TOPOLOJİK OYUNLARDA ÖRTÜSEL ÖZELLİKLER

COVERING PROPERTIES IN TOPOLOGICAL GAMES

HAIDAR DH JAFAR SARAF

PROF. DR. SELMA ÖZÇAĞ
Tez danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazrlanmıştır

Ocak 2023

ÖZET

TOPOLOJİK OYUNLARDA ÖRTÜSEL ÖZELLİKLER

Haidar DH Jafar Saraf
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Selma Özçağ
Ocak 2023, 58 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm oyun teorisi ve tez konusu olan topolojik oyunların tarihsel gelişimine ayrılmıştır. İkinci bölümde tez içerisinde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde örtüsel özellikler olan Menger ve Rothberger örtü özellikleri tanımlanmış bu özellikleri sağlayan uzay örnekleri verilmiştir. Dördüncü bölümde topolojik oyunlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Nokta-açık oyunu, Rothberger oyunu, Menger oyunu gibi bazı oyun örnekleri verilmiş, bu oyunlar kazanma stratejileri ile incelenmiştir. Ayrıca denk ve dual oyun kavramları da tanımlanmıştır.

Son bölüm olan beşinci bölümde oyun teorisinin temelini oluşturan ve Baire Kategori teoremi ile ilişkilendirilen Banach-Mazur oyunlarına yer verilmiştir. Ayrıca D-uzayları ve örtüsel özellikler ile olan ilişkileri de incelenmiştir.

Keywords: Topolojik oyunlar, Menger uzaylar, Rohtberger uzaylar, Kazanma stratejisi, Seçme prensipleri.

ABSTRACT

COVERING PROPERTIES IN TOPOLOGICAL GAMES

Haidar DH Jafar Saraf
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Selma Özçağ
January 2023, 58 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to game theory and the historical development of topological games, which is the subject of the thesis. In the second part, some definitions and theorems that will be used in the thesis are given.

In the third chapter, Menger and Rothberger covering properties are defined and some examples providing these properties are given. In the fourth chapter, topological games are examined in detail. Some examples of games such as point-open game, Rothberger game, Menger game are given and these games are examined with winning strategies. In addition, the concepts of equivalent and dual games are also defined.

In the fifth chapter, which is the last chapter, Banach-Mazur games, which form the basis of game theory and are associated with Baire Category theorem, are included. In addition, D-spaces and their relations with covering properties are also examined.

Keywords: Topological games, Menger spaces, Rothberger spaces, winning strategy, selection principles.

TEŞEKKÜR

Yükseköğrenim sürecim boyunca bana danışmanlık yapan ve yol gösteren sevgili danışman hocam Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Tezim süresince hep destek olan, yükümü hafifleten ve beni her zaman motive eden canım eşim Özlem ALKAN SARAF'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte benden desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, bana güvenen sevgili annem ve babama teşekkürlerimi sunuyorum ve tezimi onlara ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i

ABSTRACT i

TEŞEKKÜR ii

İÇİNDEKİLER iii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ iv

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR 3
   - 2.1 Topoloji 3
   - 2.2 Seçme Prensipleri Teorisi 7
   - 2.3 Oyunlara Giriş 9

3. ÖRTÜSEL ÖZELLİKLER 11
   - 3.1 Menger Uzaylar 11
   - 3.2 Rothberger uzaylar 14

4. TOPOLOJİK OYUNLAR 17
   - 4.1 Topolojik oyunların genel yapısı 17
   - 4.2 Seçici oyunlar 18
   - 4.3 Nokta-açık oyunu 20
   - 4.4 Rothberger oyunu 22
   - 4.5 Menger oyunu 29
   - 4.6 Sonlu-açık tipi oyunlar 34

5. TOPOLOJİK İLİŞKİLER VE UYGULAMALARI 38
   - 5.1 Banach-Mazur oyunları 38
   - 5.2 D-uzayları 43

6. SONUÇ 45

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ω	:	Doğal sayılar kümesi
C	:	Cantor kümesi
$\mathcal{C}$	:	Cantor uzayı
$\mathcal{O}$	:	Bir topolojik uzayın açık örtülerinin ailesi
S_{fin}	:	$\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ seçme yöntemi
S_1	:	$\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ seçme yöntemi
$\mathsf{G}(\mathsf{X})$	:	X topolojik uzayı üzerinde G oyunu
$\omega^{<\omega}$	:	ω'nın sonlu dizilerinin ailesi
$\tau \frown \beta$	:	τ sonlu dizisine β sonlu dizisinin eklendiğini belirten simge

1. GİRİŞ

Oyun teorisi tarihsel olarak çok eski zamanlara dayansa da bilimsel bir disiplin olarak ele alınması 17. yüzyılın başlarında matematik alanında, özellikle olasılık kalkülüsündeki gelişmelerle başlamıştır. Oyun teorisinin temel kavramlarından biri olan karma strateji kavramının da dayandığı nokta olan olasılık hesaplamalarındaki gelişmeleri 18. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi Pierre Remond de Montmort tarafından yazılan aynı zamanda min-max ilkesinin çıkış noktası olan şans oyunlarını konu edinen bir kitap takip etmiştir. Kombinatorik oyunların matematiksel tanımları ilk olarak 17. yüzyıl başlarında tanımlanmıştır. Örneğin Bachet ve Meziriac şu oyunu tanımlamıştır: İki oyuncu dönüşümlü olarak 1 ile 10 arasında sayı seçerler. İlk oyuncu bir sayı seçer ve sıra 2. oyuncuya geldiğinde O da bir sayı seçer ve ilk oyuncunun söylediği sayıya ekler. Sıra tekrar 1. oyuncuya geldiğinde tekrar bir sayı seçer ve toplama ekler. Oyun bu şekilde devam eder ve 100 'e ulaşan kazanır. Bu oyunda kazanan stratejilerin olup olmadığı, oyuna ilk başlayan kişinin oyunun sonucunu değiştirip değiştiremediği gibi sorular incelenmiştir. Bu tür oyunlar daha sonra Nim oyunları olarak adlandırılmış ve Bouton [8] tarafından incelenmişitr.

Oyun teorisinin, iki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda karma strateji dengesi fikrinin bulunması ve bu dengenin varlığının John von Neumann tarafından kanıtlanmasının ardından, O. Morgenstern ve J. Neumann tarafından 1944 yılında yayınlanan "*The theory of games and economic behavior* " isimli kitap [18] ile başladığı varsayılır. 1950 yılında John Nash n-kişilik oyunlar için bir denge kavramı tanımlamıştır. Bu kavramın oyuncuların fayda fonksiyonlarının belirli özellikleri sağladığı bütüm oyunlarda varolduğunu kanıtlamış ve karakterize etmiştir. Aslında John Nash sıfır toplamlı olmayan, sonlu ve n-kişilk oyunlarda da dengenin varlığını ispatlayarak Neumann'ın tanımlamış olduğu iki kişilk oyun dengesini genişletmiştir. Günümüzde Nash Dengesi olarak bilinen bu kavram, özellikle ekonomi ve diğer davranış bilimlerine geniş çapta uygulanmıştır. Bu çalışmaları ile 1994 de Nobel ekonomi ödülünü John Nash, John Harsanyi ve Reinhard Selten almışlardır.

Sonsuz uzunluktaki yani hamlelerin sonlu sayıda olmadığı, matematiksel oyunların incelenmesi 1920'li yıllara dayanmakta olup Sierpinski'nin [23] 1924'te, Hurewicz'in 1925'te [15] ve Banach ve Kuratowski'nin 1929'da yazdığı [5] üç makale ile başlar.

Topolojik oyun kavramı, ilk olarak Claude Berge [6] tarafından 1957 yılında, şuandaki kullanımından farklı olarak tanımlanmış ve daha sonra farklı bir anlamda, ”oyunlar tarafından tanımlanan topolojik özellikler” kavramı olarak Rastislav Telgarsky tarafından tanımlanmıştır. Telgarsky'nin makalesinde [27] topolojik oyunların kökeninin Banach Mazur oyunundan geldiği vurgulanmaktadır. 1935 yılında Stefan Banach, Lviv şehrinde yaşayan veya bu şehri ziyaret eden matematikçilerin çeşitli matematik problemleri önerdikleri ve aynı zamanda kısmi veya tam çözümlerini de içeren ”Scottish Book” isimli bir defter oluşturmuştur. 1935 yılında Stanislav Mazur, Baire Kategori Teoremi ile ilgili bir oyun tanımlar. Bu oyun ”The Scottish Book” kitabında [24] Problem 43 olarak ifade edilmiş ve çözümü Banach tarafından aynı yıl verilmiştir. O nedenle bu oyun Banach-Mazur oyunu olarak adlandırılır.

Topolojik oyunlar iki kişi tarafından topolojik uzaylar üzerinde oynanan mükemmel bilgili sonsuz oyunlardır. Oyuncular seçimlerini noktalardan, açık kümelerden, kapalı kümelerden veya açık örtülerden yaparlar.

Topolojik oyunlarda yapılan çalışmalar sonucunda Baire özelliği, Baire uzaylar tamlık ve yakınsama gibi bazı temel topolojik yapıların topolojik oyunlarda karşılığının olduğu ortaya çıktı [25]. Kısacası, topolojik oyunlar, topolojik uzayların yeni özelliklerini tanımlama konusunda yaygın bir kullanıma sahiptir. Son yıllarda popüler bir çalışma alanı olan seçme prensipleri konusu ile de oldukça yakın ilişkilidir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Tez çalışmamızın bu bölümünde kullanacağımız temel tanımlar ve teoremler verilecektir. X kümesi üzerinde tanımlanan topoloji τ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayını X ile ifade edeceğiz. Kaynak olarak [1, 10, 12, 13, 22] kullanılmıştır.

2.1 Topoloji

Tanım 2.1.1. τ ailesi boştan farklı X kümesinin altkümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir ve (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.

- $\emptyset, X \in \tau$
- $G_j \in \tau$ ise $\cup_{j \in J} G_j \in \tau$, her $j \in J$ için
- $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$ yani τ'ya ait sonlu sayıdaki kümelerin aarekesiti yine τ'ya aittir.

Tanım 2.1.2. (X, τ) topolojik uzay olsun.

- $G \in \tau$ olan bir $G \subseteq X$ alt kümesine X uzayının açık alt kümesi denir. $G^c \in \tau$ olan $G \subseteq X$ alt kümesine X uzayının bir kapalı alt kümesi denir.
- X boş kümeden farklı bir küme olsun. $\tau = \mathcal{P}(X)$ yani X kümesinin her alt kümesi, açık ise, X uzayına ayrık (discrete) uzay denir.
- $A \subseteq X$ olsun. $\cap\{K \subseteq X : A \subseteq K$ K kapalı$\}$ kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.1.3. (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0)$ elemanını kapsayan her H açık kümesi için x_0 elemanını kapsayan G açık kümesi $f(G) \subseteq H$ koşulunu sağlayacak biçimde varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denilir.

Tanım 2.1.4. (X, τ) topolojik uzayı

- T_1**-uzayıdır** $s \neq t$ özelliğini sağlayan her $s, t \in X$ nokta çifti için $s \in H$ $t \notin H$ ve $t \in K$ $s \notin K$ olan $H, K \in \tau$ kümeleri vardır.

- **Hausdorff uzayıdır (yada** T_2**-uzayıdır** $s \neq t$ özelliğini sağlayan her $s, t \in X$ nokta çifti için $s \in H$ ve $t \in K$ ve $H \cap K = \emptyset$ olacak biçimde $H, K \in \tau$ kümeleri vardır

Tanım 2.1.5. Boş olmayan X ve Y kümeleri arasında bire-bir, örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonu varsa bu kümelere eş güçlü kümeler denir ve $X \approx Y$ ile gösterilir. X kümesi ile $\mathbb{N}$ kümesi eşgüçlü ise X kümesine sayılabilir sonsuz denir. Sonlu yada sayılabilir sonsuz kümelere sayılabilir kümeler denir. Sayılabilir olmayan kümeye de sayılamaz bir küme denir.

Tanım 2.1.6. (X, τ) topolojik uzayı için $\tau = \tau_\rho$ olacak biçimde X üzerinde ρ metriği varsa (X, τ) topolojik uzayına metriklenebilir uzay denir.

Tanım 2.1.7. (Y, ρ) metrik uzayında $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir dizi olmak üzere her $\epsilon > 0$, her $p, q > n_0$ için

$$\rho(y_p, y_q) < \epsilon$$

olan $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (y_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Her Cauchy dizisi Y'nin bir elemanına yakınsak oluyorsa (X, ρ)'ya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.8. Bir topolojik uzayın sayılabilir sayıda tabana bulunuyorsa bu uzaya ikinci sayılabilirdir denir.

Tanım 2.1.9. (X, τ) topolojik uzayının her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilirdir denir.

Tanım 2.1.10. Bir X uzayında sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi olarak yazılabilen kümelere G_δ-küme ve sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilen kümelere de F_σ-küme denir. Açıkça görülebilir ki, F_σ-kümesinin tümleyeni G_δ-küme ve bir G_δ-kümesinin tümleyeni F_σ-kümedir.

Tanım 2.1.11. Her noktası bir yığılma noktası olan X topolojik uzayına mükemmel uzay denir. $G \subseteq X$ kapalı bir küme ve alt uzay topolojisine göre mükemmel ise G'ye X uzayında mükemmel küme denir.

Tanım 2.1.12. (X, τ) topolojik uzay, $C \subset X$ ve $\mathcal{U} = \{U_k : k \in K\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere

$$C \subseteq \bigcup_{k \in K} U_k$$

ise $\mathcal{U}$ ailesine C kümesinin bir *örtüsü* denir. $\mathcal{U}$ örtüsünün her elemanı bu uzayda açık ise $\mathcal{U}$ örtüsüne X'in bir *açık örtüsü* denir ve X uzayının tüm açık örtülerinin sınıfı da $\mathcal{O}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. $\mathcal{U}$ A kümesinin bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$'nun A'yı örten sonlu tane kümesi varsa

$$A \subseteq U_{i1} \cup U_{i2} \cup .... \cup U_{in}$$

olacak biçimde $U_{i1}, U_{i2}, ...U_{in}$ varsa

$$\mathcal{V} = \{U_{i1}, U_{i2}, ...U_{in}\}$$

sınıfına $\mathcal{U}$'nun sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.14. $A \subset X$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X uzayının her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü bulunabiliyorsa bu uzaya kompakt uzay denir.

Tanım 2.1.15. Eğer X uzayı sayılabilir çoklukta kompakt kümenin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa yani her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subseteq X$ kompakt kümeler olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

oluyorsa (X, τ) uzayına σ*-kompakt topolojik uzay* denir.

Teorem 2.1.16. *Her kompakt uzay* σ*-kompakttır.*

Tanım 2.1.17. X uzayının her bir açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa X'e Lindelöf uzay denir.

Tanım 2.1.18. X uzayının $F \subset X$ altkümesinin kapanışının içi boş küme ise F kümesine hiçbir yerde yoğun olmayan küme denir.

Tanım 2.1.19. $L \subseteq \mathbb{R}$ kümesi sayılamaz ve hiçbir yerde yoğun olmayan her N kümesi için $L \cap N$ sayılabilir ise L kümesine Luzin kümesi denir.

Örnek 2.1.20. S ile tüm reel sayıların kümesini gösterirsek $\mathcal{B} = \{[c,d) \subseteq S : c, d \in S, c < d\}$ olsun.$\mathcal{B}$ ailesi S için bir tabandır ve τ bu taban tarafından üretilen topoloji olsun. (S, τ) topolojik uzayına Sorgenfrey doğrusu denir.

Cantor Uzayı

Cantor kümesi, reel eksenin özel bir alt kümesidir ve $[0,1]$ kapalı aralığından ortadaki üçte birlik açık aralıkların çıkartılmasıyla elde edilir.

Tanım 2.1.21. $[0,1]$ kapalı aralığını F_0 ile gösterelim.İlk olarak F_0 dan orta üçte birlik açık aralık olan $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ aralığını çıkartalım. Geriye kalan ve uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan iki adet ayrık ve kapalı aralığın birleşimi

$$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

elde edilir. Benzer biçimde F_1 kümesini oluşturan kapalı aralıkların içinden orta $\frac{1}{3}$ lük aralıkları yani $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ve $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ aralıklarını çıkartalım. Bu adımlar sonucunda uzunlukları $\frac{1}{3^2}$ olan 4 tane ayrık kapalı aralığın birleşimi

$$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

kümesi elde edilir. Bu şekilde devam edilirse n. adımda uzunlukları $\frac{1}{3^n}$ olan 2^n tane ayrık kapalı aralığım birleşimi elde edilir. Kapalı kümelerinin arakesiti şeklinde olan

$$\mathbf{K} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

kümesine, Cantor kümesi denilir.

K Cantor kümesi, kapalıdır çünkü sayılabilir çoklukta sonsuz tane kapalı kümenin arakesitidir. **K** Cantor kümesi kompakttır çünkü $[0, 1]$ kompakt kümesinin kapalı bir alt kümesidir.

Teorem 2.1.22. **K** *Cantor kümesi hiçbir yerde yoğun değildir.*

Tanım 2.1.23. $2 = \{0, 1\}$ *kümesi üzerinde ayrık topoloji olsun.* $2 = \{0, 1\}$*'in kendisi ve sayılabilir sonsuz çarpımı ile oluşturulan uzaya Cantor uzayı denir. Bu durumda* 2^ω *bir Cantor uzayıdır ve*

$$\mathcal{C} = 2^\omega = \{0, 1\}^\omega$$

ile gösterilir.

Teorem 2.1.24. **C** *Cantor kümesi mükemmel bir kümedir.*

2.2 Seçme Prensipleri Teorisi

Seçme prensipleri teorisinin temeli, Cantor'un 1874 yılında yayınladığı makalesinde "gerçel sayılar kümesinin sayılamaz" olduğunun ispatında kullandığı köşegenleştirme yöntemine dayanır. Bu yöntem en basit olarak şu şekilde ifade edilebilir:

> "Aynı türden olan B_n matematik nesnelerinin bir $\big(B_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi verildiğinde , belirlenen bir kurala göre her B_n nesnesiyle ilişkili bir seçim yapılarak istenilen türde bir matematik nesnesinin elde edilmesi."

Seçme prensipleri, uzaylardaki kombinatorik özelliklerin incelenmesinde önemli rol oynamaktadır. Matematikte seçme prensipleri yada Sonsuz kombinatorik topoloji olarak bilinen bu teorinin geçmişi, 1920'li yıllara dayanmakla birlikte aslında bu konudaki sistemli yapı Scheepers'ın [22] makalesi ile başlar.

Seçme prensipleri teorisinin temel fikri şu şekilde açıklanabilir:

1 : Bir P topolojik özelliğinin seçici olarak P ile bağlantısının kurulması.

P: Her A için ... sağlayan bir B vardır.

Seçici P: Her $\big(A_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi için ... olan bir $\big(B_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

Örnek olarak, kompaktlığı P topolojik özelliği olarak alınırsa seçici P şu şekildedir: Xuzayının açık örtülerinin her $\big(\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi için $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{A}_n$'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere; $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, X'de bir örtü olacakşekilde $\big(\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\big)$ dizisi vardır.

2 : $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ matematik nesnelerinin iki sınıfı olduğunda, seçme yöntemi olarak π alındığında: π yöntemini $\mathcal{A}$ sınıfından yeni bir $\mathcal{B}$ sınıfı elde etmek için uygulamak.

Bahsedilen $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sınıfları topolojik uzaylarda tanımlanan çeşitli örtü sınıflarından oluşmaktadır. Örtü sınıfları ve aralarındaki ilişkiler hakkında daha detaylı bilgiye [16, 22] kaynaklarından ulaşılabilir. Bu tez konusu dahilinde kullanacağımız örtüler bir X uzayının açık örtü sınıfları olacaktır. Bu sınıfı $\mathcal{O}$ ile göstereceğiz.

Seçme prensipleri sisteminde üç temel seçme prensibi bulunmaktadır. Bunlar S_{fin}, S_1 ve U_{fin} yöntemleri olup literatürde "klasik seçme prensipleri" olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ boş olmayan kümelerin boş olmayan iki ailesi olsun.

- $\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$'nın elemanlarının her $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ dizisinden her $n \in \omega$ için bir $b_n \in A_n$ seçerek $\{b_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan $\langle b_n : n \in \omega\rangle$ dizisi vardır.
- $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$'nın elemanlarının her $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ dizisinden her $n \in \omega$ için sonlu bir $F_n \subseteq A_n$ seçerek $\bigcup\limits_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ dizisi vardır.
- $\mathsf{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ yöntemi: X'in sonlu altörtüleri bulunmayan $\mathcal{A}$'nın elemanlarının her $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ dizisinden her $n \in \omega$ için sonlu bir $F_n \subseteq A_n$ seçerek $\{\bigcup F_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ dizisi vardır.

Bu tez çalışmasında yukarıda tanımlanan seçme prensiplerinden ikisi, $\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ve $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ile ilgileneceğiz. Bir sonraki bölümde $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri yerine açık örtü sınıfları $\mathcal{O}$ alınarak Menger özelliği ve Rothberger özelliği tanımlanacaktır.

2.3 Oyunlara Giriş

Oyunları matematiksel olarak tanımlamanın birkaç farklı yolu olmakla birlikte tanımların hepsi aşağıda açıklanan ortak öğelere sahiptir.

- Oyuncu listesi,
- Oyuncuların neler yapabileceğinin tam bir açıklaması (olası eylemleri),
- Oyuncuların harekete geçtiklerinde ne kadar bilgiye sahip olduklarının açıklaması,
- Oyuncuların eylemlerinin kazançlara nasıl yol açtığının açıklaması,
- Oyuncuların oyunun sonuçlarına göre tercihleri

Bu öğeleri, örneğin satranç oyununda açıklayacak olursak;

- Oyunda 2 oyuncu vardır,
- Oyuncular, oyun sırasında hangi hareketlerin yapılabileceğine ilişkin kurallara tabii olarak, oyun tahtası üzerinde dönüşümlü olarak oynarlar,
- Oyuncular, birbirlerinin hareketlerini gözlemler, böylece oyun ilerledikçe her biri oyunun tüm geçmişini bilir,
- Diğer oyuncunun şahını ele geçiren oyuncu oyunu kazanır, aksi takdirde beraberlik ilan edilir,
- 5. öğe satrancın kuralları tarafından ima edilmese de, genellikle oyuncuların kazanmayı beraberliğe ve beraberliği kaybetmeye tercih ettiği varsayılabilir.

Bu tez çalışmasında rekabet eden iki oyuncu ve beraberliğe izin vermeyen mükemmel bilgili ardışık oyunlarla ilgileneceğiz. Bunlar, aşağıda kısaca açıklayacağımız oyun teorisinin sınıflandırma terimleridir:

Rekabet: Oyuncular bir amaç için işbirliği yapmak yerine rekabet eder;

Mükemmel bilgi: Oyunun her anında, her iki oyuncu da oyunun o ana kadarki tüm geçmişi hakkında bilgi sahibi olur;

Eşzamanlı oyunlar: Her iki oyuncunun da aynı anda (zaman anlamında değil) hareket ettiği veya bunun yerine sonraki oyuncuların önceki oyuncuların hareketlerinden habersiz olduğu oyunlardır.

Ardışık oyunlar (veya dinamik oyunlar): Bu tür oyunlarda oyuncular bir önceki oyuncunun haraketlri ile ilgili bilgiye sahiptir. Bu oyunlarda sırası gelen oyuncu önceki oyuncunun her eylemi hakkında mükemmel bilgiye sahip olması gerekmez; bu bilgi az da olabilir. Örnekle açıklayacak olursak, sırası gelen oyuncu, önceki oyuncunun bir haraketi gerçekleştirmediği hakkında bilgi sahibi iken diğer yapılan hareketlerden hangisini ilk oyuncunun gerçekleştirdiğini bilmeyebilir.

Beraberliğe izin verilmez : Bir oyunun sonunda, oyunculardan biri kazanır ve diğeri kaybeder.

3. ÖRTÜSEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde Menger ve Rothberger uzayları tanıtılmış, örnekler verilerek bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde [1, 4, 10] kaynaklarından faydalanılmıştır.

3.1 Menger Uzaylar

Tanım 3.1.1. Bir (X, τ) topolojik uzayının açık örtülerinin her $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi için $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{F}_n$ olacak şekilde $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$, $n \in \omega$ sonlu alt aileleri varsa X uzayına *Menger uzayı* yada Menger özelliğini sağlar denir.

Menger özelliği Seçme Prensipleri teorisinde $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ notasyonu ile gösterilmektedir.

Örnek 3.1.2. *Her kompakt uzay Menger uzayıdır. Gerçekten de X uzayı kompakt ise açık örtülerinin bir $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi verildiğinde her bir $n \in \omega$ için X'in sonlu bir $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ altörtüsü bulunabilir. Bu da X uzayının Menger uzay olduğunu yani $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağladığını gösterir.*

Tanımlardan aşağıdaki ön teoremi hemen ispatlayabiliriz.

Ön Teorem 3.1.3. *X uzayı $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlıyorsa Lindelöf uzaydır.*

Kanıt. X Menger uzayı ve $\mathcal{V}$, X'in bir açık örtüsü olsun. Eğer $n \in \omega$ için $V_n = \mathcal{V}$ olarak alınırsa $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi X kümesinin açık örtülerinin dizisi olur. X uzayının Menger uzayı olması sebebiyle her bir $n \in \omega$ için sonlu $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}_n$ alt ailesi bulunur. $\bigcup \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ alınırsa $\mathcal{U}$ ailesi X 'in açık örtüsü olup sayılabilirdir. Buradan X uzayı Lindelöf olur.

Ön Teorem 3.1.4. *$\{X_n : n \in \omega\}$ her $n \in \omega$ için X_n üzerinde $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğinin sağlandığı uzayların bir ailesi olsun.Bu durumda $Y = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ uzayı da $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlar.*

Kanıt. $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ ailesi Y uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. ω 'nın bir parçalanışı olarak $\{P_k : k \in \omega\}$ alalım. Her $k \in \omega$ ve $n \in P_k$ için $\mathcal{V}_n = \{V' = V \cap X_k : V \in \mathcal{U}_n\}$ olsun. Her $k \in \omega$ için $\langle \mathcal{V}_n : n \in P_k \rangle$ dizisi X_k'nın açık örtülerinin dizisi olduğundan, $\langle \mathcal{F}'_n : n \in P_k \rangle$ $\langle \mathcal{V}_n : n \in P_k \rangle$ için X_k üzerinde $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlayan bir dizi olur. Bu durumda her $n \in P_k$ için $\{V \cap X_k : V \in \mathcal{F}_n\} = \mathcal{F}'_n$ sağlayacak şekilde $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu bir küme olur. O halde $\langle \mathcal{F}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi Y üzerinde $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi için $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlar.

Sonuç 3.1.5. *X, σ-kompakt uzay ise Menger özelliğini sağlar.*

Sonuç 3.1.5 nin tersi doğru değildir. Örnek olarak Luzin kümesi verilebilir. Luzin kümesinin Rothberger özelliğini sağladığını (dolayısyla Menger özelliğini de sağlar) bir sonraki bölümde göstereceğiz. Ancak şimdi Luzin kümesinin Menger özelliğini sağladığını görelim.

Teorem 3.1.6. *[] Luzin kümeleri Menger özelliğini sağlar ancak σ-kompakt değildir.*

Kanıt. Öncelikle $L \subseteq \mathbb{R}$ Luzin kümesinin Menger özelliğini sağladığını gösterelim:
$\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ ailesi, L'nin açık örtülerinin bir dizisi ve L'nin sayılabilir yoğun altkümesi $K = \{k_n : n \in \omega\}$ olsun. K kümesi L kümesinde yoğun bir küme olup $n \in \omega$ için $k_n \in V_n$ biçiminde $V_n \in \mathcal{V}_n$ seçebiliriz. Şimdi

$$V = \bigcup_{n \in \omega} V_n$$

olsun. V kümesi K kümesini içeren açık bir küme ve K kümesi L'nin sayılabilir yoğun alt kümesi ayrıca L Luzin kümesi olup $L \setminus V$ sayılabilir olur.

$$L \setminus V = \{a_n : n \in \omega\}$$

olsun. Bu durumda her $n \in \omega$ için $a_n \in U_n$ olacak biçimde $U_n \in \mathcal{V}_n$ seçilebilir ve

$$L \setminus V \subseteq \bigcup_{n \in \omega} U_n$$

olur. Buradan $\mathcal{G}_n = \{V_n, U_n\} \subseteq \mathcal{V}_n$ sonlu ailelerinin birleşimi yani $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{G}_n$ L kümesinin açık örtüsü olup L kümesi için Menger özelliği sağlanır.

Şimdi L'nin σ-kompakt olmadığını göstereceğiz. Tersine L kümesini σ-kompakt kabul edelim. Bu durumda L kümesi sayılabilir sayıda kompakt kümenin birleşimi olarak yazılabildiğinden, yani $K_n \subseteq \mathbb{R}$ kümeleri kompakt olmak üzere

$$L = \bigcup_{n\in\omega} K_n$$

şeklindedir. Her $n \in \omega$ için K_n kümeleri kapalıdır ve L sayılamaz olduğundan $n_0 \in \omega$ için K_{n_0} sayılamazdır ve mükemmelbir küme kapsar. Aynı zamanda $\mathbb{R}$ uzayının mükemmel alt kümeleri hiçbir yerde yoğun olmayan küme kapsayacağından K_{n_0} kümesi için $C \subseteq K_{n_0}$ olur. C Cantor kümesi hiç bir yerde yoğun olmadığı için ve L kümesi bir Luzin küme olduğundan dolayı $L \cap C$'nin sayılabilir olduğu elde edilir. Ancak C kümesi L kümesinin alt kümesi olup bu ise $C = L \cap C$ ile çeliştiğinden L Luzin kümesinin σ-kompakt olmadığı sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.1.7. *(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzayları aşağıdakileri sağlar.*

(1) *X Menger uzayının $K \subseteq X$ kapalı altkümesi de Mengerdir.*

(2) *X uzayı Menger, $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise $f(X)$ kümesi Mengerdir.*

(3) *X uzayı Menger, $G \subseteq X$ F_σ ise G kümesi de Mengerdir.*

Kanıt. (1) X Menger ve K X'in kapalı bir altkümesi olsun. $\langle \mathcal{U}_n^K : n \in \omega \rangle$ ailesi K altkümesinin açık örtülerinden oluşan bir dizi olsun. Her bir $n \in \omega, \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n^K \cup \{X \setminus K\}$ ailesi (X, τ) uzayının açık örtüsü olup X'in $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ açık örtülerinin dizisi için X uzayı Menger olduğundan $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ olacak biçimde $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$,$n \in \omega$ sonlu alt aileleri vardır. Özel olarak $\mathcal{V}_n^K = \{V_n^K : V_n^K \in \mathcal{V}_n, V_n^K \cap (X \setminus K) = \emptyset\}$ alınırsa $\mathcal{V}_n^K$ ailesi K'nın açık örtüsü olur. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n^K \subseteq \mathcal{U}_n^K$ sonlu olup buradan $K \subseteq X$ kapalı altkümesinin de Menger olduğu elde edilir.

(2) $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olarak tanımlansın. $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ $f(X) \subseteq Y$'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun. $f(X) \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V$ olup

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V\Big)$$

ve

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} f^{-1}(V)$$

elde edilir. Her $V \in \mathcal{V}_n$ kümesi açıktır ve f sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$ de açık küme olur. Buradan $\mathcal{U}_n = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}_n\}$ ailesi X'in açık örtüsü olarak elde edilir. X Menger uzayı olduğundan her $n \in \omega$ için sonlu $\mathcal{U}'_n \subseteq \mathcal{U}_n$ ailesi vardır öyleki $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}'_n$ X uzayının açık örtüsü olur. Eğer $\mathcal{U}'_n = \{f^{-1}(V_i) : i = 0, 1, 2, ...k_n V_i \in \mathcal{U}_n\}$ olarak alınırsa

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i=0}^{k_n} f^{-1}(V_i)\Big) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i=0}^{k_n} V_i$$

olduğundan $\mathcal{V}'_n = \{V_i : i = 0, 1, 2, ...k_n\}$ olarak alınırsa $\mathcal{V}'_n \subset \mathcal{V}_n$ sonlu olup $\cup \mathcal{V}'_n : n \in \omega\}$ ailesi $f(X)$ kümesinin açık örtüsü olup buradan bu kümenin Menger olduğu elde edilir.

(3) Ön teorem 3.1.4 ve (1) numaralı özellik kullanılarak elde edilir.

3.2 Rothberger uzaylar

Tanım 3.2.1. *[21]* X uzayının açık örtülerinin her $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} U_n$ olacak şekilde $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ dizisi varsa X uzayına Rothberger uzayı ya da Rothberger özelliğini sağlar denir.

Rothberger özelliği Seçme Prensipleri teorisinde $\mathsf{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ notasyonu ile gösterilmektedir. Tanımdan hemen görülebileceği üzere:

Örnek 3.2.2. *Her sayılabilir uzay Rothberger uzayıdır.*

Şimdi kompakt uzaylar Rothberger özelliğini sağlar mı sorusuna cevap verelim.

Önerme 3.2.3. *Rothberger özelliğini sağlamayan kompakt bir K kümesi (Cantor kümesi, 2^ω) vardır.*

Kanıt. Her $n \in \omega$ için n. koordinatın izdüşümünü $\pi_n : 2^\omega \to 2$ ile gösterelim. $i \in 2$ için ${V_n}^i = \pi_n^{(-1)}(i)$ alalım. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{{V_n}^i : i \in 2\}$ kümesi 2^ω'nin bir örtüsü olur. Hatta her $n \in \omega$ için $i_n \in 2$ olmak üzere ${V_n}^{i_n}$ seçilirse $j_n \neq i_n$ olan her n için $\langle j_n : n \in \omega\rangle$ noktası örtülmeyecek olup bu da bize istediğimiz sonucu verecektir.

Bu önerme bize Menger özelliğini sağlayan ancak Rothberger olmayan uzay örneğini de vermektedir.

Önerme 3.2.4. *$\mathbb{R}$ üzerinde doğal topoloji olmak üzere, $\mathbb{R}$ uzayı Rothberger özelliğini ($\mathsf{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$) sağlamaz.*

Kanıt.

$$\mathcal{U}_n = \big\{(x, x + \frac{1}{2^n}) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ açık örtü dizisini alalım. Her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçilirse $\bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$ kümelerinin Lebesgue ölçümü 2 olup $\mathbb{R} \neq \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$ elde edilir.

Önerme 3.2.5. *[21] Eğer $L \subseteq \mathbb{R}$ bir Luzin kümesi ise L kümesi üzerinde Rothberger özelliği ($\mathsf{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$) sağlanır.*

Kanıt. $L \subseteq \mathbb{R}$ bir Luzin kümesi ve $D = \{d_k : k \in \omega\} \subseteq L$ sayılabilir yoğun küme olsun. $\mathbb{R}$'nin açık alt kümelerinin oluşturduğu $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ dizisi L kümesinin bir örtüsü ise her $k \in \omega$ için $U_{2k} \in \mathcal{U}_{2k}$ olacak şekilde $d_k \in U_{2k}$ seçelim. Şimdi $(\mathbb{R} \setminus \overline{L}) \cup \bigcup\limits_{k\in\omega} U_{2k}$ kümesinin açık ve yoğun olduğunu dikkate alırsak $F = L \setminus \bigcup\limits_{k\in\omega} U_{2k}$ hiçbir yerde yoğun olmayan küme olup bu nedenle sayılabilirdir. Ardından kalan örtülerin $\mathcal{U}_{2k+1} : k \in \omega$ her birinden bir açık küme seçerek kolaylıkla F kümesini örtebiliriz ki bu da bize istenen sonucu verecektir.

Teorem 3.2.6. *X topolojik uzayı Rothberger, $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise $f(X)$ kümesi Rothbergerdir.*

Kanıt. Sürekli fonksiyonlar altında Rothberger uzayların görüntülerinin Rothberger olduğu da Teorem 3.1.7 dekine benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.2.7. *X Rothberger uzay ise Mengerdir.*

Kanıt. (X,τ) topolojik uzayı Rothberger olduğundan X uzayının açık olan örtülerinin her $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n$ olacak şekilde $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ dizisi vardır. $\mathcal{V}_n = \{U_n\} = \mathcal{U}_n$ alındığında her $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$'nin sonlu alt ailesi olduğundan buradan X uzayının Menger olduğu elde edilir.

O halde bu özellikler arasındaki ilişkileri aşağıdaki şema ile özetleyebiliriz.

$$
\begin{array}{ccccccc}
Kompaktlık & \longrightarrow & \sigma - kompaktlık & \longrightarrow & Menger & \longrightarrow & Lindelöf \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & Rothberger & &
\end{array}
$$

4. TOPOLOJİK OYUNLAR

4.1 Topolojik oyunların genel yapısı

Bu tez çalışmasında sadece iki oyuncunun olduğu ve her pozitif tamsayı için bir hamlenin oynandığı oyunlar ele alınacaktır. Bu oyunlara ω uzunluğunda sonsuz iki oyunculu oyunlar denir.

Oyunlar I. oyuncu ve II. oyuncu şeklinde adlandırdığımız iki oyuncu ile oynanmaktadır. I. oyuncu oyuna ilk başlayan yani her bir karşılaşmada ilk hamleyi yapan kişidir. II. oyuncu ise I. oyuncunun hareketlerine cevap veren oyuncu olacaktır. Oyunda n. rauntta I. oyuncu ve II. oyuncunun sırasıyla oyunun kuralına göre belirli küme ailelerinden oluşan O_n ve T_n indis kümelerini seçmeleri gereklidir.

$$\begin{array}{lll} \text{I. oyuncu:} & O_1 & O_2 \dots O_n \dots \\ \text{II. oyuncu:} & T_1 & T_2 \dots T_n \dots \end{array}$$

$n \in \omega$ için I. ve II. oyuncu her bir rauntta karşı karşıya gelirler. Eğer $O_1,\ T_1, \dots, O_n,\ T_n$ karşılaşması belirli bir koşulu sağlıyorsa I. oyuncu oyunu kazanırken, aksi durum için II. oyuncu oyunu kazanır.

İki oyuncunun topolojik uzay üzerinde oynadığı mükemmel bilgili oyunlara topolojik oyunlar denir. Konumuz topolojik oyunlar olduğu için O_n ve T_n kümeleri uzayın noktaları, kapalı kümeleri, açık örtüleri gibi topolojik kavramlardan oluşacaktır.

Stratejiler

Bir oyuncu için strateji sezgisel olarak hamle yapma kuralı yada matematiksel ifadeyle bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Bu kural her oyuncunun her rauntta oyunu hangi hamle ile oynayacağını belirler. Oyuncular için strateji tanımlanırken oyunun geçmişi yani her iki oyuncu da rakibinin daha önceki hamlelelerinin neler olduğunu, oyunun kaçıncı rauntta olduğu gibi bilgiler gereklidir.

Bir oyunda I. oyuncunun bir *stratejisi*, tamamlanmamış sonlu $O_1,\ T_1, \ldots, O_n,\ T_n$ karşılaşmalarından I. oyuncunun seçebileceği kümelerin ailesine bir σ fonksiyonudur. $O_1,\ T_1, \ldots, O_n,\ T_n$ sonlu biçimdeki karşılaşmalar II. oyuncunun son hamlesi olan (T_n) ile sonlanmalıdır. Herhangi bir oyunda σ, I. oyuncunun stratejisi olsun. $n \in \omega$ olmak üzere $O_n = \sigma(O_1, T_1, \ldots, O_{n-1}, T_{n-1})$ olmak üzere, I. oyuncu oyundaki tüm $O_1,\ T_1,\ O_2,\ T_2, \ldots$ karşılaşmalarını kazanıyorsa bu oyunda σ stratejisine I. oyuncunun *kazanma stratejisi* yada kazanan strateji denir. Yani, eğer bir oyunda I. oyuncu σ stratejisine göre oyunu oynarsa ve bütün karşılaşmaları kazanırsa bu oyunda σ stratejisi I. oyuncu için kazanma stratejisidir.

$O_1, O_2, \ldots$ kümeleri $O_1 = \sigma(\emptyset)$, $O_2 = \sigma(O_1, T_1), \ldots$ şeklinde elde edildiğinden I. oyuncunun σ stratejisinin tanım kümesini II. oyuncunun seçebileceği kümelerin $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sonlu dizileri olarak alabiliriz.

Benzer şekilde II. oyuncu için strateji ve kazanma stratejisi kavramları tanımlanabilir. Herhangi bir oyunda hem I. hem de II. oyuncunun kazanma stratejisi olmaz. Oyunculardan birisinin kazanma stratejisi olduğu oyunlara saptanmış oyunlar denir. Bazı oyunlarda her iki oyuncunun da kazanma stratejisi olmayabilir. Bu tür oyunlara da saptanmamış oyun denir.

$\mathrm{I} \uparrow \mathsf{G}(\mathsf{X})$ ile X üzerinde oynanan $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ oyununda I. oyuncunun kazanma stratejisinin olduğu gösterilir. $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ oyununda I. oyuncunun kazanma stratejisinin olmadığı $\mathrm{I} \not\uparrow \mathsf{G}(\mathsf{X})$ ile gösterilir.

4.2 Seçici oyunlar

Tanım 4.2.1. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ boş olmayan kümelerin iki ailesi olsun.

- $\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$'nın elemanlarının her $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ dizisinden her $n \in \omega$ için bir $b_n \in A_n$ seçerek $\{b_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan $\langle b_n : n \in \omega \rangle$ dizisi vardır.
- $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ oyunu: I. oyuncu ile II. oyuncu , I. oyuncunun $A_n \in \mathcal{A}$ seçimine karşılık II. oyuncunun $b_n \in A_n$ yanıtını verdiği bir oyun düşünelim. Eğer $b_n \in \mathcal{B}$ ise oyunu II. oyuncu, aksi halde I. oyuncu kazanır.

Önceki bölümlerde Rothberger uzayının tanımını bir (X, τ) topolojik uzayının açık örtülerinin her $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} U_n$ olacak şekilde $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ dizisi vardır şeklinde vermiştik. Şimdi $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri yerine $\mathcal{O}$ ile göstereceğimiz açık örtüler ailesini alırsak:

Örnek 4.2.2. *Eğer $\mathcal{O}$, X topolojik uzayının bütün açık örtüleri ise $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ gösterimi " X Rothberger uzayı" ve $G_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ ise $Roth(X)$ oyununu temsil eder.*

Tanım 4.2.3. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ boş olmayan kümelerin iki ailesi olsun.

- $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$'nın elemanlarının her $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ dizisinden her $n \in \omega$ için sonlu bir bir $F_n \subseteq A_n$ seçerek $\bigcup_{n \in \omega} F_n \in \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ dizisi vardır.

- $G_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ oyunu: I. oyuncu ile II. oyuncu , I. oyuncunun $A_n \in \mathcal{A}$ seçimine karşılık II. oyuncunun boş kümeden farklı ve sonlu $F_n \subseteq A_n$ seçerek yanıtını verdiği bir oyun düşünelim. Eğer $\bigcup_{n \in \omega} F_n \in \mathcal{B}$ ise oyunu II. oyuncu, aksi halde I. oyuncu kazanır.

Örnek 4.2.4. *Eğer $\mathcal{O}$, X topolojik uzayının bütün açık örtüleri ise $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ gösterimi " X Menger uzayı" ve $G_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ ise $Menger(X)$ oyununu temsil eder.*

Teorem 4.2.5. $\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *ve* $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *seçme prensipleri arasında*

$$\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

ilişkisi sağlanır.

Kanıt. X uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğini sağlasın. Bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfının elemanlarından oluşan her $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ dizisinden, $n \in \omega$ için $b_n \in A_n$ seçerek, $\mathcal{B}$ ailesinde bir$\{b_n : n \in \omega\}$ elemanı elde edilebilir. O halde $F_n \subset A_n$ sonlu alt kümesini $F_n = \{b_n\}$ biçiminde seçersek $\mathcal{B}$'de bir

$$\bigcup_{n \in \omega} F_n = \{b_n : n \in \omega\}$$

elemanı elde edilip buradan X uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğini sağlar.

Teorem 4.2.6. *$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ boştan farklı aileler olsun. Eğer $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ oyununda I. oyuncunun kazanma stratejisi bulunmuyorsa $\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliği sağlanır.*

Kanıt. Tersine $\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliği sağlanmasın. Bu durumda $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan bir $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ ve $b_n \in A_n$ olacak şekilde $\langle b_n : n \in \omega\rangle$ dizisi için $\{b_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{B}$ olur. Açıkça (II. oyuncunun yanıtından bağımsız olarak) I. oyuncu $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ oyununda $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ dizisi ile oynar ise oyunu her zaman I. oyuncu kazanır.

Benzer şeklde aşağıdaki teorem de ispatlanır.

Teorem 4.2.7. *$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ boştan farklı aileler olsun. Eğer $G_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ oyununda I. oyuncunun kazanma stratejisi bulunmuyorsa $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliği sağlanır.*

Şimdi seçme prensipleri ve aralaraındaki ilişkilerden oluşan aşağıdaki şemayı verebiliriz.

$$\begin{array}{ccc}
II \uparrow G_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & II \uparrow G_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
I \not\uparrow G_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & I \not\uparrow G_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})
\end{array}$$

4.3 Nokta-açık oyunu

Bu bölümde, Telgarsky [27] ve Galvin [14] tarafından tanımlanan nokta-açık oyununu inceleyeceğiz. Bir X topolojik uzayı ve I. oyuncu, II. oyuncu diye adlandırdığımız iki oyucu düşünelim. Oyunda ilk hamleyi I. oyuncu, ikinci hamleyi II. oyuncu yapar ve bir raunt bu iki hamleden oluşur.

Tanım 4.3.1. $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, nokta-açık oyunu aşağıdaki kurala göre oynanır;

- $\forall n \in \omega$ için n. rauntta , I. oyuncu $x_n \in X$ noktası seçer, II. oyuncu ise bu seçime $x_n \in U_n \subset \mathbb{R}$ açık kümesi ile yanıt verir.

- $\langle x_0, U_o, x_1, U_1, ..., x_n, U_n, ..\rangle$ şeklindeki bir karşılaşmayı takip eden oyunun sonunda $X \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ise oyunu I. oyuncu aksi halde II. oyuncu kazanır.

Bazı özel durumlarda nokta-açık oyununun nasıl sonuçlandığına ilişkin aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

Örnek 4.3.2. *$X = \{a_n : n \in \omega\}$ sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda I. oyuncunun oyunu kazanması için tek yapması gereken her $n \in \omega$ rauntta a_n noktasını seçmektir.*

Örnek 4.3.3. *$X = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda II. oyuncunun oyunu kazanması için yapması gereken her $n \in \omega$ rauntta uzunluğu $\frac{1}{2^n}$ olan açık aralıklar seçmektir. Oyunun sonunda $\bigcup_{n\in\omega} U_n$ açık kümesi, uzunlukları toplamı $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} = 2$ olan açık aralıkların birleşimi olup reel ekseni örtmeyecektir.*

Örneklerden görüleceği üzere oyunun oynandığı X kümesinin özelliklerine göre I. oyuncunun veya II. oyuncunun oyunu kazanabileceği değişiklik göstermektedir. Sezgisel olarak, strateji, oyunu oynamanın bir yoludur. Bu, oyunculardan biri için sabit bir stratejinin, bu oyuncunun oyun sırasında karşılaşabileceği her olası durum için hangi kararın alınması gerektiğini bildirmesi gerektiği anlamına gelir.

Tanım 4.3.4. $\tau = \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ açık}\}$ olsun. $X \subset \mathbb{R}$ üzerinde oynanan nokta-açık oyununda

- I. oyuncu için strateji, $\varphi : \tau^{<w} \to X$ fonksiyonudur
- II. oyuncu için strateji, $\psi : X^{<w} \to \tau$ fonksiyonudur.

Tanım 4.3.5. $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere nokta-açık oyununda ;

- I. oyuncunun $\varphi : \tau^{<w} \to X$ stratejisine, $\mathbb{R}$ nin açık alt kümelerinden oluşan ve $\forall n \in \omega$ $(\varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) \in U_n)$ koşulunu sağlayan her $\langle U_n : n \in \omega\rangle$ dizisi için $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$ sağlanıyor ise kazanma stratejisi denir.
- II. oyuncunun $\psi : X^{<w} \to \tau$ stratejisine , X'in noktalarından oluşan her $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ dizisi için $X \nsubseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} \psi(\langle x_0, , , , , x_n\rangle)$ durumu oluşuyor ise kazanma stratejisi denir.

Tanım 4.3.6. Bir G topolojik oyununda

- I $\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ veya II $\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ ise saptanmış oyun;
- Diğer durumda yani I $\not\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ ve II $\not\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ ise saptanmamış oyun denir.

Her iki oyuncunun da bir G oyununda kazanma stratejisinin olması durumu yani I $\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ ve II $\uparrow$ $\mathsf{G}(\mathsf{X})$ geçerli olamaz. φ stratejisi I. oyuncu için ve ψ II. oyuncu için kazanma stratejileri olsaydı bu durumda I. oyuncunun φ stratejisine ve II. oyuncunun ψ stratejisine göre oynadığı bir G oyununun hem I. oyuncu hem de II. oyuncu için sona ermesi gerekirdi ki bu bir çelişkidir.

Sonlu oyunlar saptanmış oyunlardır.

Teorem 4.3.7. ([17], [28] G, beraberliğe izin vermeyen N uzunluğunda sonlu bir oyun ise G saptanmıştır.

Kanıt. I $\uparrow$ G demek,

$\exists a_1 \forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 ... \exists a_N \forall b_N$ I. oyuncu $< a_1, b_1, ...a_N, b_N >$ karşılaşmasını kazanır.

Bu durumda I $\not\uparrow$ G demek ise

$\forall a_1 \exists b_1 \forall a_2 \exists b_2, ... \forall a_N \exists b_N$ öyle ki I. oyuncu $< a_1, b_1, ...a_N, b_N >$ karşılaşmasını kazanamaz yani II. oyuncu kazanır; II $\uparrow$ G.

4.4 Rothberger oyunu

Bu oyun Galvin [14] tarafından tanımlanmıştır. Rothberger oyununda da her iki oyuncu her n pozitif tamsayısı için karşı karşıya gelir.

Tanım 4.4.1. *Bir X topolojik uzayı üzerinde Rothberger oyunu ($Roth(X)$) aşağıdaki kurallara göre oynanır;*

- *$\forall n \in \omega$ için, I. oyuncunun X'in bir açık $\mathcal{U}_n$ örtüsü seçimine, II. oyuncu açık $U_n \in \mathcal{U}_n$ kümesi ile yanıt verir.*
- *$\langle \mathcal{U}_0, U_0, \mathcal{U}_1, U_1, ..., \mathcal{U}_n, U_n, ... \rangle$ karşılaşmasında $X \subset \bigcup_{n\in\omega} U_n$ durumunda oyunu II. oyuncu , aksi durumda I. oyuncu kazanır.*

(X, τ) uzayı üzerinde tanımlanan Rothberger oyununda

Tanım 4.4.2.
- *I. oyuncu için strateji, $\varphi : \tau^{<w} \rightarrow \mathcal{O}$ fonksiyonu olup $\mathcal{O} = \{\mathcal{U} \subseteq \tau : X = \bigcup \mathcal{U}\}$*
- *II. oyuncu için strateji, $\psi : \mathcal{O}^{<w} \rightarrow \tau$ fonksiyonudur. Burada her $\langle \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ...\mathcal{U}_n \rangle \in \mathcal{O}^{<w}\{\langle\rangle\}$ ve $\psi(\langle \mathcal{U}_0, ...\mathcal{U}_n \rangle) = U_n \in \mathcal{U}_n$ dir.*

Sayılabilir uzayların Rothberger uzay olduğu örnek 3.2.2 de verilmişti. Şimdi aşağıdaki diagramı verelim.

$$\begin{array}{c} X\ sayılabilir \\ \Downarrow \\ II \uparrow Rothberger(X) \\ \Downarrow \\ I \not\uparrow Rothberger(X) \\ \Downarrow \\ X\ \ Rothberger \end{array}$$

Tanımladığımız iki oyunu birbiri ile ilişkilendirmek istediğimizde öncelikle aşağıdaki kavrama ihtiyaç duyarız.

Tanım 4.4.3. G ve G' iki oyun olmak üzere, aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda bu iki oyuna dual oyunlar denir.

- $\mathsf{I} \uparrow \mathsf{G} \Leftrightarrow \mathsf{II} \uparrow \mathsf{G}'$
- $\mathrm{II} \uparrow \mathsf{G} \Leftrightarrow \mathsf{I} \uparrow \mathsf{G}'$

Teorem 4.4.4. *[14] Her (X,τ) topolojik uzayında nokta-açık oyunu ve Rothberger oyunu dualdir.*

Kanıt. I $\uparrow$ nokta-açık $(X) \Rightarrow$ II $\uparrow$ $Roth(X)$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}_0$ I. oyuncu'nun $Roth(X)$ oyununda ilk hamlesi olsun. Buna karşılık, φ I. oyuncunun $açık - nokta(X)$ oyununda kazanma stratejisi olmak üzere, II. oyuncu $\varphi(\langle\rangle) = x_0 \in \mathcal{U}_0$ seçimini yapsın. Bu şekilde başlayan $Roth(X)$ oyununda $\forall n \in \omega$ için n. hamlede II. oyuncu ilk hamlesindeki gibi seçimlerini hem $nokta - açık(X)$ oyununda hem de $Roth(X)$ oyununda aynı seçer ise sırasıyla ;

$$\langle\varphi(\langle\rangle), U_0, \varphi(U_0), U_1, \varphi(U_0, U_1), U_2, ..., \varphi(U_0, U_1, ..., U_{n-1}), U_n, ..\rangle$$

$$\langle\mathcal{U}_0, U_0, \mathcal{U}_1, U_1, ..., \mathcal{U}_n, U_n, ..\rangle$$

şeklinde karşılaşmalar elde edilir . φ stratejisi I. oyuncu için $nokta - açık(X)$ oyununda kazanma stratejisi olduğundan $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ elde edilir. Böylece II. oyuncu $Roth(X)$ oyununu kazanmış yani II $\uparrow$ $Roth(X)$ olur.

Şimdi de II $\uparrow$ $Roth(X) \Rightarrow$ I $\uparrow$ nokta-açık (X) olduğunu gösterelim. ψ, $Roth(X)$ oyununda II. oyuncu için kazanma stratejisi olsun. Buna göre, nokta-açık(X) oyununda I. oyuncu için kazanma stratejisi tanımlayacağız.

İddiamız $x_o \in X$ noktasının her bir U açık komşuluğu için $\psi(\langle\mathcal{U}\rangle) = U$ olacak biçimde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ vardır. Tersine her $x \in X$'in $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ için $\psi(\langle\mathcal{V}\rangle$ şeklinde yazılamayan bir açık U_x komşuluğu olsun. O halde $\mathcal{V}' = \{U_x : x \in X\} \in \mathcal{O}$ olup böylece bazı $a \in X$ için $\psi(\langle\mathcal{V}'\rangle) = U_a$ olup bu U_a'nin seçimi ile çelişir. Yani $\exists\, x_0 \in X$ ve bu noktanın her komşuluğu $\psi(\langle\mathcal{U}\rangle) = U$ formunda yazılır. I. oyuncu $nokta - açık(X)$ oyununda ilk hamlesini iddiadaki şekilde $x_o \in X$ ile yapsın. II. oyuncu $x_0 \in U_0$ olacak şekilde açık bir U_0 kümesi seçerek karşılık versin. Yine iddiadan bazı $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{O}$ için $U_0 = \psi(\langle\mathcal{V}_0\rangle)$ olur. Şimdi iddiamız $x_1 \in X$'in açık her bir U komşuluğu için $\psi(\langle\mathcal{V}_0, \mathcal{V}\rangle) = U$ olan $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ vardır. I. oyuncu $açık - nokta(X)$ oyununda 2. rauntta $x_1 \in X$ seçimi ile başlasın. Bu defa da II. oyuncu $x_1 \in U_1$ olacak şekilde açık bir U_1 kümesi seçerek karşılık versin. Yine iddiadan bazı $\mathcal{V}_1 \in \mathcal{O}$ için $U_1 = \psi(\langle\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1\rangle)$

olur. Her hamlede I. oyuncu $nokta - açık(X)$ oyununu bu şekilde oynar ise

$$\langle x_0, U_0, x_1, U_1, ..., x_n, U_n, ..\rangle$$

karşılaşmasını ve $Roth(X)$ oyununda

$$\langle \mathcal{V}_0, \psi(\langle \mathcal{V}_0\rangle), \mathcal{V}_1, \psi(\langle \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1\rangle), ..., \mathcal{V}_n, \psi(\langle \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_{n-1}\rangle), ..\rangle$$

karşılaşmasını elde ederiz.

ψ II. oyuncu için $Roth(X)$ oyununda kazanma stratejisi olduğundan $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ olup I. oyuncu $nokta - açık(X)$ oyununu kazanır.

Şimdi de I $\uparrow$ $Roth(X)$ $\Leftrightarrow$ II $\uparrow$ nokta-açık(X) olduğunu ispatlayalım. Öncelikle I $\uparrow$ $Roth(X) \Rightarrow$ II $\uparrow$ nokta-açık(X) olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ $nokta - açık(X)$ oyununda I. oyuncunun ilk seçimi olsun. I. oyuncunun $Roth(X)$ oyununda kazanma stratejisi φ ve $\varphi(\langle\rangle) = \mathcal{U}_0$ onun ilk seçimi olmak üzere, II. oyuncu $nokta - açık(X)$ oyununda x_0 seçimine $U_0 \in \mathcal{U}_0$ ve $x_0 \in U_0$ koşularını sağlayan U_0 ile yanıt versin. I. oyuncu'nun $x_1 \in X$ seçimine karşılıkta, II. oyuncu yanıtını $x_1 \in U_1 \in \varphi(\langle U_0\rangle)$ koşulunu sağlayan U_1 ile versin. Aynı şekilde x_n seçimine II. oyuncu, $x_n \in U_n \in \varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle)$ seçimi ile yanıt verir ise, $nokta - açık(X)$ ve $Roth(X)$ oyunları için sırasıyla ;

$$\langle x_0, U_0, x_1, U_1, ..., x_n, U_n, ..\rangle$$

$$\langle \varphi(\langle\rangle), U_0, \varphi(\langle U_0\rangle), U_1, ..., \varphi(\langle U_0, ..., U_{n-1}\rangle), U_n, ..\rangle$$

şeklinde oynanan iki oyunda II. oyuncu'nin hamleleri aynı olup, I. oyuncu $Roth(X)$ oyununda kazanma stratejisi ile oynadığından $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ailesi X'i örtemez. Yani $nokta - açık(X)$ oyununu II. oyuncu kazanır.

Bu iki oyunun dual olduğunu ispatlamak için son olarak II $\uparrow$ nokta-açık$(X) \Rightarrow$ I $\uparrow$ $Roth(X)$ olduğunu gösterelim. ψ, II. oyuncu için nokta-açık(X) oyununda kazanma stratejisi olmak üzere I. oyuncu'nun $Roth(X)$ oyunundaki birinci hamlesi $\mathcal{U}_0 = \{\psi(x) : x \in X\}$ olsun ve $X \subseteq \bigcup_{x\in X} \psi(x)$ olduğundan $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$. II. oyuncu'nun herhangi bir $\psi(x_0) \in \mathcal{U}_0$ seçimi ilk hamlesi x_0 olan $nokta-açık(X)$ oyununda kazanma stratejisi ile seçeceği yanıt ile aynı olur. Benzer şekilde I. oyuncu $Roth(x)$ oyunundaki ikinci hamlesini $\mathcal{U}_1 = \{\psi(\langle x_0, x\rangle)|x \in X\}$ örtüsü ile seçer ise II. oyuncu'nun herhangi bir $\psi(\langle x_0, x_1\rangle) \in \mathcal{U}_1$ yanıtını aslında kazanma stratejisi ile oynanan ve I. oyuncu'nin ilk iki hamlesinin x_0, x_1 olduğu $nokta - açık(X)$ oyunundaki yanıtı ile aynı olur.

Bu şekilde I. oyuncu $Roth(X)$ oyununda $\forall n \in \mathbb{N}$ için n. hamlesini

$\mathcal{U}_n = \{\psi(\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x\rangle) : x \in X\}$

şeklinde seçer ise $\langle \mathcal{U}_0, \psi(x_0), \mathcal{U}_1, \psi(\langle x_0, x_1\rangle), ..., \mathcal{U}_n, \psi(\langle x_0, ..., x_{n-1}, x_n\rangle), ...\rangle$ biçiminde oynanan $Roth(x)$ oyunundaki II. oyuncu'nun hamleleri ile $açık - nokta(X)$ oyunundaki hamleleri aynı olup ,$nokta - açık(X)$ ve $Roth(X)$ oyunları için sırasıyla aşağıdaki duallik elde edilir;

$$\langle \mathcal{U}_0, \psi(x_0), \mathcal{U}_1, \psi(x_0, x_1), ..., \mathcal{U}_n, \psi(x_0, x_1, ..., x_n), ...\rangle$$

$$\langle x_0, \psi(x_0), x_1, \psi(x_0, x_1), ..., x_n, \psi(x_0, x_1, ..., x_n), ..\rangle$$

$nokta - açık(X)$ oyununda II. oyuncu kazanma stratejisi ile oynadığından X $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \psi(x_0, ..., x_n)$ ile örtülemez. Yani I. oyuncu $Roth(X)$ oyununu kazanır.

Teorem 4.4.5. *[20] X uzayının Rothberger özelliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul Rohberger (X) oyununda I. oyuncunun kazanma stratejisinin bulunmamasıdır.*

Kanıt. I. oyuncunun kazanma stratejisi yoksa, Rothberger özelliğinin sağlandığı açık. Tersine X Rothberger uzayı olsun. Her açık örtüden bir eleman seçmek, aynı zamanda sonlu alt küme seçmek olduğundan X'e Menger uzayı diyebiliriz. Menger uzayları aynı zamanda Lindelöf olduğundan X'in açık örtülerini sayılabilir kabul edebiliriz. Dolayısıyla, γ Rothberger oyununda I. oyuncu için bir strateji olmak üzere,γ'nın örtülerinin elemanlarını numaralandırabiliriz. Bu numaralandırma γ ile oynanan hamleleri sonlu doğal sayı dizileri ile temsil etme şansı verir . Şöyle ki; $\{2,3\}$ sonlu doğal sayı dizisi, $\gamma(\langle\rangle)$ hamlesine II. oyuncu $\gamma(\langle\rangle)$ nın 2 numaralı açık kümesi ile yanıt vermiş ve bu yanıta $\gamma(\langle U_2\rangle)$ ile karşılık verildiğinde II. oyuncu 3 numaralı açık kümeyi seçerek yanıtlamıştır . Böylece oyun

$$\langle\gamma(\langle\rangle), U_2, \gamma(\langle U_2\rangle), U_{2,3}, \gamma(\langle U_2, U_{2,3}\rangle)........\rangle$$

şeklinde oynanmış olur . Burada açık örtüleri sayılabilir oldukları için numaralandırdığımız unutulmamalı. Daha sade bir yazım için $\gamma(\langle U_2, U_{2,3}\rangle)$ açık örtüsü ispat boyunca $\mathcal{U}_{2,3}$ olarak kısaltılacaktır. Yani yukarıda bir kaç hamlesi gösterilen oyun ;

$$\langle\mathcal{U}_{\langle\rangle}, U_2, \mathcal{U}_2, U_{2,3}, \mathcal{U}_{2,3}, ...\rangle$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

Rothberger oyununda I. oyuncu için γ stratejisi ile Menger oyununda I. oyuncu için $\overline{\gamma}$ stratejisi oluşturalım. $\overline{\gamma}(\langle\rangle) = \gamma(\langle\rangle) = \mathcal{U}_{\langle\rangle}$ olsun. II. oyuncu $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}_{\langle\rangle}$ ile yanıt verdiğinde , $m_0 = max\{i_0 : U_{i_0} \in \mathcal{F}_0\}+1$ olmak üzere I. oyuncu $\overline{\gamma}(\langle\mathcal{F}_0\rangle) = \bigwedge_{i_0\in m_0} \mathcal{U}_{\langle i_0\rangle}$ ile karşılık versin. $(\mathcal{A}\bigwedge\mathcal{B} = \{A_i \bigcap B_n \mid A_i \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}\})$. Eğer daha sonra II. oyuncu $\mathcal{F}_1 \subset \bigwedge_{i_0\in m_0} \mathcal{U}_{\langle i_0\rangle}$ ile yanıt verirse, $m_1 = max\{i_1 : U_{\langle i_0,i_1\rangle} \in \mathcal{F}_1\} + 1$ olmak üzere I. oyuncu ;

$$\overline{\gamma}(\langle\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\rangle) = \bigwedge_{s\in m_0\times m_1} \mathcal{U}_s$$

ile karşılık versin. Böyle devam eden bir Menger oyununda Teorem 4.5.4'e göre II. oyuncu nun oyunu kazandıracak $\langle\mathcal{F}_n : n \in N\rangle$ seçimleri varıdır . $\mathcal{U}_n$, $\langle\mathcal{F}_n : n \in N\rangle$ nin farklı elemanlarından alınan n tane açık kümenin kesişimlerinden oluşan bir küme olsun. Böylece $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, ...$ açık örtüleri oluşturulabilir. X Rothberger uzayı olduğundan bu açık örtülerin her birinden sırasıyla $V_1, V_2, V_3, ...$ seçimleri X uzayını örtecek şekilde seçilebilir. Burada her bir V_n yi $\mathcal{F}_i$ içinde bir küme olacak şekilde genişletilebilir. Böylece II. oyuncu

, γ stratejisi ile oynan hamlelere bu genişletilmiş kümeleri takip ederek seçimlerini yaparsa I. oyuncu γ ile oynadığı oyunu kazanamaz.

Teorem 4.4.6. *[14] X uzayı her noktası G_δ kümesi olan bir topolojik uzay olsun. X uzayının sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul Rohberger (X) oyununda II. oyuncunun kazanma stratejisinin olmasıdır.*

Kanıt. X uzayı sayılabilir ise II. oyuncunun $Roth(X)$ oyununda kazanma stratejisinin olduğu açıktır. Şimdi II. oyuncunun $Roth(X)$ oyununda kazanma stratejisinin olduğunu kabul edelim. Rothberger oyunu ile nokta-açık oyunu dual oyunlar olduğu için I. oyuncunun nokta-açık oyununda kazanma stratejisinin olduğunu kabul edebiliriz. $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap\limits_{n\in\omega} V_k(x)$ şeklinde $\langle V_k(x) : k \in \omega\rangle$ açık kümeler dizisi olsun. Şimdi X üzerinde nokta-açık oyunu oynayalım. I. oyuncu bir $x \in X$ noktası oynadığında II. oyuncunun $V_k(x)$ kümelerinden birini seçecek kadar saf olduğunu varsayacağız. Oyunu şu şekilde oynayacaklar:

- I. oyuncu $x_{\langle\rangle}$ oynasın,
- II. oyuncu k_0 seçsin (aslında $V_{k_0}(x_{\langle\rangle})$ ile oynadığında demek)
- I. oyuncu $x_{\langle k_0\rangle}$ ile oynasın,
- II. oyuncu k_1 seçsin (aslında $V_{k_1}(x_{\langle k_0\rangle})$ ile oynadığında demek)
- I. oyuncu $x_{\langle k_0,k_1\rangle}$ ile oynasın,
- Oyun bu şekilde devam ederse

I. oyuncu yalnızca sayılabilir sayıda nokta ile, yani $s \in \omega^{<\omega}$ için x_s noktaları ile oynayabilir. I. oyuncunun bu oyunda kazanma stratejisi varsa bu noktaların uzayı örtmek için yeterli olması gerekir, yani $X = \{x_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ sayılabilir olmalıdır. Varsayalım ki bu sağlanmıyor. Her $s \in \omega^{<\omega}$ için $y \neq x_s$ olmak üzere $y \in X$ olsun. Her hamlede II. oyuncu y noktasını içermeyecek şekilde $V_k(x_s)$ ile oynasın. Bu şekilde giderse II. oyuncu oyunu kazanır ancak bu I. oyuncunun nokta-açık oyununda kazanma stratejisinin varolması ile çelişir. Buradan X uzayının sayılabilir olduğunu elde ederiz.

Sonuç 4.4.7. *$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $Roth(X)$ oyununun saptanmış oyun olması için gerekli ve yeterli şart X'in sayılamaz ve Rothberger uzay olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 4.4.5 ve Teorem 4.4.6 dan aşikardır.

4.5 Menger oyunu

Oyundaki her karşılaşmada II. oyuncu bir açık kümeden daha fazla küme seçebilseydi ne olurdu sorusu üzerinde düşünelim.

Tanım 4.5.1. (X, τ) uzayı üzerinde Menger oyunu aşağıdaki kurallara göre oynanır;

- $\forall n \in \omega$ için, I. oyuncu n.hamlede X'in bir açık $\mathcal{V}_n$ örtüsünü seçer, II. oyuncu bu seçimi boştan farklı ve sonlu $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{V}_n$ seçimi ile yanıtlar.
- $\langle \mathcal{V}_0, \mathcal{F}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{V}_n, \mathcal{F}_n, ...\rangle$ oyununda eğer $X \subset \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ ise II. oyuncu oyunu kazanır. Diğer durumda I. oyuncu kazanır.

Tanım 4.5.2. Menger oyununda, $\mathcal{F} = \big\{F \mid F \text{sonlu}, F \subset \mathcal{V}\big\}$ olmak üzere $\varphi : \mathcal{F}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{O}$ I. oyuncu için , $\psi : \mathcal{O}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$ ise II. oyuncu için strateji olmak üzere;

- $\mathcal{F}$ kümesinde $(\forall n \in \omega)(F_n \subset \varphi(\langle F_0, F_1, ..., F_{n-1}\rangle)$ koşulunu sağlayan her $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ dizisi için $X \neq \bigcup_{n\in\omega} F_n$ oluyor ise φ, I. oyuncu için kazanma stratejisidir.
- $\mathcal{O}$ açık örtüler kümesinde her $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega\rangle$ dizisi için $X = \bigcup_{n\in\omega} \psi(\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle)$ ise ψ, II. oyuncu için kazanma stratejisidir.

X uzayı σ-kompakt yani sayılabilir sayıda kompakt kümenin birleşimi olarak yazılabiliyor ($X = \bigcup_{n\in\omega} K_n$ herbir $n \in \omega$ için K_n kümeleri kompakt) ise II. oyuncunun Menger(X) oyununda kazanma stratejisi vardır. II. oyuncunun yapması gereken her bir $n \in \omega$ hamlede

K_n kümesini örtecek şekilde sonlu $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{V}_n$ seçmektir. Buradan aşağıdaki diagram elde edilir.

$$\begin{array}{c} X\,\sigma - kompakt \\ \Downarrow \\ II \uparrow Menger(X) \\ \Downarrow \\ I \not\uparrow Menger(X) \\ \Downarrow \\ X\ Menger \end{array}$$

Teorem 4.5.3. *[26] X metriklenebilir uzay olsun. II. oyuncunun Menger(X) oyununda kazanma stratejisinin olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının σ-kompakt olmasıdır.*

Kanıt. $\Leftarrow$ (X,τ) bir σ-kompakt uzay olsun.Yani $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\forall$ i için $A_i \subset X$ ve Ai kompakt.Bu uzay üzerinde oynanan Menger oynunda I. oyuncu, ilk hamle için $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{O}$ açık örtüsünü seçsin. Buradan $A_1 \subset X$ olduğundan $A_1 \subset \bigcup \mathcal{U}_1$. Bu durumda $\mathcal{U}_1$ A_1 için bir örtü olur. A_1 kompakt olduğu için $\exists F_1(F_1 \subset \mathcal{U}_1, F_1 sonlu)$ öyle ki $A_1 \subset \bigcup F_1$. II. oyuncu ilk hamlesini F_1 seçerek oynasın. Oyun n. hamledeyken I. oyuncu'nun $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}$ hamlesine II. oyuncu A_n kompakt kümesini örten F_n hamlesi ile cevap versin. Bu durumda;

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = X$$

Böylece II. oyuncu oyunu kazanır.

$\Rightarrow$ Bunun için;

$$K_s = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{O}} \overline{\bigcup \psi(s \frown < \mathcal{C} >)}$$

kümesinin kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Burada ψ, II. oyuncu için kazanma stratejisi , s, $\mathcal{O}$ nin sonlu bir dizisi ve $s \frown < \mathcal{C} >$ de bu diziye son eleman olarak $\mathcal{C}$ eklenmesi anlamında kulanılmıştır.

$\mathcal{L}$, K_s için bir açık örtü ve her $x \in K_s$ için $U_x \in \mathcal{L}$ olmak üzere $x \in U_x$ olsun. X aynı zamanda regüler olduğu için $\forall x \in K_s$ için en az bir V_x açık kümesi vardır öyle ki $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$. Eğer $y \in X \backslash K_s$ ise ,Uzay metriklenebilir olduğundan , V_y kümesi $y \in V_y$, $\overline{V_y} \cap K_s = \emptyset$ olacak şekilde seçilebilir.Böylece $\mathcal{M} = \{V_y : y \in X\} \in \mathcal{O}$.Ayrıca doğal olarak;

$$K_s \subset \overline{\bigcup \sigma(s \frown \mathcal{M})}$$

kapsaması sağlanır. Böylece $\sigma(s \frown \mathcal{M})$ kümesi sonlu sayıda V_x kümesinden ibaret olur. Kapsamadan anlaşılacağı gibi aynı zamanda K_s için bir örtü de olur. Bu V_x kümeleri yerine onları kapsayan U_x kümeleri seçilir ise $\mathcal{L}$'nin K_s'i örten sonlu alt örtüsü elde edilir.

Boş kümeden farklı $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri için her zaman $I \not\uparrow G_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow \mathsf{S}_{fin}((\mathcal{A}, \mathcal{B})$ geçerli olduğu Teorem 4.2.7 de kanıtlanmış idi. Ancak özel olarak Menger oyunu alındığında bu ifadenin ters yönününde yani X uzayı $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğinde ise $I \not\uparrow G_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ sağlandığı Hurewicz [15] tarafından ispatlanmış olup literaturde Hurewicz teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.4. *[15] X topolojik uzayının Menger özelliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul I. oyuncunun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisinin bulunmamasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) I. oyuncunun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisinin olmadığını varsayarak X topolojik uzayının Menger özelliğini sağladığını göstereceğiz. X uzayının açık örtülerinin bir $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ dizisi verildiğinde her bir n için $\mathcal{U}_n$ kümelerini I. oyuncunun n. rauntta seçeceği açık örtüler olarak düşünürsek I. oyuncu için bir strateji belirlemiş oluruz. Ancak I. oyuncunun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisinin olmadığını kabul etmiştik . O halde aşağıdaki karşılaşmayı

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

II. oyuncu kazanır. Açıktır ki n için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ olduğunda $X = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ sağlanacağından X uzayı Menger özelliğini sağlar.

($\Rightarrow$) X topolojik uzayı Menger uzay olsun. I. oyuncunun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisinin olmadığını gösterelim:

Kabul ettiklerimiz

1. II. oyuncu Menger (X) oyununda I. oyuncunun seçmiş olduğu açık örtünün sonlu bir alt kümesini seçer ve seçmiş olduğu bu kümelerin birleşimi oyunun sonucunu belirleyecektir. Bu nedenle I. oyuncunun belirleyeceği açık örtüleri en baştan artan açık örtüler şeklinde almalıyız.

2. $1.$ maddede verilen şekilde artan açık örtüler dizisinden II. oyuncu bir eleman seçtiğinde genellik bozulmayacaktır.

3. Oyunun bir karşılaşmasında II. oyuncu, açık U_n kümesini seçtiğinde I. oyuncunun seçeceği $\mathcal{U}_{n+1}$ artan biçimli açık örtülerinin elemanlarının U_n'i kapsadığını kabul edebiliriz.

Menger(X) oyunu bu anlaşmalar çerçevesinde oynandığı zaman : I. oyuncu artan açık bir örtü seçtiğinde seçilen örtünün elemanları II. oyuncunun son olarak seçtiği açık kümeyi kapsayacaktır. II. oyuncu ise I. oyuncunun seçmiş olduğu örtülerin içinden bir eleman alıyor.

Şimdi, Menger(X) oyununu I. oyuncu bir φ stratejisi ile oynasın. I. oyuncu açısından φ stratejisinin bir kazanma stratejisi olmadığını, diğer anlamda II. oyuncu tarafından φ stratejisinin başarısız yapılacağını göstereceğiz.

I. oyuncunun φ stratejisine göre birinci hamlesi $\varphi(\emptyset) = \{U_{(n)} : n \in \omega\}$ olsun. II. oyuncu açık $U_{(n)}$ kümesini seçsin ve I. oyuncunun φ stratejisi altında karşılığı $\{U_{(n,m)} : m \in \omega\}$ şeklindedir.. Bu şekilde devam edilirse $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$ için II. oyuncunun $k.$ raunttaki hamlesi $U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ şeklindeyse I. oyuncu'in φ stratejisine göre karşılığı $\{U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$ biçiminde olur.

Her bir $n, k \in \omega$ için U_k^n kümeleri şu şekilde tanımlansın:

$$U_k^n = \begin{cases} U_{(k)} & ; \quad n = 1 \\ U_k^{n-1} \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega^{n-1}} U_{\tau \frown (k)} \big) & ; \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Şimdi her n için $\mathcal{U}_n = \{U_k^n \in \omega\}$ ailelerinin X'in birer artan açık örtüsü olduğunu görelim.

- $\mathcal{U}_n$ örtü ailesi artan olup her bir $k \in \omega$ için $U_k^n \subset U_{k+1}^n$'dir.

  $n = 1$ alınırsa; $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(k+1)} = U_{k+1}^1$'dir.

  $n = 2$ alınırsa; $U_k^2 = U_k^1 \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega} U_{\tau \frown (k)} \big)$ ve $U_{k+1}^2 = U_{k+1}^1 \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega} U_{\tau \frown (k+1)} \big)$ şeklindedir.

  Her $k \in \omega$ ve her $i \geq k$ için

  $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(i)} \subset U_{(i,k)}$ ve $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(k,k+1)}$ olup

  $U_k^2 = U_k^1 \cap U_{(1,k)} \cap \ldots \cap U_{(k-1,k)} \cap U_{(k,k+1)}$

  $U_{k+1}^2 = U_{k+1}^1 \cap U_{(1,k+1)} \cap \ldots \cap U_{(k-1,k+1)} \cap U_{(k,k+1)}$

  elde edilir. Buradan $U_k^2 \subset U_{k+1}^2$ olduğu rahatlıkla elde edilir.

  $n = m$ alınırsa; $U_k^m \subset U_{k+1}^m$ olsun.

  $n = m + 1$ alınırsa; $U_k^{m+1} \subset U_{k+1}^{m+1}$ görelim.

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega^m} U_{\tau \frown (k)} \big)$ ve $U_{k+1}^{m+1} = U_{k+1}^m \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega^m} U_{\tau \frown (k+1)} \big)$ şeklindedir.

  $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m$ ve $k \in \omega$ için $n_j =$ maks$\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} \geq k$ ise

  $$U_{(n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots, n_m, k)} \supset U_{(n_1, n_2, \ldots, n_j)} \supset U_{n_j}^j \supset U_{n_j}^m \supset U_k^m$$

  olduğundan

  $$A_k^m = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m : \text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} < k\}$$
  $$B_k^m = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m : \text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} = k\}$$

  sonlu kümeleri için

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in A_k^m} U_{\tau \frown (k)} \big) \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in B_k^m} U_{\tau \frown (k+1)} \big)$

  $\big(\tau \in B_k^m$ için $U_k^m \subset U_{\tau \frown (k)} \subset U_{\tau \frown (k+1)}\big)$

  $U_{k+1}^{m+1} = U_{k+1}^m \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in A_k^m} U_{\tau \frown (k+1)} \big) \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in B_k^m} U_{\tau \frown (k+1)} \big)$

  eşitliklerinden $U_k^{m+1} \subset U_{k+1}^{m+1}$ olduğu görülür.

- Her $n, k \in \omega$ için U_k^n kümeleri açıktır.

- Her bir n için $\mathcal{U}_n = \{U_k^n : k \in \omega\}$ X uzayını örter.

  $n = 1$; $\mathcal{U}_1 = \{U_k^1 : k \in \omega\} = \{U_{(k)} : k \in \omega\}$, X'in bir örtüsüdür.

  $n = m$; $\mathcal{U}_m$, X uzayının bir örtüsü olduğunu kabul edelim.

  Şimdi de $n = m + 1$ alalım; $\mathcal{U}_{m+1}$'in X uzayını örttüğünü göstereceğiz. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_m$, X uzayını örter bundan dolayı $x \in U_{k_x}^m$ olan bir $k_x \in \omega$ vardır. Şimdi her $\tau \in A_{k_x}^m$ için $\{U_{\tau\frown(l):l=1,2,3,\ldots}\}$, X'in bir örtüsü olduğundan $x \in U_{\tau\frown(l_\tau)}$ olane $l_\tau \in \omega$ bulunur. Şimdi ise $k \geq$ maks$(\{l_\tau : \tau \in A_{k_x}^m\} \cup \{k_x\})$ için $x \in U_k^{m+1}$ olduğunu kanıtlayalım.

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap (\bigcap\limits_{\tau \in A_{k_x}^m} U_{\tau\frown(k)}) \cap (\bigcap\limits_{\tau \in A_k^m \setminus A_{k_x}^m} U_{\tau\frown(k)})$ olup

  $k \geq k_x$ olduğundan $x \in U_{k_x}^m \subset U_k^m$'dir.

  $\tau \in A_{k_x}^m$ için $x \in U_{\tau\frown(l_\tau)} \subset U_{\tau\frown(k)}$'dir.$(k \geq l_\tau)$

  $\tau = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in A_k^m \setminus A_{k_x}^m$ için maks$\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} \geq k_x$ ve bu nedenle $x \in U_{k_x}^m \subset U_{\tau\frown(k_x)} \subset U_{\tau\frown(k)}$ olup bu durumda $x \in U_k^{m+1}$ olduğundan $\mathcal{U}_{m+1}$, X için bir örtüdür.

O halde $\mathcal{U}_n$ ile gösterilen $\mathcal{U}_n = \{U_k^n : k \in \omega\}$ ailesinin X'i örttüğünü gösterdik.

Şimdi Menger özelliğini X uzayının $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisine uygulayalım. Bu durumda bir f fonksiyonu vardır öyle ki $\{U_{f(n)}^n : n \in \omega\}$, X'in bir açık örtüsüdür. Ayrıca da herbir n için $U_{f(n)}^n \subset U_{(f(1),f(2),\ldots,f(n))}$ olup $\{U_{(f(1))}, U_{(f(1),f(2))}, \ldots, U_{(f(1),f(2),\ldots,f(n))}, \ldots\}$ kümeside X'in bir açık örtüsü olur. Böylece II. oyuncunun yukarıda tanımlanan hamleleri I. oyuncunun φ stratejisinin başarılı olmadığını verir.

Menger özelliğinin Menger oyunu ile karakterize edilmesi bize ilerideki bölümlerde göreceğimiz bazı ilginç uygulamalar sağlayacaktır.

4.6 Sonlu-açık tipi oyunlar

Teorem 4.4.4 de Rothberger oyunu ile nokta-açık oyununun dual olduğunu kanıtladık. Şimdi ise Menger oyunu ile dual olan bir oyun olabilir mi sorusuna yanıt arayalım.

Tanım 4.6.1. Bir X topolojik uzayı üzerinde sonlu-açık oyunu aşağıdaki kurallara göre oynanır;

- $\forall n \in \omega$ için, $n.$ hamlede I. oyuncunun sonlu bir $F_n \subset X$ seçimine karşılık , II. oyuncu F_n kümesini kapsayan $U_n \subseteq X$ açık kümesi ile yanıt verir.
- $X \subset \bigcup_{n\in\omega} U_n$ durumunun oluşması halinde oyunu I. oyuncu , aksi halde II. oyuncu kazanır.

Tanım 4.6.2. G ve G' iki oyun olmak üzere, aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda bu iki oyuna denk oyunlar denir.

- $\mathsf{I} \uparrow \mathsf{G} \Leftrightarrow \mathsf{I} \uparrow \mathsf{G}'$
- $\mathsf{II} \uparrow \mathsf{G} \Leftrightarrow \mathsf{II} \uparrow \mathsf{G}'$

Teorem 4.6.3. *[14] Her (X, τ) topolojik uzayında nokta-açık ve sonlu-açık oyunları denkttir.*

Kanıt. $I \uparrow nokta - açık$ olsun. I. oyuncu'nun $sonlu - açık$ oyununda kazanması için tek yapması gereken , $nokta - açık$ oyunundaki stratejisi ile oynamasıdır. Bu durumda tek nokta kümelerini sonlu küme olarak oynamış olur. Tersine $I \uparrow sonlu - açık$ ve φ I. oyuncunun bu oyunda kazanma stratejisi olsun. Nokta-açık oyunu için I. oyuncunun ilk hamlesi $x_0 \in \varphi(\langle\rangle)$ olsun. II. oyuncu'nun $x_0 \in U_0$ yanıtına karşılık , $x_1 \in \varphi(\langle\rangle)$ noktası ile cevap versin. II. oyuncu'nun $x_1 \in U_1$ yanıtına karşılık tekrar $\varphi(\langle\rangle)$ kümesinden daha önce seçmediği bir eleman seçsin. I. oyuncu $\varphi(\langle\rangle)$ kümesinde elemanların hepsi seçilene kadar hamlelerini böyle seçsin. $\varphi(\langle\rangle)$'da elemanlar teker teker oynandıktan sonra , V_0 II. oyuncu'nun bu seçilen elemanlara karşılık seçtiği açık U_n kümelerinin birleşimi olsun. Böylece $\varphi(\langle\rangle) \subset V_0$ olur. I. oyuncu artık hamlelerini $\varphi(\langle\rangle)$ kümesinde olduğu gibi $\varphi(\langle V_0\rangle)$ kümesinden seçerek devam etsin.Aynı şekilde V_1 II. oyuncu'nun $\sigma(\langle V_0\rangle)$'den seçilen elemanlara verdiği cevapların birleşimi olsun. Oyun bu şekilde devam ettiğinde $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ olur. I. oyuncu $sonlu - açık$ oyununda kazanma stratejisi ile oynadığından bu birleşim X'e eşit olur. Böylece I. oyuncu $nokta - açık$ oyununu kazanır.

Tanım 4.6.4. Bir X topolojik uzayı üzerinde kompakt-açık oyunu aşağıdaki kurallara göre oynanır;

- $\forall n \in \omega$ için, $n.$ hamlede I. oyuncunun kompakt $K_n \subset X$ kümesi seçimine karşılık, II. oyuncu X'in K_n kümesini kapsayan U_n açık kümesi ile yanıt verir.
- $\langle K_0, U_0, K_1, U_1, ..., K_n, U_n, ..\rangle$ şeklindeki bir karşılaşmayı takip eden oyunun sonunda $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$ ise oyunu I. oyuncu , aksi durumda II. oyuncu kazanır.

Teorem 4.6.5. *X topolojik uzayı olsun.*

(a) I $\uparrow$ kompakt-açık(X) $\Rightarrow$ II $\uparrow$ Menger (X)

(b) I $\uparrow$ Menger (X) $\Rightarrow$ II $\uparrow$ kompakt-açık(X)

(c) X regüler uzay ise II $\uparrow$ Menger (X) $\Rightarrow$ I $\uparrow$ kompakt-açık(X)

Kanıt. (a) I. oyuncu'nun Menger oyununda ilk hamlesi $\mathcal{U}_0$ ve φ I. oyuncu'nun kompakt-açık oyununda kazanma stratejisi olsun. II. oyuncu bu seçime $\varphi(\langle\rangle) = K_0$ kompakt kümesinin $\mathcal{U}_0$'deki sonlu alt örtüsü $\mathcal{F}_0$ ile yanıt versin. Yani Menger oyununda II. oyuncu için ψ bir strateji olmak üzere $\psi(\mathcal{U}_0) = \mathcal{F}_0$ olsun. $\mathcal{U}_1$ I. oyuncu'nun sıradaki hamlesi olsun.$K_0 \subset \bigcup \mathcal{F}_0$ olduğundan $\varphi(\bigcup \mathcal{F}_0)$ vardır. $\mathcal{F}_1$ $\varphi(\bigcup \mathcal{F}_0)$'nin $\mathcal{U}_1$ deki sonlu alt örtüsü ve aynı zamanda II. oyuncu'nun ikinci hamlesi olsun. Yani $\psi(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1) = \mathcal{F}_1$ olsun . böylece devam edildiğinde ;

$$\langle \mathcal{U}_0, \psi(\mathcal{U}_0), ..., \mathcal{U}_n, \psi(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ...\mathcal{U}_n), ...\rangle$$

oyununda II. oyuncu'nun hamleleri Kompakt-açık oyununda II. oyuncu'nun hamleleri ile aynı olur ve o oyunun I. oyuncu kazanma stratejisi ile oynadığından Kompakt-açık oyununda II. oyuncu kaybeder. Böylece Menger oyununda II. oyuncu kazanır. Yani ψ Menger oyununda II. oyuncu için kazanma stratejisidir.

(b) φ Menger oyununda I. oyuncu için kazanma stratejisi olsun. K_0 Kompakt-açık oynunda I. oyuncu'nun ilk hamlesi olsun. II. oyuncu buna ,K_0'ın $\varphi(\langle\rangle)$ daki sonlu alt örtüsü $\mathcal{F}_0$ olmak üzere $\bigcup \mathcal{F}_0$ ile yanıt versin. K_1 I. oyuncu'nun sıradaki hamlesi olsun. II. oyuncu buna K_1'in

$\varphi(\mathcal{F}_0)$ daki sonlu alt örtüsü $\mathcal{F}_1$ olmak üzere $\bigcup \mathcal{F}_1$ ile yanıt versin. Böyle ilerleyen bir oyunda ;

$$\langle K_0, \bigcup \mathcal{F}_0, K_1, \bigcup \mathcal{F}_1, ..., K_n, \bigcup \mathcal{F}_n, ...\rangle$$

II. oyuncu'nun hamleleri Menger oynunda II. oyuncu'nun hamlelerinin birleşim hali olur. Böylece II. oyuncu Kompakt-açık oyununu kazanır.

(c) Şimdi, X'in regüler bir uzay olduğunu ve II. oyuncu'nun Menger Oyunun'da σ kazanma stratejisine sahip olduğunu varsayalım. O halde X Lindelöf'tür. Buradaki fikir teorem 4.5.3 nin ispatında oluşturulan $K_s = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{O}} \overline{\bigcup \varphi(s \frown < \mathcal{C} >)}$ kümelerini kullanmaktır. Kompakt-açık Oyununda I. oyuncu her hamlesini bu kümeler ile oynar ise oyunu kazanır.

Teorem 4.6.6. *X, her kompakt kümesi G_δ küme olan regüler bir uzay olsun. II. oyuncunun Menger oyununda ($G_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$) kazanma stratejisi varsa X uzayı σ-kompakttır.*

Kanıt. Teorem 4.4.6 nın ispatında seçilen noktalar yerine kompakt kümeler seçilir ise her kompakt küme G_δ olduğundan benzer şekilde ispatlanabilir.

Regüler uzaylarda Menger ve kompakt-açık oyunu dual oyunlar mıdır? Ya da bu soruya denk olan başka bir soru soralım: Her regüler uzay için II $\uparrow$ kompakt-açık(X) $\Rightarrow$ I $\uparrow$ Menger (X) gerektirmesi dogru mudur?

Bu soruya cevap vermek için açık örtülerin özel bir türünden bahsetmeliyiz.

Tanım 4.6.7. X topolojik uzayının $\mathcal{V}$ açık örtüsüne her kompakt $K \subseteq X$ kümesi için $K \subseteq V$ olacak şekilde $V \in \mathcal{V}$ varsa k-örtü denir ve $\mathcal{K} = \{\mathcal{V} \in \mathcal{O} : \mathcal{V}$ X'in k-örtüsü$\}$ ile gösterilir.

Teorem 4.6.8. *Kompakt-açık oyun ile $G_1(\mathcal{K}, \mathcal{O})$ oyunu dualdir.*

Kanıt. Teorem 4.4.4'de nokta-açık oyununda seçilen noktalar yerine kompakt kümeler seçilerek aynı ispat burada da geçerli olur. $\mathcal{K}$ örtüleri ile her kompakt kümeyi kapsayan bir açık küme bulunabilir. Böylece teorem 4.4.4'deki kapsamalar da anlam kazanır.

5. TOPOLOJİK İLİŞKİLER VE UYGULAMALARI

5.1 Banach-Mazur oyunları

Stefan Banach, ünlü "İskoç Kitabı"nın 43. Probleminde Stanislaw Mazur tarafından önerilen Baire Kategori Teoremi ile ilgili bir oyun tanımlamıştır. Banach'ın kendisi bu sorunun çözümünü 1935'te verdi - bu yüzden oyun Banach-Mazur olarak tanındı.

Oyunun tanımını vermeden önce kısaca oyunu açıklayalım. Oyunu I. ve II. oyuncu olarak adlandırdığımız iki tane oyuncu oynuyor. Her rauntta ilk hamleyi yapan I. oyuncu ve ikinci hamleyi yapan II. oyuncu olup her raunt bu iki hamleden oluşmaktadır. Birinci rauntta I. oyuncu $A_0 \subseteq X$ açık kümesini seçerek başlar. Sonra II. oyuncu $B_0 \subseteq A_0$ olan B_0 açık kümesini seçerek karşı hamleyi yapar. İkinci rauntta I. oyuncu $A_1 \subseteq B_0$ olan $A_1 \subseteq X$ açık kümesini seçerek oynar. II. oyuncu $B_1 \subseteq A_1$ olan bir B_1 açık kümesi seçerek karşılık verir. Oyun bu şekilde devam ettiğinde her $n \in \omega$ için iç içe geçen açık kümelerin $(A_0, B_0, A_1, B_1, ...A_n, B_n, ...)$ bir dizisi oluşur.

Tanım 5.1.1. X topolojik uzayı üzerinde aşağıdaki kurallara göre oynanan bir oyuna $Banach - Mazur$ $(BM(X))$ oyunu denir;

- İlk hamle olarak I. oyuncu boş kümeden farklı $A_0 \subseteq X$ açık kümesini seçer ve II. oyuncu $B_0 \subseteq A_0$ olacak şekilde $B_0 \subseteq X$ açık kümesini seçerek karşı hamle yapar.
- $\forall n \in \omega$ ($n > 0$) için, n. hamlede, I. oyuncu X'in $A_n \subseteq B_{n-1}$ koşulunu sağlayan A_n açık kümesi ile oynar ve II. oyuncu $B_n \subseteq A_n$ olacak şekilde B_n açık kümesi ile yanıt verir.
- $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$ olması durumunda oyunu II. oyuncu kazanır, aksi durumda I. oyuncu kazanır.

Örnek 5.1.2. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve üzerinde doğal topoloji olsun. I. oyuncunun Banach -Mazur oyununda kazanma stratejisnin olduğunu gösterelim. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuz olup $\mathbb{Q}_s = \{q_k : k \in \omega\}$ ile gösterelim. I. oyuncu için φ stratejisini düşünelim.

$A_0 = \varphi(\emptyset) = \mathbb{Q} \setminus \{q_0\}$ ve $A_{n+1} = \varphi(A_0, B_0, A_1, ...B_n) = B_n \setminus \{q_{n+1}\}$ olup I. oyuncu bu strateji ile oynarsa her $k \in \omega$ için $q_k \notin A_k$ olur. Buradan $\bigcap\limits_{k\in\omega} A_k = \emptyset$ olur. Gerçekten de $q_k \in \bigcap\limits_{k\in\omega} A_k \subseteq \mathbb{Q} = \{q_k : k \in \omega\}$ olsaydı $q_k \in A_k$ olurdu ki bir çelişkidir. Bu şekilde oynandığında I. oyuncu bu oyunda her karşılaşmayı kazanır. Bu durumda, φ, I. oyuncunun kazanma stratejisi olur.

Örnek 5.1.3. [10] X tam metrik uzay ise II $\uparrow BM(X)$.

II. oyuncu Banach-Mazur oyununda aşağıda tanımlanan ψ stratejisi ile oynasın.

- İlk karşılaşmada I. oyuncu U_0 seçerse $x_0 \in U_0$, $r_0 < 1$ olmak üzere $\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq U_0$ olur. ($\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$) ve $\psi(\langle U_0\rangle) = V_0 = B_{r_0}(x_0)$.
- $n \in \omega$ için n. karşılaşmada I. oyuncu U_n ile oynarsa $x_n \in U_n$, $r_n < \frac{1}{n+1}$ olmak üzere $\overline{B}_{r_n}(x_n) \subseteq U_n$ olur. Ayrıca $\psi(\langle U_i : i \leq n\rangle) = V_n = B_{r_n}(x_n)$ dir.

$r_n \to 0$ ve $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ bir Cauchy dizisi olduğundan bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Bazı $N \in \omega$ için $x \notin V_N$. Bu durumda $x \notin \overline{B}_{r_{N+1}}(x_{N+1})$ olup bu durum $x_n \to x$ ile çelişir ve buradan ψ, II. oyuncu için kazanma stratejisi olur.

Örnek 5.1.4. [10] X uzayı kompakt Hausdorff uzay ise II $\uparrow BM(X)$'dir.

II. oyuncu aşağıdaki strateji ile oynasın.

- I. oyuncu ilk karşılaşmada $A_0 \subseteq X$ açık kümesini seçsin. II. oyuncu uzayın regüler olmasını kullanarak $\overline{B_0} \subseteq A_0$ olacak şekilde $B_0 \subseteq X$ açık kümesi ile karşılık versin.
- I. oyuncu ikinci karşılaşmada $A_1 \subseteq B_0$ olacak şekilde $A_1 \subseteq X$ açık kümesini seçsin. II. oyuncu $\overline{B_1} \subseteq A_1$ olacak şekilde $B_1 \subseteq X$ açık kümesi ile karşılık versin.
- $n \in \omega$ için $n+1$. hamlede I. oyuncu $A_n \subseteq B_{n-1}$ olacak şekilde $A_n \subseteq X$ açık kümesini seçer ve II. oyuncu $\overline{B_n} \subseteq A_n$ olacak şekilde $B_n \subseteq X$ açık kümesi ile karşılık verir.

$\{\overline{B_n} : n \in \omega\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğu için bir $x \in X$ için $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{B_n}$ olup buradan seçilen kümelerin içiçe geçen açık kümeler olduğu da göz önünde bulundurularak $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n$ elde edilir. Sonuç olarak II. oyuncunun kompakt Hausdorff uzay üzerinde tanımlanan Banach Mazur oyununda kazanma stratejisinin olduğu görülür.

Örnek 5.1.2 ve Örnek 5.1.4 de Banach-Mazur oyunlarında I. oyuncu veya II. oyuncunun kazanma stratejisinin olduğu uzay örnekleri verilmişitr. Bu durumda sorumuz acaba Banach-Mazur oyunu her uzayda saptanmış oyun mudur? Yani Banach-Mazur oyununda her iki oyuncunun da kazanma stratejisinin olmadığı uzaylar var mıdır? Bu sorunun cevabını ZFC sistemlerinde verebiliriz. Biz sadece aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verip soruyu cevaplandıracağız.

Teorem 5.1.5. *$B \subseteq \mathbb{R}$ Bernstein kümesi ise $BM(B)$ saptanmamış oyundur.*

Banach-Mazur oyununun girişinde, bu oyunun Baire Kategori Teoremi ile bağlantılı olduğundan bahsetmiştik. Şimdi Banach-Mazur oyunları ile Baire uzayları arasındaki ilişkiyi verelim. Baire uzayının ne olduğunu hatırlayarak başlıyoruz:

Tanım 5.1.6. X topolojik uzayının yoğun açık alt kümelerinden oluşan her sayılabilir $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi için $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ kümesi X de yoğundur ise bu uzaya Baire uzayı denir.

Teorem 5.1.7. *[19] (X, τ) uzayının Baire uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul I. oyuncunun Banach Mazur oyununda kazanma stratejisinin olmamasıdır.*

Kanıt. $\Leftarrow$ (X, τ) topolojik uzayı olsun. X Baire uzay olmasın. Bu durumda X'in her terimi yoğun açık küme olan $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ dizisi ve $V \subseteq X$ açık kümesi vardır, öyle ki $V \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \emptyset$. $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ dizisinin varlığı ile X uzayı üzerinde oynanan Banach-Mazur oyununda I. oyuncu için kazanma stratejisi tanımlayacağız: I. oyuncunun ilk hamlesi $A_0 = V \cap D_0$ olsun. II. oyuncunun B_0 yanıtına karşılık I. oyuncunun hamlesi $A_1 = B_0 \cap D_1$ olsun. Böylece oyun

$$\langle V \cap D_0, B_0, B_0 \cap D_1, B_1, B_1 \cap D_2, B_2, ..., B_n, B_n \cap D_{n+1}, B_{n+1}, ...\rangle$$

şeklinde ilerler. (her n için D_n kümeleri yoğun olduğundan $B_{n-1} \cap D_n \neq \emptyset$) Bu durumda $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n \subset V_n \bigcap\limits_{n\in\omega} D_n = \emptyset$ olduğundan I. oyuncu Banach-Mazur(X) oyununu kazanır.

X Baire uzayı ve $\varphi : \tau\backslash\emptyset \to \tau\backslash\emptyset$ I. oyuncu için X uzayı üzerinde tanımlanan Banach-Mazur oyununda bir stratejisi olsun. φ stratejisinin I. oyuncu için kazanma stratejisi olmadığını göstereceğiz.

$\langle V_0, V_1, ..., V_n\rangle$ bir Banach-Mazur oyununda II. oyuncunun ilk n hamledeki bütün olası seçimleri olsun. Açık kümelerden oluşan bu dizi $k \leq n$ için $V_k \subseteq \varphi(\langle V_0, V_1, ..., V_{k-1}\rangle)$ koşulunu sağlar. O halde Kuratowski-Zorn lemma dan ,$\varphi(\langle V_0, ..., V_n\rangle)$'nin açık alt kümelerinden oluşan öyle bir $\mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}$ küme ailesi vardırki ; $\left\{\varphi(\langle V_0, ..., V_n, V\rangle) : V \in \mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}\right\}$ kümesi $\varphi(\langle V_0, ..., V_n\rangle)$'nin ikişer ayrık maximal ailesidir.

<u>İddia</u>: $\bigcup\left\{\sigma(\langle V_0, ...V_n, V\rangle) : V \in \mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}\right\}$ kümesi $\sigma(\langle V_0, ..., V_n\rangle)$'de yoğun bir kümedir.

<u>ispat</u>:U boş olmayan açık küme olmak üzere $U \subset \varphi(\langle V_0, ..., V_n\rangle)$ olsun. O halde $U \cap \bigcup\left\{\varphi(\langle V_0, ...V_n, V\rangle) : V \in \mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}\right\} = \emptyset$ olması halinde $\varphi(\langle V_0, ..., V_n, U\rangle) \cap (\bigcup\left\{\varphi(\langle V_0, ...V_n, V\rangle) : V \in \mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}\right\}) = \emptyset$. Bu da $\mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_n\rangle}$ nin maximalliği ile çelişir.

şimdi her n için; $\mathcal{C}_n = \left\{\varphi(\langle V_0, ...V_n\rangle) : \langle V_0, ...V_n\rangle\right.$, her $k \leq n$ için $V_k \in \mathcal{A}_{\langle V_0,...,V_{k-1}\rangle}$ sağlanır$\left.\right\}$

ailesi tanımlanmak üzere iddianın ispatında olduğu gibi $\cup\mathcal{C}_n$ kümesi $U = \varphi(\langle\rangle)$ içinde yoğundur.

U Baire olduğu için $\exists\, x \in \bigcap\limits_{n\in N} (\cup\mathcal{C}_n)$. II. oyuncu ilk hamlesi için $\mathcal{A}_{\langle\rangle}$ kümesinde x elemanını kapsayan sadece bir V_0 seçimi vardır. Çünkü $\mathcal{A}_{\langle\rangle}$ ayrık bir kümedir. Aynı şekilde II. oyuncu ikinci hamlesi içinde aynı x elemanını kapsayan sadece bir $V_1 \in \mathcal{A}_{\langle V_0\rangle}$ seçimi vardır. II. oyuncu bütün hamlelerini bu x elemanı kapsayacak şekilde yapar ise oyunu kazanır. Dolayısıyla φ, I. oyuncu için kazanma stratejisi olamaz.

Sonuç 5.1.8. *Eğer X uzayı üzerinde II $\uparrow BM(X)$ ise X Baire uzayıdır.*

Sonuç 5.1.8'in tersi doğru değildir, çünkü Banach Mazur oyunları saptanmamış oyunlar olup II $\uparrow BM(X)$ ise I $\not\uparrow BM(X)$ ve Teorem 5.1.7 dan X Baire uzayıdır. Ancak ters tarafını düşündüğümüzde X uzayının Baire uzay olması I $\not\uparrow BM(X)$ olmasını gerektirir, fakat II. oyuncunun Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisinin olduğu anlamına gelmez.

Sonuç 5.1.9. *Eğer K kompakt Hausdorff uzay ise K Baire uzayıdır.*

Kanıt. Örnek 5.1.4 den II $\uparrow BM(X)$ olup Sonuç 5.1.8 den X uzayı Baire uzaydır.

Sonuç 5.1.10. *Eğer X tam metrik uzay ise X Baire uzayıdır.*

Aslında II. oyuncunun Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisinin olması (II $\uparrow BM(X)$) Baire uzaylarından daha kuvvetli bir özellik ile bağlantılıdır. X ve Y Baire uzayları ise $X \times Y$ çarpım uzayının Baire uzay olmayabileceği [9] Cohen tarafından kanıtlanmıştır.

Tanım 5.1.11. Her Y Baire uzayı için $X \times Y$ Baire uzayı oluyorsa X uzayına üretken Baire uzayı denir.

Teorem 5.1.12. *X uzayı, II. oyuncunun Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisine sahip olduğu bir uzay (II $\uparrow BM(X)$) ise X üretken Baire uzayıdır.*

Kanıt. II. oyuncu için ψ Banach-Mazur oyununda bir kazanma stratejisi olsun. $X \times Y$ çarpım uzayının Baire olmadığı bir Y uzayı olduğunu varsayalım. Y uzayının Baire uzay olmadığını kanıtlayacağız.

$X \times Y$ Baire uzayı olduğundan Teorem 5.1.7 den I. oyuncunun $X \times Y$ üzerinde oynanan Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisi φ olsun, yani I $\uparrow BM(X \times Y)$. I. oyuncu için $BM(Y)$ oyununda kazanma stratejisi $\overline{\varphi}$ olarak tanımlayacağız.

- İlk karşılaşmada $\overline{\varphi}(\langle\rangle) = B_0$ olsun $\varphi(\langle\rangle) = A_0 \times B_0$.
- II. oyuncu V_0 ile yanıt verirse $\overline{\varphi}(\langle V_0\rangle) = B_1$ ve B_1 için $\varphi(\langle \psi(\langle A_0\rangle) \times V_0\rangle) = A_1 \times B_1$.
- II. oyuncu V_1 kümesi seçerse $\overline{\varphi}(\langle V_0, V_1\rangle) = B_2$ ve B_2 için $\varphi(\langle \psi(\langle A_0\rangle) \times V_0\rangle, \psi(\langle A_1\rangle) \times V_1) = A_2 \times B_2$.
- Bu şekilde oyun devam ederse

I. oyuncunun $X \times Y$ üzerinde oynanan Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisi φ olduğundan,

$$\emptyset = \bigcap_{n\in\omega} V_n \times \psi(\langle B_0, , ...B_n\rangle) = \bigcap_{n\in\omega} V_n \times \bigcap_{n\in\omega} \psi(\langle B_0, , ...B_n\rangle)$$

Ancak ψ stratejisi, II. oyuncunun Banach-Mazur oyununda kazanma stratejisi olduğundan

$$\bigcap_{n\in\omega} \psi(\langle B_0, , ...B_n\rangle) \neq \emptyset$$

olup buradan $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{\varphi}$ stratejisinin bir kazanma stratejisi olduğu görülür.

Teorem 5.1.12 ile üretken Baire uzay örnekleri bulabilmemiz çok kolaylaşır.

Sonuç 5.1.13. *Eğer K kompakt Hausdorff uzay ise K üretken Baire uzayıdır.*

Sonuç 5.1.14. *Eğer X tam metrik uzay ise X üretken Baire uzayıdır.*

5.2 D-uzayları

Örtüsel oyunların uygulamalarından bir diğeri de, D-uzayları olarak adlandırılan uzaylar ile ilgilidir. Bu uzaylar ilk olarak 1970'lerin ortalarında E.K. van Douwen ve E. Michael [11] tarafından tanımlanmıştır.

Bir X topolojik uzayının her elemanının bir açık komşuluğu seçilerek oluşturulan $\{V_x : x \in X\}$ kümesine açık komşuluk sistemi denir. Bu sistemler bazı örtüsel özellikleri tanımlamada çok kullanışlıdır. Örneğin bir X uzayının Lindelof uzay olabilmesi için gerekli ve yeterli şart herhangi bir $\{V_x : x \in X\}$ komşuluklar sisteminde $X = \bigcup_{x\in Y} V_x$ koşulunu sağlayan sayılabilir $Y \subseteq X$ kümesi vardır. Sayılabilirlik yerine ayrık kapalı küme alırsak aşağıdaki tanımı elde ederiz.

Tanım 5.2.1. Her $\{V_x : x \in X\}$ açık komşuluk sistemi için $X = \bigcup_{x\in D} V_x$ koşulunu sağlayan ayrık , kapalı D kümesi bulunabilir ise X'e $D - uzay$ı denir.

Her sonlu kümenin ayrık olması D-uzayları ile çalışırken büyük kolaylık sağlayacağından tüm uzayları T_1 uzay olarak kabul edeceğiz. D-uzaylarına en basit örnek olarak ayrık uzaylar ve kompakt T_1 uzayları verebiliriz.

Başka hangi uzaylar D-uzayı olabilir sorusu matematikçiler tarafından uzun bir süre araştırılmış ve halen bu konudaki bilgiler oldukça kısıtlı olmakla birlikte aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Her metriklenebilir uzay D-uzayıdır. [7]
- Her 2. sayılabilir uzay D-uzayıdır.
- Noktasal sayılabilir tabana sahip her uzay D-uzayıdır.[2]
- Sorgenfrey doğrusu D-uzayıdır. [11]

Bir uzayın D-uzayı olduğunu göstermek için Lindelöf özelliğini kullanmanın mümkün olup olmadığı merak konusu olmuştur. Gerçekten de, bu problem Van Douwen [11] tarafından önerilmiş ve halen soruya cevap bulunamamıştır. Ancak Lindelöf özelliğinden daha güçlü bir özellik varsayarak, bir cevap bulunabilmiştir. L. Aurichi [3] tarafından her Menger uzayın D-uzay olduğu kanıtlanmıştır. Bu kanıtı vermeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.2.2. *X topolojik uzayı σ-kompakt ise D-uzayıdır.*

Kanıt. $\langle V_x : x \in X\rangle$ kümesi açık komşuluklar sistemi ve $\langle K_n : n \in \omega\rangle$, $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} K_n$ koşulunu sağlayan kompakt kümeler dizisi olsun.

$D_0 \subset K_0$ sonlu kümesi $K_0 \subset \bigcup\limits_{x\in D_0} V_x$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $(\bigcup\limits_{x\in D_0} V_x)^C$ kapalı küme olduğundan $K_1 \cap (\bigcup\limits_{x\in D_0} V_x)^C = K_1 \setminus \bigcup\limits_{x\in D_0} V_x$ de kompakt olur. Böylece

$$D_1 \subset K_1 \setminus \bigcup_{x\in D_0} V_x \text{ ve } K_0 \cup K_1 \subset (\bigcup_{x\in D_0} V_x) \bigcup (\bigcup_{x\in D_1} V_x)$$

koşullarını sağlayan D_1 sonlu kümesi bulunabilir. Aynı şekilde $K_0 \cup K_1 \cup K_2$ kümesini örtmek için D_2 sonlu kümesi bulunabilir. Bu D_n kümeleri ikişer ikişer ayrık,sonlu ve

$\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{x\in D_k} V_x = X$ eşitliğini sağlayacak şekilde oluşturulmuş oldu. $D = \bigcup_{k\in\omega} D_k$ olsun. Geriye sadece D nin kapalı ve ayrık olduğunu göstermek kaldı. O da her $d \in D$ için $V_d \cap D$ kümesinin sonlu ve X uzayının T_1 olmasından ve böylece D nin limit noktası olmayışından açıktır.

Teorem 5.2.3. *[3] Her Menger uzay bir D-uzayı olur.*

Kanıt. X uzayı için $\langle V_x : x \in X\rangle$ kümesi açık komşuluklar sistemi olsun. I. oyuncu için Menger oyununda ($G_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$) bir strateji tanımlayacağız. Uzay Menger olduğundan ve Teorem 4.5.4 den bu strateji kazanma stratejisi olamaz.

İlk hamlede I. oyuncu $\{V_x : x \in X\}$ seçimini yapsın. O halde II. oyuncu sonlu bir $D_0 \subset X$ hamlesi ile yanıt verir . Yani II. oyuncu $\{V_x : x \in D_0\}$ seçimini yapmıştır. $U_0 = \bigcup_{x\in D_0} V_x$ olmak üzere I. oyuncunun ikinci hamlesi $\{U_0 \cup V_x : x \in X\backslash U_0\}$ olsun. Böylece bu seçim X in bir örtüsü olur. Ardından II. oyuncu sonlu $D_1 \subset X\backslash U_0$ ile yanıt versin. Aynı şekilde $U_1 = \bigcup_{x\in D_1} V_x$ ile bir önceki hamlede olduğu gibi devam edilsin. Bu strateji kazanma stratejisi olamayacağı için II. oyuncu hamlelerini her bir D_k sonlu , $D_{k+1} \cap \bigcup_{j\leq k}\bigcup_{x\in D_j} V_x = \emptyset$ ve $\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{x\in D_k} V_x = X$ olacak şekilde seçebilir. Böylece $D = \bigcup_{k\in\omega} D_k$ kümesi ayrık, kapalı ve $X = \bigcup_{x\in D} V_x$ olur.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, topolojik oyunlardan daha önce tanımlanan Menger Uzayı, Rothberger Uzayı ve Baire Uzayı olan uzaylara karşılık sırası ile Menger Oyunu, Rothberger Oyunu ve Banach-Mazur oyunları tanımlanıp, kazanma stratejisi kavramı ile aralarındaki denklikler Teorem 4.4.5 ,Teorem 4.5.4 ve Teorem 5.1.7 'de gösterilmiştir.

Ayrıca son bölümde Menger Uzayı ve Menger Oyunu arasındaki bağlantı kullanılarak Menger uzayı ve D-Uzayı arasında tek taraflı bir yeterlilik gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] N. C. Açıkgöz, Açık örtü sınıflarına dayalı özellikler üzerine bir çalışma . Yuksek Lisans Tezi, Hacettepe Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara **2021**.

[2] A.V. Arhangel'skii, R.Z. Buzyakova, Addition theorems and D-spaces, Comment. Math. Univ. Carol. 43 (4) 653–663 **2002**.

[3] L.F. Aurichi, D-spaces, topological games, and selection principles, Topol. Proc. 36 107–122 **2010**.

[4] L.F. Aurichi and R.R. Dias, A minicourse on topolgical games, Topol. and Appl.258 305–335 **2019**.

[5] S. Banach and C. Kuratowski, Sur une generalization du problema de la measure, Fundamenta Mathematicae, 14 7- 131 **1929**.

[6] C. Berge, Topological games with perfect information, in: Contributions to the theory of games, Vol.III, Annals of Math. Studies 39, Princeton University Press, Princeton, 165-178 **1957**.

[7] J.R. Borges and A.C. Wehrly, A study of D-spaces, Topol. Proc. 16 7–15 **1991**.

[8] C.L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. of Math. (2) 3 35-39 **1901**

[9] P.E. Cohen, Products of Baire spaces, Proc. Am. Math. Soc. 55 (1) 119–124 **1976**.

[10] M.D.R. Costa, Topological games and selection principles, Universidade de Sao Paulo, doktora tezi **2019**.

[11] E. K. Douwen, W.F. Pfeffer, Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces, Pac. J. Math. 81 (2) 371–377 **1979**.

[12] R. Engelking, General topology, Sigma series in pure mathematics vol 6, Heldermann, Berlin **1989**.

[13] A.E. Eysen, Topolojide secme prensipleri. Yuksek Lisans Tezi, Hacettepe Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara **2012**.

[14] F. Galvin, Indeterminacy of point-open games, Bull. Acad. Pol. Sci. 26 445—449 **1978**.

[15] W. Hurewicz, Über eine Verallgemeinerung of first countable spaces, Gen. Top. Appl. 6 (3) 339—352 **1976**.

[16] W. Just, A.W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki, The combinatorics of open covers II, Topology and its Applications, 73(3), 241-266, **1996**.

[17] L. Kalmar, Zur theorie der abstrakten spiele, Acta Litt. Sci. Reg. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math.4 26 65—85 **1928**.

[18] J.V. Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior. USA: Princeton University Press, 1-625.**1944**

[19] J.C. Oxtoby, The Banach–Mazur game and Banach category theorem, in: M. Dresher, A.W. Tucker, P. Wolfe (Eds.), Contributions to the Theory of Games. Vol. III, in: Annals of Mathematics Studies, vol. 39, Princeton University Press, Princeton, 159—163 **1957**.

[20] J. Pawlikovski, Undetermined sets of point open games, Fundam Math. 144 279—285 **1994**.

[21] F. Rothberger, Eine Verscharfung der Eigenschaft c , Fund. Math. 30 50–55 **1938**.

[22] M. Scheepers, Combinatorics of open covers (I): Ramsey Theory, Topology and its Applications, 69, 31-62 **1996**.

[23] Sierpinski, Sur la puissance des ensembles measurables (B), Fundamenta Mathematicae,5, 166- 171 **1924**.

[24] D. Mauldin (editor), The Scottish book, Birkhauser- Boston **1981**.

[25] R. Telgársky, ”Topological Games: On the 50th Anniversary of the Banach-Mazur Game”, Rocky Mountain J. Math. 17 227–276 **1987**

[26] R. Telgarsky, On games of Topos, math. Scand. 54 170–176 **1984**.

[27] R. Telgarsky, Spaces defined by topological games, Fundam. Math. 88 193–223 **1975**.

[28] G. Zermelo, Über eine anwendung der Mengerlehre auf die Theorie des Schachpiels, in: E.W. Hobson, A.E.H. Love(Eds) Proceedings of the Fifth International congress of Mathematicians, Cambridge, 22-28 August 1912, vol. II, Cambridge University press, Cambridge, pp 501—504 **1913**.