verilen bir formülde bilinmeyen bir miktarın değerini bulma. 4) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ özdeşliklerinin kullanımı. 5) ax+by+kay+kby formundaki doğrusal ifadelerin çarpanlara ayrılması. 6) $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden ifadelerin çarpanlara ayrılması. 7) $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$ gibi basit cebirsel kesirlerin çarpımı ve bölümü. $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$ $\frac{3a}{4} \div \frac{9a^2}{10}$ gibi. 8) Doğrusal veya ikinci derece paydası olan cebirsel kesirlerin toplanması ve çıkarılması.	*Cebir Ö.A.* 1) Aşağıdakiler dahil olmak üzere cebirsel gösterimi kullanın ve yorumlayın: . $a \times b$ yerine ab . $y + y + y$ ve $3 \times y$ yerine 3y . $a \times a$ yerine a^2, $a \times a \times a$ yerine a^3, $a \times a \times b$ yerine a^2b . $a \div b$ yerine $\frac{a}{b}$. katsayıların ondalık sayı yerine kesir olarak yazılması . parantezler 2) Bilimsel formüller dahil olmak üzere sayısal değerleri formüllere ve ifadelere yerleştirme. 3) Kavramların ve kelimelerin ifadelerini, denklemleri, eşitsizlikleri, terimleri ve çarpanları anlar ve kullanır. 4) Denkliği korumak için cebirsel ifadeleri basitleştirir ve değiştirir: . benzer terimlerin	*Örüntüler ve İlişkiler A.Ö.A.* 1) Gerçek yaşam bağlamlarında bulunan örüntüler de dahil olmak üzere çeşitli tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntüleri tanımlama ve karşılaştırma ve doğrusal büyüyen ve küçülen örüntüleri sabit oranları ve başlangıç değerleri temelinde karşılaştırma. 2) Doğrusal büyüyen ve küçülen örüntüler için cebirsel ifadeler ve denklemler de dahil olmak üzere çeşitli gösterimleri kullanarak rasyonel sayıları içeren tekrar eden, büyüyen ve küçülen örüntüler oluşturma ve bunları ifade etme. 3) Örüntü kurallarını belirlemek ve bunları örüntüleri genişletmek, tahminlerde bulunmak ve bunları gerekçelendirmek ve rasyonel sayıları içeren büyüyen ve küçülen örüntülerdeki eksik unsurları belirlemek için kullanmak ve doğrusal büyüyen ve küçülen örüntülerdeki bilinmeyen değerleri çözmek için örüntü kurallarının cebirsel

sayılardan seçilir.

4) Cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırır.

a. Ortak çarpan parantezine alma ile iki kare farkı ve $a^2 \pm 2ab + b^2$ biçimindeki tam kare ifadelerin çarpanlara ayırma işlemleri ele alınır.

b. Cebirsel ifadelerdeki katsayılar ve kökleri tam sayılar içinde kalacak biçimde seçilir.

c. Gruplandırarak çarpanlarına ayırma yöntemine girilmez.

ç. Tam kare olmayan ikinci dereceden ifadelerin çarpanlara ayrılma işlemlerine girilmez.

Doğrusal Denklemler A.Ö.A.

5) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.

a. Katsayıları rasyonel sayı olan denklemlere yer verilir.

6) Koordinat sistemini özellikleriyle tanır ve sıralı ikilileri gösterir.

a. Gerçek hayat durumlarıyla ilişkili örneklere yer verilir.

7) Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade eder.

a. Tablo ile yapılan gösterimlerde sıralı ikililer biçiminde ifadelere de yer verilir.

b. İki değişkenden birinin değerinin, diğer değişkenin aldığı değere göre nasıl değiştiği ve bu durumda hangisinin bağımlı hangisinin bağımsız değişken olduğu incelenir.

8) Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.

$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}$

$\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}$

Fonksiyonlar ve Grafikler A.Ö.A.

9) İkinci dereceden fonksiyonlar

10) İkinci derece fonksiyonların grafikleri ve özellikleri; x^2'nin katsayısının pozitif veya negatif olması, maksimum ve minimum noktaları, simetri.

Denklemler ve Eşitsizlikler A.Ö.A.

11) Eşitlik ve eşitsizlik kavramı.

12) $ax + b \leq c$ ve $ax + b < c$ formundaki basit eşitsizlikleri çözme ve çözümleri sayı doğrusu üzerinde gösterme.

13) İki değişkenli (ax+by=c) doğrusal denklemlerin grafiği.

14) İki değişkenli doğrusal denklemlerin eş zamanlı çözümü: toplama çıkarma yöntemi, grafiksel yöntem.

15) Bir değişkenli ikinci derece denklemleri çarpanlara ayırmayla çözme.

16) Problemleri çözmek için iki bilinmeyenli bir çift doğrusal denklem formüle etme (model oluşturma).

toplanması

. bir terimin parantez üzerine dağıtılarak çarpılması

. ortak çarpanların çıkarılması

. iki veya daha fazla terimli çarpanların genişletilmesi

5) Standart matematiksel formülleri anlama ve kullanma, özneyi değiştirmek için formülü yeniden düzenleme.

6) Görevleri ve işlemleri cebirsel ifadelere veya formüllere dönüştürerek ve grafikleri kullanarak modellemek.

7) Bir değişkenli doğrusal denklemleri çözmek için cebirsel yöntemleri kullanmak. (yeniden düzenleme gerektiren tüm formlar dahil)

8) Dört bölgenin tamamındaki koordinatlarla çalışma

9) Kartezyen düzlemdeki x ve y eşitliklerini kullanarak bir değişkenli doğrusal ve ikinci derece denklemlerin grafiklerini tanır, çizer ve üretir.

10) Matematiksel ilişkileri hem cebirsel hem de grafiksel olarak yorumlar.

11) İki değişkenli verilmiş bir doğrusal denklemi y=mx+c standart formuna indirger; bu tür doğrusal denklemlerin eğimini, kesişme noktalarını sayısal, grafiksel ve cebirsel olarak hesaplar ve yorumlar.

12) Eş zamanlı

gösterimlerini kullanmak.

4) Rasyonel sayılar arasındaki ilişkileri göstermek için örüntüler oluşturmak ve tanımlamak.

Denklemler ve Eşitsizlikler A.Ö.A.

5) Araçları kullanarak birinci derece olan tek terimli sayıları toplayabilir ve çıkarabilir ve birinci derece olan ve tam sayıları içeren farklı iki terimi toplayabilir.

6) Rasyonel sayılar içeren cebirsel ifadeleri değerlendirir.

7) Çeşitli bağlamlarda birden fazla terim, tamsayı ve ondalık sayı içeren denklemleri çözebilir ve çözümleri doğrulayabilir.

8) Tam sayıları içeren eşitsizlikleri çözer ve çözümleri doğrulayıp grafiklerini çizer.

Kodlama A.Ö.A.

9) Kararları bildirmek ve iletmek için verilerin analizini içeren kod da dahil olmak üzere kod yazarak ve çalıştırarak problemleri çözer ve matematiksel durumların hesaplamalı temsillerini oluşturur.

10) Kararları bildirmek ve iletmek için veri analizini içeren mevcut kodu okur ve değiştirir ve koddaki değişikliklerin sonuçları ve kodun verimliliğini nasıl etkilediğini açıklar.

Matematiksel Modelleme A.Ö.A.

11) Matematiksel modelleme sürecini temsil etmek, analiz etmek, tahminlerde bulunmak ve gerçek yaşam durumlarına ilişkin içgörü sağlamak için uygular.

a. Doğrunun eksenleri hangi noktalarda kestiği, eksenlere paralelliği, orijinden geçip geçmediği durumlar ele alınır.

9) Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturur ve yorumlar.

a. Doğrunun grafiği yorumlanırken doğru üzerindeki noktaların x ve y koordinatları arasındaki ilişki, eksenleri hangi noktalarda kestiği, orijinden geçip geçmediği, eksenlere paralelliği durumları ele alınır.

10) Doğrunun eğimini modellerle açıklar, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirir.

a. Eğimin işaretinin ve büyüklüğünün anlamı üzerinde durulur.

b. Günlük hayatla ilişkili modellemelerde eğimin dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı olduğu dikkate alınarak işareti üzerinde durulmaz.

c. Gerektiğinde uygun bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

Eşitsizlikler A.Ö.A.

11) Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük hayat durumlarına uygun matematik cümleleri yazar.

12) Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterir.

a. $x \geq -1$, $-3 \leq t < 7$, $a < 1$ gibi durumlar inceletilir.

13) Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözer.

a. En çok iki işlem gerektiren eşitsizlikler

doğrusal denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için, verilen x değeri için y değerini tahmin etmek ve bunun tam tersini yaparak doğrusal ve ikinci dereceden grafikleri kullanır.

13) Parçalı doğrusal, üstel ve karşılıklı grafikler de dahil olmak üzere çeşitli fonksiyonların verilen grafiklerinden bağlamsal problemlere yaklaşık çözümler bulmak.

14) Terimden terime ya da konumdan (adımdan) terime kuralından bir dizinin terimlerini üretme.

15) Aritmetik dizileri tanır ve n. terimi bulur.

16) Geometrik dizileri tanır ve ortaya çıkan diğer dizileri değerlendirir.

seçilir.

b. Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yön değiştireceğinin fark edilmesine yönelik çalışmalara yer verilir.

EK-B: Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu

Hacettepe Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Tez Çalışması/Araştırma Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu

F46

24.04.2024

Hacettepe Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına

Tez/Araştırma Başlığı	Cebirsel Düşünme Kapsamında Öğretim Programlarının Karşılaştırılması: Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada Örnekleri

Yukarıda başlığı/konusu verilen tez/araştırma çalışmam,

1. İnsan ve hayvan üzerinde deney niteliği taşımamaktadır.
2. Biyolojik materyal (kan, idrar vb. biyolojik sıvılar ve numuneler) kullanılmasını gerektirmemektedir.
3. Beden bütünlüğüne veya ruh sağlığına müdahale içermemektedir.
4. Anket, ölçek (test), mülakat, odak grup çalışması, gözlem, deney, görüşme gibi teknikler kullanılarak katılımcılardan veri toplanmasını gerektiren nitel ya da nicel yaklaşımlarla yürütülen araştırmalar niteliğinde değildir.
5. Diğer kişi ve kurumlardan temin edilen veri kullanımını (kitap, belge vs.) gerektirmektedir. Ancak bu kullanım, diğer kişi ve kurumların izin verdiği ölçüde Kişisel Bilgilerin Korunması Kanuna riayet edilerek gerçekleştirilecektir.

Çalışmada kullanacağım veriler:
(X) Kamusal erişime açık (buraya yazınız): Ülkelerin eğitimden sorumlu resmi birimlerine ait, herkes tarafından erişime açık internet sitelerinden alınmıştır.
( ) Özel izin ve onaya tabi (buraya yazınız): ....
( ) Üretilmiş veri (buraya yazınız): ....
( ) Diğer (buraya yazınız): ....

Yükseköğretim Kurumları Etik Kurullar ve Komisyonlarının Yönergelerini inceledim ve bunlara göre çalışmamın yürütülebilmesi için herhangi bir Etik Komisyondan/Kuruldan izin alınmasına gerek olmadığını; aksi durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Zeynep Gürsoy

Araştırmacı Bilgileri

Adı Soyadı	**Zeynep Gürsoy**			
Öğrenci ise No	N21237042			
Ana Bilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi			
Programı	Matematik Eğitimi			
Çalışma Türü	☒ Tez	☐ Tezden Üretilen Yayın		☐ Araştırma Makalesi
Statüsü	☒ Yüksek Lisans	☐ Doktora	☐ Bütünleşik Dr.	☐ Diğer

Danışman Görüşü ve Onayı*

Doç. Dr. Zeynep Sonay Ay

*Tez ve tezden üretilen yayın ve araştırma makalelerinde gerekli

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Beytepe Yerleşkesi, 06800, Çankaya / ANKARA
Telefon: 0(312) 297 85 72 Belgegeçer: 0(312) 297 85 66 e-Ağ: http://ebe.hacettepe.edu.tr/ e-Posta: ebe@hacettepe.edu.tr

EK-C: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/07/2024

Zeynep GÜRSOY

EK-Ç: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu

11/07/2024

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı: Cebirsel Düşünme Kapsamında Öğretim Programlarının Karşılaştırılması: Türkiye, Singapur, İngiltere ve Kanada Örnekleri

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
11/07/2024	152	226,398	10/06/2024	%9	2415160745

Uygulanan filtreler:

1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı:	Zeynep GÜRSOY
Öğrenci No.:	N21237042
Ana Bilim Dalı:	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı:	Matematik Eğitimi
Statüsü:	☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Zeynep Sonay AY

EK-D: Thesis/Dissertation Originality Report

11/07/2024

HACETTEPE UNIVERSITY

Graduate School of Educational Sciences

To The Department of Mathematics and Science Education

Thesis Title: Comparisons of Curriculums in Terms of Algebraic Thinking: The Caes of Turkiye, Singapore, England, Canada

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
11/07/2024	152	226,398	10/06/2024	%9	2415160745

Filtering options applied:

1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname: Zeynep GÜRSOY

Student No.: N21237042

Department: Mathematics and Science Education

Program: Mathematics Education

Status: ☒ Masters ☐ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.

ADVISOR APPROVAL

APPROVED

Assoc. Prof. Zeynep Sonay AY

EK-E: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım haklan bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına ilişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü/ Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)
- Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren … ay ertelenmiştir. (2)
- Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

.... /......... /.........

Zeynep GÜRSOY

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) *Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü Üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.*

(2) *Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.*

(3) *Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü Üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir

**Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.*