SAĞLAM KESTİRİCİLERE DAYALI VARYANS ANALİZİ

ANALYSIS OF VARIANCE BASED ON ROBUST ESTIMATORS

UFUK ZEYBEK

PROF. DR MERAL ÇETİN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

Yüksek Lisans TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2023

ÖZET

SAĞLAM KESTİRİCİLERE DAYALI VARYANS ANALİZİ

(ANALYSIS OF VARIANCE BASED ON ROBUST ESTIMATORS)

Ufuk ZEYBEK

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Meral ÇETİN

Ocak 2023, 51 sayfa

Örneklem ortalamaları üzerinden hesaplanan Varyans Analizinde (ANOVA) belirli varsayımların sağlanması gerekmektedir. Varsayımların sağlanmaması durumunda Varyans Analizi gerçek grup farklılıklarını tam olarak ortaya koyamamakta bu durumda da düşük güce sahip bir test ortaya çıkabilmektedir. Varsayımlardan çok küçük bir sapma bile bu problemleri ortaya çıkaracaktır. Bu duruma çözüm olarak önerilen yöntemlerden birisi de sağlam yöntemlerdir. Tez çalışmasında, sağlam kestiricilere dayalı olarak önerilen testlerin 1. Tip hataları, klasik en küçük kareler (EKK) kestiricileri ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: ANOVA, Sağlam Konum Kestiricileri, Sağlamlık, Aykırı Değerler

ABSTRACT

SAĞLAM KESTİRİCİLERE DAYALI VARYANS ANALİZİ

(ANALYSIS OF VARIANCE BASED ON ROBUST ESTIMATORS)

Ufuk ZEYBEK

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Meral ÇETİN

January 2023, 51 pages

Certain assumptions must be provided in the Analysis of Variance (ANOVA) calculated over sample means. If the assumptions are not met, the Analysis of Variance cannot fully reveal the real group differences, and in this case, a test with low power may emerge. Even a slight deviation from the assumptions will introduce these problems. One of the methods suggested as a solution to this situation is robust methods. In the thesis study, Type 1 errors of the proposed tests based on robust estimators were compared with the classical least squares estimators (LSE).

Keywords: ANOVA, Robust Location Estimators, Robustness, Outliers

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca, bilgi birikimi ve manevi desteği ile her zaman yanımda olan değerli danışmanım Prof. Dr. Meral ÇETİN'e

Eleştiri ve önerileriyle tezime sağladıkları katkılar için değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY ve Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na

Tez çalışmam sırasında, bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen değerli hocalarım Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZONUR ve Araş. Gör. Ahmet KOCATÜRK'e,

Çalışmalarım boyunca her türlü anlayış ve sabrı gösteren Tarım Kredi Kooperatifleri Merkez Birliğinde görev yapan başta amirlerim ve aynı müdürlükte görev yaptığım mesai arkadaşlarım olmak üzere bütün teşkilat personeline,

Son olarak, eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Fatma ZEYBEK, babam Remzi ZEYBEK, kardeşlerim İbrahim ve Umut ZEYBEK' e

Teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

μ	Kitle Ortalaması
σ	Kitle Standart Sapması
σ^2	Kitle Varyansı
Z	Standart Normal Dağılım
t	t Dağılımı
χ^2	Ki-Kare Dağılımı
F	F Dağılımı
α	1. Tip Hata

Kısaltmalar

$\bar{Y}_{..}$	Genel Ortalama
$\bar{Y}_{i.}$	i. Düzeyin Ortalaması
KTT	Toplam Kareler Toplamı
KTGA	Gruplar Arası Kareler Toplamı
KTGİ	Gruplar İçi Kareler Toplamı
KOGA	Gruplar Arası Kareler Ortalaması
KOGİ	Gruplar İçi Kareler Ortalaması
EKK	En Küçük Kareler Yöntemi
F	Hesaplanan F Değeri
AD	Ortancadan Mutlak Sapmaların Ortalaması
MAD	Ortancadan Mutlak Sapmaların Ortancası
IQR	Çeyreklikler Arası Açıklık

1. GİRİŞ

Varyans analizi (Analiysis Of Variance), Sir Ronald Aylmer Fisher tarafından 1920'li yıllarda geliştirilmiş bir çıkarımsal istatistik yöntemidir. Bu yöntemin kullanılması tarım, biyoloji, psikoloji, sosyoloji, eğitim, mühendislik gibi birçok alanda yürütülen deneysel araştırma türlerini etkilemiştir. Bugün varyans analizi, çeşitli alanlarda araştırmacılar tarafından modern kullanılan istatistiğin en yaygın metotlarındandır.

Varyans Analizi uzun yıllar araştırmacılar tarafından yaygın olarak kullanılmasına rağmen, bu analiz yönteminin uygulanması için örneklemin alındığı kitle ile ilgili belirli varsayımları karşılanması gerekmektedir. Varsayımlar karşılanmadığında varyans analizi gerçek grup farklılıklarını tam olarak verememektedir. Bu durumda ise gerçeği tam olarak yansıtamayan ve düşük güce sahip bir test ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla varyans analizi yöntemini uygulamak için belirli varsayımların sağlanması son derece önemlidir.

Gerçek hayattaki veriler ile normallik varsayımı genelde tam olarak karşılanamamaktadır. Bunun nedenlerinden birisi olarak verilerin kaydedilmesi esnasında yapılan bir takım ölçüm hataları olarak ifade edilebilir. Ölçüm esnasında meydana gelen hataların düzeltilerek ölçümlerin yeniden yapılmasıyla veri kümesi eksik veya tutarsız gözlemlerden ayıklanabilmektedir [2]. Varsayımların karşılanmamasının bir diğer nedeni ise veri kümesinin aşırı ve uç gözlemler içermesi olarak ifade edilebilir. Veri yapısından kaynaklı bu tür gözlemler için, gözlemlerin analizdeki etkisinin azaltılması gerekmektedir. Diğer gözlemlerle karşılaştırıldığında veri yapısına uygun olmadığı tespit edilen bu tür gözlemlere aykırı değer denilmektedir [4]. Aykırı değerler, normallik ve varyansların homojenliği gibi varsayımları bozarak, varyans analizinin gerçek grup farklılıklarını tam olarak ortaya koymamasına neden olmaktadır. Dolayısıyla varsayımların karşılanabilmesi için aykırı değerlerin çıkarılması, normalleştirilmesi veya dönüştürerek varyansların homojenliğinin sağlanması gerekmektedir [7].

Varsayımların karşılanmadığı durumlarda, veri dönüşümleri kullanılarak varyans analizi yöntemi yeniden uygulanabilir. Ancak bu yöntemde veriler her zaman dönüşüme uygun olmamakla birlikte sonuçlar her zaman gerçek veri kümesine uyarlanamamaktadır [2]. Buna ek olarak grup ortalamaları arasında farklılık olup olmadığını karşılaştırmak için birçok alternatif yöntem geliştirilmiştir. Parametrik olmayan yöntemler normallik varsayımının sağlanmadığı durumda grup ortalamalarının testleri için yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak varyansların homojenliği varsayımına karşı bu yöntemler oldukça duyarlıdır. Bu nedenle parametrik olmayan testler genelde birbirlerine yakın varyansa sahip ancak dağılımları normal olmayan gruplarda kullanılmaktadır [2]. Ayrıca grup ortalamaları arasındaki farkları karşılaştırmak için test istatistiklerinin dağılımlarını F, t, χ^2 gibi dağılımlara yaklaştıran Welch, Cochran gibi bir takım testler geliştirilmiştir. Varyansların homojenliği varsayımının sağlanmadığı durumlarda yaygın olarak kullanılan bu testler normal olmama durumlarına karşı çok duyarlıdır [3].

Yukardaki problemlere karşı kullanılabilecek alternatif diğer bir yöntem, sağlam istatistikler yöntemlerdir. Son yıllarda geliştirilen sağlam istatistiksel yöntemler ile Varyans Analizi, özellikle aykırı değerlerden kaynaklı varsayımlarının karşılanmadığı durumlarda grup ortalamalarındaki farklılıkların testlerinde iyi sonuçlar verebilmektedir. Sağlam istatistiksel yöntemler, konum ve ölçek kestirimi için kullanılan verideki aykırı değerleri veri kümesinden çıkarmamaktadır. Dolayısıyla da özellikle küçük örneklemde veri bilgi kaybını en aza indirmektedir [1,5].

Bu çalışmanın amacı varsayımlarının karşılanmadığı durumda klasik EKK kestiricileri ile yapılan testler yanlış sonuçlar vereceğinden, klasik EKK kestiricilerin yerine sağlam kestiriciler kullanılarak varyans analizi yöntemini yeniden uygulamaktır. Sonuçlar 1. tip hata oranları üzerinden karşılaştırılacak olup, sağlam kestiricilerden elde edilen 1. tip hata oranları, klasik EKK kestiricisinden elde edilen 1. tip hata oranı ile karşılaştırılacaktır.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde Varyans Analizi yöntemiyle alakalı genel bilgilere yer verilmiş olup Tek Yönlü Varyans Analizi, Sabit ve Rasgele etki modelleri ile Varyans Analizi varsayımları üzerinde detaylı bilgiler üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde varsayımların sağlanmadığı durumda grup ortalamaları arasındaki farklılığın testleri için Varyans Analizi yerine kullanılan alternatif yöntemler ve sağlam kestiriciler hakkında detaylı bilgiye yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde tezin amacına uygun şekilde hazırlanan simülasyon çalışmasıyla ilgili genel bilgiler verilmiş ve klasik EKK kestiricisi yerine kullanılan sağlam konum kestiricilerinden elde edilen 1. tip hata oranları klasik EKK kestiricisinden elde edilen 1. tip hata oranı ile karşılaştırılmıştır. Daha sonrasında simülasyon çalışmasında ele alınan kestiriciler üzerinden gerçek bir veri kümesiyle yeniden bir F testi yapılmıştır. Son bölümde ise simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. VARYANS ANALİZİ

Varyans Analizi, normal dağılıma sahip ikiden fazla grup ortalamaları arasında fark olup olmadığını test etmek için kullanılan bir çıkarımsal istatistiksel yöntemdir. Bu yöntemin uygulanması için örneklemin alındığı kitle ile ilgili belirli varsayımların karşılanması gerekmektedir. Kısaca bu varsayımları,

- Bağımsızlık
- Normallik
- Varyansların homojenliği

biçiminde ifade edebiliriz [8].

Çoğu zaman örneklemin alındığı gerçek verilerde varyans analizi varsayımları tam olarak karşılanmamaktadır. Bu nedenle grup ortalamaları arasındaki farkların testleri için birçok alternatif yöntem geliştirilmiştir. Bir sonraki bölümde bu yöntemler hakkında genel bilgiler verilecektir.

2.1 Tek Yönlü Varyans Analizi

İkiden fazla grup ortalamaları arasındaki farklılığın testinde kullanılan varyans analizinde, deneyi etkileyen tek bir faktör bulunduğunda bu yöntemin en basit ve özel şekli olan tek yönlü varyans analizi kullanılmaktadır. Tek yönlü varyans analizi tamamen rasgele tasarım olarak da adlandırılmaktadır [9].

A, B ve C gibi 3 grubun ortalamaları arasında farklılık olup olmadığını karşılaştırılmasında, A-B, A-C ve B-C grupları biçiminde olmak üzere 3 ayrı t testi yapılabilir. Ancak 3 farklı testin yapılması 1. tip hata olasılığını artırmaktadır. 3 ayrı grubun karşılaştırılmasında tek yönlü varyans analizi ile tek bir test yapılacağından 1. tip hata olasılığı da düşük olacaktır. Bu nedenle ikiden fazla grubun ortalamalarının karşılaştırılmasında tek yönlü varyans analizi yönteminin kullanılmasının anlamlılık düzeyleri bakımından daha faydalı olabileceği ifade edilebilir. Tek yönlü varyans analizi iki grup arasındaki farklılıkların testini yapan t testinin genelleştirilmiş hali olarak ifade edilebilir [35].

Tek yönlü Varyans Analizi için hipotez,

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

$$H_1: \forall_i \neq 0 \qquad ; \; i = 1,2, \dots, k \tag{2.1}$$

biçimindedir.

Tek yönlü Varyans Analizinde kullanılacak olan veri yapısı Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1 Tek yönlü Varyans Analizi için veri yapısı

Denemeler				Gözlemler				Toplam	Ortalama
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	.	.	.	Y_{1n}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	.	.	.	Y_{2n}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	.	.	.	Y_{3n}	$Y_{3.}$	$\bar{Y}_{3.}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
k	Y_{a1}	Y_{a2}	Y_{a3}	.	.	.	Y_{an}	$Y_{a.}$	$\bar{Y}_{a.}$
								$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$

Çizelge 2.1'e göre tek yönlü varyans analizi modeli

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2, \dots, n \;\; ; \;\; j = 1,2, \dots, n_i \tag{2.2}$$

biçimindedir. Bu modelde;

Y_{ij} : i'nci denemede yer alan j'inci deneysel birimin değeri

μ : Genel ortalama,

τ_i : i. denemenin etkisi,

ε_{ij} : Rastgele hata bileşeni,

olarak ifade edilmektedir.

Tek yönlü varyans analizi modeli farklı bir biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y_{ij} - \mu = (\mu_i - \mu) + \left(Y_{ij} - \mu_i\right) \tag{2.3}$$

Modelde $Y_{ij} - \mu$, genel ortalamadan sapma olarak adlandırılır. Bu miktar iki tür etkiden oluşur. Birincisi denemeler arasındaki farklılıktan kaynaklanan etkidir [2]. Bu etki,

$$\tau_i = \mu_i - \mu \tag{2.4}$$

biçimindedir.

İkincisi, rasgele hatalardan kaynaklı ortaya çıkan etkidir ve,

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_i \quad \textbf{(2.5)}$$

biçimindedir. Yokluk hipotezinin doğruluğu altında tüm denemeler arasındaki farklılıktan kaynaklanan etkiler sıfıra eşittir ve yanıt değişkeninde gözlenen toplam değişim, hatalara aittir [2].

2.2 Kareler Toplamı Terimlerinin Parçalanması

Varyans analizinin amacı, istatistiksel anlamlılık için ortalamalardaki farklılıkları istatistiksel olarak test etmektir. Bu, yanıt değişkeni Y_{ij}'in varyansını analiz ederek yani bağımlı değişkene ilişkin kareler toplamının parçalara ayrılması temeline dayanır. Bunu toplam varyansı gerçek rastgele hatadan (açıklanamayan varyasyon) ve denemeler arasındaki farklılıklardan (açıklanan varyasyon) kaynaklanan bileşenlere ayırarak gerçekleştirilir [10].

Toplam kareler toplamını hesaplamak için kullanılacak bazı notasyonlar aşağıda verilmiştir.

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad \textbf{(2.6)}$$

Burada k faktörün düzey sayısı, n_i faktörün i. düzeyi için örnek genişliğini, N ise toplam örnek genişliği olarak tanımlanmıştır.

$Y_{.j}$, faktörün j. düzeyine ilişkin toplam değer olmak üzere;

$$Y_{.j} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad \textbf{(2.7)}$$

biçimindedir. Burada Y_{ij} faktörün j. düzeyindeki i. birime ilişkin bağımlı değişken değerleri olarak tanımlanabilir.

$\overline{Y}_{.j}$ faktörün j. düzeyine ilişkin ortalama olmak üzere;

$$\overline{Y}_{.j} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_i}{n_i} = \frac{Y_{.j}}{n_i} \quad \textbf{(2.8)}$$

biçimindedir.

$Y_{..}$, genel toplam olmak üzere,

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \sum_{i=1}^{k} Y_{.j} \tag{2.9}$$

biçimindedir.

$\bar{Y}_{..}$, genel ortalama olmak üzere;

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n} = \frac{Y_{..}}{n} \tag{2.10}$$

biçimindedir.

Yukarıdaki eşitlikler verilmişken toplam kareler toplamı KTT ise;

$$KT_t = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \tag{2.11}$$

biçimindedir [10].

Varyans analizinde test işlemleri (2.11) eşitliğindeki KTT değerinin parçalanması temeline dayanmaktadır. Bunun için faktörün j. düzeyine ilişkin ortalama olan $\bar{Y}_{.j}$, KTT eşitliğindeki parantez içerisine eklenip çıkarılırsa;

$$KT_t = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}\right)\left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}\right)^2 + \left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)^2 + 2\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}\right)\left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)\right) \tag{2.12}$$

biçiminde olup $\sum\sum(..)$ ifadesi parantez içerisine dağıtılırsa $2\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}\right)\left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)$ teriminin 0’a eşit olduğu ifade edilebilir.

Kareler toplamlarının toplanabilirlik özelliği bulunduğundan KTT değeri;

$$\mathrm{KTT} = \mathrm{KTGİ} + \mathrm{KTGA} \tag{2.13}$$

biçiminde yazılabilir [10].

Burada KTGİ gruplar içi kareler toplamıdır ve,

$$\text{KTGİ} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \qquad \textbf{(2.14)}$$

biçimindedir. KTGA ise, gruplar arası kareler toplamıdır ve,

$$\text{KTGA} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad \textbf{(2.15)}$$

(2.13) eşitliği tekrardan aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad \textbf{(2.16)}$$

(2.16) eşitliğinde yer alan varyans bileşenleri daha sonra F testi aracılığıyla istatistiksel anlamlılık açısından test edilir. $\forall_i = 1,2, \ldots. \ , k \ \ ve \ Y_{ij} \sim N(\mu_i \, , \sigma^2) \ \ j = 1,2, \ldots \ , n_i$ olmak üzere yokluk hipotezinin testi için belirli varsayımların sağlanması gerekmektedir.

Tek yönlü Varyans Analizinde kareler toplamları serbestlik derecelerine bölünerek kareler ortalaması hesaplanır. Hesaplanan ortalama kareler birbirleriyle bölünerek kritik değeri elde edilir. Elde edilen kritik değer F tablo değeri ile karşılaştırılarak yokluk hipotezinin ret kararı verilir. Hesaplanan ortalama kareler ve serbestlik dereceler tanımı aşağıda verilmiştir [10].

Gruplar içi kare ortalaması

$$\text{KOGİ} = \frac{\text{KTGİ}}{n-k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right)^2}{n-k} \qquad \textbf{(2.17)}$$

biçimindedir. Burada $n - k$, gruplar içi serbestlik derecesini ifade eder.

Benzer şekilde gruplar arası kare ortalaması,

$$\text{KOGA} = \frac{\text{KTGA}}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k-1} \qquad \textbf{(2.18)}$$

biçimindedir. Burada $k - 1$, gruplar arası serbestlik derecesini ifade eder.

Serbestlik derecelerinin de kareler toplamı gibi toplanabilirlik özelliği vardır.

$$n - 1 = (k - 1) + (n - k) \qquad \textbf{(2.19)}$$

Varyans Analizinde kareler toplamlarının, serbestlik derecelerinin, kare ortalamalarının ve F istatistiğinin gösterildiği tabloya ANOVA tablosu denilmektedir. ANOVA tablosunun genel görünümü Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2 ANOVA tablosu

<table>
<tr><th>Değişim Kaynağı</th><th>Kareler Toplamları</th><th>Serbestlik Dereceleri</th><th>Kareler Ortalamaları</th><th>F İstatistiği</th></tr>
<tr><td>Gruplar Arası</td><td>$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$</td><td>$k-1$</td><td>$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k-1}$</td><td rowspan="3">$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n-k}}$</td></tr>
<tr><td>Gruplar İçi</td><td>$\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$</td><td>$n-k$</td><td rowspan="2">$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n-k}$</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td>$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$</td><td>$n-1$</td></tr>
</table>

2.3 Kareler Toplamların Dağılımları

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ olmak üzere rasgele bir örneklemin ortalaması olan $\bar{Y}$ 'nın dağılımının $\bar{Y} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ olduğu bilinmektedir ve,

$$\left(\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$(\bar{Y} - \mu)^2 \sim \frac{\sigma^2}{n}\chi_1^2$$

$$n(\bar{Y} - \mu)^2 \sim \sigma^2\chi_1^2 \qquad \textbf{(2.20)}$$

biçimindedir [2]. n gözlemli k grubu ve birinci grup için eşit varyans σ^2 olduğunda birinci grup için;

$$\left(\frac{\bar{Y}_{1.} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = Z \rightarrow \left(\frac{\bar{Y}_{1.} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = Z^2 = \chi_1^2 \qquad \textbf{(2.21)}$$

biçiminde dağılmaktadır. Benzer şekilde ikinci grup için;

$$\left(\frac{\bar{Y}_{2.} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \chi_1^2 \qquad \textbf{(2.22)}$$

dağılımındadır ve k. grup için;

$$\left(\frac{\bar{Y}_{k.} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \chi_1^2 \qquad \textbf{(2.23)}$$

biçiminde dağılmaktadır [2]. Kareler toplamlarının toplanabilirlik özelliğinden dolayı (2.21), (2.22) ve (2.23) eşitlikleri;

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\bar{Y}_{i.} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \chi_k^2 \qquad \textbf{(2.24)}$$

biçiminde toplam olarak yazılabilir. (2.24) eşitliği, aşağıdaki gibi farklı bir biçimde de ifade edilebilir:

$$\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.} - \mu)^2 \sim \frac{\sigma^2}{n}\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} n(\bar{Y}_{i.} - \mu)^2 \sim \sigma^2\chi_k^2 \qquad \textbf{(2.25)}$$

Kitle ortalaması μ yerine, $\bar{Y}_{..}$ tahminini kullandığımızda, denemeler arası farklılıklara bağlı kareler toplamının dağılımı;

$$\sum_{i=1}^{k} n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{k-1} \tag{2.26}$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.26) eşitliği gruplar arası kareler toplamı olarak adlandırılır ve kitle varyanslarının eşit olduğu varsayıldığından, her grup (işlem) bu toplamda eşit ağırlığa sahiptir. Dolayısıyla denemeler arası farklılıklara bağlı ortalama karelerin dağılımı ;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{k-1} = KO_{ga} \sim \frac{\chi^2_{k-1}}{k-1}$$

$$\frac{KO_{ga}}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_{k-1}}{k-1} \tag{2.27}$$

biçiminde yazılabilir [2].

Rastgele bir değişken Y, ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal bir dağılıma sahip olduğu durumda Z;

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{2.28}$$

biçiminde yazılabilir. Böyle bir standart normal değişkenin karesi, 1 serbestlik derecesi ile bir ki-kare (χ2) dağılımına sahiptir:

$$Z^2 = \left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1 \tag{2.29}$$

N gözlemli k grubu olduğunda ve 1.grup için varyans eşit ve σ^2 olduğunda;

$$\left(\frac{Y_1-\mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y_2-\mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_{n_1}-\mu}{\sigma}\right)^2 = Z^2 + Z^2 + \cdots + Z^2 = \chi^2_1 + \chi^2_1 + \cdots + \chi^2_1 = \chi^2_{n_1}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(Y_{1j} - \mu\right)^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n_1} \tag{2.30}$$

biçimindedir.

Benzer şekilde 2. grup için:

$$\left(\frac{Y_1-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{Y_2-\mu}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_{n_2}-\mu}{\sigma}\right)^2=Z^2+Z^2+\cdots+Z^2=\chi_1^2+\chi_1^2+\cdots+\chi_1^2=\chi_{n_2}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_{2j}-\mu\right)^2 \sim \sigma^2\chi_{n_2}^2 \tag{2.31}$$

k grup için:

$$\left(\frac{Y_1-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{Y_2-\mu}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_{n_k}-\mu}{\sigma}\right)^2=Z^2+Z^2+\cdots+Z^2=\chi_1^2+\chi_1^2+\cdots+\chi_1^2=\chi_{n_k}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}\left(Y_{kj}-\mu\right)^2 \sim \sigma^2\chi_{n_k}^2 \tag{2.32}$$

biçimindedir. $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ olmak üzere Kareler toplamlarının toplanabilirlik özelliğinden dolayı (2.32) eşitliği yeniden;

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_j}\left(Y_{ij}-\mu\right)^2 \sim \sigma^2\chi_n^2 \tag{2.33}$$

biçiminde yazılabilir.

(2.33) eşitliğinde, kitle ortalaması μ yerine $\bar{Y}_{i.}$ yazıldığında bu eşitlik tekrardan,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.}\right)^2 \sim \sigma^2\chi_{n-k}^2 \tag{2.34}$$

biçiminde yazılabilir. (2.34) eşitliği gruplar içi kare ortalaması olarak adlandırılır ve kitle varyanslarının eşit olduğu varsayıldığından, her grup (işlem) bu toplamda eşit ağırlığa sahiptir. Hataya bağlı ortalama karelerin dağılımı;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.}\right)^2}{n-k}=KO_{gi}\sim\frac{\sigma^2\chi_{n-k}^2}{n-k} \tag{2.35}$$

veya

$$\frac{KO_{gi}}{\sigma^2}\sim\frac{\chi_{n-k}^2}{n-k} \tag{2.36}$$

biçimindedir.

Dolayısıyla hipotezi test etmek için kullanılacak F değeri,

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \Big/ k-1}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right)^2 \Big/ n-k} = \frac{KO_{ga}}{KO_{gi}} = \frac{\sigma^2 \chi^2_{k-1} \big/ k-1}{\sigma^2 \chi^2_{n-k} \big/ n-k} \sim F_{k-1,n-k} \qquad \textbf{(2.37)}$$

biçimindedir [2].

Hesaplanan F değeri $F_{k-1\,,n-k,1-\alpha}$ kritik değerini aşarsa (2.1) eşitliğinde verilen yokluk hipotezi reddedilir. Kritik değeri aşmadığı durumda ise yokluk hipotezi kabul edilir.

2.4 Faktör Düzeyinin Seçimi

Varyans analizinde önemli bir konu faktör düzeylerinin nasıl seçileceği ile ilgilidir. Faktör düzeylerinin seçimi iki farklı şekilde yapılabilir. Örneğin parsellere ayrılmış bir tarla düşünelim ve bu tarla düşük verim orta düzeyde verim ve yüksek verimli parsellere ayrılmış olsun. Bu tarladan sadece yüksek verimli parselden örneklemler seçtiğimizi varsayalım. Keyfi olarak sadece yüksek verimli parselden örnek alındığından, bu seçim yöntemine keyfi (özel seçimli) seçim denilmektedir. Eğer tarladaki parseller verim olarak yüksek orta düşük fark etmeksizin her bir parselden rasgele örneklem alınması durumunda ise bu seçim yöntemine rasgele seçim denilmektedir.

Faktör düzeyleri keyfi olarak seçildiğinde üzerinde çalışılan model sabit etki modeli, rasgele olarak seçilirse üzerinde çalışılan model rasgele etki modelidir. Sabit etki modeli testinde elde edilen sonuçlar faktörün seçilen düzeyi için geçerli iken rasgele etki modelinin testinde elde edilen sonuçlar tüm kitle için genellenir [10].

2.4.1 Sabit Etki Modeli

Sabit etki modeli, $\sum_{i=1}^{k} \beta_j = 0$ varsayımı altında,

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij} \tag{2.38}$$

biçimindedir. Eşitlik (2.38)'de X_{ij} bağımlı değişken değerini , μ genel ortalamayı , β_j faktörün j. düzeyinin bağımlı değişken üzerine etkisini , ε_{ij} ise hata terimlerini ifade etmektedir.

Sabit etki modelinde hipotez testleri;

$H_0 :\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_j = \mu$

$H_1 : \mu_j$ parametrelerinden en az birisi farklıdır.

veya $\beta_j = \mu_j - \mu$ ve olmak üzere

$H_0 :\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_j = 0$

$H_1 :\ \beta_j$ parametrelerinden en az birisi 0'dan farklıdır.

biçimindedir [10].

2.4.2 Rasgele Etki Modeli

$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_j$ rasgele etki düzeyleri, her biri bağımsız ve $\beta \sim N(0, \sigma_\beta^2)$ olmak üzere rasgele etki modeli,

$$Y_{ij} = \mu + \sigma_\beta^2 + \varepsilon_{ij} \quad i = 1,2, \dots ,n\, ; j = 1,2, \dots ,J \tag{2.39}$$

biçimindedir.

Eşitlik (2.39)'da, Y_{ij} bağımlı değişken değerini, μ genel ortalamayı, σ_β^2 faktörün düzeylerinin ortalamaya ilişin varyansını, ε_{ij} hata terimlerini, ifade etmektedir.

rasgele etki modelinin hipotezleri;

$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$

$H_1 :\ \sigma_\beta^2 > 0$

biçimindedir.

Burada faktörün tüm düzeylerindeki ortalamalar aynı ise yokluk hipotezi reddedilemez, ortalamalardan en az biri farklı ise yokluk hipotezi reddedilir [10].

Rasgele etki modelinde F testi sabit etki modelindeki gibidir. Fakat rasgele etki modelinde yokluk hipotezi reddedildiğinde çoklu karşılaştırmalar yapılmaz. Bunun yerine varyans tahmini yapılır. σ_b^2 parametresinin tahmin edicisi S_b^2 olmak üzere;

$$S_b^2 = \frac{GAKO - GIKO}{n_0} \tag{2.40}$$

biçiminde yazılır [10].

Burada GAKO, gruplar arası kareler ortalamalarını, GIKO ise gruplar içi kareler ortalamalarını ifade etmektedir.

2.5 Varyans Analizinin Varsayımları

Varyans analizi yönteminin geçerli olabilmesi için örneklemin alındığı kitlenin bağımsızlık, normallik ve varyansların homojenliği varsayımlarını karşılaması gerekmektedir.

Bağımsızlık varsayımı, çalışma tasarımının bir fonksiyonu olduğundan dolayı, bir takım rasgeleleştirme tekniklerinin kullanılmasıyla kolaylıkla karşılanabilmektedir. Bu nedenle bağımsızlık varsayımı genellikle araştırmacıların kontrolündedir. Bağımsızlık varsayımının aksine normallik ve varyansların homojenliği varsayımları, örneklerin alındığı kitlenin bir fonksiyonu olduğundan bu varsayımlar çoğunlukla araştırmacıların kontrolü dışındadır. Ancak normallik ve varyansların homojenliği varsayımlarından bozulmalar çok büyük olmadığı sürece varyans analizi yöntemiyle makul çıkarımlar yapılabilmektedir. Ayrıca bu varsayımlar için geliştirilen bir takım yöntemler ile grup farklılıkları ile ilgili testler yapılabilmektedir [9]. Tez çalışmasının 3. bölümünde bu yöntemler ile alakalı genel bilgiler verilecektir.

2.5.1 Bağımsızlık

Varyans analizi yönteminde sağlanması gereken varsayımlardan biri bağımsızlık varsayımıdır. Veri kümesini oluşturan her bir gözlem, hem gruplar içinde hem de gruplar arasında, birbirinden bağımsız deneysel birimlerden oluşmalıdır. Gözlemlerin bağımsız olduğu durumda hata terimleri de bağımsız olacaktır [11].

Gözlemler arasındaki pozitif korelasyon durumunda, hata varyansının beklenen değeri içerisinde kovaryans unsuru bulunduğundan hata varyansı azalacaktır. Gereğinden fazla azalan varyans da, F istatistiğinin paydasında yer alan Hata Kareler Ortalamasının değerini düşürecektir. Bunun sonucunda F istatistiğinin değeri hızla artarak 1. tip hata değerinin artmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla gözlemler arasında pozitif korelasyon, hata varyansının eksik tahmin edilmesine ve 1. tip hata oranının artmasına neden olmaktadır. Benzer şekilde gözlemler arasında negatif korelasyon da hata varyansının fazla tahmin edilmesine ve 2. tip hata oranının artmasına neden olmaktadır [11].

Gözlemlerin bağımsız olması durumunda hatalar da bağımsız olacağından Hata Kareler Ortalamasının beklenen değeri sıfıra eşit olacaktır. Dolayısıyla hata varyansının yansız bir tahmin edicisi hesaplanmaktadır [12].

Grup ortalamalarını karşılaştırmak için standart doğrusal modeller kullanılacaksa, gözlemlerin hem gruplar içinde hem de gruplar arasında birbirinden bağımsız olması gerekmektedir. Bazı özel tasarımlar için, doğrusal modellere yönelik hipotez testleri, artan 1. tip hataları düzeltmek için ölçülü olarak ayarlanabilir. Regresyon modellerinde korelasyonlu gözlemleri işlemek için geliştirilen genelleştirilmiş tahmin denklemleri, hem sürekli hem de kategorik tahminlere sahip modellere uygulanabildiği gibi ANOVA modelleri için de kullanılabilmektedir [11]. Diğer varsayımların aksine bağımsızlık tasarım aşamasında dikkate alındığından bu varsayım genelde araştırmacıların kontrolü altındadır. Bu varsayım bir takım rastgeleleştirme teknikleri ile kolayca karşılanabilmektedir [9].

2.5.2 Normallik Varsayımı

Varyans Analizi yönteminde sağlanması gereken varsayımlardan bir diğeri normallik varsayımıdır. Bu varsayımda karşılaştırılan gruplardan her birinin normal dağılması gerekmektedir. Örneklem genişlikleri ve varyanslar eşit veya birbirlerine çok yakın olduğu durumda, varyans analizinde kullanılan F testleri bu varsayıma göre çok sağlamdır [11].

Grup dağılımlarındaki aşırı çarpıklık, F istatistiğinin değeri hızla yükselterek 1. tip hata değerinin artmasına neden olmaktadır. Ancak örneklem büyüklüğü yeterli olduğu durumlarda, normallik varsayımından sapmalar hangi ölçüde olursa olsun varyans analizi tekniği ile hala makul çıkarımlar sağlanabilmektedir. Bundan dolayı örneklem büyüklüğünü bu varsayımın karşılanması açısından önemlidir [9].

Normallik varsayımının kontrolü çeşitli biçimlerde gerçekleştirilebilir. İlk olarak gözlemlerin veya hataların kutu grafikleri kontrol edilebilir. Bu grafiklerin simetrik olması gerekmektedir. Gözlemler çarpık dağılımlardan alındığında, ortalamalar ve varyanslar arasında pozitif korelasyon oluşacaktır. Normal dağılımdan gelen ortalamalar ve varyanslar birbirinden bağımsız olduğundan, örneklem varyanslarına karşı örneklem ortalamalarının grafikleri hiçbir ilişki göstermeyecektir. Bununla birlikte Shapiro-Wilks ve Kolmogorov-Smirnov gibi bazı normallik testleri ile normallik varsayımı kontrol edilebilmektedir. [9].

Varyans analizinde normallik varsayımı sağlanmıyorsa çeşitli yöntemler kullanılabilir. Veri dönüşümleri normallik varsayımının sağlanmadığı verilerin analizini yapmak için kullanılan yöntemlerdendir. Parametrik olmayan yöntemler de normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca verilerin dağılımları bilindiği durumlarda sağlam istatistiksel yöntemler de etkin sonuçlar verebilmektedir [13].

2.5.3 Varyansların Homojenliği

Varyans analizi yönteminde sağlanması gereken varsayımlardan bir diğeri de Varyansların homojenliği (eşitliği) varsayımıdır. Bu varsayımın hipotezi,

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$

$H_1 : \forall\sigma_i^2 \neq 0 \qquad i = 1,2, \dots , k$

biçimindedir.

Varyansların homojenliği, kitleden örneklenen gözlemlerin varyansının her grupta yaklaşık olarak eşit olması gerektiğidir. Bu varsayım genelde en sık ihmal edilen, ancak en az sıklıkla kontrolü yapılan varsayımdır. Varyansların homojenliği varsayımı, varyans analizinin sonuçlarını önemli bir şekilde etkileyebilmektedir [11].

ANOVA tablosundaki F istatistiğinin paydasında yer alan Hata Kareler Ortalaması kitle varyansının en iyi tahminidir. Bu varyans unsuru toplanmış bir varyanstır ve toplanabilir olması için grup varyanslarının toplanmayacak kadar birbirinden farklı olmaması yani homojen olması gerekmektedir. Varyansların homojenliği varsayımının sağlanmadığı durumda toplanan grup varyansları olması gerekenden fazla çıkarak Hata Kare Ortalamasını gereğinden fazla artıracaktır. Bunun sonucunda F istatistiğinin değeri hızla düşürerek 1. tip hata değerinin azalmasına neden olmaktadır. Gereğinden fazla azalan 1. tip hata değeri de testin gücünü azaltacaktır. Bu hatalardaki değişimlerden testlerin nasıl etkileyeceği noktasında literatürde net bir bilgi bulunmamasına karşın, örnek genişliklerinin eşit olmadığı ve az sayıda tekrar içeren gruplarda hata oranının, örnek genişliği yeterince büyük ve çok sayıda tekrar içeren gruplardaki hata oranından daha fazla olduğu ifade edilebilir [12].

Varyansların homojenliği varsayımı çeşitli biçimlerde kontrol edilebilmektedir. Öncelikle her gruptaki gözlemlerin kutu grafikleri incelenebilir. Burada hataların grafikleri, grup ortalamalarına göre karşılaştırıldığında benzer olmalıdır. Bununla birlikte kitle varyanslarının gruplar arasında aynı olduğunu hipotezini test eden Bartlett, Hartley, Cochran, Levene gibi bir takım varyansların homojenliği testleri vardır. Fakat bu testlerden bazıları normal olmama durumlarında, özellikle de pozitif çarpıklığa karşı duyarlı olabilmektedir. Varyans eşitliği testleri örnek genişliği yeterince büyük olduğunda etkin sonuçlar verebilmektedir fakat örnek genişliği yeterince büyük değilse eşit varyanslı kitlelerde bazen yokluk hipotezini reddedebilmektedir. Ayrıca bu testler varyans heterojenliğinin nedenleri hakkında çok az bilgi sağlamaktadır. Bu nedenle grafik yöntemleri heterojenliğin nedenleri konusunda daha bilgi verici olabilmektedir [11].

Varyans analizinde varyansların homojenliği varsayımı sağlanmıyorsa çeşitli yöntemler kullanılabilir. Heterojenlik, yanıt değişkeninin pozitif olarak çarpık dağılımından kaynaklıysa, yanıt değişkeninin dönüşümleri faydalı olabilmektedir. Alternatif olarak, model hata terimleri için farklı dağılımlara izin veren genelleştirilmiş doğrusal modellerin uydurulması kategorik değişkenleri olan doğrusal modeller için etkili olabilir. Doğrusal regresyon modelleri için ağırlıklı en küçük kareler yöntemi önerilmektedir. Ayrıca ortalamalar hakkındaki hipotezleri test etmek için çeşitli sağlam (robust) test istatistikleri kullanılmaktadır [11].

3. GRUP ORTALAMALARININ KARŞILAŞTIRILMASINDA KULLANILAN ALTERNATİF YÖNTEMLER VE SAĞLAM İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

Varyans analizi yönteminin geçerli olabilmesi için örneklemin alındığı kitlenin belirli varsayımlarını karşılaması gerekmektedir. Ancak gerçek veri kümelerinde bu varsayımlar çoğunlukla sağlanamamaktadır. Bunun nedenlerinden birisi, veri kümelerinin genelde çok sayıda uç değere sahip, çarpık dağılımlı, ağır kuyruklu bir yapı göstermesi olarak ifade edilebilir [7]. Ayrıca ölçme ve kaydetme esnasında yapılan bazı ölçüm hataları ile de bazı gözlemler diğer gözlemlerden oldukça farklı çıkabilmektedir. Aykırı değer olarak adlandırılan bu gözlemler dağılımın çarpıklaşmasına ve hata varyansının artmasına neden olmaktadır. Bu durum varyans analizinin varsayımlarını bozabilmektedir.

Varyans analizinde varsayımlar sağlanmadığında veri kümelerine dönüşüm uygulanması aykırı değerin etkisini azaltarak varsayımları iyileştirmek için kullanılmaktadır. F testinin yokluk hipotezi, varsayımlarla birlikte tüm grupların dağılımının aynı olduğunu biçimindedir. Bu dağılımlar dönüşüm öncesi aynı olduğundan tüm gruplara aynı dönüşümler uygulandığında dönüşümlerden sonra da yokluk hipotezi aynı biçimde olacaktır. Dolayısıyla varsayımların sağlanmadığı durumlarda dönüşümler kullanılarak yokluk hipotezi test edebilir. Ayrıca dönüşüm uygulanmış veri kümelerine çoklu karıştırma testleri de uygulanabilmektedir [9,11].
Gruplar log, karekök vb. uygun bir parametre ile dönüştürülerek yokluk hipotezi test edilebilir. Ancak varyans analizi yöntemi için hangi dönüşümün uygun olduğu ile alakalı literatürde net bir bilgi bulunmamaktadır. Ayrıca yokluk hipotezinin testi de dönüştürülmüş veri kümeleri üzerinden gerçekleştirildiğinden, sonuçların orijinal veriye göre yorumlanması anlamında bir takım güçlükler de meydana gelebilmektedir [2].
Buna ek olarak literatürde grup ortalamaları arasındaki farkların testleri varyans analizine alternatif birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir.

3.1 Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi

Varyans analizinde varsayımların sağlanmadığı durumlarda, grup ortalamalarını karşılaştırmak için kullanılan yöntemlerden birisi ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin yöntemidir. Bu yöntem, $w_{ij} = \left(1/\sigma_i^2\right)$ ağırlıklarının tam olarak bilindiği varsayımına dayanmaktadır. Eğer yanıt değişkeni Y_i 'nin varyansı her X_i için değişiyorsa, bu durumda her gözlem varyansının bir tahmininin karşılığıyla ağırlıklandırılabilir.

X_i'de tekrarlanan Y değerlerine sahip olmadıkça σ_i^2 değerini hesaplayamayız. Bundan dolayı w_{ij} ağırlıkların tahmini kolay değildir. σ_i^2 değerini hesaplamak için birkaç yaklaşım önerilmiştir. Bunlardan ilki, birbirine yakın olarak gruplandırılan gözlemleri gruplandırarak σ_i^2 değerinin hesaplanmasıdır. Fakat her gruba kaç gözlem dahil edileceği hakkında net bir bilgi literatürde bulunmamaktadır. Önerilen bir diğer yaklaşım, σ_i^2 değerinin tahmini olarak En Küçük Kareler'de hesaplanan artık değerlerinin mutlak değerini ($|\varepsilon_i|$) kullanmaktır. Burada w_{ij}, artıkların karesinin tersi olacaktır [11].

Bu ağırlıklar özellikle az sayıda tekrarlanan gözlemlerden tahmin edildiğinde, testin sonucu olumsuz bir şekilde etkilenerek düşük güç değerine sahip olan bir test meydana gelebilir. Bundan dolayı yeterli tekrar sayısı ve ağırlıkların kesin olarak tahmin edilebildiğinde ağırlıklı en küçük kareler yöntemini kullanmak gerekir [2].

3.2 Parametrik Olmayan Yöntemler

Varyans analizinde varsayımların sağlanmaması durumunda kullanılan alternatif yöntemlerden biri de parametrik olmayan yöntemlerdir. Bu yöntemler gözlemlerle değil de daha çok gözlemlere atanan işaret veya sıra sayısı üzerinden yapılan yöntemlerdir. Gerçek veri kümelerinde normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda araştırmacılar, parametrik olmayan istatistiksel yöntemlere yönelmişlerdir. Bu yöntemler uygulanması ve çıkarılan sonuçların açıklanmasının basitliğinden dolayı yaygın olarak kullanılmaktadırlar [2].

Parametrik olmayan yöntemler varsayımların sağlanmadığı durumlarda, daha geniş uygulanabilme alanları olmasına ve daha fazla güçlü olmalarına karşın, birtakım dezavantajları da bulunmaktadır. Eğer istatistiksel işlem için uygun bir parametrik test varsa, parametrik olmayan testin gücü, parametrik teste göre daha düşük çıkacaktır. Başka bir ifade ile, aynı güvenilirlikte sonuç çıkartmak için parametrik olmayan istatistiklerde örnek genişliğinin daha büyük olması gerekmektedir. Sonuç olarak parametrik testler, normallik varsayımının sağlandığı durumlarda parametrik olmayan testlerden daha güçlüdür [2].

Kruskal Wallis Testi

Tek yönlü varyans analizinin yaygın olarak kullanılan parametrik olmayan alternatifi Kruskal ve Wallis (1952) tarafından önerilen Kruskal Wallis testidir. Bu test gruplar arasındaki dağılımın konumunda fark olup olmadığını test eder ve birleştirilmiş verilerin sıralanmasına her grup içindeki sıra toplamlarının belirlenmesine ve k-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılan bir H istatistiğinin hesaplanmasına dayanır. H istatistiği,

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \sim \chi^2_{k-1} \tag{3.1}$$

biçimindedir. Burada $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ve $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$ olarak ifade edilebilir.

Diğer parametrik olmayan testlerde de olduğu gibi Kruskal Wallis testinde de normallik varsayımı gerekli değildir. Ancak bu test dağılımın şeklini diğer gruplarda da aynı olduğunu varsaymaktadır. Bu nedenle tek yönlü varyans analizinin parametrik olmayan karşılığı olarak kullanılmaktadır.

Kruskal Wallis testi gözlemlere atanan sıra sayılarını kullandığından, gruplar benzer bile olsa konum parametrelerinde farklılık olabilir. Bu nedenle Kruskal Wallis testi için varyansların benzer olması gerekmektedir. Dolayısıyla bu test varyansların homojenliğinin çok fazla bozulmadığı normal olmayan verilerde kullanılmak için uygun bir yöntemdir.

3.3 Yaklaşık (Approximate) Testler

Varsayımlar sağlanmadığında varyans analizine alternatif olarak kullanılan yöntemlerden bir diğeri de yaklaşık (approximate) testlerdir. Bu testler yokluk hipotezinin doğruluğu varsayımında, yaklaşık test istatistiklerinin dağılımını F, t, χ^2 gibi dağılımlara yaklaştırmaktadır.

Literatürde çeşitli nedenlerden dolayı varsayımların sağlanmadığı durumlarda ANOVA'ya alternatif olarak birçok yaklaşık test vardır. Bu testlerin bir kısmı,

- Cochran testi
- Welch testi
- James 2. derece testi
- Kutu testi
- Brown-Forsythe testi

biçiminde verilebilir. Yaklaşık testler, varyansların homojenliğinin sağlanmadığı durumlarda ANOVA'ya alternatif olarak kullanılabilir fakat normallik varsayımının sağlanmadığı durumda geçerli değillerdir [3].

Bazı yaklaşık testler aşağıda verilmiştir:

Cochran Testi

Cochran (1937) tarafından önerilen Cochran istatistiği;

$$C = \sum_{i=1}^{k} w_i \left[\bar{Y}_{i.} - \sum_{i=1}^{k} h_i \bar{Y}_{i.} \right]^2 \qquad \textbf{(3.2)}$$

biçimindedir . Burada $w_i = {}^{n_i}/_{s_i^2}$ olup s_i^2 i . grubun varyansıdır ve h_i ise ;

$$h_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \qquad \textbf{(3.3)}$$

biçimindedir.

Cochran istatistiği, yokluk hipotezinin doğruluğu altında, k-1 serbestlik derecesine sahip bir kikare dağılımına sahiptir. $C > \chi^2_{k-1,1-a}$ olduğu durumda yokluk hipotezi reddedilir.

Welch Testi

Welch (1951) tarafından önerilen bu yöntem, varyansların homojenliği varsayımının sağlanmadığı durumlarda, grup ortalamalarının eşitliği hipotezinin testlerinde yaygın olarak kullanılan yöntemlerdendir [26].

Welch testi W istatistiklerinin hesaplanmasına dayanmaktadır. Burada W istatistikleri,

$$W = \frac{C = \sum_{i=1}^{k} w_i \left[\bar{Y}_{i.} - \sum_{i=1}^{k} h_i \bar{Y}_{i.}\right]^2}{(k-1) + 2(k-2)(k+1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^{-1} (1 - h_i)^2} \tag{3.4}$$

biçimindedir. Burada $w_i = {}^{n_i}/_{s_i^2}$, s_i^2 i. grubun varyansı , $\bar{Y}_{i.}$ ise i. grubun ortalamasıdır. Burada h_i Eşitlik (3.3)'deki gibidir.

Yokluk hipotezinin doğruluğu altında, W istatistikleri, k-1 ve v_w serbestlik dereceli bir F dağılımına sahiptir[36]. Burada v_w serbestlik derecesi;

$$v_w = \frac{k^2 - 1}{3 \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^{-1} (1 - h_i)^2} \tag{3.5}$$

biçimindedir. Eğer $W > F_{k-1, v_w, 1-a}$ ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.4 Kesinlik (Exact) Testleri

Yaklaşık testlerinin kullanımının uygun olmadığı durumlarda kullanılan kesinlik (exact) testleri, yokluk hipotezinin doğruluğu varsayımında, kesin test istatistiklerinin dağılımını F, t, χ^2 gibi dağılımları ile veren testlerdir [2].

Tek yönlü ANOVA'ya alternatif olarak sunulan bazı kesinlik testleri,

- Bishop-Dudewicz tarafından verilen, Eşit Olmayan Varyanslı Tam ANOVA (1978)
- Wilcox R.R. tarafından verilen, Belirtilen Güce Sahip Bir Hetorojen Anova Yöntemi (1987)
- Chen-Chen-Ding tarafından verilen, İki Aşamalı Anova Testi (2000)

biçimindedir.

Bu testlerin en günceli Chen-Chen ve Ding (2000) tarafından hazırlanan iki aşamalı ANOVA testidir [2].

3.5 Sağlam Konum Kestiricileri

Sağlamlık kavramı, varsayımlardaki küçük sapmalardan etkilenmeyen istatistiksel işlemleri ifade etmektedir. Literatürde varsayımların karşılanmaması ve veri kümesinde aykırı değerlerin olması durumunda, aykırı değerlere karşı dirençli birçok sağlam istatistiksel yöntem önerilmiştir [15]. Son yıllarda geliştirilen sağlam istatistiksel yöntemler, varyans analizi varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda, klasik yöntemlerden daha iyi sonuçlar verebilmektedir. Ayrıca gruplardaki farklılıklar ile ilgili yorumlamalarda sağlam istatistiksel yöntemler oldukça faydalıdır [2,11].

İstatistiksel işlemlerde model varsayımlarının sağlanmaması durumunda modelden sapmalardan ve aykırı değerlerden etkilenmeyen tahmin ediciler kullanılmaktadır. Genel olarak bu tahmin edicilere sağlam konum kestiricileri adı verilmektedir [18]. Sağlam Konum kestiricilerinin içinde L, R ve M kestiricileri oldukça sık kullanılan kestiricilerdendir.

L kestiricileri sıralı istatistiklerin doğrusal kombinasyonu,

R kestiricileri rank testlerine dayalı türetilen kestiriciler,

M Kestiricileri ise belirli bir amaç fonksiyonunu minimum yapan en çok olabilirlik türü kestiriciler olarak tanımlanabilir.

3.5.1 M Kestiricileri

M-Kestiricileri, minmax prensibine dayanan ve genel amaç fonksiyonlarını minimum yapan kestiricilerdir. Genelleştirilmiş en çok olabilirlik kestiricileri olarak da adlandırılmaktadır. [5,16].

$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n,\ f(x-\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu n gözlemli bir örneklem olsun. Burada θ konum parametresi ve $\rho(.)$ amaç fonksiyonu olmak üzere

$$\hat{\theta}_n = arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i - \theta) \qquad \textbf{(3.6)}$$

ifadesini minimum yapan $\hat{\theta}_n$ değeri, kitle ortalamasının M kestiricisi olarak adlandırılmaktadır [5,20].

$\rho(x_i - \theta)$, θ merkezi ile x_i değerleri arasındaki fark olmak üzere $\rho(x_i - \theta) = (x_i - \theta)^2$ olduğu durumda en küçük kareler kestiricisi, $\rho(x_i - \theta) = |x_i - \theta|$ olduğu durumda en küçük mutlak değer kestiricisi, $\rho(x_i - \theta) = -logf(x_i - \theta)$ olduğu durumda ise en çok olabilirlik kestiricisi elde edilmektedir.

Eşitlik (3.6)'daki $\hat{\theta}_n$ kestiricisinin hesabı oldukça güçtür. Hesaplama kolaylığı açısından ρ amaç fonksiyonunda θ 'ya göre türevi alındığında

$$\sum_{i}^{n} \rho(x_i - \theta) = 0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

eşitliğini sağlayan θ değerini bularak $\hat{\theta}_n$ kestiricisinin hesaplanması daha kolay olacaktır [5].

Bir takım sağlam konum kestiricileri veri kümesindeki aykırı değerleri istatistiksel işlemlerin dışında tutmaktadır. Varsayımların karşılanması açısından olumlu olan bu durum aynı zamanda veride bilgi kaybına yol açmaktadır. Burada M kestiricileri aykırı değerleri veriden çıkarmak yerine aykırı değerlere daha düşük ağırlıklar vererek hesaplamalar yapmaktadır. Bu durum aykırı değerlerin istatistiksel işlemlerdeki etkilerini azaltarak veri kümesindeki bilgi kayıplarını önlemektedir. Dolayısıyla aykırı değerlere karşı M kestiriciler, istatistiksel işlemlerde oldukça iyi sonuçlar vermektedir [19].

3.5.1.1 Tek Adım M Kestiricisi

Bir X değişkeni ile bilinmeyen θ sabiti arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyon $\varepsilon(X-\theta)$ ve Ψ, bu fonksiyonun θ' ya göre türevi olsun. Konum kestiricilerini tanımlarken genel yaklaşım $\varepsilon(X-\theta)$ fonksiyonunu minimum yapan θ değerlerinin hesaplanmasıdır. Burada θ , E[$\Psi(X-\theta)$]=0 eşitliğini sağlayan noktadır.

$\varepsilon(X-\theta)=(X-\theta)^2$ eşitliğinin sağlandığı durumda E[$\Psi(X-\theta)$]=0 ve $\theta=\mu$ yani kitle aritmetik ortalamasına eşit olur. Literatürde ε ve μ için birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmada Huber'in Ψ fonksiyonu kullanılmıştır [21,28].

$$\Psi(\mathrm{x})=\max\{-\mathrm{k},\min(\mathrm{k},\mathrm{x})\} \tag{3.8}$$

Huber'in M kestiricilerinin tahmini Newton-Raphson tahmin yöntemi ile yapılımaktadır. Bu yöntemde tek bir iterasyon, tek-adım M-kestiricisini vermektedir [29].

$$\mu_m=\frac{1.28MADN(i_2-i_1)+\sum_{i=i_1+1}^{n-i_2}X_{(i)}}{n-i_1-i_2} \tag{3.9}$$

Burada

$$MADN={}^{MAD}\!/_{0.6745} \tag{3.10}$$

ve

$$MAD=Med\{|X_1-M|,|X_2-M|,\dots,|X_n-M|\} \tag{3.11}$$

biçimindedir.

Eşitlik (3.9)'da;

i_1, $\frac{X_i - M}{MADN} < -1.28$ koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını

i_2, $\frac{X_i - M}{MADN} > 1.28$ koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını göstermektedir.

Kesilmiş ortalamada veriden atılacak gözlem sayısı önceden saptanmış sabit bir kesilme yüzdesiyle verilir. Fakat Tek-adım M-kestiricisi ile veriden atılacak gözlem sayısı mevcut veri kümesine göre deneysel olarak belirlenir. Bu nedenle Tek-adım M-kestiricisi örneklemin seçildiği kitleye göre veri kümesinden çıkarılacak gözlem sayısında değişiklik yapabilir [30].

3.5.1.2 Düzeltilmiş Tek Adım M Kestiricisi

Eşitlik (3.9)'da verilen tek adım M kestiricisinde, 1.28(MADN)($i_2 - i_1$) teriminin çıkarılmasıyla düzeltilmiş tek-adım M-kestiricisi elde edilir. Normallik varsayımı altında tek-adım M-kestiricisinde hesaplanan aykırı değer belirleme kuralı, istatistiksel etkinliği artırmak amacıyla Düzeltilmiş tek-adım M kestiricisinde değiştirilmiştir. Tek adım M kestiricisinden farklı olarak düzeltilmiş tek-adım M kestiricisi aykırı değer olarak be gözlemlerin de ortalamalarını hesaplamaktadır.

Düzeltilmiş Tek Adım M Kestiricisi

$$\hat{\mu}_{mom} = \frac{\sum_{i=i_1+1}^{n-i} X_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \qquad \textbf{(3.12)}$$

biçimindedir.

Burada;

i_1, $\frac{X_i - M}{MADN} < -2.24$

koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını,

i_2, $\frac{X_i - M}{MADN} > -2.24$,

koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını vermektedir [21].

3.5.2 L Kestiricileri

L-kestiriciler sıralı istatistiklerin doğrusal bileşimleri olarak ilk defa Daniel (1920) tarafından tanımlanmıştır. Özellikle konum kestiriminde L-kestiricileri oldukça kullanışlıdır.

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ n örnek genişliğine sahip bir örneklemin sıra istatistikleri ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gerçel sayılar olsun. $0 \leq a_i \leq 1$; i $= 1,2, \ldots,$ n olmak üzere L-kestiricisi

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_{(i)} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ olmalıdır.

L-kestiricilerin en bilinenleri örneklem ortalaması, ortanca, kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalamalardır. n örnek genişliğine sahip bir örneklemin ortalaması, bütün ağırlıkları eşit ve $1/n$ olan bir L-kestiricisidir. Benzer biçimde n örnek genişliğine bir örneklemin ortancası da, n tek sayı ise bir, n çift sayı ise iki sıra istatistiğinin katsayısı dışındaki tüm katsayıların sıfır olduğu bir L-kestiricisidir. M kestiricileri sağlamlık için uygun olmasına karşın hesaplama kolaylığı açısından L kestiricileri yaygın olarak tercih edilmektedir [16,17].

3.5.2.1 Ortanca

Ortanca, gözlemlerin büyükten küçüğe doğru sıralandığı durumda veri kümesinin üst yarısını alt yarısından ayıran değer olarak tanımlanabilir. Bir veri kümesinde ortadaki değer olarak tanımlanabilir. Bir L kestiricisi olan ortanca %50'lik bozulma noktasına sahip olduğundan en dirençli kestiricidir. Bundan dolayı sağlam istatistiksel işlemlerde büyük bir öneme sahiptir. n gözlemli sahip bir örneklemin ortancası,

$$\text{Ortanca} = \begin{cases} X_{n+1/2} & , \quad \text{n tek sayı} \\ \dfrac{X_{n/2} + X_{n/2+1}}{2} & , \quad \text{n çift sayı} \end{cases} \tag{3.14}$$

biçimindedir.

Ortanca, örnek genişliği tek sayı olduğu durumda bir, çift sayı olduğu durumda ise iki sıra istatistiğinin katsayısı dışındaki katsayıların sıfır değerini aldığı bir L-kestiricisidir.

3.5.2.2 Kesilmiş Ortalama (Trimmed Mean)

Kesilmiş ortalama aykırı değerli bir veri kümesinde kitle ortalamasının tahmininde kullanılabilecek bir L kestiricisidir. n örnek genişliğine sahip bir veri kümesinde kesilmiş ortalama, örneklemdeki sıra istatistiklerinin her iki ucundan belli oranda gözlem değerlerinin çıkarılmasından sonra hesaplanan ortalama olarak tanımlanmaktadır. Örneğin, örnek genişliği 20 olan bir örneklemin %20 kesilmiş ortalaması, verideki en büyük ve iki en küçük 4 değerinin çıkarıldıktan sonra geriye kalan 12 gözlemin ortalamasıdır. Özel olarak aritmetik ortalama %0 kesilmiş ortalama, ortanca ise $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)$ oranında kesilmiş ortalamaya eşittir [31].

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ sıralı istatistikler olsun. Bu durumda ($\propto ,1-\beta$) kesilmiş ortalama $I_n = (n \propto)$ ve $u_n = (n\beta)$ olmak üzere;

$$T_n = T_n(I_n, u_n) = \frac{1}{l_n - u_n} \sum_{i=I_n+1}^{u_n} x_{(i)} \tag{3.15}$$

biçiminde tanımlanır. Burada I_n sıralanmış gözlemlerin alt kısmından atılacak gözlem sayısını, u_n ise üst kısımdan atılacak gözlem sayısını vermektedir [18].

3.5.2.3 Winsorize Edilmiş Ortalama (Winsorized Mean)

İlk defa Rivest (1993) tarafından kullanılan winsorize edilmiş ortalama aykırı değer durumunda kullanılan kitle ortalamasının sağlam bir kestiricisidir. Uygulama olarak winsorize edilmiş ortalama, kesilmiş ortalama ile benzerdir. Ancak winsorize edilmiş ortalamada verinin uç kısımlarındaki değerler çıkarılarak yerlerine kendilerinden önce gelen gözlem değerleri konulur. Yani, $l_n = [n\alpha]$ verinin alt kısmındaki çıkarılacak gözlem sayısı ve $u_n = [n\beta]$ verinin üst kısmından çıkarılacak gözlem sayısı olmak üzere $(\alpha, 1-\beta)$ winsorize edilmiş ortalama, en küçük l_n tane gözlemi (l_n +1)'inci gözlemle, en büyük (*n*- u_n) tane gözlemi ise u_n'inci gözlemle değiştirerek hesaplanan ortalamadır [2,3]. Böylece kesilmiş ortalamada verilerin çıkarılmasından kaynaklı meydana gelebilecek bilgi kayıpları winsorize edilmiş ortalama ile azaltılmaktadır.

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ sıralı istatistikler olsun. Bu durumda ($a, 1-\beta$) winsorize edilmiş ortalama, $I_n = (n\alpha)$ ve $u_n = (n\beta)$ olmak üzere;

$$W_n = W_n(I_n, u_n) = \frac{1}{n}\left\{ I_n Y_{(I_n+1)} + \sum_{i=I_n+1}^{u_n} X_{(i)} + (n-u_n) X_{u_n} \right\} \tag{3.16}$$

biçiminde tanımlanır.

3.5.2.4 Kesilmiş L Ortalama (Trimmed L-TL Mean)

Kesilmiş L ortalama, Elamir ve Seheult (2003) tarafından önerilmiş olup, diğer L kestiricilerinde de olduğu gibi sıralı istatistiklerinin doğrusal kombinasyonları olarak tanımlanmaktadır. Kesilmiş -L ortalama;

$$\widehat{M}_{TL} = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_{(i)} \tag{3.17}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $I_n = (n, a)$ olmak üzere ağırlık fonksiyonu;

$$w_i = \begin{cases} \dfrac{\binom{i-1}{I_n}\binom{n-i}{I_n}}{\binom{n}{2I_n+1}}; & I_n + 1 \leq i \leq n - I_n \\ 0 \quad ; & d.d \end{cases} \tag{3.18}$$

biçimindedir.

Kesilmiş-L ortalama hesaplanma şekli ve uç gözlemlerin veri kümesinden atılması bakımından kesilmiş ortalamaya benzemektedir. Aralarındaki en temel fark, kesilmiş ortalamada gözlemlere eşit ağırlık veriliyorken, kesilmiş-L ortalamada ise ortancaya yakın olan gözlemler daha büyük ağırlıklara sahiptir [5].

3.5.3 R Kestiricileri

Rank testlerinden türetilen R kestiricileri gözlemlerin küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe sıralandıktan sonra bu gözlemlerinin gerçek değerleri yerine sıra sayılarını kullanan kestiricilerdir. Bundan dolayı parametrik olmayan kestiricilerdir. Wilcoxon skorları olarak da adlandırılırlar.

R kestiricileri,

$$\sum \left[rank(e_i) - \frac{1}{2}(n+1) \right] e_i \tag{3.19}$$

veya

$$\sum a_n(R_i) e_i \tag{3.20}$$

biçiminde tanımlanır. Burada R_i, $rank(e_i)$ ve $a_n(i)$ skor fonksiyonudur [10].

$$a(i) = i - \frac{1}{2}(n+1) \tag{3.21}$$

R-kestiricileri, büyük örnek genişliğine sahip veri kümelerindeki yetersizlikleri ve uygulamadaki karmaşıklıklarından dolayı kullanışlı değillerdir [16].

3.5.3.1 Hodges-Lehman Kestiricisi

Hodges-Lehman (1963) tarafından önerilmiştir. Bu kestirici, Wilcoxon sıra sayılı işaret test istatistiğinden türetilmiştir. Kısaca gözlem çiftlerinin ortalamalarının ortancası olarak tanımlanabilir.

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ n gözlemli rasgele bir örneklem olmak üzere kitle ortalamasının Hodges-Lehman kestiricisi,

$$\hat{\mu}_{HL} = med\left\{\frac{x_i + x_j}{2}, 1 \leq i < j \leq n\right\} \tag{3.22}$$

biçiminde tanımlanır. Ortalama ve ortanca unsurlarını içeren bu kestirici istatistiksel işlemlerde iyi sonuçlar verebilmektedir [5].

Yukarıda, varsayımlardaki bozuluma ve aykırı değerlere karşı konum kestirimi için bir takım konum kestiricileri verilmiştir. Konum kestiriminde olduğu gibi ölçek kestiriminde de klasik kestiriciler varsayımlardaki bozulmalardan ve aykırı değerlerden etkilenebilmektedir. Bu nedenle varsayımlardaki bozulmalardan ve aykırı değerlere karşı sağlam ölçek kestiricilerinin kullanımı önerilmiştir. Bir sonraki bölümlerde bu kestiricilerden bazıları verilmiştir.

3.5.4 Sağlam Ölçek Kestiricileri

Standart sapma, ölçek kestiriminde sıklıkla kullanılan ölçek kestiricisidir. Örneklem standart sapması,

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((X_i - \bar{X})^2/n - 1)} \tag{3.23}$$

biçimindedir.

Standart sapma yaygın olarak kullanılan ölçek kestiricisi olmasına karşın standart sapmanın hesaplanmasında aritmetik ortalama kullanıldığından, bu ölçek kestiricisinin bozulma noktası sıfırdır. Bu nedenle standart sapma sağlam bir ölçek kestiricisi değildir. Dolayısıyla ölçek kestiriminde, varsayımlardaki bozulmalar ve aykırı değerlerden etkilenmeyen bir takım sağlam ölçek kestiricilerinin kullanılması gerekmektedir. Aşağıda bu kestiricilerden kısaca bahsedilmiştir.

Ortancadan Mutlak Sapmaların Ortalaması

Mutlak sapmaların ortalaması (AD) kısaca;

$$AD = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|X_i - M| \qquad \textbf{(3.24)}$$

biçiminde tanımlanır.

Ortancadan Mutlak Sapmaların Ortancası

Ortancadan mutlak sapmaların ortancası (MAD) kısaca;

$$MAD = ortanca\{|X_i - M|\} \qquad \textbf{(3.25)}$$

biçiminde tanımlanır.

Normal dağılan bir değişken için (MAD), standart sapmanın 0,6745 katına ve mutlak sapmanın (AD) 0,8453 katına eşittir. Standart sapmaya göre (MAD) kalın kuyruklu dağılımlarda daha küçüktür [22].

Hampel (1974) tarafından verilen ortancadan mutlak sapmaların ortancası aykırı değerlere karşı sağlam olan bir ölçek kestiricisidir [32]. Sağlamlığın önemli bir ölçüsü olan bozulma noktası ortancada en yüksek değer olan 0,5 biçimindedir. Bu nedenle ortanca sağlam bir konum kestiricisidir. Benzer şekilde (MAD) bozulma noktası en yüksek olan bir ölçek kestiricisidir. Ayrıca, (MAD), örnek genişliğinden de etkilenmemektedir. Bu iki özellikten dolayı Huber (1981), (MAD) kestiricisini "ölçek için en kullanışlı tek yardımcı tahmin" olarak belirtmiştir [27].

Çeyreklikler Arası Açıklık

Çeyreklikler arası açıklık bir veri kümesinden gözlemlerin büyükten küçüğe doğru sıralandıktan sonra veri kümesindeki 3. Çeyreklik ile 1. çeyreklik arasındaki farktır. x_l 1. Çeyreklikteki gözlemi x_u ise 3. Çeyreklikteki gözlem değeri olmak üzere çeyreklikler arası açıklık

$$\mathrm{IQR} = x_u - x_l \qquad \textbf{(3.26)}$$

biçiminde tanımlanır.

Çeyrekler arası açıklık, kutu grafiği tarafından kullanılan bir ölçüdür. Bununla birlikte bir L kestiricisi olan %25 kesilmiş ortalamaya eşittir. Aşırı uçlarda standart sapmaya göre daha az etkilendiğinden dolayı standart sapmaya alternatif olarak kullanılan bir sağlam bir ölçek ölçütüdür [23].

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde tez çalışmasının amacına uygun olarak hazırlanan bilgisayar programı üzerinden bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında, grup sayısı 3 olarak alınmıştır. Örnek genişliği sırasıyla 10, 15, 20 ve 30 olmak üzere hataları $\varepsilon \sim N(0,1)$ biçiminde standart normal dağılan veri kümeleri üretilmiştir. Tekrar sayısı 1000 olarak belirlenmiş olup hesaplamalar için R Studio programının WRS2 paketi kullanılmıştır [33].

Simülasyon çalışmasında öncelikle varsayım bozulumlarının olmadığı durumlar için hesaplamalar yapılmıştır. Sonrasında normal dağılımlı veri kümeleri, aykırı değerler oluşturularak bozulmuştur. Aykırı değerlerin varlığında sağlam konum kestiricilerine dayalı F testi yapılmış ve elde edilen sonuçlar klasik konum kestiricisinin kullanıldığı klasik F testi ile karşılaştırılmıştır. Kestiricilere ilişkin sonuçların karşılaştırması 1. tip hatalar üzerinden yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar ilerleyen bölümlerde verilmiştir.

Simülasyon çalışmasına geçmeden önce aykırı değerlerin oluşturulması ile alakalı olarak kısa bilgilere yer verilmiştir.

4.1 Aykırı Değerin Oluşturulması

Simülasyon çalışmasında aykırı değer oluşturulurken iki durum ele alınmıştır:

I. Durum: Box-Plot Grafiği ile Belirlenen Üst Sınıra Grubun Standart Sapması Eklenerek Aykırı Değer Oluşturma

Ele alınan bu durum için öncelikli olarak simülasyon çalışması ile elde edilen gözlemlerin kutu grafikleri çizdirilerek alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Standart normal dağılan bu verilerde en uçta kalan gözlemler, belirlenen alt veya üst sınırların dışında kalan aykırı değerlerle değiştirilmiştir. Bu çalışmada oluşturulacak aykırı değer ise,

$$\text{Aykırı Değer} = \text{Üst Sınır} + k\sigma \qquad \textbf{(4.1)}$$

biçiminde belirlenmiştir. Burada σgrubun standart sapmasıdır. k değeri ise simülasyon çalışmasındaki aykırı değer sayısına göre 0,5 ila 1,5 arasında değişen değerler almıştır.

II. Durum: Uç Değerlerin Aykırı Değer Olarak Oluşturulması

Aykırı değer oluşturmak için izlenen diğer bir durum ise küçükten büyüğe sıralanan veride uçtaki gözlemlerin yerine çok büyük bir değer eklenmesi olarak belirlenmiştir.

4.2 Sonuçların Karşılaştırılmasına Kullanılan Kriter

Similasyon çalışmasında karşılaştırma ölçütü olarak 1. tip hata sonuçları kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar Bradley (1978) tarafından önerilen "Bradley'in Liberal Kriteri" üzerinden yorumlanmıştır [24].

Yokluk hipotezinin doğruluğu altında, testlerdeki varsayımların bozulduğu durumlarda 1. tip hata oranının gerçek değeri $\hat{a}$, nominal anlamlılık düzeyi a' dan farklı olma eğilimindedir. Testlerin varsayımdaki bozulmalarına karşı dayanıklı olup olmadığını belirlemek için, Bradley (1978) tarafından önerilen Bradley'in Liberal Kriteri kullanılmaktadır. Bu kritere göre gerçekleşen 1. tip hata oranı $\hat{a}$, $0.5a \leq \hat{a} \leq 1.5a$ aralıkları arasında ise testin sağlam olduğu ifade edilebilir. Eğer $\hat{a}$, $0{,}5a$ değerinden küçük ise nominal anlamlılık düzeyinden küçük (tutucu), $1.5a$ değerinden de büyük ise nominal anlamlılık düzeyinden büyük (liberal) olduğu ifade edilebilir [24,25].

Bu çalışmada, anlamlılık düzeyi a, 0.05 alınmıştır. Bradley'in liberal kriterine göre aykırı değerli veride testin sağlam çıkması için 1. tip hata oranının $0.025 \leq \hat{a} \leq 0.075$ arasında çıkması gerekmektedir. Sonuçlar bu aralıkta çıktığı durumda 1. tip hata oranının kontrol altında olduğu biçiminde yorum yapılabilir. Eğer $\hat{a}$ değeri 0.025 değerinden küçük çıkarsa testin tutucu, 0.075 değerinden büyük çıktığı durumda ise testin liberal sonuç verdiği yorumu yapılabilir [24]. Simülasyon çalışması ile elde edilen, sağlam konum kestiricilerine dayalı F testlerinin sonuçlar bu kriter üzerinden yorumlanacaktır.

4.3 Sonuçlar ve Yorumlanması

Hazırlanan bilgisayar programı üzerinden varsayım bozulumunun olmadığı duruma ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Standart Normal Dağılımlı veri kümesine ilişkin 1. tip hata oranları

	1. tip hata oranı			
	n_j=10	n_j=15	n_j=20	n_j=30
Klasik Konum Kestiricisi	**0,049**	**0,046**	**0,043**	**0,036**
%5 Kesilmiş Ortalama	0,158	0,111	0,109	0,115
%10 Kesilmiş Ortalama	0,158	0,189	0,178	0,171
%20 Kesilmiş Ortalama	0,263	0,318	0,313	0,343
%5 Winsorize Ortalama	0,139	0,097	0,082	0,083
%10 Winsorize Ortalama	0,169	0,186	0,143	0,116
%20 Winsorize Ortalama	0,201	0,236	0,331	0,325
Ortanca	0,107	0,144	0,119	0,133
Tek Adım M kestiricisi	**0,066**	**0,052**	**0,051**	**0,044**
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	0,086	0,086	0,086	0,079

Çizelge 4.1'deki sonuçlar incelendiğinde beklenildiği gibi klasik konum kestiricisinin 1. tip hata oranının bütün örneklemlerde kontrol altında olduğu görülmektedir. Buna ek olarak Tek Adım M kestiricisinin 1 Tip Hata oranı da bütün örneklemlerde kontrol altında olduğu diğer konum kestiricilerinin ise liberal sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bölüm 4.1'de verilen I. Durum göz önüne alınarak oluşturulan 1 ve 2 aykırı değer içeren veri kümeleri ilişkin sonuçlar sırasıyla Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.2 I. Durum ile Oluşturulan 1 Aykırı Değerli Veri Kümesine ilişkin 1. Tip Hata Oranları

	1. tip hata oranı			
	n_j=10	n_j=15	n_j=20	n_j=30
Klasik Konum Kestiricisi	0,022	**0,038**	**0,038**	**0,030**
%5 Kesilmiş Ortalama	0.158	0,098	0.107	0,115
%10 Kesilmiş Ortalama	0,158	0,189	0,178	0,171
%20 Kesilmiş Ortalama	0,263	0,318	0,313	0,343
%5 Winsorize Ortalama	0,144	0,089	0,080	0,083
%10 Winsorize Ortalama	0,169	0,183	0,143	0,116
%20 Winsorize Ortalama	0,201	0,236	0,331	0,325
Ortanca	**0.060**	0,139	0,115	0,119
Tek Adım M kestiricisi	0,024	**0,049**	**0,044**	**0,040**
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	**0,045**	0,088	0,094	**0,069**

Çizelge 4.2'deki sonuçlar incelendiğinde klasik konum kestiricisi ile Tek Adım M kestiricisi küçük örneklemde tutucu sonuçlar verdiği ancak örneklem büyüklüğü arttıkça bu kestiricilerin 1. tip hata kontrolünü sağladığı görülmüştür. Buna ek olarak Ortanca ve Modifiye Edilmiş M kestiricilerinin küçük örneklemde 1. tip hata kontrolünü sağladığı ancak örneklem büyüklüğü arttıkça liberal sonuçlar verdiği görülmüştür. Diğer konum kestiricilerinin ise liberal sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çizelge 4.3 I. Durum ile Oluşturulan 2 Aykırı Değerli Veri Kümesine ilişkin 1. Tip Hata Oranları

	1. tip hata oranı			
	n_j=10	n_j=15	n_j=20	n_j=30
Klasik Konum Kestiricisi	0,022	**0,031**	**0,029**	0,022
%5 Kesilmiş Ortalama	0,078	0,116	**0,070**	0,111
%10 Kesilmiş Ortalama	0,078	0.185	0,178	0,171
%20 Kesilmiş Ortalama	0,263	0.318	0,313	0,343
%5 Winsorize Ortalama	0,094	0,093	**0,064**	0,091
%10 Winsorize Ortalama	0,088	0.195	0,143	0,116
%20 Winsorize Ortalama	0,201	0,236	0,331	0,325
Ortanca	**0,040**	**0,076**	**0,056**	0,105
Tek Adım M kestiricisi	0,018	**0,027**	0,018	**0,035**
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	**0,033**	**0,053**	**0,042**	**0,065**

Çizelge 4.3'deki sonuçlar incelendiğinde klasik konum kestiricisi ve Tek Adım M kestiricilerinin küçük örneklemlerde 1. tip hata oranınında tutucu sonuçlar verdiği görülmüştür. Ortanca, n=30 hariç diğer durumlarda, Modifiye edilmiş Tek adım M kestiricisinin de her örneklemde 1. tip hata kontrolünü sağladığı görülmüştür. Küçük örneklemde %10 kesilmiş ortalama, n=20 örnek büyüklüğü için ise %5 winsorize Ortalama 1. tip hata oran kontrolünü sağladığı görülmüştür. Diğer konum kestiricilerinin ise liberal sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bölüm 4.1'de verilen II. Durum göz önüne alınarak oluşturulan 1 ve 2 aykırı değer içeren veri kümeleri ilişkin sonuçlar sırasıyla Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Çizelge 4.4 II. Durum ile Oluşturulan Tek Aykırı Değerli Veri Kümesine ilişkin 1. Tip Hata Oranları

	1. tip hata oranı			
	n_j=10	n_j=15	n_j=20	n_j=30
Klasik Konum Kestiricisi	0,012	0,020	0,018	0,020
%5 Kesilmiş Ortalama	0,158	0,116	0,109	0,115
%10 Kesilmiş Ortalama	0,158	0,189	0,178	0,171
%20 Kesilmiş Ortalama	0,263	0,318	0,313	0,343
%5 Winsorize Ortalama	0,169	0,099	0,082	0,083
%10 Winsorize Ortalama	0,169	0,183	0,143	0,116
%20 Winsorize Ortalama	0,201	0,236	0,331	0,325
Ortanca	0,023	**0,049**	**0,059**	0,087
Tek Adım M kestiricisi	0,007	0,015	0,016	0,024
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	0,011	0,022	**0,032**	**0,042**

Çizelge 4.4'deki sonuçlar incelendiğinde, ortancanın küçük örneklemde tutucu örnek genişliğinin 15 ve 20 olduğu durumlarda 1. Tip hatanın kontrolünü sağladığı, örnek genişliğinin büyük olduğu durumlarda ise liberal sonuç verdiği görülmüştür. Modifiye edilmiş M kestiricisinin ise küçük örneklemde tutucu sonuçlar vermesine karşın örnek genişliğinin yeterli olduğu durumlarda 1. Tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. Klasik konum kestiricisi ve Tek Adım M kestiricisinin her örneklem büyüklüğü durumunda tutucu diğer kestiricilerin ise liberal sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çizelge 4.5 II. Durum ile Oluşturulan 2 Aykırı Değerli Veri Kümesine ilişkin 1. Tip Hata Oranları

	1. tip hata oranı			
	n_j=10	n_j=15	n_j=20	n_j=30
Klasik Konum Kestiricisi	0,020	**0,033**	**0,029**	**0,026**
%5 Kesilmiş Ortalama	**0,035**	**0,049**	**0,056**	**0,029**
%10 Kesilmiş Ortalama	**0,035**	0,232	0,178	0,171
%20 Kesilmiş Ortalama	0,263	0,318	0,313	0,343
%5 Winsorize Ortalama	0,099	0,081	**0,068**	0,020
%10 Winsorize Ortalama	0,092	0,215	0,143	0,116
%20 Winsorize Ortalama	0,201	0,236	0,331	0,325
Ortanca	0,005	0,020	**0,027**	**0,051**
Tek Adım M kestiricisi	0,001	0,004	0,008	0,014
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	0,004	0,008	0,016	**0,028**

Çizelge 4.5’deki sonuçlar incelendiğinde, klasik kestiricinin örnek genişliğinin yeterli olduğu durumda 1.tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. %5 kesilmiş ortalamanın tüm durumlarda 1. tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. %10 kesilmiş ortalamanın küçük örneklemde, 1. Tip hatanın kontrolünü sağladığı ancak örnek genişliği arttıkça liberal sonuçlar verdiği görülmüştür. %5 winsorize edilmiş ortalamanın küçük örneklemde liberal sonuçlar verdiği, örnek genişliğinin 20 olduğu durumda 1. tip hatanın kontrolünü sağladığı, örnek genişliğinin büyük olduğu durumda ise tutucu sonuçlar verdiği görülmüştür. Ortancanın küçük örneklemde tutucu sonuçlar vermesine karşın örnek genişliğinin yeterli olduğu durumlarda 1. Tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisinin, örnek genişliğinin 30 olduğu durumda 1. Tip hatanın kontrolünü sağlamasına karşın daha düşük örnek genişliğinde tutucu sonuçlar verdiği görülmüştür. Tek Adım M kestiricisinin tüm örneklemlerde tutucu diğer kestiricilerin ise liberal sonuçlar verdiği görülmüştür.

4.4 Gerçek Veriler Üzerine Uygulama

Bu bölümde, simülasyon çalışmasında ele alınan kestiriciler, gerçek veri kümesi üzerinde karşılaştırılacaktır. Bunun için normal dağılımlı ve eşit varyanslı, 3 grup ve 10 gözlemli gerçek bir veri kümesi kullanılmıştır. İlk olarak gerçek veri kümesi üzerinden hesaplamalar yapılmış ve sonrasında veri kümesinde aykırı değerler oluşturularak sonuçlar tekrar elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Bir atölyedeki 3 makinenin üretimleri Çizelge 4.6' da verilmiştir [34].

Çizelge 4.6 Gerçek Veri Kümesi

A	B	C
4	6	3
5	7	4
5	6	5
4	8	5
6	6	4
6	7	4
4	9	3
5	8	3
4	6	4
4	5	3

Buna göre 3 makine arasında fark olup olmadığını test etmek için kullanılacak hipotezler,

$H_0 : \ \mu_A = \mu_B = \mu_C$

$H_1 : \ \forall_i \neq 0 \qquad i = A, B, C$

biçimindedir. Bu hipotezler sözel olarak da,

H_0: A, B ve C makineleri arasında bir fark yoktur.

H_1: A, B ve C makinelerinden en az birisi diğerlerinden farklıdır.

biçiminde ifade edilebilir.

Veriye ait ANOVA tablosu Çizelge 4.7’ de verilmiştir.

Çizelge 4.7 Çizelge 4.6’da verilen veriye ait ANOVA tablosu

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamları	Serbestlik Dereceleri	Kareler Ortalamaları	F İstatistiği
Gruplar Arası	47,4	2	23,7	25,3
Gruplar İçi	25,3	27	0,937	
Toplam	72,7	29		

F tablo değeri ise $F_{k-1,n-k,a}$ dan $F_{2,27,0.05} = 3{,}35$ olarak verilir.

Hesaplanan F değeri $F_{Hesaplanan} = 25{,}3 > F_{2,27,0.05} = 3{,}35$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Yani %5 anlamlılık düzeyinde A, B ve C makinelerinden en az birinin üretimi diğerlerinden farklı olduğu ifade edilebilir.

Veri kümesinde C grubuna yer alan son gözlem aykırı değer ile değiştirilmiştir. Elde edilen veri kümesi Çizelge 4.8’ da verilmiştir.

Çizelge 4.8 Aykırı Değerli Gerçek Veri Kümesi

A	B	C
4	6	3
5	7	4
5	6	5
4	8	5
6	6	4
6	7	4
4	9	3
5	8	3
4	6	4
4	5	**30**

$H_0 : \ \mu_A = \mu_B = \mu_C$

$H_1 : \ \forall_i \neq 0 \qquad i = A, B, C$

biçimindedir. Bu hipotezler sözel olarak da

H_0: A, B ve C makineleri arasında bir fark yoktur.

H_1: A, B ve C makinelerinden en az birisi diğerlerinden farklıdır.

biçiminde ifade edilebilir.

ANOVA tablosu Çizelge 4.9’ da verilmiştir.

Çizelge 4.9 Çizelge 4.8’ de verilen veriye ait ANOVA tablosu

<table>
<tr><th>Değişim Kaynağı</th><th>Kareler Toplamları</th><th>Serbestlik Dereceleri</th><th>Kareler Ortalamaları</th><th>F İstatistiği</th></tr>
<tr><td>Gruplar Arası</td><td>25,8</td><td>2</td><td>12,9</td><td rowspan="3">0,546</td></tr>
<tr><td>Gruplar İçi</td><td>638,2</td><td>27</td><td rowspan="2">23,64</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td>664</td><td>29</td></tr>
</table>

F tablo değeri ise $F_{k-1,n-k,a}$ dan $F_{2,27,0.05} = 3{,}35$ olarak verilir.

Hesaplanan F değeri $F_{Hesaplanan} = 0{,}546 < F_{2,27,0.05} = 3{,}35$ olduğundan H_0 kabul edilir yani %5 anlamlılık düzeyinde A, B ve C makineleri arasında fark olmadığı ifade edilebilir.

Çizelge 4.9’daki ANOVA tablosu incelendiğinde veri kümesindeki bir aykırı değerin bile testin kararını değiştirdiği görülmektedir.

Aykırı değerli veri kümesi için sağlam konum kestiricileriyle yapılan F testi Çizelge 4.10’da verilmiştir.

Çizelge 4.10 Sağlam Konum Kestiricileri ile Yapılan F Oranları

	F Değeri	Hipotez Ret/Kabul
Klasik Konum Kestiricisi	0,546	Kabul
%10 Kesilmiş Ortalama	24,6	Ret
%20 Kesilmiş Ortalama	16,22	Ret
%10 Winsorize Ortalama	30,76	Ret
%20 Winsorize Ortalama	31,28	Ret
Ortanca	0,673	Kabul
Tek Adım M kestiricisi	0,782	Kabul
Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi	0,713	Kabul

Çizelge 4.10’daki sonuçlar incelendiğinde, Klasik Konum Kestiricisi, Ortanca, Tek Adım M kestiricisi ve Modifiye Edilmiş Tek Adım M Kestiricisi ile yapılan F testinde yokluk hipotezi kabul edilmiş $(F_{Hesaplanan} < F_{2,27,0.05})$, %10, %20 kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalama ile yapılan F testinde ise yokluk hipotezi reddedilmiştir. Buradan Çizelge 4.6’daki normal dağılımlı veri kümesi ile yapılan F testinin kararının,

Çizelge 4.8’deki aykırı değerli veri ile %10, %20 kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalamaları üzerinden yapılan F testinin kararı ile aynı olduğu görülmektedir.

Gerçek veri kümesi üzerinden elde edilen sonuçlar incelendiğinde aykırı değerli veri kümesinde kesilmiş ile winsorize edilmiş ortalamalar, aykırı değer olmayan veri kümesinde klasik konum kestiricisi ile benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. Simülasyon sonuçları ile karşılaştırıldığında, I. Durum veya II. Durum fark etmeksizin aynı sayıda aykırı değer için 1. tip hata oranlarının da eşit olduğu görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalamanın aykırı değerlere karşı sağlam olduğu ifade edilebilir.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tez çalışması 5 bölümden oluşmuştur. İlk bölümde giriş yapılmış, ikinci bölümde varyans analizi ve varsayımları hakkında detaylı bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde aykırı değer kaynaklı varsayımlardaki bozulmalara karşı grup ortalamalarının karşılaştırılmasında kullanılan alternatif bir takım testler ile sağlamlık kavramı, sağlam konum ve ölçek kestiricileri hakkında detaylı bilgilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Tek Yönlü varyans analizi için sağlam konum kestiricileri ile hazırlanan bilgisayar programı üzerinden bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Beşinci bölümde ise sonuçlar tartışılmıştır.

Simülasyon sonuçları incelendiğinde, I. Durum için örnek genişliğinin 10, veri kümesinde 1 ve 2 aykırı değer olduğu durumda Ortanca ve Modifiye Edilmiş Tek Adım M kestiricisinin klasik konum kestiricisinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. 2 aykırı değer bulunduğunda bu kestiricilere ek olarak %5 ve %10 kesilmiş ortalamanın 1. Tip hatanın kontrolünü sağlamaya çok yakın olduğu görülmüştür. II. Durum için aykırı değer sayısı 1 olduğunda Ortanca ve Modifiye Edilmiş Tek Adım M kestiricisinin tutucu sonuçlar vermesine karşın aykırı değer sayısı 2 olduğunda, yukarıda belirtilen kestiriciler ile birlikte %5 ve %10 kesilmiş ortalamanın da klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak Ortanca ve Modifiye Edilmiş Tek Adım M kestiricisinin düşük örneklemde ve aykırı değer oranının düşük olduğu durumlarda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği, %5 ve %10 kesilmiş ortalamanın da düşük örneklemde ve aykırı değer oranının yüksek olduğu durumda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

I. Durum için örnek genişliğinin 15 olduğu durumda klasik konum kestiricisinin 1 ve 2 aykırı değerli veri kümesinde 1. tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. Sağlam konum kestiricilerinden elde edilen sonuçlar incelendiğinde 1 ve 2 aykırı değerli veri kümesinde, Tek Adım M Kestiricisinin klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. Ortanca ve Modifiye edilmiş Tek Adım M Kestiricisi 1 aykırı değerli veri kümesinde tutucu sonuçlar vermesine karşın 2 aykırı değerli veri kümesinde klasik kestiricinin yerine kullanılabildiği görülmüştür. II. Durum için ise 1 aykırı değer durumunda ortancanın, 2 aykırı değer durumunda ise % 5 kesilmiş ortalamanın klasik kestiricinin yerine kullanılabildiği görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak 15 örnek genişliği için, Ortanca, Tek Adım M Kestiricisi ve Modifiye Edilmiş Tek Adım

M kestiricisinin aykırı değer oranının düşük olduğu durumlarda, ortanca ve %5 kesilmiş ortalamanın ise aykırı değer oranının yüksek olduğu durumlarda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

I. Durum için örnek genişliğinin 20 olduğu durumda klasik konum kestiricisi 1 ve 2 aykırı değer durumunda 1. tip hatanın kontrolünü sağladığı görülmüştür. Sağlam konum kestiricilerinden elde edilen sonuçlar incelendiğinde bir aykırı değerli veri kümesinde Tek Adım M Kestiricisi klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. Ortanca ve Modifiye edilmiş M Kestiricileri 1 aykırı değerli veri kümesinde tutucu sonuçlar vermesine karşın iki aykırı değerli veri kümesinde klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. II. Durum için bir aykırı değerli veri kümesinde Ortanca ve Modifiye edilmiş tek adım M kestiricisinin klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği, iki aykırı değerli veri kümesi için ortanca, %5 kesilmiş ortalama ve % 5 winsorize edilmiş ortalamanın klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak 20 örnek genişliği için Ortanca, Tek Adım M Kestircisi ve Modifiye edilmiş tek adım M kestiricisinin aykırı değer oranının düşük olduğu durumlarda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği, aykırı değer oranının yüksek olduğu durumlarda ise Ortanca, Modifiye edilmiş tek adım M kestiricisi, %5 kesilmiş ortalama ve % 5 winsorize edilmiş ortalamanın klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

I. Durum için örnek genişliğinin 30 olduğu durumda klasik konum kestiricisi 1 aykırı değerli veri kümesinde 1. tip hatanın kontrolünü sağlamış olup aykırı değer sayısı 2 ye çıkarıldığında tutucu sonuç vermiştir. Sağlam konum kestiricilerinden elde edilen sonuçlar incelendiğinde 1 ve 2 aykırı değerli veri kümesinde Tek Adım M Kestiricisi ve Modifiye edilmiş M Kestiricileri, klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. II. Durum için 1 aykırı değer durumunda Modifiye edilmiş M Kestiricisinin, iki aykırı değer durumunda ise Modifiye edilmiş M Kestiricisi, ortanca ve %5 kesilmiş ortalamanın klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak 30 örnek genişliği için Tek Adım M Kestircisi ve Modifiye edilmiş tek adım M kestiricisinin aykırı değer oranının düşük olduğu durumlarda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği, Modifiye edilmiş M Kestiricisi, ortanca ve %5 kesilmiş ortalamanın da aykırı değer oranının yüksek olduğu durumda klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

Simülasyon çalışmasında, kesilmiş ve winsorize edimiş ortalamaların liberal sonuçlar vermesine karşın veri kümesindeki bozulma oranının, kesilme ve winsorize edilme oranından eşit veya küçük olduğunda I. ve II. Durum için 1. tip hataları aynı çıkmıştır. Buradan kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalamanın, örnek genişliği ve aykırı değer oranı ne olursa olsun sağlam sonuçlar verdiği ifade edilebilir. Ancak aykırı değer sayısına bağlı olarak veri kümesinin bozulma oranı değiştiğinden, bozulma oranının kesilme ve winsorize edilme oranının geçtiği durumlarda 1. Tip hatanın düşmeye başladığı ifade edilebilir.

Klasik bir kestirici olan örneklem ortalaması, çok hassas bir ölçü olduğundan F test istatistikleri aykırı değerlerden çabuk etkilenmektedir. Ancak aykırı değerin çok büyük olmadığı ve örnek genişliğinin yeterli olduğu durumlarda klasik kestirici makul sonuçlar vermektedir.

Tek adım M kestiricisi klasik kestirici ile benzer sonuçlar vermesine karşın aykırı değerin çok büyük olmadığı durumda klasik kestiriciden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak küçük sapmalarda tek adım M kestiricisi klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

Ortanca, aykırı değerin çok büyük olmadığı durumlarda aykırı değer sayısına bağlı olarak düşük örneklemde klasik kestiriciye göre iyi sonuçlar vermiştir. Aykırı değerin büyük olduğu durumlarda ise örnek genişliğine bağlı olmak üzere klasik kestiriciden iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak ortancanın aykırı değer sayısı ve oranına bağlı olmak üzere çoğunlukla klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

Modifiye edilmiş M kestircisi, aykırı değerin çok büyük olmadığı durumlarda özellikle düşük örneklemde klasik kestiriciye göre iyi sonuçlar vermiş olup, aykırı değer oranı arttığında örnek genişliğinin yeterli olduğu durumlarda klasik kestiriciye göre iyi sonuçlar vermiştir. Buradaki sonuçlardan yola çıkarak Modifiye edilmiş M kestircisinin aykırı değer sayısı ve oranına bağlı olmak üzere çoğunlukla klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

Kesilmiş ve winsorize edilmiş ortalamalar liberal sonuçlar vermesine karşın veri kümesinin bozulma oranı, kesilme ve winsorize edilme oranından küçük veya eşit olduğu sürece aykırı değer sayısı ve büyüklüğüne bağlı olmaksızın 1. Tip hataları aynı çıkmıştır. Buna ek olarak %5 kesilmiş ortalama yüksek aykırı değerli veride klasik kestiriciye göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Buradan, aykırı değerli veri kümesinde kesilme oranı düşük olacak şekilde kesilmiş ortalamanın klasik kestiricinin yerine kullanılabileceği ifade edilebilir.

Genel olarak, Tek Adım M kestiricisinin küçük sapmalarda makul çıkarımlar verdiği görülmüştür. Ortanca ve Modifiye edilmiş Tek Adım M kestiricisi yapılan simülasyon çalışmasında çoğunlukla 1. tip hataların kontrolünü sağlamayı başarmıştır. Aykırı değer oranının yüksek olduğu durumda ise bu kestiricilere ek olarak %5 kesilmiş ve %5 winsorize edilmiş ortalamaların da makul çıkarımlar verdiği görülmüştür. Dolayısıyla örnek genişliği yeterli ise, aykırı değerin çıkarılması amacıyla veri kümesi düşük oranda olacak şekilde kesilebileceği veya winsorize edilebileceği ifade edilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1]. Rostron P.D. Ramsey M.H. ; Cost effective, robust estimation of measurement uncertainty from sampling using unbalanced ANOVA; Accred Qual Assur 17:7–14; **2012**

[2]. Özdemir A.F; ANOVA Methods for the Group Means Wıth Unknown Varıances, A Thesis Submitted to the Graduate School of Natural and Applied Science of Dokuz EylülUniversity In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Statistics Program; **2006**

[3]. W.-M. Luh, J.-H. Guo ; A powerful transformation trimmed mean method for one-way fixed effects ANOVA model under non-normality and inequality of variances ; British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 52, 303–320; **1999**

[4]. Ovla ve Taşdelen; Aykırı Değer Yöntemi; Mersin Üniversitesi Sağlık Bilimleri Dergisi ; 5(3); **2012**

[5]. Altın A. , Sağlam Kestiricilerin Etkinliklerinin Farklı Örnekleme Yöntemleri için Karşılaştırılması ve Uygulaması; Doktora Tezi; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü; Eskişehir **2007**

[6]. Yıldırım Ö. , One-Way Anova For Tıme Serıes Data Wıth Non-Normal Innovatıons: An Applıcatıon To Unemployment Rate Data; The Degree Of Master Of Scıence In Statıstıcs; The Graduate School Of Natural And Applıed Scıences Of Mıddle East Technıcal Unıversıty; **2017**

[7]. Esen M.F. , Timor M; Çok Değişkenli Aykırı Değer Tespiti İçin Klasik Ve Dayanıklı Mahalanobis Uzaklık Ölçütleri: Finansal Veri İle Bir Uygulama; Uluslararası İktisadi ve İdari İnceleme Dergisi ; (25):267-282; **2019**

[8]. Eisenhart, C. ; Assumptions underlying analysis of variance. Biometrics, 3,1-22; **1947**

[9]. Oehlert G.W. ; A First Course in Design and Analysis of Experiments, University of Minnesota; **2010**

[10]. Önver Ö & Gamgam H & Altunkaynak B ; Spss Uygulamalı Temel İstatistik Yöntemler , Gözden Geçirilmiş 9. Baskı , **2019**

[11]. Gerry P. Quinn & Michael J. Keough; Experimental Design and Data Analysis for Biologists, Cambridge University Press 8, 193-194; **2002**

[12]. Tekindal B., Varyans Analizinin Önşartları ve Transformasyonlar; Doktora Tezi ;Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Zootekni Anabilim Dalı; **1998**

[13]. Şenoğlu B. & Acıtaş Ş; İstatistiksel Deney Tasarımı Sabit Etkili Modeller ,4 Basım , **2020**

[14]. Özdemir F. , Yılmaz İ. ; K Bağımsız Grubu Karşılaştırmak İçin Dayanıklı Yöntemler; Turkiye Klinikleri J Biostat;8(2):143-51; **2016**

[15]. Çeltikçi F.A. , Doğrusal Karma Modelde Varyans Bileşenlerinin Sağlam Kestiriciler İle Tahmini; Yüksek Lisans Tezi; Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü; Ankara **2020**

[16]. Candan, M. Doğrusal Regresyon Çözümlemesinde Sağlam Kestiriciler, Hacettepe Üniversitesi. ANKARA. **1995**

[17]. Polat E; Sağlam Kısmi En Küçük Kareler Regresyon Analizinde Yeni Yaklaşımlar; Doktora Tezi; Hacettepe Üniversitesi. ANKARA. **2014**

[18]. Altın A, Şenoğlu B; Konum Parametresinin Bazı Sağlam Tahmin Edicilerinin Örnekleme alanında Kullanılması ve bir tarım uygulaması, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, **2008**

[19]. Vural A. , Aykırı Degerlerin Regresyon Modellerine Etkileri ve Saglam Kestiricier; Yüksek Lisans Tezi; Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı; İstanbul **2007**

[20]. Huber, P.J., , Robust statistics: A review, Ann. Math. Statist., 43, 1041-1067; **1972**

[21]. Yıldıztepe E, Özdemir A.F ; Asimetrik ve Ağır Kuyruklu Dağılımların Konum Parametresinin Bootstrap Güven Aralıkları İçin Bir Benzetim Çalışması; Bilim ve Teknoloji Dergisi A- Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik ; Cilt 14 Sayı 3; Sayfa 213-229; **2013**

[22]. Mosteller, F. & Tukey, J.W.. Data Analysis and Linear Regression, Addison-Wesley, Reading. **1977**

[23]. Anonim, Interqartile Range https://www.itl.nist.gov/div898/software/dataplot/refman2/auxillar/iqrange.html, (Erişim Tarihi 15.05.**2022**)

[24]. Bradley V,J Robustness ; Br. J. mathh. Statist. Psychol., 31, 144-152 Printed in Great Britain; **1978**

[25]. İşler G; Budanmış Ortalamalar İçin Karşılaştırma Testleri; Yüksek Lisans Tezi; Hacettepe Üniversitesi. ANKARA. **2021.**

[26]. TAYSI M. R. , ÇELİK Ş; Homojen Olmayan Varyans Varsayımı Altında Ortalamaların Eşitliği için Brown-Forsythe ve Welch İstatistiklerinin Mısır Verimi Örneğine Uygulanması; Fırat Üniv. Fen Bilimleri Dergisi; 30(1), 23-27, **2018**

[27]. Leys C. , Klein O, Bernard P, Licata L; Detecting outliers: Do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median ; Journal of Experimental Social Psychology; **2013**

[28]. Huber, P.J. Robust Statistics. New York: Wiley.; **1981**

[29]. Serfling, R.J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. Newyork: Wiley. **1980**

[30]. Wilcox, R.R. Fundamentals of Modern Statistical Methods. Springer-Verlag. **2001**

[31]. Hoaglin, D. C., Mosteller, F., Understanding robust and explonatory data analysis, John Wiley & Sons, NewYork; **1983**

[32]. Frank R. Hampel ; The Influence Curve and Its Role in Robust Estimation ; Journal of the American Statistical Association , Jun., 1974, Vol. 69, No. 346 ; pp. 383-393; **1974**

[33]. Mair P. , Wilcox R. ; Robust statistical methods in R using the WRS2 package ; Behavior Research Methods 52:464–488; **2020**

[34]. Anonim, Tek Yönlü Varyans Analizi; https://avys.omu.edu.tr/public/5.HAFTA/ (Erişim Tarihi 15.11.**2022**)

[35]. Howell, David Statistical Methods for Psychology. Duxbury. pp. 324–325. **2012**

[36]. Welch, B. L., On the comparison of several mean values: An alternative approach. Biometrika, 38, 330-336, **1951**.