ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNDE HARTLEY-ROSS TAHMİN EDİCİSİNE DAYALI YENİ TAHMİN EDİCİLER

NEW ESTIMATORS BASED ON THE HARTLEY-ROSS ESTIMATOR IN SAMPLING METHODS

HATİCE ÖNCEL ÇEKİM

PROF. DR. CEM KADILAR
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

HATİCE ÖNCEL ÇEKİM' in hazırladığı "**Örnekleme Yöntemlerinde Hartley-Ross Tahmin Edicisine Dayalı Yeni Tahmin Ediciler**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**' nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya ÇINGI
Başkan ....

Prof. Dr. Cem KADILAR
Danışman ....

Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK
Üye ....

Doç. Dr. Yaprak Arzu Özdemir
Üye ....

Doç. Dr. Nursel Koyuncu
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
  (Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- ☒ **Tezimin/Raporumun 28/03/2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
  (Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- ☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- ☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

28 /03 / 2017

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/03/2017

HATİCE ÖNCEL ÇEKİM

ÖZET

ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNDE HARTLEY-ROSS TAHMİN EDİCİSİNE DAYALI YENİ TAHMİN EDİCİLER

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

Doktora, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cem KADILAR

Mart 2017, 98 sayfa

Bu tez çalışmasında yansız tahmin ediciler elde etmek için Hartley-Ross Yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem ile hem Basit Rastgele Örneklemede hem de Tabakalı Rastgele Örneklemede Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin varyans eşitlikleri teorik olarak elde edilmiş ve uygulamada iki ayrı veri seti için varyans değerleri bulunmuştur. Ayrıca önerilen tahmin ediciler literatürdeki tahmin ediciler ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen teorik koşullar altında, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin literatürdeki tahmin edicilerden daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hartley-Ross tipi tahmin ediciler, varyans, yansız tahmin ediciler, oransal tahmin ediciler, çarpımsal tahmin ediciler, Basit Rastgele Örnekleme, Tabakalı Rastgele Örnekleme.

ABSTRACT

NEW ESTIMATORS BASED ON THE HARTLEY-ROSS ESTIMATOR IN SAMPLING METHODS

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

Doctor of Philosophy, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Cem KADILAR

March 2017, 98 pages

In this thesis, we have used Hartley-Ross Method to obtain unbiased estimators. We have proposed the families of estimators based on Hartley-Ross estimators in both Simple Random Sampling and Stratified Random Sampling. The variance equations of proposed estimators are obtained in theory and variance values of these estimators are found for two data sets in application. Moreover, the proposed estimators are compared with the mentioned estimators in literature. Finally, it is concluded that the proposed estimators based on the Hartley-Ross estimators are more efficient than the estimators in literature under the determined conditions in theory.

Keywords: Hartley-Ross type estimators, variance, unbiased estimators, ratio estimators, product estimators, Simple Random Sampling, Stratified Random Sampling

TEŞEKKÜR

Akademik hayatım ve tez çalışmam boyunca deneyim ve bilgisiyle beni yönlendiren, motive eden ve bana destek olan çok değerli hocam Prof. Dr. Cem KADILAR' a,

Destek ve tavsiyeleri ile her zaman yanımda olan sevgili hocalarım Prof. Dr. Hülya ÇINGI ve Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR' a,

Değerli görüş ve öneriyle ile bana yol gösteren değerli tez jüri üyelerim Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK ve Doç. Dr. Nursel KOYUNCU' ya,

Her zaman sevgi ve desteğiyle yanımda olan, evdeki hocam rolünü çok iyi yerine getiren canım kocam Doç. Dr. Bayram ÇEKİM' e ve bu çalışma için ondan çaldığım zamanlardan gönülsüz fedakârlık eden bir tanecik oğlum Çınar ÇEKİM' e,

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu tez çalışmamda da arkamdaki gizli güç olan sevgili annem Betül ÖNCEL' e, benden desteğini esirgemeyen babam Erhan ÖNCEL' e, her şeyden daha değerli olan sevgili kardeşlerim Mustafa ve Nur Eylül ÖNCEL' e,

Her türlü desteklerini benden esirgemeyen başta Derya TURFAN ve Ayfer Ezgi YILMAZ olmak üzere sevgili mesai arkadaşlarıma,

Doktora yaşantım boyunca maddi destek sağlayan TÜBİTAK' a

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

X	Yardımcı değişken
Y	İlgilenilen değişken
N	Kitle büyüklüğü
n	Örneklem büyüklüğü
C_x	Değişim katsayısı
$\beta_2(x)$	Basıklık katsayısı
ρ	Korelasyon katsayısı

Kısaltmalar

BRÖ	Basit Rastgele Örnekleme
TRÖ	Tabakalı Rastgele Örnekleme
HKO	Hata Kareler Ortalaması
TÜİK	Türkiye İstatistik Kurumu
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı

1. GİRİŞ

Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde farklı örnekleme yöntemlerinde kitle ortalamasına, toplamına ve varyansına ilişkin birçok tahmin edici olduğu görülmektedir. Çalışmalardaki amaç, iyi bir örneklem ile yansız, tutarlı, duyarlı veya etkin tahminler yapabilmektir. İyi bir örneklemin belirlenmesi ise kitleye en uygun örnekleme yönteminin seçilmesinden sonra örneklem büyüklüğünün saptanmasıyla elde edilir [1].

Bir İstatistikçinin temel hedefi uygun örnekleme yöntemini belirleyerek parametreye ilişkin örneklem varyansını en küçük yapmaktır. Başka bir deyişle, bir İstatistikçinin temel amacı, uygun örnekleme yöntemini kullanarak yüksek duyarlılıkta kitle parametrelerinin tahminini elde etmektir. Tahminin duyarlılığını arttırmanın bir yolu yardımcı değişken bilgisini kullanmaktır. Bu nedenle, birçok örnekleme çalışmasında, yardımcı değişken bilgisi hem en iyi tahmin ediciyi seçmek hem de tahmin edicilerin etkinliğini geliştirmek için tercih edilmektedir.

Yardımcı değişken bilgisi, örnekleme yöntemi ve tahmin edici türü seçimlerinde kullanılmaktadır. İlgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki ilişkiye bağlı olarak tahmin ediciler aşağıdaki durumlarda kullanılmaktadır:

- İlgilenilen değişken ve yardımcı değişken, pozitif ilişkiye sahipse ve ilişki başlangıç noktasından geçen bir doğru ile gösterilebiliyorsa oransal tahmin edici dikkate alınmalıdır [2, 3],
- İlgilenilen değişken ve yardımcı değişken negatif ilişkiye sahipse ve ilişki başlangıç noktasından geçen bir doğru ile gösterilebiliyorsa çarpımsal tahmin edici dikkate alınmalıdır [4, 5],
- İlgilenilen değişken ve yardımcı değişken ilişkisi, pozitif ya da negatif, doğrusal değil ise tahmin edicinin üstel fonksiyonu içermesi dikkate alınmalıdır [6].

Ayrıca Tripathi [7, 8, 9] kitle parametrelerinin tahmininde yardımcı değişken bilgisinin kullanımı için aşağıdaki durumları önermiştir:

- Tabakalı bir kitlede, yardımcı değişkenin tabaka bilgisine göre tahminler belirlenebilir,

- Büyüklüğe orantılı olasılıklı örneklemede örneklem seçiminde yardımcı değişken bilgisi kullanılabilir,
- Yardımcı değişken bilgisi tahmin amacıyla kullanılabilir,
- Son olarak yukarıdaki durumlardan en az ikisinin birleşiminde de yardımcı değişken bilgisi kullanılabilir.

Örnekleme teorisinde yer alan birçok çalışmada elde edilen tahmin edicilerin yanlı olduğu görülmektedir. Bazı yazarlar, bu tahmin edicilerin yanlılığını azaltmaya çalışmışlardır. Bu nedenle, Quenouille Yöntemi, İç-içe örnekleme yöntemi ve Hartley ve Ross tarafından önerilen yansız tahmin ediciler yöntemi gibi yöntemler kullanarak, literatürdeki tahmin ediciler yansız hale getirilmiştir [10].

Literatürde yer alan çeşitli yöntemleri kullanarak Basit Rastgele Örnekleme (BRÖ) yönteminde yansız oransal ve çarpımsal tahmin ediciler Williams [11, 12], Rao [13], Rao ve Rao [14], Sahoo [15] ve Sahoo, Sahoo ve Wywial [16] tarafından tartışılmıştır. Paschal [17] ise yansız oransal tahmin edicileri Tabakalı Rastgele Örnekleme (TRÖ) yöntemine uyarlamıştır.

Son yıllarda ise Singh ve diğerleri [18] ve Kadılar ve Çekim [19, 20] BRÖ yönteminde kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişken bilgisini kullanarak Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı yansız tahmin ediciler önermişlerdir. Khan ve Shabbir [21, 22] ve Khan ve diğerleri [23] de Sıralı ve Tabakalı Sıralı Küme Örnekleme yöntemlerinde Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı yansız tahmin ediciler elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında ise hem BRÖ hem de TRÖ yöntemleri için Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin varyans eşitlikleri bulunmuştur. Çalışmada bahsedilen tahmin ediciler ile önerilen tahmin ediciler hem teorik olarak hem de sayısal uygulamalar ile karşılaştırılmıştır.

2. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEMEDE KİTLE ORTALAMASI TAHMİN EDİCİLERİ

BRÖ, örneklem seçme yöntemlerinden en basit ve en yaygın olarak kullanılanıdır. Bu yöntemde her bir örneklem birimi eşit seçilme olasılığına sahip olarak seçilir. Eğer bir örneklem birimi seçilir ve yeni bir örneklem seçilmeden önce ilk seçilen örneklem birimi tekrar kitleye konulur ve bu süreç n kez tekrarlanırsa BRÖ ile yerine koyarak seçim olarak adlandırılır. Eğer bir örneklem birimi seçilir ve yeni bir örneklem seçilmeden önce ilk seçilen örneklem birimi tekrar kitleye konulmaz ve bu süreç n farklı örneklem birimi için tekrarlanırsa bu yöntem BRÖ ile yerine koymadan seçim olarak adlandırılır.

$U=\left(U_1,U_2,...,U_N\right)$ kümesinin N boyutlu sonlu kitleye sahip olduğunu varsayalım. N boyutlu kitle için $\left(y_i,x_i\right)$, $i=1,2,...,n$ sırasıyla ilgilenilen değişken ve yardımcı değişkenin değerleri olsun. n boyutlu örneklemi, U kitlesinden BRÖ ile yerine koymadan seçelim. Y ve X değişkenlerinin sırasıyla örneklem ortalamaları $\bar{y}$ ve $\bar{x}$ ile kitle ortalamaları ise $\bar{Y}$ ve $\bar{X}$ ile gösterilsin. $\bar{X}$, yardımcı değişkenin kitle ortalamasının önceden bilindiğini varsayalım.

2.1. Oransal Tahmin Ediciler

Cochran [2] kitle ortalaması için oransal tahmin ediciyi

$$y_{C1}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} \tag{2.1}$$

olarak önermiş ve y_{C1} tahmin edicisinin hata kare ortalaması (HKO) eşitliğini

$$HKO\left(y_{C1}\right)=\gamma\left(S_y^2-2RS_{yx}+R^2S_x^2\right) \tag{2.2}$$

biçiminde elde etmiştir. Burada R kitlede değişkenler oranı, S_x^2 yardımcı değişkenin kitle varyansı , S_y^2 ilgilenilen değişkenin kitle varyansı ve S_{xy} X ile Y değişkenleri arasındaki kovaryans olmak üzere;

$$R=\frac{\bar{Y}}{\bar{X}},\ \gamma=\frac{N-n}{Nn},\ S_x^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{X}\right)^2,\ S_{yx}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)\left(x_i-\bar{X}\right)$$

ve

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2$$

şeklinde tanımlanır.

Örnekleme teorisindeki birçok çalışmada, yardımcı değişkenin ortalaması ile birlikte değişim katsayısı, basıklık, korelasyon katsayısı gibi bilgileri de kullanarak daha etkin tahmin ediciler elde edilmeye çalışılmıştır. İlk olarak Sisodia ve Dwivedi [24] çalışmalarında

$$y_{SD} = \frac{\bar{y}}{\bar{x} + C_x}\left(\bar{X} + C_x\right) \tag{2.3}$$

tahmin edicisi için yardımcı değişkenin ortalaması ile değişim katsayısını $\left(C_x\right)$, ilgilenilen değişkenin kitle ortalamasının tahmini için kullanmışlar ve y_{SD} tahmin edicisinin HKO eşitliği

$$R_{SD} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + C_x}$$

olmak üzere

$$HKO\left(y_{SD}\right) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{SD}S_{yx} + R_{SD}^2 S_x^2\right) \tag{2.4}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Daha sonra Singh ve Kakran [25] önerdikleri kitle ortalamasının tahmini için

$$y_{SK} = \frac{\bar{y}}{\bar{x} + \beta_2(x)}\left(\bar{X} + \beta_2(x)\right) \tag{2.5}$$

biçimindeki tahmin edicisinde basıklığı ($\beta_2(x)$) ele almışlar ve y_{SK} tahmin edicisinin HKO eşitliği

$$R_{SK} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + \beta_2\left(x\right)}$$

olmak üzere

$$HKO\left(y_{SK}\right) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{SK}S_{yx} + R_{SK}^2 S_x^2\right) \tag{2.6}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Upadhyaya ve Singh [26] ise yardımcı değişkenin ortalamasının yanında değişim katsayısı ve basıklığı da kullanarak, ilgilenilen değişkenin kitle ortalamasının tahminini aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$y_{US1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_2(x) + C_x}\left(\bar{X}\beta_2(x) + C_x\right), \tag{2.7}$$

$$y_{US2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}C_x + \beta_2(x)}\left(\bar{X}C_x + \beta_2(x)\right). \tag{2.8}$$

Ayrıca, y_{US1} ve y_{US2} tahmin edicilerin HKO eşitliklerini sırasıyla

$$R_{US1} = \frac{\bar{Y}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x) + C_x} \text{ ve } R_{US2} = \frac{\bar{Y}C_x}{\bar{X}C_x + \beta_2(x)}$$

olmak üzere

$$HKO(y_{US1}) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{US1}S_{yx} + R_{US1}^2 S_x^2\right) \tag{2.9}$$

ve

$$HKO(y_{US2}) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{US2}S_{yx} + R_{US2}^2 S_x^2\right) \tag{2.10}$$

olarak elde etmişlerdir.

Yardımcı değişkenin ortalaması ile birlikte korelasyon katsayısını (ρ) kullanarak, Singh ve Tailor [27] ilgilenilen değişkenin kitle ortalaması tahminini

$$y_{ST1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x} + \rho}\left(\bar{X} + \rho\right) \tag{2.11}$$

olarak elde etmişler ve y_{ST1} tahmin edicisinin HKO eşitliğini

$$R_{ST1} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + \rho}$$

olmak üzere

$$HKO(y_{ST1}) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{ST1}S_{yx} + R_{ST1}^2 S_x^2\right) \tag{2.12}$$

biçiminde hesaplamışlardır.

Kadılar ve Çıngı [28] ise çalışmalarında yardımcı değişkeninin ortalaması yanında değişim katsayısı, basıklığı ve korelasyon katsayısının farklı kullanımlarıyla aşağıdaki tahmin edicileri önermişlerdir:

$$y_{KC1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)}\left(\bar{X}\rho + \beta_2(x)\right), \tag{2.13}$$

$$y_{KC2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho}\left(\bar{X}\beta_2(x) + \rho\right), \tag{2.14}$$

$$y_{KC3} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + C_x}\left(\bar{X}\rho + C_x\right), \tag{2.15}$$

$$y_{KC4} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}C_x + \rho}\left(\bar{X}C_x + \rho\right). \tag{2.16}$$

Ayrıca y_{KC1}, y_{KC2}, y_{KC3} ve y_{KC4} tahmin edicilerinin HKO eşitlikleri

$$R_{KC1} = \frac{\bar{Y}\rho}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)},\ R_{KC2} = \frac{\bar{Y}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x) + \rho},\ R_{KC3} = \frac{\bar{Y}\rho}{\bar{X}\rho + C_x} \text{ ve } R_{KC4} = \frac{\bar{Y}C_x}{\bar{X}C_x + \rho}$$

olmak üzere

$$HKO\left(y_{KCi}\right) = \gamma\left(S_y^2 - 2R_{KCi}S_{yx} + R_{KCi}^2 S_x^2\right),\ i = 1,2,3,4 \tag{2.17}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Koyuncu ve Kadılar [29] bu çalışmalara ek olarak önerdikleri tahmin edici ailesinin bazı üyelerini yardımcı değişkenin varyans $\left(S_x\right)$ ve çarpıklık $\left(\beta_1(x)\right)$ bilgilerini ele alarak,

$$y_{KK1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x} + S_x}\left(\bar{X} + S_x\right), \tag{2.18}$$

$$y_{KK2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_2(x) + S_x}\left(\bar{X}\beta_2(x) + S_x\right), \tag{2.19}$$

$$y_{KK3} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_1(x) + S_x}\left(\bar{X}\beta_1(x) + S_x\right) \tag{2.20}$$

olarak kitle ortalaması için oransal tahmin edicileri vermişlerdir.

Ayrıca y_{KK1}, y_{KK2}, ve y_{KK3} tahmin edicilerinin HKO değerlerini

$$R_{KK1}=\frac{\bar{Y}}{\bar{X}+S_x},\ R_{KK2}=\frac{\bar{Y}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x)+S_x} \text{ ve } R_{KK3}=\frac{\bar{Y}\beta_1(x)}{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}$$

olmak üzere

$$HKO(y_{KKi})=\gamma\left(S_y^2-2R_{KKi}S_{yx}+R_{KKi}^2S_x^2\right),\ i=1,2,3 \tag{2.21}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

2.1.1. Oransal Tahmin Edicide Regresyon Tahmin Edicileri

Kadılar ve Çıngı [30] yardımcı değişkenin ortalaması yanında değişim katsayısını ve basıklığı ele alarak oransal tahmin edicide regresyon tahmin edicisini kullanan aşağıdaki tahmin edicileri önermişlerdir:

$$y_{KC5}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{x}+C_x}(\bar{X}+C_x), \tag{2.22}$$

$$y_{KC6}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{x}+\beta_2(x)}(\bar{X}+\beta_2(x)), \tag{2.23}$$

$$y_{KC7}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{x}\beta_2(x)+C_x}(\bar{X}\beta_2(x)+C_x), \tag{2.24}$$

$$y_{KC8}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{x}C_x+\beta_2(x)}(\bar{X}C_x+\beta_2(x)). \tag{2.25}$$

Burada $b=\frac{s_{yx}}{s_x^2}, s_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2, s_{yx}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})$'dir.

Ayrıca y_{KC5}, y_{KC6}, y_{KC7} ve y_{KC8} tahmin edicilerinin HKO değerlerini

$$HKO(y_{KCi})=\gamma\left(R_a^2S_x^2+S_y^2(1-\rho^2)\right),\ i=5,6,7,8,\ a=SD,SK,US1,US2 \tag{2.26}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Kadılar ve Çıngı [31], ele aldığı yardımcı değişken bilgilerine ek olarak korelasyon katsayısını da kullanarak

$$y_{KC9}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{x}+\rho}(\bar{X}+\rho), \tag{2.27}$$

$$y_{KC10}=\frac{\bar{y}+b\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{\bar{x}\rho+\beta_2(x)}\left(\bar{X}\rho+\beta_2(x)\right), \tag{2.28}$$

$$y_{KC11}=\frac{\bar{y}+b\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}\left(\bar{X}\beta_2(x)+\rho\right), \tag{2.29}$$

$$y_{KC12}=\frac{\bar{y}+b\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{\bar{x}\rho+C_x}\left(\bar{X}\rho+C_x\right), \tag{2.30}$$

$$y_{KC13}=\frac{\bar{y}+b\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{\bar{x}C_x+\rho}\left(\bar{X}C_x+\rho\right) \tag{2.31}$$

tahmin edicilerini önermişlerdir.

Ayrıca y_{KC9}, y_{KC10}, y_{KC11} y_{KC12} ve y_{KC13} tahmin edicilerinin HKO değerlerini

$$HKO\left(y_{KCi}\right)=\gamma\left(R_a^2S_x^2+S_y^2\left(1-\rho^2\right)\right), \qquad \begin{array}{l} i=9,10,11,12,13 \\ a=ST1,KC1,KC2,KC3,KC4 \end{array} \tag{2.32}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

2.2. Çarpımsal Tahmin Ediciler

Robson [32] ise kitle ortalaması için çarpımsal tahmin ediciyi

$$y_R=\frac{\bar{y}}{\bar{X}}\bar{x} \tag{2.33}$$

olarak tanımlamış ve y_R tahmin edicisinin HKO eşitliğini

$$HKO\left(y_R\right)=\gamma\left(S_y^2+2RS_{yx}+R^2S_x^2\right) \tag{2.34}$$

biçiminde elde etmiştir.

Birçok yazar, 2.1 alt kısımda bahsedilen oransal tahmin edicilerle benzer şekilde çarpımsal tahmin ediciler için de kitle ortalamasının tahmin edicilerinde yardımcı değişken bilgisini etkin olarak kullanmışlardır. İlk olarak Pandey ve Dubey [33] çalışmalarında

$$y_{PD}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}+C_x}\left(\bar{x}+C_x\right) \tag{2.35}$$

yardımcı değişkenin ortalaması ile değişim katsayısını, ilgilenilen değişkenin kitle ortalamasının tahmini için kullanmışlar ve y_{PD} tahmin edicisinin HKO eşitliğini

$$HKO\left(y_{PD}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{SD}S_{yx}+R_{SD}^2S_x^2\right) \tag{2.36}$$

şeklinde hesaplamışlardır.

Daha sonra Singh ve diğerleri [34],

$$y_{S1}=\frac{\overline{y}}{\overline{X}+\beta_2(x)}\left(\overline{x}+\beta_2(x)\right) \tag{2.37}$$

ile önerdikleri kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişkenin basıklık değerini kullanmışlar ve y_{S1} tahmin edicisinin HKO eşitliğini

$$HKO\left(y_{S1}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{SK}S_{yx}+R_{SK}^2S_x^2\right) \tag{2.38}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Upadhyaya ve Singh [26] ise yardımcı değişkenin ortalamasının yanında değişim katsayısı ve basıklığı da kullanarak ilgilenilen değişkenin kitle ortalamasının tahminini aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$y_{US3}=\frac{\overline{y}}{\overline{X}\beta_2(x)+C_x}\left(\overline{x}\beta_2(x)+C_x\right), \tag{2.39}$$

$$y_{US4}=\frac{\overline{y}}{\overline{X}C_x+\beta_2(x)}\left(\overline{x}C_x+\beta_2(x)\right). \tag{2.40}$$

Ayrıca y_{US3} ve y_{US4} tahmin edicilerin HKO eşitliklerini

$$HKO\left(y_{US3}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{US1}S_{yx}+R_{US1}^2S_x^2\right) \tag{2.41}$$

ve

$$HKO\left(y_{US4}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{US2}S_{yx}+R_{US2}^2S_x^2\right) \tag{2.42}$$

olarak bulmuşlardır.

Yardımcı değişkenin ortalaması ile birlikte korelasyon katsayısını kullanarak, Singh ve Tailor [27] ilgilenilen değişkenin kitle tahminini

$$y_{ST2}=\frac{\overline{y}}{\overline{X}+\rho}\left(\overline{x}+\rho\right) \tag{2.43}$$

olarak elde etmişler ve y_{ST2} tahmin edicisinin HKO eşitliğini

$$HKO\left(y_{ST2}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{ST1}S_{yx}+R_{ST1}^2S_x^2\right) \tag{2.44}$$

biçiminde hesaplamışlardır.

Kadılar ve Çıngı [28]'nın çalışmalarında daha önce verdikleri oransal tahmin edicilerin çarpımsal tipleri için aşağıdaki tahmin edicileri önermişlerdir:

$$y_{KC14}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}\left(\bar{x}\rho+\beta_2(x)\right), \tag{2.45}$$

$$y_{KC15}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}\left(\bar{x}\beta_2(x)+\rho\right), \tag{2.46}$$

$$y_{KC16}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}\rho+C_x}\left(\bar{x}\rho+C_x\right), \tag{2.47}$$

$$y_{KC17}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}C_x+\rho}\left(\bar{x}C_x+\rho\right). \tag{2.48}$$

Kadılar ve Çıngı [28], y_{KC14}, y_{KC15}, y_{KC16} ve y_{KC17} tahmin edicilerinin HKO eşitliklerini

$$HKO\left(y_{KCi}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{KC(i-13)}S_{yx}+R_{KC(i-13)}^2S_x^2\right),\ i=14,15,16,17 \tag{2.49}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Singh [35] bu tahmin edicilere ek olarak yardımcı değişkenin varyans ve çarpıklık bilgileri yardımıyla

$$y_{S2}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}+S_x}\left(\bar{x}+S_x\right), \tag{2.50}$$

$$y_{S3}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}\left(\bar{x}\beta_2(x)+S_x\right), \tag{2.51}$$

$$y_{S4}=\frac{\bar{y}}{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}\left(\bar{x}\beta_1(x)+S_x\right) \tag{2.52}$$

olarak kitle ortalaması için çarpımsal tahmin edicileri vermiştir.

Ayrıca y_{S2}, y_{S3}, ve y_{S4} tahmin edicilerinin HKO eşitliklerini

$$HKO\left(y_{S(i+1)}\right)=\gamma\left(S_y^2+2R_{KKi}S_{yx}+R_{KKi}^2S_x^2\right),\ i=1,2,3 \tag{2.53}$$

şeklinde elde etmiştir.

2.3. Tahmin Edici Aileleri

Son yıllardaki çalışmalar incelendiğinde kitle ortalamasını tahmin etmek için tek tek tahmin ediciler önermek yerine tahmin edici ailesi şeklinde tahmin edicilerin önerildiği görülmektedir. Bu kısımda da BRÖ yönteminde literatürde önerilen tahmin edici ailelerinden bahsedeceğiz.

Khoshnevisan ve diğerleri [36], kitle ortalaması $\left(\bar{Y}\right)$ için tahmin edici ailesini aşağıdaki şekilde önermişlerdir:

$$T_1 = \bar{y}\left[\frac{\theta\bar{X}+\varepsilon}{\alpha\left(\theta\bar{x}+\varepsilon\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\theta\bar{X}+\varepsilon\right)}\right]^t . \tag{2.54}$$

Burada $\theta \neq 0$ ve ε ile $C_x, \beta_2(x), \rho, \sigma_x, \beta_1(x)$ gibi yardımcı değişkenin kitle parametreleri gösterilmektedir. Ayrıca $t=-1,0,1$ olmak üzere t ve α sabit bir sayıdır.

Ayrıca Khoshnevisan ve diğerleri [36], T_1 tahmin edici ailesinin yanını

$$\delta = \frac{\theta\bar{X}}{\theta\bar{X}+\varepsilon}$$

olmak üzere

$$Yan\left(T_1\right) = \gamma\bar{Y}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\delta^2C_x^2 - \alpha\delta t C_{yx}\right) \tag{2.55}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Bu tahmin edici ailesinin HKO eşitliği ise

$$HKO\left(T_1\right) = \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - 2\alpha\delta t C_{yx} + \alpha^2\delta^2 t^2 C_x^2\right) \tag{2.56}$$

biçiminde bulmuşlardır.

Çizelge 2.1 T_1 tahmin edici ailesinin bazı oransal ve çarpımsal tahmin edicileri

Oransal tahmin ediciler ($t = 1$)	**Çarpımsal tahmin ediciler ($t = -1$)**	θ	ε
$T_{11} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}$ Sisodia ve Dwivedi [24]	$T_{12} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}+C_x}{\bar{X}+C_x}$ Pandey ve Dubey [33]	1	C_x
$T_{13} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}+\beta_2(x)}{\bar{x}+\beta_2(x)}$ Singh ve Kakran [25]	$T_{14} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}+\beta_2(x)}{\bar{X}+\beta_2(x)}$ Singh ve diğerleri [34]	1	$\beta_2(x)$
$T_{15} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+C_x}{\bar{x}\beta_2(x)+C_x}$ Upadyhaha ve Singh [26]	$T_{16} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+C_x}{\bar{X}\beta_2(x)+C_x}$ Upadyhaha ve Singh [26]	$\beta_2(x)$	C_x
$T_{17} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}{\bar{x}\rho+\beta_2(x)}$ Kadılar ve Çıngı [28]	$T_{18} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\rho+\beta_2(x)}{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}$ Kadılar ve Çıngı [28]	ρ	$\beta_2(x)$
$T_{19} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}$ Kadılar ve Çıngı [6]	$T_{110} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}$ Kadılar ve Çıngı [28]	$\beta_2(x)$	ρ
$T_{111} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\rho+C_x}{\bar{x}\rho+C_x}$ Kadılar ve Çıngı [28]	$T_{112} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\rho+C_x}{\bar{X}\rho+C_x}$ Kadılar ve Çıngı [28]	ρ	C_x
$T_{113} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}+S_x}{\bar{x}+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$T_{114} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}+S_x}{\bar{X}+S_x}$ Singh [35]	1	S_x
$T_{115} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}{\bar{x}\beta_2(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$T_{116} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+S_x}{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}$ Singh [35]	$\beta_2(x)$	S_x
$T_{117} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}{\bar{x}\beta_1(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$T_{118} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_1(x)+S_x}{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}$ Singh [35]	$\beta_1(x)$	S_x
$T_{119} = \bar{y}\dfrac{\bar{X}+\rho}{\bar{x}+\rho}$ Singh ve Tailor [27]	$T_{120} = \bar{y}\dfrac{\bar{x}+\rho}{\bar{X}+\rho}$ Singh ve Tailor [27]	1	ρ

Çizelge 2.1'de verilen oransal tahmin ediciler (2.54) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesinde yer almaktadır. Bu tahmin ediciler için HKO eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\delta_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+C_x}, \delta_2 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+\beta_2(x)}, \delta_3 = \frac{\bar{X}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x)+C_x}, \delta_4 = \frac{\bar{X}\rho}{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}, \delta_5 = \frac{\bar{X}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x)+\rho},$$

$$\delta_6 = \frac{\bar{X}\rho}{\bar{X}\rho+C_x}, \delta_7 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+S_x}, \delta_8 = \frac{\bar{X}\beta_2(x)}{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}, \delta_9 = \frac{\bar{X}\beta_1(x)}{\bar{X}\beta_1(x)+S_x} \text{ ve } \delta_{10} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+\rho}$$

olmak üzere

$$HKO\left(T_{1i}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 - 2\delta_{(i+1)/2}C_{yx} + \delta_{(i+1)/2}^2 C_x^2\right), \quad i = 1,3,...,19 \tag{2.57}$$

ya da

$$HKO\left(T_{1i}\right) = \gamma\left(S_y^2 - 2R\delta_{(i+1)/2}S_{yx} + R^2\delta_{(i+1)/2}^2 S_x^2\right), \quad i = 1,3,...,19. \tag{2.58}$$

Benzer şekilde Çizelge 2.1' de verilen çarpımsal tahmin edicilerin HKO eşitlikleri ise

$$HKO\left(T_{1j}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + 2\delta_{(j/2)}C_{yx} + \delta_{(j/2)}^2 C_x^2\right), \quad j = 2,4,...,20 \tag{2.59}$$

ya da

$$HKO\left(T_{1j}\right) = \gamma\left(S_y^2 + 2R\delta_{(j/2)}S_{yx} + R^2\delta_{(j/2)}^2 S_x^2\right), \quad j = 2,4,...,20 \tag{2.60}$$

olarak elde etmişlerdir.

Koyuncu ve Kadılar [29] çalışmalarında, kitle parametresinin bazı bilinen değerlerini kullanarak $\bar{Y}$ tahmini için

$$\eta_1 = k_1\bar{y}\left[\frac{\theta\bar{X}+\varepsilon}{\alpha\left(\theta\bar{x}+\varepsilon\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\theta\bar{X}+\varepsilon\right)}\right]^t \tag{2.61}$$

tahmin edici ailesini önermişlerdir. Burada, k_1, $HKO\left(\eta_1\right)$'i minimum yapan sabit bir sayıdır.

Koyuncu ve Kadılar [29], η_1 tahmin edici ailesinin HKO eşitliğini

$$\begin{aligned}\text{HKO}(\eta_1) = \bar{\text{Y}}^2\Big[& k_1^2\gamma C_y^2 + \left(k_1^2\left(2t^2+t\right) - k_1\left(t^2+t\right)\right)\alpha^2\delta^2\gamma C_x^2 \\ & -2t\alpha\delta\left(2k_1^2-k\right)\gamma C_{yx} + \left(k_1-1\right)^2\Big]\end{aligned} \tag{2.62}$$

biçiminde bulmuşlar ve minimum HKO değerine ulaşmak için k_1'in optimum değerini

$$k_1^{opt} = \frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{P}}$$

şeklinde hesaplamışlardır. Burada

$$\mathrm{M} = \left(t^2 + t\right)\alpha^2\delta^2\gamma C_x^2 - 2t\alpha\delta\gamma C_{yx} + 2$$

ve

$$\mathrm{P} = \gamma C_y^2 + \left(2t^2 + t\right)\alpha^2\delta^2\gamma C_x^2 - 4t\alpha\delta\gamma C_{yx} + 1$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra k_1 değerlerinin optimum değerlerini kullanarak η_1 tahmin edici ailelerinin minimum HKO eşitliği

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_1) = \bar{\mathrm{Y}}^2\left[1 - \frac{\mathrm{M}^2}{4\mathrm{P}}\right] \tag{2.63}$$

biçiminde elde edilmiştir.

(2.61) eşitliğinde verilen aynı tahmin edici ailesinde belirli parametre değerleri kullanılarak bazı iyi bilinen oransal ve çarpımsal tahmin ediciler Çizelge 2.2'de verilmiştir.

η_1 tahmin edici ailesinden elde edilen oransal tahmin edicilerin HKO eşitliklerini

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\eta_{1i}) = \bar{\mathrm{Y}}^2\Big[&\left(3k_1^{\oplus 2} - 2k_1^{\oplus}\right)\delta_{(i+1)/2}^2\gamma C_x^2 - 2\left(2k_1^{\oplus 2} - k_1^{\oplus}\right)\delta_{(i+1)/2}\gamma C_{yx} \\ &+ k_1^{\oplus 2}\gamma C_y^2 + \left(k_1^{\oplus} - 1\right)^2\Big], \quad i = 1,3,5,\ldots,19\end{aligned} \tag{2.64}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Benzer şekilde, (2.61) eşitliğinde verilen aynı tahmin edici ailesine belirli parametre değerleri kullanılarak bazı iyi bilinen çarpımsal tahmin ediciler Çizelge 2.2'de verilmiştir. η_1 tahmin edici ailesinden elde edilen çarpımsal tahmin edicilerin HKO eşitliklerini

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\eta_{1j}) = \bar{\mathrm{Y}}^2\Big[&k_1^{\odot 2}\gamma\left(C_y^2 + \delta_{(j/2)}^2 C_x^2\right) - 2\left(2k_1^{\odot 2} - k_1^{\odot}\right)\delta_{(j/2)}\gamma C_{yx}^2 \\ &+ \left(k_1^{\odot} - 1\right)^2\Big], \quad j = 2,4,6,\ldots,20\end{aligned} \tag{2.65}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Çizelge 2.2 η_1 tahmin edici ailesinin bazı oransal ve çarpımsal tahmin edicileri

Oransal tahmin ediciler ($t=1$)	**Çarpımsal tahmin ediciler ($t=-1$)**	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
$\eta_{11}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{12}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}+C_x}{\bar{X}+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	1	C_x
$\eta_{13}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}+\beta_2(x)}{\bar{x}+\beta_2(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{14}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}+\beta_2(x)}{\bar{X}+\beta_2(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	1	$\beta_2(x)$
$\eta_{15}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+C_x}{\bar{x}\beta_2(x)+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{16}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+C_x}{\bar{X}\beta_2(x)+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\beta_2(x)$	C_x
$\eta_{17}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}{\bar{x}\rho+\beta_2(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{18}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\rho+\beta_2(x)}{\bar{X}\rho+\beta_2(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	ρ	$\beta_2(x)$
$\eta_{19}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{110}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\beta_2(x)$	ρ
$\eta_{111}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\rho+C_x}{\bar{x}\rho+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{112}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\rho+C_x}{\bar{X}\rho+C_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	ρ	C_x
$\eta_{113}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}+S_x}{\bar{x}+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{114}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}+S_x}{\bar{X}+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	1	S_x
$\eta_{115}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}{\bar{x}\beta_2(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{116}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_2(x)+S_x}{\bar{X}\beta_2(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\beta_2(x)$	S_x
$\eta_{117}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}{\bar{x}\beta_1(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{118}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}\beta_1(x)+S_x}{\bar{X}\beta_1(x)+S_x}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\beta_1(x)$	S_x
$\eta_{119}=k\bar{y}\dfrac{\bar{X}+\rho}{\bar{x}+\rho}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	$\eta_{120}=k\bar{y}\dfrac{\bar{x}+\rho}{\bar{X}+\rho}$ Koyuncu ve Kadılar [29]	1	ρ

Daha sonra $k_1^{\oplus}$ ve $k_1^{\odot}$ değerlerinin optimum değerlerini

$$k_1^{\oplus opt} = \frac{\mathrm{M}^{\oplus}}{\mathrm{P}^{\oplus}} = \frac{1+\delta_{(i+1)/2}^2 \gamma C_x^2 - \delta_{(i+1)/2} \gamma C_{yx}}{1+3\delta_{(i+1)/2}^2 \gamma C_x^2 - 4\delta_{(i+1)/2} \gamma C_{yx} + \gamma C_y^2}$$

ve

$$k_1^{\odot opt} = \frac{\mathrm{M}^{\odot}}{\mathrm{P}^{\odot}} = \frac{1+\delta_{(j/2)} \gamma C_{yx}}{1+\delta_{(j/2)}^2 \gamma C_x^2 + 4\delta_{(j/2)} \gamma C_{yx} + \gamma C_y^2}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

k_1'lerin optimal değerleri için elde edilen minimum $HKO\left(\eta_{1i}\right)$ ve minimum $HKO\left(\eta_{1j}\right)$ eşitliklerini

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_{1i}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \left[1 - \frac{\mathrm{M}^{\oplus 2}}{\mathrm{P}^{\oplus}}\right], \qquad i = 1, 3, \ldots, 19 \tag{2.66}$$

ve

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_{1j}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \left[1 - \frac{\mathrm{M}^{\odot 2}}{\mathrm{P}^{\odot}}\right], \qquad j = 2, 4, \ldots, 20. \tag{2.67}$$

biçiminde hesaplamışlardır.

2.4. Hartley-Ross Tahmin Edicisine Dayalı Tahmin Ediciler

Hartley ve Ross [37], Cochran [2] tarafından 1940 yılında önerilen kitle ortalamasının klasik oransal tahmin edicisini

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}, \; r_i = \frac{y_i}{x_i}$$

olmak üzere

$$y_{C2} = \bar{r}\bar{X} \tag{2.68}$$

şeklinde ele almıştır. Daha sonra, bu tahmin edicinin yanını Hartley ve Ross [37]

$$Yan(y_{C2}) = -\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y} - \overline{rx}\right) \tag{2.69}$$

biçiminde bulmuş ve Hartley-Ross tahmin edici yöntemine göre, dikkate alınan tahmin ediciden yan çıkartılarak elde edildiğinden dolayı bu tahmin edicinin BRÖ yönteminde kitle ortalaması için Hartley-Ross yöntemine göre oluşturulan oransal tahmin edicisini

$$y_{HR} = \bar{r}\bar{X} + \frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y} - \overline{rx}\right) \tag{2.70}$$

biçiminde önermişlerdir. Bu nedenle Hartley-Ross tipi tahmin ediciler yansız olarak kabul edilir.

Yansız bir tahmin edici olduğu için HKO yerine varyans elde edilir. Hartley ve Ross [37], y_{HR} tahmin edicisinin varyansını

$$\bar{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{Y_i}{X_i}$$

olmak üzere

$$V(y_{HR}) = \frac{1}{n}\left(S_y^2 - 2\bar{R}S_{yx} + \bar{R}^2 S_x^2\right) \tag{2.71}$$

olarak elde etmişlerdir.

Singh [10] ise Robson [32] tarafından önerilen kitle ortalamasının klasik çarpımsal tahmin edicisini ele alarak bu tahmin edicinin yanını

$$Yan\left(y_R\right) = \gamma\frac{s_{yx}}{\bar{X}} \tag{2.72}$$

biçiminde elde etmiştir ve kitle ortalaması $\bar{Y}$ için Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciyi

$$y_{S5} = \bar{y}\frac{\bar{x}}{\bar{X}} - \gamma\frac{s_{yx}}{\bar{X}}, \tag{2.73}$$

olarak tanımlamış ve y_{S5} tahmin edicisinin varyans eşitliğini

$$V(y_{S5}) = \gamma\left(S_y^2 + 2RS_{yx} + R^2 S_x^2\right) \tag{2.74}$$

olarak bulmuştur.

Ayrıca Singh ve diğerleri [18], Kadılar ve Çıngı [28] ve Upadhyaya ve Singh [4] tarafından önerilen tahmin edicileri

$$\bar{r}^{*}=\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j^{*}}{n}, r_j^{*}=\frac{y_j}{x_j C_x+\rho}, \bar{X}^{*}=\bar{X} C_x+\rho,\; x_j^{*}=x_j C_x+\rho$$

$$\bar{r}^{**}=\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j^{**}}{n}, r_j^{**}=\frac{y_j}{x_j C_x+\beta_2(x)},\; \bar{X}^{**}=\bar{X} C_x+\beta_2(x) \text{ ve } x_j^{**}=x_j C_x+\beta_2(x)$$

olmak üzere

$$y_{S6}=\bar{r}^{*} \bar{X}^{*} \tag{2.75}$$

ve

$$y_{S7}=\bar{r}^{**} \bar{X}^{**} \tag{2.76}$$

biçiminde dikkate almışlardır ve bu tahmin edicilerin yanlarını

$$Yan\left(y_{S6}\right)=-\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y}-\bar{r}^{*} \bar{x}^{*}\right) \tag{2.77}$$

ve

$$Yan\left(y_{S7}\right)=-\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y}-\bar{r}^{**} \bar{x}^{**}\right) \tag{2.78}$$

şeklinde bulmuşlardır.

Singh ve diğerleri [18], bu yanları kullanarak Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicileri aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$y_{S8}=\bar{r}^{*} \bar{X}^{*}+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y}-\bar{r}^{*} \bar{x}^{*}\right) \tag{2.79}$$

ve

$$y_{S9}=\bar{r}^{**} \bar{X}^{**}+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y}-\bar{r}^{**} \bar{x}^{**}\right). \tag{2.80}$$

Ayrıca y_{S8} ve y_{S9} tahmin edicilerinin varyans eşitliklerini

$$\bar{R}^{*}=\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{x_i^{*}}, \bar{R}^{**}=\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{x_i^{**}},$$

$$S_{x^{*}}^{2}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{*}-\bar{X}^{*}\right)^{2},\; S_{x^{**}}^{2}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{**}-\bar{X}^{**}\right)^{2},$$

$$S_{yx^*} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)\left(x_i^* - \bar{X}^*\right)$$

ve

$$S_{yx^{**}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)\left(x_i^{**} - \bar{X}^{**}\right)$$

olmak üzere

$$V(y_{S8}) = \gamma\left(S_y^2 - 2\bar{R}^* S_{yx^*} + \bar{R}^{*2} S_{x^*}^2\right) \tag{2.81}$$

ve

$$V(y_{S9}) = \gamma\left(S_y^2 - 2\bar{R}^{**} S_{yx^{**}} + \bar{R}^{**2} S_{x^{**}}^2\right) \tag{2.82}$$

olarak elde etmişlerdir.

3. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE ORTALAMASI TAHMİN EDİCİLERİ

Tabakalama, duyarlılığı arttıran araçlardan biridir. Bu nedenle günümüz araştırmalarında örneklem seçimindeki bilimsel süreç, yaygın bir şekilde kitlenin tabakalandırılmasına dayanmaktadır. TRÖ yöntemini uygulayan çalışmalarda, kitle her bir tabaka homojen olacak şekilde gerekli tabakalara bölünür ve örneklem, BRÖ yöntemiyle her bir tabakadan seçilir.

$U=\left(U_1,U_2,...,U_N\right)$ kümesinin N boyutlu sonlu kitleye sahip olduğunu varsayalım. N büyüklüğündeki kitle $h\left(h=1,2,...,L\right)$ tabaka olmak üzere N_h büyüklüğünde L homojen tabakaya ayrılsın. Her tabakaya BRÖ yönteminin uygulanarak, N_h büyüklüğündeki kitleden n_h büyüklüğünde örneklem seçildiği varsayılsın. *h.* tabakada ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken değerleri $i=1,2,...,n_h$ için sırasıyla y_{hi} ve x_{hi} olarak tanımlansın. *h.* tabaka örneklem ortalamaları ise $\bar{y}_h=\frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}y_{hi}$ ve $\bar{x}_h=\frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}x_{hi}$ ile gösterilsin. Y ve X için tabakalı ortalama tahminleri sırasıyla $\bar{y}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h$ ve $\bar{x}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{x}_h$ olsun. Burada $W_h=\left(N_h/N\right)$ tabaka ağırlığıdır. $\bar{Y}_h=\frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h}Y_{hi}$ ve $\bar{X}_h=\frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h}X_{hi}$ ise sırasıyla ilgilenilen ve yardımcı değişkenin *h.* tabaka kitle ortalamaları olmak üzere kitle ortalamalarının sırasıyla $\bar{Y}=\bar{Y}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{Y}_h$ ve $\bar{X}=\bar{X}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h$ olduğunu kabul edelim.

3.1. Birleşik Oransal Tahmin Ediciler

TRÖ yönteminde kitle ortalamasının $\bar{Y}$ oransal tahmini için iki yöntem vardır. Birincisi her bir tabakanın toplamının ayrı ayrı oransal tahminlerini yaparak ve daha sonra bu tahminlerin toplamının alınmasıdır. Diğer bir alternatif tahmin ise birleşik oransal tahmin edicisidir [38]. Bu çalışmada bahsedilen TRÖ yöntemlerindeki tahmin ediciler birleşik oransal tahmin edicisine göre önerilmiştir.

Kitle ortalamasının tahmini için Hansen ve diğerleri [39] birleşik oransal tahmin edicisi olarak bilinen tahmin ediciyi

$$y_{H1} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X} \tag{3.1}$$

olarak önermişlerdir. Hansen ve diğerleri [39], bu tahmin edicinin yanını

$$Yan\left(y_{H1}\right) \cong \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(RS_{xh}^2 - S_{yxh}\right) \tag{3.2}$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada

$$S_{xh}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} \left(X_{hi} - \bar{X}_h\right)^2,\ S_{yxh} = \frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} \left(Y_{hi} - \bar{Y}_h\right)\left(X_{hi} - \bar{X}_h\right)$$

ve $\gamma_h = \dfrac{N_h - n_h}{N_h n_h}$

olarak tanımlanmıştır.

Ayrıca y_{H1} tahmin edicisinin HKO eşitliğini ise

$$S_{yh}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} \left(Y_{hi} - \bar{Y}_h\right)^2$$

olmak üzere

$$HKO\left(y_{H1}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2\right) \tag{3.3}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

TRÖ yönteminde Kadılar ve Çıngı [40], yardımcı değişkenin değişim katsayısı $C_{xst} = \sum_{h=1}^{L} W_h C_{xh}$ ve basıklık katsayısı $\beta_{2st}(x) = \sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2h}(x)$ olmak üzere

$$y_{KC18} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st} + C_{xst}} \left[\bar{X}_{st} + C_{xst}\right], \tag{3.4}$$

$$y_{KC19} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st} + \beta_{2st}\left(x\right)} \left[\bar{X}_{st} + \beta_{2st}\left(x\right)\right], \tag{3.5}$$

$$y_{KC20} = \frac{\bar{y}_{st}}{\left(\bar{x}\beta_2\left(x\right)\right)_{st} + C_{xst}} \left[\left(\bar{X}\beta_2\left(x\right)\right)_{st} + C_{xst}\right], \tag{3.6}$$

$$y_{KC21}=\frac{\bar{y}_{st}}{\left(\bar{x}C_x\right)_{st}+\beta_{2st}\left(x\right)}\left[\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2st}\left(x\right)\right] \tag{3.7}$$

tahmin edicilerini önermişlerdir.

Kadılar ve Çıngı [17], bu tahmin edicilerin yanını

$$Yan(y_{KCi})=\frac{1}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(R_{st\beta}S_{xh}^2-S_{yxh}\right)\right], \qquad \begin{array}{l}\beta=SD,SK,US1,US2\\ i=18,19,20,21\end{array} \tag{3.8}$$

biçiminde elde etmişlerdir. Burada

$$X_{stSD}=\bar{X}_{st}+C_{xst},\, X_{stSK}=\bar{X}_{st}+\beta_{2st}\left(x\right),\; X_{stUS1}=\left(\bar{X}\beta_2\left(x\right)\right)_{st}+C_{xst},$$

$$X_{stUS2}=\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2st}\left(x\right) \text{ ve } R_{st\beta}=\frac{\bar{Y}_{st}}{X_{st\beta}},\; \beta=SD,SK,US1,US2$$

eşitlikleri ile tanımlanmaktadır.

Ayrıca $y_{KCi},\, i=18,19,20,21$ tahmin edicilerinin HKO eşitliğini ise

$$HKO(y_{KCi})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2R_{st\beta}S_{yxh}+R_{st\beta}^2S_{xh}^2\right), \qquad \begin{array}{l}\beta=SD,SK,US1,US2\\ i=18,19,20,21\end{array} \tag{3.9}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Daha sonra Kadılar ve Çıngı [38], Hansen ve diğerleri [39] tarafından önerilen tahmin ediciyi HKO değerini minimum yapan bir k_2 sabit değeri ile çarparak oransal tahmin ediciyi

$$y_{KC22}=k_2\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X} \tag{3.10}$$

şeklinde elde etmişler ve y_{KC22} tahmin edicisinin yanını

$$Yan(y_{KC22})=\left(k_2-1\right)\bar{Y}+\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(RS_{xh}^2-k_2S_{yxh}\right)\right] \tag{3.11}$$

şeklinde bulmuşlardır. Ayrıca (3.10) eşitliğinde verilen tahmin edicinin HKO eşitliğini

$$HKO(y_{KC22})=k_2^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2RS_{yxh}+R^2S_{xh}^2\right)+\left(k_2-1\right)^2\bar{Y}^2 \tag{3.12}$$

biçiminde elde etmişler ve minimum HKO değerine ulaşmak için k_2'nin optimum değerini

$$k_2^{opt} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + A_{st}}$$

şeklinde bulmuşlardır. Burada

$$A_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

olarak tanımlanmaktadır. Daha sonra k_2 değerlerinin optimum değerlerini kullanarak y_{KC22} tahmin edicisinin minimum HKO eşitliğini

$$\text{HKO}_{\min}(y_{KC22}) = \bar{\text{Y}}^2 \frac{A_{st}}{\bar{\text{Y}}^2 + A_{st}} \qquad (3.13)$$

olarak elde etmişlerdir.

3.2. Birleşik Çarpımsal Tahmin Ediciler

Hansen ve diğerleri [39] tarafından kitle ortalamasının tahmini için önerilen oransal tahmin ediciyi ele alarak TRÖ için çarpımsal tahmin edicisini

$$y_{H2} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}} \bar{x}_{st} \qquad (3.14)$$

şeklinde elde etmişler ve y_{H2} tahmin edicisinin HKO eşitliğini ise

$$HKO\left(y_{H2}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right) \qquad (3.15)$$

olarak bulmuşlardır.

3.3. Tahmin Edici Aileleri

Khoshnevisan ve diğerleri [36] tarafından BRÖ yönteminde kitle ortalaması $\left(\bar{Y}\right)$ için önerdikleri tahmin edici ailesini kullanarak, Koyuncu ve Kadılar [41] TRÖ yönteminde aşağıdaki iki tahmin edici ailesini önermişlerdir:

$$\eta_2 = \bar{y}_{st}\left[\frac{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}{\alpha\left(\theta_{st}\bar{x}_{st}+\varepsilon_{st}\right)+(1-\alpha)\left(\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}\right)}\right]^{t} \tag{3.16}$$

ve

$$\eta_3 = k_3\bar{y}_{st}\left[\frac{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}{\alpha\left(\theta_{st}\bar{x}_{st}+\varepsilon_{st}\right)+(1-\alpha)\left(\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}\right)}\right]^{t}. \tag{3.17}$$

Burada $\theta_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\delta_h$ ve $\varepsilon_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\varepsilon_h$ olmak üzere $\left(\theta_{st}(\neq 0),\varepsilon_{st}\right)$ değerleri reel sayılar ya da $C_{xst},\ \beta_{2st}(x),\ \rho_{st},\ \sigma_{xst},\ \beta_{1st}(x)$ gibi yardımcı değişkenin kitle parametreleridir. Ayrıca $t=-1,0,1$ ve α ve k_3, $HKO(\eta_2)$ ve $HKO(\eta_3)$'ü minimum yapacak şekilde belirlenen sabit sayılardır.

Diğer taraftan

$$V_{r,s}=\sum_{h=1}^{L}W_h^{r+s}\frac{E\left[\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)^r\left(\bar{y}_h-\bar{Y}_h\right)^s\right]}{\bar{X}^r\bar{Y}^s},$$

$$D_{r,s}=\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^{r+s+1}\gamma_h\left(\frac{S_{yxh}^2}{W_h\gamma_h\left(\mu_{22h}-S_{yxh}^2\right)}\right)^{r+s-1}\sum_{h=1}^{L}W_h^{r+s}\gamma_h^{r+s}\mu_{12h}^{r}\mu_{21h}^{s}}{\bar{X}^r\bar{Y}^s\left(\sum_{h=1}^{L}W_h\gamma_hS_{yxh}\right)^{2-(r+s)}},$$

ve

$$\mu_{uvh}=\frac{1}{N_h-1}\sum_{i=1}^{N_h}\left(Y_{hi}-\bar{Y}_h\right)^u\left(X_{hi}-\bar{X}_h\right)^v,\ h=1,2,\ldots,L$$

ile gösterilsin.

Koyuncu ve Kadılar [41] da (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde verilen tahmin edici ailelerinin yanları sırasıyla

$$\tau=\frac{\theta_{st}\bar{X}}{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}$$

olmak üzere

$$Yan(\eta_2) = \bar{Y}\left[\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau V_{1,1}\right] \quad (3.18)$$

ve

$$Yan(\eta_3) = k_3\,\bar{Y}\left[\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau V_{1,1}\right] + (k_3 - 1)\bar{Y} \quad (3.19)$$

biçiminde elde etmişler ve η_2 ve η_3 tahmin edici ailelerinin HKO eşitliklerini ise sırasıyla

$$\mathrm{HKO}(\eta_2) = \bar{Y}^2\left[t^2\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + V_{0,2}\right] \quad (3.20)$$

ve

$$\mathrm{HKO}(\eta_3) = \bar{Y}^2\Big[k_3^2 V_{0,2} + \left(k_3^2\left(2t^2 + t\right) - k\left(t^2 + t\right)\right)\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau\left(2k_3^2 - k\right)V_{1,1} + \left(k_3 - 1\right)^2\Big] \quad (3.21)$$

olarak bulmuşlardır. Ayrıca minimum HKO değerlerine ulaşmak için $t\alpha\tau$ ve k_3'ün optimum değerlerini

$$t\alpha\tau^{opt} = \frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}$$

ve

$$k_3^{opt} = \frac{\Phi}{2\Lambda}$$

biçiminde hesaplamışlardır.

Burada

$$\Phi = \left(t^2 + t\right)\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + 2$$

ve

$$\Lambda = V_{0,2} + \left(2t^2 + t\right)\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 4t\alpha\tau V_{1,1} + 1$$

olarak tanımlanmıştır. $t\alpha\tau$ ve k_3 optimum değerlerini kullanarak, η_2 ve η_3 tahmin edici ailelerinin minimum HKO eşitlikleri

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_2)=\bar{\mathrm{Y}}^2\left[V_{0,2}-\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right] \tag{3.22}$$

ve

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_3)=\bar{\mathrm{Y}}^2\left[1-\frac{\Phi^2}{4\Lambda}\right] \tag{3.23}$$

biçimindedir.

(3.16) eşitliğinde verilen aynı tahmin edici ailesine belirli parametre değerleri kullanılarak bazı iyi bilinen oransal ve çarpımsal tahmin ediciler Çizelge 3.1' de verilmiştir. η_2 tahmin edici ailesinden elde edilen oransal ve çarpımsal tahmin edicilerin HKO eşitliklerini sırasıyla,

$$\mathrm{HKO}(\eta_{2i})=\bar{\mathrm{Y}}^2\left(\tau_{(i+1)/2}^2V_{2,0}-2\tau_{(i+1)/2}V_{1,1}+V_{0,2}\right),\quad i=1,3,5,\ldots,19 \tag{3.24}$$

ve

$$\mathrm{HKO}(\eta_{2j})=\bar{\mathrm{Y}}^2\left(\tau_{(j/2)}^2V_{2,0}-2\tau_{(j/2)}V_{1,1}+V_{0,2}\right),\quad j=2,4,6,\ldots,20 \tag{3.25}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Burada

$$\tau_1=\frac{\bar{X}}{\bar{X}+C_{xst}},\tau_2=\frac{\bar{X}}{\bar{X}+\beta_{2st}(x)},\tau_3=\frac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}},\tau_4=\frac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)},$$

$$\tau_5=\frac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}},\tau_6=\frac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+C_{xst}},\tau_7=\frac{\bar{X}}{\bar{X}+S_{xst}},\tau_8=\frac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}},$$

$$\tau_9=\frac{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}},\tau_{10}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}+\rho_{st}},\rho_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\rho_h\ \mathrm{ve}\ S_{xst}=\sum_{h=1}^{L}W_hS_{xh}$$

olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 3.1 η_2 tahmin edici ailesinin bazı oransal ve çarpımsal tahmin edicileri

Oransal tahmin ediciler ($t=1$)	**Çarpımsal tahmin ediciler ($t=-1$)**	$\boldsymbol{\theta}_{st}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_{st}$
$\eta_{21}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+C_{xst}}{\bar{x}_{st}+C_{xst}}$ Kadılar ve Çıngı [40]	$\eta_{22}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+C_{xst}}{\bar{X}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	C_{xst}
$\eta_{23}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+\beta_{2st}(x)}{\bar{x}_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Kadılar ve Çıngı [40]	$\eta_{24}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+\beta_{2st}(x)}{\bar{X}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	$\beta_{2st}(x)$
$\eta_{25}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}$ Kadılar ve Çıngı [40]	$\eta_{26}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	C_{xst}
$\eta_{27}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Kadılar ve Çıngı [40]	$\eta_{28}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	ρ_{st}	$\beta_{2st}(x)$
$\eta_{29}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{210}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	ρ_{st}
$\eta_{211}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{212}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	ρ_{st}	C_{xst}
$\eta_{213}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+S_{xst}}{\bar{x}_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{214}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+S_{xst}}{\bar{X}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	S_{xst}
$\eta_{215}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{216}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	S_{xst}
$\eta_{217}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{218}=\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{1st}(x)$	S_{xst}
$\eta_{219}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+\rho_{st}}{\bar{x}_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{220}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+\rho_{st}}{\bar{X}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	ρ_{st}

Çizelge 3.2 η_3 tahmin edici ailesinin bazı oransal ve çarpımsal tahmin edicileri

Oransal tahmin ediciler ($t=1$)	**Çarpımsal tahmin ediciler ($t=-1$)**	θ_{st}	ε_{st}
$\eta_{31}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+C_{xst}}{\bar{x}_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{32}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+C_{xst}}{\bar{X}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	C_{xst}
$\eta_{33}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+\beta_{2st}(x)}{\bar{x}_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{34}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+\beta_{2st}(x)}{\bar{X}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	$\beta_{2st}(x)$
$\eta_{35}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{36}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	C_{xst}
$\eta_{37}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{38}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	ρ_{st}	$\beta_{2st}(x)$
$\eta_{39}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{310}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	ρ_{st}
$\eta_{311}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{312}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\rho\right)_{st}+C_{xst}}{\left(\bar{X}\rho\right)_{st}+C_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	ρ_{st}	C_{xst}
$\eta_{313}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+S_{xst}}{\bar{x}_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{314}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+S_{xst}}{\bar{X}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	S_{xst}
$\eta_{315}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{316}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{2st}(x)$	S_{xst}
$\eta_{317}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{318}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{x}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\beta_{1st}(x)$	S_{xst}
$\eta_{319}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}+\rho_{st}}{\bar{x}_{st}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	$\eta_{320}=k_3\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}+\rho_{st}}{\bar{X}+\rho_{st}}$ Koyuncu ve Kadılar [41]	1	ρ_{st}

Benzer şekilde, (3.17) eşitliğinde verilen aynı tahmin edici ailelerine belirli parametre değerleri kullanılarak bazı iyi bilinen oransal ve çarpımsal tahmin ediciler Çizelge 3.2' de verilmiştir. η_3 tahmin edici ailesinden elde edilen oransal ve çarpımsal tahmin edicilerin HKO eşitliklerini, sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\eta_{3i}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \Big[&\left(3k_3^{\oplus 2} - 2k_3^{\oplus}\right)\tau_{(i+1)/2}^2 V_{2,0} - 2\left(2k_3^{\oplus 2} - k_3^{\oplus}\right)\tau_{(i+1)/2} V_{1,1} \\ &+ k_3^{\oplus 2} V_{0,2} + \left(k_3^{\oplus} - 1\right)^2 \Big], \qquad i = 1,3,5,\ldots,19\end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\eta_{3j}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \Big[&k_3^{\odot 2}\tau_{(j/2)}^2 V_{2,0} - 2\left(2k_3^{\odot 2} - k_3^{\odot}\right)\tau_{(j/2)} V_{1,1} \\ &+ k_3^{\odot 2} V_{0,2} + \left(k_3^{\odot} - 1\right)^2 \Big], \qquad j = 2,4,6,\ldots,20\end{aligned} \tag{3.27}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

$k_3^{\oplus}$ ve $k_3^{\odot}$ değerlerinin optimum değerleri

$$k_3^{\oplus} = \frac{\Phi^{\oplus}}{\Lambda^{\oplus}} = \frac{1 + \tau_{(i+1)/2}^2 V_{2,0} - \tau_{(i+1)/2} V_{1,1}}{1 + 3\tau_{(i+1)/2}^2 V_{2,0} - 4\tau_{(i+1)/2} V_{1,1} + V_{0,2}}$$

ve

$$k_3^{\odot} = \frac{\Phi^{\odot}}{\Lambda^{\odot}} = \frac{1 + \tau_{(j/2)} V_{1,1}}{1 + \tau_{(j/2)}^2 V_{2,0} + 4\tau_{(j/2)} V_{1,1} + V_{0,2}}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

k_3 'lerin optimal değerleri için elde edilen minimum $HKO(\eta_{3i})$ ve minimum $HKO(\eta_{3j})$ eşitliklerini

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_{3i}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \left[1 - \frac{\Phi^{\oplus 2}}{\Lambda^{\oplus}}\right], \qquad i = 1,3,5,\ldots,19 \tag{3.28}$$

ve

$$\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_{3j}) = \bar{\mathrm{Y}}^2 \left[1 - \frac{\Phi^{\odot 2}}{\Lambda^{\odot}}\right], \qquad j = 2,4,6,\ldots,20 \tag{3.29}$$

biçiminde bulmuşlardır.

3.4. Hartley-Ross Tahmin Edicisine Dayalı Tahmin Ediciler

Hansen ve diğerleri [39] tarafından TRÖ yöntemi için önerilen kitle ortalamasının klasik oransal tahmin edicisi,

$$\bar{r}_{st}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i},\ (\bar{y}_{st})_i=\bar{y}_i,\ (\bar{x}_{st})_i=\bar{x}_i,\ \bar{y}_{st}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{y}_i \text{ ve } \bar{x}_{st}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i$$

olmak üzere

$$y_{H3}=\bar{r}_{st}\bar{X} \tag{3.30}$$

şeklinde Pascual [42] tarafından dikkate alınmıştır. Pascual [42] çalışmasında her bir tabakadan (L), m tekrardan sonra durdurulacak şekilde rastgele olmak üzere seçimler yapmıştır. Her bir tabakadan m boyutlu örneklem ile toplam örneklem boyutunu mL olarak elde etmiştir. Daha sonra, Hansen ve diğerleri [39]'nin önerdiği tahmin edicinin yanını Pascual [42]

$$Yan(y_{H3})=-\frac{m}{m-1}\left(\bar{y}_{st}-\bar{r}_{st}\bar{x}_{st}\right) \tag{3.31}$$

elde etmiş ve TRÖ yönteminde kitle ortalaması için Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicisini

$$y_P=\bar{r}_{st}\bar{X}+\frac{m}{m-1}\left(\bar{y}_{st}-\bar{r}_{st}\bar{x}_{st}\right) \tag{3.32}$$

biçiminde önermiş ve y_p tahmin edicisinin varyans eşitliğini ise

$$S_{x_i}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left((x_{st})_i-\bar{X}\right)^2,\ S_{y_ix_i}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left((y_{st})_i-\bar{Y}\right)\left((x_{st})_i-\bar{X}\right),\ S_{y_i}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left((y_{st})_i-\bar{Y}\right)^2,$$

$$S_{r_i}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left((r_{st})_i-\bar{R}\right)^2 \text{ ve } \rho_i^{'}=\frac{S_{x_ir_i}}{S_{x_i}S_{r_i}}$$

olmak üzere

$$V(y_p)=\frac{1}{m}\left(S_{y_i}^2-2\bar{R}S_{y_ix_i}+\bar{R}^2S_{x_i}^2+\frac{1}{m-1}\left(1+\rho_i^{'2}\right)S_{x_i}^2S_{r_i}^2\right) \tag{3.33}$$

olarak elde etmiştir.

4. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE ORTALAMASI İÇİN ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER

4.1. Basit Rastgele Yönteminde Kitle Ortalamasının Tahmini için Önerilen Oransal Tahmin Ediciler

Kadılar ve Çıngı [30, 31] tarafından regresyon katsayısından yararlanarak önerilen oransal tahmin edici

$$y_{KC23j} = \left(\bar{r}^{(j)} + \frac{b\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\bar{x}^{(j)}} \right) \bar{X}^{(j)}, \; j = 1, 2, ..., 9 \tag{4.1}$$

biçiminde ele alınmıştır. Burada her bir tahmin edici için

$$\bar{r}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^{(j)}}{n}, \; r_i^{(j)} = \frac{y_i}{x_i^{(j)}}, \; j = 1, 2, ..., 9,$$

ve

$$x_i^{(1)} = x_i + C_x, \; \bar{X}^{(1)} = \bar{X} + C_x, \; x_i^{(2)} = x_i + \beta_2(x), \; \bar{X}^{(2)} = \bar{X} + \beta_2(x),$$

$$x_i^{(3)} = x_i \beta_2(x) + C_x, \; \bar{X}^{(3)} = \bar{X}\beta_2(x) + C_x, \; x_i^{(4)} = x_i C_x + \beta_2(x), \; \bar{X}^{(4)} = \bar{X}C_x + \beta_2(x),$$

$$x_i^{(5)} = x_i + \rho, \; \bar{X}^{(5)} = \bar{X} + \rho, \; x_i^{(6)} = x_i \rho + \beta_2(x), \; \bar{X}^{(6)} = \bar{X}\rho + \beta_2(x)$$

$$x_i^{(7)} = x_i \beta_2(x) + \rho, \; \bar{X}^{(7)} = \bar{X}\beta_2(x) + \rho, \; x_i^{(8)} = x_i \rho + C_x, \; \bar{X}^{(8)} = \bar{X}\rho + C_x,$$

$x_i^{(9)} = x_i C_x + \rho$ ve $\bar{X}^{(9)} = \bar{X}C_x + \rho$

şeklindedir.

(4.1) eşitliğinde verilen tahmin edicilerin yanları

$$\frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x} - \bar{X} + \bar{X}} = \frac{1}{\bar{X}\left(1 + \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)} = \frac{1}{\bar{X}}\left(1 + \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\bar{X}}\left[1 - \left(\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right) + \left(\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^3 + ...\right] \cong \frac{1}{\bar{X}}$$

olmak üzere

$$E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}b\left(\overline{X}-\overline{x}\right)}{\overline{x}^{(j)}}\right)=E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho s_y\left(\overline{X}-\overline{x}\right)}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)$$

$$=S_yE\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{X}}{s_x\overline{x}^{(j)}}-\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{x}}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)$$

$$=S_y\left\{E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{X}}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)-E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{x}}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)\right\}$$

$$=S_y\left\{E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{X}}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)-E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho}{s_x\overline{x}^{(j)}\overline{x}^{-1}}\right)\right\}$$

$$\cong S_y\left\{E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho\overline{X}}{s_x\overline{x}^{(j)}}\right)-E\left(\frac{\overline{X}^{(j)}\rho}{s_x\overline{x}^{(j)}\overline{X}^{-1}}\right)\right\}$$

$$\cong 0$$

eşitliği yardımıyla

$$Yan\left(y_{KC23j}\right)=E\left[\left(\overline{r}^{(j)}+\frac{b\left(\overline{X}-\overline{x}\right)}{\overline{x}^{(j)}}\right)\overline{X}^{(j)}-\overline{Y}\right]$$

$$=\overline{X}^{(j)}E\left(\overline{r}^{(j)}\right)+E\left(\overline{X}^{(j)}\frac{b\left(\overline{X}-\overline{x}\right)}{\overline{x}^{(j)}}\right)-\overline{Y}$$

$$=\overline{X}^{(j)}\overline{R}^{(j)}-\overline{Y}$$

$$=E\left(x_i^{(j)}\right)E\left(r_i^{(j)}\right)-E\left(y_i\right)$$

$$=E\left(x_i^{(j)}\right)E\left(r_i^{(j)}\right)-E\left(x_i^{(j)}r_i^{(j)}\right)$$

$$=-\operatorname{cov}\left(r_i^{(j)},x_i^{(j)}\right)$$

$$=-\frac{N-1}{N}S_{r^{(j)}x^{(j)}},\ j=1,2,...,9 \qquad (4.2)$$

(4.2) eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Burada

$$S_{r^{(j)}x^{(j)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_i^{(j)} - \bar{R}^{(j)}\right)\left(x_i - \bar{X}\right); \ j = 1,2,5 \\ \dfrac{\beta_2(x)}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_i^{(j)} - \bar{R}^{(j)}\right)\left(x_i - \bar{X}\right); \ j = 3,7 \\ \dfrac{C_x}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_i^{(j)} - \bar{R}^{(j)}\right)\left(x_i - \bar{X}\right); \ j = 4,9 \\ \dfrac{\rho}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_i^{(j)} - \bar{R}^{(j)}\right)\left(x_i - \bar{X}\right); \ j = 6,8 \end{cases} \tag{4.3}$$

ve

$$\bar{R}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i^{(j)}}{N}$$

olarak tanımlanmaktadır. $S_{r^{(j)}x^{(j)}}$ ‘in yansız tahmin edicisi $s_{r^{(j)}x^{(j)}}$ ise $j = 1,2,...,9$ için

$$s_{r^{(j)}x^{(j)}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^{(j)} - \bar{r}^{(j)}\right)\left(x_i^{(j)} - \bar{x}^{(j)}\right),$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^{(j)}x_i^{(j)} - r_i^{(j)}\bar{x}^{(j)} - \bar{r}^{(j)}x_i^{(j)} + \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right),$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} r_i^{(j)}\bar{x}^{(j)} - \bar{r}^{(j)}\sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)} + n\bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right),$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\bar{y} - \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right)$$

ile verilmektedir. (4.3) eşitliğinde $S_{r^{(j)}x^{(j)}}$ yerine elde edilen yansız tahmin edicisi $s_{r^{(j)}x^{(j)}}$ yazılırsa önerilen tahmin edicilerin yanı

$$Yan(y_{KC23j}) = -\left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right), \ j = 1,2,...,9 \tag{4.4}$$

eşitliğiyle elde edilir. Daha sonra (4.4) eşitliği kullanılarak (4.1) eşitliğinde düzenlenen tahmin edicilerin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı hali

$$y_{CKj} = \left(\bar{r}^{(j)} + \frac{b\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\bar{x}^{(j)}}\right)\bar{X}^{(j)} + \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right) \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur. Burada $j = 1, 2, ..., 9$'dur. (4.5) eşitliğinde önerilen tahmin edicilerin varyanslarını bulmak için fark yöntemi ile

$$\vartheta_0 = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \text{ ise } \bar{y} = \bar{Y}\left(1 + \vartheta_0\right),$$

$$\vartheta_1 = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}} \text{ ise } \bar{x} = \bar{X}\left(1 + \vartheta_1\right),$$

$$\vartheta_2 = \frac{\bar{r}^{(j)} - \bar{R}^{(j)}}{\bar{R}^{(j)}} \text{ ise } \bar{r}^{(j)} = \bar{R}^{(j)}\left(1 + \vartheta_2\right),$$

$$\vartheta_3 = \frac{\bar{x}^{(j)} - \bar{X}^{(j)}}{\bar{X}^{(j)}} \text{ ise } \bar{x}^{(j)} = \bar{X}^{(j)}\left(1 + \vartheta_3\right)$$

olarak tanımlanırsa, (4.5)'de önerilen tahmin edici

$$y_{CKj} = \left(\bar{R}^{(j)}\left(1+\vartheta_2\right) + \frac{b\left(\bar{X} - \bar{X}\left(1+\vartheta_1\right)\right)}{\bar{X}^{(j)}\left(1+\vartheta_3\right)} \right) \bar{X}^{(j)}$$
$$+ \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{Y}\left(1+\vartheta_0\right) - \bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(1+\vartheta_2\right)\left(1+\vartheta_3\right)\right) \quad (4.6)$$

olarak yazılır.

Önerilen tahmin ediciden kitle ortalaması $\left(\bar{Y}\right)$ çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$y_{CKj} - \bar{Y} = \bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(1+\vartheta_2\right) - b\bar{X}\vartheta_1\left(1+\vartheta_3\right)^{-1} + \frac{\left(N-1\right)n}{N\left(n-1\right)}\bar{Y}$$
$$+ \frac{\left(N-1\right)n}{N\left(n-1\right)}\left[\bar{Y}\vartheta_0 - \bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(\vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_2\vartheta_3\right)\right]$$
$$- \frac{\left(N-1\right)n}{N\left(n-1\right)}\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)} - \bar{Y}, \qquad j = 1, 2, ..., 9,$$

$$y_{CKj} - \bar{Y} = \bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\vartheta_2 - \left(\frac{Nn-n}{N\left(n-1\right)} - \frac{Nn-N}{N\left(n-1\right)}\right)\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}$$
$$+ \left(\frac{Nn-n}{N\left(n-1\right)} - \frac{Nn-N}{N\left(n-1\right)}\right)\bar{Y} - b\bar{X}\vartheta_1\left(1+\vartheta_3\right)^{-1}$$

$$+\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\left[\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right],$$

$$y_{CKj}-\bar{Y}=\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\vartheta_2+\frac{N-n}{N(n-1)}\left(\bar{Y}-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\right)-b\bar{X}\vartheta_1\left(1+\vartheta_3\right)^{-1}$$

$$+\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\left[\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right],\ j=1,2,...,9. \tag{4.7}$$

(4.7) eşitliğinde $\bar{Y}-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\cong 0$ ve $\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\cong 1$ varsayımları kullanılırsa,

$$y_{CKj}-\bar{Y}\cong\bar{Y}\vartheta_0-b\bar{X}\vartheta_1\left(1-\vartheta_3+\vartheta_3^2-...\right)-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right),$$

$$y_{CKj}-\bar{Y}\cong\bar{Y}\vartheta_0-b\bar{X}\vartheta_1+b\bar{X}\vartheta_1\vartheta_3-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\left(\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right),$$

$$y_{CKj}-\bar{Y}\cong\bar{Y}\vartheta_0-b\bar{X}\vartheta_1-\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\vartheta_3 \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. (4.8) eşitliğinin karesi ve beklenen değeri alınarak, önerilen tahmin edicilerin varyansı

$$E(\vartheta_k)=0,\ k=0,1,2,3,$$

$$E(\vartheta_0^2)=\gamma C_y^2,\ E(\vartheta_1^2)=\gamma C_x^2,\ E(\vartheta_2^2)=\gamma C_{r^{(i)}}^2,\ E(\vartheta_3^2)=\gamma C_{x^{(i)}}^2,$$

$$E(\vartheta_0\vartheta_1)=\gamma C_{yx},\ E(\vartheta_0\vartheta_2)=\gamma C_{yr^{(j)}},\ E(\vartheta_0\vartheta_3)=\gamma C_{yx^{(j)}},$$

$$E(\vartheta_1\vartheta_2)=\gamma C_{xr^{(j)}},\ E(\vartheta_1\vartheta_3)=\gamma C_{xx^{(j)}},\ E(\vartheta_2\vartheta_3)=\gamma C_{r^{(j)}x^{(j)}},$$

eşitliklerinden yararlanılarak

$$E\left(y_{CKj}-\bar{Y}\right)^2\cong E\left(\bar{Y}^2\vartheta_0^2+b^2\bar{X}^2\vartheta_1^2+\bar{R}^{(j)2}\bar{X}^{(j)2}\vartheta_3^2\right.$$

$$\left.-2b\bar{X}\bar{Y}\vartheta_0\vartheta_1-2\bar{Y}\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\vartheta_0\vartheta_3+2b\bar{X}\bar{R}^{(j)}\bar{X}^{(j)}\vartheta_1\vartheta_3\right)$$

$$V(y_{CKi})\cong\gamma\left(S_y^2+B^2S_x^2+\bar{R}^{(j)2}S_{x^{(j)}}^2-2BS_{yx}+2B\bar{R}^{(j)}S_{xx^{(j)}}-2\bar{R}^{(j)}S_{yx^{(j)}}\right) \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$S^2_{x^{(j)}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)}\right)^2,\ S_{yx^{(j)}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)\left(x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)}\right),$$

$$S_{xx^{(j)}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)}\right),\ j = 1, 2, ..., 9$$

ve

$B = \dfrac{S_{yx}}{S_x^2}$, dir.

(4.9) eşitliğine ara işlemler yapıldığında

$$V(y_{CKj}) \cong \gamma\left(S_y^2 + \rho^2 S_y^2 + \bar{R}^{(j)2} S^2_{x^{(j)}} - 2\rho^2 S_y^2 + 2B\bar{R}^{(j)} S_{xx^{(j)}} - 2\bar{R}^{(j)} S_{yx^{(j)}}\right)$$

$$\cong \gamma\left(\left(1-\rho^2\right) S_y^2 + \bar{R}^{(j)2} S^2_{x^{(j)}} + 2B\bar{R}^{(j)} S_{xx^{(j)}} - 2\bar{R}^{(j)} S_{yx^{(j)}}\right), \quad j = 1, 2, ..., 9 \tag{4.10}$$

elde edilir.

4.1.1. Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Oransal Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırmaları

Bu alt bölümde, (2.22)-(2.25) ve (2.27)-(2.31) eşitliklerinde verilen tahmin ediciler ile önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerin (4.10) eşitliğinde elde edilen varyansları ile Kadılar ve Çıngı [30, 31] tarafından önerilen tahmin edicinin (2.26) ve (2.32) eşitliklerinde verilen HKO eşitlikleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki eşitsizlikler ile verilmektedir:

$$-R_a^2 S_x^2 + \bar{R}^{(j)2} S^2_{x^{(j)}} + 2B\bar{R}^{(j)} S_{xx^{(j)}} - 2\bar{R}^{(j)} S_{yx^{(j)}} < 0, \qquad \begin{array}{c} j = 1, 2, ..., 9, \\ a = SD, SK, US1, US2, ST1, \\ KC1, KC2, KC3, KC4. \end{array} \tag{4.11}$$

koşulu altında

$$V\left(y_{CKj}\right) < HKO\left(y_{KC23j}\right) = \gamma\left(S_y^2\left(1-\rho^2\right) + R_a^2 S_x^2\right), \qquad \begin{array}{c} j = 1, 2, ..., 9, \\ a = SD, SK, US1, US2, ST1, \\ KC1, KC2, KC3, KC4 \end{array}.$$

İkinci olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerin (4.9) eşitliğinde elde edilen varyansları ile (2.81) eşitliğinde verilen Singh ve diğerleri [18] tarafından önerilen birinci tahmin edicinin varyansı karşılaştırıldığında

$j=1,2,\ldots,9$ için

$$B^2S_x^2+\bar{R}^{(j)2}S_{x^{(j)}}^2-\bar{R}^{*2}S_{x^*}^2-2B\left(S_{yx}-\bar{R}^{(j)}S_{xx^{(j)}}\right)-2\left(\bar{R}^{(j)}S_{yx^{(j)}}-\bar{R}^{*}S_{yx^*}\right)<0 \tag{4.12}$$

koşulu altında

$V\left(y_{CKj}\right)<V\left(y_{S8}\right),\ j=1,2,\ldots,9$

şeklinde sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerin (4.9) eşitliğinde elde edilen varyansları ile (2.82) eşitliğinde verilen Singh ve diğerleri [17] tarafından önerilen ikinci tahmin edicinin varyansının karşılaştırılması ile

$j=1,2,\ldots,9$ için

$$B^2S_x^2+\bar{R}^{(j)2}S_{x^{(j)}}^2-\bar{R}^{**2}S_{x^{**}}^2-2B\left(S_{yx}-\bar{R}^{(j)}S_{xx^{(j)}}\right)-2\left(\bar{R}^{(j)}S_{yx^{(j)}}-\bar{R}^{**}S_{yx^{**}}\right)<0 \tag{4.13}$$

koşulu altında

$V\left(y_{CKj}\right)<V\left(y_{S9}\right),\ j=1,2,\ldots,9$

eşitsizliklerine ulaşılmıştır.

Sonuç olarak, (4.11)-(4.13) koşulları altında önerdiğimiz Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerinin $y_{KCj},\ j=1,...,9$ oransal tahmin edicilerinden ve $y_{Si},\ i=8,9$ Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerden daha etkin olduğu görülmektedir.

4.2. Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Kitle Ortalamasının Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Aileleri

Khoshnevisan ve diğerleri [36] tarafından (2.54) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesinde $t=1$ ve $\alpha=1$ durumunda oransal tahmin ediciye dönüştürerek aşağıdaki oransal tahmin edici ailesi

$$T_2 = \overline{r}^{(10)}\overline{X}^{(10)} \tag{4.14}$$

biçiminde ele alınmıştır. Burada

$$\overline{r}^{(10)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^{(10)}}{n},\ r_i^{(10)} = \frac{y_i}{\theta x_i + \varepsilon} = \frac{y_i}{x_i^{(10)}} \text{ ve } \overline{X}^{(10)} = \theta\overline{X} + \varepsilon$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.14) eşitliğinde verilen tahmin edicinin yanı

$$S_{r^{(10)}x^{(10)}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_i - \overline{R}^{(10)}\right)\left(x_i^{(10)} - \overline{X}^{(10)}\right) \text{ ve } \overline{R}^{(10)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i^{(10)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
Yan\left(T_2\right) &= E\left(\overline{r}^{(10)}\overline{X}^{(10)} - \overline{Y}\right) \\
&= \overline{X}^{(10)}E\left(\overline{r}^{(10)}\right) - \overline{Y} \\
&= \overline{R}^{(10)}\overline{X}^{(10)} - \overline{Y} \\
&= E\left(r_i^{(10)}\right)E\left(x_i^{(10)}\right) - E\left(y_i\right) \\
&= E\left(r_i^{(10)}\right)E\left(x_i^{(10)}\right) - E\left(r_i^{(10)}x_i^{(10)}\right) \\
&= -\operatorname{cov}\left(r_i^{(10)}, x_i^{(10)}\right) \\
&= -\frac{N-1}{N}S_{r^{(10)}x^{(10)}}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir. $S_{r^{(10)}x^{(10)}}$’in yansız tahmin edicisi

$$s_{r^{(10)}x^{(10)}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^{(10)} - \overline{r}^{(10)}\right)\left(x_i^{(10)} - \overline{x}^{(10)}\right)$$

$$= -\frac{n}{(n-1)}\left(\bar{y} - \bar{r}^{(10)}\bar{x}^{(10)}\right)$$

ile verilmektedir. (4.15) eşitliğinde $S_{r^{(10)}x^{(10)}}$ yerine yansız tahmin edicisi $s_{r^{(10)}x^{(10)}}$ yazılırsa, ilgilenilen tahmin edici ailesi T_2'nin yanı

$$Yan(T_2) = -\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y} - \bar{r}^{(10)}\bar{x}^{(10)}\right) \tag{4.16}$$

eşitliği ile tahmin edilir. Daha sonra elde edilen yan eşitliği kullanılarak, (4.14) eşitliğindeki tahmin edici ailesinin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edici ailesi

$$y_{CK10} = \bar{r}^{(10)}\bar{X}^{(10)} + \frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y} - \bar{r}^{(10)}\bar{x}^{(10)}\right) \tag{4.17}$$

şeklinde bulunur.

(4.17) eşitliğinde önerilen tahmin edici ailesinin varyansını bulmak için fark yöntemi ile

$\vartheta_4 = \dfrac{s_{yx} - S_{yx}}{S_{yx}}$ olmak üzere $s_{yx} = S_{yx}(1+\vartheta_4)$

olarak tanımlanırsa birinci dereceden yaklaşımı ele alarak,

$$y_{CK10} = \bar{R}^{(10)}(1+\vartheta_2)\bar{X}^{(10)}$$

$$+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{Y}(1+\vartheta_0) - \bar{R}^{(10)}(1+\vartheta_2)(1+\vartheta_3)\bar{X}^{(10)}\right) \tag{4.18}$$

olarak yazılır.

Önerilen tahmin ediciden kitle ortalaması $(\bar{Y})$ çıkarılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$y_{CK10} - \bar{Y} = \bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)} + \bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_2$$

$$+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{Y} + \bar{Y}\vartheta_0 - \bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\left(1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right) - \bar{Y} \ ,$$

$$y_{CK10}-\bar{Y}=\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_2+\left(\frac{Nn-n}{N(n-1)}-\frac{Nn-N}{N(n-1)}\right)\left(\bar{Y}-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\right)$$

$$+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\left(\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right),$$

$$y_{CK10}-\bar{Y}=\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_2+\frac{N-n}{N(n-1)}\left(\bar{Y}-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\right)$$

$$+\frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\left(\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right). \tag{4.19}$$

(4.19) eşitliğinde $\bar{Y}-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\cong 0$ ve $\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\cong 1$ varsayımları kullanılırsa,

$$y_{CK10}-\bar{Y}\cong\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_2+\left(\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\left(\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\right)\right),$$

$$y_{CK10}-\bar{Y}\cong\bar{Y}\vartheta_0-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_3-\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_2\vartheta_3 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinin karesi ve beklenen değeri alınarak, önerilen tahmin edicilerin varyansı

$$E(\vartheta_4)=0,\ E(\vartheta_4^2)=\gamma\left(\frac{\lambda_{22}}{\rho^2}-1\right),$$

$$E(\vartheta_0\vartheta_4)=\gamma\frac{C_y\lambda_{21}}{\rho},\ E(\vartheta_3\vartheta_4)=\gamma\frac{C_x\lambda_{12}}{\rho}$$

eşitliklerinden yararlanılarak

$$E\left(y_{CK10}-\bar{Y}\right)^2\cong\bar{Y}^2\vartheta_0^2+\bar{R}^{(10)2}\bar{X}^{(10)2}\vartheta_3^2-2\bar{Y}\bar{R}^{(10)}\bar{X}^{(10)}\vartheta_0\vartheta_3,$$

$$V(y_{CK10})\cong\gamma\left(S_y^2+\bar{R}^{(10)2}S^2_{x^{(10)}}-2\bar{R}^{(10)}S_{yx^{(10)}}\right) \tag{4.21}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$\lambda_{uv}=\frac{\mu_{uv}}{\mu_{20}^{u/2}\mu_{02}^{v/2}}$ ve $\mu_{uv}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)^u\left(y_i-\bar{Y}\right)^v$'dir.

Benzer şekilde, Khoshnevisan ve diğerleri [36] tarafından (2.54) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesinde $t=-1$ ve $\alpha=1$ durumunda çarpımsal tahmin ediciye dönüştürerek aşağıdaki çarpımsal tahmin edici ailesi

$$T_3 = \frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}} \tag{4.22}$$

olarak ele alınmıştır. (4.22) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesinin yanı

$$
\begin{aligned}
Yan(T_3) &= E\left(\frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}} - \overline{Y}\right) \\
&= \frac{1}{\overline{X}^{(10)}} E\left(\overline{r}^{(10)}\right) - \overline{Y} \\
&= \frac{\overline{R}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}} - \overline{Y} \\
&= \frac{E\left(r_i^{(10)}\right)}{E\left(x_i^{(10)}\right)} - E(y_i) \\
&= \frac{E\left(r_i^{(10)}\right)}{E\left(x_i^{(10)}\right)} - E\left(x_i^{(10)}\right)E\left(r_i^{(10)}\right) + E\left(x_i^{(10)}\right)E\left(r_i^{(10)}\right) - E(y_i) \\
&= \frac{E\left(r_i^{(10)}\right)}{E\left(x_i^{(10)}\right)}\left(1-\left(E\left(x_i^{(10)}\right)\right)^2\right) + \left(E\left(x_i^{(10)}\right)E\left(r_i^{(10)}\right) - E(y_i)\right) \\
&= \frac{\overline{R}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}\left(1-\overline{X}^{(10)2}\right) + \left(E\left(x_i^{(10)}\right)E\left(r_i^{(10)}\right) - E\left(x_i^{(10)} r_i^{(10)}\right)\right) \\
&= \frac{\overline{R}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}\left(1-\overline{X}^{(10)2}\right) - \operatorname{cov}\left(r_i^{(10)}, x_i^{(10)}\right) \\
&= \frac{\overline{R}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}\left(1-\overline{X}^{(10)2}\right) - \frac{N-1}{N} S_{r^{(10)}x^{(10)}}
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

eşitliğiyle elde edilir. $S_{r^{(10)}x^{(10)}}$ ve $\overline{R}^{(10)}$ yerine yansız tahmin edicileri $s_{r^{(10)}x^{(10)}}$ ve $\overline{r}^{(10)}$ yazılırsa, ilgilenilen tahmin edici ailesi T_3'ün yanı

$$Yan(T_3) = \frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}\left(1-\overline{X}^{(10)2}\right) - \frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\overline{y} - \overline{r}^{(10)}\overline{x}^{(10)}\right) \tag{4.24}$$

şeklinde tahmin edilir.

(4.24) eşitliğinde elde edilen $Yan(T_3)$ eşitliğinde T_3 tahmin edici ailesi ve (4.17) eşitliğinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edici ailesinin farkının olduğu dikkat çekmektedir.

$$Yan\left(T_3\right)=\frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}-\left[\overline{r}^{(10)}\overline{X}^{(10)}+\frac{n\left(N-1\right)}{N\left(n-1\right)}\left(\overline{y}-\overline{r}^{(10)}\overline{x}^{(10)}\right)\right]$$

Daha sonra elde edilen yan eşitliği kullanılarak, (4.22) eşitliğinde ilgilenilen tahmin edici ailesinin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı hali

$$y_{CK11}=\frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}-\frac{\overline{r}^{(10)}}{\overline{X}^{(10)}}\left(1-\overline{X}^{(10)2}\right)+\frac{n\left(N-1\right)}{N\left(n-1\right)}\left(\overline{y}-\overline{r}^{(10)}\overline{x}^{(10)}\right)$$

$$=\overline{r}^{(10)}\overline{X}^{(10)}+\frac{n\left(N-1\right)}{N\left(n-1\right)}\left(\overline{y}-\overline{r}^{(10)}\overline{x}^{(10)}\right) \tag{4.25}$$

biçiminde elde edilir.

(4.25) eşitliğinde önerilen çarpımsal tahmin edici ailesinin (4.17) eşitliğinde önerilen oransal tahmin edici ailesine eşit olduğu açıkça görülmektedir. Önerilen tahmin edici ailelerinin eşitliğinden dolayı

$$V(y_{CK10})=V(y_{CK11}) \tag{4.26}$$

yazılabilir. Ayrıca Koyuncu ve Kadılar [29] tarafından (2.61) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesi

$$\delta=\frac{\theta\overline{X}}{\theta\overline{X}+\varepsilon}$$

olmak üzere fark yöntemi ile birinci dereceden yaklaşımını ele alarak,

$$\eta_1=k_1\overline{Y}\left(1+\vartheta_0\right)\left[1+\alpha\delta\vartheta_1\right]^{-t}$$

ya da

$$\eta_1\cong k_1\overline{Y}\left[1-t\alpha\delta\vartheta_1+\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\delta^2\vartheta_1^2+\vartheta_0-t\alpha\delta\vartheta_0\vartheta_1\right]$$

şeklinde yazılabilir. η_1 tahmin edici ailesinin yanı

$$Yan(\eta_1)=k_1\overline{Y}\gamma\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\delta^2\frac{S_x^2}{\overline{X}^2}-t\alpha\delta\frac{S_{yx}}{\overline{X}\overline{Y}}\right)+\left(k_1-1\right)\overline{Y} \tag{4.27}$$

biçiminde elde etmişlerdir. Burada, S_{yx} ve $\bar{Y}$ 'nin yansız tahmin edicileri sırasıyla s_{yx} ve $\bar{y}$ olduğu bilinmektedir. (4.27) eşitliğinde S_{yx} ve $\bar{Y}$ yerine sırasıyla yansız tahmin edicileri s_{yx} ve $\bar{y}$ yazılarak, η_1 tahmin edicisinin yanı

$$Yan(\eta_1) = k_1 \bar{y}\gamma\left(\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - t\alpha\delta\frac{s_{yx}}{\bar{X}\bar{y}}\right) + (k_1 - 1)\bar{y}\ . \tag{4.28}$$

biçiminde olmaktadır.

Bu durumda (2.61) eşitliğinde verilen tahmin edici ailesinin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı hali

$$y_{CK12} = k^{\circ}\bar{y}\left[\frac{\theta\bar{X}+\varepsilon}{\alpha(\theta\bar{x}+\varepsilon)+(1-\alpha)(\theta\bar{X}+\varepsilon)}\right]^t$$

$$-k^{\circ}\bar{y}\gamma\left(\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - t\alpha\delta\frac{s_{yx}}{\bar{X}\bar{y}}\right) - (k^{\circ}-1)\bar{y} \tag{4.29}$$

şeklinde olur.

(4.29) eşitliğinde önerilen tahmin edici ailesinin varyansını bulmak için fark yöntemi ile birinci dereceden yaklaşımı kullanılarak

$$y_{CK12} \cong k^{\circ}\bar{Y}\left[1 - t\alpha\delta\vartheta_1 + \frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2\vartheta_1^2 + \vartheta_0 - t\alpha\delta\vartheta_0\vartheta_1\right]$$

$$-k^{\circ}\bar{Y}(1+\vartheta_0)\gamma\left(\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2C_x^2 - t\alpha\delta\frac{S_{yx}(1+\vartheta_4)}{\bar{X}\bar{Y}(1+\vartheta_0)}\right)$$

$$-(k^{\circ}-1)\bar{Y}(1+\vartheta_0) \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir. Önerilen tahmin edici ailesinden kitle ortalaması $(\bar{Y})$ çıkarılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$y_{CK12} - \bar{Y} \cong k^{\circ}\bar{Y}\left[-t\alpha\delta\vartheta_1 + \frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2\vartheta_1^2 + \vartheta_0 - t\alpha\delta\vartheta_0\vartheta_1\right]$$

$$-k^{\circ}\bar{Y}\gamma\left(\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2C_x^2(1+\vartheta_0) - t\alpha\delta C_{yx}(1+\vartheta_4)\right) \ -(k^{\circ}-1)\bar{Y}\vartheta_0 \tag{4.31}$$

ifadesi bulunur. (4.31) eşitliğinin karesi ve beklenen değeri alınarak, önerilen tahmin edici ailesi y_{CK12} nin varyansı

$$V\left(y_{CK12}\right)\cong \bar{Y}^2\gamma\left\{\left(k^{\circ 2}t^2\alpha^2\delta^2C_x^2-2k^{\circ}t\alpha\delta C_{yx}+C_y^2\right)-\gamma\left[k^{\circ}t\alpha\delta\left(\frac{t+1}{2}\alpha\delta C_x^2-C_{yx}\right)\right]^2\right.$$

$$\left.-\gamma k^{\circ}t\alpha\delta\left[2\frac{C_{yx}}{\rho}\left(k^{\circ}t\alpha\delta C_x\lambda_{12}-C_y\lambda_{21}\right)-\left(t+1\right)\alpha\delta C_x^2\left(k^{\circ}t\alpha\delta C_{yx}-C_y^2\right)\right]\right\} \tag{4.32}$$

olarak elde edilir. Burada γ^3 terimi yaklaşık olarak sıfıra eşit olduğundan bu terim ihmal edilmiştir.

(4.32) eşitliğinde verilen varyansı minimum yapabilmek için k°'nın optimal değeri

$$k_{opt}^{\circ}=\frac{\Gamma}{\Lambda} \tag{4.33}$$

şeklinde bulunmuştur. Burada

$$\Gamma=t\alpha\delta\left[C_{yx}\left(1-\frac{\gamma C_y\lambda_{21}}{\rho}\right)+\frac{\left(t+1\right)}{2}\gamma\alpha\delta C_x^2C_y^2\right]$$

ve

$$\Lambda=t^2\alpha^2\delta^2\left[C_x^2+\gamma\left(C_{yx}\left(\left(t+1\right)\alpha\delta C_x^2-2\frac{C_x\lambda_{12}}{\rho}\right)-\left(\frac{\left(t+1\right)}{2}\alpha\delta C_x^2-C_{yx}\right)^2\right)\right]$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.32) eşitliğindeki k° değeri yerine (4.33) eşitliğindeki k_{opt}° optimal değeri yazıldığında, minimum varyans

$$V_{min}\left(y_{CK12}\right)\cong \bar{Y}^2\gamma\left[C_y^2-\frac{\Gamma^2}{\Lambda}\right] \tag{4.34}$$

şeklinde elde edilir. Oransal ve çarpımsal tahmin edici aileleri için varyans eşitliklerini bulmak için (4.32) eşitliği kullanıldığında

$$V\left(y_{KC12i}\right)\cong \bar{Y}^2\gamma\left\{\left(k^{\bullet 2}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}^2C_x^2-2k^{\bullet}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_{yx}+C_y^2\right)-\gamma k^{\bullet 2}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}^2\left(\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_x^2-C_{yx}\right)^2\right.$$

$$-2\gamma k^{\bullet}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}\left[\frac{C_{yx}}{\rho}\left(k^{\bullet}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_x\lambda_{12}-C_y\lambda_{21}\right)-\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_x^2\left(k^{\bullet}\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_{yx}-C_y^2\right)\right],$$

$i=1,3,5,\ldots,21$ (4.35)

ve

$$V\left(y_{CK12j}\right)\cong\bar{Y}^2\gamma\left\{\left(k^{\ddagger 2}\delta_{\frac{j}{2}}^2C_x^2+2k^{\ddagger}\delta_{\frac{j}{2}}C_{yx}+C_y^2\right)-\gamma k^{\ddagger 2}\delta_{\frac{j}{2}}^2C_{yx}^2\right.$$

$$\left.-2\gamma k^{\ddagger}\delta_{\frac{j}{2}}\frac{C_{yx}}{\rho}\left(k^{\ddagger}\delta_{\frac{j}{2}}C_x\lambda_{12}+C_y\lambda_{21}\right)\right\},\ j=2,4,\ldots,20 \quad (4.36)$$

eşitlikleri hesaplanır. Oransal ve çarpımsal tahmin edici aileleri için $k^{\bullet}$ ve $k^{\ddagger}$'nın optimal değerleri

$$k_{opt}^{\bullet}=\frac{\delta_{\frac{(i+1)}{2}}\left\{C_{yx}+\gamma\left(C_x^2C_y^2-C_{yx}\frac{C_y\lambda_{21}}{\rho}\right)\right\}}{\delta_{\frac{(i+1)}{2}}^2\left\{C_x^2-\gamma\left(\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_x^2-C_{yx}\right)^2+2\gamma C_{yx}C_x\left(\frac{\lambda_{12}}{\rho}-\delta_{\frac{(i+1)}{2}}C_x\right)\right\}}$$

$$=\frac{\Gamma^{\bullet}}{\Lambda^{\bullet}}$$

ve

$$k_{opt}^{\ddagger}=\frac{\delta_{\frac{j}{2}}\left\{C_{yx}\left(-1+\gamma\frac{C_y\lambda_{21}}{\rho}\right)\right\}}{\delta_{\frac{j}{2}}^2\left\{C_x^2-\gamma C_{yx}\left(C_{yx}+2\frac{C_x\lambda_{12}}{\rho}\right)\right\}}$$

$$=\frac{\Gamma^{\ddagger}}{\Lambda^{\ddagger}}\ .$$

şeklinde elde edilir. (4.35) ve (4.36) eşitliklerindeki $k^{\bullet}$ ve $k^{\ddagger}$ değerleri yerine sırasıyla $k_{opt}^{\bullet}$ ve $k_{opt}^{\ddagger}$ optimal değerleri yazılırsa, minimum varyanslar

$$V_{min}\left(y_{CK12i}\right)\cong\bar{Y}^2\gamma\left[C_y^2-\frac{\Gamma^{\bullet 2}}{\Lambda^{\bullet}}\right],\ i=1,3,5,\ldots,19 \quad (4.37)$$

ve

$$V_{min}\left(y_{CK12j}\right) \cong \bar{Y}^2 \gamma \left[C_y^2 - \frac{\Gamma^{\ddagger 2}}{\Lambda^{\ddagger}} \right],\ j = 2,4,\ldots,20 \tag{4.38}$$

biçiminde elde edilir.

4.2.1. Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Tahmin Edici Ailelerinin Etkinlik Karşılaştırmaları

Bu alt bölümde (2.54) ve (2.61) eşitliklerinde verilen tahmin ediciler ile önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edici ailesinin (4.21) eşitliğinde elde edilen varyansları ile Khoshnevisan ve diğerleri [36] tarafından önerilen oransal tahmin edicilerin (2.58) eşitliğinde verilen HKO değerleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar

$i = 1,3,5,7,\ldots,19$ için

$$\bar{R}^{(10)2} S_{x^{(10)}}^2 - R^2 \delta_{(i+1)/2}^2 S_x^2 - 2\left(\bar{R}^{(10)} S_{yx^{(10)}} - R\delta_{(i+1)/2} S_{yx}\right) < 0 \tag{4.39}$$

koşulları altında

$V\left(y_{CK10}\right) < HKO\left(T_{1i}\right)$

biçiminde olmaktadır.

İkinci olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı çarpımsal tahmin edici ailesinin (4.22) eşitliğinde elde edilen varyansları ile Khoshnevisan ve diğerleri [36] tarafından önerilen çarpımsal tahmin edicilerin (2.60) eşitliğinde verilen HKO değerleri karşılaştırıldığında

$j = 2,4,6,8,\ldots,20$ için

$$\bar{R}^{(10)2} S_{x^{(10)}}^2 - R^2 \delta_{(j/2)}^2 S_x^2 - 2\left(\bar{R}^{(10)} S_{yx^{(10)}} + R\delta_{(j/2)} S_{yx}\right) < 0 \tag{4.40}$$

koşulları altında,

$V\left(y_{CK11}\right) < HKO\left(T_{1j}\right)$

şeklinde sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailesinin (4.34) eşitliğinde elde edilen minimum varyansı ile Koyuncu ve Kadılar [29] tarafından önerilen tahmin edici ailesinin (2.63) eşitliğinde verilen minimum HKO eşitliği karşılaştırılması ile

$$\gamma\left[C_y^2-\frac{\Gamma^2}{\Lambda}\right]-\left[1-\frac{\mathrm{M}^2}{4\mathrm{P}}\right]<0 \tag{4.41}$$

koşulu altında,

$$V_{\min}\left(y_{CK12}\right)<HKO_{\min}\left(\eta_1\right)$$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

Dördüncü olarak, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailesinin (4.35) eşitliğindeki oransal tahmin ediciler için elde edilen minimum varyansları ile Koyuncu ve Kadılar [29] tarafından önerilen oransal tahmin ediciler için (2.66) eşitliğinde elde edilen $HKO_{\min}\left(\eta_{1i}\right)$ ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen koşullar

$i=1,3,5,\ldots,21$ için

$$\gamma\left[C_y^2-\frac{\Gamma^{\bullet 2}}{\Lambda^{\bullet}}\right]-\left[1-\frac{\mathrm{M}^{\oplus 2}}{\mathrm{P}^{\oplus}}\right]<0 \tag{4.42}$$

olmak üzere

$$V_{\min}\left(y_{CK12i}\right)<HKO_{\min}\left(\eta_{1i}\right)$$

ile verilmektedir.

Son olarak ise önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailesinin (4.36) eşitliğindeki çarpımsal tahmin ediciler için elde edilen minimum varyansı ile Koyuncu ve Kadılar [29] tarafından önerilen çarpımsal tahmin ediciler için (2.67) eşitliğinde elde edilen $HKO_{\min}\left(\eta_{1j}\right)$ ile karşılaştırılarak

$j=2,4,6,\ldots,22$ için

$$\gamma\left[C_y^2-\frac{\Gamma^{\ddagger 2}}{\Lambda^{\ddagger}}\right]-\left[1-\frac{\mathrm{M}^{\odot 2}}{\mathrm{P}^{\odot}}\right]<0, \tag{4.43}$$

koşulları altında,

$$V_{\min}\left(y_{CK12j}\right) < HKO_{\min}\left(\eta_{1j}\right)$$

sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuç olarak, (4.39)-(4.43) koşulları altında, önerdiğimiz Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin T_1 ve η_1 tahmin edici ailelerinden daha etkin olduğu görülmektedir.

5. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE ORTALAMASI İÇİN ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER

5.1. Tabakalı Rastgele Örnekleme Yönteminde Kitle Ortalamasının Tahmini için Önerilen Oransal Tahmin Ediciler

TRÖ yönteminde Kadılar ve Çıngı [40, 38] tarafından önerilen (3.4)-(3.7) ve (3.10) eşitliklerinde verilen tahmin edicilerin (3.8) ve (3.11) eşitliklerindeki yanlarında S_{yxh} ve $\bar{Y}_{st}=\bar{Y}$ yerine sırasıyla yansız tahmin edicileri s_{yxh} ve $\bar{y}_{st}$ yazılarak y_{KC18}, y_{KC19}, y_{KC20}, y_{KC21} ve y_{KC22} tahmin edicilerinin yanları

$$Yan(y_{KCi})=\frac{1}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{X_{st\beta}}S_{xh}^2-s_{yxh}\right)\right],\qquad \begin{aligned}&i=18,19,20,21\\&\beta=SD,SK,US1,US2\end{aligned} \tag{5.1}$$

ve

$$Yan(y_{KC22})=(k_2-1)\,\bar{y}_{st}+\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}}S_{xh}^2-k_2s_{yxh}\right)\right] \tag{5.2}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Bu durumda (3.4)-(3.10) eşitliklerinde verilen tahmin edicilerin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı hali

$$y_{CK13}=\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}+C_{xst}}X_{stSD}-\frac{1}{X_{stSD}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{X_{stSD}}S_{xh}^2-s_{yxh}\right)\right], \tag{5.3}$$

$$y_{CK14}=\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}+\beta_{2st}(x)}X_{stSK}-\frac{1}{X_{stSK}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{X_{stSK}}S_{xh}^2-s_{yxh}\right)\right], \tag{5.4}$$

$$y_{CK15}=\frac{\bar{y}_{st}}{\left(\bar{x}\beta_2(x)\right)_{st}+C_{xst}}X_{stUS1}-\frac{1}{X_{stUS1}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{X_{stUS1}}S_{xh}^2-s_{yxh}\right)\right], \tag{5.5}$$

$$y_{CK16}=\frac{\bar{y}_{st}}{\left(\bar{x}C_x\right)_{st}+\beta_{2st}(x)}X_{stUS2}-\frac{1}{X_{stUS2}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{X_{stUS2}}S_{xh}^2-s_{yxh}\right)\right], \tag{5.6}$$

ve

$$y_{CK17}=k^{\Delta}\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X}-\left(k^{\Delta}-1\right)\bar{y}_{st}-\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}}S_{xh}^2-k^{\Delta}s_{yxh}\right)\right] \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Önerilen tahmin edicilerin varyansını hesaplamak için

$E(\vartheta_5)=E(\vartheta_6)=E(\vartheta_7)=0$,

$E(\vartheta_5^2)=V_{0,2}$, $E(\vartheta_6^2)=V_{2,0}$, $E(\vartheta_7^2)=D_{0,0}$,

$E(\vartheta_5\vartheta_6)=V_{1,1}$, $E(\vartheta_5\vartheta_7)=D_{0,1}$, $E(\vartheta_6\vartheta_7)=D_{1,0}$

olmak üzere

$\bar{y}_{st}=\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)$, $\bar{x}_{st}=\bar{X}\left(1+\vartheta_6\right)$ ve $\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h s_{yxh}=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{yxh}\left(1+\vartheta_7\right)$

eşitlikleri yazılabilir.

$\phi=\frac{\bar{X}_{st}}{X_{stSD}}$, $\varphi=\frac{\bar{X}_{st}}{X_{stSK}}$, $\omega=\frac{\left(\bar{X}\beta_2\left(x\right)\right)_{st}}{X_{stUS1}}$ ve $\varsigma=\frac{\left(\bar{X}C_x\right)_{st}}{X_{stUS2}}$

olmak üzere (5.3)-(5.7) eşitliklerinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin fark yöntemi ile birinci dereceden yaklaşımı ele alınarak,

$$\begin{aligned}y_{CK13}&=\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\phi\vartheta_6\right)^{-1}\\&\quad-\frac{1}{X_{stSD}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)}{X_{stSD}}S_{xh}^2-S_{yxh}\left(1+\vartheta_7\right)\right)\right],\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}y_{CK14}&=\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\varphi\vartheta_6\right)^{-1}\\&\quad-\frac{1}{X_{stSK}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)}{X_{stSK}}S_{xh}^2-S_{yxh}(1+\vartheta_7)\right)\right],\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}y_{CK15}&=\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\omega\vartheta_6\right)^{-1}\\&\quad-\frac{1}{X_{stUS1}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)}{X_{stUS1}}S_{xh}^2-S_{yxh}(1+\vartheta_7)\right)\right],\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$y_{CK16}=\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\varsigma\vartheta_6\right)^{-1}$$

$$-\frac{1}{X_{stUS2}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)}{X_{stUS2}}S_{xh}^2-S_{yxh}(1+\vartheta_7)\right)\right], \tag{5.11}$$

ve

$$y_{CK17}=k^{\Delta}\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\vartheta_6\right)^{-1}-\left(k^{\Delta}-1\right)\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)$$

$$-\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(R\left(1+\vartheta_5\right)S_{xh}^2-k^{\Delta}S_{yxh}\left(1+\vartheta_7\right)\right)\right] \tag{5.12}$$

olarak elde edilmiştir. Önerilen tahmin edicilerden kitle ortalaması $\left(\bar{Y}\right)$ çıkarılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$y_{CKj}-\bar{Y}=\bar{Y}\left(\vartheta_5-\Omega\vartheta_6-\Omega\vartheta_5\vartheta_6+\Omega^2\vartheta_6^2-...\right)$$

$$-\frac{1}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)}{X_{st\beta}}S_{xh}^2-S_{yxh}\left(1+\vartheta_7\right)\right)\right], \quad \begin{array}{l}\Omega=\phi,\varphi,\omega,\varsigma,\\ j=13,14,15,16,\\ \beta=SD,SK,US1,US2\end{array} \tag{5.13}$$

ve

$$y_{CK17}-\bar{Y}=k^{\Delta}\bar{Y}\left(\vartheta_5-\vartheta_6-\vartheta_5\vartheta_6+\vartheta_6^2+...\right)-\left(k^{\Delta}-1\right)\bar{Y}\vartheta_5$$

$$-\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(R\left(1+\vartheta_5\right)S_{xh}^2-k^{\Delta}S_{yxh}\left(1+\vartheta_7\right)\right)\right] \tag{5.14}$$

elde edilmiştir.

(5.13) ve (5.14) eşitliklerinin karesi ve beklenen değeri alınarak, önerilen tahmin ediciler $y_{CK13}, y_{CK14}, y_{CK15}, y_{CK16}$ ve y_{CK17}'in varyansları

$$V(y_{CKj})\cong\bar{Y}^2A_{\Omega}+\frac{1}{X_{st\beta}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}S_{xh}^2}{X_{st\beta}}-S_{yxh}\right)\right]^2$$

$$-\frac{2\bar{Y}}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{Y}S_{xh}^2}{X_{st\beta}}A_{\Omega}-S_{yxh}B_{\Omega}\right)\right], \quad \begin{array}{l}j=13,14,15,16,\\ \beta=SD,SK,US1,US2\end{array} \tag{5.15}$$

ve

$$V(y_{CK17})\cong\bar{Y}^2A_k+\frac{1}{\bar{X}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(RS_{xh}^2-k^{\Delta}S_{yxh}\right)\right]^2,$$

$$-2R\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(RS_{xh}^2A_k-k^{\Delta}S_{yxh}B_k+k^{\Delta}\left(k^{\Delta}-1\right)V_{2,0}\left(RS_{xh}^2-k^{\Delta}S_{yxh}\right)\right)\right] \qquad (5.16)$$

olarak bulunmuştur. Burada

$$A_{\Omega}=V_{0,2}+\Omega^2V_{2,0}-2\Omega V_{1,1},$$

$$A_k=V_{0,2}+k^{\Delta 2}V_{2,0}-2k^{\Delta}V_{1,1}$$

$$B_{\Omega}=-\Omega V_{1,1}+D_{0,1}-\Omega D_{1,0}+\Omega^2V_{2,0},\quad \Omega=\phi,\ \varphi,\ \omega,\ \varsigma$$

ve

$$B_k=-k^{\Delta}V_{1,1}+D_{0,1}-k^{\Delta}D_{1,0}+k^{\Delta 2}V_{2,0}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(5.16) eşitliğinde verilen $V(y_{CK17})$ varyansı minimize etmek için

$$\Delta=\bar{Y}^2V_{1,1}+\frac{1}{\bar{X}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^4\gamma_h^2RS_{xh}^2S_{yxh}+\sum_{h=1}^{L}\sum_{t=1}^{L}W_h^2\gamma_hW_t^2\gamma_tR\left(S_{xh}^2S_{yxt}+S_{xt}^2S_{yxh}\right)\right]$$

$$+R\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(RS_{xh}^2\left(-2V_{1,1}+V_{2,0}\right)-S_{yxh}D_{0,1}\right)\right]$$

ve

$$\Pi=\bar{Y}^2V_{2,0}+\frac{1}{\bar{X}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yxh}\right]^2$$

$$+2R\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yxh}\left(-D_{1,0}-V_{1,1}+V_{2,0}\right)$$

ile gösterilmek üzere k^{Δ} ‘nin optimal değeri

$$k_{opt}^{\Delta}=\frac{\Delta}{\Pi}$$

olarak elde edilmiştir. (5.16) eşitliğinde k^{Δ} yerine optimal değeri k_{opt}^{Δ} kullanılarak, minimum varyans

$$\mathrm{H}=V_{0,2}\left[\bar{Y}^2-2R^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{xh}^2\right]+\frac{R^2}{\bar{X}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{xh}^2\right]^2$$

olmak üzere

$$V_{\min}(y_{CK17}) \cong \mathrm{H} - \frac{\Delta^2}{\Pi} \tag{5.17}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

5.1.1. Tabakalı Rastgele Örnekleme Yönteminde Oransal Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırmaları

Bu alt bölümde (3.4)-(3.7) ve (3.10) eşitliklerinde verilen tahmin ediciler ile önerilen Hartley-Ross tahmin edicisi tipi tahmin ediciler karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, Kadılar ve Çıngı [40] tarafından elde edilen tahmin edicilerin (3.9) eşitliğinde verilen HKO eşitlikleri ile önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerin (5.15) eşitliğinde elde edilen varyansları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki eşitsizlik ile verilmiştir:

$$-\frac{2\bar{Y}}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{\bar{Y} S_{xh}^2}{X_{st\beta}} A_\Omega - S_{yxh} B_\Omega \right)\right] + \frac{1}{X_{st\beta}^2}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{\bar{Y} S_{xh}^2}{X_{st\beta}} - S_{yxh} \right)\right]^2 < 0, \qquad \begin{array}{l} j = 13,14,15,16, \\ \beta = SD, SK, US1, US2 \end{array} \tag{5.18}$$

koşulu altında,

$V(y_{CKi}) < HKO(y_{KCj}),\ \ i = 13,14,15,16,$ ve $j = 18,19,20,21$

eşitsizlikleri sağlanmıştır.

İkinci olarak, Kadılar ve Çıngı [38] tarafından verilen tahmin edicinin (3.12) eşitliğinde elde edilen HKO eşitliği ile (5.16) eşitliğinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicinin varyansı karşılaştırıldığında

$$\bar{Y}^2\left(A_\theta - (k_2 - 1)^2\right) - k_2^2 A_k + \frac{1}{\bar{X}^2}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R S_{xh}^2 - k^\Delta S_{yxh} \right)\right]^2 - 2R\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R S_{xh}^2 A_k - k^\Delta S_{yxh} B_k + k^\Delta \left(k^\Delta - 1\right) V_{2,0} \left(R S_{xh}^2 - k^\Delta S_{yxh} \right)\right)\right] < 0 \tag{5.19}$$

koşulu altında,

$V(y_{CK17}) < HKO(y_{KC19})$

sonucu elde edilmiştir.

Son olarak, ikinci karşılaştırılan tahmin edicilerin (3.13) eşitliğinde verilen minimum HKO eşitlikleri ve (5.17) eşitliğinde elde edilen varyansları karşılaştırılmıştır:

$$\Gamma - \frac{\Delta}{\Pi} - \bar{\mathrm{Y}}^2 \frac{A_{st}}{\bar{\mathrm{Y}}^2 + A_{st}} < 0 \tag{5.20}$$

koşulu altında

$V_{\min}(\mathrm{y}_{CK17}) < \mathrm{HKO}_{\min}(y_{KC22})$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

Sonuç olarak, (5.18)-(5.20) koşulları altında önerdiğimiz Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicilerin $y_{KCj}, j = 18,...,22$ oransal tahmin edicilerinden daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

5.2. Tabakalı Rastgele Örnekleme Yönteminde Kitle Ortalamasının Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Aileleri

TRÖ yönteminde Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından önerilen (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde verilen tahmin edici ailelerin (3.18) ve (3.19) eşitliklerindeki yanlarında S_{yxh} ve $\bar{Y}_{st} = \bar{Y}$ yerine sırasıyla yansız tahmin edicileri sırasıyla s_{yxh} ve $\bar{y}_{st}$ yazılarak ilgili tahmin edicilerin yanları

$$Yan(\eta_2) = \bar{y}_{st} \left[\frac{t(t+1)}{2} \alpha^2 \tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}} \right] \tag{5.21}$$

ve

$$Yan(\eta_3) = k_3 \bar{y}_{st} \left[\frac{t(t+1)}{2} \alpha^2 \tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}} \right] + (k_3 - 1)\bar{y}_{st} \tag{5.22}$$

biçiminde elde edilmiştir. (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde verilen tahmin edici ailesinin Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı hali

$$y_{CK18} = \bar{y}_{st}\left[\frac{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}{\alpha\left(\theta_{st}\bar{x}_{st}+\varepsilon_{st}\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}\right)}\right]^{t}$$

$$-\bar{y}_{st}\left[\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^{2}\tau^{2}V_{2,0}-t\alpha\tau\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right] \quad (5.23)$$

ve

$$y_{CK19} = k^{\nabla}\bar{y}_{st}\left[\frac{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}{\alpha\left(\theta_{st}\bar{x}_{st}+\varepsilon_{st}\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}\right)}\right]^{t}-\left(k^{\nabla}-1\right)\bar{y}_{st}$$

$$-k^{\nabla}\bar{y}_{st}\left[\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^{2}\tau^{2}V_{2,0}-t\alpha\tau\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right] \quad (5.24)$$

şeklinde elde edilmiştir.

(5.23) ve (5.24) eşitliklerinde önerilen tahmin edici ailelerinin varyansını bulmak için fark yöntemi ile birinci dereceden yaklaşımı ele alınarak

$$y_{CK18} = \bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\alpha\tau\vartheta_6\right)^{-t}-\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^{2}\tau^{2}V_{2,0}\right.$$

$$\left.-t\alpha\tau V_{1,1}\left(1+\vartheta_7\right)\left(1+\vartheta_5\right)^{-1}\right) \quad (5.25)$$

ve

$$y_{CK19} = k^{\nabla}\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)\left(1+\alpha\tau\vartheta_6\right)^{-t}-\left(k^{\nabla}-1\right)\bar{Y}\left(1+\vartheta_5\right)$$

$$-\bar{Y}k^{\nabla}\left(1+\vartheta_5\right)\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^{2}\tau^{2}V_{2,0}-t\alpha\tau V_{1,1}\left(1+\vartheta_7\right)\left(1+\vartheta_5\right)^{-1}\right) \quad (5.26)$$

eşitlikleri elde edilmiştir. $\left|\alpha\tau\vartheta_6\right|<1$ ve $\left|\vartheta_5\right|<1$ olduğu varsayımları altında $\left(1+\alpha\tau\vartheta_6\right)^{-t}$ ve $\left(1+\vartheta_0\right)^{-1}$ ifadelerinin Taylor seri açılımları yapılırsa önerilen tahmin edici ailelerinden kitle ortalamasını $\left(\bar{Y}\right)$ çıkartarak gerekli düzenlemeler ile

$$y_{CK18}-\bar{Y}\cong\bar{Y}\left(\vartheta_5-t\alpha\tau\vartheta_6-t\alpha\tau\vartheta_5\vartheta_6+\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2\vartheta_6^2\right)$$

$$-\bar{Y}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2V_{2,0}\left(1+\vartheta_5\right)-t\alpha\tau V_{1,1}\left(1+\vartheta_7\right)\right) \qquad (5.27)$$

ve

$$y_{CK19}-\bar{Y}\cong k^{\nabla}\bar{Y}\left(\vartheta_5-t\alpha\tau\vartheta_6-t\alpha\tau\vartheta_5\vartheta_6+\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2\vartheta_6^2\right)-\left(k^{\nabla}-1\right)\bar{Y}\vartheta_5$$

$$-k^{\nabla}\bar{Y}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2V_{2,0}\left(1+\vartheta_5\right)-t\alpha\tau V_{1,1}\left(1+\vartheta_7\right)\right) \qquad (5.28)$$

biçiminde bulunmuştur.

(5.27) ve (5.28) eşitliklerinin karesi ve beklenen değeri alınarak, önerilen tahmin edici ailesi y_{CK18} ve y_{CK19}'un varyansları

$$V\left(y_{CK18}\right)\cong\bar{Y}^2\left\{\left(V_{0,2}-2t\alpha\tau V_{1,1}+t^2\alpha^2\tau^2V_{2,0}\right)-\left[t\alpha\tau\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]^2\right.$$

$$\left.-t\alpha\tau\left[2V_{1,1}\left(t\alpha\tau D_{1,0}-D_{0,1}\right)-\left(t+1\right)\alpha\tau V_{2,0}\left(t\alpha\tau V_{1,1}-V_{0,2}\right)\right]\right\} \qquad (5.29)$$

ve

$$V\left(y_{CK19}\right)\cong\bar{Y}^2\left\{A+\left[k^{\nabla}t\alpha\tau\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]^2-2\left(B-k^{\nabla}t\alpha\tau V_{1,1}D_{0,1}\right)\right.$$

$$\left.-k^{\nabla}t\left(t+1\right)\alpha^2\tau^2V_{2,0}\left[A+k^{\nabla}t\alpha^2\tau^2V_{0,2}\left(\frac{t+1}{2}-k^{\nabla}t\right)\right]\right\} \qquad (5.30)$$

biçiminde elde edilmiştir. Burada

$$A=\left(V_{0,2}-2k^{\nabla}t\alpha\tau V_{1,1}+k^{\nabla 2}t^2\alpha^2\tau^2V_{2,0}\right)$$

ve

$$B=k^{\nabla 2}t^2\alpha^2\tau^2V_{1,1}\left(\left(D_{1,0}+V_{1,1}\right)-\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{0,2}\right)$$

olarak dikkate alınmıştır.

Ayrıca (5.29) ve (5.30) eşitliklerinde γ_h^3 terimi yaklaşık olarak sıfıra eşit olduğundan bu terim ihmal edilmiştir.

(5.30) eşitliğinde elde edilen varyansı k^{∇} terimi açısından küçültmek için k^{∇}'nin optimal değeri

$$\Upsilon = t\alpha\tau\left[V_{1,1}\left(1-D_{0,1}\right)+\frac{(t+1)}{2}\alpha\tau V_{2,0}V_{0,2}\right]$$

ve

$$\Psi = t^2\alpha^2\tau^2\left[V_{2,0}+\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0}-V_{1,1}\right)^2+\left(2V_{1,1}+(t+1)\alpha\tau V_{2,0}\right)\left(V_{1,1}-\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{0,2}\right)\right.$$
$$\left.+2V_{1,1}\left(D_{1,0}+(t+1)\alpha\tau V_{2,0}\right)\right]$$

olmak üzere

$$k_{opt}^{\nabla}=\frac{\Upsilon}{\Psi} \tag{5.31}$$

şeklinde elde edilmiştir. (5.30) eşitliğinde (5.31) eşitliği yerine yazıldığında y_{CK19} tahmin edici ailesinin minimum varyansı

$$V_{\min}(y_{CK19})\cong\bar{Y}^2\left[V_{0,2}-\frac{\Upsilon^2}{\Psi}\right] \tag{5.32}$$

olarak bulunmuştur.

y_{CK18} ve y_{CK19} tahmin edici ailelerinin Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2' de verilen oransal tahmin edicileri için varyans eşitlikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}V_R(y_{CK18i})\cong\bar{Y}^2\Big\{&\left(V_{0,2}-2\tau_{(i+1)/2}V_{1,1}+\tau_{(i+1)/2}^2V_{2,0}\right)\\&-2\tau_{(i+1)/2}\left[V_{1,1}\left(\tau_{(i+1)/2}D_{1,0}-D_{0,1}\right)-\tau_{(i+1)/2}V_{2,0}\left(\tau_{(i+1)/2}V_{1,1}-V_{0,2}\right)\right]\\&-\left[\tau_{(i+1)/2}\left(\tau_{(i+1)/2}V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]^2\Big\},\qquad i=1,3,5,\ldots,19\end{aligned} \tag{5.33}$$

ve

$$V_R(y_{CK19i}) \cong \bar{Y}^2 \left\{ A^\Diamond + \left[k^\Diamond \tau_{(i+1)/2} \left(\tau_{(i+1)/2} V_{2,0} - V_{1,1} \right) \right]^2 \right.$$
$$-2\left(B^\Diamond - k^\Diamond \tau_{(i+1)/2} V_{1,1} D_{0,1} \right) \qquad (5.34)$$
$$\left. -2k^\Diamond \tau_{(i+1)/2}^2 V_{2,0} \left[A^\Diamond - k^\Diamond \tau_{(i+1)/2}^2 V_{0,2} \left(1 - k^\Diamond \right) \right] \right\},\ i = 1,3,5,...,19$$

biçiminde elde edilmiştir. Burada

$$A^\Diamond = \left(V_{0,2} - 2k^\Diamond \tau_{(i+1)/2} V_{1,1} + k^{\Diamond 2} \tau_{(i+1)/2}^2 V_{2,0} \right)$$

ve

$$B^\Diamond = k^{\Diamond 2} \tau_{(i+1)/2}^2 V_{1,1} \left(D_{1,0} + V_{1,1} - \tau_{(i+1)/2} V_{0,2} \right)$$

olmaktadır.

(5.34) eşitliğinde elde edilen varyansdaki $k^\Diamond$ teriminin optimal değeri

$$\Upsilon^\Diamond = \tau_{(i+1)/2} \left[V_{1,1} \left(1 - D_{0,1} \right) + \tau_{(i+1)/2} V_{2,0} V_{0,2} \right]$$

ve

$$\Psi^\Diamond = \tau_{(i+1)/2}^2 \left[V_{2,0} + \left(\tau_{(i+1)/2} V_{2,0} - V_{1,1} \right)^2 + 2\left(V_{1,1} + \tau_{(i+1)/2} V_{2,0} \right)\left(V_{1,1} - \tau_{(i+1)/2} V_{0,2} \right) \right.$$
$$\left. + 2V_{1,1} \left(D_{1,0} + 2\tau_{(i+1)/2} V_{2,0} \right) \right]$$

olmak üzere

$$k_{opt}^\Diamond = \frac{\Upsilon^\Diamond}{\Psi^\Diamond} \qquad (5.35)$$

olarak elde edilmiştir. (5.35) eşitliğinde elde edilen $k_{opt}^\Diamond$ değeri (5.34) eşitliğinde yerine yazıldığında oransal tahmin ediciler için y_{CK20} tahmin edici ailesinin minimum varyansı

$$V_{R\min}(y_{CK19i}) \cong \bar{Y}^2 \left[V_{0,2} - \frac{\Upsilon^{\Diamond 2}}{\Psi^\Diamond} \right],\ i = 1,3,...,19 \qquad (5.36)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Benzer şekilde, y_{CK18} ve y_{CK19} tahmin edici ailelerinin Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2' de verilen çarpımsal tahmin edicileri için varyans eşitlikleri sırasıyla

$$V_p(y_{CK18j}) \cong \bar{Y}^2 \Big(V_{0,2} + 2\tau_{(j/2)}V_{1,1} + \tau_{(j/2)}^2 V_{2,0}\Big) - \tau_{(j/2)}^2 V_{1,1}^2 \\ - 2\tau_{(j/2)}V_{1,1}\Big(\tau_{(j/2)}D_{1,0} + D_{0,1}\Big)\Big\}, \quad j = 2,4,...,20 \tag{5.37}$$

ve

$$V_p(y_{CK19j}) \cong \bar{Y}^2 \Big\{A^{\perp} + k^{\perp 2}\tau_{(j/2)}^2 V_{1,1}^2 - 2\Big(B^{\perp} + k^{\perp}\tau_{(j/2)}V_{1,1}D_{0,1}\Big), \quad j = 2,4,...,20 \tag{5.38}$$

biçiminde bulunmuştur.

Burada

$$A^{\perp} = \Big(V_{0,2} - 2k^{\perp}\tau_{(j/2)}V_{1,1} + k^{\perp 2}\tau_{(j/2)}^2 V_{2,0}\Big)$$

ve

$$B^{\perp} = k^{\perp 2}\tau_{(j/2)}^2 V_{1,1}\Big(D_{1,0} + V_{1,1}\Big)$$

olmaktadır.

(5.38) eşitliğinde elde edilen varyanstaki $k^{\perp}$'nın optimal değeri

$$\Upsilon^{\perp} = -\tau_{(j/2)}V_{1,1}\Big(1 - D_{0,1}\Big)$$

ve

$$\Psi^{\perp} = \tau_{(j/2)}^2\Big(V_{2,0} + 3V_{1,1}^2 + 2V_{1,1}D_{1,0}\Big)$$

olmak üzere

$$k_{opt}^{\perp} = \frac{\Upsilon^{\perp}}{\Psi^{\perp}} \tag{5.39}$$

olarak bulunmuştur. (5.39) eşitliğinde elde edilen $k_{opt}^{\perp}$ değeri (5.38) eşitliğinde yerine yazıldığında çarpımsal tahmin ediciler için y_{CK19} tahmin edici ailesinin minimum varyansı

$$V_{p\min}(y_{CK19j}) \cong \bar{Y}^2\left[V_{0,2} - \frac{\Upsilon^{\perp 2}}{\Psi^{\perp}}\right], j = 2,4,...,20 \tag{5.40}$$

şeklinde elde edilmiştir.

5.2.1. Tabakalı Rastgele Örnekleme Yönteminde Tahmin Edici Ailelerinin Etkinlik Karşılaştırmaları

Bu alt bölümde (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde verilen tahmin edici aileleri ile önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından (3.16) eşitliğinde verilen birinci tahmin edici ailesinin HKO eşitlikleri ile (5.23) eşitliğinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı birinci tahmin edici ailesinin elde edilen varyansları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki eşitsizlikler ile verilmiştir:

i) Önerilen birinci tahmin edici ailesinin (5.29) eşitliğindeki varyansı ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından (3.20) eşitliğinde verilen birinci tahmin edici ailesinin HKO eşitliği karşılaştırılmasıyla

$$-t\alpha\tau\left[2V_{1,1}\left(t\alpha\tau D_{1,0}-D_{0,1}\right)-\left(t+1\right)\alpha\tau V_{2,0}\left(t\alpha\tau V_{1,1}-V_{0,2}\right)\right]$$
$$-\left[t\alpha\tau\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]^2<0 \qquad (5.41)$$

koşulu altında,

$V\left(y_{CK18}\right)<HKO(\eta_2)$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

ii) Önerilen birinci tahmin edici ailesinin (5.33) eşitliğindeki oransal tahmin ediciler için elde edilen varyansları ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından verilen birinci tahmin edici ailesinin (3.24) eşitliğindeki oransal tahmin ediciler için elde edilen HKO eşitlikleri karşılaştırıldığında

$$-2\tau_{(i+1)/2}\left[V_{1,1}\left(\tau_{(i+1)/2}D_{1,0}-D_{0,1}\right)-\tau_{(i+1)/2}V_{2,0}\left(\tau_{(i+1)/2}V_{1,1}-V_{0,2}\right)\right]$$
$$-\left[\tau_{(i+1)/2}\left(\tau_{(i+1)/2}V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]^2<0 \qquad (5.42)$$

koşulu altında,

$V_R\left(y_{CK18i}\right)<HKO_R(\eta_{2i}),\ i=1,3,...,19$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

iii) Önerilen birinci tahmin edici ailesinin (5.34) eşitliğindeki çarpımsal tahmin ediciler için elde edilen varyansları ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından verilen birinci tahmin edici ailesinin (3.26) eşitliğindeki çarpımsal tahmin ediciler için elde edilen HKO eşitlikleri karşılaştırıldığında

$$-2\tau_{(j/2)}V_{1,1}\left(\tau_{(j/2)}D_{1,0}+D_{0,1}\right)-\left(\tau_{(j/2)}V_{1,1}\right)^{2}<0 \tag{5.43}$$

koşulu altında,

$$V_p\left(y_{CK18j}\right)<HKO_p(\eta_{2j}),\ j=2,4,...,20$$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

İkinci olarak, Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından (3.17) eşitliğinde önerilen ikinci tahmin edici ailesinin HKO değerleri ile (5.24) eşitliğinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı ikinci tahmin edici ailesinin elde edilen varyansları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki eşitsizlikler ile gösterilmiştir:

i) Önerilen ikinci tahmin edici ailesinin (5.32) eşitliğindeki minimum varyansı ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından (3.23) eşitliğinde verilen ikinci tahmin edici ailesinin minimum HKO eşitliği karşılaştırılmasıyla

$$\left[V_{0,2}-\frac{\Upsilon^2}{\Psi}\right]-\left[1-\frac{\Phi^2}{4\Lambda}\right]<0 \tag{5.44}$$

koşulu altında,

$$V_{\min}(y_{CK19})<\mathrm{HKO}_{\min}(\eta_3)$$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

ii) Önerilen ikinci tahmin edici ailesinin (5.36) eşitliğindeki oransal tahmin ediciler için elde edilen minimum varyansları ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından verilen ikinci tahmin edici ailesinin (3.28) eşitliğindeki oransal tahmin ediciler için elde edilen minimum HKO eşitlikleri karşılaştırıldığında

$$\left[V_{0,2}-\frac{\Upsilon^{\oplus 2}}{\Psi^{\oplus}}\right]-\left[1-\frac{\Phi^{\oplus 2}}{4\Lambda^{\oplus}}\right]<0 \tag{5.45}$$

koşulu altında,

$$V_{R\min}(y_{CK19i})<\mathrm{HKO}_{R\min}(\eta_{3i}),\quad i=1,3,...,19$$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

iii) Önerilen ikinci tahmin edici ailesinin (5.40) eşitliğindeki çarpımsal tahmin ediciler için elde edilen minimum varyansları ile Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından verilen ikinci tahmin edici ailesinin (3.29) eşitliğindeki çarpımsal tahmin ediciler için elde edilen minimum HKO eşitlikleri karşılaştırıldığında

$$\left[V_{0,2}-\frac{\Upsilon^{\odot 2}}{\Psi^{\odot}}\right]-\left[1-\frac{\Phi^{\odot 2}}{4\Lambda^{\odot}}\right]<0 \tag{5.46}$$

koşulu altında,

$$V_{p\min}(y_{CK19j})<\mathrm{HKO}_{p\min}(\eta_{3j}), \qquad j=2,4,...,20$$

eşitsizliğine ulaşılmıştır.

Sonuç olarak, (5.41)-(5.46) koşulları altında önerdiğimiz Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin η_2 ve η_3 tahmin edici ailelerinden daha etkin olduğu görülmüştür.

6. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİ İÇİN SAYISAL UYGULAMALAR

6.1. Oransal Tahmin Ediciler için Sayısal Uygulamalar

6.1.1. Kadılar ve Çıngı [43] Veri Seti

Teorik sonuçları desteklemek için ilk olarak Kadılar ve Çıngı [43] tarafından kullanılan veri seti ile sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır. Etkinlik karşılaştırmalarında elde edilen koşullar verilerin Türkiye'deki bölgelerinden Marmara Bölgesinde sağlanmıştır. Bu nedenle, bu alt bölümdeki sayısal karşılaştırmalar BRÖ yöntemi ile Marmara Bölgesine uygulanmıştır. Veri seti, 1999 yılında Marmara Bölgesinde bulunan 106 ilçedeki elma üretim miktarları (ton olarak) ve elma ağaçları sayısını içermektedir.

Burada yardımcı değişken (x) olarak elma ağaçlarının sayısı ve ilgilenilen değişken (y) olarak ise elma üretim miktarı ele alınmıştır (Kaynak: TÜİK).

Kitle hakkındaki istatistikler Çizelge 6.1'de verilmiştir. Çizelge 6.1 incelendiğinde ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon katsayısının 0.82 olduğu görülmektedir. Bu nedenle, ele alınan veri setinde yalnızca oransal tahmin ediciler için uygulama yapılmıştır.

Çizelge 6.1 Marmara Bölgesi için elma ağaçları sayısı (x) ve elma üretim miktarı (y) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

$N=106$	$C_x=2.02$	$S_x=49189.08$
$n=20$	$C_y=4.18$	$S_y=6425.09$
$\bar{X}=24375.59$	$\beta_2(x)=25.71$	$S_{yx}=257778692.30$
$\bar{Y}=1536.77$	$\rho=0.82$	$B=0.11$

Çizelge 6.2 BRÖ yönteminde oransal tahmin edici olarak önerilen ve bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO ve Varyans Değerleri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans Değerleri**
y_{KC5}	–2751.75	1156517.01	y_{CK1}	711721.17
y_{KC6}	–2758.32	1155313.12	y_{CK2}	708978.37
y_{KC7}	–2751.21	1156612.00	y_{CK3}	711950.56
y_{KC8}	–2754.81	1155969.67	y_{CK4}	710438.34
y_{KC9}	–2751.42	1156575.81	y_{CK5}	711911.61
y_{KC10}	–2751.30	1155019.29	y_{CK6}	711667.60
y_{KC11}	–2751.88	1156614.20	y_{CK7}	711955.91
y_{KC12}	–2751.20	1156494.71	y_{CK8}	**708349.57**
y_{KC13}	–2759.85	1156595.93	y_{CK9}	711862.39
y_{S8}		1004706.16		
y_{S9}		1007239.66		

Çizelge 6.2’de, BRÖ yönteminde çalışmada bahsedilen ve önerilen tahmin edicilerin HKO ve varyans değerleri verilmiştir. Ayrıca önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerine doğrudan etkisi olup olmadığını görmek için çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarları da hesaplanmıştır.

Çizelge 6.2 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için BRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı regresyon tahmin edicilerin varyans değerlerinin, oransal tahmin edicide bahsedilen regresyon tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 440000 ile 450000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (4.4) eşitliğinde verilen

$$Yan(y_{KC23j}) = -\left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right), \; j = 1, 2, ..., 9$$

formülünde $\bar{r}^{(j)}$ ve $\bar{x}^{(j)}$ ifadelerinin çok büyük farklılıklar göstermemesidir. $\bar{r}^{(j)}$ ve $\bar{x}^{(j)}$ ifadelerinin aldığı Çizelge 6.1'de verilen yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerlerinin bu veri seti için birbirine yakın olması yan miktarlarında büyük farklılıklara neden olmamıştır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

Ayrıca çalışmada bahsedilen y_{S8} ve y_{S9} tahmin edicileri Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler olduğu için yan miktarları hesaplanmamıştır.

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine

$$\bar{X}^{(8)} = \bar{X}\rho + C_x$$

olmak üzere

$$y_{CK8} = \left(\bar{r}^{(8)} + \frac{b\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\bar{x}^{(8)}}\right)\bar{X}^{(8)} + \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(8)}\bar{x}^{(8)}\right)$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

6.1.2. Çıngı ve Diğerleri [44] Veri Seti

İkinci olarak daha önce Çıngı ve diğerleri [44] tarafından kullanılan veri seti ile sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır. Etkinlik karşılaştırmalarında elde edilen koşullar İç Anadolu Bölgesinde sağlanmıştır. Bu nedenle, bu alt bölümdeki sayısal karşılaştırmalar BRÖ yöntemi ile İç Anadolu Bölgesine uygulanmıştır. Veri seti, 2007 yılında İç Anadolu Bölgesindeki 170 ilçede yer alan ilk ve orta öğretimdeki okul sayısı ve öğrenci sayısını içermektedir.

Burada yardımcı değişken (x) olarak okul sayısı ve ilgilenilen değişken (y) olarak ise öğrenci sayısı ele alınmıştır (Kaynak: MEB).

Çizelge 6.3 İç Anadolu Bölgesi için okul sayısı (x) ve öğrenci sayısı (y) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

$N=170$	$C_x=1.01$	$S_x=30.40$
$n=38$	$C_y=1.92$	$S_y=18218.93$
$\bar{X}=30.21$	$\beta_2(x)=3.49$	$S_{yx}=438968.83$
$\bar{Y}=9478.85$	$\rho=0.79$	$B=475.09$

Kitle hakkındaki istatistikler Çizelge 6.3'te verilmiştir. Çizelge 6.3 incelendiğinde ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon katsayısının 0.79 olduğu görülmektedir. Bu nedenden dolayı, ele alınan veri setinde yalnızca oransal tahmin ediciler için uygulama yapılmıştır.

Çizelge 6.4 BRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen ve bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	Yan Miktarı	HKO ve Varyans Değerleri	Önerilen Tahmin Ediciler	Varyans Değerleri
y_{KC5}	–906.76	4262283.08	y_{CK1}	3212725.36
y_{KC6}	–1157.32	4014918.48	y_{CK2}	3074719.96
y_{KC7}	–984.56	4345257.23	y_{CK3}	3076168.82
y_{KC8}	–874.80	4016864.40	y_{CK4}	3276917.84
y_{KC9}	–902.05	4286369.76	y_{CK5}	3230954.45
y_{KC10}	–917.40	3937115.92	y_{CK6}	3193037.97
y_{KC11}	–665.09	4352600.99	y_{CK7}	3283660.11
y_{KC12}	–850.54	4233279.87	y_{CK8}	3076168.82
y_{KC13}	–890.83	4286936.83	y_{CK9}	**2706489.24**
y_{S8}		4013732.45		
y_{S9}		3948849.37		

Çizelge 6.4’te, BRÖ yönteminde çalışmada bahsedilen ve önerilen tahmin edicilerin HKO ve varyans değerleri verilmiştir. Ayrıca önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerine doğrudan etkisi olup olmadığını görmek için çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarları da hesaplanmıştır.

Çizelge 6.4 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için BRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı regresyon tahmin edicilerin varyans değerlerinin, oransal tahmin edicide bahsedilen regresyon tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 750000 ile 1600000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (4.4) eşitliğinde verilen

$$Yan(y_{KC23j}) = -\left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(j)}\bar{x}^{(j)}\right),\ j = 1,2,\ldots,9$$

formülünde $\bar{r}^{(j)}$ ve $\bar{x}^{(j)}$ ifadelerinin çok büyük farklılıklar göstermemesidir. $\bar{r}^{(j)}$ ve $\bar{x}^{(j)}$ ifadelerinin Çizelge 6.3’te aldığı yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerlerinin bu veri seti için birbirine yakın olması yan miktarlarında büyük farklılıklara neden olmamıştır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

Ayrıca çalışmada bahsedilen y_{S8} ve y_{S9} tahmin edicileri Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler olduğu için yan miktarları hesaplanmamıştır.

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine

$$\bar{X}^{(9)} = \bar{X}C_x + \rho$$

olmak üzere

$$y_{CK9} = \left(\bar{r}^{(9)} + \frac{b\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\bar{x}^{(9)}}\right)\bar{X}^{(9)} + \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\bar{y} - \bar{r}^{(9)}\bar{x}^{(9)}\right)$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

6.2. Oransal Tahmin Edici Aileleri için Sayısal Uygulamalar

6.2.1. Kadılar ve Çıngı [43] Veri Seti

Etkinlik karşılaştırmalarında elde edilen koşullar Akdeniz Bölgesinde sağlanmıştır. Bu nedenle, çalışmanın bu alt bölümde sayısal karşılaştırmalar BRÖ yöntemi kullanılarak Akdeniz Bölgesine uygulanmıştır. Veri seti, 1999 yılında Akdeniz Bölgesinde bulunan 94 ilçedeki elma üretim miktarları (ton olarak) ve elma ağaçları sayısını içermektedir.

Bir önceki örnek ile benzer şekilde, yardımcı değişken (x) olarak elma ağaçları sayısı ve ilgilenilen değişken (y) olarak ise elma üretim miktarı ele alınmıştır (Kaynak: TÜİK).

Çizelge 6.5 Akdeniz Bölgesi için elma ağaçları sayısı (x) ve elma üretim miktarı (y) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

$N=94$	$C_x=2.22$	$S_x=160757.31$
$n=20$	$C_y=3.19$	$S_y=29907.48$
$\bar{X}=72409.95$	$\beta_2(x)=26.14$	$S_{yx}=4332446622.00$
$\bar{Y}=9384.31$	$\beta_1(x)=4.61$	$\rho=0.90$

Kitle hakkındaki istatistikler Çizelge 6.5'te verilmiştir. Çizelge 6.5 incelendiğinde ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon katsayısının 0.90 olduğu görülmektedir. Bu nedenden dolayı, ele alınan veri setinde yalnızca oransal tahmin ediciler için uygulama yapılmıştır.

Çizelge 6.6 BRÖ yönteminde T_{1i} ve y_{CK10i} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	Yan Miktarı	HKO Değerleri	Önerilen Tahmin Ediciler	Varyans Değerleri
T_{11}	–6110.20	26185456.37	y_{CK101}	18259992.59
T_{13}	–6145.73	26186693.72	y_{CK103}	18313588.28
T_{15}	–6107.29	26185348.92	y_{CK105}	18255500.40
T_{17}	–6110.88	26186842.01	y_{CK107}	18325903.88
T_{19}	–6107.79	26185346.31	y_{CK109}	**18255395.60**
T_{111}	–6126.65	26185471.70	y_{CK1011}	18261041.07
T_{113}	–6107.23	31788340.63	y_{CK1013}	29929485.94
T_{115}	–7633.32	26516955.16	y_{CK1015}	21617350.89
T_{117}	–6154.05	28072373.81	y_{CK1017}	25602753.68
T_{119}	–6108.53	26185391.04	y_{CK1019}	18257415.02

Çizelge 6.6 ve Çizelge 6.7 de, BRÖ yönteminde çalışmada bahsedilen ve önerilen tahmin edici ailelerinin HKO ve varyans değerleri verilmiştir. Ayrıca önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerine doğrudan etkisi olup olmadığını görmek için çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarları da hesaplanmıştır.

Çizelge 6.6 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için BRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin varyans değerleri, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edici ailelerinin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 1800000 ile 8000000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (2.55) eşitliğinde verilen

$$Yan\left(T_1\right) = \gamma\bar{Y}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\delta^2C_x^2 - \alpha\delta tC_{yx}\right)$$

formülünde δ ifadesine göre farklılık göstermesidir.

Başka bir ifadeyle, $\delta = \dfrac{\theta\bar{X}}{\theta\bar{X}+\varepsilon}$ ifadesinde $\theta \neq 0$ ve ε'nun aldığı yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerleri bu veri seti için büyük farklılıklara neden olmamaktadır. Kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişkenin varyans değerini ele alan T_{115} ve T_{117} tahmin edicilerinin yan değerlerindeki küçük farklılıklar ise yardımcı değişkenin varyans değerinin, diğer kitle parametre değerlerinden oldukça büyük olmasından kaynaklanmaktadır. Benzer nedenden T_{113}, T_{115} ve T_{117} tahmin edicilerinin varyans değerlerinin diğer tahmin edicilerin varyans değerlerinden farklı çıkmaktadır.

Önerilen tahmin edici ailelerinin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine

$$\bar{r}^{(109)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j^{(109)}}{n},\ r_j^{(109)} = \frac{y_j}{\beta_2(x)x_j+\rho} = \frac{y_j}{x_j^{(109)}},\ \bar{X}^{(109)} = \beta_2\left(x\right)\bar{X}+\rho \text{ olmak üzere}$$

$$y_{CK109} = \bar{r}^{(109)}\bar{X}^{(109)} + \frac{n\left(N-1\right)}{N\left(n-1\right)}\left(\bar{y} - \bar{r}^{(109)}\bar{x}^{(109)}\right)$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

Çizelge 6.7 BRÖ yönteminde η_{1i} ve y_{CK12i} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
η_{11}	2650.35	7986761.78	y_{CK121}	1816883.70
η_{13}	2651.85	7990116.24	y_{CK123}	1815875.60
η_{15}	2650.44	7986462.36	y_{CK125}	1816973.90
η_{17}	2650.37	7990519.10	y_{CK127}	1815754.80
η_{19}	2650.21	7986455.29	y_{CK129}	1816976.00
η_{111}	2652.03	7986795.99	y_{CK1211}	1816873.40
η_{113}	6335.67	19944245.20	y_{CK1213}	16984055.00
η_{115}	4283.41	8871529.46	y_{CK1215}	**1698463.30**
η_{117}	3014.47	12741972.60	y_{CK1217}	3751131.40
η_{119}	2650.27	7986576.80	y_{CK1219}	1816939.40

Çizelge 6.7 incelendiğinde, Çizelge 6.6 ile benzer şekilde oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edici ailelerinin HKO değerlerinin, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin varyans değerlerinden daha büyük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 2900000 ile 9000000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Önerilen tahmin edici ailelerinin varyans değerleri kendi içlerinde değerlendirdiğinde ise en küçük varyans değerine

$\delta = \dfrac{\beta_2(x)\bar{X}}{\beta_2(x)\bar{X} + S_x}$ olmak üzere

$$y_{CK1215} = k^{\circ}\bar{y}\frac{\beta_2(x)\bar{X} + S_x}{\beta_2(x)\bar{x} + S_x} - k^{\circ}\bar{y}\gamma\left(\delta^2\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \delta\frac{s_{yx}}{\bar{X}\bar{y}}\right) + \left(k^{\circ} - 1\right)\bar{y}$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

Diğer uygulamalarla benzer şekilde, çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (4.27) eşitliğinde verilen

$$Yan(\eta_1) = k_1\bar{Y}\gamma\left(\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\delta^2C_x^2 - t\alpha\delta C_{yx}\right) + (k_1 - 1)\bar{Y}$$

formülünde δ ifadesine göre farklılık göstermesidir. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

Çizelge 6.5'te verilen kitle bilgileri incelendiğinde, yardımcı değişkenin kitle parametreleri arasında en büyük değere varyans değerinin sahip olduğu görülmektedir. Bu nedenle, çalışmada bahsedilen tahmin ediciler arasında en büyük yan miktarına ve HKO değerine sahip η_{113} tahmin edicisidir. Bu tahmin edici, kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişkenin yalnızca varyans değerini ele almaktadır. Bu durum benzer şekilde önerilen tahmin ediciler arasında en büyük varyans değerine y_{CK1213} tahmin edicisinin sahip olmasına neden olmuştur.

6.2.2. Çıngı ve Diğerleri [44] Veri Seti

Etkinlik karşılaştırmalarında elde edilen koşullar verilerin Türkiye'deki bölgelerinden Akdeniz Bölgesinde sağlanmıştır. Bu nedenle, çalışmanın bu alt bölümdeki sayısal karşılaştırmalar BRÖ yöntemi kullanılarak Akdeniz Bölgesine uygulanmıştır. Veri seti, 2007 yılında Akdeniz Bölgesindeki 103 ilçede yer alan ilk ve orta öğretimdeki okul ve öğrenci sayısını içermektedir.

Bir önceki örnek ile benzer şekilde, yardımcı değişken (x) olarak okul sayısı ve ilgilenilen değişken (y) olarak ise öğrenci sayısı ele alınmıştır (Kaynak: MEB).

Çizelge 6.8 Akdeniz Bölgesi için okul sayısı (x) ve öğrenci sayısı (y) değişkenlerine ait Betimsel İstatistikler

$N = 103$	$C_x = 1.09$	$S_x = 47.12$
$n = 29$	$C_y = 1.93$	$S_y = 27549.70$
$\bar{X} = 43.19$	$\beta_2(x) = 8.42$	$S_{yx} = 1087547.79$
$\bar{Y} = 14309.30$	$\beta_1(x) = 3.75$	$\rho = 0.84$

Kitle hakkındaki istatistikler Çizelge 6.8'de verilmiştir. Çizelge 6.8 incelendiğinde ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon katsayısının 0.84 olduğu görülmektedir. Bu nedenle ele alınan veri setinde yalnızca oransal tahmin edicileri için uygulama yapılmıştır.

Çizelge 6.9 ve Çizelge 6.10 da, BRÖ yönteminde çalışmada bahsedilen ve önerilen tahmin edici ailelerinin HKO ve varyans değerleri verilmiştir. Ayrıca önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerine doğrudan etkisi olup olmadığını görmek için çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarları da hesaplanmıştır.

Çizelge 6.9 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için BRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin varyans değerleri, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edici ailelerinin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farkları yaklaşık olarak 5000000 ile 9400000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çizelge 6.9 BRÖ yönteminde T_{1i} ve y_{CK10i} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	Yan Miktarı	HKO Değerleri	Önerilen Tahmin Ediciler	Varyans Değerleri
T_{11}	–6362.64	18800081.83	y_{CK101}	12000867.77
T_{13}	–6659.31	18800081.88	y_{CK103}	12889128.20
T_{15}	–6152.01	18800081.82	y_{CK105}	11819691.63
T_{17}	–6390.63	18800081.89	y_{CK107}	13032762.73
T_{19}	–6311.25	18800081.82	y_{CK109}	11813273.16
T_{111}	–6657.16	18800081.83	y_{CK1011}	12035596.71
T_{113}	–6141.38	18800082.08	y_{CK1013}	13685651.66
T_{115}	–5731.17	18800081.86	y_{CK1015}	10469624.94
T_{117}	–6655.52	18800081.95	y_{CK1017}	12029631.31
T_{119}	–6323.44	18800081.83	y_{CK1019}	**9462586.12**

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin HKO değerlerinin birbirine çok yakın değerler almasının nedeni (2.56) eşitliğinde verilen

$$HKO(T_1) = \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 - 2\alpha\delta t C_{yx} + \alpha^2\delta^2 t^2 C_x^2 \right)$$

formülünde δ ifadesine göre farklılık göstermesidir.

Başka bir ifadeyle, $\delta = \dfrac{\theta\bar{X}}{\theta\bar{X} + \varepsilon}$ ifadesinde $\theta \neq 0$ ve ε 'nun aldığı yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerlerinin bu veri seti için çok küçük farklılıklar göstermektedir.

Kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişkenin varyans değerini ele alan T_{113} tahmin edicilerinin yan değerlerindeki küçük farklılıklar ise yardımcı değişkenin varyans değerinin, diğer kitle parametre değerlerine göre biraz daha büyük olmasından kaynaklanmaktadır. Bu durum benzer şekilde önerilen tahmin ediciler arasında en büyük varyans değerine y_{CK1013} tahmin edicisinin sahip olmasına neden olmuştur.

Önerilen tahmin edici ailelerinin varyans değerleri kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine

$$\bar{r}^{(1019)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j^{(1019)}}{n},\ r_j^{(1019)} = \frac{y_j}{x_j+\rho} = \frac{y_j}{x_j^{(1019)}},\ \bar{X}^{(1019)} = \bar{X}+\rho \text{ olmak üzere}$$

$$y_{CK1019} = \bar{r}^{(1019)}\bar{X}^{(1019)} + \frac{n(N-1)}{N(n-1)}\left(\bar{y}-\bar{r}^{(1019)}\bar{x}^{(1019)}\right)$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

Çizelge 6.10 incelendiğinde, Çizelge 6.9 ile benzer şekilde oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edici ailelerinin HKO değerlerinin, önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici ailelerinin varyans değerlerinden daha büyük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 1400000 ile 5900000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değer aralığının çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Önerilen tahmin edici ailelerinin varyans değerleri kendi içlerinde değerlendirdiğinde ise en küçük varyans değerine

$$\delta = \frac{\beta_1(x)\bar{X}}{\beta_1(x)\bar{X}+S_x} \text{ olmak üzere}$$

$$y_{CK1217} = k^{\circ}\bar{y}\frac{\beta_1(x)\bar{X}+S_x}{\beta_1(x)\bar{x}+S_x} - k^{\circ}\bar{y}\gamma\left(\delta^2\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\delta\frac{S_{yx}}{\bar{X}\bar{y}}\right)+\left(k^{\circ}-1\right)\bar{y}$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

Çizelge 6.10 BRÖ yönteminde η_{1i} ve y_{CK12i} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
η_{11}	6406.94	7059351.94	y_{CK121}	5482429.47
η_{13}	9050.76	7999655.30	y_{CK123}	5354852.44
η_{15}	6498.76	6931391.47	y_{CK125}	5504420.00
η_{17}	6484.44	8192888.40	y_{CK127}	5336252.12
η_{19}	6035.14	6927429.71	y_{CK129}	5505118.62
η_{111}	9605.09	7086939.54	y_{CK1211}	5477833.76
η_{113}	20500.50	11332988.99	y_{CK1213}	5525759.60
η_{115}	12539.18	7647714.64	y_{CK1215}	5395530.46
η_{117}	8055.13	9168542.99	y_{CK1217}	**5286421.29**
η_{119}	6313.42	7026094.76	y_{CK1219}	5488038.03

Çizelge 6.8’de verilen kitle bilgileri incelendiğinde, yardımcı değişkenin kitle parametreleri arasında en büyük değere varyans değerinin sahip olduğu görülmektedir. Bu nedenle, çalışmada bahsedilen tahmin ediciler arasında en büyük yan miktarına ve HKO değerine sahip η_{113} tahmin edicisidir. Bu tahmin edici, kitle ortalamasının tahmini için yardımcı değişkenin yalnızca varyans değerini ele almaktadır. Bu durum benzer şekilde önerilen tahmin ediciler arasında en büyük varyans değerine y_{CK1213} tahmin edicisinin sahip olmasına neden olmuştur.

7. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİ İÇİN SAYISAL UYGULAMALAR

7.1. Oransal Tahmin Ediciler için Sayısal Uygulamalar

7.1.1. Kadılar ve Çıngı [43] Veri Seti

Analizin bu kısmında, Kadılar ve Çıngı [43] tarafından kullanılan verilerin tamamını yani Türkiye'deki tüm bölgeleri ele alarak hesaplamalar elde edilmiştir. Veri seti, 1999 yılında Türkiye'de bulunan 854 ilçedeki elma üretim miktarları (x) ve elma ağaçları sayısını (y) içermektedir. Tabakalar Türkiye'deki bölgeler (1: Marmara, 2: Ege, 3: Akdeniz, 4: İç Anadolu, 5: Karadeniz, 6: Doğu ve Güneydoğu Anadolu) olarak ayrılmıştır.

Ayrıca, Neyman dağıtım yöntemi ile her bir tabaka için örneklem seçimi rastgele olarak

$$n_h = n\frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h S_h}$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır.

Veri seti Türkiye'deki bütün bölgeler için kullanıldığında yardımcı değişken ve ilgilenilen değişken arasındaki korelasyon katsayısı 0.90 olarak bulunmuştur. Korelasyon katsayısı oldukça büyük ve pozitif yönlü olduğundan yalnızca oransal tahmin ediciler için analiz yapılmıştır. Çarpımsal tahmin ediciler uygulamada dikkate alınmamıştır.

Bu uygulama için örneklem büyüklüğü $n=140$ olarak elde edilmiştir. Tabakalara ait kitle bilgileri Çizelge 7.1'de verilmiştir.

Çizelge 7.1 Tabakalar için elma ağaçları sayısı (x) ve elma üretim miktarları (y) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

Tabaka	1	2	3	4	5	6
N_h	106	106	94	171	204	173
n_h	9	17	38	67	7	2
W_h	0.12	0.12	0.11	0.20	0.24	0.20
$\bar{Y}_h$	1536.77	2212.59	9384.31	5588.01	966.96	404.40
$\bar{X}_h$	24375.59	27421.70	72409.95	74365.68	26441.72	9843.83
C_{xh}	2.02	2.10	2.22	3.84	1.72	1.91
$\beta_{2h}(x)$	26.68	34.57	26.14	97.6	27.47	28.11
$\beta_{1h}(x)$	4.68	5.12	4.61	9.13	4.66	4.74
ρ_h	0.82	0.86	0.90	0.99	0.71	0.89
S_{yh}	6425.09	11551.53	29907.48	28643.42	2389.77	945.75
S_{xh}	49189.08	57460.62	160757.31	285603.13	45402.78	18793.95

Çizelge 7.2 TRÖ yönteminde $y_{KCi},\ i=18,19,...,22,$ ve $y_{CKj},\ j=13,14,...,17$ oransal tahmin edicilerin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	Yan Miktarı	HKO değeri	Önerilen Tahmin Ediciler	Varyans değeri
y_{KC18}	–0.046837354	213983.25	y_{CK13}	191806.32
y_{KC19}	–0.046837356	214105.63	y_{CK14}	191936.66
y_{KC20}	–0.046837353	213976.29	y_{CK15}	191798.91
y_{KC21}	–0.046837353	214023.46	y_{CK16}	191849.14
y_{KC22}	–88.29922463	208772.05	y_{CK17}	**184456.47**

Çizelge 7.2'de (5.15) ve (5.17) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri ve (3.9) ve (3.13) eşitlikleri yardımıyla çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerin HKO değerleri verilmiştir.

Çizelge 7.2 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için TRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 22000 ile 25000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine sahip tahmin edicinin beklendiği gibi k^{Δ} sabit terimine sahip olan

$$y_{CK17}=k^{\Delta}\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X}-\left(k^{\Delta}-1\right)\bar{y}_{st}-\frac{1}{\bar{X}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}}S_{xh}^2-k^{\Delta}s_{yxh}\right)\right]$$

olduğu açıkça görülmüştür.

Çizelge 7.2'de çalışmada bahsedilen ilk dört tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (3.8) eşitliğinde verilen

$$Yan(y_{KCi}) = \frac{1}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_{st\beta} S_{xh}^2 - S_{yxh}\right)\right], \begin{array}{l} \beta = SD, SK, US1, US2 \\ i = 18, 19, 20, 21 \end{array}$$

formülünde $X_{st\beta}$ ve $R_{st\beta}$ ifadelerine göre farklılık göstermesidir. Bu ifadelerin de aldığı yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerleri birbirine çok yakın olduğundan yan miktarları için büyük farklılıklara neden olmamaktadır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır. y_{KC22} tahmin edicisinin yan değerlerindeki farklılık ise k^{Δ} sabit teriminden kaynaklanmaktadır.

7.1.2. Çıngı ve Diğerleri [44] Veri Seti

Analizin bu kısmında ise Çıngı ve diğerleri [44] tarafından daha önce kullanılan verilerin tamamını yani Türkiye'deki tüm bölgeleri ele alarak hesaplamalar elde edilmiştir. Veri seti, 2007 yılında Türkiye'deki 923 ilçede ilk ve orta öğretimdeki öğrenci sayısı (x) ve okul sayısını (y) içermektedir. Tabakalar Türkiye'deki bölgeler (1: Marmara, 2: Ege, 3: Akdeniz, 4: İç Anadolu, 5: Karadeniz, 6: Doğu ve Güneydoğu Anadolu) olarak ayrılmıştır.

Ayrıca, diğer veri setinde olduğu gibi Neyman dağıtım yöntemi ile her bir tabaka için örneklem seçimi rastgele olarak hesaplanmıştır.

Veri seti Türkiye'deki bütün bölgeler için kullanıldığında yardımcı değişken ve ilgilenilen değişken arasındaki korelasyon katsayısı 0.72 olarak bulunmuştur. Korelasyon katsayısı pozitif yönlü olduğundan yalnızca oransal tahmin ediciler için analiz yapılmıştır. Çarpımsal tahmin ediciler uygulamada dikkate alınmamıştır.

Bu uygulama için örneklem büyüklüğü $n = 180$ olarak elde edilmiştir. Tabakalara ait kitle bilgileri Çizelge 7.3'te verilmiştir.

Çizelge 7.3 Tabakalar için öğrenci sayısı (x) ve okul sayısı (y) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

Tabaka	1	2	3	4	5	6
N_h	127	117	103	170	205	201
n_h	31	21	29	38	22	39
W_h	0.14	0.13	0.11	0.18	0.22	0.22
$\bar{Y}_h$	20804.59	9211.79	14309.30	9478.85	5569.95	12997.59
$\bar{X}_h$	30.81	30.29	43.19	30.21	29.50	57.54
C_{xh}	0.85	0.83	1.09	1.01	0.99	0.84
$\beta_{2h}(x)$	2.51	2.09	8.42	3.49	4.07	8.20
$\beta_{1h}(x)$	2.16	3.87	3.75	3.12	4.08	4.41
ρ_h	0.94	0.99	0.84	0.79	0.99	0.97
S_{yh}	30486.75	15180.77	27549.70	18218.93	8497.78	23094.14
S_{xh}	26.05	25.08	47.12	30.40	29.33	48.26

Çizelge 7.4 TRÖ yönteminde $y_{KCi},\ i=18,19,...,22,$ ve $y_{CKj},\ j=13,14,...,17$ oransal tahmin edicilerin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
y_{KC18}	–0.005482878	814512.10	y_{CK13}	806132.37
y_{KC19}	–0.005502296	852070	y_{CK14}	844601.86
y_{KC20}	–0.005478400	807570.20	y_{CK15}	799000.85
y_{KC21}	–0.005484181	806065	y_{CK16}	797453.31
y_{KC22}	–84.42623134	801131.20	y_{CK17}	**747600.45**

Çizelge 7.4’te (5.15) ve (5.17) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri ve (3.9) ve (3.13) eşitlikleri yardımıyla çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerin HKO değerleri verilmiştir.

Çizelge 7.4 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için TRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 8500 ile 54000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerlerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edicilerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine sahip tahmin edicinin beklendiği gibi k^{Δ} sabit terimine sahip olan

$$y_{CK17} = k^{\Delta}\frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}}\overline{X} - \left(k^{\Delta}-1\right)\overline{y}_{st} - \frac{1}{\overline{X}}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{\overline{y}_{st}}{\overline{X}} S_{xh}^2 - k^{\Delta} s_{yxh}\right)\right]$$

olduğu açıkça görülmüştür.

Çizelge 7.4'te çalışmada bahsedilen ilk dört tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (3.8) eşitliğinde verilen

$$Yan(y_{KCi}) = \frac{1}{X_{st\beta}}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_{st\beta} S_{xh}^2 - S_{yxh}\right)\right], \qquad \begin{matrix} \beta = SD, SK, US1, US2 \\ i = 18, 19, 20, 21 \end{matrix}$$

formülünde $X_{st\beta}$ ve $R_{st\beta}$ ifadelerine göre farklılık göstermesidir. Bu ifadelerin de aldığı yardımcı değişkenin kitle parametreleri değerleri birbirine çok yakın olduğundan yan miktarları için büyük farklılıklara neden olmamaktadır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır. y_{KC22} tahmin edicisinin yan değerlerindeki farklılık ise k^{Δ} sabit teriminden kaynaklanmaktadır.

7.2. Oransal Tahmin Edici Aileleri için Sayısal Uygulamalar

7.2.1. Kadılar ve Çıngı [43] Veri Seti

Çalışmanın bu alt bölümünde de, Çizelge 7.1'de kitle bilgileri verilen veri seti kullanılmıştır. Çizelge 7.5'te, Çizelge 3.1'de verilen oransal tahmin ediciler ve (5.23) eşitliğinde önerilen tahmin edici ailesinin bazı oransal tahmin edicileri için elde edilen değerler verilmiştir.

Çizelge 7.5'te verilen değerler (5.33) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri için ve (3.24) eşitlikleri yardımıyla Çizelge 3.1'de verilen oransal tahmin edicilerin yan miktarı ve HKO değerleri için hesaplanmıştır. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık 0 ile 23000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerlerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çizelge 7.5 TRÖ yönteminde η_2 ve y_{CK18} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
η_{21}	–0.046837354	213983.25	y_{CK181}	191806.32
η_{23}	–0.046837356	214105.63	y_{CK183}	191936.66
η_{25}	–0.046837353	213976.29	y_{CK185}	191798.91
η_{27}	–0.046837356	214121.16	y_{CK187}	191953.21
η_{29}	–0.046837353	213976.21	y_{CK189}	**191798.82**
η_{211}	–0.046837354	213984.10	y_{CK1811}	191807.23
η_{213}	–0.046838345	482812.88	y_{CK1813}	478751.52
η_{215}	–0.046837451	220118.74	y_{CK1815}	198373.04
η_{217}	–0.046838421	673464.63	y_{CK1817}	673464.63
η_{219}	–0.046837353	213978.78	y_{CK1819}	191801.56

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine

$$\tau = \frac{\beta_{2st}(x)\bar{X}}{\beta_{2st}(x)\bar{X} + \rho_{st}}$$

olmak üzere

$$y_{CK189} = \bar{y}_{st}\left[\frac{\beta_{2st}(x)\bar{X}+\rho_{st}}{\beta_{2st}(x)\bar{x}_{st}+\rho_{st}} - \left(\tau^2 V_{2,0} - \tau\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right)\right]$$

tahmin edicisi sahip olmuştur.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın ve hatta aynı değerleri aldığı görülmektedir. Bunun nedeni yan miktarlarının (3.18) eşitliğinde verilen

$$Yan(\eta_2) = \bar{Y}\left[\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau V_{1,1}\right]$$

formülünde $\tau = \dfrac{\theta_{st}\bar{X}}{\theta_{st}\bar{X}+\varepsilon_{st}}$ ifadesine göre farklılık göstermesidir. Bu ifadede θ ve ε ifadelerinin aldığı kitle değerleri birbirine çok yakın olduğundan yan miktarları birbirlerinden farklı çıkmamaktadır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

Çizelge 7.5'te, (3.20)'de verilen

$$\mathrm{HKO}(\eta_2) = \bar{Y}^2\left[t^2\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + V_{0,2}\right]$$

eşitliği ile hesaplanan η_{217} ve (5.29)'de verilen

$$V\left(y_{CK18}\right) \cong \bar{Y}^2\Bigg\{\left(t^2\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + V_{0,2}\right) - \left[t\alpha\tau\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0} - V_{1,1}\right)\right]^2$$

$$-t\alpha\tau\left[2V_{1,1}\left(t\alpha\tau D_{1,0} - D_{0,1}\right) - (t+1)\alpha\tau V_{2,0}\left(t\alpha\tau V_{1,1} - V_{0,2}\right)\right]\Bigg\}$$

eşitliği ile hesaplanan y_{CK1817} tahmin edicilerinin HKO ve varyans değerlerinin birbirine eşit olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum (5.29)'de verilen varyans eşitliğindeki ikinci ve üçüncü terimlerin bu veri seti için sıfıra çok yakın değerlerden oluşmasından kaynaklanmaktadır.

Çizelge 7.6'da (5.36) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin minimum varyans değerleri ve (3.28) eşitlikleri yardımıyla Çizelge 4'te verilen oransal tahmin edicilerin yan miktarı ve minimum HKO değerleri verilmiştir. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 26000 ile 450000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerlerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çizelge 7.6 TRÖ yönteminde η_3 ve y_{CK19} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
η_{31}	–90.385469	211161.63	y_{CK191}	184457.32
η_{33}	–90.486513	211290.41	y_{CK193}	184471.85
η_{35}	–90.379691	211154.30	y_{CK195}	184456.49
η_{37}	–90.499271	211306.74	y_{CK197}	184473.68
η_{39}	–90.379624	211154.22	y_{CK199}	184457.42
η_{311}	–90.386173	211162.53	y_{CK1911}	184457.42
η_{313}	–98.042038	464851.24	y_{CK1913}	183756.07
η_{315}	–94.591608	217522.64	y_{CK1915}	185058.16
η_{317}	–71.258972	624472.23	y_{CK1917}	**177288.66**
η_{319}	–90.381755	211156.92	y_{CK1919}	184456.78

Çizelge 7.6 dikkatle incelendiğinde, bahsedilen tahmin ediciler arasında en küçük varyans değerine sahip tahmin edicinin

$$\tau = \frac{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st} + S_{xst}}$$

olmak üzere

$$y_{CK1917}=\bar{y}_{st}\left\{k^{\nabla}\left[\frac{\left(\bar{X}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}{\left(\bar{x}\beta_1(x)\right)_{st}+S_{xst}}-\left(\tau^2V_{2,0}-\tau\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right)\right]-\left(k^{\nabla}-1\right)\right\}$$

olduğu açıkça görülmüştür. Ayrıca Çizelge 7.5 ve Çizelge 7.6 da verilen TRÖ yöntemlerinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri kendi aralarında karşılaştırıldığında, beklendiği gibi k^{∇} sabit terimine sahip olan y_{CK19} tahmin edici ailesi daha küçük varyans değerlerine sahip olmuştur.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (3.19) eşitliğinde verilen

$$Yan(\eta_3)=k_3\,\bar{\mathrm{Y}}\left[\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2V_{2,0}-t\alpha\tau V_{1,1}\right]+\left(k_3-1\right)\bar{Y}$$

formülünde τ ifadesine göre farklılık göstermesidir. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

7.2.2. Çıngı ve Diğerleri [44] Veri Seti

Çalışmanın bu alt bölümünde de, Çizelge 7.4'te kitle bilgileri verilen veri seti kullanılmıştır. Çizelge 7.7'de, Çizelge 3.1'de verilen oransal tahmin ediciler ve (5.23) eşitliğinde önerilen tahmin edici ailesinin bazı oransal tahmin edicileri için elde edilen değerler verilmiştir.

Çizelge 7.7 de verilen değerler (5.33) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerleri için ve (3.24) eşitlikleri yardımıyla Çizelge 3.1'de verilen oransal tahmin edicilerin yan miktarı ve HKO değerleri için hesaplanmıştır.

Çizelge 7.7 TRÖ yönteminde η_2 ve y_{CK18} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenilen Tahmin Ediciler	**Yan Miktarı**	**HKO değeri**	**Önerilen Tahmin Ediciler**	**Varyans değeri**
η_{21}	–0.005482878	814512.08	y_{CK181}	806132.37
η_{23}	–0.005502296	852069.99	y_{CK183}	844601.86
η_{25}	–0.005478400	807570.24	y_{CK185}	799000.85
η_{27}	–0.005507215	806065.03	y_{CK187}	**797453.31**
η_{29}	–0.005478255	807355.42	y_{CK189}	798780.02
η_{211}	–0.005484181	816641.41	y_{CK1811}	808318.23
η_{213}	–0.005561183	1096767.78	y_{CK1813}	1093279.57
η_{215}	–0.005407831	865354.69	y_{CK1815}	858175.61
η_{217}	–0.005592222	1679862.81	y_{CK1817}	1679857.07
η_{219}	–0.00548212	813294.92	y_{CK1819}	804882.56

Çizelge 7.7 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için TRÖ yönteminde oransal tahmin edicide önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerlerinin, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 5 ile 8500 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerlerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Önerilen tahmin edicilerin varyans değerlerini kendi içlerinde değerlendirdiğimizde ise en küçük varyans değerine sahip tahmin edicinin

$$\tau = \frac{\left(\rho \bar{X}\right)_{st}}{\left(\rho \bar{X}\right)_{st} + \beta_{2st}\left(x\right)}$$

olmak üzere

$$y_{CK187} = \bar{y}_{st}\left[\frac{\left(\rho \bar{X}\right)_{st} + \beta_{2st}(x)}{\left(\rho \bar{x}\right)_{st} + \beta_{2st}(x)} - \left(\tau^2 V_{2,0} - \tau \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right)\right]$$

olduğu açıkça görülmüştür.

Çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın ve hatta aynı değerleri aldığı görülmektedir. Bunun nedeni yan miktarlarının (3.18) eşitliğinde verilen

$$Yan(\eta_2) = \bar{\mathrm{Y}}\left[\frac{t\left(t+1\right)}{2}\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau V_{1,1}\right]$$

formülünde $\tau = \dfrac{\theta_{st}\bar{X}}{\theta_{st}\bar{X} + \varepsilon_{st}}$ ifadesine göre farklılık göstermesidir. Bu ifadede θ ve ε ifadelerinin aldığı kitle değerleri birbirine çok yakın olduğundan yan miktarları birbirlerinden farklı çıkmamaktadır. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

Kadılar ve Çıngı [43] veri seti ile benzer şekilde, (3.20) eşitliğinde verilen

$$\mathrm{HKO}(\eta_2) = \bar{\mathrm{Y}}^2\left[t^2\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + V_{0,2}\right]$$

ile hesaplanan η_{217} ve (5.29) eşitliğinde verilen

$$V\left(y_{CK18}\right) \cong \bar{Y}^2 \left\{\left(t^2\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - 2t\alpha\tau V_{1,1} + V_{0,2}\right) - \left[t\alpha\tau\left(\frac{t+1}{2}\alpha\tau V_{2,0} - V_{1,1}\right)\right]^2\right.$$
$$\left. - t\alpha\tau\left[2V_{1,1}\left(t\alpha\tau D_{1,0} - D_{0,1}\right) - \left(t+1\right)\alpha\tau V_{2,0}\left(t\alpha\tau V_{1,1} - V_{0,2}\right)\right]\right\}$$

ile hesaplanan y_{CK1817} tahmin edicilerinin HKO ve varyans değerlerinin birbirine çok yakın olduğu Çizelge 7.7'de dikkat çekmektedir. Bu durum (5.29)'de verilen varyans eşitliğindeki ikinci ve üçüncü terimlerin bu veri seti için sıfıra çok yakın değerler aldığından kaynaklanmaktadır.

Çizelge 7.8 TRÖ yönteminde η_3 ve y_{CK19} tahmin edici ailelerinin yan miktarı, varyans ve HKO değerleri

İlgilenen Tahmin Ediciler	Yan Miktarı	HKO değeri	Önerilen Tahmin Ediciler	Varyans değeri
η_{31}	–15.349608	811414.91	y_{CK191}	747744.39
η_{33}	–17.857488	848887.97	y_{CK193}	748240.91
η_{35}	–14.696006	804467.52	y_{CK195}	747627.31
η_{37}	–18.395673	860576.64	y_{CK197}	748363.40
η_{39}	–14.674459	804252.38	y_{CK199}	**747623.51**
η_{311}	–15.534827	813544.25	y_{CK1911}	747778.27
η_{313}	–19.760745	1091028.95	y_{CK1913}	749529.54
η_{315}	–18.459838	862110.07	y_{CK1915}	748378.62
η_{317}	–1.095123	1658891.96	y_{CK1917}	749529.65
η_{319}	–15.240677	810197.41	y_{CK1919}	747724.62

Çizelge 7.8 de (5.36) eşitlikleri yardımıyla önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin minimum varyans değerleri ve (3.28) eşitlikleri yardımıyla Çizelge 3.2'de verilen oransal tahmin edicilerin yan miktarı ve minimum HKO değerleri verilmiştir.

Çizelge 7.8 dikkatle incelendiğinde, bu veri seti için TRÖ yönteminde oransal tahmin edici olarak önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin varyans değerlerinin, oransal tahmin edicide bahsedilen tahmin edicilerin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca HKO ve varyans değerleri arasındaki farklar yaklaşık olarak 56000 ile 910000 değerleri arasında hesaplanmıştır. Bu değerlerin çalışmada bahsedilen oransal tahmin edici ailelerinin yan miktarları ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı sonucuna varmamızı sağlamıştır.

Çizelge 7.8 dikkatle incelendiğinde, bahsedilen tahmin ediciler arasında en küçük varyans değerine sahip tahmin edicinin

$$\tau = \frac{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_2(x)\right)_{st} + \rho_{st}}$$

olmak üzere

$$y_{CK199} = \bar{y}_{st}\left\{k^{\nabla}\left[\frac{\left(\beta_2(x)\bar{X}\right)_{st} + \rho_{st}}{\left(\beta_2(x)\bar{x}\right)_{st} + \rho_{st}} - \left(\tau^2 V_{2,0} - \tau\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h s_{yxh}}{\bar{X}\bar{y}_{st}}\right)\right] - \left(k^{\nabla} - 1\right)\right\}$$

olduğu açıkça görülmüştür. Ayrıca Çizelge 7.7 ve Çizelge 7.8’de verilen TRÖ yöntemlerinde önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri kendi aralarında karşılaştırıldığında beklendiği gibi y_{CK19} tahmin edici ailesinin daha küçük varyans değerlerine sahip olduğu görülmüştür.

Diğer uygulamalarla benzer şekilde, çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yan miktarlarının birbirine çok yakın değerler almasının nedeni yan miktarlarının (3.19) eşitliğinde verilen

$$Yan(\eta_3) = k_3\,\bar{Y}\left[\frac{t(t+1)}{2}\alpha^2\tau^2 V_{2,0} - t\alpha\tau V_{1,1}\right] + (k_3 - 1)\bar{Y}$$

formülünde τ ifadesine göre farklılık göstermesidir. Aynı neden benzer şekilde HKO ve varyans değerlerinin de kendi içlerinde birbirine yakın sonuçlar vermesine yol açmıştır.

8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Literatürde yardımcı değişken bilgisi kullanılarak elde edilen birçok tahmin edici bulunmaktadır. Bu tahmin edicilerden en önemlisi klasik oransal tahmin edicidir. Ancak klasik oransal tahmin edici ile yanlı bir tahmin elde edildiğinden birçok araştırmacı bu yanlılığı azaltma yöntemlerini araştırmıştır. Hartley ve Ross [37] tarafından kullanılan yöntem ile birçok yazar yansız tahmin edici elde etmiştir. Bu çalışmada yaklaşık olarak yansız tahmin edicileri elde etmek için son yıllarda tekrar popüler olarak kullanılan Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin yöntemi kullanıldı.

İlk olarak BRÖ yönteminde kitle ortalamasının tahmini için Kadılar ve Çıngı [30, 31] tarafından önerilen oransal tahmin edicide regresyon tahmin edicileri kullanılarak Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicide regresyon tahmin edicileri elde edilmiştir. Daha sonra Khoshnevisan ve diğerleri [36] ve Koyuncu ve Kadılar [29] tarafından önerilen tahmin edici ailelerini dikkate alarak Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri önerilmiştir.

Benzer şekilde, TRÖ yönteminde de Kadılar ve Çıngı [40, 38] tarafından önerilen oransal tahmin edicileri dikkate alarak kitle ortalamasının tahmini için Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin ediciler önerilmiştir. Koyuncu ve Kadılar [41] tarafından elde edilen tahmin edici ailelerini kullanarak Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edici aileleri elde edilmiştir.

Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler yansız kabul edildiği için çalışmada önerilen tahmin edicilerin varyans eşitlikleri hesaplanmış ve uygun tahmin edicilerle HKO eşitlikleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen koşullarda, önerilen tahmin edicilerin karşılaştırılan tahmin edicilerden daha etkin olduğu görülmüştür.

BRÖ yönteminde koşulları sağlayan iki veri seti için Çizelge 6.2, Çizelge 6.4, Çizelge 6.6, Çizelge 6.7, Çizelge 6.9 ve Çizelge 6.10’da, uygulama sonuçları incelendiğinde önerilen tahmin edicilerin çalışmada bahsedilen tahmin edicilerden daha küçük varyans değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca BRÖ’de önerilen tahmin ediciler kendi aralarında karşılaştırıldığında iki veri setinde de Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı oransal tahmin edicide regresyon tahmin ediciler daha etkin bulunmuştur.

Diğer taraftan; TRÖ yönteminde Çizelge 7.2 ve Çizelge 7.4'ten Çizelge 7.8'e kadar elde edilen sonuçlara bakıldığında, koşulları sağlayan iki veri seti içinde en küçük varyans değerlerine önerilen Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin edicilerin sahip olduğu görülmüştür. İki veri seti için ayrı ayrı önerilen tahmin ediciler kendi aralarında karşılaştırıldığında ise beklendiği gibi sabit bir sayının çarpımı ile elde edilen y_{CK19} tahmin edici ailesinin en etkin tahmin edicilere sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Uygulamada elde edilen sonuçlara göre, çalışmada bahsedilen tahmin edicilerin yanlılık miktarlarının önerilen tahmin edicilerin varyans değerleri üzerinde etkisi olmadığı söylenebilmektedir. Bu sonuçlara göre, kitle ortalaması için Hartley-Ross tahmin edicisine dayalı tahmin ediciler kullanarak etkin tahminler yapılabileceği görülmüştür.

KAYNAKÇA

[1] Çıngı, H., *Örnekleme Kuramı*, Ankara: Bizim Büro Basımevi, **2009**.

[2] Cochran, W. G., "The estimation of yields of cereal experiments by sampling for ratio of grain to total produce," *The Journal of Agricultural Science,* 30, 262–275, **1940**.

[3] Cochran, W. G., "Sampling theory when the sampling units are of unequal sizes," *Journal of the American Statistical Association,* 37, 199-212, **1942**.

[4] Robson, D. S., "Applications of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio-type estimation," *Journal of the American Statistical Association*, 52, 511-522, **1957**.

[5] Murthy, M. N., "Product method of estimation," *Sankhya,* 26, 294-307, **1964**.

[6] Bahl S., Tuteja, R. K., "Ratio and product type exponential estimator," *Information and Optimization Sciences,* 12, 159-163, **1991**.

[7] Tripathi, T. P., "Contributions to the sampling theory in multivariate information," *Ph.D. Thesis,* Patiala, India, Punjabi University, **1970**.

[8] Tripathi, T. P., "Double sampling for inclusion probabilities and regression method of estimation," *Journal of The Indian Statistical Association,* 10, 33-46, **1973**.

[9] Tripathi, T. P., "On double sampling for multivariate ratio and difference method of estimation," *Journal of The Indian Statistical Association,* 33, 33-54, **1976.**

[10] Singh, S., *Advanced Sampling Theory with Applications*, London: Kluwer Academic Publishers, **2003.**

[11] Williams, W. H., "Generating unbiased ratio and regression estimators," *Biometrics,* 17, 267-274, **1961**.

[12] Williams, W. H., "The precision of some unbiased regression estimators," *Biometrics,* 19, 352-361, **1963**.

[13] Rao, J. N. K., "The precision of Mickey's unbiased ratio estimator," *Biometrika,* 54, 93-108, **1967**.

[14] Rao J. N. K., Rao, P. S. S., "Small sample results for ratio estimators," *Biometrika,* 58, 625-630, **1971**.

[15] Sahoo, L. N., "Some estimation problems in finite population sampling using auxiliary information," *Ph. D. Thesis ,* Bhubaneswar, India, Utkal University, **1994**.

[16] Sahoo, J., Sahoo L. N., Wywial, J., "Some thoughts of reduction of estimation bias using auxiliary information in sample," *Statistics in Transition,* 3(2), 383-401, **1997**.

[17] Pascual, J. N., "Unbiased ratio estimators in stratified sampling," *Journal of the American Statistical Association,* 56(293), 70-87, **1961**.

[18] Singh, H. P., Sharma B., Tailor, R., "Hartley-Ross type estimators for population mean using known parameters of auxiliary variate," *Communications in Statistics, Theory and Methods,* 43, 547–565, **2014**.

[19] Kadılar C., Çekim, H. Ö., "Hartley-Ross type estimators in simple random sampling.," in *AIP Proceedings*, Rhodes, **2015**.

[20] Çekim, H. Ö., Kadılar, C., "New Unbiased Estimators with the help of Hartley-Ross Type Estimators," *Pakistan Journal of Statistics,* 32(4), 247-260, **2016**.

[21] Khan L., Shabbir, J., "A class of Hartley-Ross type unbiased estimators for population mean using ranked set sampling," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* p. Doi:10.15672/HJMS.20156210579, **2015**.

[22] Khan L., Shabbir, J., "Hartley-Ross type unbiased estimators using ranked set sampling and stratified ranked set sampling," *North Carolina Journal of Mathematics and Statistics,* 2, 10-22, **2016**.

[23] Khan L., Shabbir, J., Gupta, S., "Unbiased ratio estimators of the mean in stratified ranked set sampling," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* p. Doi:10.15672/HJMS.201610814857, **2016**.

[24] Sisodia B., Dwivedi, V. K., "A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable," *Journal of Indian Society Agricultural Statistics,* 33(1), 13–18, **1981**.

[25] Singh H., Kakran, M., "A modified ratio estimator using known coefficient of kurtosis of an auxiliary character*",* yayınlanmamış, **1993**.

[26] Upadhyaya L. N., Singh, H. P., "Use of transformed auxiliary variable in estimating the finite population mean," *Biometrical Journal,* 41(5), 627–636, **1999**.

[27] Singh, H. P., Tailor, R., "Use of known correlation coefficient in estimating the finite population mean," *Statistics in Transition,* 6, 555-560, **2003**.

[28] Kadılar, C., Çıngı, H., "An improvement in estimating the population mean by using the correlation coefficient," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 35(1), 103-106, **2006**.

[29] Koyuncu, N., Kadılar, C., "Efficient estimators for the population mean," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 38(2), 217-225, **2009**.

[30] Kadılar, C., Çıngı, H., "Ratio estimators in simple random sampling," *Applied Mathematics and Computation,* 151(3), 893-902, **2004**.

[31] Kadılar, C., Çıngı, H., "A new ratio estimator using correlation coefficient," *Interstat,* 4, 1-11, **2006**.

[32] Robson, D. S., "Applications of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio-type estimation," *Journal of the American Statistical Association,* 52, 511-522, **1957**.

[33] Pandey, B. N., Dubey, V., "Modified product estimator using coefficient of variation of auxiliary variate," *Assam Statistical Rev.,* 2(2), 64-66, **1988**.

[34] Singh, H. P., Tailor, R., Kakran, M. S., "An estimator of population mean using power transformation," *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics,* 58(2), 223-230, **2004**.

[35] Singh, G. N., "On the improvement of product method of estimation in sample surveys," *Jour. Ind. Soc. Agri. Statistics,* 56(3), 267-265, **2003**.

[36] Khoshnevisan, M., Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., Smarandache, F., "A general family of estimators for estimating population mean using known value of some population parameter(s)," *Far East Journal of Theoretical Statistics,* 22, 181-191, **2007**.

[37] Hartley, H., Ross, A., "Unbiased ratio estimators," *Nature,* 174, 270-272, **1954**.

[38] Kadılar, C., Çıngı, H., "A new ratio estimator in stratified sampling," *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 34, 597-602, **2005**.

[39] Hansen,M. H., Hurwitz, W. N., Gurney, M. "Problem and methods of the sample survey of business," *Journal of American Statistical Association,* 41, 174-189, **1946**.

[40] Kadılar, C., Çıngı, H., "Ratio estimators in stratified random sampling," *Biometrical Journal,* 45(2), 218-225, **2003**.

[41] Koyuncu, N., Kadılar, C., "Ratio and product estimators in stratified random sampling," *Journal of Statistical Planning and Inference,* 139, 2552-2558, **2009**.

[42] Pascual, J. N., "Unbiased ratio estimators in stratified sampling," *Journal of the American Statistical Association,* 56(293), 70-87, **1961**.

[43] Kadılar, C., Çıngı, H., "Ratio estimators in stratified random sampling," *Biometrical Journal,* 45(2), 218-225, **2003**.

[44] Çıngı, H., Kadılar, C., Koçberber, G., "Türkiye Genelinde İlk ve Orta Öğretim Olanaklarının İncelenmesi ve Belirlenen Aksaklıklara Çözüm Önerilerinin Getirilmesi," TÜBİTAK, **2007**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Hatice ÖNCEL ÇEKİM

Doğum Yeri : Keçiören

Medeni Hali : Evli

E-posta : oncelhatice@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 06800, Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise : 2001-2004 Aydınlıkevler Lisesi

Lisans : 2004-2008 Gazi Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Çift Anadal Programı:2006-2009 Gazi Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2009-2011 Gazi Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Doktora : 2012-2017 Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce: 68 (KPDS)

İş Deneyimi

Eylül 2012-… Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik

Deneyim Alanları

Örnekleme Teorisi, Zaman Serileri Analizi

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Çekim, H. Ö., Kadılar, C., "New Unbiased Estimators with the help of Hartley-Ross Type Estimators," Pakistan Journal of Statistics, vol. 32, no. 4, pp. 247-260, 2016.

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

Çekim, H. Ö., Kadılar, C., "Hartley-Ross Type Unbiased Estimators using Stratified Random Sampling", IRSYSC 2016, Ankara, Türkiye, 2016.

Kadılar, C., Çekim, H. Ö., "Hartley-Ross type Estimators in Simple Random Sampling", ICNAAM 2014, Rodos, Yunanistan, 2014.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 28/03/2017

Tez Başlığı: Örnekleme Yöntemlerinde Hartley-Ross Tahmin Edicisine Dayalı Yeni Tahmin Ediciler

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 96 sayfalık kısmına ilişkin, 28/03/2017 tarihinde şahsım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 5 'tir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

28/03/2017

Adı Soyadı:	Hatice ÖNCEL ÇEKİM
Öğrenci No:	N12148226
Anabilim Dalı:	İstatistik
Programı:	İstatistik-Doktora
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

C. Kadılar

Prof. Dr. Cem KADILAR