HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

MATEMATİK EĞİTİMCİLERİ VE MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ EĞİM, DEĞİŞİM ORANI ve TÜREV HAKKINDAKİ KAVRAM İMAJLARININ İNCELENMESİ

Ramazan EROL

Doktora Tezi

Ankara, 2022

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

MATEMATİK EĞİTİMCİLERİ VE MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ EĞİM, DEĞİŞİM ORANI ve TÜREV HAKKINDAKİ KAVRAM İMAJLARININ İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF THE CONCEPT IMAGES OF MATHEMATICS EDUCATORS AND PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS ABOUT SLOPE, RATE OF CHANGE AND DERIVATIVE

Ramazan EROL

Doktora Tezi

Ankara, 2022

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Ramazan EROL' un hazırladığı "Matematik Eğitimcileri ve Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim, Değişim Oranı Ve Türev Hakkındaki Kavram İmajlarının İncelenmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Prof. Dr. Şenol DOST	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Doç. Dr. Elif SAYGI	İmza
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Murat PEKER	İmza
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ahmet ERDOĞAN	İmza
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Bahadır YILDIZ	İmza

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 16 / 06 / 2022 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Selahattin GELBAL

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Bu araştırmanın amacı matematik eğitimcilerinin ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında kavram imajlarını incelemektir. Araştırmada nitel araştırma desenlerinden bütüncül çoklu durum çalışma deseni kullanılmıştır. Araştırmaya farklı devlet üniversitelerinde görev yapan ve Analiz (1, 2 ve 3) derslerinden sorumlu dört matematik eğitimcisi ve bir devlet üniversitesinde birinci sınıfta öğrenim gören Analiz 1 dersini başarıyla tamamlamış üç ilköğretim matematik öğretmen adayı, ikinci sınıfta öğrenim gören Analiz (1 ve 2) dersini başarıyla tamamlamış dört ilköğretim matematik öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında katılımcıların kavram imajlarını belirlemek üzere, katılımcılara araştırmacı tarafından hazırlanan birinci aşama soruları ve ikinci aşama soruları yöneltilmiştir. Birinci aşama sorulardan elde edilen ses kayıtları transkript edilmiştir daha sonra katılımcılara ikinci aşama sorular uygulanmıştır. İkinci aşama sorular katılımcılardan yazılı olarak teslim alınarak araştırmacı tarafından betimsel içerik analizi ile incelenmiştir. Her bir durumda veriler literatürden faydalanılarak araştırmacı tarafından belirlenen analiz çerçevesi ile analiz edilerek çalışmaya dair kodlar oluşturulmuştur. Bu kodlar farklı bir uzman tarafından tekrar oluşturularak uyum yüzdesi belirlenmiş ve .82 olarak tespit edilmiştir. Bu araştırmanın sonucunda matematik eğitimcileri birinci aşama sorularda sahip oldukları kavram imajlarını ikinci aşama sorularda da kullanabilmişlerdir. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adayları ise birinci aşama sorularda sahip oldukları kavram imajlarını ikinci aşama sorularda da kullanabilmiştir. Uygulama sorularında yer alan sorular yazılı olarak cevaplandığı için farklı temsil biçimlerini kullandıkları her iki katılımcı grubu içinde geçerli olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının, birinci ve ikinci aşama sorularda kavramların formel tanımı kavram imaj hücreleri ile örtüşmediği görülmüştür.

Anahtar sözcükler: kavram imajı, eğim, değişim oranı, türev, matematik eğitimcisi, ilköğretim matematik öğretmen adayı

Abstract

This research study aims to examine the concept images of mathematics educators and pre-service primary school mathematics teachers (PSPSMT) about concepts of slope, rate of change and derivative. Research employed holistic multiple case study design. Four mathematics educators who work in different state universities teaching Calculus (1,2,3) courses, and three PSPSMTwho successfully completed Calculus1 course in first year of a state university, and four PSPSMT in the second year participated in the study. The participants were selected through the purposive sampling method. To determine participants' concept images about slope, rate of change and derivative concepts, participants were asked first-stage questions, second-stage questions prepared by the researcher. After participants' recorded responses to first-stage questions were transcribed, the second stage questions were applied to the participants. Participants responded to the second stage questions in written form and researcher analyzed the data through descriptive content analysis. In each case, data were analyzed using analysis framework determined by the researcher based on literature, and codes for study were created. A different expert also coded data, and the percentage of agreement was determined as .82. Study revealed that mathematics educators and PSPSMT were able to use the concept images they had in the first stage questions also in the second stage questions. But it was concluded PSPSMT used more concept images in the latter stage. Since the questions in the practice questions were answered in written form, it was seen that they used different forms of representation, and it was valid for both participant groups.

Keywords: concept image, slope, rate of change, derivative, mathematics educator, pre-service math teachers

Teşekkür

Lisansüstü eğitimim boyunca beni aydınlatan, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, birlikte çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli danışmanım Doç. Dr. Elif SAYGI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitemde bulunarak beni onurlandıran, doktora eğitimimin her aşamasında desteğini hissettiğim, bilgi ve deneyimiyle çalışmalarıma yön veren ve kendisini her yönüyle örnek aldığım kıymetli hocam Prof. Dr. Murat PEKER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez izleme komitemde bulunmasından onur duyduğum, matematik eğitimi alanındaki bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren kıymetli hocam Prof. Dr. Şenol DOST'a, tez jürimde yer almayı kabul ederek görüş ve önerilerini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ahmet ERDOĞAN'a ve lisans eğitimimde bana danışmanlık yaparak yön veren, doktora tez jürimde de bulunarak kıymetli katkılar sunan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Bahadır YILDIZ'a teşekkür ederim.

Tezime başlarken ve süreçte her daim bana vakit ayıran, fikirleri ve yönlendirmeleriyle akademik olarak ufkumu açan kıymetli hocama şu cümleyi ithaf ediyorum “many thanks to dear my colleague Sir BİNGÖLBALİ”.

Lisansüstü eğitim sürecinde beni motive eden, desteklerini esirgemeyen, kendileriyle çalışmaktan gurur duyduğum çalışma arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Mahmut Sami KOYUNCU'ya, Dr. Öğr. Üyesi Gürcan KAYA'ya, Doç. Dr. M. Recai TÜRKMEN'e, doktora tezimin metin tamiri konusunda bana yardımcı olan Dr. Öğr. Üyesi Bilal UYSAL'a ve Dr. Öğr. Üyesi Cahit ERDEM'e ayrıca teşekkür ederim.

Lisans eğitimimden sonra “Bu burada bitmemeli” diyerek beni doktora sürecine başlamama ve akademisyen olmam gerektiğine inandıran sevgili dayım Himmet MANAP'a, her konuşmamızda doktorayı bitirmem gerektiği konusunda beni motive eden sevgili kayınpederim Ramazan CAMBAZ’a teşekkür ederim.

Doktora sürecinin zorlu bir süreç olduğunun her zaman farkında olup uykusuz gecelerime yoldaş olan ve çayımı, kahvemi eksik etmeyen, sürekli yanımda olduğunu bildiğim ve hissettiğim, bana her zaman destek olan sevgili eşim Zeynep Özen EROL’a, yalnızca bu çalışmamda değil, tüm hayatım boyunca bana inanan, güvenen, benim bugünlere gelmemi sağlayan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili annem Leyla EROL’ a ve canım babam Muammer EROL’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsınız…

Sevgili yeğenlerim Merve’ye ve Berat’a …

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

MAA: Mathematics Assosiation of America

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

YÖK: Yükseköğretim Kurulu

Bölüm 1

Giriş

Günümüzde matematiğin toplumların hayatında önemli bir yere sahip olduğu yadsınamaz bir gerçektir. Matematik önceleri toplumların yaşamında sayma, ölçme gibi işlemlerle başlamışsa da günümüzde yaşamın her alanında kullanılan önemli bir anahtar konumundadır. Günümüzde yaşamın her alanında yer almasına rağmen matematiğin henüz net bir tanımı yapılamamıştır. Matematiğin kimi yerde sayma işlemi, kimi yerde bir düşünce sanatı, kimi yerde bilimin ortak dili olduğu üzerine çok çeşitli tanımlarının yapıldığı aşikârdır (Işık, Çiltaş ve Bekdemir, 2008; Jitendra ,2005; Kupari, 2008). Ayrıca matematiğin kendine ait bazı özellikleri olduğu bilinmektedir. Matematiğin soyut, kesin, tutarlı ve genelleştirilebilir olması bunlardan bir kaçıdır. Bu da bize matematiğin tarifinin zor olduğunu göstermektedir (Carpenter & Lehrer, 1999; Kline, 1958; Núñez & Lakoff, 2005). Tüm bunlara rağmen matematiği evrensel bir dil olarak kabul etmenin yanında düşünenleri kesin bilgiye götüren yegâne bir düşünme biçimi olduğu da söylenebilir (Yıldırım, 2004).

Matematik toplum hayatında bu denli önemli olmasına rağmen bütün dünyada öğrenilmesi zor bir disiplin olarak kabul edildiği ve hatta bu disipline yönelik korku ve kaygının olduğu bilinmektedir (Ashcraft & Ridley, 2005; Ma, 1997). Matematiğin zor kabul edilmesinin en önemli nedenlerinden birisi, matematik eğitimcilerinin ve öğretmenlerinin öğretilmesi gereken konuları kavramsal olarak tam içselleştiremedikleri, bu nedenle matematiği öğrenebilmesi zor bir disiplin haline getirmektedir (Işık ve Konyalıoğlu, 2010). Alan yazın incelendiğinde matematik kavramlarının doğru ve anlamlı bir şekilde hem öğreticinin hem de öğrenenin zihninde somutlaşması önem arz etmektedir (Habre & Abboud, 2006; Heinze, Star, & Verschaffel, 2009; Kline, 1958; Bingölbali, Arslan ve Zembat, 2016; Sfard, 2000, 2005; Dreyfus & Eisenberg, 1992). Vinner (1983)' a göre öğretim sürecinde maruz kalınan yanlış örnekler, öğrencilerin zihninde yanlış şemalara, dolayısıyla yanlış öğrenmelere neden olacaktır. Bu bağlamda, kavram öğreniminin bireylerin zihinlerinde doğru bir şekilde gerçekleşmesi önem arz etmektedir. Bu durumun özellikle matematik gibi bir disiplinde olması hem kaygıyı azaltabilir hem de öğrenilmesi zor kavramların kolayca zihinde somutlaşmasını sağlayabilir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının matematik kavramlarını kavramsal olarak anlamaları, derinlemesine yorumlayabilmeleri her dönemde önemli olmuştur (Maharajh, Brijlall ve Govender, 2008; Wu, 2003).

Matematik genel olarak düşünüldüğünde, güçlü bir yapıya sahiptir ki bu yapıyı toplumsal yaşamın pek çok alanında ekonomide, tıpta, mühendislikte, fizikte, kimyada, biyolojide hatta politikaların belirlenmesinde matematiğin önemli bir yere sahip olduğunu görebiliriz (Byerley, 2016; Robinson, 2003; Turner & Alvarez, 2021).

Problem Durumu

Tanınmış bir sosyal bilimci olan Kurt Lewin "İyi bir teori kadar pratik bir şey yoktur." (Lewin, 1951, s.169) şeklinde bir ifade kullanmıştır. Ancak Poincarê (1908) 'e göre iyi bir teorinin pratikleşmesi matematik öğrenenleri anlamakla mümkündür. Bu nedenle, güçlü bir teori ile bakılan ve öğrenenleri anlamaya yönelik bir çalışmada araştırılan konu hakkında daha niteliksel olgulara ulaşılabilir.

Matematik kavramları arasında anlamlı bir ilişki olduğu ve bu ilişkilerin birbiriyle bağlantılı olduğu bilinmektedir (MEB, 2013a). Matematikteki kavramların aslında neyi ifade ettiğini bilmek belki de öğretimde istenilen durumunun yani anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için önemli bir safhayı teşkil edecektir (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; Çakıcı, Alver ve Ada, 2006; Goldsmith, Doerr & Lewis, 2014; Tzur & Simon, 2004).

Gerçek dünyada yer alan problem durumlarındaki örüntüleri fark eden, bu örüntüler ile ilişki kurabilen, matematikte neyin nasıl olduğunu bilen, bu kavramları doğru bir şekilde ifade edebilen bir kişi için matematik, eğlenceli bir uğraş ve belki de bir oyundur. Bu açıdan bakıldığında matematikte öğrenciye problem durumunu fark ettirme ve bu problem durumlarından çıkış yollarını sezdirme önemlidir (Umay, 2007). Benzer olarak NCTM

(2000)' de matematik öğretiminin amacı öğrencilere günlük yaşamın gerektirdiği bilgi ve becerileri ve problem çözme yaklaşımı kazandırabilmektir.

"Bilgi nedir? Nasıl oluşur? İnsan beyni nasıl çalışır? Öğrenme nasıl kalıcı hâle gelir?" gibi sorular geçmişten günümüze araştırılmaya devam edilmektedir (Umay, Akkuş ve Paksu, 2006). Matematiğin sarmal yapısı göz önünde bulundurulduğunda, okul öncesinden başlayan örüntülerden ortaokulda cebirle tanışmaya, lisede fonksiyon, limit, türev ve integral gibi üst düzey düşünme becerisi gerektiren konulara doğru gidildiği söylenebilir. Ortaöğretim matematiğinin devamı niteliğinde görülen yükseköğretim matematiği ile konulara devam edilmektedir.

Yükseköğretimde matematiğin en önemli derslerinden birisi de analizdir. Bu öğrenme alanında değişimleri anlamak, yorumlamak ve geleceğe yönelik tahminlerde bulunmak esastır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013; Dreyfus, 2002; Tall, 2002; Turner & Álvarez, 2021). Ayrıca, eğitim süreci göz önünde bulundurulursa; ortaöğretimden lisansüstü eğitime kadar her aşamada önemli bir yere sahip olan analiz dersi, üst düzey düşünme gerektiren matematik becerilerini ve öğrencilerin ileri düzey matematiksel düşünme becerilerini içerir (Kuzu, 2021). Bununla beraber analiz dersi limit, türev, integral gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiren matematiksel kavramları içerir ve öğrencilerde sorgulama, akıl yürütme, matematiksel düşünme gibi becerileri geliştirir (Artigue, 2002; Cohen; 2012; Ergene, 2019; Konyalıoğlu, Lithner, 2004; Mueller, 2004; Tortumlu, Kaplan, Işık ve Hızarcı, 2011; Kuzu 2021; Thomas & Finley, 2001; Strasser, 2010). Leibniz ve Newton'un anıtsal bir çalışma olarak ortaya koydukları bu ders, matematiğin aslında en önemli buluşlarından birisidir (Bingölbali, 2010). Tall (1993) 'a göre analiz -ya da başka bir deyimle- kalkülüs (calculus) dersinin farklı anlamları olabilir ve hatta bu anlamlar ülkeden ülkeye farklılık gösterebilir. Tall (1993) bunlarla ilgili:

> İnformel kalkülüsten; değişim oranıyla ilgili informel fikirler, diferansiyel alma, integral olarak,

formel kalkülüse doğru; formel olarak bütünlük fikri, limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı, süreklilik, diferansiyel, Riemann bütünleşmesi, ortalama değer teoremi vb. değişiminden bahsetmiştir.

Alan yazın incelendiğinde üst düzey bilgi ve beceri gerektiren bu konular öğrenenler için öğrenilmesi ve anlamlandırılması açısından çok zorlandıkları söylenebilir (Bukova, 2006; Cornu,1981; Doruk, Duran ve Kaplan, 2017; Dreyfus & Eisenberg, 1982; Grover, 2015; Tall & Vinner,1981; Tall, 1993; Thomas & Finley, 2001; White & Mitchelmore, 1996; Turan, 2016 Bu bağlamda yurtdışında yapılan çalışmalar incelendiğinde analiz dersi ile ilgili 1980'li yıllarda ABD'de matematik ile ilgilenen farklı grupların yayınladığı raporlar bulunmaktadır (Mathematics Assosiation of America [MAA], 1981; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1987). Bu gruplardan MAA ve NCTM'nin hem fikir oldukları konu ise analiz dersinin öğretiminin etkili olmadığı yönündedir (Grant, 2001). Analiz dersi hakkında belirlenen ve ortaya atılan olumsuz fikirler dikkate alındığında 1986 yılında Tulane Üniversitesinde yapılan konferans akabinde yayımlanan kitabı inceleyen bir çalışmada ise analiz dersi için birtakım reformların yapılabileceğinden bahsedilmiştir (bkz. Moore ve Smith, 1987). Bu reformlardan bazıları şunlardır:

Matematik okur-yazarlık yeteneği analiz dersi kavramlarının anlaşılmasına temel teşkil etmektedir,

- Öğrenci merkezli bir analiz dersinin üniversitelerde işlenmesinin önemli olacağıdır.

Bununla beraber yine Harvard Üniversitesi önderliğinde yapılan Harvard Core Calculus Consortium Project isimli çalışmada ise analiz dersinde yer alan kavramların hem nümerik, hem cebirsel hem de grafiksel olarak öğretilmesi gerektiğinden bahsedilmiştir (Moore & Smith, 1987). Gleason ve Hallet (1992) bu projede "The Role of Three" adını verdikleri analiz kavramlarının grafik, nümerik ve cebirsel olarak öğretiminin öneminden bahsetmişler ve bunu şu şekilde gerekçelendirmişlerdir:

> “Eski analiz, çoğu zaman sadece öğrencilere oldukça düşüncesiz bir şekilde cebir pratiği vermekle sonuçlanan bir prosedürler ve şablon problemler dizisi haline geldi… Örneğin, türev kavramının tanımını ele alalım. Önce öğrencilere türevin ne anlama geldiğini grafik olarak gösteren resimler çizdik. Daha sonra sekantı tanjanta alan sınırlama işleminin arkasında yatan sayısal değerlerden kısaca bahsettik. Son olarak öğrencilere türevlerin analitik olarak nasıl hesaplanacağını gösterdik. Yine de, tüm anlam ilk ikisinde taşınmış olsa da, analitik açıdan başka bir şeyi nadiren test ettik. Öğrencilerin daha sonra analitik olarak çalıştıkları için türevlerin grafiksel ve sayısal anlamlarını yanlarında tuttuklarına inanmış olmalıyız. Ne yazık ki, hiçbir şey gerçeklerden daha uzak olamaz. Örneğin, grafiksel türev veya türevin sayısal yaklaşımları hakkında sorular sorduysak, genellikle grafiksel veya sayısal yönleri anlamanın ne yazık ki eksik olduğunu gördük. Türevleri mekanik olarak bulabilen ve bunları kullanarak problem çözebilen birçok öğrenci, türevin gerçekte ne anlama geldiği hakkında çok az fikre sahiptir. Fonksiyonlara ait türevleri mekanik olarak bulabilen ve bunları kullanarak problemleri çözebilen öğrencilerin çoğu türevin gerçekte ne anlama geldiğini bilmemektedir. (Gleason & Hallet, 1992, s. 1-4)

Gleason ve Hallet (1992) ‘in çalışmalarında vurguladıkları bu durum ne yazık ki ülkemizde de yapılan çalışmalarda da geçerliğini koruduğunu söyleyebiliriz (bkz. Bingölbali ve Monaghan, 2008; Bingölbali, 2009; Çekmez, 2013; Erdoğan, 2017; Karpuzcu, 2017).

Matematiğin öğretme ve öğrenme sürecinde kavram tanımlarının etkin bir role sahip olduğu pek çok araştırmacı tarafından kabul görmüştür (Vinner, 1976). Matematiksel bir kavramın doğru bir şekilde zihinde yer alması için doğru ve anlamlı olarak tanımlanması gerekir (Tall & Vinner, 1981; Öztoprakçı, 2014; Winicki-Landman & Leikin, 2001). Bununla birlikte, matematiksel ifadelerin zihinsel olarak tam ve anlamlı olabilmesi için önceki bilgilerin yapısal olarak sağlam olması gerekir. Örneğin, monoton diziler kavramı ile ilgili örnekler, öğrencinin seriler ve limit kavramı ile ilgili kavram tanımlarına hatta kavram imajlarına etki edebilir (Davis & Vinner, 1986). Öte yandan matematiksel alan bilgisinin temel taşı olan matematiksel kavramların tanımlarının doğru ve anlamlı bilinmesi, öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerine sunacakları öğretimi de etkileyecektir (Zazkis & Leikin, 2008). Matematiksel kavram tanımlarının öğretim sürecinde öğrencilere sunulma biçimi, onların kavram imajları ve kavram tanımları arasındaki ilişkisini şekillendirir. Bununla birlikte, öğrencilerin düşünme süreçlerini etkileyen yapının önemli birer yapı taşı haline gelmektedir (Tall & Vinner, 1981; Vinner 2002; Zazkis & Leikin, 2008). Matematik eğitimi araştırmalarında öğretmenlerin matematiksel bilgilerinin derin olması gerektiği, ancak bu sayede kavramların öğretiminde öğrencilerin zihninde anlamlı bir şekilde yer edebileceği düşünülmektedir (Ball, 1992, 1997; Winicki-Landman & Leikin, 2001). Bu bağlamda, öğretmenlerin kavramlar hakkındaki yetkinlikleri, öğrencilerin zihninde hangi kavramın oluştuğu hangisinin oluşmadığını bilmesine olanak sağlamaktadır (Öztoprakçı, 2014).

Matematiğin anlaşılması en güç derslerinden birisi analiz dersi olduğu kabulü dersin öğrenciler tarafından yeterince içselleştirilememesi durumunu ortaya çıkarmaktadır (Yeşildere, 2007). Analiz matematikte sonsuz süreçleri inceler, Ülger (1999) sonsuz süreçleri, limit kavramı ekseninde tanımlanan bütün kavramlar olarak tanımlamaktadır. Analizde hesaplama merkeze alınmaktadır. Kendi içerisinde birçok kavram ve hesaplamayı içermektedir. Bu açıdan öğrenilmesi ve kavranması öğrenciler açısından güç olduğu söylenebilir (Engin, 2016). Matematiğin önemli derslerinden birisi olan analiz dersini öğrenmek aritmetik, cebir ve geometriyi öğrenmekle aynı olamayacağı kabul edilebilir (Thomas & Finley, 2001). Dolayısıyla analiz dersi matematikte önemli bir yere sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu bağlamda incelendiğinde analiz dersinin temelinde yer alan kavramların anlaşılabilmesi için diğer matematik kavramları (cebir, geometri, trigonometri) ile ilişki gerektiren ve daha sonraki matematik konuları için basamağın ilki olacak şekilde analizin önemi matematik eğitimine de yansıdığı görülmektedir. Bu açıdan bakıldığında analiz dersi özellikle matematik eğitimi için temel derslerden biridir (Sağlam, 2011). Analiz dersi konuları itibariyle görsel özellikler taşıyabilmektedir. Bu açıdan bakıldığında analiz dersi kapsamında yer alan kavramlar (limit, türev ve integral) incelendiğinde görsel öğe olarak grafikler, diyagramlar, tablolar vb. olduğu görülmektedir. Görsel öğeleri kullanabilmek analiz kavramlarını anlamada önemli olduğu ve analizdeki birçok problemi çözmede etkili olduğu belirtilmektedir (Herman, 2002). Ancak üniversitede analiz dersini alan öğrencilerin çoğu görsel kullanmakta isteksiz olduğu (Eisenberg & Dreyfus, 1991), dolayısıyla genelde analitik çözümleri tercih ettikleri görülmüştür (Selden & Selden, 1993). Dolayısıyla analiz dersinin yoğun bir içeriğe sahip olmasından dolayı kavramların öğrenilmesi zor olabileceği söylenebilir. Bununla beraber modern matematik incelendiğinde bütün matematik dalları analiz ve analitik geometri çerçevesinde incelendiği görülmektedir (Gözen, 2001). Umay (2007) matematiği disiplin olarak tanımlarken herkesin en azından temel eğitim seviyesine başlarken sevdiğini, korktuğunu veya nefret ettiğini, analiz dersinin daha derin konular içermesi ve soyut bir içeriğe sahip olması sebebiyle öğrencilerin sadece teorik bilgi almasının olumsuz bir tutum olabileceğini belirtmiştir (Engin, 2016). Ancak öğretmen adaylarının öğretici vasıfları göz önüne alındığında öğretimle ilgili derslere lisans eğitiminde ağırlık verilmesi gerektiğini belirtmiştir (Aksu 2016). Fakat matematik öğretimi için matematik alan bilgisinin önemli olduğu yadsınamaz bir gerçektir (Gök, 2016). Bu açıdan bakıldığında 2018 yılında yenilenen ilköğretim matematik öğretmenliği programında alan bilgisi derslerinin ders saatleri azaltıldığı, bununla beraber alan eğitimi derslerinin ders sayılarının artırıldığı görülmektedir (YÖK, 2018).

Tablo 1

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programının Ders Saati ve Kredi Karşılaştırması

Program	Eski Program		Yeni Program		Fark/Değişim	
İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Kredi	Ders Saati	Kredi	Ders Saati	Kredi	Ders Saati
	146	162	146	153	0	-9

Tablo 1 incelendiğinde İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programında yapılan güncelleme ile mevcut kredi sayısının korunduğu, ancak toplam ders saatinin 9 saat azaltıldığı görülmektedir. Ders saati azaltılan derslerden bir tanesi de birinci sınıf güz döneminde verilmekte olan Analiz 1 dersidir. Güncellenen programla 4 saat teorik 2 saat uygulama toplam 6 saat olan Analiz 1 dersi, 2018 yılında güncellenen yeni ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında 2 saat teorik olacak şekilde güncellenmiştir. Dolayısıyla ilgili ders 4 saat azaltılmış ve dersin uygulaması da tamamen kaldırılmıştır.

Analiz 1 dersinin eski ve yeni programdaki içeriklerindeki ortak noktalar incelendiğinde ise; eski programda Analiz 1 dersinin içeriği, "*Tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı ve uygulamaları. Tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik ve uygulamaları, süreksizlik çeşitleri. Tek değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı ve türev alma kuralları. Trigonometrik, logaritmik, üstel, hiperbolik fonksiyonlar ve bunların tersleri ile kapalı fonksiyonların türevleri. Yüksek mertebeden türevler*." Yeni programda ise Analiz 2 dersinin içeriğinde; "*Tek değişkenli fonksiyonlarda, limit kavramı konusundaki temel kuralları tanımlayabilme ve ilgili uygulamaları yapma yeterliği kazandırmak, tek değişkenli fonksiyonlarda, süreklilik, süreksizlik kavramlarını ifade edebilme ve bunları geometrik açıdan yorumlama becerisi kazandırmak, tek değişkenli fonksiyonlarda, türev ve türev ile ilgili temel teoremleri ifade edebilme, polinom, trigonometrik, logaritmik, üstel, bileşke ve ters fonksiyonların türevlerini hesaplayabilme ve ilgili uygulamalarını yapma becerisi kazandırmak.*" konularının yer aldığı görülmektedir. Ders içerikleri incelendiğinde işlenen konuların benzer olduğu ve ağırlıklı olarak da türev konusunun işlendiği söylenebilir.

Uluslararası literatür incelendiğinde matematik öğretiminde değişikliklerin olduğu uzun süredir bilinmektedir. Bu bağlamda matematik müfredatında ve öğretiminde değişiklikler yapmak için birçok adım atılmıştır. Özellikle analiz dersindeki temel değişiklik kavramsallaştırma ve görselleştirmeye verilen önemin artmasıdır (Habre & Abboud, 2005). Zimmerman (1991) görselleştirmeyi matematik eğitimindeki en önemli temel değişikliğin kavramsal öğrenmenin özü olarak görmekte ve bu durumu şöyle açıklamaktadır:

> "Kavramsal olarak, görsel düşünmenin rolü kalkülüsün anlaşılmasında o kadar temeldir ki herhangi bir konunun görsel unsurlarını vurgulamayan

başarılı bir kalkülüs dersinin gerçekleşmesi zor olacaktır." (Zimmerman, 1991, s. 136).

Son zamanlarda yapılan araştırmalar göstermiştir ki, öğrencilerin zihinsel imgeleri tutarlı veya tutarsız inşa ettikleri görülmektedir. Daha önceki deneyimler, yeni karşılaştıkları durumlar sahip oldukları fenomenleri daha da anlamlı kılmaktadır. Bir başka deyişle birçok matematiksel terimin gündelik anlamı mevcuttur. Bu anlamlara bilinçaltında müdahale etmek mümkün olabilmektedir (Tall, 1988). Matematiksel etkinliklerde kavramlar sadece matematiğin formel tanımlamalarında değil, aynı zamanda bireysel olarak gösterilen zihinsel temsillerde de kullanılmaktadır. Yani bu bireysel modeller; matematiksel kavramın öğrenilmesinden önce var olan, deneyimlerde yer alan, kendiliğinden gerçekleşen modeli öğrenilen kavramla daha da kuvvetlendirmektedir (Cornu, 1981). Ancak doğru verilen kavram tanımı bile bazen öğrencilerde bilişsel çatışmalara yol açabilmektedir (Tall, 1988). Alan yazında yapılan çalışmalarda kayda geçen zihinsel çatışmalar; ondalık sayıların gösterimi ve sözel ifadesi (Tall, 1977), fonksiyonların tanımı ve ifadesi (Vinner, 1983), limit ve süreklilikteki zorluklar (Tall & Vinner, 1981) ve fonksiyonların limiti (Ervynck, 1983) şeklinde özetlenebilir. Bu açıklamalar göz önünde bulundurularak, bireyin kavramsal yapısını açıklamak için, kavram imajı ve kavram tanımları yapılmıştır. Alan yazında ilk olarak Tall ve Vinner (1981) kavram imajını bireyin zihninde yer alan tüm bilişsel yapılar olarak tanımlamıştır. Bu bağlamda düşünülürse kavram imajının bir bakıma öğrencinin zihninde yer alan yapıları kapsadığı söylenebilir. Kavram öğretiminde kavram imajının yeri önemlidir (Tall & Vinner, 1981).

Matematikte yer alan iki bilgi türü olan kavramsal ve işlemsel öğrenme matematik eğitimcileri tarafından her dönemde çalışılmıştır (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Hiebert & Lefevre, 1986, Star, 2005). Matematik eğitimi araştırmacıları genellikle işlemsel bilgiyi, sıralı veya adım adım görevi tamamlama ve işlemlerin uygulanması için algoritmalar olarak tanımlamaktadırlar. Bununla beraber işlemsel bilgi matematiğin sembol ve dilini de içerir (Davis, 1983; Gray & Tall, 1994; Haapasalo, 2003; Hiebert & Lefevre, 1986). Kavramsal bilgi ise sadece kavramın tanımını bilmek değil, bununla beraber kavramlar arasındaki ilişkilerin, geçişlerin farkında olmaktır (Baroody, Cibulsksis, Lai & Li, 2004; Gray & Tall, 1994; Hiebert & Lefevre, 1986). Hem işlemsel bilgi hem de kavramsal bilgi yüzeysel veya derin bir niteliğe sahip olabilir. Çünkü iki bilgi türü de birbirini desteklediğinde kavramsal olarak öğrenme gerçekleşebilir (Baroody ve ark,2007; Star, 2005). Hatta Star (2005, 2007) bu iki bilgi türünün ortaya konulduğu işlemsel bilgi ve kavramsal bilgi sisteminde, kavramsal anlamanın kavramlar arasında yer alan geçişleri ve ilişkileri her zaman derinlemesine bilmenin gerekmediğini belirtmekte, bununla birlikte işlemsel anlamanın da matematiksel işlemleri anlarken işlemleri esnek ve fark ederek kullanabilmenin bir bütün olduğunu savunmaktadır. Alan yazın incelendiğinde son yıllarda matematiğin kavramsal olarak öğretimi önemli bir yere sahiptir (Bingölbali ve ark., 2016; Bukova, 2006; Doruk, 2016; Güzel, 2014; Hebineza, 2013; Heinze, ve ark, 2009; Öztoprakçı, 2014; Rahardi & Lorenzo, 2021; Turan, 2016; Tzur & Simon, 2004).

Ülkemizde ortaokul matematik öğretmen adayları Analiz 1 derslerindeki türev kavramı ile ilk kez lise müfredatında karşılaşmaktadırlar (MEB, 2018). Yine ülkemizdeki sınav sistemi göz önünde bulundurulursa, öğretmen adaylarının lise müfredatında yer alan limit, süreklilik, türev, türev uygulamaları ve grafik okumaları temel kavramlarını işlemsel boyutta -hızlı ve test tekniği ile- çözdükleri söylenebilir (Coşkun, 2019; Dündar, 2015; Erdoğan, 2017).

Temel kavramlar açısından bakıldığındaysa, bu kavramların, matematiğin sarmal yapısı göz önünde bulundurularak, sadece analiz derslerine değil, ayrıca diğer alan derslerine de katkı sağlayacağı söylenebilir. İlgili alan yazın incelendiğinde öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin kavram imajları hakkında bazı çalışmaları bulunmaktadır. Bu çalışmaların sadece eğim, değişim oranı ve noktada türev gibi konuları tek tek ele aldıkları görülmüştür (bkz. Çiltaş, 2011; Doruk, 2016; Güzel, 2014; Hart, 1991; Hebiniza, 2013; Hoffman, 2015; Kabael, Barak ve Özdaş, 2015; Tague, 2015; Turan, 2016; Tyne, 2016). Bununla beraber sadece öğretim elemanları ve lisans öğrencilerinin eğim kavramını kavramsallaştırmalarını inceleyen yalnızca bir çalışmaya ulaşılabilmiştir (Nagle ve ark., 2013). Bu çalışmada sadece eğim kavramına değinilmiş, ancak eğimin türev ve değişim oranı ile ilişkisinin ele alınmadığı görülmüştür. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmeni adayları ve matematik eğitimcilerinin eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve bu kavramların türev ile olan ilişkileri ve kavram imajları incelenmiştir.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adayları ve analiz derslerini (Analiz 1, Analiz 2 ve Analiz 3) yürüten matematik eğitimcilerinin eğim, değişim oranı ve türev kavramları ile bu kavramlar arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarını incelemektir. Öğrenciler matematik öğrenimde tanımlardan ziyade imajlarını işe koşarlar. Bu bağlamda imaj çalışmaları önem arz etmektedir. Türev kavramı hem sonraki derslere hazırlık (örn. differansiyel denklemler) hem de kendisinden önceki kavramlarla ilişkisi açısından (örn. fonksiyon, limit, süreklilik) kalkülüsün en önemli ve en temel kavramlarından birisidir. Türev kavramının etkin anlaşılması ise eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ilişkisinin bilinmesini gerektirir. Dolayısıyla öğrencilerin bu kavramları öğrenmeleri üzerinde önemli faktörlerden biri olan matematik eğitimcilerinin bu kavrama ilişkin kavram imajlarının incelenmesi önem arz etmektedir.

Araştırmanın amacı, lisans düzeyinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adayları ve analiz derslerini (Analiz1, Analiz2 ve Analiz3) yürüten matematik eğitimcilerinin eğim, değişim oranı, türev kavramları hakkında kavram imajlarının Tall ve Vinner (1981)'a göre incelenmesi oluşturmaktadır. İyi bir matematik öğretmeninden; yanlış öğrenmelere ve kavram yanılgılarına neden olabilecek yanlış kavram imajlarına sahip olmaması beklenmektedir. Matematik eğitimcilerinde; eğim, değişim oranı ve türev kavramı hakkındaki kavram tanımı ve kavram imajları Tall ve Vinner (1981)'ın kavramsal çerçevesinde olduğu gibi tanım hücresi ve imaj hücresi arasında bilişsel bir etkinlik olması beklenir. Bazı matematik eğitimcilerine göre eğim, değişim oranı ve türev kavramının hangi bağlamda sunulduğuna bakılmaksızın, bu kavramların tutarlı, anlamlı bir yorumu sunmaları mümkün olabilir. Ancak bu böyle olsa bile, bir matematik eğitimcisinin eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında tutarlı ve anlamlı yorumunun meslektaşlarıyla aynı olacağının garantisi yoktur, tıpkı türev kavramı hakkındaki yorumlarını bölümlere ayıran tüm matematikçilerin yapacaklarının garantisi olmadığı gibi. Bu çalışmada, matematik eğitimcilerinin çeşitli bağlamlarda kendilerine sunulan eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında nasıl düşündüklerini keşfederek onların kavram tanımı ve kavram imajlarını tespit ederek Tall ve Vinner (1983)'ın kavramsal çerçevesi bağlamında kavram tanımları ve kavram imajları analiz edilmiştir. Yalnızca yarı yapılandırılmış görüşme sorularıyla eğim, değişim oranı ve türev kavramlarının nasıl kavramsallaştırıldığı değil, aynı zamanda uygulama sorularından elde edilen veriler ile bu kavramlara ait kavram tanımı ve kavram imajı hücrelerinin birbirlerinin ne kadar tutarlı ve evrensel olduğu da analiz edilmiştir. Ayrıca sadece matematik eğitimcileri ile değil aynı zamanda geleceğin matematik öğretmenleri ile de çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda Analiz 1 dersini yürüten öğretim elemanının eğim, değişim oranı ve türev kavramı hakkında sahip olduğu kavram tanımları ve kavram imajları ile üniversitede öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kavram tanımları ve kavram imajlarının ne derecede örtüştüğü de analiz edilmiştir. Vinner (1983)'ın bahsettiği "*öğrencinin kavram imajı günlük hayattaki deneyimlerinden, önceki öğrenmelerinden, ders kitaplarından ve öğretmeninden etkilenmektedir.*" durum dikkate alınarak hem matematik eğitimcisinin hem de öğretmen adaylarının kavram imajları incelenmiştir. Bu açıdan bakıldığında çalışmanın ulusal ve uluslararası matematik eğitimi literatürüne katkı sağlayacağı düşünülmüştür. Çalışma özellikle matematik eğitimcileri ve aynı zamanda ilköğretim matematik öğretmen adayları ile birlikte çalışılması nedeniyle önemli olduğu düşünülmektedir. İlgili literatür incelendiğinde, sadece öğretmen adayları ya da sadece matematik öğretmenleri ile türev ve eğim kavramları hakkında yapılan çalışmalara rastlanılmaktadır (Dündar, 2015; Hart, 1992; Nagle ve ark., 2013; Hoffman, 2015; Skemp, 1999, 2000; Tague, 2015).

Eğim, değişim oranı ve türev kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarının, matematik eğitimcilerinin bu kavramlara ilişkin imajlarının ve matematik eğitimcileri ile ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin kavram imajlarının karşılaştırmalı olarak çalışılmaması bu çalışmanın önemini artırdığı söylenebilir.

Ayrıca bu çalışmanın katılımcılarını matematik eğitimcilerinin yanı sıra yenilenen ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında yer alan Analiz 1 dersinden başarılı olmuş öğretmeni adayları oluşturmaktadır.

Araştırma Problemi

Matematik eğitimcileri ve matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev hakkındaki kavram imajları nasıldır?

Alt Problemler

1. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim konusu hakkındaki kavram imajları nasıldır?
2. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının anlık değişim oranı hakkındaki kavram imajları nasıldır?
3. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim ve anlık değişim oranı arasındaki ilişki hakkındaki kavram imajları nasıldır?
4. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim ve anlık değişim oranının türev ile olan ilişkilerine yönelik kavram imajları nasıldır?
5. Öğretim elemanlarının eğim konusu hakkındaki kavram imajları nasıldır?
6. Öğretim elemanlarının anlık değişim oranı hakkındaki kavram imajları nasıldır?
7. Öğretim elemanlarının eğim ve anlık değişim oranı arasındaki ilişki hakkındaki kavram imajları nasıldır?
8. Öğretim elemanlarının eğim ve anlık değişim oranının türev ile olan ilişkilerine yönelik kavram imajları nasıldır?

Sayıltılar

Yapılan araştırmada öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramını içeren soruları cevaplarken istekli oldukları ve ayrıca yarı yapılandırılmış görüşmeye bilinçli bir şekilde katıldıkları görülmüştür. Bununla beraber öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin belirtilen kavramlar hakkında kavram imajlarına sahip oldukları varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

Çalışmadan elde edilen veriler, katılımcılarla gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerden ve katılımcıların uygulama sorularına verdikleri cevaplardan oluşmaktadır. Çalışma grubu, farklı devlet üniversitelerinde çalışan matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarından oluşturulmuştur.

Tanımlar

Kavram imajı: Bireyin bir kavrama ilişkin bütün zihinsel yapısıdır (Tall & Vinner, 1981).

Eğim: İncelenen ders kitaplarında yaygın olarak rastlanan türev tanımı grafiksel gösterim eşliğinde “bir grafiğe belirli bir noktada çizilen teğetin eğimi” şeklinde görülmektedir (Özmantar, Bingölbali ve Akkoç, 2013). Ayrıca James Stewart (2003) Multivariables Calculus kitabında eğimi, doğrunun dikliğinin ölçüsü olarak tanımlamaktadır. Daha cebirsel bir ifade ile bir doğrunun eğimi bir noktadan diğer noktaya geçerken; doğrunun dikey değişimlerinin yatay değişimlerine oranıdır (Kauffman ,1992). Örneğin (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları ele alınırsa yatay olarak (x_2-x_1) değişirken dikey olarak da (y_2-y_1) olarak değişim görülecektir. Bu anlamda bu doğrunun eğimi $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ olarak hesaplanabilir (Foresman, 1987).

Değişim Oranı: Herhangi bir eğri bir cismin zamana göre değişimi betimleyen bir fonksiyon olduğu varsayılırsa, işte bu fonksiyonun belirli bir noktasına çizilen teğetin eğimi aynı zamanda değişim oranı olarak tanımlanabilir (Orton; 1983; Staley, 2004; Thompson, 1994).

Türev: “*$A \subset IR$, a$\in A$ ve a, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $f: A \to IR$ fonksiyonu için $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ya da $lim \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limiti mevcut ise bu limite f nin a noktasındaki türevi denir.*” (Balcı, 1999, s. 45)

Şekil 1

Thomas (2009) Türev Fonksiyonunun Tanımı

Bir f fonksiyonunun x değişkenine göre türevi, x’ teki değeri

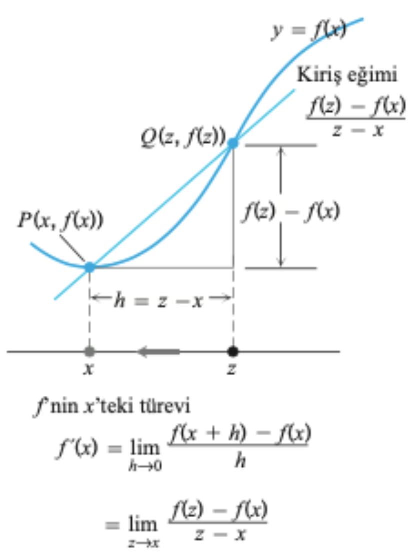
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olan (limitinin bulunması koşuluyla) f' fonksiyonudur (Thomas, 2009, s.147).

Ayrıca eğim, değişim oranı ve türevin grafik ile gösterimini Thomas (2009) aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Şekil 2

Thomas (2009) Eğim, Değişim Oranı Ve Türevin Grafik Üzerinde Gösterimi.



Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

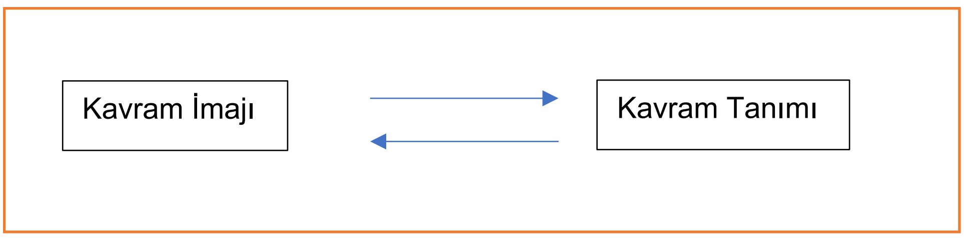
Literatür taramasının bu aşamasında araştırmaya konu olan kavramlar, ilgili alan yazın, araştırma konusuyla ilgili daha önce yapılmış çalışmalar ve bu çalışmalara ait sonuçlara yer verilmiştir.

Kavram İmajı

Kavram imajı belirli bir kavram ile ilgili bireyin zihninde oluşan bütün bir resimdir. Hatta bu resimler farklı gösterim türleri olan formel tanım, deneyimler, günlük hayattan örnekler, tablolar, grafiklerden de olabilir (Tall & Vinner, 1981). Vinner, 1983 yılındaki çalışmasında kavram imajını belirli bir “a” kavramı ile ilgili “b” kişisinin zihnindeki tüm resimler olarak tanımlamıştır. Hatta Vinner (1983) çalışmasında kavram tanımı ve kavram imajını bireyin bilişinde iki hücre olarak tanımlamaktadır. Buna göre birey bir kavram ile karşılaştığında sahip olduğu bu iki hücre tamamen boş olabilir veya kademeli olarak birbirlerini tamamlayabilmektedirler. Vinner (1983) bunu aşağıdaki gibi modellemiştir:

Şekil 3

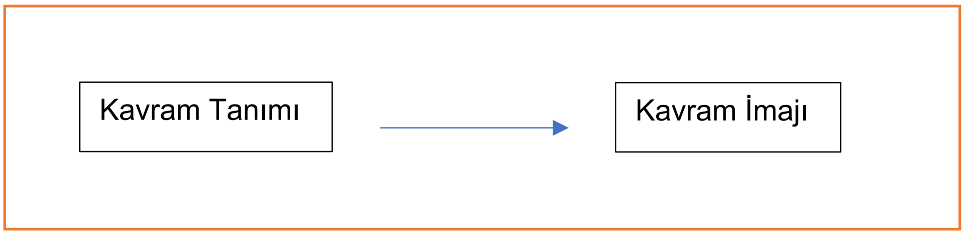
Kavram Tanımı ve Kavram İlişkisi (Vinner, 1983, s. 294)



Şekil 3 incelendiğinde kavram imajı hücresi başlangıçta boştur, kademeli olarak dolar; ancak tanımı hiçbir zaman tamamıyla yansıtmaz. Örneğin limit kavramı ile ilk defa karşılaşan bir öğrencinin kavram imaj hücresi boştur. Kavram tanımı ile kademeli olarak kavram imaj hücresi dolmaya başlar (Vinner, 1983).

Şekil 4

Kavram Tanımı ve Kavram İmajı Tek yönlü etkileşim (Vinner, 1983, s. 295)

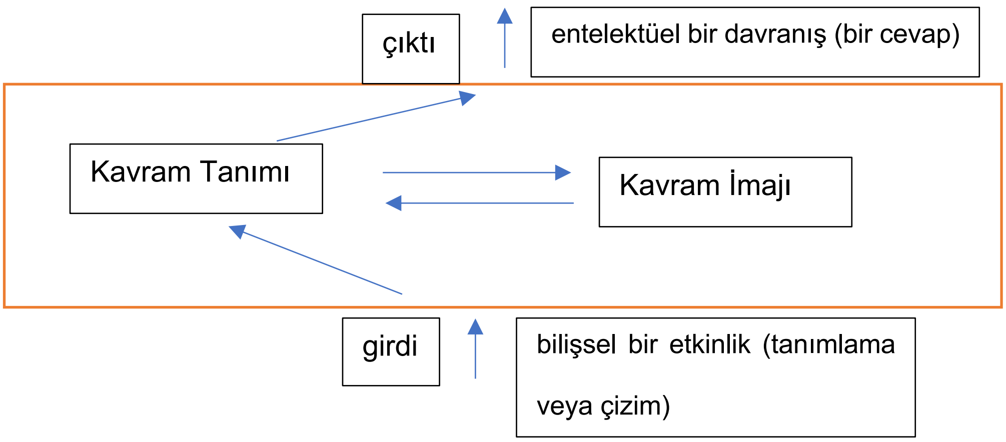


Şekil 4'te Vinner (1983) lise ve üniversite düzeyinde öğrenim görenlerin sahip olabileceği bir durumdan bahsetmiştir. Ancak Vinner (1983) kavram tanımının her zaman kavram imajını belirleyemediğinin altını çizmektedir.

Şekil 5

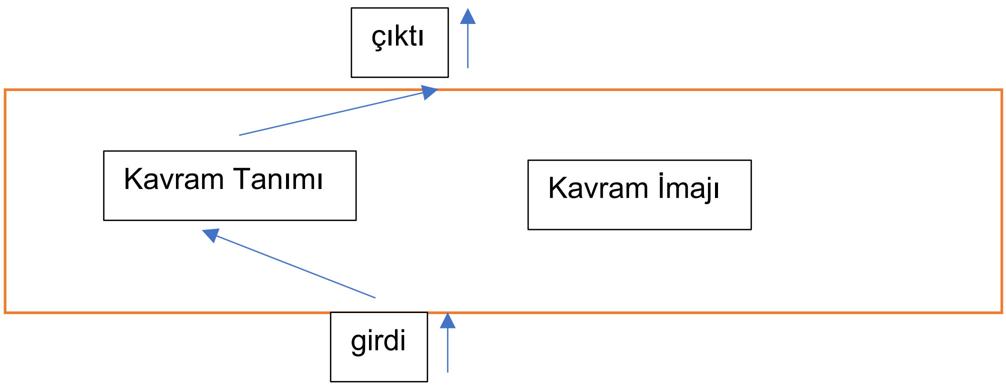
Etkinlik sürecinde tanım ve imaj ilişkisi (Vinner, 1983, s. 295)

Şekil 5 incelendiğinde Vinner (1983) bu durumu tanım ve imaj arasında bilişsel bir etkinlik olarak tanımlamaktadır.



Şekil 6

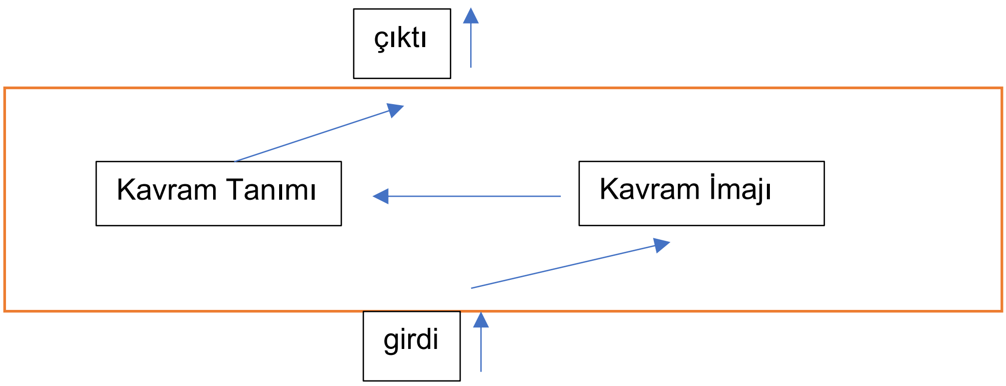
Etkinlik Sürecinde İmajın Pasif Kalması (Vinner, 1983, s. 295)



Şekil 6 incelendiğinde birey etkinlik sürecinde bazen belli bir durumla karşılaştığında bu durum kavram imajı hücresine uğramayabilir.

Şekil 7

Etkinlik Sürecinde İmajın Daha Etkin Olması (Vinner, 1983, s. 296)



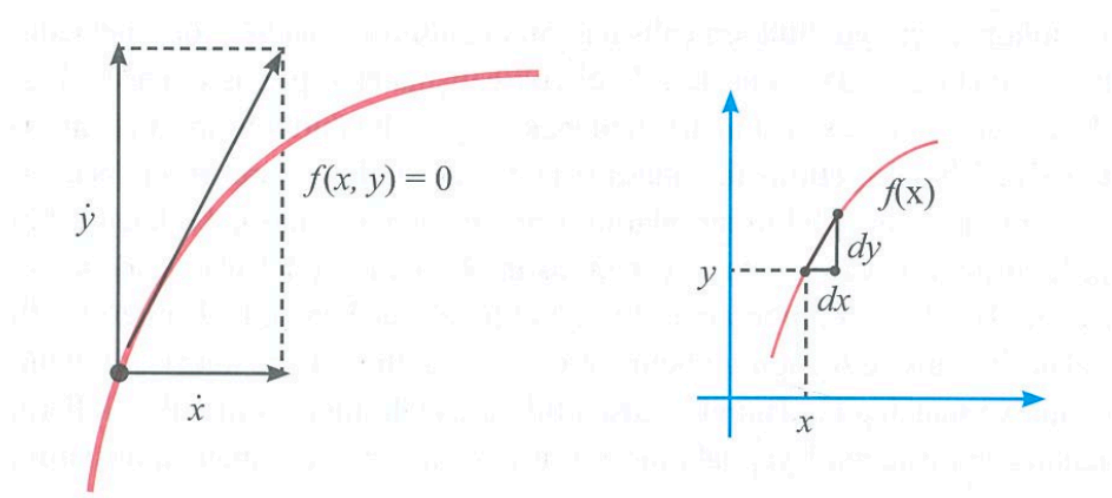
Vinner (1983)'a göre şekil 3 ve 5'teki senaryolar sınıf ortamını pekâlâ yansıtmayabilir. Çünkü bir bilişsel yapı, kavram imajını oluşturmak için veya karşılaştığı bir bilişsel etkinliğin üstesinden gelebilmek için mutlaka kavram tanımını kullanmak zorunda değildir. Hatta bazı kavramların öğrenilmesi güç olduğundan tanımların aslında kullanışlı olmayacağını iddia etmektedir. Ayrıca bazı tanımlar öğrenciler için anlamsız olduğunda ders kitaplarından veya derste gördükleri örnekler üzerinden kavram imajlarını oluştururlar. Böyle bir durumda kavram tanımının devre dışı kaldığı gibi unutulması da daha rahat olmaktadır.

Türev Kavramı

Tarihte bilinen en eski teğet kavramı Euclid tarafından düzlem geometrisi bağlamında incelenmiştir. Ancak bu kavram statik bir yapıdadır, eğrileri tek bir noktada kesen bir noktadır (Isaacson, 1999). Grabiner (1983) türevin tarihsel gelişimini "Önce kullanıldı sonra keşfedildi" şeklinde tanımlamıştır. Tarihsel olarak bakıldığında türev serüvenine 1630'lu yıllarda Fermat ile başlarken daha sonraları Newton, Leibniz, Lagranga, Cauchy ile devam etmiştir. Evreni anlamak için bu dönemden önce birçok çalışma yapılmış ancak bu dönemde cebir ve geometri ile birlikte bu arayış daha da derinleşmiştir. *Fizikçilerin bu dönemde hızı sürekli değişen bir cismin bir sonraki hızının ne olduğu* bununla birlikte *Matematikçilerin geometrik şekillerin analizlerini nasıl daha anlamlı ve sistematik bir şekilde anlaşılır hale getirebileceği* gibi sorular analiz (calculus) dersinin doğuşuna sebep olmuştur (Çekmez, 2013; Çetinkaya, Erbaş ve Alacalı, 2013; Erdoğan, 2017; Isaacson, 1999; Kleiner, 2001; Perry, Jardine & Shell-Gellasch, 2011; Rosenthal, 1951;). Isaac Newton (1642-1727) ve Gottfried Wilhelm Leibniz (166-1716) iki bilim insanı analiz (calculus) biliminin aynı dönemde atası olarak kabul edilmektedir. Newton'a göre analiz bilimi, hareketi ve hızı anlamanın bir yoludur ve gerçek hayat durumlarını anlamayı kolaylaştırır. Newton türevi $\dot{x}$ olarak sembolleştirmiştir. Leibniz ise analiz bilimi ile ilgili çalışmalarında sonsuz küçük ifadesini kullanmıştır. Leibniz eğriyi sonsuz küçük kenarlı bir çokgen olarak almış ve x değerinin farkını diferansiyel olarak yani *dx* şeklinde, x'e bağlı değişim gösteren y değerinin farkını diferansiyel olarak *dy* şeklinde göstermiştir (Çetinkaya ve ark., 2013; Kleiner, 1989). Her ne kadar böyle olsa da şu anda analiz kitaplarında Leibniz'in notasyonları kullanılmaktadır. Leibniz'in, notasyonlarını daha açık ve anlamlı bir şekilde yazdığını söyleyebiliriz. Şekil 8 incelendiğinde bu durum görselleştirilmiştir.

Şekil 8

Newton Ve Leibniz'in Yaklaşımlarıyla Türev (Çetinkaya, Erbaş ve Alacalı, 2013, s.552)



Türev kavramı; anlık değişim oranı, ortalama değişimlerin limiti veya bir fonksiyonun teğetinin eğimi şeklinde tanımlanabilmektedir. Bu bağlamda anlık değişim oranı, ortalama değişim oranının limiti ve teğetin eğimi gibi kavramları bir örnek üzerinde açıklayacak olursak,

Örnek1: Bir hareketlinin *t* saatte aldığı yol $f(t)=25t+2t^2$ (km) fonksiyonu ile belirtilsin.

Hareketlinin [3,5] zaman aralığındaki ortalama hızını hesaplayalım,

5. Saniyedeki anlık hızını bulalım.

Çözüm a) [3,5] saniyeleri arasındaki ortalama hızını bulmak için t=3. Saniyedeki hızını bulmalıyız

t= 3 için $f(3)=25.3+2.3^2= 93$ km olarak bulunur. (I)

5. saniyedeki hızını bulmak için

t=5 için $f(5)=25.5+2.5^2=175$km olarak hesaplanır. (II)

Daha sonra [3,5] saniyeleri arasındaki ortalama hızını bulmak için 2 saniyedeki hız değişimi ise $\frac{175-93}{5-3}$=41km olarak hesaplanır. (III)

Hareketlinin [3,5] saniyeleri arasındaki 2 saniyelik hız değişimi üç adımda ortalama olarak 41km olarak hesaplanmıştır.

Çözülen örnek bize ortalama değişim oranını vermektedir. Ancak türev kavramı ortalama değişimden ziyade anlık değişim ile ilgilenir. Dolayısıyla Örnek1'in b öncülü çözümü için anlık değişimin limiti alınmalıdır.

Çözüm b) 5.saniyede hız için anlık değişimi hesaplamalıyız. t=5. saniyedeki anlık değişimin hesaplanabilmesi limit kavramı yardımıyla olacaktır. Zaman aralığı 5.saniyeye giderek yaklaşacak şekilde sağdan ve soldan daraltılırken ortalamadaki değişimin hangi reel sayıya yaklaştığını belirlemek gerekecektir. Bulunacak sonuç aynı zamanda *f(t)* fonksiyonunun t = 5 noktasındaki türevidir *ve* limit kavramının temeli kullanılarak,

$$f'(5) = \lim_{t \to 5} \frac{f(t)-f(5)}{t-5} \qquad \text{(I)}$$

şeklinde ifade edilir ve limit işlemi yapıldığında,

$$f'(5) = \lim_{t \to 5} \frac{f(t)-f(5)}{t-5} = \lim_{t \to 5} \frac{(25t+2t^2)-175}{t-5} = \lim_{t \to 5} \frac{2t^2+25t-175}{t-5} \qquad \text{(II)}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{(2t+35)(t-5)}{(t-5)} = \lim_{t \to 5} = 2t + 35 = 45 \text{ km/sn olarak bulunur.}$$

Örnek1'de yapılan işlemler fonksiyondaki değişimin hesaplanabilmesi için türev kavramının kullanılmasının gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Üst düzey düşünme becerisi gerektiren türev kavramının anlaşılması ve anlamlandırılabilmesi için birden fazla matematiksel konu ve kavram hakkında bilgi sahibi olmayı gerektirir (Artigue, 2002; Cornu, 1991). Ayrıca bu kavram ve konuların birbirleri ile olan bağlantısını da bilmek önem arz etmektedir. Örnek verilecek olursa türev kavramını anlamlandırmak için fonksiyon, limit, süreklilik, eğim, teğet, geometri ve değişim oranı gibi matematik konularını ve kavramları bilmek önemlidir. Bu açıdan bakıldığında kavramlar öğrenciler tarafından tek tek ele alındığında dahi zorluk oluşturabilirken bu kavramları içinde barındıran türev kavramının öğrenciler tarafından anlamlandırılmasının da güç olacağı söylenebilir (Cornu,1991; Çekmez, 2013; Duru, 2006; Fındık, 2019; Gökçek ve Açıkyıldız, 2016; Habre & Abboud, 2005; Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Özmantar ve ark., 2013; Rahardi & Lorenzo, 2021; Yapıcıoğlu Ulaş, 2019; Yu, 2020, 2021; Zandieh, 2000).

Hiebert ve Lefevre (1986), Skemp (1978)'e göre öğrenciler matematikte kavramsal anlamadan ziyade işlemsel anlamayı benimsediklerinden dolayı kavramların anlaşılmasında ve anlamlandırılmasında güçlük çekmektedirler. Bu araştırmacılar, matematikte kavramsal anlamanın, matematikteki konuların ne anlatmak istediğini ve diğer konularla ilişkisini bilmeyi gerektirdiğini savunmaktadırlar. Örneğin bir öğrenciye $f(x) = x^3$ fonksiyonun (1,1) noktasındaki teğetin eğimi ve türevi sorulduğunda bu soruya işlemsel olarak cevabın 3 olduğunu söyleyecektir. Ancak öğrenci belirlenen o noktada türevin ne anlama geldiğini limit ve değişim oranı kavramları ile ilişkilendiremiyorsa türev kavramını kavramsal olarak anlamlandıramadığı söylenebilir. Matematik eğitimcileri tarafından kavramların kavramsal olarak anlamanın bir yolu olarak farklı (çoklu) temsil biçimlerinin kullanılmasının etkili olacağı düşünülmektedir (Adu- Gyamfi, 1993; Dreher & Kuntze, 2015; Wilkie, 2016). Farklı temsil biçimlerinin kullanıldığı bir öğretim ortamında sözel betimleme, grafiksel gösterim, tablo ve sembollerin kullanımı gibi farklı gösterimler etkin olarak kullanılır. Dolayısıyla bu temsiller öğrenenlere temsiller arasında bağlantı kurma fırsatı sağlayacaktır (Adu-Gyamfi, 1993; Baştürk, 2010; Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed & Webb, 1997; Delice ve Sevimli, 2010; Ergene, 2014; Kieran, 1994; Porzio, 1994). Farklı (çoklu) temsillerin kullanımına belki de en uygun olan matematiksel kavram türev kavramı olduğu söylenebilir (Hähkiöniemi, 2006; Orton; 1983; Özmantar ve ark., 2013; Zandieh, 1997, 2000). Çünkü Zandieh (2000) türev kavramı için oluşturduğu kavramsal çerçevede türev kavramı farklı temsil biçimleri temsil edilebilmektedir. Türev kavramının farklı temsil biçimleri ile gösterilmesi ve bu temsil biçimleri arasındaki geçişlerin anlamlandırılması bu kavramın anlaşılması ve anlamlandırılması açısından önemlidir. Ancak yapılan çalışmalar türev kavramına ait farklı temsil biçimleri arasındaki geçişin öğrenciler tarafından anlaşılmasında güçlük yaşandığını göstermektedir (Amoah & Laridon, 2004). Araştırmada analiz çerçevesi olarak kullanılan Zandieh (2000) kavramsal çerçevesi bu bağlamda önem taşıdığı söylenebilir.

Tablo 2

Türev Kavramı Için Analiz Çerçevesi. (Zandieh, 2000, s. 106)

	Bağlamlar				
	Grafiksel	Sözel	Fiziksel	Sembolik	Diğer
Süreç-nesne çiftleri	Eğim	Oran	Hız	Farkların Bölümü	
Oran					
Limit					
Fonksiyon					

Tablo 2' de Zandieh (2000) tarafından geliştirilen türev kavramının analiz çerçevesi bulunmaktadır. Zandieh (2000) geliştirdiği çerçeveyi, ders kitaplarında türev kavramının nasıl tanımlandığını incelemiş. Matematik eğitimcilerinin; matematikçilerin ve kalkülüs öğrencilerinin sınıf ortamında türev kavramını gözlemleyerek anlamlandırmalarından bahsetmiştir. Tabloda yer alan her hücre türev kavramının bir yönünü temsil etmektedir. Zandieh (2000)'in oluşturduğu kavramsal çerçevede, türev kavramı şu şekillerde oluşmaktadır:

a) grafiksel olarak bir noktadaki eğriye teğet doğrunun eğimi,

b) sözel olarak anlık değişim oranı,

c) fiziksel olarak hız veya sürat,

d) sembolik olarak farkların limiti olarak sunulabilmektedir.

Türevin formel tanımı düşünüldüğünde; $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$

f fonksiyonunun türevi, f', herhangi bir noktadaki değeri bir oranın limiti olarak tanımlanmaktadır. Zandieh (2000) oluşturduğu kavramsal çerçevede türev kavramı için üç katman (oran, limit, fonksiyon) belirlemiştir. Bu katmanlar farklı kategorilerde de olabilmektedir. Örneğin hız bu olasılığın paradigmatik bir örneği olarak gösterilebilir. Çünkü hız, fiziksel bir özellik olarak genelde kalkülüs derslerinde kullanılmaktadır. Matristeki her boş kutu, türev kavramının bir yönünü temsil eder. Örneğin, oran satırındaki sütun ve grafik sütunu, türevi ile ilgilendiğimiz fonksiyonun grafiğindeki kesen bir doğrunun eğimini temsil etmektedir. Süreç-nesne çiftleri olarak Zandieh (2000) oluşturduğu kavramsal çerçevede, türev kavramına ait üç katman olan oran, limit ve fonksiyon dinamik olarak süreç olabileceği gibi durağan olan nesne de olabilmektedir. Bu duruma örnek olarak ise, bir oran veya rasyonel sayı, işlemsel olarak bölme işlemi olarak düşünülebileceği gibi yapısal olarak bir çarpma yapısı içinde tam sayı çifti olarak da düşünülebilir. Bir başka örnek ise limit kavramı dinamik olarak bir değere yaklaşma olarak tanımlanabileceği gibi ε- ∂ tanımı ile statik de olabilmektedir. Bu duruma ek olarak, bağımsız değişkendeki değişime göre bağımlı değişkenin ortalama değişim oranını hesaplayabilmek için bir fark bölümü kullanılması bir süreçtir. Bu fark bölümünün Leibniz notasyonu ile $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gösterildiği düşünülürse, bu birleştirilen süreçteki ortalama oran, ikinci süreçte, limit sürecinde bir nesne olarak kullanılabilir. Limit süreci ise oranların paydasındaki fark sıfıra giderken bir dizi ortalama değişim oranlarının hesaplanması ile oluşturulur. Bu durumu da Leibniz notasyonu ile ifade edecek olursak $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y$ bu durum limit sürecinin anlık değişim oranı ile birleştirilerek $\frac{dy}{dx}$ ile gösterilecektir. Birleştirilen bu süreç, her bir anlık değişim oranı değerinin, türev fonksiyonu oluşturulurken bir nesne olarak kullanılmasıdır. Zandieh (2000) yaptığı çalışmada türev kavramı ile ilgili katılımcılarla bir görüşme gerçekleştirmiştir. Bu görüşmede katılımcıların türev kavramı hakkındaki kavram imajlarını tespit etmiştir.

Şekil 9

M. Zandieh Ve Katılımcısı İle Görüşme Metni. (Zandieh, 2000 s.114)

MZ: Türev nedir?

Frances: Bilmiyorum. Bildiğim tanjant doğrusunun eğimi olduğu bilirsiniz… x^2'nin türevi 2x olması gibi.

MZ: Tamam

Frances: Demek istediğim, türev alınırken, tanjant doğrusunun bir noktadaki eğimidir.

Yukarıdaki görüşme neticesinde Zandieh(2000) kavramsal çerçeveye göre katılımcının türev kavramı hakkındaki kavram imajı şu şekildedir:

Şekil 10

Zandieh'in Katılımcısına Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram İmajı. (Zandieh, 2000 s.115)

Bağlamlar

	Grafiksel	Sözel	Fiziksel	Sembolik	Diğer
Süreç-nesne çiftleri	Eğim	Oran	Hız	Farkların Bölümü	
Oran	◎				
Limit	◎				
Fonksiyon					

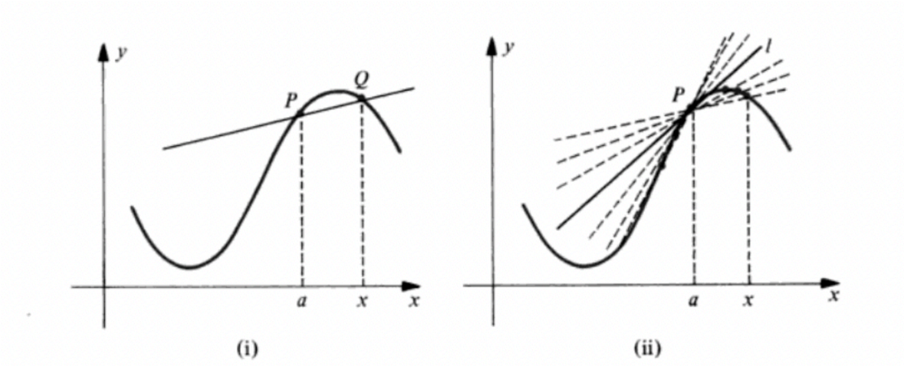
Şekil 10 incelendiğinde Zandieh (2000) katılımcısının türevi eğim olarak tanımlamasından dolayı kavram imajı için, eğim sütununa ve oran satırına içi boş bir daire yerleştirdiğinden bahsetmektedir. Eğer katılımcı eğim kavramını bir oran olarak tanımlasaydı bu dairenin içi dolu olacaktı. Eğim sütunundaki diğer içi boş daireyi (limit satırında yer alan) türev kavramını katılımcının "belirli bir noktada" olduğunu söylemesinden dolayı yerleştirmiştir. Kısaca burada katılımcı ortalama eğimden veya iki nokta arasındaki eğimden bahsetmediği için dairenin içinin boş olduğunu belirtmiştir. Eğer katılımcı eğimi bir noktadan yaklaşan ortalama eğimlerin limiti şeklinde tanımlamış olsaydı bu dairenin içinin dolu olacağını söylemiştir.

Türev kavramı hangi temsil biçimleriyle öğretilmelidir? Öğrenciler türev kavramı ile ilişkili olarak limit, değişim oranı, anlık değişim oranı ve teğet-eğim gibi kavramlardan hangilerini önce öğrenmelidir? gibi soruların matematik eğitimi literatüründe pek araştırılmadığı söylenebilir (Cheng, 2010; Tabaghi Mamolo & Sinclair, Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Özmantar ve ark., 2013). Bu bağlamda klasik kalkülüs kitaplarında türev kavramının teğet/eğim ve limit formunda sunulduğu görülmektedir (Berry & Nyman, 2003). Dolayısıyla genel olarak bir eğrinin sekant doğrularının teğete ve sekant doğrularının eğiminin de teğetin bir noktaya yaklaşımı göz önünde bulundurularak limit kavramı ile bir noktadaki türev kavramının tanımı verilir (Swokowski, 1988). Berry ve Nyman (2003) analiz kitaplarından yedi tanesini incelemişler ve bunlardan beşinde türev kavramının Swokowski (1988) gibi öğrencilere sunulduğunu belirtmişlerdir.

Şekil 11

Sekant Doğrularının Eğiminin Teğetin Bir Noktaya Yaklaşımı. (Swokowski, 1988, s.53)

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ}$$



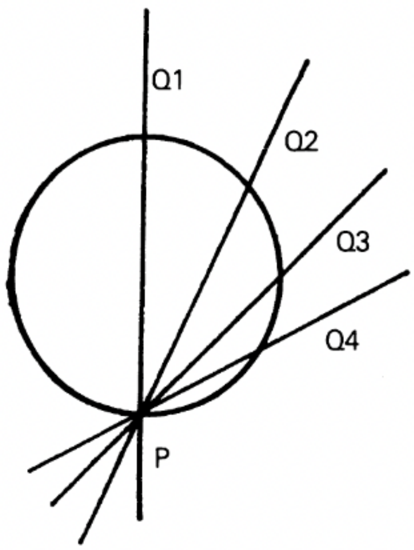
Türev kavramı yukarıda da bahsedildiği gibi "*bir grafiğe belirli bir noktada çizilen teğetin eğimidir.*" şeklinde tanımlanırken, limit kavramı ile sembolik olarak tanımlanırsa "*farkların oranının limiti*"dir (Özmantar ve ark., 2013, s.229). Türev kavramını farkların oranının limiti olarak:

$$f'(x) = \lim_{x_2 - x_1 \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$ gösterilmektedir.

Bu bağlamda incelendiğinde türev kavramının doğasında limit kavramı olduğu söylenebilir. Türev kavramını limit olmadan anlamlandırmak oldukça güçtür. Ancak limit kavramı ile ortalama değişim oranlarının anlık değişim oranına yaklaşımı ve bununla birlikte kiriş (sekant) doğrularının eğimlerinin teğetin eğimine yaklaşımı kavramsal olarak öğrencinin zihninde oturacaktır (Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983). Bu durumda belki de irdelenmesi gereken soru şu olabilir: Acaba türev kavramı öğrenciler tarafından limit kavramı ile ne derece ilişkilendirilebiliyor? Bu durumu Orton (1983) yaptığı çalışmada, öğrencilerin en çok zorlandığı durumun limit ve türev kavramları arasındaki ilişkinin açıklanması olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bilindiği üzere yukarıda da bahsedildiği gibi türev kavramı, kiriş (sekant) doğrularının eğiminin teğete yaklaşımı ve buradan limit yardımıyla teğetin eğimiyle türevin tanımlanmasıdır. Orton (1983) öğrencilerin sekant (kiriş) doğruları ve teğet arasındaki ilişkiyi yönelik kurmakta zorlandıklarını ve bu ilişkiyi kurmakta güçlük çektiklerini görmüştür. Q kiriş (sekant) doğruları P'ye yakınsadığında neler olabileceğine dair öğrencilerin % 40'ının bu durumu kavrayamadığını tespit etmiştir.

Şekil 12

Limit Olarak Teğet. (Orton, 1983, s. 25)



Bununla birlikte Hähkiöniemi (2006) türev ve limit arasında bir ilişki var mıdır? adlı çalışmasında öğrencilerin türev kavramını farkların oranının limiti olarak anlamlandırmada zorlandıklarını söylemiştir. Öğrencilere *“$f(x)=2^x$* fonksiyonun x=1 noktasındaki türevinin yaklaşık değerini sorduğunda öğrencilerin limit kavramı ile bu soruyu çözmekte bir hayli zorlandığını belirtmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin türev kavramını anlamlandırmasında limit kavramının önemi ortaya çıkmaktadır (Hähkiöniemi, 2006).

Türkiye’de gerek lise ders kitaplarında (eski müfredat göz önüne alındığında) gerekse üniversite seviyesindeki analiz kitaplarında da benzer durumların olduğu söylenebilir (Aydın ve Peken, 2004; Balcı,1999; Sağel ve Aktaş, 2005; Stewart, 2015; Thomas, 2009). Bununla beraber ülkemizde güncel 12. sınıf ders kitapları incelendiğinde ise türev kavramının anlık değişim oranı ile ilişkilendirildiği ve farklı temsil biçimlerinin kullanıldığı görülmektedir (Emin, Gerboğa, Güneş ve Kayacıer, 2019; Altun, 2018). Bu durum ülkemizdeki güncel matematik öğretim programı kapsamında ders kitaplarının farklılaştığını göstermektedir. Özetle türev kavramının öğretiminde farklı (çoklu) gösterim biçimlerinin kullanılması önemlidir.

Eğim Kavramı

Eğim, matematik müfredatında doğrularda ve lineer fonksiyonların tanımlarında yer almaktadır. Bu kavram türev kavramının temelinde eğrilerin durumlarını tanımlarken önemli bir yer teşkil etmektedir (Moore-Russo, Conner & Rug, 2011). Matematiksel kavramların günlük hayatta sıklıkla karşımıza çıktığı aşikardır. Bazı kavramlar ise formel tanımlarını görmeden önce informel olarak karşımıza çıkmaktadır. Eğim kavramı da öğrencilerin okulda formel tanımı görmeden önce günlük hayatta informel olarak karşılaştıkları yokuş, diklik, bayır vb. ifadelerini kullandıkları bilinmektedir (Crawfort & Scott, 2000). Günlük hayatta bu kadar sık karşılaşılan eğim kavramı ülkemiz matematik öğretim programında ortaokul sekizinci sınıfta (MEB, 2018) M.8.2.2.6 kazanımı olarak karşımıza çıkmaktadır. M.8.2.2.6

kazanımı; *Doğrunun eğimini modellerle açıklar, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirir.*

a) Eğimin işaretinin ve büyüklüğünün anlamı üzerinde durulur.

b) Günlük hayatla ilişkili modellemelerde eğimin dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı olduğu dikkate alınarak işareti üzerinde durulmaz.

Günlük hayatta karşımıza sıklıkla çıkabilen bir kavramın ortaokul seviyesinde anlamlı ve kavramsal olarak öğrenilmesi, ilerleyen yıllarda lise ve üniversite müfredatındaki kalkülüs dersinin en önemli konularından birisi olan türev kavramının kavramsal olarak öğrenilmesinde ve birçok matematiksel kavram ile bağ kurulmasında önemlidir (Deniz, 2014). Ancak günlük hayatta karşımıza informal olarak da olsa sıklıkla karşımıza çıkan bir kavramla öğrencilerin ilk olarak sekizinci sınıfta karşılaşması, türev gibi önemli bir kavramın temelini oluşturan bu kavram için oldukça geç kalındığı düşünülebilir.

Eğim kavramı lise matematik ve üniversite müfredatında yer alan türev kavramının anlaşılması için ön şarttır (Cheng, 2010; Moore-Russo ve ark., 2013; Stump, 1999, 2001; Tabaghi Mamolo & Sinclair, 2009; Zandieh, 2000). Eğim ortaokul müfredatında sabit bir değişim oranı olarak, lise müfredatında $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ortalama değişim olarak, üniversite müfredatında ise anlık değişim oranı olarak ele alınmaktadır (Nagle ve Moore- Russo, 2014). Ülkemizde ise eğim kavramı ortaokul sekizinci sınıfta cebir öğrenme alanında, dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı karşımıza çıkarken, ortaöğretim müfredatında ise ortalama değişim oranı ve anlık değişim oranı olarak karşımıza çıkmaktadır (MEB, 2018a, MEB, 2018b).

Eğim bir fonksiyonun türevidir fikrini Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf (1997) ortaya koyarken, Zandieh, (2000) eğimin *türevi anlama sürecinde olması gereken matematiksel nesnelerden bir tanesidir* fikrini ortaya koymuştur. Gerçek dünyada sıklıkla karşılaşılan eğim kavramını öğrencilerin kavramsal olarak anlamada bazı güçlükler çektiği ve işlemsel olarak hesaplamaya daha yatkın oldukları bilinmektedir (Barr, 1981; Crawfort & Scott, 2000; Tabaghi Mamolo ve Sinclair, 2009). Crawfort ve Scott (2000) yaptıkları çalışmada öğrencilerin ayrıca eğim kavramını değişim oranı ile ilişkilendirmede güçlük çektiğini tespit etmişlerdir. Bununla beraber Barr (1981) öğrencilerin eğim kavramı hakkında bazı güçlükler çektiğini belirtmiş ve bunları birtakım başlıklar altında toplamıştır.

a) Eğimin bir oran olup olmaması? Örneğin y=3x+2 doğrusunun eğimi 3'tür ancak 3 bir oran mıdır?

b) y deki değişimlerin x deki değişimlere oranı mı yoksa x deki değişimlerin y deki değişimlere oranı mı?

c) y=mx+c doğrusal bir fonksiyonda eğimin m ve c ile karıştırılması,

Buna ek olarak Crawfort ve Scott (2000) eğim kavramını farklı gösterim biçimleri ile öğrencilere vermenin eğim kavramınının değişim oranı kavramı ile ilişkilendirilebileceğini belirtirken; Şahin, Yenmez ve Erbaş (2015) ise eğimin hem anlık değişim oranı ile hem de türevle ilişkilendirilmesinin önemine işaret etmiştir. Bu açıdan düşünüldüğünde matematiksel kavramlarının farklı temsil biçimleri ile öğrencilere sunulmasının kavramlar arası ilişkilendirmeye ve kavramsal anlamaya destek olacağı söylenebilir.

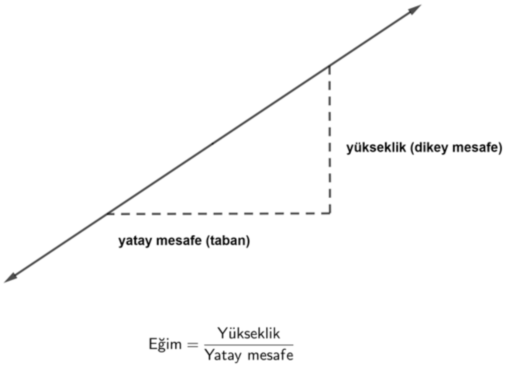
Stump (1999) matematik eğitimi literatüründe eğim kavramı ile ilgili kavramsal çerçeve oluşturan ilk araştırmacıdır. Lisede görev yapan matematik öğretmenleri ile çalışan Stump (1999) eğim kavramı ile ilgili 7 farklı kategori ortaya koymuştur. Bunlar:

a) Geometrik Oran: Yükseklikteki mesafenin yataydaki mesafeye oranıdır.

Şekil 13

Eğim Kavramının Geometrik Oran Gösterimi

$$Eğim = \frac{dikeydeki\ değişim(yükseklik)}{yataydaki\ değişim(mesafe)}$$

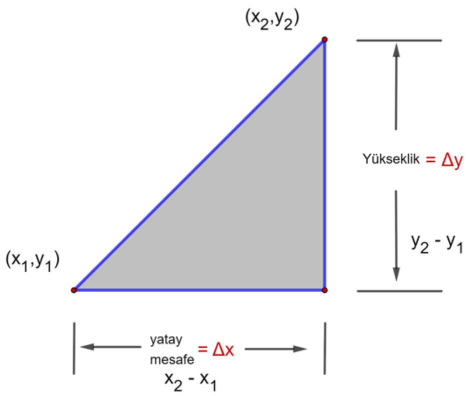


b) Cebirsel Oran: Bir doğru üzerinde yer alan herhangi iki noktanın y (ordinat)' deki değişiminin x (apsis)'deki değişime oranı

Şekil 14

Eğim Kavramının Cebirsel Oran Gösterimi

$$Eğim = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



c) Fiziksel özellik: Eğimin fiziksel özelliklerini belirten; diklik, meyil, yokuş, bayır gibi kelimeler.

d) Fonksiyonel özellik: Değişkenler arasındaki sabit değişim oranı

e) Parametrik katsayı: y= *m*x+b eşitliğindeki *m* katsayısı

f) Trigonometrik kavram: Bir doğrunun x ekseni ile yaptığı açının tanjantı.

g) Kalkülus kavramı: türev kavramı ile ilişkilendirilmesi, Stump (2001) yaptığı araştırmada daha önceki kavramsal çerçeveye gerçek dünya durumlarını da (durağan fiziksel durum, dinamik işlevsel durum) bir kategori olarak eklemiştir. Moore-Russo vd. (2011) ise Stump (1999, 2001)'ın hazırladığı kavramsal çerçeveye 3 yeni kategori daha eklemiştir. Bunlar:

Bunlar:

a) Belirleyici Özellik: Doğruların birbirleri ile ilgili paralel ya da dik olması durumu
b) Davranış Göstergesi: Doğrunun yatay olup olmadığı, alçalıp yükselmediğini gösterir durumu
c) Doğrusal Sabit: Bir doğrunun eğriliği hakkındaki durumu, ötelendiğinde eğiminin sabit kalması durumudur.

Stanton ve Moore-Russo (2012) eğimin ortaokullarda öğrencilere geometrik oran ve cebirsel oran olarak kazandırılmasının eğim kavramının kavramsallaştırılması için farklı temsil biçimleri ile öğretiminin önemini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda yürütülen çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin eğim kavramı hakkındaki kavram imajlarını belirlemeye yönelik olarak Moore-Russo vd. (2011) literatüre kazandırdığı kavramsal çerçeveyi kullanılarak katılımcıların kavram imajları tespit edilmiştir.

Tablo 3

Eğim Kavramı İçin Analiz Çerçevesi. (Moore-Russo, Conner & Rugg, 2011, s.9)

Kategori	Eğim:
Geometrik oran (G)	y'deki değişimlerin x'deki değişimlere bölümü (Rise over run)
	Yatay yer değiştirmeye (mesafe, değişiklik) göre dikey yer değiştirme (mesafe, değişiklik)
Cebirsel Oran (C)	y bölü x değişimi
	Cebirsel ifadelerle oranın gösterimi, $\frac{y2-y1}{x2-x1}$
Fiziksel özellik (F)	Genellikle "diklik" gibi ifadeler kullanılarak tanımlanan çizginin özelliği ("eğim", "adım", vb.); "Ne kadar yükseğe çıkıyor" veya "yukarı çıkıyor"

Fonksiyonel Özellik (f)	Değişkenler arasında sabit değişim oranı
Parametrik Katsayı (PK)	y= *m*x+b eşitliğindeki *m* katsayısı
Trigonometrik Anlayış(T)	Bir doğrunun eğim açısının tanjantı Bir vektörün yön bileşeni
Kalkülüs Anlayış (K)	Limit Türev Bir noktada bir eğriye teğet çizgi
Gerçek Dünya Durumu (GD)	Statik, fiziksel durum (örn. tekerlekli sandalye rampası) Dinamik, işlevsel durum (ör. mesafeye karşı zaman)
Belirleyici Özellik (B)	Paralel, dik çizgileri belirleyen özellik Bir nokta verildiğinde, bir çizginin belirlenebileceği özellik
Davranış Göstergesi(D)	Çizginin artan, azalan, yatay eğilimlerini gösteren işaretli gerçek sayı. Doğrunun artış/azalma miktarını gösteren büyüklüğe sahip gerçek sayı. Pozitif veya negatif ise doğruyu gösteren gerçek sayı, x eksenini kesmelidir.
Doğrusal Sabit (S)	Ötelemeden etkilenmeyen özellik Rakamlara özgü sabit özellik (örn: 3x) Temsilden bağımsız sabit özellik

Tablo 3 incelendiğinde Moore-Russo vd. (2011)'e ait eğim kavramı ile ilgili kavramsal çerçeve görülmekte, bu kavramsal çerçevede bulunan kategoriler ve bu kategorilere ait alt boyutlar gösterilmektedir.

Değişim Oranı

Çalışmada yer alan bir diğer kavram ise değişim oranıdır. Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde değişim oranı kavramı; Thompson (1994) değişimi bir nicelik üzerinde tanımlanırken değişim oranını ise iki farklı niceliğin birbirini etkileyerek değişimlerinin oranlanmasıyla ortaya çıktığını ifade etmektedir. Kısacası iki farklı değişkenin birbirini etkileyerek nasıl değiştiğinin hem niceliksel hem de niteliksel olarak açıklanmasıdır. Buna ek olarak ileri düzey analiz konularını (türev, limit vd.) içeren hesaplamalarda değişim oranını anlamanın önemli olduğu görülmektedir (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Kertil, Erbaş ve Çetinkaya, 2017; Monk, 1987; Thompson, 1994; Zandieh, 2000). Değişim oranı kavramını öğrencilerin kavramsal olarak anlamaları durumunda matematiğin birçok konusunda (fonksiyonlar, süreklilik, limit, türev vb) akademik başarı elde edeceklerini tespit eden çalışmalar da mevcuttur (Carlson ve ark., 2002; Coulombe, 1997; Monk, 1987; NCTM, 2000; Stump, 1997; Thompson, 1994; Stroup, 2002; Zandieh, 2000). Bu duruma paralel olarak, kalkülüs (analiz) dersinde öğrenciler değişim oranı kavramını kavramsal olarak zihinlerinde zayıf bir şekilde oluşturduklarından bu dersteki ileri düzey konuları zihinlerinde net bir şekilde oluşturmadıkları bilinmektedir (Thompson, 1994). Bu bağlamda düşünüldüğünde değişim oranı kavramının ileri analiz konuları için önemli bir kavram olduğu söylenebilir. Confrey ve Smith (1994)'e göre oran, birim karşılaştırma başına bir birimdir; burada bir birim, "*bir ardıl ve onun öncülü arasındaki değişmez ilişki*"'dir. Daha basit bir ifadeyle günlük deneyimlerdeki temelleri ile değişim oranı, çeşitli nicelikler arasındaki ilişkileri anlamak için esastır. Aynı zamanda, değişim oranının çeşitli nicelikler ve üst düzey matematikteki birçok kavram arasındaki ilişkileri anlamak için esas olduğu bilinmektedir. Bu bağlamda değişim oranını anlamak sadece matematik derslerinde başarılı olabilmek için gerekli değildir; niceliksel analiz (biyoloji, ekonomi, işletme, vb.) kullanan hemen her bilim dalındaki ilişkileri anlayabilmek için de esastır (Tyne, 2016). Çalışmada yer alan değişim oranı kavramının eğim ve türev kavramları ile ilişkisine yönelik kavram imajlarını tespit etmenin önemli olduğu düşünülmektedir.

Matematik eğitimi araştırmacıları, öğrencilerin analiz derslerine sabit bir değişim oranı olarak eğim kavramına sağlam bir temel ile girdiklerini varsayabilirler. Bu temelden hareketle, anlık değişim oranı olarak türev kavramını zihinlerinde oluşturmak isterler. Bu bağlamda bir sekant doğrusunun eğimi (ortalama değişim hızı), bir teğetin eğimini (anlık değişim hızı) anlamada temeldir. Eğimin daha önce de belirtildiği gibi matematik eğitimi literatüründe türevi anlamak için gerekli bir yapı taşı olduğu bilinmektedir. Ancak eğim kavramında öğrencilerin zorlandığı bilinmektedir (Aydeniz, 2011; Barr, 1981; Coe, 2007; Crawford & Scott, 2000; Dündar, 2015; Lobato & Thanheiser, 2002; Stump, 2001, Tyne, 2016). Buna ek olarak değişim oranı, eğim, türev kavramları arasındaki ilişkiye yönelik, bir kavramdaki yanlış akıl yürütmenin diğer kavramların anlaşılmasına etki edeceği göz önünde bulundurulursa (Coe, 2007; Tyne, 2016); ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin bu kavramlar hakkındaki imajlarını ve birbirileri ile olan ilişkilerine yönelik kavram imajlarını araştırmanın önemli olduğu söylenebilir.

Hauger (1995), öğrencilerin değişim oranı anlayışını analiz etmek için bir kavramsal çerçeve oluşturmuştur. Hauger (1995), bu kavramsal çerçevede değişim oranı için 3 kategori olduğunu savunmuştur. Bunlar: evrensel (global), aralıklı (interval) ve noktasal (point-wise) olarak tanımlanmıştır. Evrensel (global), doğası gereği niteldir, aralık ve noktasal kategoride olanlar ise niceldir. Bunlar:

a) Evrensel (global): Bu bakış açısıyla öğrenci grafiğin genel özelliklerini dikkate alır: artan, azalan ve değişen oranlar.
b) Aralıklı (interval): Bu bakış açısıyla öğrenciler, değişim oranında, ortalama değişim hızının özelliklerini ele alır.
c) Noktasal (point-wise): Bu bakış açısıyla ise öğrenci değişim oranını anlık değişim oranı olarak ele almaktadır.

Hauger (1995) kavramsal çerçevesine göre öğrenciler anlık değişim (noktasal) oranı bilgisini kullanmak için ortalama değişim (aralıklı) hızıyla tanımlamışlardır.

Türev-Eğim Arasındaki İlişki

Türev kavramının öğrenciler tarafından ne derece öğrenildiği gerek lise gerekse üniversite seviyesinde araştırma konusu olmuştur (Çekmez, 2013; Duru, 2006; Gökçek ve Açıkyıldız, 2015; Hähkiöniemi, 2006; Özmantar ve ark., 2013; Tall & Vinner, 1981; Tall & Vinner,1983; Zandieh, 1997, 2000). Bu çalışmanın ana temalarından bir tanesi türev kavramı ile eğim kavramı arasındaki ilişkiye dair, ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin kavram imajlarını tespit etmektir. Gerek lise düzeyindeki ders kitapları gerekse üniversite düzeyindeki kalkülüs (analiz) kitapları incelendiğinde türev kavramının "*bir grafiğe belirli bir noktada çizilen teğetin eğimidir*" şeklinde tanımlandığı görülmektedir (Thomas,2009; Balcı,1999; Stewart, 2015; Aydın ve Peken, 2004; Sağel ve

Aktaş, 2005; Emin, Gerboğa, Güneş ve Kayacıer, 2019; Altun, 2018). Ancak farklı ülkelerde yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin bu kavramı kendilerine göre yorumladıklarında kavramı yanlış anlamlandırdıkları görülmüştür (Özmantar ve ark., 2013). Amit ve Vinner (1990) yaptıkları çalışmada öğrencilerin türev ile teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi bilmiş olmasına rağmen yadsınamayacak derecede kavram yanılgılarına sahip oldukları görmüştür. Öğrenciler, ders kitaplarında yer alan tanım gibi türev teğetin eğimidir şeklinde tanımlamalarına rağmen teğet doğrusunun o noktadaki denklemi o noktanın türeviymiş gibi kullanmışlardır. Bu çalışmada öğrencilerin bu ilişkiyi ezberleyerek kullandıkları izlenimi oluşmuştur. Bu çalışmaya benzer bir durum Ubuz (1996, 2001) İngiltere'de mühendislik fakültesi öğrencileri ile yaptığı çalışmada öğrencilerin türev kavramı ile ilgili olarak sahip oldukları kavram yanılgısı içinde olduklarını tespit etmiştir. Bunlar genel olarak:

"i) bir noktadaki türev, türev fonksiyonudur,

ii) teğetin denklemi türevin fonksiyonudur,

iii) bir noktadaki türev, teğet denkleminin o noktadaki aldığı değerdir" şeklinde sıralanabilir.

Ülkemizde ise Gökçek ve Açıkyıldız (2016) yaptıkları çalışmada öğrencilerin türev-teğet eğimi-eğim arasındaki ilişkiye yönelik sahip oldukları kavram yanılgılarının, farklı ülkelerdeki öğrencilerin benzer kavram yanılgılarına sahip olduğunu ifade etmişlerdir. Eğim kavramı ve türev kavramı arasındaki ilişki bağlamında farklı ülkelerde yapılan çalışmalara ait bulgular, öğrencilerin genellikle teğet doğrusunun denklemiyle türev kavramının aynı olduğunu veya teğet doğrusuna ait bir noktadaki türev ile fonksiyonun türevini aynı ifade olarak gördüklerini ortaya koymuştur (Amit & Vinner, 1990; Gökçek ve Açıkyıldız, 2016; Özmantar ve ark., 2013; Ubuz, 1996, 2001;). Farklı ülkelerde türev kavramı ve teğet/eğim kavramları arasındaki ilişkinin kurulmasındaki güçlükler, Cornu (1991)'nun bahsettiği gibi türev kavramının epistemolojik olarak zor bir kavram olduğuna dair bir işaret olabilir.

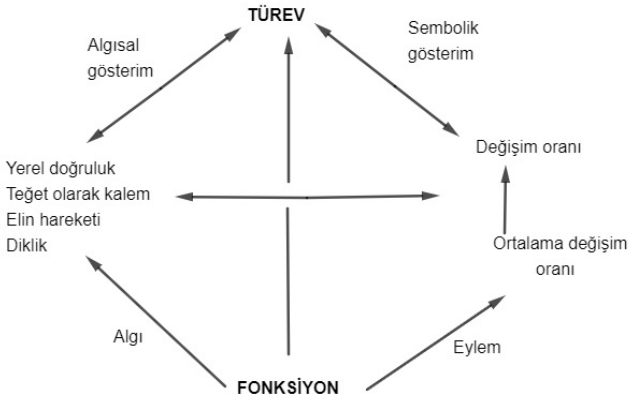
Türev – Değişim Oranı Arasındaki İlişki

Türev kavramı ve değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik literatürde yer alan ilk çalışmalardan birisi Orton (1983)'dur. Orton (1983) yaptığı çalışmada öğrencilerin değişim oranı ile ilgili işlemlerde zorlandıklarını, özellikle öğrencilerin grafiksel formlarda (düz doğrular veya eğriler) verilen bir eğrinin bir noktasındaki değişim oranını anlamada zorlandıklarını tespit etmiştir. Ayrıca ortalama değişim oranı ile bir noktadaki (anlık) değişim oranı kavramları arasındaki farkları tespit edemediklerini ifade etmiştir. Bir noktadaki (anlık) değişim oranını türev olarak algılayamadıklarını ve türev kavramı ile ilişkilendiremediklerini tespit etmiştir. Bu duruma benzer olarak Bezuidenhout (1998) Güney Afrika'da yaptığı çalışmada "ortalama değişim oranı", "aritmetik ortalama" ve "sürekli bir fonksiyonun ortalama değeri" kavramları arasında öğrencilerin ilişki kurmakta güçlük çektiğini vurgulamıştır. Heid (1988), Hauger (2000), White ve Mitchelmore (1996) değişim oranı kavramını öğrencilerin kavramada güçlük çektiğini ve türev kavramı ile ilişkilendirmede kavram yanılgıları olduğunu belirtmektedirler. Farklı ülkelerde yer alan çalışmalardaki bulgular şunu göstermektedir; öğrencilerin değişim oranı ve türev kavramı arasında ilişki kurmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu durum Thopmson (1994)'un öğrencilerin değişkenler ile değişkenlerdeki değişiklikleri kavrayamadıkları görüşünü desteklemektedir.

Türev kavramının eğim, değişim oranı kavramları ile ilişkisinden yukarıda bahsedilmiştir. Bu bağlamda Hähkiöniemi, (2006) Finlandiyalı öğrencilerle yaptığı çalışmada türev kavramının anlaşılması üzerine bir hipotez kurmuştur. Bu hipoteze göre türev kavramı iki yoldan öğrenilebilmektedir. Bunlar: sembolik ve algısaldır. Algısal yoldan öğrenmede, bir fonksiyonun eğiminin dikliği veya bir eğri boyunca teğet çizgiyi takip eden bir kalemin kaydırılması gibi türevin görsel temsillerinden bahsedilmektedir. Sembolik olarak öğrenmede ise, farkların bölümünü temsil eden öğrenciler algısal açıdan genellemeler yaparken bir yandan da ortalama değişim oranının daha küçük aralıklarını aldıkları görülmüştür. Bu tanımlamaları yaparken Grey ve Tall (2001)'un matematiksel kavramların farklı temsillerle anlaşılması fikrini temel almıştır.

Şekil 15

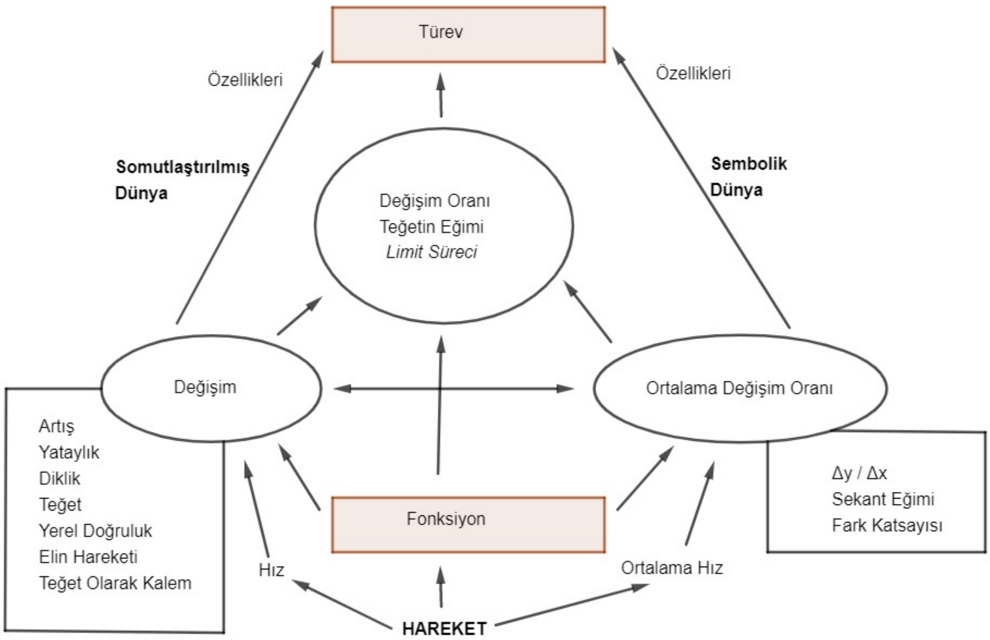
Türev İçin Öğrenme Yolu Hipotezi. (Hähkiöniemi, 2006, s. 50)



Hähkiöniemi (2006)'nin çalışmasının sonunda bu hipotezini gözden geçirdiği görülmektedir. Öğrencilerin anlık hız kavramının bazı yönlerini niteliksel olarak değerlendirebileceği hipotezine, hareket kavramı ile başladığı görülmektedir. Hareketin sezgisel anlaşılmasından dolayı, öğrencilerin bir fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğine dair farklı (çoklu) temsillerin olabileceğini söylemiştir. Bu farklı (çoklu) temsillerin; artış, yataylık, diklik, teğet, yerel düzlük, eli hareket ettirme vb. olabileceği ve bu temsillerin anlık hızdan bağımsız olduğunun önceden öğrencilere tanımlanarak onlarda anlık hız değişimi kavramına dair bir alt yapı oluşturabileceğini ileri sürmüştür. Anlık hız değişimine dair ise farklı gösterimler bulunmaktadır. Bunlar: y'deki değişimlerin x'deki değişimlere oranı, kiriş (sekant) doğrularının eğimi ve farkların katsayısı şeklinde belirlenebilir.

Şekil 16

Türev İçin Öğrenme Yolu. (Hähkiöniemi, 2006, s. 75)

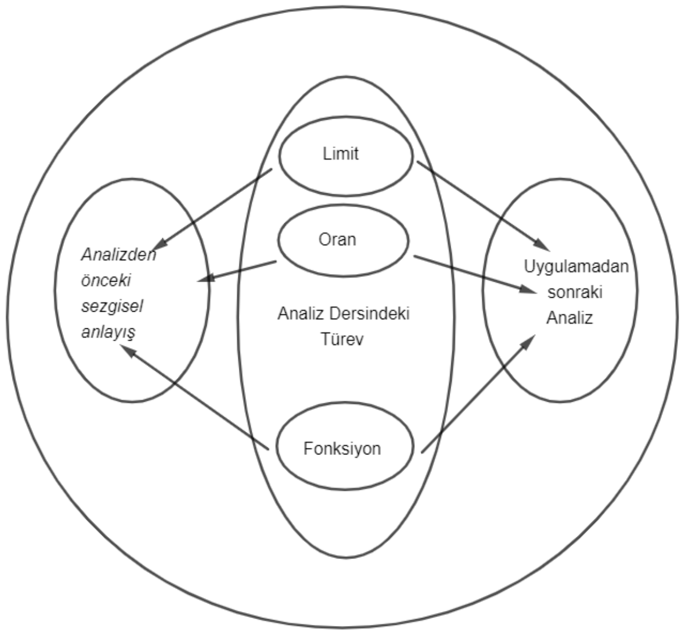


Hähkiöniemi (2006) türev için öğrenme yolunu Gray ve Tall (2001)'un bahsettiği somutlaştırılmış ve sembolik dünya kavramlarına dayandırmıştır. Somutlaştırılmış dünya, öğrencinin gerçek bir durum karşısında algısını temsil ederken, sembolik dünya ise matematikteki işlemleri ve kavramları tanımlayan sembolleri temsil etmektedir. Okların yönleri, katılımcıların türev kavramı ile temsiller arasında kurdukları bağları göstermektedir.

Bununla birlikte değişim oranı ve türev kavramı ile ilgili Zandieh (2000) ve Thompson (2008)'a ait kavramsal çerçeveler birleştirilerek yeni bir kavramsal çerçeve Tague (2015) tarafından sunulmuştur. Tague (2015) kavramsal çerçevesinde Zandieh (2000)'e ait kavramsal çerçevedeki limit kavramını farkların oranı olarak tanımlar, Thompson (2008)'a ait kavramsal çerçevede öğrencilerin belirli bir kavramla ilgili sahip oldukları anlayışın nasıl olabileceğini tanımlamıştır.

Şekil 17

Zandieh (2000)'e Ait Kavramsal Analizin Bir Kombinasyonu Olarak Teorik Çerçeve. (Tague, 2015 s. 59)



İlgili Araştırmalar

Bu bölümde mevcut çalışmayla ilgili olduğu düşünülen matematik eğitimi literatüründe yer alan çalışmalara yer verilmiştir. Kavram imajı ile ilgili yapılan çalışmalar tek başlık altında toplanarak oluşturulmuştur. Mevcut çalışmalarda eğim, değişim oranı ve türev kavramları ile ilgili kavram imajları incelendiğinde; bu üç kavram arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarının önemli olduğu düşünülmektedir.

Kavram İmajı ile İlgili Araştırmalar

Matematik eğitimi araştırmalarında ilk defa kavram imajı ve kavram tanımı ifadesi 1980 yılında Shlomo Vinner & Rina Hershkowitz tarafından kullanılmıştır.

Tall ve Vinner (1981) matematik eğitimi araştırmalarında detaylı bir inceleme yapmışlardır. Üniversite öğrencilerinden oluşan bir örneklem üzerinde, limit ve süreklilik konusundaki kavram imajlarını incelemişlerdir. Öğrencilerin matematiksel formel tanımlarının ve imajlarının çelişkili olduğu saptanmıştır.

Vinner (1983) yapmış olduğu çalışmada lise öğrencilerinin ders kitaplarındaki örneklerin yeterince çeşitli olmamasından dolayı öğrencilerin yanlış kavram imajlarına sahip olduklarını tespit etmiştir.

Hart (1991) doktora tezinde lise öğrencileri ile yaptığı çalışmada türev kavramına odaklanmıştır. Lise öğrencilerinin sahip oldukları kavram imajı incelendiğinde, öğrencilerin formel tanımı yaparken zorlanmaları ve türevin grafik yorumundaki kavram imajları incelenmiştir. Bununla birlikte, süper hesap makineleri ile yapılan grafik yorumlarında öğrencilerin daha etkin sonuçlar elde ettikleri gözlenmiştir. Bu çalışmaya benzer şekilde, Zandieh (1997) doktora çalışmasında benzer şekilde yine dokuz lise öğrencisi ile özel durum çalışması yapmıştır. Öğrencilerin türev hakkındaki kavram imajlarını ve tanımlarını yarı yapılandırılmış görüşmelerle tespit etmiştir. Öğrencilerin genelde diyagramla türevin tanımını yaptıklarını tespit etmiştir.

Lise öğrencilerinden farklı olarak, Gutierrez & Jaime (1999)'in öğretmen adaylarının yükseklik kavramı ile ilgili kavramsal yapılarını incelemek üzere kavram imajı-kavram tanımı teorik çerçevesinde bir çalışma yaptıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının performansları üzerindeki (a) resmi bir tanımın varlığı ve (b) yükseklik kavramıyla ilgili önceki sınıf etkinlikleri, iki değişkenin etkisini açıklamışladır. 190 öğretmen adayı ile yapılan çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının bazı kavram karmaşası yaşadıkları gözlenmiştir. Yaşadıkları kavram kargaşalarını sahip oldukları kavram imajlarının da desteklediği ifade etmişlerdir.

Benzer şekilde, Attrops (2003) araştırmasında, yine 10 öğretmen adayı ile çalışmış ve eşitlik kavramının öğretmen adaylarında neyi çağrıştırdığını incelemiştir. Bu bağlamda araştırmaya katılan öğretmen adayları kavram öğrenmelerini şu şekilde tanımlamışlardır: mekanik bir tatbikat, ezbere öğrenme, bir model öğrenme ve rutin problemlere odaklanma. Kavram öğrenmenin özellikle ortaokul ve lise düzeyinde mekanik bir alıştırma olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ancak bu durum üniversitede öğretim elemanları tarafından, öğrencilerin denklem kavramını zaten anladıklarını varsaydılar ve kavram ile ilgili işlemleri üzerine değinmeden öğretmeye devam ettiler. Bununla beraber çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının formel tanımları ile kavram imajlarının örtüşmediği tespit edilmiştir.

Bingölbali ve Monaghan (2008) matematik lisans öğrencileri ve mühendislik lisans öğrencileri ile yaptıkları çalışmada kavram öğrenmede kavram imajı odaklı çalışmışlardır. Üzerinde çalışılan matematik konusu ise türevdir. Yapılan çalışmada üç tema ortaya çıkmıştır: öğrencilerin türevin kavram imajlarının geliştirmesi; öğretim ile öğrencilerin kavram imajları geliştirmesi arasındaki ilişki; öğrencilerin kavram imajları geliştirmeleri ve bölümlere bağlılıkları. Sonuç olarak, lisans öğrencilerinin kavram imajlarına yönelik çalışmaların, onların öğrenim gördükleri bölümleri ile bağlantılarını göz ardı etmemesi gerektiği belirtilmiştir.

Likwambe ve Christiansen (2008) 5 öğretmen adayı ile yapılmış çalışmada türev kavramı üzerine odaklanmışlardır. Karşılaştırma için programa kayıtlı olmayan iki nitelikli öğretmenin kavram imajlarına yer verilmiştir. Çalışmanın bulgularında ise nitelikli öğretmenin beş öğrencisinden yalnızca birinin, türevin üç katmanının tamamında, katmanlardaki temsiller arasındaki bağlantıların yanı sıra çoklu temsillerle birlikte derin bir kavram imajına sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu öğrenci de kalkülüs dersinden başarıyla geçmiştir. Diğer dört öğrenci kavram görüntülerinde oran katmanına ve grafiksel temsile sahipken, diğer katmanlar ve temsillerin çok az bağlantılı olduğu görülmüştür. Bu öğrencilerden ikisi matematik modülünü geçerken diğer ikisi başarısız olmuştur. Bununla birlikte, kalkülüs dersinin tamamlanmasından sonra bile, birçok uygulama öğretmeninin türevin tüm katmanları ve bir veya ikiden fazla temsili kapsamayan kavram imajlarına sahip olduğu tespit edilmiştir.

Aydeniz (2011) yapmış olduğu yüksek lisans çalışmasında öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajlarını ve matematiksel anlayışlarını incelemek üzere bir durum çalışması gerçekleştirmiştir. Çalışmasını beş ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının eğim kavramı hakkındaki en baskın olan kavram imajlarının fiziksel ve trigonometrik temsiller olduğu tespit edilmiştir. Bu durum katılımcıların deneyimlerinden ve önceki aldıkları eğitimden kaynaklı olabileceği ifade edilmiştir.

Nayir (2013) yapmış olduğu araştırmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının türevi nasıl tanımladıkları ve anlamlandırdıkları ile ilgili öğretmen adaylarının türev kavramı hakkında farklı temsil biçimleri üzerine ifadelerini incelemiştir. Türev üzerine söylemlerini hem bireysel hem de sınıf içi ortamlarda tespit etmiştir. Sınıf içi söylemlerde türevi eğim olarak algılayan öğretmen adayları, bireysel söylemlerde ise türevi eğimlerin limitleri şeklinde tanımlamışlardır. Araştırmanın bulgularında öğretmen adaylarının türeve ilişkin bazı zorluklar yaşadığı belirlenmiştir. Bu zorluklar türev kavramı hakkındaki farklı gösterim biçimleri arasındaki geçişlerdeki zorluklar olarak tanımlanmıştır.

Hebineza (2013) araştırmasında öğretmen adaylarının integralin eğrinin altında kalan alanı anlamlandırmaları üzerine bir dönem boyunca 3 öğretmen adayı ile çalışmıştır. Çalışmanın sonuçları incelendiğinde analiz dersinden sorumlu öğretim elemanlarının, öğretmen adaylarının belirli integral kavramı hakkındaki sahip oldukları kavram imajlarını etkiledikleri tespit edilmiştir. Bulgular aynı zamanda öğretmen adaylarının belirli bir dönemde geliştirilen kavram imajlarını geliştirmek için öğretim elemanlarının öğretim stratejilerini yeniden gözden geçirmelerinin etkili olduğu ifade edilmiştir.

Turan (2016) yapmış olduğu çalışmada ise 53 ortaöğretim matematik öğretmen adayı ve 99 formasyon eğitimi alan matematik bölümü öğrencilerine ait limit, süreklilik ve türev ile ilgili kavramsal yapılarını incelemiştir. Analiz dersi konuları arasında yer alan üst düzey bilgi gerektiren konular hakkında Kelime İlişkilendirme Testi ile bu kavramlar hakkında öğretmen adaylarının kavram imajları incelenmiştir. Sonuçları frekans tablosu ile sunan araştırmacı her bir kavram ile farklı kategoriler elde etmiş ve bu kavramlar hakkında ilişkili 250 kelime elde etmiştir.

Erdoğan (2017)'ın yapmış olduğu çalışmada çalışma grubunu lisede görev yapan matematik öğretmenleri oluşturmuştur. Lise matematik müfredatı dikkate alındığında, öğretmenlerin türev kavramı ve bir noktadaki türev hakkında kavram imajları incelenmiştir. Farklı çalışma yıllarına sahip 30 öğretmen ile yapılan çalışmada Tall ve Vinner (1981)'a ait kavramsal çerçeve ile kavram imajları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin türev kavramı ile verdikleri cevaplar genelde ezbere olduğu ve türev kavramı ile ilgili genel geçer cevaplar olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin sahip olduğu kavram imajları kavram tanımlarını tam olarak karşılamadığı dolayısıyla kavram imajlarının eksik kaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

Benzer olarak Grover (2015) yapmış olduğu doktora çalışmasında ise matematik öğrencilerinin fonksiyon kavramını nasıl algıladıkları ve nasıl anlamlandırdıklarını incelemiştir. Grover (2015), karma yöntem kullandığı çalışmasında matematik öğrencilerinin fonksiyon kavramı hakkında nasıl gösterim yolu izlediğini incelemiştir. Öğrencileri farklı kalkülüs (Bio Kalkülüs, İşletme Kalkülüs) dersleri ile kalkülüs 2 ve ayrık matematik derslerini almıştır. Farklı kalkülüs derslerinde yer alan fonksiyon kavramlarını nasıl algıladıkları incelenmiştir. Çalışmanın bulguları ise bağlam temelli Calculus I derslerindeki öğrencilerin ifadelerinin genelleştirebildikleri, daha az odaklanma eğiliminde oldukları sonucunda ulaşılmıştır.

Breen, Larson, O'Shea ve Petterson (1992) farklı ülkelerde öğrenim gören öğrencilerin ters fonksiyon kavramı hakkındaki kavram imajlarını incelemiştir. İsveç ve İrlanda'da öğrenim gören öğrencilere ait kavram imajlarının benzer olduğu sonucuna varılmıştır. Bu açıdan bakıldığında farklı ülkelerde fonksiyon kavramının kitaplarda benzer olduğu ve öğrencilerin sahip olduğu kavram imajlarının da bu bağlamda benzeştiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin sahip olduğu kavram imajları, ters fonksiyonları x ve y'nin yer değiştirmesi, bir yansıma ya da tersine çevirme olarak tanımladıkları görülmüştür.

Doruk, Duran ve Kaplan (2018) yapmış oldukları çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının türev kavramına yönelik yükledikleri anlamları incelemiştir. Farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören öğretmen adaylarının kavram imajları karşılaştırılmıştır.

Özellikle son sınıfta öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adayları alt sınıflardaki öğrencilere göre türev kavramı ile ilgili daha fazla kavram imajına sahip oldukları görülmüştür. Bu durumun son sınıf öğrencilerinin diğer sınıflara oranla daha fazla alan dersi aldıklarından dolayı olabileceği ifade edilmiştir. Ancak genel olarak düşünüldüğünde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının türev kavramını tanımlamakta güçlük çektiği, türev ile ilgili soruları işlemsel olarak çözebildikleri dolayısıyla kavramsal olarak anlamlandıramadıkları tespit edilmiştir.

Benzer olarak Domingos, (2009) yapmış olduğu çalışmada yükseköğretim düzeyinde öğrenim gören öğrencilerin ileri matematiksel kavramları anlamlandırmalarını incelemiştir. Limit kavramı hakkında kavram imajlarını inceleyen Domingos (2009), üç farklı kategoride kavram imajı belirlemiştir. Bunlar başlangıç kavram imajları, işlemsel kavram imajları ve ilişkisel kavram imajları olarak tespit edilmiştir. Bu kavram imajları, öğrencilerin kavramı açıklamak istediklerinde kullandıkları nesneler, süreçler, özellikler, temsiller arasındaki geçişi ve kavramsal düşünme ile ilgili olduğu görülmüştür.

Türev kavramı ile ilgili doktora tezi yayınlayan daha sonra da türev kavramı ile ilgili kavramsal çerçeve oluşturan Zandieh (1997, 2000), 1997 yılında yayımladığı doktora tezinde "Öğrencinin türev kavramını anlaması ne anlama gelir?" araştırma sorusuyla öğrencilerin türev kavramı hakkındaki kavram imajlarını incelemiştir. Bu bağlamda çalışmasını dokuz lise öğrencisi ile gerçekleştirmiştir. Bir dönem boyunca matematik derslerinde sahip oldukları türev kavramı ile ilgili kavram imajlarının sürecini incelemiştir. Çalışmada Tall ve Vinner (1981)'a ait kavram imajı çerçevesini, Sfard (1992) süreç-nesne kavramsal çerçevesini kullanmıştır. Bu çalışmanın dikkat çeken bulgusu, türev kavramının katmanlarının ve temsillerinin, hiçbir öğrencinin yönleri aynı sırada öğrenmediği için hiyerarşik bir yapı oluşmadığıdır. Daha sonra Zandieh (2000) türev kavramı ile ilgili bir kavramsal çerçeve oluşturmuştur. (Bu kavramsal çerçeve gerçekleştirilen çalışmada türev kavramı için analiz çerçevesi olarak kullanılmıştır.)

Teuscher ve Reys (2012) lise öğrencileri ile yaptığı çalışmada ise katılımcıların matematik dersindeki değişim oranı kavramını anlayışlarını incelemiştir. Yapılan çalışmada 10,11 ve 12. Sınıf öğrencileri ile bir dönem boyunca gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulgularında dikkat çeken durum ise öğrencilerin değişim oranı kavramını anlamlandırmada ve yorumlamada zorlandıkları olmuştur. Öğrenciler doğrusal fonksiyonların değişim oranını hesaplarken zorlanmadıkları yani işlemsel bilgi gerektiren sorularda kolayca çözüldüğü; ancak, doğrusal olmayan fonksiyonlarda, öğrenciler değişim oranını hesaplarken güçlük çektikleri, bir grafik üzerinde modellemeye çalıştıkları görülmüştür.

Orton (1983) yapmış olduğu çalışmada türev ve değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi ilk defa çalışan araştırmacı olmuştur. Orton (1983) çalışmasında öğrencilerin değişim oranı kavramını temsil biçimlerinden grafik (düz doğru veya eğriler) ile verildiğinde bu kavram ile işlem yapmakta zorlandıklarını ortaya koymuştur. Çalışmada yer alan öğrenciler bir eğri üzerindeki bir noktanın değişim oranı olabileceğini kavrayamadıklarını bununla birlikte eğrinin üzerinde her noktayı farklı bir değişim oranı olacağını düşünmüşlerdir. Bununla paralel olarak ayrıca öğrencilerin ortalama değişim oranı ve değişim oranı kavramlarını ayırt edemedikleri ve anlık değişim oranı kavramı ile türev kavramını ilişkilendiremediklerini ortaya koymuştur.

Thompson (1994) yapmış olduğu çalışmada üstel fonksiyonlarda hızlanırken kat edilen mesafeyi anlamanın kavramsal analizi, değişim oranı ve sonsuz küçük değişim kavramlarının kavram imajlarını, yüksek lisans eğitimi alan matematik öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Öğrencilerin Newton’un Temel Kalkülüs Teoremini anlamada güçlük çektiği, değişim hızı kavramına ait öğrencilerin zayıf kavram imajlarına sahip olduklarını ortaya koymuştur.

Stump (1999) eğim kavramı ile ilgili yapmış olduğu çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmenlerinin kavram tanımlarını, matematiksel anlamalarını ve eğimle ilgili pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Çalışmaya 39 tane matematik öğretmeni katılmıştır. Öğretmenlerin, eğim kavramına yönelik baskın kavram imajları geometrik oranlar kategorisinde yer aldığını ortaya koymuştur. Öğretmenler eğim ile ilgili parametrelerin tanınması, grafiklerin yorumlanması ve değişim hızı ile ilgili problemlerin çözümünde zorlandığı sonucuna ulaşmıştır. Bununla beraber Stump (1999), matematik öğretmen eğitimi programlarında eğim kavramını temel bir kavram olarak ele almanın önemini vurgularken eğim kavramının fonksiyon kavramıyla ilişkilendirilmesinin önemli olduğunu da ifade etmiştir. Stump(1999) yılında yaptığı bu çalışma ile eğim kavramı ile ilgli bir kavramsal çerçeve de ortaya koymuştur. Oluşturduğu kavramsal çerçeveyi yedi kategoride toplamıştır. Bununla beraber Stump (2001) yılında ise matematik öğretmen adayları ile yapmış olduğu çalışmada ise; matematik öğretmen adaylarının eğimle ilgili sahip oldukları güçlüklere ilişkin bilgilerinin gelişimini ve eğim öğretimi için temsillere ait bilgilerini incelemiştir. Çalışmada yer alan matematik öğretmen adaylarının sahip olduğu bilgilerinin kavramsal ve işlemsel yönlerini ele almış ve eğim öğretimi için çeşitli temsiller geliştirmiştir. Stump (1999) yılında geliştirdiği eğim kavramı ile ilgili kavramsal çerçeveye ek olarak gerçek dünya durumu kategorisini ekleyerek eğim kavramı ile ilgili kavramsal çerçevesini genişletmiştir. Ancak öğretmen adayları gerçek dünya durumu kategorisindeki ifadelerini açıklamada zorlandıklarını ortaya koymuştur.

Isaacson (1999) yapmış olduğu doktora çalışmasında teğet kavramının bilgisayar ortamlarında üç farklı kategoriyle öğrencilerin anlamasına etkisini incelemiştir. Bu kategoriler etkileşimli-animasyon, statik ve animasyon olarak belirlemiştir. Çalışmada üniversite seviyesinde kalkülüs dersi alan 82 öğrenciyle gerçekleştirmiştir. Çalışmanın amacı kalkülüs kavramlarının durağan olduğu ve dolayısıyla öğrencilere bu kavramların statik bir şekilde sunulması onların zihinlerindeki imajları etkilemeyeceği ayrıca kavramsal olarak zihinlerine yerleşmeyeceği, olarak belirlenmiştir. Çalışma grubunu üçe ayırarak her gruba kategorilerden birini uygulayarak çalışmasını gerçekleştirmiştir. Çalışmada veriler varyans analizi yapılarak analiz edildiğinde istatistiksel olarak bir farkın olmadığı ortaya koyulmuştur.

Ubuz (2007) yapmış olduğu çalışmada ise mühendislik fakültesi birinci sınıf öğrencilerinin türev grafiğini oluşturma ve bu grafiği yorumlamalarını incelemiştir. Katılımcılar görselleştirme ile kavramsal anlamanın yararlı olduğunu göstermek ve çalışma süresince verilen etkinliklerdeki adımları gerçekleştirebilmeleri için çalışmaya deney grubu öğrencileri bilgisayarları ile katılmışlardır. Çalışmada kalkülüsün ana yönlerini anlayabilmeleri için öncelikle bir ön test uygulanmıştır. Bununla birlikte 18 öğrenci ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bilgisayar ile çalışmaya katılan öğrencilerin diğer öğrencilere göre görsel olarak grafiği yorumlama becerileri daha da geliştiğini ortaya koymuştur.

Coe (2007) yapmış olduğu doktora çalışmasında öğretmenlerin modelleme etkinlikleri ile değişim oranı kavramı hakkındaki düşünme biçimlerini incelemiştir. Yapılandırmacı yaklaşım bu çalışmanın temelini oluşturmuştur. Özel olarak, araştırmacı, öğretmenlerin değişim oranı hakkındaki kavram imajlarını açıklamak için bir model oluşturmayı amaçlamıştır. Çalışma üç öğretmen ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulguları ise, her bir öğretmen oran kavramı hakkında farklı düşünme biçimlerinin olduğunu ortaya konulmuştur. Örneğin, öğretmenlerden birisi oran ile ilgili öncelikle tanım kullanmayı tercih etmiştir, ikinci öğretmen oranı grafiksel olarak diklik olarak düşünmüştür ve son olarak üçüncü öğretmen ise oranı karşılaştırma olarak değerlendirmiştir. Bu buğulara ek olarak ise öğretmenlerin sabit, ortalama ve değişen oran kavramları hakkında birbirlerinden tamamen farklı düşünme biçimlerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Ndlovu, Wessels ve De Villiers (2010) yapmış oldukları çalışmada ise Sketchpad programı ile modelleme yoluyla öğrencilerin türev kavramı hakkındaki kavram imajlarının zenginleştirilmesini ve farklı temsil biçimleri arasında bağ kurmalarını incelemiştir. Fen eğitiminde öğrenim gören birinci sınıf öğrencileriyle yapılan çalışmada, normal olarak sunulan kalkülüs öğretimi gören öğrencilerden farklı olarak, Sketchpad programı ile çalışan öğrencilerin kavram tanımları ve kavram imajlarının zenginleştiği ortaya konulmuştur. Hatta bu durum rutin olmayan problemlerde dahi istatistiksel olarak fark oluşturduğunu ifade etmişlerdir.

Johnson (2010) yapmış olduğu doktora çalışmasında ortaöğretim öğrencilerinin değişim oranı kavramını anlamaları için değişen miktarlardaki akıl yürütmelerini incelemiştir. Çalışmada henüz analiz dersi almamış dört öğrencinin değişim oranı kavramı hakkındaki akıl yürütmelerini incelemiştir. Beş yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilen çalışmada her görüşmede öğrencilerin farklı akıl yürütme becerilerini kullandığı görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilerin değişim oranı hakkında akıl yürütürken farklı akıl yürütme biçimlerinin birleşimi dikkate değer olduğu, çünkü öğrencilerin değişim oranlarında yer alan değişen nicelikleri nasıl ifade ettikleri önemli bir durum olduğu tespit edilmiştir.

Weber, Tallman, Byerley ve Thompson (2012) yapmış oldukları çalışmada, normal türev işlemleri, türev fonksiyonunun aslında fonksiyonun değişim oranını temsil ettiğini açıkça ifade etmediğini söylemişlerdir. Bu bağlamda durağan x değerleri için bir fonksiyon ile onun değişim oranı fonksiyonu arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmanın, değişim oranı fonksiyonunu kavrama ve oluşturmanın kolay olmadığını veya öğrencilerin bir grafikteki değişim oranı kavramını incelerken grafikteki değişimleri kavrayamadıkları gibi tahmin etmelerine de izin verilmediğini savunmuşlardır. Çalışmada öğretim elemanları grubunun, değişim oranını ve niceliksel akıl yürütmeyi vurgulayan iki farklı üniversitede matematik dersi tasarlamış ve bu dersleri yürütmüşlerdir. Araştırmacıların yaklaşımları öğrencilerin derslerde bir değişim oranı fonksiyonu oluşturmak için niceliklerde yer alan değişim oranını bulmaları ve yorumlamaları için bir yöntem inşa etmelerini için kalkülüs üçgeni kavramını önermişlerdir. Kalkülüs üçgeninin, öğrencilere matematiksel alanlarda ve grafik temsilleri arasında esnek bir şekilde akıl yürütmelerine olanak tanıdığı bulgusuna ulaşmışlardır.

Hartter (1995) yapmış olduğu çalışmada türev kavramına yönelik sekiz öğrencinin kavram tanımı ve kavram imajlarının ne derece uyumlu olduğunu incelemiştir. Bu çalışmada Hartter, fonksiyon kavramını kavramsal olarak öğrenen öğrencilerin türev kavramına dair kavram tanımı ve kavram imajlarının birbirleriyle daha uyumlu olduğunu ifade etmiştir.

Ayrıca çalışmanın bulgularında dikkat çeken durum farklı temsil biçimleri ile öğrencilere sunulan alıştırmalar öğrencilerde kavram imajlarının gelişimlerinin olumlu olduğunu bahsetmiştir.

Soğancı (2006) öğretmen adaylarının matematiksel tanımlamaları üzerine bir fenemenografik bir çalışma yapmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel kavramların anlayışında sadece kavram tanımının yeterli olmayacağı bununla beraber farklı örneklerle de kavram imajlarının desteklenmesi gerektiği sonucuna varmıştır.

Giraldo ve Carvalho (2002) yapmış oldukları çalışmada Brezilyalı öğrencilerin türev kavramı hakkındaki kavram imajlarını incelemişlerdir. Özellikle üst düzey bilgi gerektiren matematiksel kavramları uygun yöntem ve teknikler kullanıldığında ki çalışmalarında bilgisayar destekli matematik öğretimi gerçekleştirilmiştir, öğrencilerin kavram imajlarının gelişiminin olumlu olacağı sonucuna varılmıştır.

Hoffman (2015) yapmış olduğu doktora çalışmasında ortaokul matematik öğretmenlerinin eğim kavramı hakkındaki kavram imajlarını incelemiştir. Çalışma grubunda yer alan 10 ortaokul matematik öğretmeni eğimi tanımlarken diklik ifadesini sıklıkla kullandıklarını ve örnek olarak gerçek dünya durumlarından faydalandıkları ifade etmiştir. Ayrıca öğretmenler eğimi hesaplarken geometrik oran ve cebirsel orandan faydalandıklarını belirtmiştir. Öğretmenlerin eğim hakkındaki kavram imajlarının sekiz kategoriye kadar olduğunu ve bu imajlarının sayılarında da farklılık göstermiştir. Özellikle ileri matematik derslerini -Cebir1 veya daha fazlasını- lisansta alan öğretmenlerin eğim hakkındaki kavram imajlarının daha sağlam olduğu sonucuna varılmıştır.

Mcdowell (2021) yapmış olduğu doktora çalışmasında ise lisans öğrencilerinin kalkülüs dersinde sahip oldukları kavram yanılgılarını incelemiştir. Kalkülüs dersinin temel konuları olan fonksiyonlar, limit ve türev kavramları hakkında lisans öğrencilerinin kavrayışları hakkında bir çalışma yapmıştır. Çalışma grubunda 17 lisans öğrencisi yer almaktadır. Evrensel olarak lisans öğrencilerinde yanlış kavramsal anlayışın var olduğunu belirten Mcdowell, yaptığı çalışmada öğrencilerin hatalarının altında yatan kavram yanılgılarını nasıl ve neden geliştirdiklerini açıklamak için öğrencilerin problem çözmedeki bilişsel çatışmalarını incelemiştir. Lisans öğrencilerinin problemleri nasıl çözdüklerini, sahip oldukları kavram yanılgılarının nedenlerini kendileri keşfederek, kavram imajları ve işlemsel bilgileri ile beraber bilişsel durumları incelenmiştir.

Tyne (2016) yapmış olduğu yüksek lisans çalışmasında ise kalkülüs öğrencilerinin eğim ve türev kavramını değişim oranı olarak kavrayışlarını STEM bağlamında incelemiştir. Bu bağlamda, 69 kalkülüs 1 (birinci dönem) matematik öğrencisinden yazılı cevaplar toplanmıştır. Daha sonra 13 kalkülüs 2 (ikinci yarıyıl) matematik öğrencisi ile görüşmeler gerçekleştirmiştir. Veri toplama araçlarıyla kalkülüs 1 ve kalkülüs 2 öğrencilerinin gerçek yaşam durumlarını kullanarak eğim ve türevi kavrayışlarını incelemiştir. Çalışmanın sonuçlarında ise öğrenciler eğim ve türevin neyi temsil ettiğini ve bunları tahmin yapmak için uygun şekilde nasıl kullanacaklarını bilmekte zorlanmışlardır. Çalışmaya katılan öğrencilerin üçte ikisi eğimi, farklar oranı $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ yerine toplamların oranı $(\frac{y}{x})$ olarak anladıkları görülmüştür. Bu açıdan çalışmada öğrencilerin eğim ve değişim oranları olarak türevi anlayışları hakkında eğitimcilerin STEM öğretimi ile geliştirmelerine yardımcı olabileceği ifade edilmiştir.

McCarty (2019) yapmış olduğu doktora çalışmasında ise matematikçilerin diferansiyellerin kavram imajlarını incelemiştir. Diferansiyel, birinci ve ikinci yıl kalkülüs derslerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu bağlamda ortak bir matematiksel sembolün evrensel olarak yorumlanması gerektiğinden yola çıkarak, öğrencilerin üniversitedeki matematik hocalarının etkilerinden kurtulamayacağından, farklı yorumlamaları için deneyimli matematikçilerle bir birtakım görüşmeler gerçekleştirmiştir. Çalışmasında matematikçiler tarafından verilen yanıtlar analiz edildiğinde, biri diferansiyel denklemin niteliğini doğrudan ele alan açıklamalara dayalı, diğeri ise kişinin diferansiyel denklem hakkındaki hislerini ele alan iki tema listesi oluşturmuştur. Çalışmanın sonuçları incelendiğinde diferansiyel denklemler için yalnızca genel bir resmi kavram imajı değil, aynı zamanda her bir görüşmede matematikçilerin kişisel kavram imajlarında birçok farklı ve bazen zıt temalar bulunduğu görülmüştür.

Dündar (2015) yapmış olduğu çalışmada ise, matematik öğretmen adaylarını eğim kavramına yönelik kavram tanımlarını ve kavram imajlarını incelemiştir. Farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören 192 öğretmen adayının eğim kavramı hakkındaki kavram imajları 6 farklı kategoride olduğu tespit edilmiştir. Bu kategoriler: geometrik oran, trigonometrik, cebirsel oran, parametrik katsayı, fiziksel özellik ve oran olarak belirlenmiştir. Ayrıca çalışmada öğretmen adaylarının eğim kavramını anlayışları sınıf seviyeleri açısından değerlendirildiğinde matematik öğretmen adaylarının eğim kavramını daha çok geometrik oran kategorisindeki kavram imajına sahip oldukları, sınıf seviyesi arttıkça bu kavram imajının trigonometri kategorisindeki kavram imajına yöneldiğini bununla birlikte fiziksel kategorideki temsilin azaldığı görülmüştür.

Dolores-Flores, Rivera-Lopez ve Garcia-Garcia (2019) yapmış oldukları çalışmada ise, üniversite öncesi öğrencilerinin değişim oranı kavramını kullanarak matematiksel bağlantıları keşfetmelerini incelemişlerdir. Çalışmada matematiksel bağlantıları, iki veya daha fazla matematiksel fikri, kavramı, tanımı, teoremi, işlemi, temsili kullanmak veya diğer disiplinler ile günlük yaşamdan durumlarla gerçek ilişkilerin kurulduğu bilişsel bir süreç olarak kabul edilmiştir. Araştırmada katılımcı olarak 33 üniversite öncesi öğrenci vardır ve bu öğrencilere dört görev ile değişim oranı kavramı ile matematiksel bağlantıları keşfetmeleri istenmiştir. Bu bağlamda ilk görevde kavram olarak eğim kavramı üzerine durulmuş, son üç görevde ise hız, hız ve ivme gibi kavramları içermiştir. Çalışmanın sonuçlarında ise, öğrencilerin çoğunun işlemsel türde matematiksel bağlantılar kurduğu, ortak özellik türündeki matematiksel bağlantıların daha küçük miktarlarda yapıldığını ve genelleme türündeki matematiksel bağlantılarının ise nadiren olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrenciler eğim kavramını anlık değişim oranı, ortalama değişim oranı ve değişim oranı kavramlarından farklı bir kavram olarak görmüşlerdir.

Byerley ve Thompson (2017) yapmış oldukları çalışmada ise lise matematik öğretmenlerinin eğim, ölçme ve değişim oranı kavramlarını anlayışlarını incelemişlerdir. 251 lise matematik öğretmeninden yazılı olarak bu kavramları tanımlamaları istenmiştir. Çalışmada öğretmenlerin genelinde eğim ve değişim oranı kavramları için kalıplaşmış tanımlar ve ifadelerin yer aldığı görülmüştür. Birkaç matematik öğretmeni, değişim oranını, iki nicelikteki değişimin karşılaştırdığını aktarmıştır. Öğretmenlerin ölçmedeki kavram imajları, değişim oranı için sınırlı olduğu görülmüştür. Yapılan çalışmada değişim oranı kavramını öneminden ve incelenmesi gerekliliği ifade edilmiştir.

Nurwahyu, Tinungki ve Mustangin (2020) Endonezya'da yapmış oldukları çalışmada Kalkülüs 1 dersinden başarılı olan lisans öğrencilerinin türev kavramı hakkındaki kavram imajlarının problem çözme stratejilerini incelemişlerdir. Yapılan çalışmanın sonuçlarında ise türev kavramının kavram imajı hakkında üç kategori elde etmişlerdir. Bunları: bir fonksiyonun türevinin temel formülü, fonksiyonların fark değerinin oranının limiti ve fonksiyonun türevinin özellikleriyle sembolik olarak ilişkisi, şeklinde ifade etmişlerdir. Bu bağlamda her öğrencinin kavram imajının türev kavramı için akıl yürütme becerisini etkilediği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin cevapları incelendiğinde bir fonksiyonun türevini temel formülle kullanırken bazı kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir.

Yu (2021) yapmış olduğu bir çalışmada, öğrencilerin belirli bir noktada türev kavramı için anlayışlarını incelemiştir. Öğrenciler türev kavramı için anlık değişim oranı olarak ifade ettiklerini, ancak bunun ortalama değişim oranı olarak fark bölümü için tutarlı bir anlama sahip olmadıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmada, öğrencilerin anlık değişim hızı hakkındaki kavrayışlarını ve öğrencilerin bu konuda taşıyabilecekleri farklı anlamları analiz edilmiştir. Bu çalışmanın sonuçları olarak, öğrencilerin anlık değişim hızı konusunda farklı anlamlara sahip oldukları görülmüştür. Bu farklı anlamlarla, özellikle öğrencilerin doğrusal bir yaklaşım problemini çeşitli şekillerde çözmeleri beklenmiştir. Bir öğrenci dışında öğrencilerin doğru cevap verdiği ancak farklı temsil biçimlerini kullanmadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Bateman (2020) yapmış olduğu doktora çalışmasında ise üniversite öğrencilerinin eğimi nasıl tanımladıkları ve üniversite ders kitaplarında türev kavramının ön koşulu olan eğim kavramını nasıl tanımlandığı ve bu ikisi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bu bağlamda yayınladığı üç makalenin birleşimi olan doktora tezinde; ilk çalışmasında matematik derslerine giren üniversite öğrencilerine ve bu öğrencilerin eğimi anlama ve kullanma biçimleri incelenmiştir. İkinci çalışmada ise, üniversite matematik ders kitaplarına ve türev kavramı için ön koşul olan eğim kavramının nasıl ifade edildiği incelenmiştir. Son çalışmasında ise üniversite matematik öğrencilerinin eğim hakkındaki kavrayışlarının matematik ders kitaplarıyla örtüşüp örtüşmediği incelenmiştir. Bu bağlamda 4 üniversiteden toplamda 231 matematik, fen, iktisat bölümü öğrencileri ile çalışmıştır. Ayrıca 28 kalkülüs kitabı çalışmada incelenmiştir. Çalışmada hem öğrencilerin hem de ders kitaplarının eğim kavramı için kuramsal kavramsallaştırılmasına yani formel tanıma dayandığını, ancak diğer kavramsallaştırmaların yaygınlık sırasının öğrenciler ve ders kitapları arasında değiştiğini göstermiştir.

Gerek yurt içi gerekse yurt dışında yapılan çalışmalar incelendiğinde kavram imajı ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Alan yazın incelendiğinde genellikle tek bir matematiksel kavram incelendiği görülmektedir. Bu kavramlar, eğim, değişim oranı, süreklilik, katlı integraller, noktada türev vb. ile ilgili çalışmalar olduğu görülmektedir. Matematiğin sarmal yapısı göz önünde bulundurulduğunda özellikle kalkülüsün merkezinde yer alan türev kavramının eğim ve değişim oranı kavramları ile ilişkisinin incelenmediği görülmüştür. Bununla birlikte alan yazın incelendiğinde eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında hem matematik öğretmeni adaylarının hem de matematik eğitimcilerinin kavram imajlarını birlikte inceleyen bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Ayrıca yukarıda da belirtildiği üzere tek bir kavram üzerine yapılan çalışmalar bulunmaktadır. Yani türevin alt boyutlarından olan eğim ve değişim oranı ve türev kavramı ile birlikte yapılan herhangi bir çalışmaya henüz rastlanılmamıştır.

Bölüm 3

Yöntem

Bu bölümde araştırmanın yöntemi, araştırmacının rolü, çalışma grubu, verilerin toplanması süreci, veri toplama araçları, araştırma süreci ve verilerin analizi süreci ele alınmıştır.

Araştırmanın Türü

Bu çalışmada matematik eğitimcilerinin ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajlarını incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda çalışmaya yedi ilköğretim matematik öğretmen adayı ve dört matematik eğitimcisi katılmıştır. Böylece katılımcıların her bir kavram hakkındaki kavram imajları ve bu kavramların birbirleri ile ilişkisine yönelik kavram imajları incelenmiştir.

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Nitel araştırma yaklaşımında insan davranışı araştırmalarda esnek ve bütüncül olarak ele alınırsa daha anlamlı olmaktadır. Bu bağlamda bireylerin görüşleri, doğal ortamda davranışları, deneyimleri araştırma esnasında önemli bir yere sahiptir. Bununla birlikte, nitel araştırma çalışmalarında; doğal ortama duyarlık sağlaması, araştırmacının katılımcı rolünün tanımlanması, bütüncül bir yaklaşıma sahip olması, algıların meydana konulması, çalışma desenindeki esneklik ve tümevarımcı bir analize olanak sağlaması gibi özellikleri mevcuttur (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu bağlamda nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışmasında durumun sınırları belirgindir. Bir olgunun, bir birey ya da grubun veya sistemin derinlemesine incelenmesine ve araştırılmasına olanak sağlayan bir desendir (Bassey, 1999; Punch,2005). Durum çalışmasında ele alınacak olgu, ilişkiler ve örüntülerle belirgin bir bütün içinde ele alınmalıdır. Bu bağlamda bu olguyu ve altındaki parçaları birleştirebilmek için derinlemesine inceleme ve araştırma gereklidir (Bassey, 1999; Cresswell, 2007; Neuman, 2007; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Durum çalışmasının genel bir formülü olmadığından araştırma sorularında incelenen durumu derinlemesine “Nasıl?” ve “Niçin?” gibi sorularla ortaya çıkarmak istendiğinde kullanılmaktadır (Yin, 2009). Bu nedenle yapılması planlanan çalışmada durum çalışması desenlerinden bütüncül çoklu durum deseni kullanılacaktır. Bütüncül çoklu durum deseninde birden fazla kendi başına bütüncül olarak algılanabilecek durum söz konusudur. Dolayısıyla her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınarak birbirleriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Çalışmada yer alan durumlar ayrı ayrı incelenir ve daha sonra birbirleriyle karşılaştırılır. Bu çalışmada incelenen durumlar, her bir ilköğretim matematik öğretmen adayının ve matematik eğitimcisinin eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajlarıdır. Her bir kavrama ilişkin kavram imajı ve bu kavramların diğer kavramlarla olan ilişkisine yönelik kavram imajları bu çalışmanın durumlarını oluşturmaktadır. Bu kavramlar hakkında ayrı ayrı kavram imajları ele alınsa da aslında birbirleri ile olan ilişkileri bir bütünlük oluşturmaktadır. Çalışmayı tüm yönleri ile anlamlandırabilmek için Creswell (2007) ’in bahsettiği gibi çalışma esnasında birçok veriden yararlanılmıştır. Yarı-yapılandırılmış mülakatlara ait ses kayıtlarına ek olarak katılımcıların her türlü yazılı kayıtları da veri toplama kaynağı olarak kullanılmıştır. Mevcut çalışma, farklı devlet üniversitelerinde görev yapan ve analiz derslerinde (Analiz1, Analiz2 ve Analiz3) türev konusunu anlatmış matematik eğitimcileri ve bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile yürütülmüştür.

Araştırmanın Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören ve Analiz 1 dersinden BB başarı notu ve üzerinde not alan 7 öğretmen adayı ile 4 matematik eğitimcisi oluşturmaktadır. İlgili devlet üniversitenin lisans eğitim- öğretim sınav yönetmeliğine göre BB başarı notu, başarı katsayısı 3.0 ve yüzde karşılığı ise 75-84 olarak belirlenmiştir. Bu açıdan öğretmen adayı katılımcılar amaçlı örnekleme ile seçilmiştir. Birinci sınıfta öğrenim gören n=3, ikinci sınıfta öğrenim gören n=4 öğretmen adayından oluşmaktadır. Bununla beraber farklı üniversitelerde görev yapan ve Analiz 1 dersinden sorumlu 4 matematik eğitimcisi çalışmada yer almıştır.

Çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının demografik bilgileri Tablo4'te verilmiştir.

Tablo 4

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Demografik Bilgileri

Öğretmen Adayı	Mezun Olduğu Lise	Sınıf	Analiz1 Geçme Notu
Ö1	Fen Lisesi	2	BB
Ö2	Anadolu Lisesi	2	BA
Ö3	Fen Lisesi	2	BB
Ö4	Fen Lisesi	1	AA
Ö5	Fen Lisesi	1	BA
Ö6	Anadolu Lisesi	1	AA
Ö7	Anadolu Lisesi	2	BB

Tablo 4 incelendiğinde katılımcıların mezun oldukları liselerin Fen Lisesi ve Anadolu lisesi ağırlıkta olduğu görülmektedir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sahip olduğu bilgiler göz önüne alındığında, eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında kavram imajlarının tespit edilebileceği düşünülmüştür. Üst düzey bilgiler gerektiren analiz dersi kavramları (eğim, değişim oranı ve türev) hakkındaki kavram imajlarını tespit edilebilmek için ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Analiz 1 dersinden başarılı olmaları önem arz etmektedir (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013; Orton, 1983).

Çalışmaya katılan matematik eğitimcilerinin demografik bilgileri Tablo5'te verilmiştir.

Tablo 5

Matematik Eğitimcilerinin Demografik Bilgileri

Matematik Eğitimcisi	Lisans Mezuniyet	Lisansüstü Mezuniyet	Akademik Ünvan	Kıdem
ME1	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	İlköğretim Matematik Eğitimi	Dr. Öğr. Üyesi	5
ME2	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Matematik	Dr. Öğr. Üyesi	7
ME3	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	Matematik	Doç. Dr.	6
ME4	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Dr. Öğr. Üyesi	3

Çalışmaya katılan matematik eğitimcilerinin demografik bilgileri incelendiğinde, 3 katılımcının lisans mezuniyetinin ilköğretim matematik öğretmenliği programından mezun olduğu görülmektedir. Bununla beraber 2 katılımcı lisans üstü eğitimlerini ilköğretim matematik eğitiminde tamamladığı, diğer 2 katılımcının matematik alanında tamamladığı görülmektedir. Matematik eğitimcileri Analiz 1, Analiz 2 ve Analiz 3 derslerinden sorumludurlar. Bu bağlamda çalışmaya katılan matematik eğitimcilerinin seçilmesi ölçüt örnekleme ile gerçekleştirilmiştir.

Veri Toplama Süreci

Çalışmanın veri toplama süreci öncelikle pilot çalışma (ön uygulama) ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada veri toplama araçları gözden geçirilerek çalışmanın asıl uygulamasına geçilmiştir.

Pilot Çalışma

Araştırmanın pilot uygulaması bir devlet üniversitesinde Analiz 1 dersini alan ve başarılı olan 1. sınıf (n=2) ve 2. sınıf (n=2) öğrencisi ve Analiz 1, Analiz 2 ve Analiz 3 derslerinden sorumlu bir matematik eğitimcisi ile gerçekleşmiştir.

Tablo 6

Pilot Çalışmadaki Katılımcıların Demografik Bilgileri

Öğretmen Adayı	Mezun Olduğu Lise	Sınıf	Analiz 1 Geçme Notu
K1	Fen Lisesi	1	BA
K2	Anadolu Lisesi	1	BA
K3	Fen Lisesi	2	BB
K4	Fen Lisesi	2	AA

Çalışma grubunda iki öğretmen adayı birinci sınıf, iki öğretmen adayı ikinci sınıfta yer almaktadır.

Birinci sınıf matematik öğretmeni adaylarından bir öğrenci anadolu lisesi mezunudur. Diğer öğrenciler ise fen lisesi mezunudur. Katılımcıların öğrenim gördükleri üniversiteye yerleşme puanları çalışmaya katılmayan diğer öğrencilere göre yüksektir. Öğretim elemanı ise eğitim fakültesi ortaöğretim matematik öğretmenliğinden mezun olup analiz ve fonksiyonlar teorisi alanında doktora derecesine sahiptir. Analiz 1 derslerinden sorumludur.

Pilot uygulama 2019-2020 bahar döneminde yapılmıştır. Pilot çalışma iki aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada; ilköğretim matematik öğretmen adayları ile görüşmeler çevrimiçi bir şekilde gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamada ise ilköğretim matematik öğretmen adayları ve öğretim elemanından eğim, değişim oranı ve türev kavramlarını içeren ikinci aşama sorulara (uygulama soruları) verilen cevaplar yazılı olacak şekilde toplanmıştır.

Çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmenleri K1, K2, K3 ve K4 ile kodlanırken, öğretim elemanı ÖE olarak kodlanmıştır.

Pilot çalışmada elde edilen veriler ile ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcisine ait eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları tespit etmek için veri toplama araçları uygulanarak veri toplama araçlarının anlaşılabilirliği ve uygunluğu tespit edilmeye çalışılmıştır. Yapılan pilot çalışma sonucunda veri toplama araçlarında bazı revizyonlar yapılmıştır. Bir örneği aşağıdadır.

Tablo 7

Pilot Çalışma Sonrasında Veri Toplamak Için Kullanılan Sorularda Yer Alan Bir Revizyon Örneği

f(x) doğrusal fonksiyon olup bu fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi m=3 tür. Buna göre; Koordinat düzleminde f(x) fonksiyonunun olası grafiğini çiziniz. Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade eder? Açıklayınız.
f doğrusal fonksiyon olup bu fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi m=3 tür. Buna göre; Koordinat düzleminde f fonksiyonunun olası grafiğini çiziniz. Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade eder? Açıklayınız.

Ayrıca pilot çalışmada ikinci aşama sorular tek seferde ara verilmeden toplanmıştır. Ancak bu durum katılımcıların çalışmanın sonlarına doğru kendilerini yorgun hissetmelerinden dolayı asıl çalışmada ikinci aşama sorular biraz ara (ortalama 20 dk) verilerek toplanmıştır. Bu duruma ilişkin veri toplama araçlarının çalışmanın asıl uygulamasında nasıl kullanılabileceğine tez izleme komitesi tarafından karar verilmiştir.

Uygulama ve Verilerin Toplanma Süreci

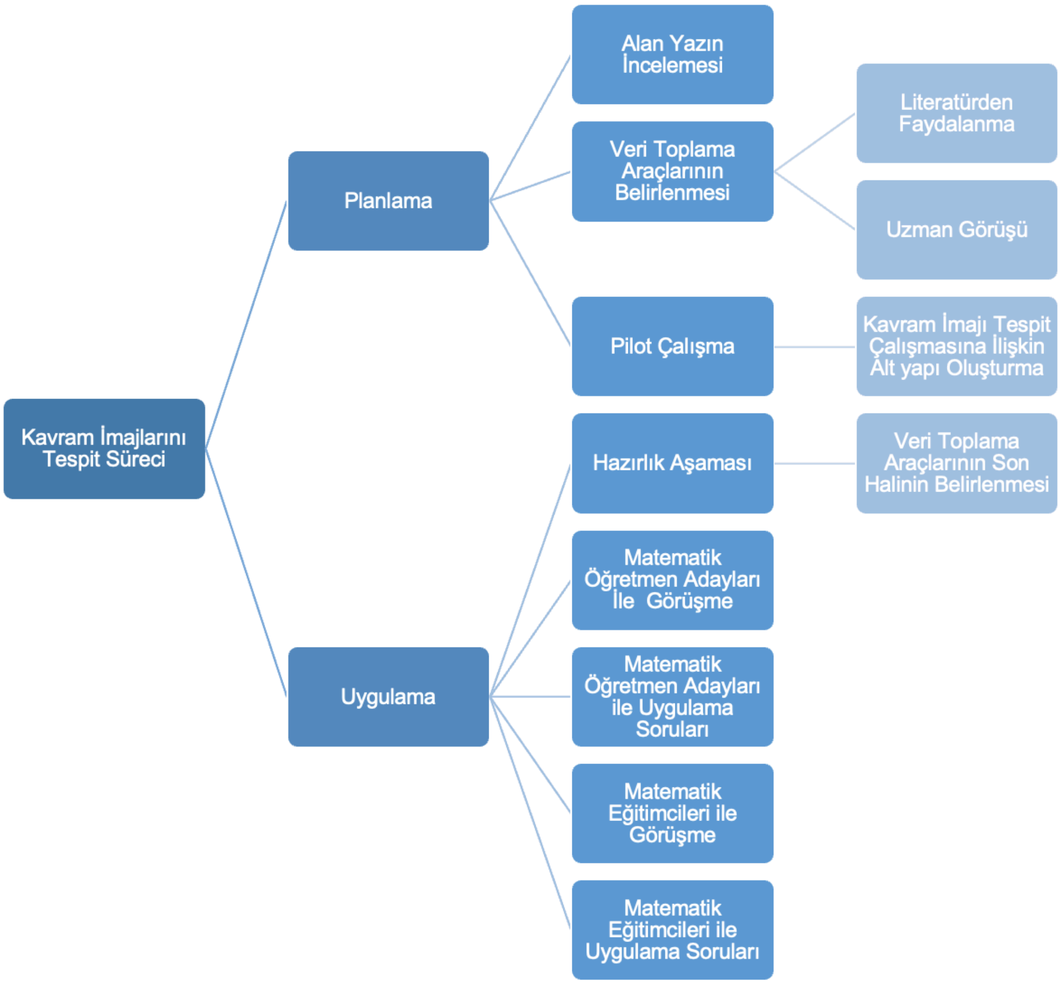
Araştırmanın verileri; 2020-2021 eğitim öğretim döneminde bir devlet üniversitesinde öğrenim gören ve Analiz 1 dersini alan birinci sınıf (n=3) ve Analiz 1 dersinden başarılı olan ikinci sınıf (n=4) ilköğretim matematik öğretmen adaylarından toplanmıştır. Ayrıca analiz derslerinden sorumlu ve farklı devlet üniversitelerinde görev yapan matematik eğitimcileri (n=4) çalışma grubuna dahil edilmiştir.

Çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmen adayları Ö1, Ö2, Ö3 Ö4, Ö5 Ö6 ve Ö7 şeklinde kodlanmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları ile ilgili kavram imajları incelenmek üzere veriler katılımcılardan toplanmıştır. Öncelikle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Daha sonra uygulama sorularını içeren ikinci aşama soruların ilk aşaması (1., 2. ve 3. sorular) gerçekleştirilmiştir. Son olarak ise ilköğretim matematik öğretmen adayların ikinci aşama sorularında yer alan senaryo sorularına (4.,5.,6. ve 7. Sorurlar) verdikleri cevaplar toplanmıştır. Pilot veriden farklı olarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarından bir kısmı (Ö6, Ö7 ve Ö1) ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yüz yüze yapılmıştır. Görüşmeler video ve ses kaydı altına alınmıştır. Diğer katılımcılar pilot uygulamadaki gibi (Ö2, Ö3, Ö4, Ö5) çevrimiçi olarak yarı yapılandırılmış görüşmelere katılmışlardır. Verileri toplama süreci 2020-2021 güz döneminin sonunda yarı yapılandırılmış görüşme soruları ile başlamıştır. İkinci aşama sorulara ait cevaplar (uygulama soruları) yarı yapılandırılmış görüşme sorularının analizinin akabinde toplanmıştır.

Çalışmaya katılan matematik eğitimcileri ME1, ME2, ME3 ve ME4 şeklinde kodlanmıştır. Matematik eğitimcileri ile veri toplama süreci ilköğretim matematik öğretmen adayları ile benzer şekilde toplanmıştır. Çalışmaya katılan matematik eğitimcilerinin uygun vakitleri belirlenerek çalışmanın verileri toplanmıştır. Katılımcılardan ME1 ve ME4 ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yüz yüze yapılmıştır. İkinci aşama sorular ise yazılı olarak teslim alınmıştır. Katılımcılardan ME2 ve ME3 ile yarı yapılandırılmış görüşmeler çevrimiçi şekilde gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamaya ait sorular ise ME2 ve ME3'ten dijital ortamda teslim alınmıştır.

Şekil 18

Kavram İmajlarını Tespit Süreci



Araştırmacının Rolü

Gerçekleştirilen çalışmada veriler araştırmacı tarafından toplanmıştır. Katılımcılardan altı tanesi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler çevrimiçi olarak hem ses kaydı hem de video kaydı alınarak gerçekleştirilmiştir. Diğer beş katılımcı ile ise görüşmeler bire bir olarak ve ses kaydı alınarak gerçekleştirilmiştir. Çevrimiçi olarak gerçekleştirilen görüşmelerde ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin çalışmaya istekli oldukları gözlemlenmiştir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ikinci aşama sorulara çevrimiçi olarak verdikleri cevaplarda ise araştırmacı çevrimiçi olarak soruların cevaplanmasını beklemiştir. Bu sayede katılımcıların herhangi bir kaynaktan yararlanmadıkları konusunda emin olunmuştur. Bununla birlikte matematik eğitimcilerinden cevaplar benzer şekilde toplanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Araştırmanın veri toplama araçlarını ilgili literatürden faydalanarak hazırlanan eğim, değişim oranı ve bu kavramların türev ile olan ilişkisini inceleyen iki aşamadan meydana gelen sorular oluşturmaktadır. Birinci aşama sorular yedi adet yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve ikinci aşama soruları (uygulama soruları) ise birer adet senaryo içeren türev, eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı ilişkisini içeren yedi adet açık uçlu sorudan oluşmaktadır. İkinci aşama sorularda yer alan 1.,2. ve 3. sorulara ait alt boyut sorular bulunmaktadır. Bu alt boyuttaki sorular ile beraber ikinci aşama sorular toplamda 12 sorudan oluşmaktadır.

Veri toplama araçları ilk etapta tez yürütücüsü ve yardımcı araştırmacı tarafından ilgili literatürden yararlanılarak oluşturulmuştur. Hazırlanan veri toplama araçları alanda uzman 3 matematik eğitimcisi tarafından incelenmiştir. Uzman görüşleri doğrultusunda veri toplama araçlarının son hali oluşturularak pilot çalışmaya başlanmıştır.

Tablo 8

Veri Toplama Araçları Hakkında Uzman Görüşleri

Uzman	Birinci Aşama Sorular	İkinci Aşama sorular
1. Uzman	Uygundur.	Soru Kökü Düzeltilmeli
2. Uzman	Uygundur.	Soru Kökü Düzeltilmeli
3. Uzman	Uygundur.	Uygundur.

Birinci aşama sorular yani yarı yapılandırılmış görüşme soruları üzerinde uzmanlar görüş birliğinde olmuştur. Yarı yapılandırılmış görüşme sorularında herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. İkinci aşama sorularda ise 2 matematik eğitimcisi düzeltme verirken diğer matematik eğitimcisi ikinci aşama sorularda herhangi bir düzeltme gerekmediğini belirtmiştir. Düzeltme isteyen matematik eğitimcileri ise dil bilgisi ve soru köklerine düzeltme verirken, soruların içeriği ile ilgili bir düzeltme gerekmediğini belirtmişlerdir. Veri toplama araçlarında yer alan soruların eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları ve bu kavramların birbirleri ile olan ilişkilerine yönelik kavram imajlarını belirlemede yeterli olabileceğini bildirmişlerdir.

Aşağıda pilot çalışmada ve asıl çalışmada kullanılan birinci ve ikinci aşama soruların (uygulama soruları) detaylı bir açıklaması yapılmıştır.

Veri toplama araçları iki aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşama sorular, toplam yedi adet yarı yapılandırılmış görüşme sorularından oluşmaktadır. İkinci aşama sorular ise uygulama soruları olarak nitelendirilen yedi adet sorunun öncülleri ile birlikte toplamda 12 adet sorudan oluşmaktadır. Tablo 9'da, birinci aşama sorular ile ilgili bilgiler yer almaktadır. Bu bilgilerde, soru metinleri ve sorunun sorulma amaçları yer almaktadır. Tablo 10'da, ikinci aşama sorular, yani uygulama soruları ile ilgili bilgiler yer almaktadır. Bu bilgiler, soru metinleri ve öncülleri ile sorunun amaçlarını içermektedir.

Tablo 9

Birinci aşama sorular (yarı yapılandırılmış görüşme soruları)

Soru No	Soru metni	Amaç
1	*Eğim kavramını açıklayınız.*	Eğim kavramını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin kendi tanımları ile açıklaması istenmiştir.
2	*Anlık değişim oranı/değişim oranı kavramı nedir? Açıklayınız.*	Anlık değişim oranı/değişim oranı kavramlarını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin kendi tanımları ile açıklaması istenmiştir. Ayrıca bu soruda anlık değişim oranı ile değişim oranın farkı olup olmadığı sorulmuştur.

3	*Türev kavramını açıklayınız.*	Türev kavramını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin kendi tanımları ile açıklaması istenmiştir. Ayrıca bu soruda türev kavramının matematiksel formel tanımı ile kendi tanımlarının ne ölçüde örtüştüğü sorulmuştur. Bununla beraber türev ifadesinin kendi zihinlerinden ne ifade ettiği sorularak bu kavrama yönelik kavram imajları tespit edilmiştir.
4	*Eğim ile anlık değişim oranı/ değişim oranı kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıldır? Açıklayınız.*	Eğim ile anlık değişim oranı/değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin izah etmeleri istenmiştir. Bu ilişkiye dair bir örnekte istenmiştir.
5	*Eğim ile türev kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıldır? Açıklayınız.*	Eğim kavramı ile türev kavramları arasındaki ilişkiyi ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin izah etmeleri istenmiştir. Ayrıca bu durum ile ilgili örnek istenmiştir.
6	*Anlık değişim oranı/değişim oranı ve türev kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıldır? Açıklayınız.*	Değişim oranı/anlık değişim oranı ile türev kavramları arasındaki ilişkiyi ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve matematik eğitimcilerinin izah etmeleri istenmiştir.
7	Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.	Son soruda ise ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin bu üç kavramın birbirleri ile olan ilişkisini açıklamaları istenmiştir. Böylelikle katılımcıların eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramı ile olan ilişkisine yönelik kavram imajları tespit edilmek istenmiştir

Çalışmanın ilk etabı Tablo 9'da yer alan birinci aşama sorular yani yapılandırılmış görüşme soruları ile gerçekleştirilmiştir. Yarı-yapılandırılmış görüşmeler öğretmen adayları ile ortalama 55 dakikada (en az 50 dakika en çok 60 dakika) gerçekleşmiştir. Bununla beraber matematik eğitimcileri ile ortalama 75 dakikada (en az 55 dakika en çok 90 dakika) gerçekleşmiştir.

Tablo 10

İkinci aşama sorular (uygulama soruları)

Soru No	Soru metni	Amaç
1	*f doğrusal fonksiyon olup bu fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi m=3 tür.*	Araştırmanın bu boyutunda ilk iki soruda ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin eğim kavramına yönelik cevapları istenmiştir.
a-	*Buna göre;* *Koordinat düzleminde f fonksiyonunun olası grafiğini çiziniz.*	Birinci sorunun a şıkkında eğimi belli olan bir doğrusal fonksiyonun olası grafiği koordinat düzleminde çizilmesi istenmiştir. b şıkkında ise günlük yaşam durumlarında yer alan, farklı disiplinlerde (matematik dışında) eğim kavramı hakkında katılımcıların farkındalığı tespit edilmek amaçlanmıştır.
b-	*Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade eder? Açıklayınız.*	
2	*f doğrusal olmayan bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksiyonun bir noktadaki teğetin eğimi m=3'tür.* *Örneğin, f(x)=cos(x)+3x*	İkinci soruda ise birinci sorudan farklı olarak doğrusal olmayan bir fonksiyonun olası grafiğini çizmeleri istenmiştir. Bu durumda katılımcılardan doğrusal olmayan fonksiyonlarda eğim hakkındaki kavram imajları tespit edilmek istenmiştir. *a* öncülünde eğimi belli olan doğrusal olmayan bir fonksiyon örneği vermeleri istenmektedir. *b* öncülünde tıpkı 1b de olduğu gibi doğrusal bir fonksiyonun eğimini farklı disiplinlerde ve günlük yaşam durumlarında yorumlamaları istenmiştir. *c* öncülünde ise bu 1. ve 2. Sorudaki eğimler hakkındaki varsa farkları açıklamaları istenmiştir. Böylelikle eğim kavramı hakkında katılımcıların kavram imajları tespit edilmek istenmiştir.
a-	*fonksiyonun 0 noktasındaki teğetinin eğimi 3 tür. Bu fonksiyona uygun bir fonksiyon örneği veriniz ve olası grafiğini çiziniz.*	
b-	*Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade etmektedir? Açıklayınız.*	
c-	*Birinci sorudaki doğrusal fonksiyonun eğimi ile bu sorudaki fonksiyonun eğimi arasında sizce bir farklılık var mıdır?*	

3	*g bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksiyonun x= 3 noktasındaki anlık değişim oranı/değişim oranıdır. Buna göre;*	İkinci aşama sorulardan üçüncü soruda değişim oranı/anlık değişim oranı hakkında katılımcılardan cevapları istenmiştir. Ayrıca bu soruda üç tane alt boyut bulunmaktadır. Eğim ile ilgili olan ilk iki soruda olduğu gibi doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonlardaki değişim oranı/anlık değişim oranı arasındaki farklılıklar istenmiştir.
a-	*g bir doğrusal fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranını/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?*	
b-	*g bir doğrusal olmayan bir fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranı/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?*	Anlık değişim/değişim oranı kavramları arasındaki varsa nasıl bir ilişki ve bu durumu hakkında katılımcıların açıklamaları ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları hakkında kavram imajları tespit edilmek istenmiştir.
c-	*Sizce a ve b şıklarındaki fonksiyonların anlık değişim oranlarında bir farklılık var mıdır? Açıklayınız.*	
4	*Arife ve Batuhan* $g(x) = x^3 + 4x$ *fonksiyonu üzerine bir tartışma gerçekleştirmektedir. Arife bu fonksiyonun her bir noktasındaki anlık değişim oranın hesaplanabileceği, örneğin x=2 noktasındaki anlık değişim oranının 16 olduğunu ve bunun da bu noktadaki türeve eşit olduğunu ifade etmiştir. Batuhan ise bu ikisinin neden eşit olduğunu anlamadığını, bu durumun anlamsız olduğunu iddia etmiştir. Siz Arife' nin yerinde olsaydınız, Batuhan'a bu ilişkiyi nasıl izah edersiniz? Açıklayınız.*	Dördüncü soruda verilen bir senaryoda ilköğretim matematik öğretmen adaylarına türev ve anlık değişim oranı/değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklamaları istenmiştir. Matematik eğitimcilerinden ise bu durum sınıfta böyle bir durum olduğunda ise bu durumu öğrencilerine nasıl açıklayabileceği sorulmuştur. Türev ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları tespit edilmek istenmiştir.
5	*Ayşe ve Bilge türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Ayşe* $\boxed{f(x) = x^2}$ *fonksiyonun x=2 noktasındaki <u>türevin 4</u> olduğunu ve bunun da o noktadan geçen teğet <u>doğrusunun eğimine</u> eşit olduğunu ifade etmiştir. Bilge ise x=2 noktasında bu ikisinin birbirine neden eşit olduğunu anlamadığını ve anlamsız bir durum olduğunu belirtmiştir. Size Ayşe'nin yerinde olsaydınız, Bilge'ye bu ilişkiyi nasıl anlatırdınız? Açıklayınız.*	Beşinci soruda ise bir önceki soru olan durum ilköğretim matematik öğretmen adaylarından eğim ve türev kavramları arasındaki ilişkiyi açıklamaları istenmiştir. Matematik eğitimcilerinden ise bu ilişkiyi öğrencilerine nasıl açıkladığı sorulmuştur. Bu durumda katılımcıların eğim ve türev kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları tespit edilmek istenmiştir.

6	*Ali ve Bora türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Ali bir fonksiyonun belirli bir noktasındaki değişim oranı ile o noktadan geçen teğet doğrusunun eğiminin aynı şey olduğunu ifade etmektedir. Örneğin, Ali, Bora'ya* $\boxed{f(x)=x^2}$ *fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının 4 olduğunu ifade etmektedir. Bora ise anlık değişim oranının neden eğime eşit çıktığını anlamadığını ifade etmiştir. Hatta bu durumun anlamsız bir şey olduğunu iddia etmiştir. Siz Ali'nin yerinde olsaydınız, Bora'ya nasıl yardımcı olurdunuz ve eğim ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız?*	Bu sorudaki senaryoda ise eğim kavramı ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları tespit edilmek istenmiştir. Matematik eğitimcilerinde sınıfta böyle bir durumda öğrencilerine bu durumu nasıl açıkladıkları istenmiştir.
7	*Zeynep ve Yeliz türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Zeynep bir noktadaki türevin, o noktadaki değişim oranı ile o noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimine eşit olduğu belirtmiştir. Zeynep, Yeliz'e* $\boxed{f(x)=x^2}$ *fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının, türevinin ve eğiminin 4'e eşit olduğunu ifade etmiştir. Yeliz ise x=2 noktasındaki eğimin türeve eşit olabileceğini iddia etmiştir. Siz Zeynep'in yerinde olsaydınız, Yeliz'e nasıl yardımcı olurdunuz ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız*?	Son soruda ise ilköğretim matematik öğretmen adayları ve matematik eğitimcilerinin bu üç kavramın birbirleri ile olan ilişkisini açıklamaları istenmiştir. Bu bağlamda araştırmaya konu olan üç kavram hakkındaki ve bu kavramlardan eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramı ile olan ilişkisine yönelik kavram imajları tespit edilmek istenmiştir.

Çalışmaya ait veriler ikinci aşama sorular yani uygulama soruları ile toplanarak tamamlanmıştır. Uygulama soruları kendi içinde iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşama da eğim ve değişim oranı kavramları ile ilgili soruları içeren 1.,2., ve 3. soruların cevapları istenmiştir. Daha sonra ilköğretim matematik öğretmen adaylarından senaryo içeren sorular yani eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları ile ilgili ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi irdeleyen 4.,5.,6.,7. soruların cevaplamaları istenmiştir. İkinci aşamadaki 1., 2., 3. sorularını ilköğretim matematik öğretmen adayları ortalama 35 dakikada (en az 30 dakika en çok 40dakika) yanıtlamışlardır. Bununla beraber 4., 5., 6., 7. sorularına ortalama 45 dakikada (en az 40 dakika en çok 50dakika) cevaplamışlardır.

Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmada kullanılan veri toplama araçları ile elde edilen verilerin nasıl analiz edildiğinden bahsedilmiştir.

Çalışmanın pilot uygulamasında, birinci aşama soruların oluşturduğu yarı yapılandırılmış görüşmeler her bir öğretmen adayı ile ortalama 45 dakika olacak şekilde yapılmıştır. Pandemi koşulları dikkate alınarak görüşmeler çevrimiçi bir şekilde görüntü ve ses kaydı olacak şekilde kayıt altına alınmıştır. İkinci aşama sorulara ait cevaplar benzer şekilde çevrimiçi olarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarından görüntü ve ses kaydı alınarak cevap vermeleri istenmiştir. İkinci aşama sorulara ait cevaplar ilköğretim matematik adaylarından dijital ortamda teslim alınmıştır. Öğretim elemanı ile yüz yüze olacak şekilde yarı yapılandırılmış görüşme ses kaydına alınarak gerçekleştirilmiştir. İkinci aşama sorular ise öğretim elemanından yazılı olarak teslim alınmıştır.

Birinci aşama sorular, ilköğretim matematik öğretmen adayları ile ses ve görüntü kaydına alınan yarı yapılandırılmış görüşmeler araştırmacı tarafından transkript edilerek analiz edilmiştir. Analizler eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları hakkında kavram imajlarını tespit edebilmek amacıyla her bir kavram için analiz çerçevesi kullanılmıştır. Aynı şekilde öğretim elemanı ile yapılan görüşme ve ses kaydına alınan yarı yapılandırılmış görüşmeler transkript edilerek analiz edilmiştir. Benzer şekilde öğretim elemanına ait veriler her bir kavram için belirlenen analiz çerçevesi kullanılarak kavram imajları ortaya çıkarılmıştır.

İkinci aşama sorularda ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının yazılı olarak verdikleri cevapları incelenmiştir. İkinci aşama sorulara verilen cevaplar çevrimiçi ortamda gerçekleştirilmiştir. Birinci aşama soruları içeren yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve ikinci aşama sorularda verilen cevaplar incelenerek ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları analiz çerçeveleri kullanılarak ortaya çıkarılmıştır. Benzer şekilde öğretim elemanına ait birinci ve ikinci aşama sorulara verdiği cevaplar analiz çerçeveleri kullanılarak tespit edilerek Tall ve Vinner (1981)' a göre kavram imajları belirlenmeye çalışılmıştır.

Çalışmanın uygulama boyutunda ise, birinci aşama soruların oluşturduğu yarı yapılandırılmış görüşmeler her bir öğretmen adayı ile ortalama 55 dakika olacak şekilde yapılmıştır. Pandemi koşulları dikkate alınarak pilot uygulamaya benzer şekilde görüşmeler çevrimiçi bir şekilde görüntü ve ses kaydı olacak şekilde kayıt altına alınmıştır. Bununla beraber çalışmada 3 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yüz yüze gerçekleştirilmiştir. Yüz yüze gerçekleştirilen görüşmelerde aynı şekilde ses ve video kaydı alınmıştır. İkinci aşama sorular ilköğretim matematik öğretmen adaylarından iki etapta toplanmıştır. İlk etapta ilk 3 sorunun cevabı istenmiştir. Bir müddet ara verildikten sonra senaryo içeren son 4 sorunun cevabı istenmiştir. Araştırmacı katılımcılarla sorular cevaplanırken aynı ortamda kalmıştır. Diğer 4 öğretmen adayı ile çevrimiçi olarak ses ve görüntü kaydı alınmıştır. İkinci aşama sorulara ait cevaplar benzer şekilde çevrimiçi olarak 4 ilköğretim matematik öğretmen adayından görüntü ve ses kaydı alınarak cevap vermeleri istenmiştir. Çevrimiçi verilen ikinci aşama soruları için öğretmen adaylarının kameralarının açık olması istenmiş ve cevapları kamera önünde vermeleri istenmiştir. Çevrimiçi gerçekleşen görüşmeler için ikinci aşama sorulara ait cevaplar ilköğretim matematik öğretmenlerinden dijital ortamda teslim alınmıştır. İkinci aşama sorular ilköğretim matematik öğretmen adaylarından ilk etapta ilk 3 soruyu cevaplamaları daha sonra biraz ara verilmiştir. Ara verildiğinde dahi kameranın açık kalmasına özen gösterilmiştir. Daha sonra senaryo içeren son 4 sorunun cevaplanması istenmiştir.

Katılımcılardan 2 matematik eğitimcisi ile yüz yüze olacak şekilde yarı yapılandırılmış görüşme ses ve video kaydına alınarak gerçekleştirilmiştir. Diğer 2 matematik eğitimcisi ile pandemi koşulları dikkate alınarak görüşmeler çevrimiçi olacak şekilde ses ve video kaydına alınmıştır. İkinci aşama sorular ise tüm matematik eğitimcilerinden dijital olarak teslim alınmıştır.

Birinci aşama sorular ilköğretim matematik öğretmen adayları ile ses ve görüntü kaydına alınan yarı yapılandırılmış görüşmeler araştırmacı tarafından transkript edilerek analiz edilmiştir. Analizler eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları hakkında kavram imajlarını tespit edebilmek için her bir kavram için analiz çerçevesi kullanılmıştır. Aynı şekilde matematik eğitimcileri ile yapılan görüşme ses ve video kaydına alınan yarı yapılandırılmış görüşmeler transkript edilerek analiz edilmiştir. Benzer şekilde matematik eğitimcilerine ait veriler her bir kavram için belirlenen analiz çerçevesi kullanılarak kavram imajları ortaya çıkarılmıştır.

İkinci aşama sorular ise ilköğretim matematik öğretmenlerinin yazılı olarak verdikleri cevapları incelenmiştir. İkinci aşama sorulara verilen cevaplar çevrimiçi ortamda gerçekleştirilmiştir. Birinci aşama soruları içeren yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve ikinci aşama sorularda verilen cevaplar incelenerek eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları analiz çerçeveleri kullanılarak ortaya çıkarılmıştır. Benzer şekilde matematik eğitimcilerine ait birinci ve ikinci aşama sorulara verdiği cevaplar analiz çerçeveleri kullanılarak tespit edilerek Tall ve Vinner (1981)' a göre kavram imajları belirlenmeye çalışılmıştır.

Araştırma probleminde yer alan matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramı hakkındaki kavram imajları Tall ve Vinner (1981) kuramsal çerçevesine göre incelenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve açık uçlu sorulardan elde edilen verilerde yer alan eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramlarına ait kavram imajları farklı analiz çerçeveleri bağlamında incelenerek matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kavram imajları tespit edilmiştir.

Kuramsal çerçeve olarak, Tall ve Vinner (1981) kavram imajı ve kavram tanımı kuramsal çerçevesi ışığında çalışmada yer alan kavramlara ait kavramsal çerçeveler kullanılmıştır. Çalışmanın kuramsal çerçeve boyutunda yer alan kavramsal çerçeveler yöntem bölümünde analiz çerçeveleri olarak açıklanmıştır.

Eğim Kavramı Analiz Çerçevesi

Eğim kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar ve analiz çerçeveleri çalışmanın kavramsal çerçevesi ve ilgili araştırmalar kısmında bahsedilmiştir. Eğim kavramı için matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmenlerinin kavram imajları Moore-Russo, ve ark,. (2011) yaptıkları çalışmada ortaya koydukları analiz çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Moore-Russo, ve ark,. (2011) analiz çerçevesinde yer alan kodlar daha açıklayıcı ve detaylı olduğundan dolayı bu çerçeve kullanılmıştır. Moore-Russo ve ark.,(2011) ‘dan uyarlanan eğim kavramı için analiz çerçevesi incelendiğinde eğim kavramı ile ilgili 11 tane kategori bulunurken bu kategorilere ait 22 tane kod bulunmaktadır. Yarı yapılandırılmış görüşme sorularında birinci, dördüncü, beşinci ve yedinci sorularla ile ikinci aşama sorularda yer alan birinci, ikinci, dördüncü ve yedinci sorularda eğimle ilgili sorular Tablo 11 de yer alan analiz çerçevesine göre analiz edilmiştir ve kodlar oluşturulmuştur. Ayrıca elde edilen kodlar başka bir uzman ile de karşılaştırılarak verilerin uyum yüzdesine bakılmış verilerin güvenirliği tespit edilmiştir.

Tablo 11

Eğim Kavramı Için Analiz Çerçevesi

Kategori	Eğim:	Kod
Geometrik oran (G)	“Rise over run” y’deki değişimlerin x’deki değişimlere bölümü	G1
	Yatay yer değiştirmeye (mesafe, değişiklik) göre dikey yer değiştirme (mesafe, değişiklik)	G2
Cebirsel Oran (C)	y bölü x değişimi	C1
	Cebirsel ifadelerle oranın gösterimi, $\frac{y2-y1}{x2-x1}$	C2
Fiziksel özellik (F)	Genellikle "diklik" gibi ifadeler kullanılarak tanımlanan çizginin özelliği (“eğim”, “adım”, vb.); “Ne kadar yükseğe çıkıyor” veya “yukarı çıkıyor”	F
Fonksiyonel Özellik (f)	Değişkenler arasında sabit değişim oranı	f

Parametrik Katsayı (PK)	y= *m*x+b eşitliğindeki *m* katsayısı	PK
Trigonometrik Anlayış(T)	Bir doğrunun eğim açısının tanjantı	T1
	Bir vektörün yön bileşeni	T2
Kalkülüs Anlayış (K)	Limit	K1
	Türev	K2
	Bir noktada bir eğriye teğet çizgi	K3
Gerçek Dünya Durumu (GD)	Statik, fiziksel durum (örn. tekerlekli sandalye rampası)	GD1
	Dinamik, işlevsel durum (ör. mesafeye karşı zaman)	GD2
Belirleyici Özellik (B)	Paralel, dik çizgileri belirleyen özellik	B1
	Bir nokta verildiğinde, bir çizginin belirlenebileceği özellik	B2
Davranış Göstergesi(D)	Çizginin artan, azalan, yatay eğilimlerini gösteren işaretli gerçek sayı.	D1
	Doğrunun artış/azalma miktarını gösteren büyüklüğe sahip gerçek sayı.	D2
	Pozitif veya negatif ise doğruyu gösteren gerçek sayı, x eksenini kesmelidir.	D3
Doğrusal Sabit (S)	Ötelemeden etkilenmeyen özellik	S1
	“Düz” rakamlara özgü sabit özellik	S2
	Temsilden bağımsız sabit özellik	S3

Yarı yapılandırılmış görüşme sorularında ve uygulama sorularındaki eğim kavramı ile ilgili 1. soru katılımcılara sorulmuştur. Katılımcıların cevapları analiz edilmiştir.

Katılımcı Ö4’ ün eğim kavram kavramı hakkındaki kavram imajı analiz edilirken yukarıdaki analiz çerçevesi kullanılmıştır. Bu durum şu şekilde analiz edilmiştir. Katılımcı Ö4’ün eğim kavramı hakkında “*dikeydeki değişimin yataydaki değişime oranıdır eğim aslında.”* ifadesi dikkate alındığında, “Geometrik Oran” kategorisinde *dikeydeki değişimlerin yataydaki değişimlere oranı* durumuna karşılık gelen G2 koduna sahip olduğu görülmüştür.

Katılımcı ME1’ in eğim kavramı hakkındaki kavram imajı analiz edilirken aynı şekilde Tablo11’de yer alan analiz çerçevesi kullanılmıştır. Bu durum örneklendirilecek olursa katılımcı ME1 eğim kavramı hakkında *tanjant alfa* ifadesini kullandığı için ME1’in eğim kavramı hakkındaki kavram imajının “Trigonometrik Anlayış” kategorisinde yer alan Bir *doğrunun eğim açısının tanjantı* durumuna karşılık gelen T1 koduna sahip olduğu belirlenmiştir.

Değişim Oranı/ Anlık Değişim Oranı Kavramı Analiz Çerçevesi

Değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar ve analiz çerçeveleri çalışmanın kavramsal çerçevesi ve ilgili araştırmalar kısmında bahsedilmiştir. Değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı için matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmenlerinin kavram imajları ise Hauger (1995) tarafından ortaya konulan analiz çerçevesi ile incelenmiştir. Hauger (1995) değişim oranı kavramını; global (evrensel), interval (aralıklı), and point-wise (noktasal) olarak öğrencilerin kavramsallaştırmalarını tanımlamıştır. Evrensel (global) doğası gereği nitelikseldir, aralıklı (interval) ve noktasal (point-wise) olarak her ikisi de niceldir. Bunları Hauger (1995) şu şekilde açıklamıştır:

Tablo 12

Değişim Oranı Kavramı Için Analiz Çerçevesi

Kategori	Değişim oranı;	Kod
Evrensel (Global)	Grafiğin genel özelliklerini değerlendirir: artan, azalan ve değişen oranları şeklindedir.	D1
Aralıklı (Interval)	Ortalama değişim oranının yönlerini ele alırlar.	D2
Noktasal (Point-wise)	Anlık değişim hızına katılmasını içerir.	D3

Değişim oranı ile ilgili kodlar ise D1, D2 ve D3 olacak şekilde belirlenmiştir. Matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajları yarı yapılandırılmış sorularda yer alan ikinci, dördüncü, altıncı ve yedinci sorular ile ikinci aşama sorularda yer alan üçüncü, dördüncü, altıncı ve yedinci sorular Hauger (1995) tarafında ortaya konulan analiz çerçevesine göre incelenmiştir. Eğim kavramında olduğu gibi kodların uyum yüzdesi başka bir uzman tarafından ortaya çıkarılan kodlar ile karşılaştırılarak güvenirliği tespit edilmiştir.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajı analiz edilirken Tablo12'de yer alan analiz çerçevesi kullanılmıştır. Bu analiz durumu örneklendirilecek olursa; katılımcı Ö1'e ait "*Burada zaman olabilir veya hız olabilir birim önemli değil. Ama tam olarak anımsayamadım. Ama fizikte aklıma geldi, ivmede kullanıyoruz ama bunu ifade edemiyorum."* İfadesi dikkate alındığında "Noktasal" kategoride yer alan "Anlık değişim hızına katılmasını içerir" durumuna karşılık gelen D3 koduna sahip olduğu belirlenmiştir.

Katılımcı ME2'nin değişim oranı hakkında sahip olduğu kavram imajı ilköğretim matematik öğretmen adaylarında olduğu gibi Tablo11' de yer alan analiz çerçevesi kullanılarak tespit edilmiştir. Bu analiz durumu örneklendirilecek olursa, matematik eğitimcisi ME2' ye ait "*ancak birinci ve ikinci türev de işte hızla ivmede bu şekilde türevin fiziksel yorumlanmasında öğrencinin de anlık değişim oranını değişim oranı daha iyi anladığını görüyorum"* ifadesi dikkate alındığında "Noktasal" kategoride yer alan "Anlık değişim hızına katılmasını içerir" durumuna karşılık gelen D3 koduna sahip olduğu belirlenmiştir. Birinci aşama ve ikinci aşamada değişim oranı kavramı ile ilgili olan 2. ve 3. sorular katılımcılara sorulmuş ve analiz edilmiştir.

Türev Kavramı için Analiz Çerçevesi

Türev kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar ve analiz çerçeveleri de çalışmanın kavramsal çerçevesi ve ilgili araştırmalar kısmında bahsedilmiştir. Türev kavramı için matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kavram imajları Zandieh (2000) 'in yaptığı çalışma ile ortaya koyduğu analiz çerçevesi kullanılarak belirlenmiştir. Bu analiz çerçevesinin kullanımına tez yürütücüsü ve yardımcı araştırmacı tarafından karar verilmiştir. Ayrıca ilgili analiz çerçevesinde yer alan kodların daha açıklayıcı ve detaylı olduğu söylenebilir.

Tablo 13

Türev Kavramı Için Analiz Çerçevesi

	Bağlamlar				
	Grafiksel	Sözel	Fiziksel	Sembolik	Diğer
Süreç-nesne çiftleri	Eğim	Oran	Hız	Farkların Bölümü	
Oran					
Limit					
Fonksiyon					

Tablo 13'de Zandieh (2000) tarafından geliştirilen türev kavramının analiz çerçevesi bulunmaktadır. Zandieh (2000) geliştirdiği çerçeveyi, ders kitaplarında türev kavramının nasıl tanımlandığını inceleyerek ve matematik eğitimcileri, matematikçileri, kalkülüs öğrencilerini sınıf ortamında gözlemleyerek onların türev kavramı hakkındaki anlamlandırmalarından oluşturduğunu belirtmiştir. Tablo13'de yer alan her hücre türev kavramının bir yönünü temsil etmektedir. Zandieh (2000)'in oluşturduğu kavramsal çerçevede, türev kavramı şu şekillerde:

a) grafiksel olarak bir noktadaki eğriye teğet doğrunun eğimi,

b) sözel olarak anlık değişim oranı,

c) fiziksel olarak hız veya sürat,

d) sembolik olarak farkların limiti olarak sunulabilmektedir.

Türevin formel tanımı düşünüldüğünde; $f'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$

Zandieh (2000)'in türev ile ilgili kavramsal çerçevesi bağlamında 15 adet kod tespit edilmiştir. Bu kodlar süreç nesne çiftleri sütununda yer alan 5 kod (grafiksel eğim, sözel oran, fiziksel hız, sembolik farkların bölümü ve diğer) ile süreç nesne çiftleri satırında yer alan 3 kod (oran, limit ve fonksiyon) 3x5'lik matris dikkate alınarak belirlenmiştir.

İlköğretim matematik öğretmenlerinin türev kavramı hakkında sahip oldukları kavram imajları Tablo13' de yer alan analiz çerçevesi kullanılarak tespit edilmiştir. Bu analize dair örnek olarak katılımcı Ö5'e ait "*türev deyince aklıma direk eğim geliyor. Aslında değişen eğim geliyor. Analiz dersinden kabaca teğetin bir noktadaki eğimidir türev. Türev kavramını f' dx olabilir dy/dx şeklinde ifade edebilirim. Türev kavramında aslında biz limitten faydalanıyoruz. Yani bir noktaya yaklaşıyoruz sağdan ve soldan şeklinde yaklaşmış oluyoruz. Aslında çok küçük parçalar halinde yaklaşıyoruz. Yani aslında biz burada bir noktadaki türeve bakıyoruz."* İfadesi analiz edildiğinde katılımcı Ö5'e ait kavram imajı Tablo 14'te betimlenmiştir.

Tablo 14

Katılımcı Ö5'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran					◎
Limit	◎	◎			
Fonksiyon	◎				

Katılımcı Ö5 türev kavramı hakkındaki kavram imajı incelendiğinde limit satırındaki kavram imajının içinin boş olduğunu görülmüştür. Bu durum Ö5'e ait türev kavramı hakkında formel tanım verememiştir ve sadece sözel olarak ifade ettiği görülmüştür. Katılımcı Ö5 eğer türevin formel tanımı düşünüldüğünde; $f'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ tanımını kullanmış olsaydı limit satırındaki hücre dolu olacaktı.

Katılımcı ME3' e ait türev kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajı benzer şekilde tespit edilmiştir. Bu durum örnek Tablo 15'te yer almaktadır.

Tablo 15

Katılımcı ME1'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
	Grafiksel	Sözel	Fiziksel	Sembolik	Diğer
Süreç-nesne çiftleri	Eğim	Oran	Hız	Farkların Bölümü	
Oran					
Limit					●
Fonksiyon					◎

Katılımcı ME1 türev kavramına derslerinde epistemolojik olarak değindiğini ifade etmiştir. Matematik tarihini dikkate alarak bu kavram ile ilgili öğrencilerin zihinlerinde türev kavramını anlamlandırmalarının daha yararlı olacağını düşünmektedir. Bu bağlamda bakıldığında katılımcı ME1'in türev kavramı ile ilgili kavram imajı süreç-nesne çiftlerinden diğer kategorisinde yer almaktadır. Diğer kategorisinde fonksiyon hücresi boş olmasının yanında limit hücresinin dolu olduğu görülmüştür. Şöyle ki katılımcı ME1 limit kavramının türevi tanımlamada önemli bir öncül olduğunu ifade etmiştir. Dolayısıyla bu hücre dolu olarak tespit edilmiştir. Fonksiyon hücresinin boş olması ise ME1'in fonksiyonu sadece sözel olarak ifade etmiştir. Türev kavramı ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının türev hakkındaki kavram imajları yarı yapılandırılmış görüşme sorularında üçüncü, beşinci, altıncı ve yedinci sorularda tespit edilirken ikinci aşama sorular olan uygulama sorularında ise dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci sorularda tespit edilmiştir. Eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarında olduğu gibi kodların uyum yüzdesi başka bir uzman tarafından ortaya çıkarılan kodlar ile karşılaştırılmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik için yapılan çalışmanın inanırlığı ve aktarılabilirliği ön planda iken güvenirlik için ise yapılan çalışmanın kendi içinde tutarlı ve doğrulanabilir olması ön planda olmaktadır (Merriam, 2015; Punch, 2005; Yıldırım ve Şimşek, 2016). İnanırlık, yapılan çalışmadaki verilere ait bulguların dış dünya ile uyumlu olup olmadığı ile ilgilidir. Elde edilen bulgular mevcut durumla uyumlu mudur, bulgular gerçekten de olgulara işaret ediyor mu gibi sorulara cevap aramaktadır (Merriam, 2015). Bu bağlamda çalışmanın inanınırlığı için bulguların teyit edilmesi, açık ve net bir şekilde ortaya konulması önem arz etmektedir. Bu araştırmada verilerin analizi aşamasında birden fazla uzman tarafından aynı veriler kodlanmıştır. Kodlamalar arasındaki tutarlılık puanlayıcılar arası güvenirlik ile kontrol edilmiştir.

Nitel araştırmalarda inanırlığı artırmanın yollarından birisi de uzman kontrolünde gerçekleşmiş olmasıdır (Merriam,2015; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu bağlamda yapılan çalışmadaki tüm aşamalar birden fazla uzman tarafından kontrol edilerek değerlendirilmiştir. Yapılan çalışmada kullanılan çeşitli veri toplama araçlarından elde edilen bulguların tutarlı olması, birbirini desteklemesi ayrıca verilerin araştırmacı tarafından farklı zamanlarda yeniden kodlanması ve puanlayıcılar arası güvenirliğin yeterli çıkması araştırmanın tutarlılığını desteklemektedir.

Araştırma kapsamında eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları için veri toplama aracı kapsamında belirlenen kavram imajı kodları, farklı uzmanlar tarafından ayrı ayrı bağımsız olarak kodlanmış ve kodlayıcılar arasında farklılık olup olmadığını belirlemek için kodlayıcılar arası uzlaşma katsayısı hesaplanmıştır. Uzlaşma katsayısı, araştırmada kullanılan analiz çerçevelerinde yer alan kodların bütünü ele alınarak elde edilmiştir.

Güvenirlik=Uzlaşma sayısı/(Uzlaşma sayısı + Uzlaşmama Sayısı)

Güvenirlik=19/(19+4)

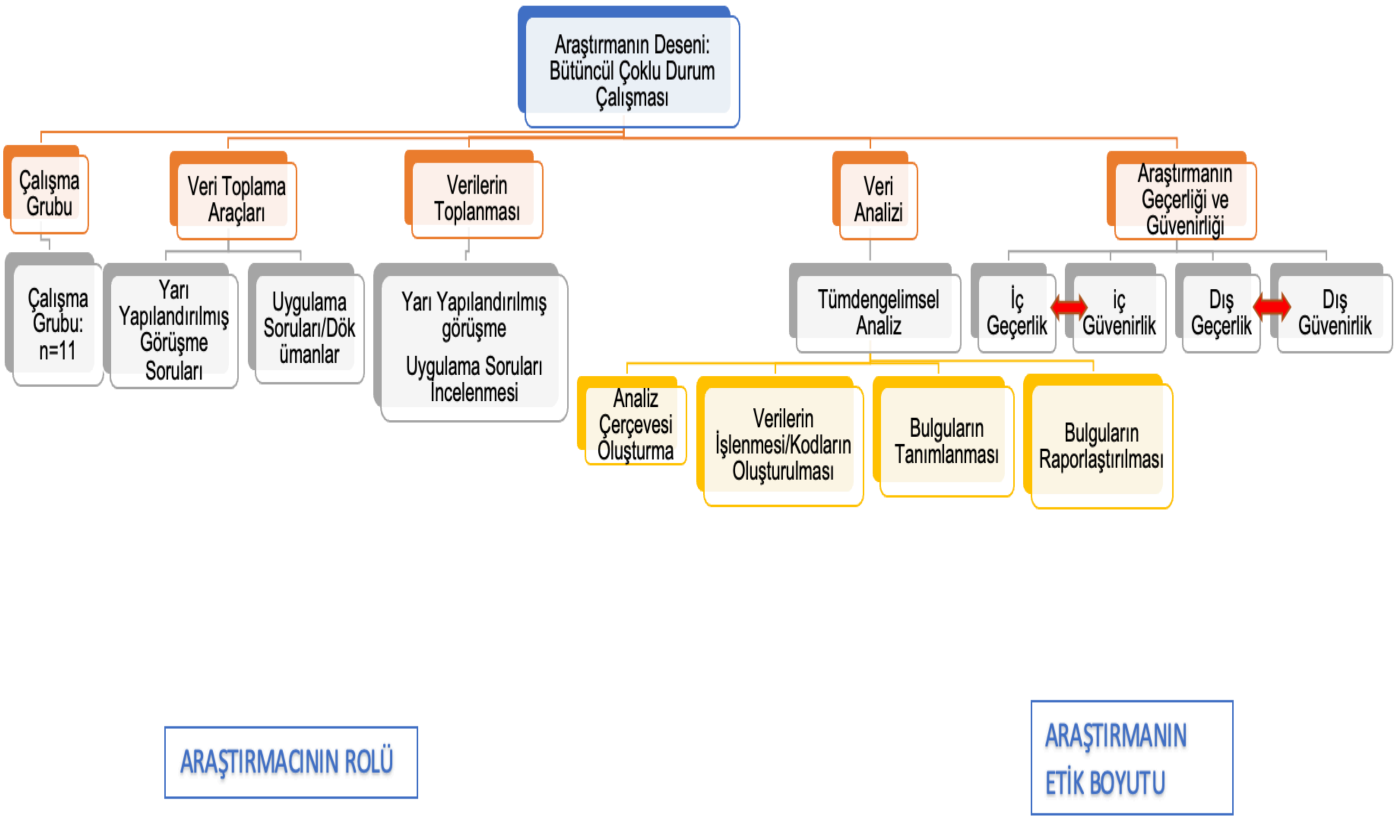
Güvenirlik=0.82

Kodlayıcılar arası uyum 0.82’dir ve Fahy (2001)’e göre 0.70’in üzerindeki değerler kabul edilebilir niteliktedir.

Nitel araştırmalarda dış geçerlilik araştırmaya ait sonuçların benzer durumlarda benzer sonuçların elde edilmesi aktarılabilirliği ile ilgilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu açıdan dış geçerliliği kontrol edebilmek için, amaçlı örnekleme yapılmalıdır ve sonuçlar ayrıntılı bir şekilde analiz edilmelidir. Araştırmada seçilen çalışma grubu amaçlı örnekleme ile seçilmiştir ve araştırmaya ait bulgular kanıtlarla ve alıntılarla desteklenerek detaylı bir şekilde betimlenmiştir.

Şekil 19

Araştırmanın Yöntem Bölümüne İlişkin Akış Şeması



Bölüm 4

Bulgular, Yorumlar ve Tartışma

Bu bölümde araştırmaya ilişkin problemlere ait bulgular sunulmuştur.

Araştırmada alt problemlere ait bulgulara Tablo 16'da hangi soru ile ulaşılmaya çalışıldığı gösterilmiştir.

Tablo 16

Alt Problemler Ve Araştırma Soru Numaraları

Araştırmanın Alt Problemleri	Sorular
1. ve 5. Alt problemler (I.Eğim)	1. Aşama 1. Soru 2. Aşama 1.,2.,5. ve 7. sorular
2. ve 6. Alt problemler (II.Değişim Oranı)	1. aşama 2. Soru 2. aşama 3., 4., 6. ve 7. sorular
3 ve 7. Alt problemler (III.Türev kavramı)	1. Aşama 4. soru 2. Aşama 4. ve 7. soru
4. ve 8. Alt problemler (I,II,III arasında ilişki)	1. Aşama 3., 5., 6.,7. soru 2. Aşama 7. Soru

Aşağıda araştırmanın alt problemlerine göre toplanan veriler Tall ve Vinner (1981) 'a ait kavram imajı kavramsal çerçevesinde analiz edilmiştir. Ayrıca eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramı için oluşturulan analiz çerçevesi ile kavram imajları tespit edilmiştir.

Araştırmaya ait alt problemler iki şekilde incelenmiştir. İlk olarak ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler analiz edilmiş, öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik kavram imajları analiz çerçeveleri kullanılarak ortaya çıkarılmıştır. Analiz çerçevesindeki elde edilen kodlar iki uzman araştırmacı tarafından betimlenmiştir. İkinci olarak Analiz 1 dersinden sorumlu matematik eğitimcileri ile yapılan görüşmede de aynı yol izlenmiştir.

Daha sonra ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ikinci aşama sorularına verdikleri cevaplar incelenerek eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik imajları araştırmacı ve tez yürütücüsü tarafından yine analiz çerçevesi kullanılarak betimlenmiştir. Bu durum matematik eğitimcilerinin verdiği ikinci aşama sorularına da uygulanmıştır. Aşağıda bu durum detaylı bir şekilde tablolarda açıklanmıştır.

1. İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim Kavramı Hakkındaki Kavram İmajları

Yedi öğretmen adayı ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler ve uygulama sorularından elde edilen verilere göre öğretmen adaylarının eğim kavramı hakkındaki kavram imajları Tablo 17' de incelenmiştir.

Tablo 17

İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Eğim Kavramı Hakkındaki Kavram Imajları

Öğretmen	Kavram İmajları													
adayı	G1	G2	C1	C2	F	f	PK	T1	K1	K2	K3	GD1	GD2	D3
Ö1	X		X				X	X				X	X	
Ö2	X	X							X	X		X	X	
Ö3		X					X				X	X		
Ö4		X	X	X		X	X	X			X	X		
Ö5		X	X			X	X	X				X		
Ö6	X	X				X		X			X	X		X
Ö7	X	X										X		X

İlköğretim matematik öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler betimlendiğinde eğim kavramı ile ilgili kavram imajları Tablo 17' de betimlenmiştir. Yedi öğretmen adayının eğim kavramı hakkındaki kavram imajları incelendiğinde öğretmen adaylarının "*Gerçek dünya durumu*" kategorisinde yer alan *Statik, fiziksel durum (örn. tekerlekli sandalye rampası)* GD1 imajına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum öğrencilerin günlük hayatta eğim ile ilgili farkındalığa sahip olduğu söylenebilir. Katılımcı Ö4 diğer birinci sınıfta öğrenim görmektedir ve de Analiz 1 dersini uzaktan eğitim ile birlikte almıştır. Bununla beraber Ö4' ün diğer katılımcılara göre eğim kavramı ile ilgili daha fazla kavram imajına sahip olduğu söylenebilir. Şöyle ki katılımcı Ö4 eğim kavramını farklı kategorilerde tanımlayabilmiştir. Bu kategoriler Geometrik Oran(G2), Cebirsel Oran (C1, C2), Trigonometrik (T1) ve Fonksiyonel (f) olarak örnek gösterilebilir.

A: Eğim nedir? Eğim kavramını nasıl açıklarsın?

Ö4: Hımm… Eğim kavramı denince aklıma diklik oranı geliyor. Eğim aslında y lerdeki farkın x lerdeki değişime oranına denir yani dikeydeki değişimin yataydaki değişime oranıdır eğim aslında.

A: Peki başka ne söylemek istersin eğim kavramı ile ilgili?

Ö4: Günlük hayattan örnek versem uygun olur mu?

A: Nasıl istersen

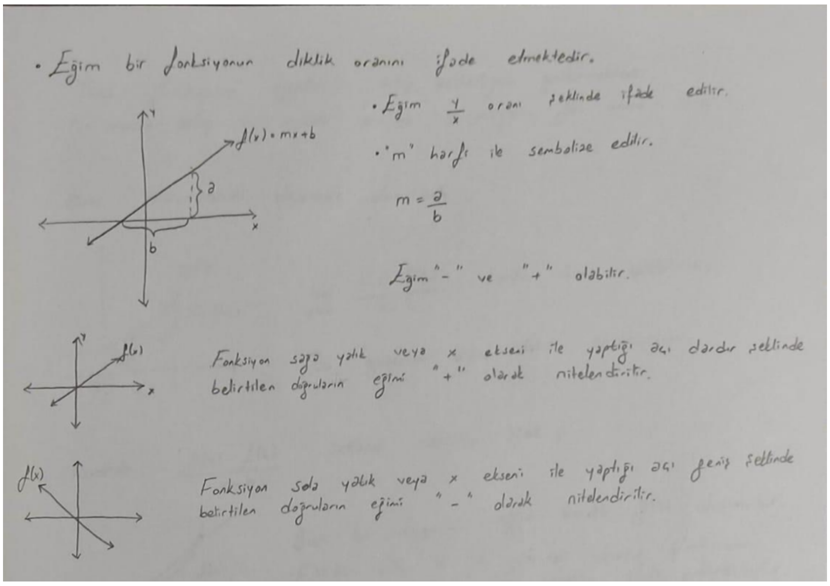
Ö4: O zaman şöyle ifade etsem. Eğim günlük hayatta evlerin yapımında mesela banyoda su gideri için eğimi dikkate almamız gerekir yoksa su birikintisi olur. Yani genelde inşaat aklıma geliyor.

A: Peki bu ifadelerini yani eğim hakkındaki söylediğin ifadeleri çizebilir misin?

Ö4: Hımm... Biraz düşünmem gerekecek. Aslında çizebilirim…

Şekil 20

Ö4'e Ait Eğim Kavramı Hakkındaki Gösterimi



Yukarıdaki diyalog dikkate alındığında Ö4 burada eğim kavramı ile ilgili "Gerçek dünya durumu" kategorisinde yer alan Statik, fiziksel durum (örn. tekerlekli sandalye rampası) GD1 kodunda yer alan imaja sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca Ö4' ün sahip olduğu "Cebirsel oran" olarak ise $y\, bölü\, x$ değişimi kısmında da C1 kodu ile birlikte "Geometrik Oran" da dikeydeki değişimlerin yataydaki değişimlere oranı ifadesiyle de G1 imajına sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 20' de Ö4 eğim kavramının simgesinden bahsetmiştir ve burada da eğim kavramı ile ilgili PK ile kodlanan "Parametrik katsayısı" kategorisinde yer alan bir imaja sahip olduğu söylenebilir. Bununla beraber Ö4' e ait fonksiyonel özellik kategorisinde yer alan bir imaja sahip olduğu da belirlenmiştir. Buna ek olarak Şekil 20' de doğrusal bir fonksiyonun "$f(x) = mx + b$" şeklinde çizerek gösterdiği tespit edilmiştir.

Bir diğer katılımcı olan Ö3, ikinci sınıfta öğrenim görmekte olup ve yüz yüze aldığı Analiz 1 dersinden başarılı olmuştur. Ö3' e ait kavram imajları incelendiğinde; K3, PK, GD1, G2 kodlarına sahip olduğu görülmektedir. Burada dikkat çeken bir husus da yüz yüze Analiz 1 dersi alan katılımcı Ö3' ün, uzaktan öğretim ile Analiz 1 dersini alan katılımcı Ö4' e göre daha az kavram imajına sahip olmasıdır.

A: Eğim nedir? Eğim kavramını nasıl açıklarsın?

Ö3: Eğim denilince öncelikle bir doğrunun eğimi vardır. Örneğin tanjant bir eğimdir. Bir eğriye-teğet çizdiğimiz zaman oradaki nokta eğim olur mesela.

A: Peki tanjant kavramı eğimi nasıl karşılıyor?

Ö3: Hıımm.. şöyle demek istedim aslında tanjant açısı eğimi karşılar diyebiliriz. Burada ki olay aslında karşı bölü komşu yani y bölü x dir. Birde simgesi m diye hatırlıyorum.

A: Peki eğim kavramı hakkında başka neler söyleyebilirsin?

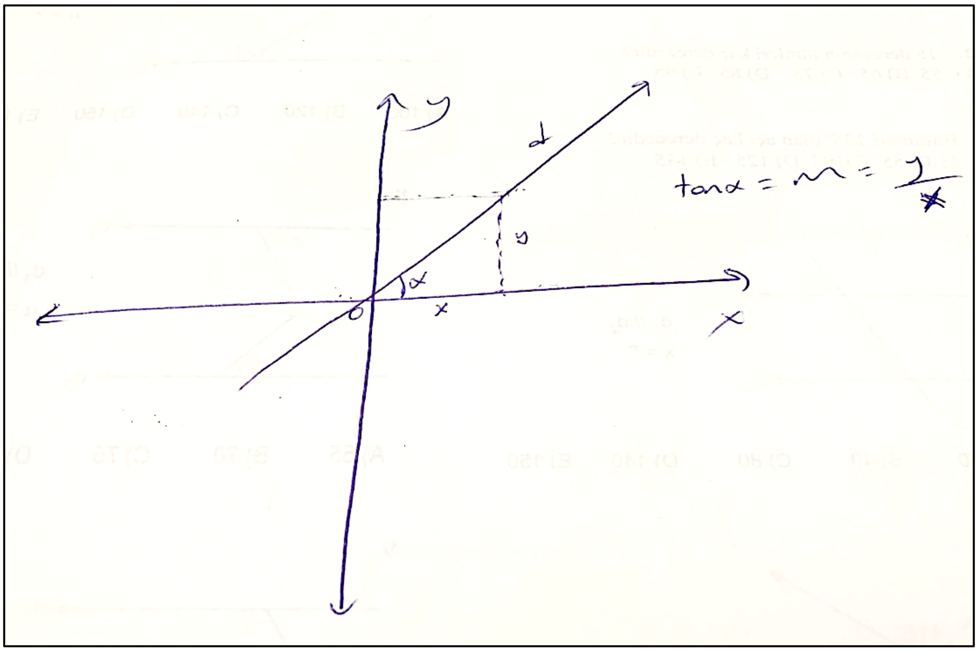
Ö3: Aslında eğimi en güzel günlük hayattan bir örnek vererek anlatsam mesela… hımmm…. örneğin otoparktan araçların çıkması için belli bir eğim olması gerekir eğim fazla *olursa araçların çıkması falan zor olacaktır ancak eğim yani hesaplanırsa bu bağlamda düşünüldüğünde araçların çıkışı daha kolay olacaktır.*

A: Peki eğim hakkında tanjant açısından bahsettin ve simgesi m olduğunu ifade ettin, peki neden m harfiyle ifade ediliyor olabilir? Birde yukarıdaki bahsettiğin durumları görsel olarak ifade edebilir misin?

Ö3: eğim kavramı m harfiyle ifade ediliyor ama açıkçası İngilizcesinin baş harfinden olabilir diye düşünüyorum. Ama oda slope ama o zaman s olur…hımmm açıkçası hatırlayamadım… aslında tam emin olamamakla birlikte şöyle görselleştirebilirim.

Şekil 21

Ö3'e Ait Eğim Kavramı Hakkındaki Gösterimi



Şekil 21 ve diyaloglar göz önüne alındığında Ö3' ün eğim kavramı hakkındaki kavram imajlarının yeterli olmadığı söylenebilir. Analiz 1 dersinden BB notu ile geçmiştir ve yüz yüze eğitim ile bu dersi görmüştür. Katılımcı Ö3 ve Ö4' e ait kavram imajları incelendiğinde aslında yüz yüze eğitimdeki Analiz 1 dersini gören katılımcının daha fazla imaja sahip olması beklenmektedir.

Eğim kavramı ile ilgili, görüşmedeki birinci sorudan yukarıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır. İkinci aşamada eğim kavramı ile ilgili birinci ve ikinci sorularda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uygulamadaki eğim kavramı hakkındaki kavram imajları incelenmiştir.

1-f doğrusal fonksiyon olup bu fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimis m=3' tür. Buna göre;

Koordinat düzleminde f fonksiyonunun olası grafiğini çiziniz.

Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade eder? Açıklayınız.

2- f doğrusal olmayan bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksıyonun bir noktadaki teğetin eğimi m=3'tür.

Örneğin, f(x)=cos(x)+3x

fonksiyonun 0 noktasındaki teğetinin eğimi 3 tür. Bu fonksiyona uygun bir fonksiyon örneği veriniz ve grafiğini çiziniz.

Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade etmektedir? Açıklayınız.

Birinci sorudaki doğrusal fonksiyonun eğimi ile bu sorudaki fonksiyonun eğimi arasında sizce bir farklılık var mıdır?

Tablo 18' de ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uygulama sorularındaki eğim kavramı hakkındaki kavram imajları yer almaktadır.

Tablo 18

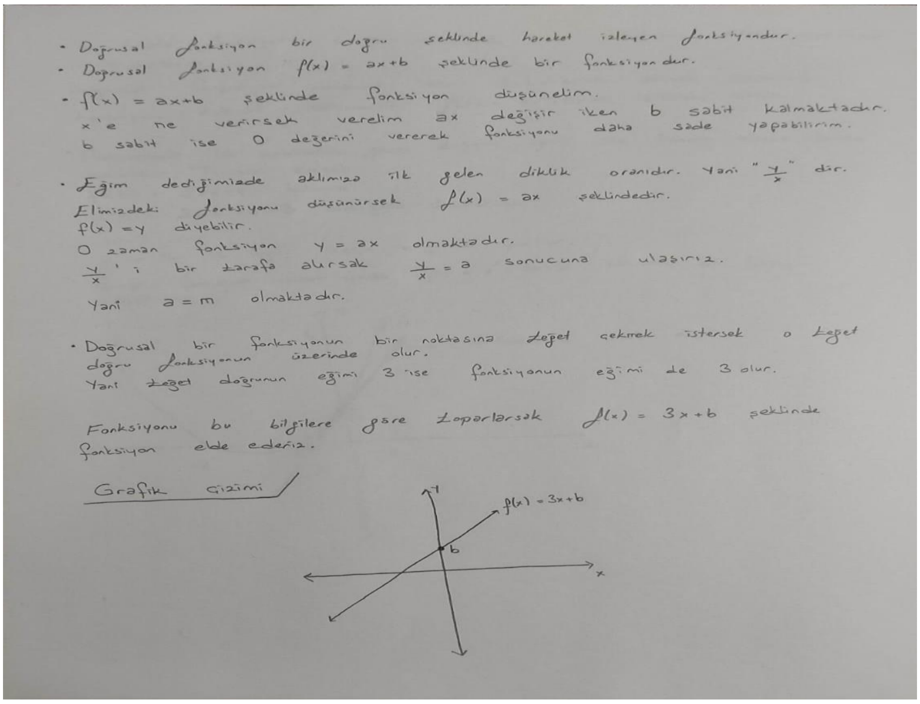
İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Uygulama Sorularındaki Eğim Kavramı Hakkındaki Kavram Imajları

Öğretmen adayı	Kavram İmajları													
	G1	G2	C1	C2	F	f	PK	T1	T2	K1	K2	K3	GD1	GD2
Ö1		X					X	X			X	X	X	X
Ö2		X					X	X	X				X	X
Ö3							X				X	X	X	X
Ö4						X	X			X	X	X	X	X
Ö5						X	X	X			X	X		
Ö6	X					X	X				X	X		X
Ö7		X									X	X	X	

Tablo 18' de ikinci aşama sorularda eğim ile ilgili olan 1. ve 2. sorular analiz edilmiştir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili kavram imajları betimlenmiştir. Birinci aşama sorularda eğim kavramı ile ilgili en fazla kategoriye sahip olan katılımcı Ö4 ikinci aşama sorularda da en fazla kategoride yer alan imajlara sahip olanlar arasındadır. Birinci aşama sorular ile ikinci aşama sorular karşılaştırıldığında katılımcı Ö4 kalkülüs anlayış kategorisinde K1 (Limit), K2 (Türev) ve K3 (Bir noktada bir eğriye teğet çizgi) eğim ile ilgili imajları olduğu görülmüştür. Bununla beraber birinci sınıfta öğrenim gören katılımcı Ö5' e ait eğim kavramı hakkındaki kavram imajları diğer katılımcılara göre az olduğu görülmektedir.

Şekil 22

Ö4'e Ait İkinci Aşama Sorularda Yer Alan 1a'ya Vermiş Olduğu Cevap



- Doğrusal fonksiyon bir doğru seklinde hareket izleyen fonksiyondur.
- Doğrusal fonksiyon $f(x) = ax+b$ şeklinde bir fonksiyondur.
- $f(x) = ax+b$ şeklinde fonksiyon düşünelim.
x'e ne verirsek verelim ax değişir iken b sabit kalmaktadır.
b sabit ise 0 değerini vererek fonksiyonu daha sade yapabilirim.

- Eğim dediğimizde aklımıza ilk gelen diklik oranıdır. Yani "$\frac{y}{x}$" dir.
Elimizdeki fonksiyonu düşünürsek $f(x) = ax$ şeklindedir.
$f(x) = y$ diyebilir.
O zaman fonksiyon $y = ax$ olmaktadır.
$\frac{y}{x}$'i bir tarafa alırsak $\frac{y}{x} = a$ sonucuna ulaşırız.
Yani $a = m$ olmaktadır.

- Doğrusal bir fonksiyonun bir noktasına teğet çekmek istersek o teğet doğru fonksiyonun üzerinde olur.
Yani teğet doğrunun eğimi 3 ise fonksiyonun eğimi de 3 olur.

Fonksiyonu bu bilgilere göre toparlarsak $f(x) = 3x+b$ şeklinde fonksiyon elde ederiz.

Grafik çizimi

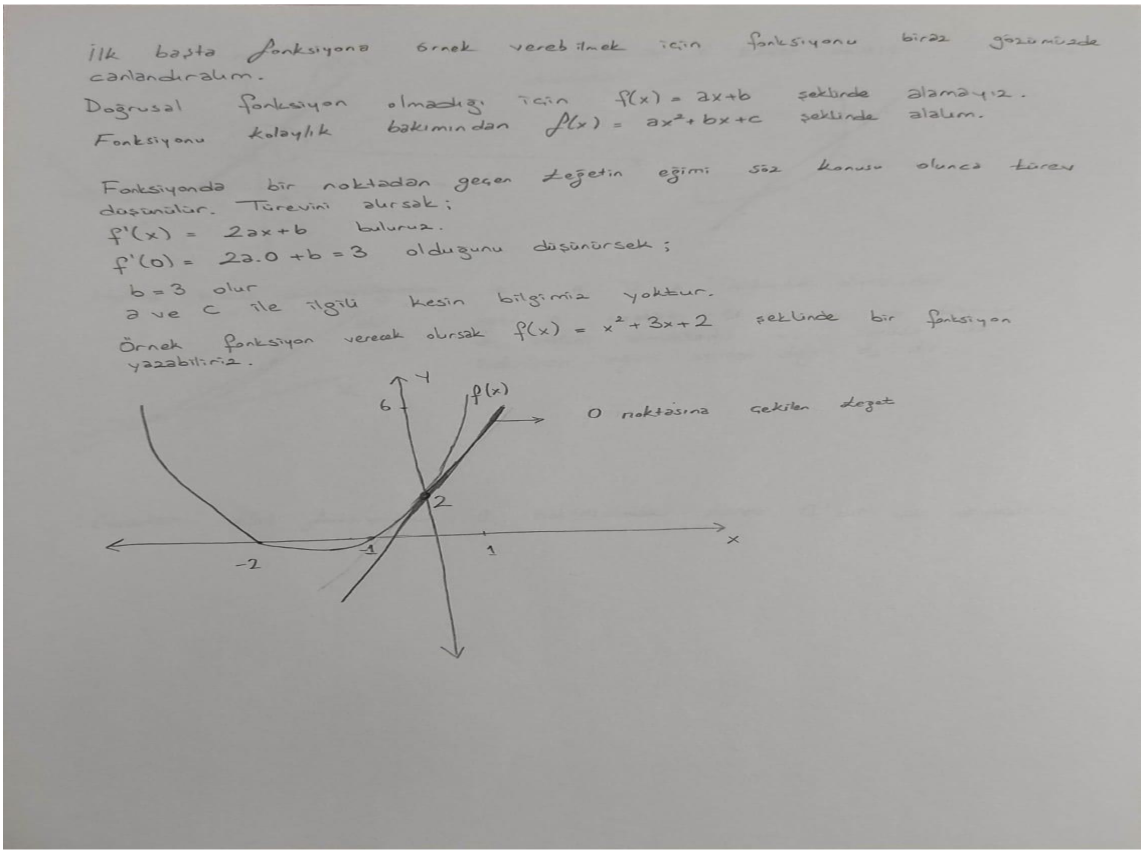
Katılımcı Ö4' ün 1. Soruda verdiği cevap incelendiğinde eğimi 3 olan bir doğrusal fonksiyonun grafiğini koordinat sisteminde çizebildiği görülmektedir. Ayrıca eğim ile ilgili olarak verdiği açıklayıcı cevaplarda bulunmaktadır.

Ayrıca katılımcı Ö4' ün 1b'ye verdiği cevap aşağıdaki gibidir.

> *"Fizikte yol zaman grafiğinin eğiminden hız bulunabilmektedir. Enflasyon oranlarında grafikten artış azalış kontrolü sağlamak amaçlı değerler bulunmaktadır. Günümüzde korona virüs yayılma grafiğinde günlük, aylık ve yıllık gibi yayılış hızlarını göstermede kullanılmaktadır."*

Şekil 23

Ö4'e Ait İkinci Aşama Sorularda Yer Alan 2a'ya Vermiş Olduğu Cevap

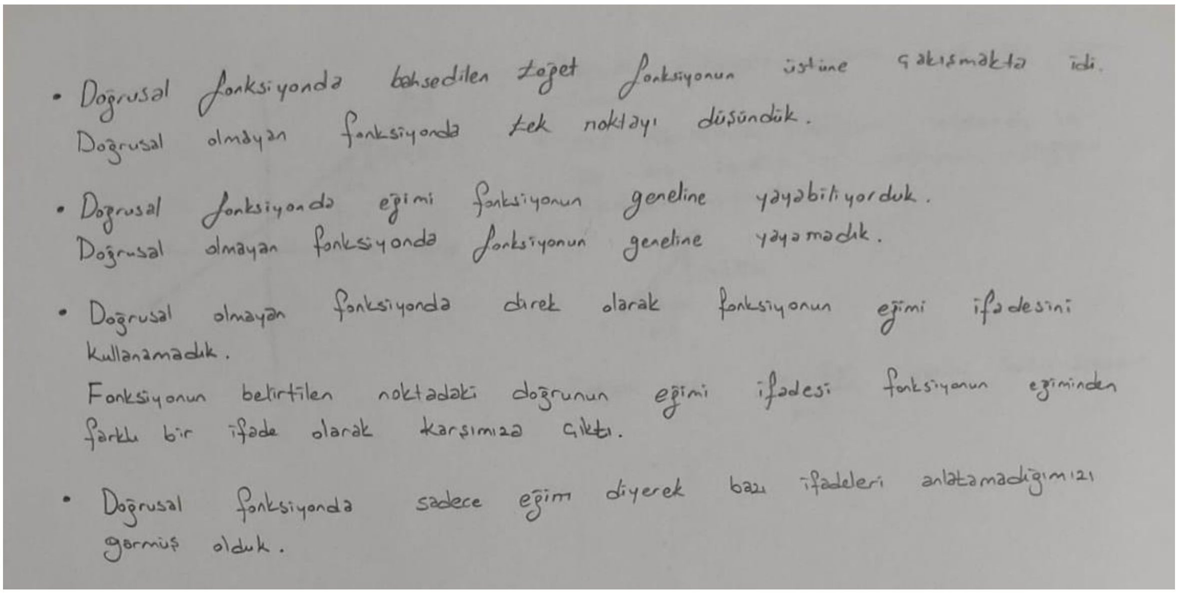


İlk başta fonksiyona örnek verebilmek için fonksiyonu biraz gözümüzde canlandıralım.
Doğrusal fonksiyon olmadığı için $f(x) = ax+b$ şeklinde alamayız.
Fonksiyonu kolaylık bakımından $f(x) = ax^2+bx+c$ şeklinde alalım.

Fonksiyonda bir noktadan geçen teğetin eğimi söz konusu olunca türev düşünülür. Türevini alırsak;
$f'(x) = 2ax+b$ buluruz.
$f'(0) = 2a.0+b = 3$ olduğunu düşünürsek;
$b = 3$ olur
a ve c ile ilgili kesin bilgimiz yoktur.
Örnek fonksiyon verecek olursak $f(x) = x^2+3x+2$ şeklinde bir fonksiyon yazabiliriz.

Şekil 24

Ö4'e Ait İkinci Aşama Sorularda Yer Alan 2c'ye Vermiş Olduğu Cevap



- Doğrusal fonksiyonda bahsedilen teğet fonksiyonun üstüne çakışmakta idi.
  Doğrusal olmayan fonksiyonda tek noktayı düşündük.
- Doğrusal fonksiyonda eğimi fonksiyonun geneline yayabiliyorduk.
  Doğrusal olmayan fonksiyonda fonksiyonun geneline yayamadık.
- Doğrusal olmayan fonksiyonda direk olarak fonksiyonun eğimi ifadesini kullanamadık.
  Fonksiyonun belirtilen noktadaki doğrunun eğimi ifadesi fonksiyonun eğiminden farklı bir ifade olarak karşımıza çıktı.
- Doğrusal fonksiyonda sadece eğim diyerek bazı ifadeleri anlatamadığımızı görmüş olduk.

Katılımcı Ö4' e ait cevaplar incelendiğinde, yarı yapılandırılmış görüşmede eğim kavramına ait kavram imajlarını ikinci aşama sorularda yani uygulama sorularında da kullanabildiği görülmektedir. Hatta bu imajlar birbirleri ile örtüştüğü yani birinci aşama sorular ile ikinci aşama sorularda sahip olduğu imajlar birbirini destekler nitelikte olduğunu söyleyebiliriz. Bununla birlikte Şekil 23' te öğrenciye ait cevap incelendiğinde doğrusal olan ve doğrusal olmayan bir fonksiyonun eğimi hakkında kendisine ait yorumları olduğu görülmektedir. Bu durumda Ö4' e ait kalkülüs kategorisinde yer alan türev kavramı yani K2 koduna sahip bir imajı olduğu söylenebilir.

2- İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Kavramı Hakkındaki Kavram İmajları

Yedi öğretmen adayı ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler ve uygulama sorularından elde edilen verilere göre öğretmen adaylarının değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları Tablo 19' da incelenmiştir.

Tablo 19

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sorularındaki Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Kavramı Hakkındaki Kavram Imajları

Öğretmen adayı	Kavram İmajları D1 (Evrensel)	D2(Aralıklı)	D3(Noktasal)
Ö1			X
Ö2			X
Ö3			X
Ö4			X
Ö5	X		
Ö6			X
Ö7			X

Tablo 19 incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları genel olarak D3 koduna sahip “Noktasal” oldukları görülmektedir. Sadece katılımcı Ö5 farklı olarak D1 kodunda “Evrensel” kavram imajına sahiptir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış görüşme sorularında Hauger (1995)' in kavramsal çerçevesine göre ilköğretim matematik öğretmen adaylarının D3 koduyla “Noktasal” değişim oranını anlık değişim hızına katılması ile anlamlandırmışlardır. Katılımcı Ö5’ e ait “Evrensel” kavram imajı aşağıdaki diyalogda bahsedilmiştir. Yani grafiğin artan azalan kısımlarından bahsetmiştir, günlük hayat durumlarından karşılaşılabilen olası durumları ifade ettiği görülmüştür.

> A: *Değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı nedir? Açıklayabilir misin?*
>
> Ö5: *Anlık değişim oranı eğimin değişimidir aslında. Aslında şu şekilde düşünebiliriz pandemi de vaka sayılarının grafiğe döktüğümüzde değişim oranı ifade edebiliriz veya ekonomiden örnek verebiliriz. Ama matematiksel olarak bir tanım yapamadım açıkçası.*

Gerçekleştirilen diğer bir görüşme de ise katılımcı Ö1’ e ait değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına ait kavram imajı ise D3’ tür “Noktasal”.

> A: Değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı nedir? Açıklayabilir misin?
>
> Ö1*: Hımmm… anlık değişim oranı ise, birim zamandaki eğimin değişim olarak hatırlıyorum ama emin değilim. Burada zaman olabilir veya hız olabilir birim önemli değil. Ama tam olarak anımsayamadım. Ama fizikte aklıma geldi, ivmede kullanıyoruz ama bunu ifade edemiyorum.*

Katılımcı Ö1 ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmede Ö1 değişim oranını anlık değişim hızına katılması olarak ifade ettiği görülmüştür. Bu bağlamda değişim oranı ile ilgili kavram imajı D3 koduyla yani “Noktasal” olarak analiz edilmiştir.

İlköğretim matematik öğretmen adayları ile uygulamadaki yani ikinci aşama sorulardaki cevapları incelenmiştir ve Tablo 20’ de betimlenmiştir.

Uygulama soruları yani ikinci aşama sorularında yer alan değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları üçüncü soruyla tespit edilmeye çalışılmıştır.

3- *g bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksiyonun x= 3 noktasındaki anlık değişim oranı/değişim oranıdır. Buna göre;*

a- *g bir doğrusal fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranını/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?*
b- *g bir doğrusal olmayan bir fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranı/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?*
c- *Sizce a ve b şıklarındaki fonksiyonların anlık değişim oranlarında bir farklılık var mıdır? Açıklayınız.*

Soruda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bir noktadaki anlık değişim oranı, doğrusal olan ve doğrusal olmayan bir fonksiyonun olası grafikleri çizilmesi istenmiştir. Bu bağlamda yarı yapılandırılmış sorularda yer alan kavram imajlarının ikinci aşama sorularda yer alan uygulama sorularına ne derece yansıtabildikleri incelenmiştir.

Tablo 20

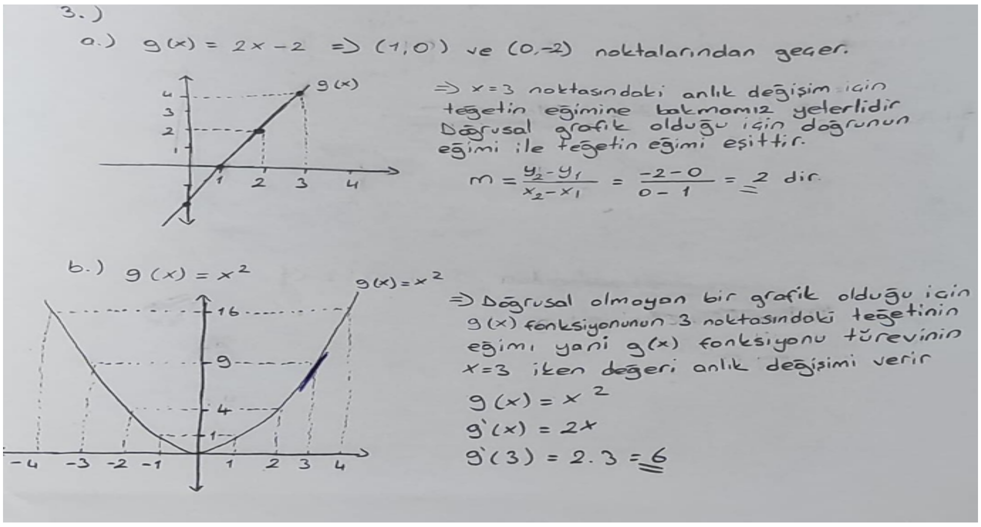
İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Uygulama Sorularındaki Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Kavramı Hakkındaki Kavram Imajları

Öğretmen adayı	Kavram İmajları D1 (Evrensel)	D2(Aralıklı)	D3(Noktasal)
Ö1	X	X	X
Ö2	X		
Ö3	X		X
Ö4		X	
Ö5	X	X	
Ö6			X
Ö7	X		

Tablo 20 incelendiğinde genel olarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ikinci aşamada yer alan uygulama sorularında değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki imajları yarı yapılandırılmış görüşme sorularına göre değiştiği söylenebilir. Hatta 3 katılımcının (Ö1, Ö3 ve Ö5) değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkında birden fazla imajı ortaya koyduğu görülmektedir. Katılımcı Ö1’ in değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili bütün imajları kullanabildiği görülmüştür.

Şekil 25

Katılımcı Ö1'e Ait Cevap



Burada dikkat çeken husus Katılımcı Ö1 ikinci sınıfta öğrenim görmektedir. Analiz 1 dersine yüz yüze eğitimle devam etmiştir. Bu bağlamda cevapları incelendiğinde katılımcı Ö1 incelenen analiz çerçevesine göre değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları uygulama sorusunda a öncülünde D1 (Evrensel), yine uygulama sorusunda *a* şıkkında D2 (Aralıklı) ve uygulama sorusu b şıkkında ise D3(Noktasal) olduğu tespit edilmiştir.

İlköğretim matematik öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde üçüncü soruda ise türev kavramı ile ilgili kavram imajları incelenmiştir. Türev kavramı ile ilgili kavram imajları için Zandieh (2000)' e ait kavramsal çerçeve kullanılmıştır. Bu analiz çerçevesinde her bir katılımcı için ayrı ayrı tablo kullanılmıştır.

Tablo 21

Katılımcı Ö1' e ait türev kavramı hakkındaki kavram imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran	●				
Limit	●				
Fonksiyon	◎				◎

A: *Türev kavramı nedir? Açıklayabilir misin?*

Ö1: *türevi belirlerken doğrusal olmayan grafiklerdeki eğim olarak tanımlayabilirim. Daha doğrusu konular ilerlediğinde aslında eğim hesaplaması yapıyoruz. Aslında biz bir noktada türevi inceliyoruz ilk başta. Teğetin bir noktada eğimidir. Limit, süreklilik veya integral gibi konularda önemli bir konu olarak görüyorum.*

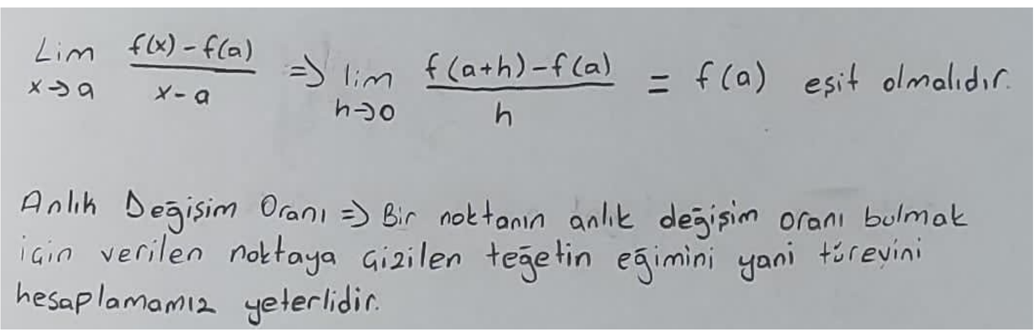
A: Peki türevin Analiz 1 dersindeki formel tanımını yapabilir misin?

Ö1: Hımm… anımsayamadım aslında yapabilirim ama aklıma gelmedi.

Katılımcı Ö1' e ait cevap incelendiğinde aslında katılımcının türev hakkında bazı noktalara değinebildiği söylenebilir. Teğetin eğimi, limit, süreklilik veya integral ile ilgili konularla ilişkili olduğunu ifade etmesi bunlara örnek olabilir. Fakat katılımcıdan türev kavramının formel tanımı istendiğinde bununla ilgili herhangi bir cevap vermemiştir. Ancak katılımcı Ö1 ikinci aşama sorularda türev kavramının formel tanımından faydalanarak ve eğim kavramı ve anlık değişim oranı ile ilişkilendirerek cevapladığı görülmektedir. Yani görüşme sorularında türev kavramı hakkında formel tanımla ilgili cevap vermekte zorlanmasına rağmen uygulama sorularında bu durumu açıklayabilmiştir.

Şekil 26

Katılımcı Ö1'e Ait Türev Kavramının Formel Tanımı



Diğer bir katılımcı olan Ö2 türev kavramı hakkındaki kavram imajı katılımcı Ö1' e benzer niteliktedir.

Tablo 22

Katılımcı Ö2'ye Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran Limit Fonksiyon	● ● ●	◎	◎ ◎		

A: *Türev kavramı nedir? Açıklayabilir misin?*

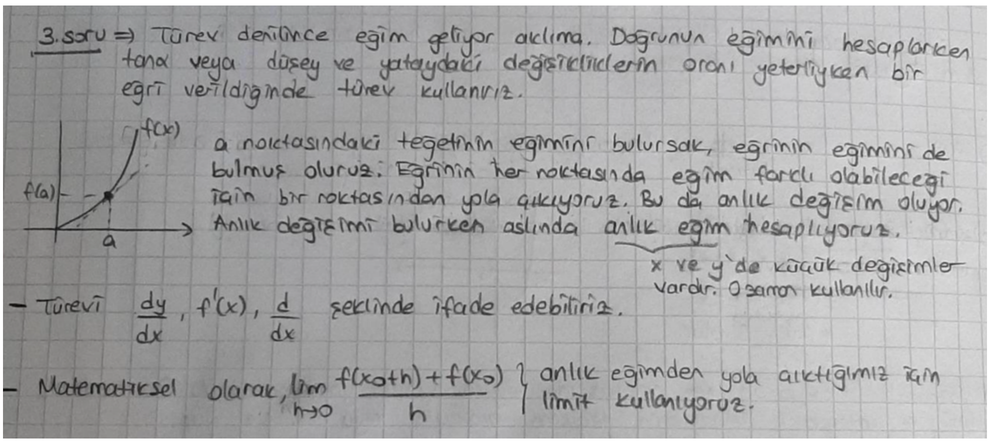
Ö2: *ben türevi şu şekilde kendi cümlelerini açıklayabilirim bir eğrinin bir noktadaki eğimi şeklinde açıklayabilirim. Bunu bir önceki soruda cevapladım gibi burada da anlık değişim ortaya çıkıyor devreye giriyor.*

A: Peki türevin Analiz 1 dersindeki formel tanımını yapabilir misin?

Ö2: Hımm… formel tanımı yapabilirim şöyle olacağını düşünüyorum.

Şekil 27

Katılımcı Ö2'ye Ait Türev Kavramı Kavramının Formel Tanımı



Katılımcı Ö2 ikinci sınıfta öğrenim gören diğer katılımcı Ö1’ e göre görüşme sorularında ve uygulama sorularında türev kavramı ile ilgili soruları cevaplamakta zorlanmamıştır. Sahip olduğu kavram imajlarını görüşme sorularında olduğu gibi uygulama sorularında sergileyebilmiştir. Hatta katılımcı Ö2 türev kavramının matematiksel simgelerinin de farklı gösterim biçimlerini bilmiştir.

Katılımcı Ö3 de ikinci sınıfta öğrenim görmektedir ve Analiz 1 dersini yüz yüze takip etme şansı bulunmuştur. Kendisine ait türev kavramı ile ilgili sorular sorulduğunda ise verdiği cevaplar incelenmiştir ve sahip olduğu kavram imajı tespit edilmiştir.

Tablo 23

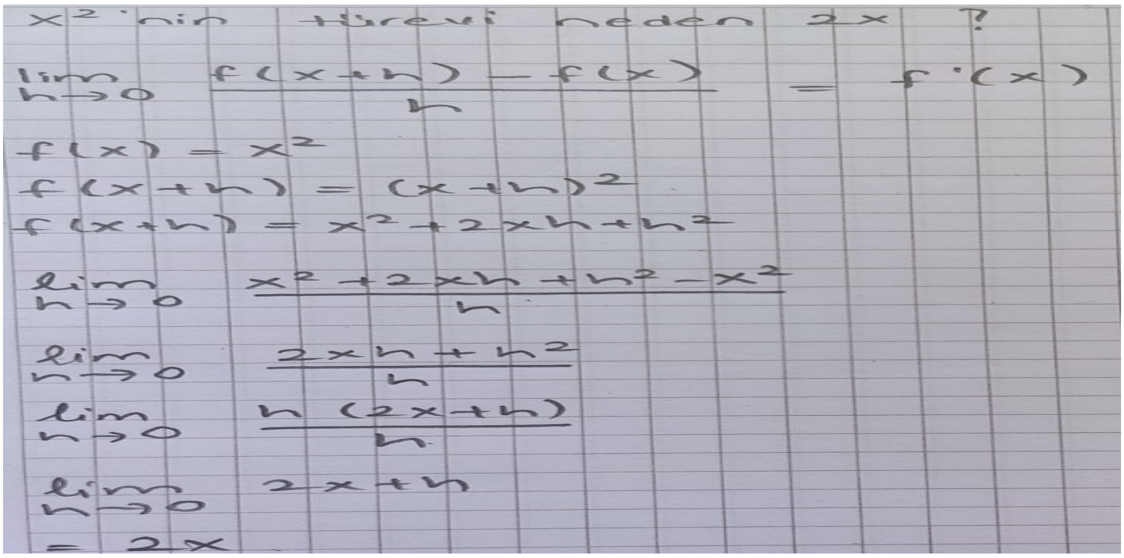
Katılımcı Ö3’e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran	●				
Limit	●				
Fonksiyon	◎				

Tablo 23 incelendiğinde diğer katılımcılara göre farklı olarak katılımcı Ö3 türev kavramı ile ilgili farklı imajlara sahip olduğu görülmektedir. Ö1 ve Ö2 süreç nesne çiftlerinden sözel-oran çiftinde kavram imajına sahipken katılımcı Ö3 süreç nesne çiftlerinden grafiksel-eğim çiftinde kavram imajına sahip olduğu görülmüştür. Yapılan yarı yapılandırılmış görüşmede ise katılımcı Ö3 türev kavramı hakkında formel tanımı verebilmiştir. Bunun yanında x^{2}' nin türevinin neden $2x$ olduğunu bir türevin formel tanımı ile ifade etmiştir.

Şekil 28

Katılımcı Ö3'e Ait Türev Kavramının Formel Tanımı



Analiz 1 dersini yüz yüze takip eden öğretmen adaylarından katılımcı Ö3 ve Ö2 yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip oldukları kavram imajlarını uygulama sorularında da gösterebilmiştir. Sadece katılımcı Ö1' in görüşme sorularında türev kavramı ile ilgili yarı yapılandırılmış görüşme sorularında türev kavramı ile ilgili diğer katılımcılara göre biraz eksik kavram imajına sahip olduğu söylenebilir. Çünkü Ö1 süreç nesne çiftlerinden sözel-oran çiftinde fonksiyon imaj matrisinin içinin boş olduğu görülmektedir. Ancak kendisinin uygulama ile ilgili sorular sorulduğunda bu soruları cevaplayabildiği görülmüştür.

Analiz 1 dersini uzaktan eğitim ile devam eden birinci sınıf öğrencilerinden Ö4' ün türev kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajları incelendiğinde öğretmen adayının görüşme soruları ve uygulama sorularına verdiği cevaplar incelenmiştir.

Tablo 24

Katılımcı Ö4'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran	●			●	
Limit	●				
Fonksiyon	●				

A: Türev kavramı nedir? Açıklayabilir misin?

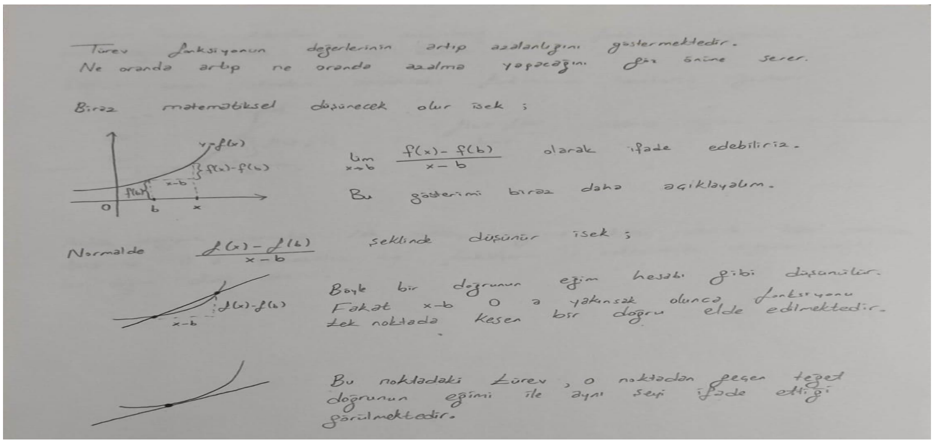
Ö4:Türev kavramı biz lisede eğim diyerek öğrendik. Ama sonradan değişim oranı olarak öğretildi. Limitle ilişkilendirebilirim türevi, fonksiyon kavramı ile bağdaştırırım. Mesela türevdeki kanıtları limiti kullanıyoruz. Bir fonksiyonun türevi olması için limit ve sürekli olması gerekir.

A: peki bu durumu daha da açabilir misin? Mesela kağıt üzerinde gösterebilir misin?

Ö4: Hımm… şöyle ama pek emin değilim…

Şekil 29

Katılımcı Ö4'e Ait Türev Kavramının Formel Tanımı



Birinci sınıfta öğrenim gören katılımcı Ö4 diğer katılımcılara göre türev kavramının tanımını sadece formel olarak tanımlamakla kalmamış ayrıca bunu grafiksel olarak da göstermiştir. Tall ve Vinner (1983) kavram imajını tanımlarken bir kavram hakkında bireyin zihninde yer alan tüm resimler olarak tanımlamıştır. Katılımcı Ö4 türev kavramı hakkında zihninde bulunan imajları kullanabildiği söylenebilir.

Analiz 1 dersine uzaktan devam eden birinci sınıf öğrencilerinden diğer katılımcı Ö5' in türev kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajları incelendiğinde öğretmen adayının görüşme soruları ve uygulama sorularına verdiği cevaplar incelenmiştir.

Tablo 25

Katılımcı Ö5'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran					◎
Limit	◎	◎			
Fonksiyon	◎				

A: Türev kavramı nedir? Açıklayabilir misin?

Ö5: türev deyince aklıma direk eğim geliyor. Aslında değişen eğim geliyor. Analiz dersinden kabaca teğetin bir noktadaki eğimidir türev. Türev kavramını f' dx olabilir dy/dx şeklinde ifade edebilirim. Türev kavramında aslında biz limitten faydalanıyoruz. Yani bir noktaya yaklaşıyoruz sağdan ve soldan şeklinde yaklaşmış oluyoruz. Aslında çok küçük parçalar halinde yaklaşıyoruz. Yani aslında biz burada bir noktadaki türeve bakıyoruz.

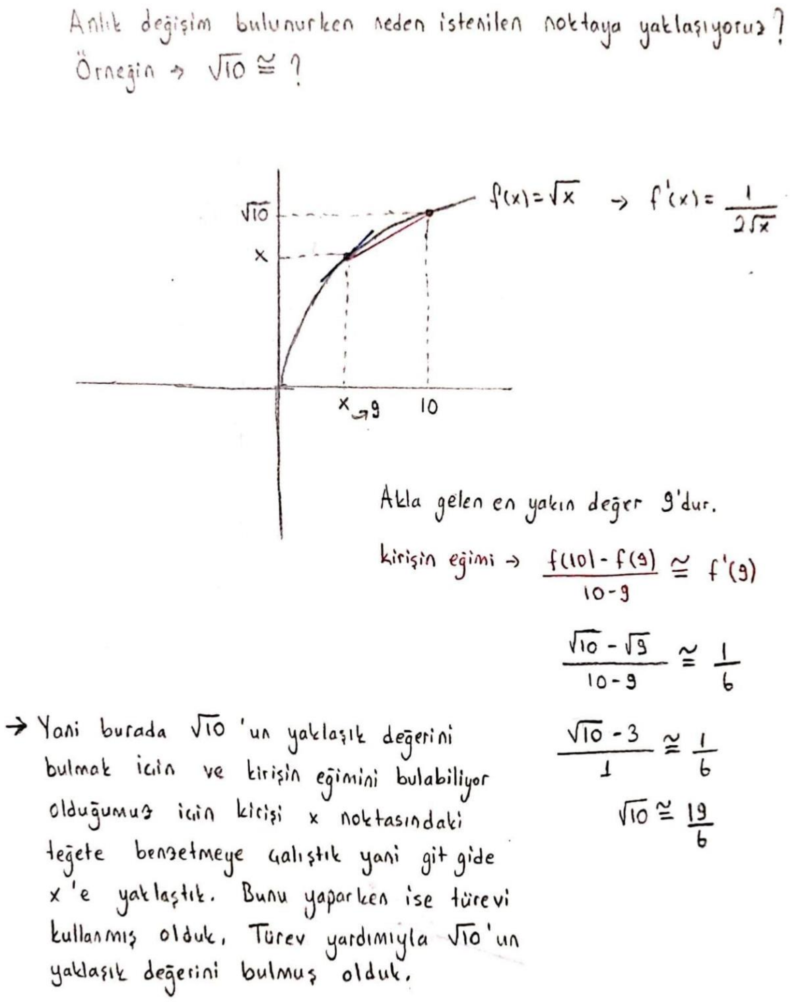
A: peki bu durumu daha da açabilir misin? Mesela kağıt üzerinde gösterebilir misin?

Ö5: Hımm… bunu yapabileceğimden emin değilim. Ama soru olursa onun üzerinden türevi çözebilirim.

Katılımcı Ö5' in türev kavramı hakkındaki kavram imajı incelendiğinde imaj hücrelerinin içi tam dolu olmadığı görülmektedir. Kendisinin soru üzerinde bu durumu ifade edebileceğini söylemiştir. Uygulama sorularından türev ile ilgili olan bir soruda ise katılımcı Ö5 türev kavramı ve eğim kavramı arasındaki ilişkiyi göz önüne almıştır. Örneğin ikinci aşama sorularda yer alan 5. soruda $f(x) = x^2$ fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki türevi sorulduğunda katılımcı Ö5 Şekil 30’ daki cevabı vermiştir.

Şekil 30

Katılımcı Ö5’e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Cevabı



Şekil 30 incelendiğinde aslında katılımcı Ö5’ in *f(x)*=x^2 fonksiyonun x=2 noktasındaki türevi sorulduğunda verdiği cevap farklıdır. Katılımcı Ö4’ e göre durumu net olarak izah edemediği görülmüştür. Aslında görsel olarak türev kavramı ile ilgili bazı gösterimler yapsa da durumu net olarak izah edemediği söylenebilir. Bu bağlamda katılımcı Ö5’ in türev kavramı ile ilgili kavram imajı hücrelerinin tam dolu olmadığı söylenebilir.

Diğer bir katılımcı olan birinci sınıfta öğrenim gören Ö6'da Analiz 1 dersine uzaktan devam etmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme soruları ile türev kavramına verdiği cevaplar incelenmiştir ve türev kavramı ile ilgili kavram imajları tespit edilmeye çalışılmıştır.

A: Türev kavramı nedir? Açıklayabilir misin?

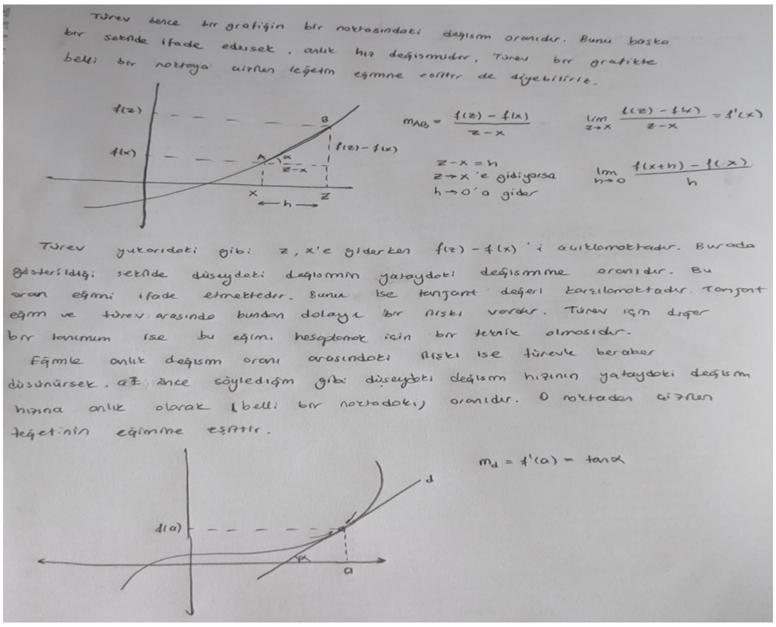
Ö6: hımm.. aslında az önce değişim oranı ve eğim kavramlarında da bahsetmiştim, noktadaki değişimin anlık değişimi yani eğimidir. Formel tanım olarak limitten anlatabilirim. Grafik üzerinden anlatabilirim. Değişken değiştirirken mesela a+h kullanarak limitten tanımından türeve ilişkilendirebilirim. Türevi limitle ilişkilendirebilirim. Aslında türevde biz teğetin eğimini hesap ediyoruz. Oradaki anlık değişimin ifadesidir diyebilirim.

A: peki bu durumu daha da açabilir misin? Mesela kağıt üzerinde gösterebilir misin?

Ö6: deneyebillirim…

Şekil 31

Katılımcı Ö6'ya Ait Türev Kavramı Hakkındaki Cevap



Tablo 26

Katılımcı Ö6'ya Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

Bağlamlar

Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran	●		●		
Limit	●				
Fonksiyon	●				●

Katılımcı Ö6' nın türev kavramı ile ilgili kavram imajı incelendiğinde diğer katılımcılardan farklı olarak süreç nesne çiftlerinden fiziksel-hız sütunu ile oran sütununda bir imajının olduğu görülmektedir. Bunu Şekil 31' de ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca değişken değiştirme ifadesi ile süreç nesne çiftlerinden diğer hücresinde de imajı olduğu görülmektedir.

Katılımcı Ö7 Analiz 1 dersini yüz yüze takip etmiştir. İkinci sınıfta öğrenim görmektedir. Türev kavramı ile ilgili yarı yapılandırılmış sorulara verdiği cevaplar incelenerek türev kavramı hakkındaki kavram imajları incelenmiştir.

Tablo 27

Katılımcı Ö7'ye Ait Türev Kavramı Ile Ilgili Kavram Imajları

Bağlamlar

Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran			◎		
Limit		◎			◎
Fonksiyon		◎			

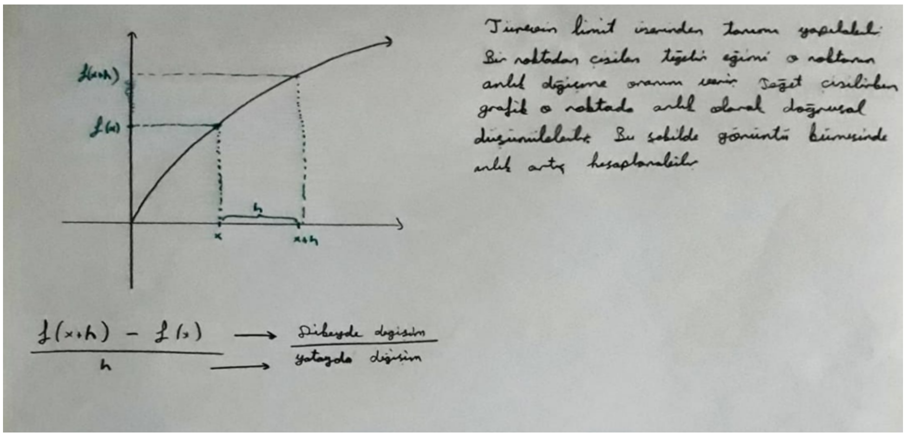
A: Türev kavramını açıklayabilir misin?

Ö:7Türev bize kabaca eğim olarak öğretildi. Birim zamanda değişme hızı veya değişim oranı olarak görülebilir. Aslında bunun matematiksel bir tanım olarak yapabilirim Şöyle ki; bir noktanın eğimi yani türevi istendiği zaman o noktada teğete çizilen eğim bize türev verir. Bir noktanın türevi istenirken o noktanın *sağdan soldan limitine bakarız. sürekli midir değil midir o durumlarını inceleriz. Grafiklerde sivri uç durumuna bakarız fonksiyon sürekli mi değil mi onu inceleriz. Söyle ki sivri uçlarda türev inceleyemeyiz.*

A: peki türevin formel tanımını yani Analiz 1 dersinde gördüğünüz tanımını yapabilir misin?

Şekil 32

Katılımcı Ö7'ye Ait Türev Kavramının Formel Tanımı



Şekil 32 incelendiğinde katılımcı Ö7' nin formel tanımı yaparken aslında bazı eksiklerinin olduğu söylenebilir. Türevin formel tanımı yapılırken limitten yararlanabileceğini ifade etmesine rağmen bu durumu kâğıt üzerinde ifade etmemiştir. Teğetin eğimi olarak tanımladığı türev kavramı ile ilgili çizdiği grafikte bu durumu ifade etmediği görülmüştür.

Çalışmaya katılan 7 ilköğretim matematik öğretmen adayının türev kavramı ile ilgili kavram imajları incelenmiştir. Elde edilen bulgular incelendiğinde katılımcıların üçü birinci sınıf öğrencisi dördü ikinci sınıf öğrencileridir. Birinci sınıf öğrencilerinden katılımcı Ö4 ve Ö6' ya ait türev kavramı ile ilgili kavram imajlarına ait hücreler daha belirgin bir şekilde olduğu görülmüştür. Birinci aşama sorularda sahip oldukları imajları uygulama sorularında da kullanabildikleri tespit edilmiştir. İkinci sınıf öğrencilerinden ise katılımcı Ö1 ve Ö3' ün türev kavramı ile ilgili kavram imajları diğer katılımcılara göre daha belirgin yani imaj hücrelerini daha etkin kullanabildikleri söylenebilir. Şöyle ki; yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip oldukları imajları uygulama sorularında da kullanabildikleri görülmektedir. Ancak öğretmen adaylarının türev kavramı hakkında kavram tanımlarını vermekte zorlandığı görülmüştür. Uygulama sorularını çözerken türev ile ilgili soruları çözdükleri görülmüştür. Fakat türevi Zandieh (2000)'in bahsettiği *sembolik olarak farkların limiti* şeklinde ifade ederken bazı yanlışlar yaptıkları görülmüştür. Soruları işlemsel olarak çözebildikleri ancak kavramsal olarak türev kavramına hâkim olmadıkları görülmüştür. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adayları türev denince eğim hesabı yaparız ifadesini kullanmalarına rağmen bu durumu açıklamakta zorlandıkları görülmüştür.

3- İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim Ve Anlık Değişim Oranı Arasındaki İlişki Hakkındaki Kavram İmajları

Araştırmanın üçüncü alt probleminde ilköğretim matematik öğretmen adaylarına eğim kavramı ve anlık değişim oranı kavramları arasında bulunan ilişki sorulmuş ve bu kavramlar arasında sahip oldukları kavram imajları tespit edilmiştir. Burada izlenen yol, eğim kavramına ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına ait analiz çerçevesi incelenmiştir. Birinci aşama sorularda yer alan "*Eğim kavramı ile değişim oranı/anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi açıklayınız.*" Sorusu ile ikinci aşama sorulardan olan Tablo 28' de yer alan soru ile bu durum analiz edilmiştir.

Tablo 28

Eğim Ve Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Arasındaki Ilişkiye Ait Soru

Ali ve Bora türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Ali bir fonksiyonun belirli bir noktasındaki değişim oranı ile o noktadan geçen teğet doğrusunun eğiminin aynı şey olduğunu ifade etmektedir. Örneğin, Ali, Bora'ya $\boxed{f(x) = x^2}$ *fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının 4 olduğunu ifade etmektedir. Bora ise anlık değişim oranının neden eğime eşit çıktığını anlamadığını ifade etmiştir. Hatta bu durumun anlamsız bir şey olduğunu iddia etmiştir. Siz Ali'nin yerinde olsaydınız, Bora'ya nasıl yardımcı olurdunuz ve eğim ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız?*

Katılımcı Ö1 eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili sahip olduğu imajlar Tablo 29 ve Tablo 30' da betimlenmiştir.

Tablo 29

Katılımcı Ö1'e Ait Birinci Aşamadaki Sorudaki Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K2
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı Ö1'in eğim kavramına ilişkin kavram imajı "Kalkülüs" kategorisinde yer alan K2 kodu olduğu görülmektedir. Ancak katılımcı Ö1' in eğim kavramı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde bu kategoride bir imajının olmadığı görülmüştür. Fakat değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajı ise D3 kodu ile kodlanan "Noktasal" olarak görülmektedir. Katılımcı Ö1' in değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajında herhangi bir değişiklik olmadığı görülmüştür.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö1: Eğim aslında anlık değişimdir. Eğim bulmak için birinci türeve bakıyorduk. Aslında anlık değişim oranında da birinci türevi alıyoruz. Yani ikisi de bir noktada değişimi veriyor.

Yapılan görüşmede katılımcı Ö1' in eğim kavramını aslında anlık değişim olarak ifade ettiği görülmektedir. Eğim kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajlarında ise bu durumun mevcut olmadığı görülmektedir. Ayrıca uygulama sorularında ise katılımcı Ö1' e ait cevap Tablo30' da incelenmiştir.

Tablo 30

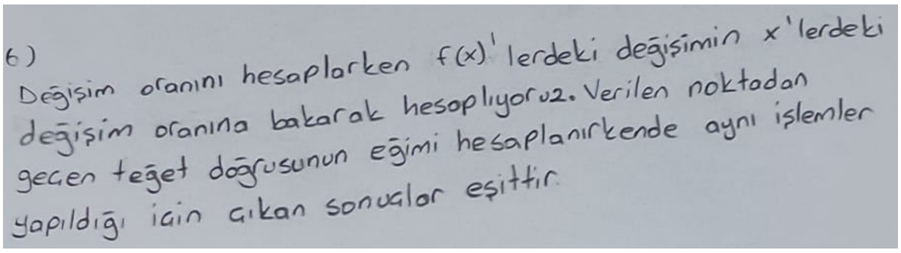
Katılımcı Ö1'e Ait Ikinci Aşama Sorularında Yer Alan Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: G1
	Anlık Değişim: Evrensel

Tablo 29 ve Tablo 30 incelendiğinde katılımcı Ö1' e ait kavram imajlarının değiştiği görülmektedir. Birinci aşama sorulardaki eğim ile ilgili "Kalkülüs" kategorisindeki K2 imajı ikinci aşama sorularda “Geometrik oran” kategorisindeki G1 imajını kullanmıştır. Ayrıca birinci aşama sorulardaki D3 koduyla “Noktasal” olan kavram imajı ikinci aşama sorularda sahip olduğu kavram imajı D1 koduyla “Evrensel” görülmektedir. Bununla birlikte Ö1’ e ait ikinci aşama soruda yer alan eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili soruya verdiği cevap ise Şekil 33 ’te yer almaktadır.

Şekil 33

Katılımcı Ö1’e Ait İkinci Aşama Sorulardaki Cevabı



6)
Değişim oranını hesaplarken f(x)' lerdeki değişimin x'lerdeki
değişim oranına bakarak hesaplıyoruz. Verilen noktadan
gecen teğet doğrusunun eğimi hesaplanırkende aynı islemler
yapıldığı icin cıkan sonuclar eşittir.

Şekil 33 incelendiğinde aslında katılımcı Ö1’ in uygulama sorularında yer alan cevabı incelendiğinde aslında sahip olduğu imajları tam olarak kullanamadığı görülmüştür.

Katılımcı Ö2’ ye ait eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye ait kavram imajları Tablo 31 ve Tablo 32’de incelenmiştir.

Tablo 31

Katılımcı Ö2’ye Ait Birinci Aşama Sorularında Yer Alan Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: G1
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı Ö2’ nin eğim ile ilgili kavram imajı “Geometrik Oran” kategorisinde yer alan G1 koduna sahip olduğu görülmektedir. Bu durum katılımcı Ö2’ nin eğim kavramı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde bu kategoride bir imajını da kullandığı görülmüştür. Bununla beraber değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajı ise D3 kodu ile kodlanan “Noktasal” olarak görülmektedir. Katılımcı Ö2’ nin değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajında herhangi bir değişiklik olmadığı görülmüştür.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö2: değişim oranı ile eğim arasında bir ilişki var… şöyle açıklamıştım y deki değişim x deki değişime oranı bize aslında eğimi veriyordu bu şekilde bir ilişki kurabilirim. Anlık Değişim de ise çok küçük ilişkiler oluyordu hatta bunun limitle bağdaştırıyordum. Şöyle ifade edebilirim anlık değişim de anlık eğim vardır.

Yapılan görüşmede katılımcı Ö2 eğim ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi y deki değişimlerin x deki değişimleri olarak ifade ederken eğim ile anlık değişim oranında ise limit kavramı ile ilişki kurduğunu ifade etmiştir. Katılımcı Ö2' nin ayrıca uygulama sorularına verdiği cevaplar Tablo 32' de betimlenmiştir.

Tablo 32

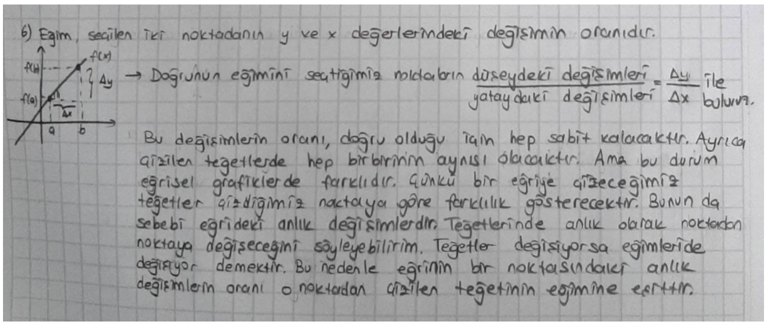
Katılımcı Ö2'ye Ait Ikinci Aşama Sorularda Sahip Olduğu Kavram Imajı

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: G1
	Anlık Değişim: Evrensel, Noktasal

Katılımcı Ö2 birinci aşama sorularda kullandığı eğim kavramı ile ilgili kavram imajlarını ikinci aşamada yer alan uygulama sorularında da benzer kavram imajlarını kullanmıştır. Bu durum Şekil34' te gösterilmiştir. Şekil34' te eğim ile ilgili durumu "Geometrik Oran" kategorisinde G1 imajını kullanmıştır. Bu imajı ise değişim oranı ile ilişkilendirmesi ise grafikte $\Delta y/\Delta x$ ile ifade etmiştir. Bununla beraber anlık değişim oranı ile eğim kavramını ilişkilendirmesi teğetin bir noktasındaki eğimi aslında anlık değişim olabileceğini ifade etmiştir.

Şekil 34

Katılımcı Ö2'ye Ait İkinci Aşama Sorudaki Kavram İmajı



Diğer bir katılımcı olarak çalışmada yer alan Ö3 eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları Tablo 33 ve Tablo 34 de betimlenmiştir.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö3: …anlık değişimde biz aslında eğimi hesap ediyoruz.

Tablo 33

Katılımcı Ö3'e Ait Birinci Aşama Soruda Yer Alan Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: ----
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı Ö3 eğim ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasında ilişkiyi kurarken eğim imajını devreye almadığı görülmektedir. Ancak Ö3 eğim ile ilgili kavram imajları incelendiğinde farklı kategorilerde (K3, PK, GD1, G2) eğim kavramı hakkında kavram imajına sahip olduğu tespit edilmiştir. Değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajının aynı olduğu görülmektedir. Bu iki kavram arasındaki ilişkiyi değişim oranı ile açıkladığı söylenebilir.

Tablo 34

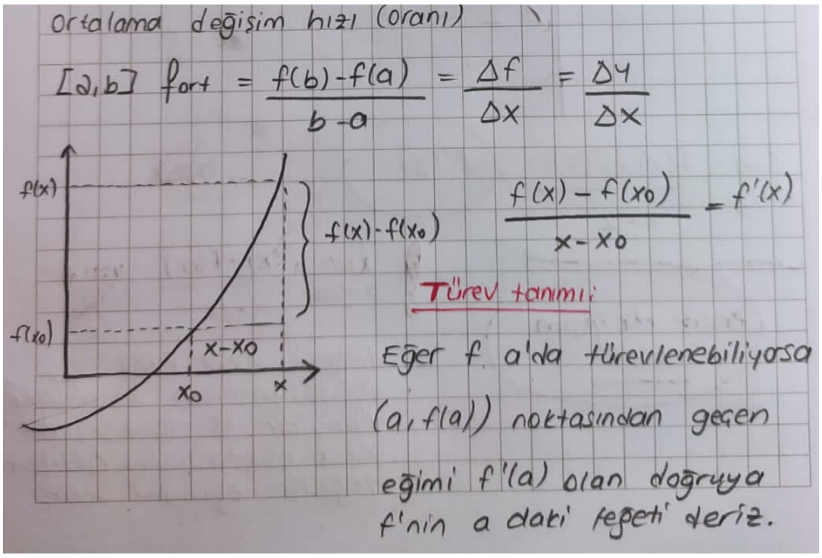
Katılımcı Ö3'e Ait Uygulama Sorularındaki Kavram Imajları

Eğim- Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K2
	Anlık Değişim: Evrensel

Ancak Tablo 34 incelendiğinde katılımcı Ö3 uygulama ile ilgili sorularda bu iki kavram ile ilgili ilişkiyi iki kavram hakkında sahip olduğu kavram imajlarını kullandığı görülmektedir. Bu durum Şekil 35' te görülmektedir.

Şekil 35

Katılımcı Ö3'e Ait Eğim-Değişim Oranı Arasındaki İlişkiyi Açıklaması



Şekil 35 incelendiğinde aslında katılımcı Ö3 eğim ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken eğim kavramı yerine türev kavramını açıkladığı görülmüştür. Kendi ifadelerinde ise bu durumun anlık değişim hızının aslında eğim hesabı olduğundan bahsetmiştir.

Birinci sınıfta öğrenim gören katılımcı Ö1' in ise diğer katılımcılara göre farklı bir bakış açısına sahip olduğu söylenebilir. Katılımcı Ö4 eğim ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarında kullandığı kavram imajlarını kullanabildiği görülmüştür.

Tablo 35

Katılımcı Ö4'e Ait Birinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K3/K2
	Anlık Değişim: Noktasal

Eğim kavramı ile ilgili olan kavram imajlarını yarı yapılandırılmış görüşmede eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasında ilişkiyi açıklarken de kullandığı analiz edilmiştir. Buna benzer durum ise değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajı içinde geçerlidir.

Tablo 36

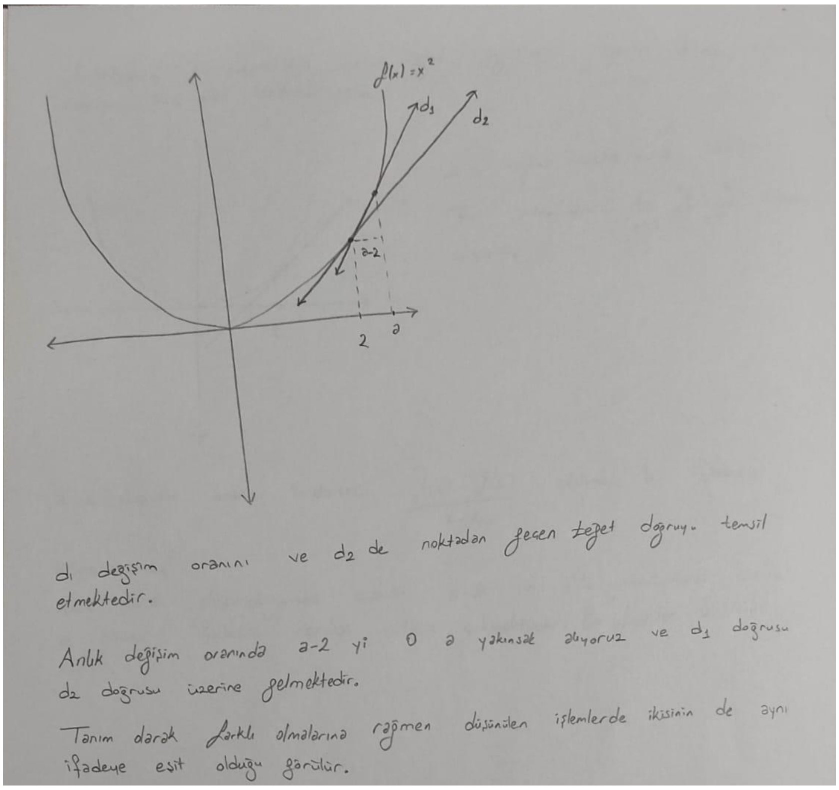
Katılımcı Ö4'e Ait Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajı

Anlık değişim - Eğim arasındaki ilişki	Eğim: K3
	Anlık Değişim: Aralıklı

Ancak Tablo 36 incelendiğinde uygulama sorularında değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajının farklılaştığı görülmüştür.

Şekil 36

Katılımcı Ö4'e Ait İkinci Aşama 6. Soruya Cevabı



Katılımcı Ö4 çizdiği grafikte aslında bir noktadan geçen eğim ile anlık değişim oranının aynı durumu ifade ettiğini bahsetmiştir.

Birinci sınıfta öğrenim gören katılımcı Ö1 ise eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi açıklamak için kullandığı kavram imajları birinci aşama sorularda sahip olduğu kavram imajları Tablo 37 ve ikinci aşama sorularda sahip olduğu imajlar Tablo 38'de gösterilmiştir.

Tablo 37

Katılımcı Ö5'e Ait Birinci Aşama Sorulardaki Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: G1
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı Ö5 eğim ile ilgili sahip olduğu kavram imajlarından farklı olarak "Geometrik oran" kategorisinde yer alan G2 kodunu kullanmıştır. Bu durum değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili sahip olduğu "Evrensel" kategorisindeki kavram imajı bu soruda "Noktasal" kategorisinde olduğu görülmektedir.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö5: *…eğim ile değişim oranı arasında bir ilişki vardır. Değişim oranı anlık olunca aslında eğim oluyor. Ama tam olarak açıklayamadım.*

Bu durum şöyle özetlenebilir, katılımcı Ö5' in kavramlar ile ilgili ayrı ayrı imajlarının daha zengin olduğu tespit edilmişken kavramlar arasındaki ilişkileri açıklarken bu imajlarını tam olarak kullanamadıkları görülmüştür. Aslında bu iki kavram arasında ilişkiyi kuramadığını ifade etmiştir.

Tablo 38

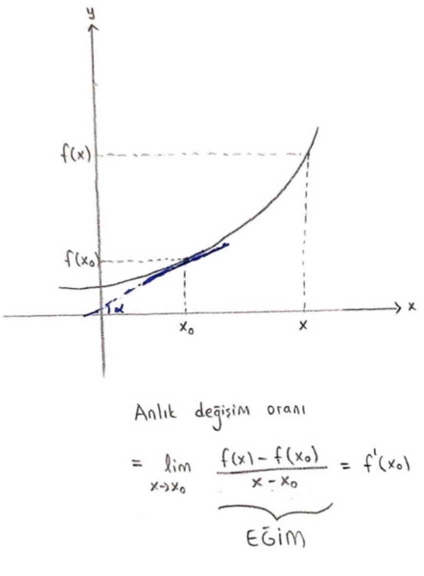
Katılımcı Ö5'e Ait Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajı

Anlık değişim - Eğim arasındaki ilişki	Eğim: K3/K2
	Anlık Değişim: Noktasal

İkinci aşama sorularda yer alan eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarındaki ilişkiye ait kavram imajları ise katılımcı Ö5' in birinci aşama sorularda sahip olduğu kavram imajlarına benzer olduğu görülmektedir.

Şekil 37

Katılımcı Ö5'e Ait Eğim-Değişim Oranı Arasındaki Cevabı



Şekil 37 incelendiğinde katılımcı Ö5' in uygulama sorularında eğim kavramı ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı arasındaki ilişkiyi açıklarken grafikten ve limitten faydalandığı görülmüştür. Anlık değişim oranını Şekil 37' de eğim olarak ifade etmeye çalışmıştır. Eğim ile ilgili kavram imajları K3 ve K2 koduna sahip olduğu Şekil 37' de görülürken anlık değişim oranı ile ilgili kavram imajı "Noktasal" olarak görülmektedir.

Birinci sınıfta öğrenim gören diğer bir katılımcı Ö6 birinci aşama soruda ve ikinci aşama soruda eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ise Tablo 39' da gösterilmiştir.

Tablo 39

Katılımcı Ö6'ya Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: G1
	Anlık Değişim: Noktasal

Tablo 39' da yer alan kavram imajları aslında katılımcı Ö6' nın kavramlar ile ayrı ayrı sahip olduğu kavram imajlarıyla benzerlik gösterdiği görülmektedir.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö6: eğim ile anlık değişim oranı arasında bir ilişki vardır. Türevin tanımı buradan geliyor bir noktadaki eğimi çok küçük bir değişimin anlık değişimi oluyor.

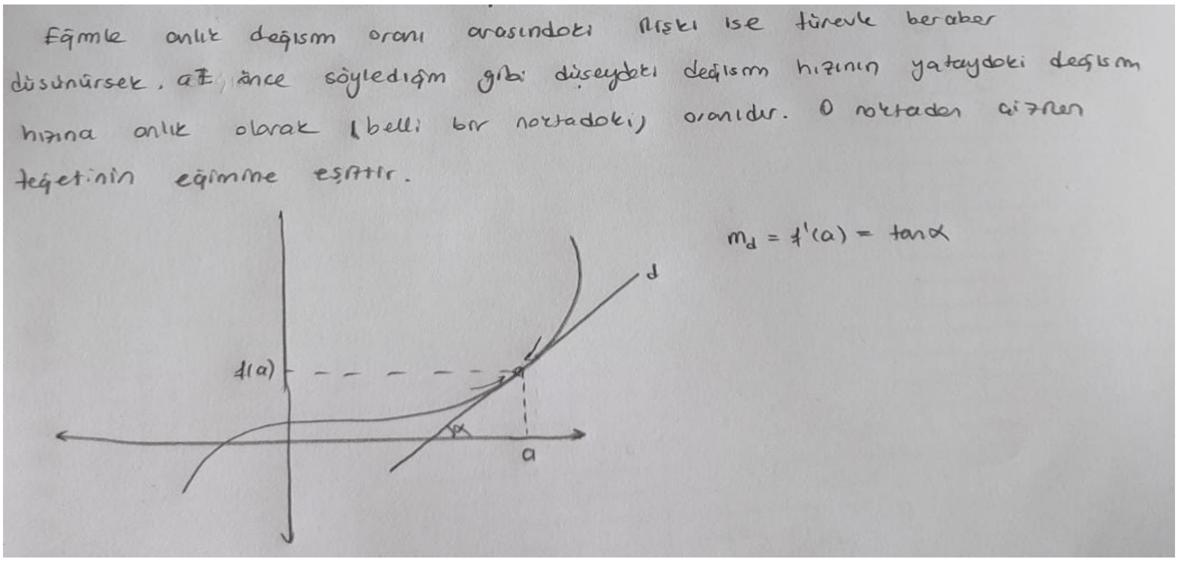
A: Peki bu durumu biraz daha açıklayabilir misin? Yani türevin tanımından eğim ve anlık değişim oranını nasıl izah edebilirsin?

Ö6: aslında soru olmuş olsa izah edebilirim ama…

Yarı yapılandırılmış görüşmede katılımcı Ö6 aslında anlık değişim oranı ve eğim kavramı arasındaki ilişkiyi türev kavramının tanımı ile açıklamaya çalışmıştır. Bu durumu Şekil 38' de verdiği cevapla izah etmiştir. Şekil 38' de koordinat sistemi üzerinde doğrusal olmayan bir fonksiyonun grafiğinde çizimler yaptığı ve bu durumu da anlık hız ile açıklamaya çalıştığı görülmektedir. Burada kullandığı anlık hız ifadesi değişim oranı kavramı ile ilgili kavram imajının "Noktasal" olduğu görülmektedir. Ayrıca eğim kavramı ile ilgili kavram imajı ise düşeydeki değişimlerin yataydaki değişimlere oranı ifadesi ile "Geometrik oran" kategorisinde G1 imajına sahip olduğu söylenebilir.

Şekil 38

Katılımcı Ö6'nın Birinci Aşamada Verdiği Cevabı



İkinci sınıfta öğrenim gören diğer bir katılımcı Ö7' nin birinci aşama soruda ve ikinci aşama soruda eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ise Tablo 40 ve Tablo 41' de gösterilmiştir.

Tablo 40

Katılımcı Ö7'ye Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K2/T1
	Anlık Değişim: Noktasal

Tablo 40 incelendiğinde katılımcı Ö7' nin değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajı değişmemiştir. Ancak eğim ile ilgili K2 imajını bu iki kavram arasındaki ilişkiyi kurmak için kullandığı görülmektedir. Eğim ile ilgili sorularda katılımcı Ö7' nin "Kalkülüs" kategorisinde yer alan türev kavramı ile kodlanan K2 imajına sahip olduğu görülmektedir.

A: Eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ö7: Her noktadaki gidilen adım bize değişim oranı verir. Aslında her anlık eğim bize değişim oranı verir.

A: Peki bu durumu biraz daha açabilir misin?

Ö7: …aslında şöyle ifade edebilirim, teğetin eğimi türevdir bunu biliyoruz. Dolayısıyla oradaki anlık bir noktadaki değişim anlık değişim oranıdır ki bu da o noktada o fonksiyonun, grafiğin eğimidir... tanjant açısıdır aslında…

Tablo 41

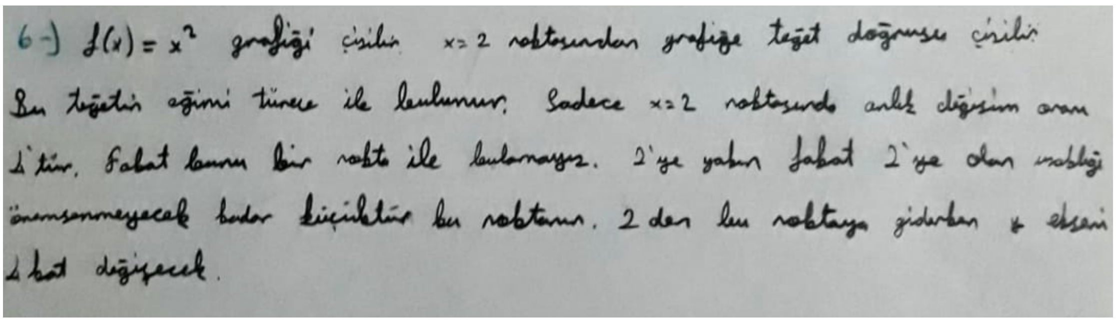
Katılımcı Ö7'ye Ait Ikinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Eğim arasındaki ilişki	Eğim: G2/T1/K2
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı Ö7' nin uygulama sorularında yer alan eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları, yarı yapılandırılmış görüşme sorularına göre farklılık göstermektedir. Birinci aşama sorularında sahip olduğu değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına yönelik kavram imajı aynı kalırken bu durum eğim kavramı ile ilgili kavram imajlarına farklı kavram imajlarının eklendiği görülmektedir. Burada dikkat çeken durum ise daha önce kullanmadığı "Trigonometrik Anlayış" kategorisinde yer alan T1 imajını kullanmasıdır.

Şekil 39

Katılımcı Ö7'ye Ait İkinci Aşama Sorudaki Cevabı



Şekil 39 incelendiğinde ise aslında katılımcı sözel olarak bu durumu ifade etmeye çalışmaktadır. Teğetin eğimi türev ile bulunabileceğini ifade etmiştir. $x = 2$ noktasındaki anlık değişim oranının bir nokta ile bulunamayacağı 2 noktasına yakınsamadan bahsetmektedir. Bu durum katılımcı Ö7' nin eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye ait kavram imajının aslında değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına ait “Noktasal” kategorisinde olduğunu eğim hakkındaki kavram imajının ise G2 ve K2’de olduğu görülmüştür. Aslında T1 kategorisinde olan durum ise katılımcının sözel ifadesi ile ortaya çıkan bir durum olduğu görülmektedir.

Araştırmanın üçüncü alt probleminde ortaya çıkan durum özetlenecek olursa aslında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandıkları imajlar genel olarak benzer olduğu görülmüştür. Dikkat çeken bir durum ise ilköğretim matematik öğretmen adayları yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip oldukları kavram imajlarının ikinci aşama sorular yani uygulama sorularında farklılaştığı görülmüştür. Bu durum uygulama sorularında ise genelde öğretmen adaylarının sözel olarak ifadeden daha çok grafiksel gösterim yaptıkları ve bu durumu açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Dikkat çeken bir durum ise eğim kavramı ile ilgili sahip olunan imajlar eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandıkları kavram imajlarından farklılık gösterdiği gözlemlenmiştir. Ancak değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkında sahip oldukları kavram imajlarının genel olarak aynı kaldığı görülmüştür.

4- İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim Ve Anlık Değişim Oranının Türev İle Olan İlişkilerine Yönelik Kavram İmajı

Araştırmaya ait dördüncü alt problemde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim ve anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramı ile olan ilişkilerine yönelik kavram imajları incelenmiştir. Burada izlenen yol, eğim kavram imajı ve değişim oranı/anlık değişim oranına ait analiz çerçevesi incelenmiştir. Birinci aşama sorularda yer alan *“Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.”* Sorusu ile ikinci aşama sorulardan olan Tablo 42’ de yer alan soru ile bu durum analiz edilmiştir.

Tablo 42

İkinci Aşama Sorularda Yer Alan Türev, Eğim Ve Anlık Değişim Oranı Arasındaki Ilişkiye Yönelik Soru

Zeynep ve Yeliz türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Zeynep bir noktadaki türevin, o noktadaki değişim oranı ile o noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimine eşit olduğu belirtmiştir. Zeynep, Yeliz'e $\boxed{f(x)=x^2}$ fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının, türevinin ve eğiminin 4'e eşit olduğunu ifade etmiştir. Yeliz ise x=2 noktasındaki eğimin türeve eşit olabileceğini iddia etmiştir. Siz Zeynep'in yerinde olsaydınız, Yeliz'e nasıl yardımcı olurdunuz ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız?

Katılımcı Ö1' e ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye ait kavram imajları Tablo 43 ve Tablo 44'te incelenmiştir.

Tablo 43

Katılımcı Ö1'e Ait Birinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Türev-Anlık değişim –Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Sözel-Oran-Oran/Limit/Fonksiyon

Katılımcı Ö1' in bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken aslında değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile eğim kavramı hakkındaki imajlarının değişmediği görülmüştür. Ö1 eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı kavram imajlarını bu kavramların türev kavramı ile ilişki kurarken de kullandığı görülmektedir. Ayrıca katılımcı Ö1' e ait türev kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajı da aynı kaldığı söylenebilir. Yani süreç nesne çiftlerinden sözel- oran çiftinde ve oran, limit ve fonksiyon satırlarına sahip ancak bu imaj hücrelerinin de boş olduğu görülmüştür.

A: Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Ö1: Bu üç kavram da aslında ben eğimi anlatırım daha temel bir konudur. Benim zihnimde eğim daha temel olarak oturduğunu düşünüyorum. Daha sonra türev geliyor. Türevle eğimin arasındaki ilişkiden sonra anlık değişime girerim. Geometrik yorumda bir noktadaki *eğimine bakıyoruz., fiziksel yorumda da anlık değişime bakıyoruz diyebilirim. Aslında tam ifade edemedim aslında soru üzerinde anlatabilir ama sözel ifade etmekte zorlandım açıkçası.*

Aslında katılımcı Ö1 bu üç kavram arasında bir ilişkinin olduğunu bahsediyor ancak bu durumu açıklamakta güçlük çektiğini söylüyor. Daha sonra bu üç kavram arasında bir hiyerarşi kurarak bu üç kavram arasındaki ilişkinin daha anlamlı olabilmesi için eğim kavramı üzerinden ilişki kurabileceğinden bahsediyor. Buradaki durum şöyle özetlenebilir, öğretmen adayları sözel ifadelerde zorlandığı bir durumu uygulama sorularında daha net açıklayabileceklerini ifade etmektedirler. Aslında kavram tanımını sözel olarak yapmakta güçlük çektikleri söylenebilir. Bu durumda kavram tanımının kavram imajına etki etmediği görülmektedir.

Tablo 44

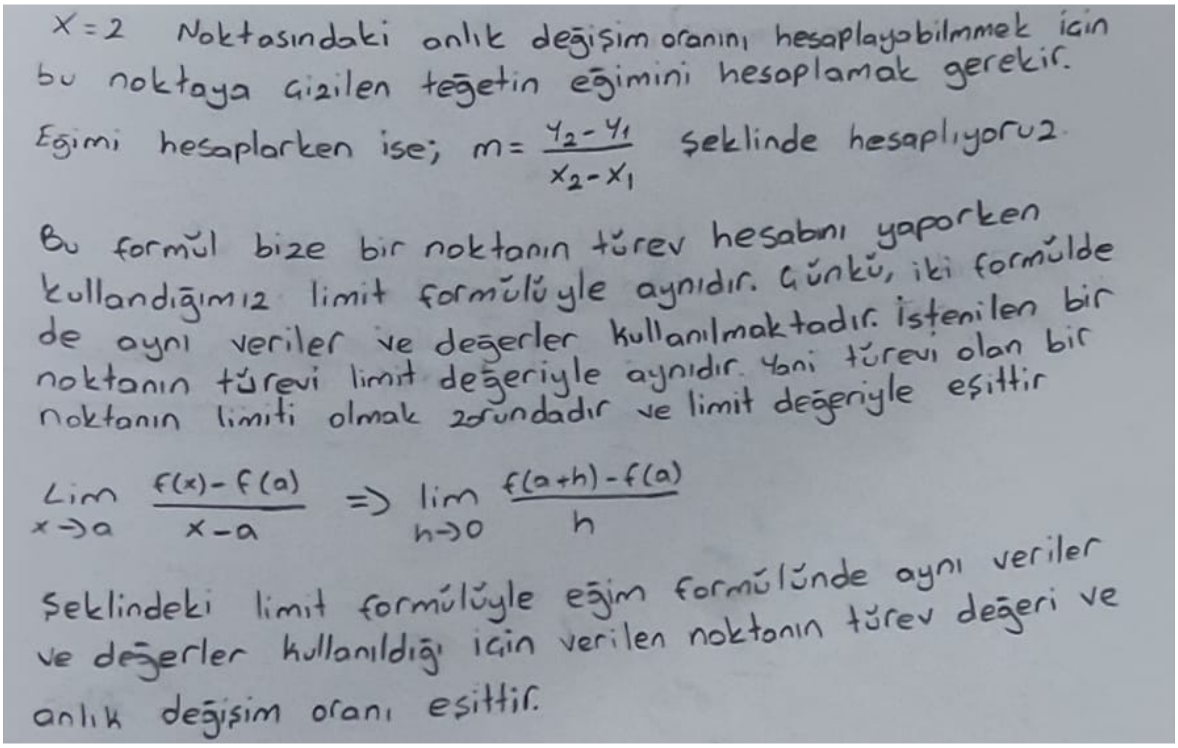
Katılımcı Ö1'e Ait Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Evrensel
	Eğim: G1 Türev: Sözel-Oran/Oran/Limit

İkinci aşama sorularda ise katılımcı Ö1' e ait kavram imajlarının tamamen farklılaştığı görülmektedir. Birinci aşama sorularda kullandığı imajlar ikinci aşama sorularda kullandığı imajlar ile örtüşmemektedir.

Şekil 40

Katılımcı Ö1'e Ait İkinci Aşama Sorulardaki Cevabı



$x=2$ Noktasındaki anlık değişim oranını hesaplayabilmmek için bu noktaya çizilen teğetin eğimini hesaplamak gerekir.
Eğimi hesaplarken ise; $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ şeklinde hesapliyoruz.

Bu formül bize bir noktanın türev hesabını yaparken kullandığımız limit formülüyle aynıdır. Çünkü, iki formülde de aynı veriler ve değerler kullanılmaktadır. İstenilen bir noktanın türevi limit değeriyle aynıdır. Yani türevi olan bir noktanın limiti olmak zorundadır ve limit değeriyle eşittir

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

şeklindeki limit formülüyle eğim formülünde aynı veriler ve değerler kullanıldığı için verilen noktanın türev değeri ve anlık değişim oranı eşittir.

Şekil 40 incelendiğinde katılımcı Ö1' in bu üç kavram arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajı, bu üç kavram için yapılan işlemler temelde benzerdir, şeklinde ifade edilebilir.

Katılımcı Ö2' ye ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ise Tablo42 ve Tablo43' te betimlenmiştir.

A: Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

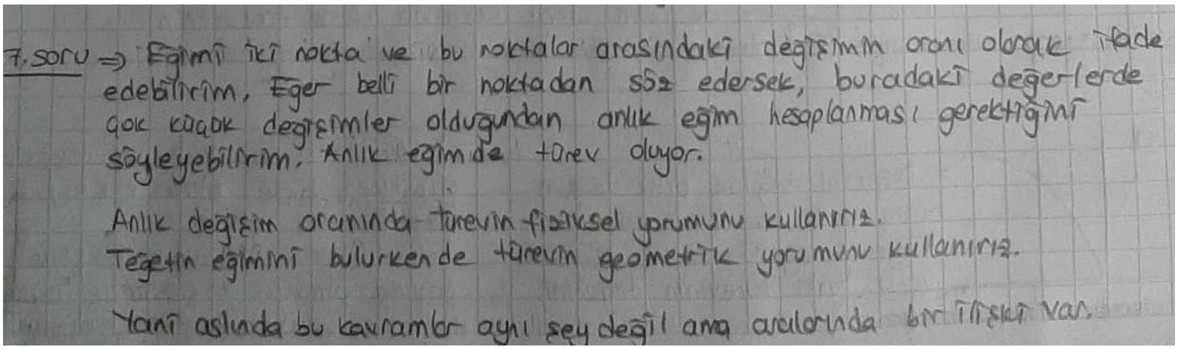
Ö2: Bu üç kavram arasında ilişkiyi şu şekilde ifade edebilirim, aslında bu üç kavram birbiriyle ilişkili şöyle ki türevi anlatmadan önce anlık değişim oranını ifade anlatmamız gerekir, bunun öncesinde de öğrencinin zihninde eğim kavramını bir kere oturması gerekir eğimden sonra anlık değişim oranı veya değişim oranı anlık eğimi ve türev kavramları birbirleri ilişkili olarak ifade edilebilir.

İncelenen görüşmenin transkriptinde katılımcı Ö2 sadece bu kavramlar aynı durumu ifade etmese de aralarında bir ilişkinin olabileceğinden bahsetmiştir.

Yapılan görüşmelerde elde edilen verilere göre katılımcı Ö2 özetle eğim kavramının türevin geometrik yorumu şeklinde ifade ederken anlık değişim oranını ise türevin fiziksel yorumu olarak ifade etmiştir. Şekil 41' de katılımcı Ö2' ye ait cevap bu durumu betimlemektedir.

Şekil 41

Katılımcı Ö2'ye Ait Birinci Aşama Sorudaki Cevabı.


7. soru ⇒ Eğimi iki nokta ve bu noktalar arasındaki değişimin oranı olarak ifade edebilirim, Eğer belli bir noktadan söz edersek, buradaki değerlerde çok küçük değişimler olduğundan anlık eğim hesaplanması gerektiğini söyleyebilirim. Anlık eğimde türev oluyor.

Anlık değişim oranında türevin fiziksel yorumunu kullanırız.
Teğetin eğimini bulurkende türevin geometrik yorumunu kullanırız.

Yani aslında bu kavramlar aynı şey değil ama aralarında bir ilişki var.

Tablo 45

Katılımcı Ö2'ye Ait Birinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev–Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: T1
	Türev: Grafiksel –Eğim/Oran

Tablo45 incelendiğinde ise katılımcı Ö2' nin aslında sahip olduğu kavram imajlarını bu üç kavram arasında ilişki kurmaya çalıştığı ancak net bir cevap veremediği görülmüştür. Katılımcı Ö2' ye ait ikinci aşama sorularda ise bu durumun değişmediği ayrıca uygulama sorularında bu üç kavram arasındaki ilişkiye ait kavram imajını kullanmadığı görülmüştür.

Tablo 46

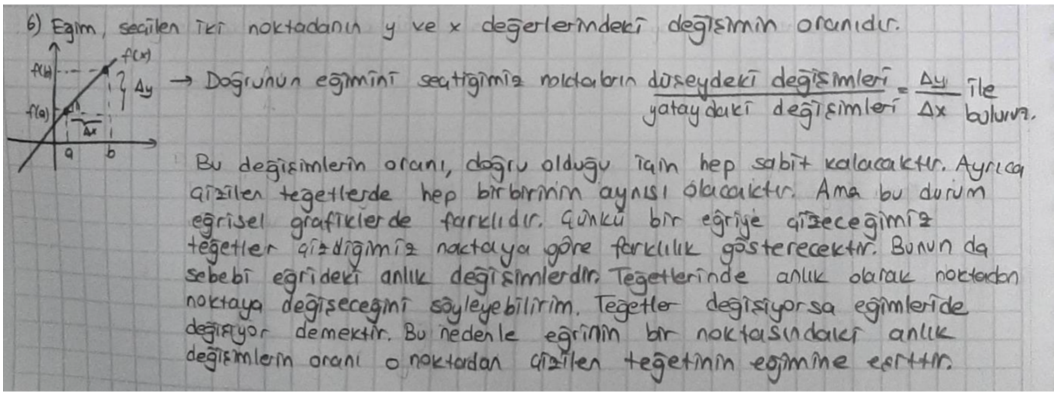
Katılımcı Ö2'ye Ait Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev–Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal?
	Eğim: G1?
	Türev: Grafiksel–Eğim /Oran

Ancak katılımcı Ö2' nin eğim kavramı ile değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki, anlık değişim oranı ve türev kavramları arasında bulunan ilişkiye ait kavram imajlarının olmasına rağmen bu üç kavram arasındaki ilişkiyi ifade eden kavram imajlarını kullanmadığı görülmüştür. Bu durum Şekil42'de anlık değişim oranı ve teğetin eğimi kavramları arasındaki ilişkiyi anlattığına dair cevabı görülmektedir. Aslında katılımcı Ö2' nin bu üç kavram arasındaki ilişkiye dair verdiği cevaplarda farkındalığının olmadığı görülmektedir.

Şekil 42

Katılımcı Ö2'nin Eğim Ve Anlık Değişim Oranı Kavramları Arasındaki İlişkiye Dair Cevabı



Katılımcı Ö3' e ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ise Tablo47 ve Tablo48' de betimlenmiştir.

Tablo 47

Katılımcı Ö3'e Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: G1 Türev: Fiziksel-Hız-Oran

Katılımcı Ö3' ün anlık değişim, eğim ve türev kavramları arasındaki ilişkiyi açıklamada kullandığı kavram imajları daha önce sahip olduğu kavram imajlarıyla benzerlik göstermiştir. Yapılan yarı yapılandırılmış görüşmede ise katılımcı Ö3' ün ifadeleri şu şekildedir:

> *A: Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.*

Ö3: …bu kavramlar arasında bir ilişki var hepsi birbirleri ile bağlantılıdır. En basit olarak eğimi anlatırım sonra anlık değişim oranı ve türevi bağdaştırarak bu kavramları ilişkilendiririm. Aslında bunlar arasındaki ilişkiyi tablo veya grafikle gösterebilirim… Örneğin pandemiyi örnek verecek olacak olursak hastalığın yayılma hızı aslında günlük hayattaki örnek olarak verebiliriz orada grafik ve tablolarda yorumlara baktığımızda hastalığın yayılma hızı mesela orada biz aslında türevi yorumluyoruz.

Ö3' ün bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken aslında günlük hayatta karşılaşılan durumlara örnek verdiği görülmüştür. Ayrıca katılımcı Ö1 gibi bu üç kavram arasında bir hiyerarşiden bahsetmiştir.

Tablo 48

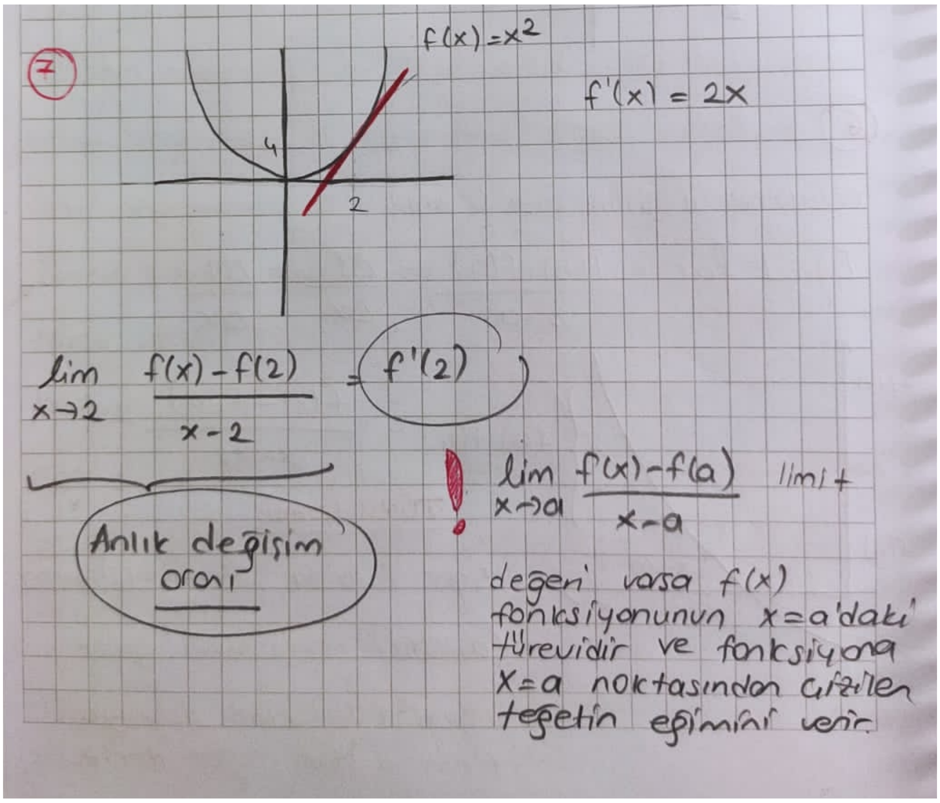
Katılımcı Ö3'e Ait Ikinci Aşama Sorudaki Kavram Imajı

Anlık değişim –Türev– Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Evrensel
	Eğim: K2 Türev: Grafiksel-Eğim- Limit

Katılımcı Ö3' ün ikinci aşama sorularda ise birinci aşama sorulardakinden farklı kavram imajlarına sahip olduğu görülmüştür. Burada eğim kavramı için "Kalkülüs" kategorisindeki K2 kavram imajı, türev kavramı için süreç nesne çiftlerinden grafiksel-eğim çiftinde sahip olduğu kavram imajı ve anlık değişim oranı için "Evrsensel" kategorisindeki kavram imajı bu kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklamaya yönelik sahip olduğu kavram imajlarıdır. Ayrıca katılımcı Ö3 uygulama sorularında bulunan yedinci soru için verdiği cevap Şekil43' te bulunmaktadır.

Şekil 43

Katılımcı Ö3'e Ait Yedinci Sorudaki Cevabı



Katılımcı Ö4' e ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki kavram imajları ise Tablo 49 ve Tablo 50' de gösterilmiştir.

Tablo 49

Katılımcı Ö4'e Ait Birinci Aşamadaki Soru 7'ye Ait Kavram Imajları

Anlık değişim–Türev–Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Grafiksel-Eğim- Fonksiyon

Katılımcı Ö4' ün daha önceden sahip olduğu kavram imajlarını bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken de kullandığı görülmektedir. Katılımcı Ö4' ün katılımcılar arasında farklı kavram imajlarına sahip olduğu görülmüştür. Bu bağlamda katılımcı Ö4 türev kavramı, eğim kavramı ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarını kullanırken zorluk çekmediği söylenebilir.

A: Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Ö4: bu kavramlar arasında şöyle bir ilişki var diyebilirim. Elimizde bir fonksiyon var bu fonksiyonun türevini alırsak değişik noktalardaki eğimlerini bulabiliriz. Ama anlık değişim oranında belli iki nokta arasındaki değişimi hesap edebiliriz ki zaten orada da eğim hesaplıyoruz. Bu kavramlar arasında mesela ben eğimi anlatırım sonra değişim oranı ve türeve geçiş yaparım.

Katılımcı Ö4' ün birinci aşama sorularda verdikleri cevaplarda benzer şekilde bu üç kavram arasında bir hiyerarşiden bahsetmiştir.

Tablo 50

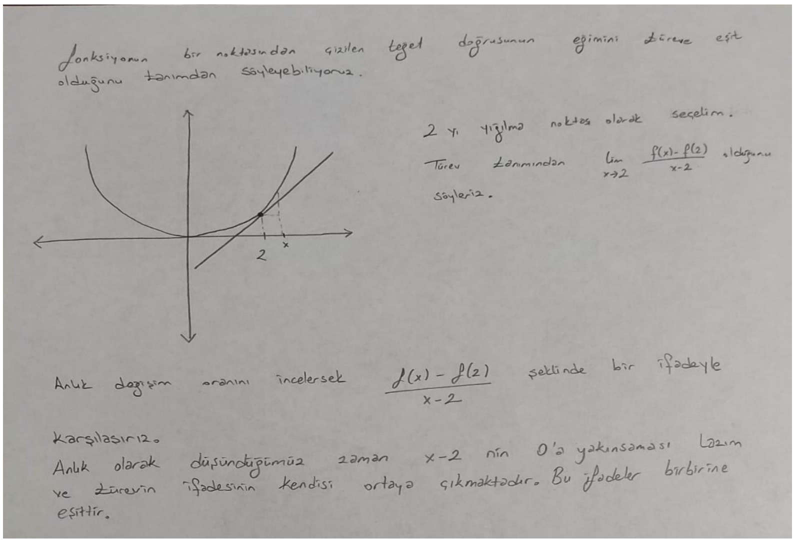
Katılımcı Ö4'e Ait Ikinci Aşama Soru 7'ye Ait Kavram Imajları

Anlık değişim–Türev –Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Aralıklı
	Eğim: K3
	Türev: Grafiksel-Eğim-Oran/Limit/Fonksiyon

Tablo50 incelendiğinde katılımcı Ö4' ün birinci aşama soruda yer alan soruyla ilgili olarak ikinci aşama soruda da benzer kavram imajlarına sahip olduğu görülmektedir. Ancak değişim oranı kavramı ile ilgili kavram imajının ise "noktasal" kategorisinden "aralıklı" ya dönüştüğü görülmüştür. Ayrıca türev kavramını ise limit kavramı ile açıklamayı tercih etmiştir. Bu durum Şekil44' te katılımcı Ö4' ün verdiği cevap incelendiğinde görülmektedir.

Şekil 44

Katılımcı Ö4'e Ait İkinci Aşama Soru 7'ye Verdiği Cevap



Katılımcı Ö5' e ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki kavram imajları ise Tablo 51 ve Tablo 52 de gösterilmiştir.

Tablo 51

Katılımcı Ö5'e Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajı

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: ?
	Eğim: C? Türev:---

Yapılan görüşme neticesinde katılımcı Ö5' in bu üç kavram arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları tespit edilememiştir. Ancak daha önce eğim kavramı ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye dair kavram imajlarını kullanabildiği tespit edilmiştir.

A: Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Ö5: aslında bu kavramlar birbirleri ile ilişkilidir. Aslında değişimi hesaplıyoruz biz bu üç kavramlarda. Bir oran var aslında bu kavramları hesaplarken.

A: Peki bu durumu biraz daha açabilir misin? Yani hangi tür hesaplamalar yaparken bu durumdan bahsediyoruz?

Ö5: hımmm anımsayamadım..

Tablo 52

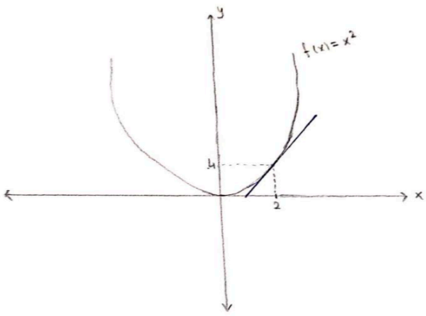
Katılımcı Ö5 E Ait Ikinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: T1/K3/K2 Türev: Grafiksel-Eğim- Limit

İkinci aşama sorularda ise katılımcı Ö5 daha önceden sahip olduğu kavram imajlarını uygulama sorularında da kullanabilmiştir. Bu üç kavram arasındaki ilişkiye yönelik sahip olduğu kavram imajı Şekil45' te katılımcı Ö5' e ait cevaplar analiz edilmiştir.

Şekil 45

Katılımcı Ö5'in İkinci Aşama Sorudaki Cevabı



x=2 noktasındaki anlık değişim oranı ile o noktadan geçen teğetin eğimi aynı ifadelerdir.

Bir fonksiyonun anlık değişim oranına fonksiyonun türevi denir.

Aynı zamanda bir fonksiyon üzerindeki herhangi bir noktadan o fonksiyona çizilen teğetin tanjant değeri de türev demektir. Limit yardımıyla açıklanır.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limit değeri,(eğer varsa) f(x) fonksiyonun x=a noktasındaki türevidir

fonksiyona x=a noktasında çizilen teğetin eğimini vermektedir.

Şekil 45' te katılımcı Ö5 aslında grafiksel gösterimle durumu izah etmeye çalışmıştır. Bunun yanında $x = 2$ noktasındaki eğim ve anlık değişim oranının aynı kavramı ifade ettiğinden bahsetmiştir. Ayrıca fonksiyona çizilen teğetin tanjant değerinin türev olduğunu ifade etmiştir. Katılımcı Ö5 ve diğer katılımcıların cevapları dikkate alındığında aslında öğretmen adaylarının uygulama sorularında sahip oldukları kavram imajlarının görüşme sorularına göre daha fazla olduğu söylenebilir. Katılımcı Ö5 görüşme sorularında bu üç kavram ile ilgili herhangi bir kavram imajını kullanamazken uygulama sorularında bu durumu farklı gösterim biçimleri ile desteklediği görülmüştür.

Katılımcı Ö6' ya ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye ait kavram imajı Tablo53 ve Tablo54' te gösterilmiştir.

Tablo 53

Katılımcı Ö6'ya Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim:---
	Eğim: ---
	Türev:---

Katılımcı Ö6 yarı yapılandırılmış görüşme sonucunda türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik herhangi bir kavram imajına sahip olmadığı görülmüştür. Ancak kavramlar arasında örneğin eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasında sahip olduğu imajlar bulunmaktadır. Ancak bu üç kavram arasındaki durumu açıklamak için herhangi bir durumdan bahsetmediği görülmüştür.

Tablo 54

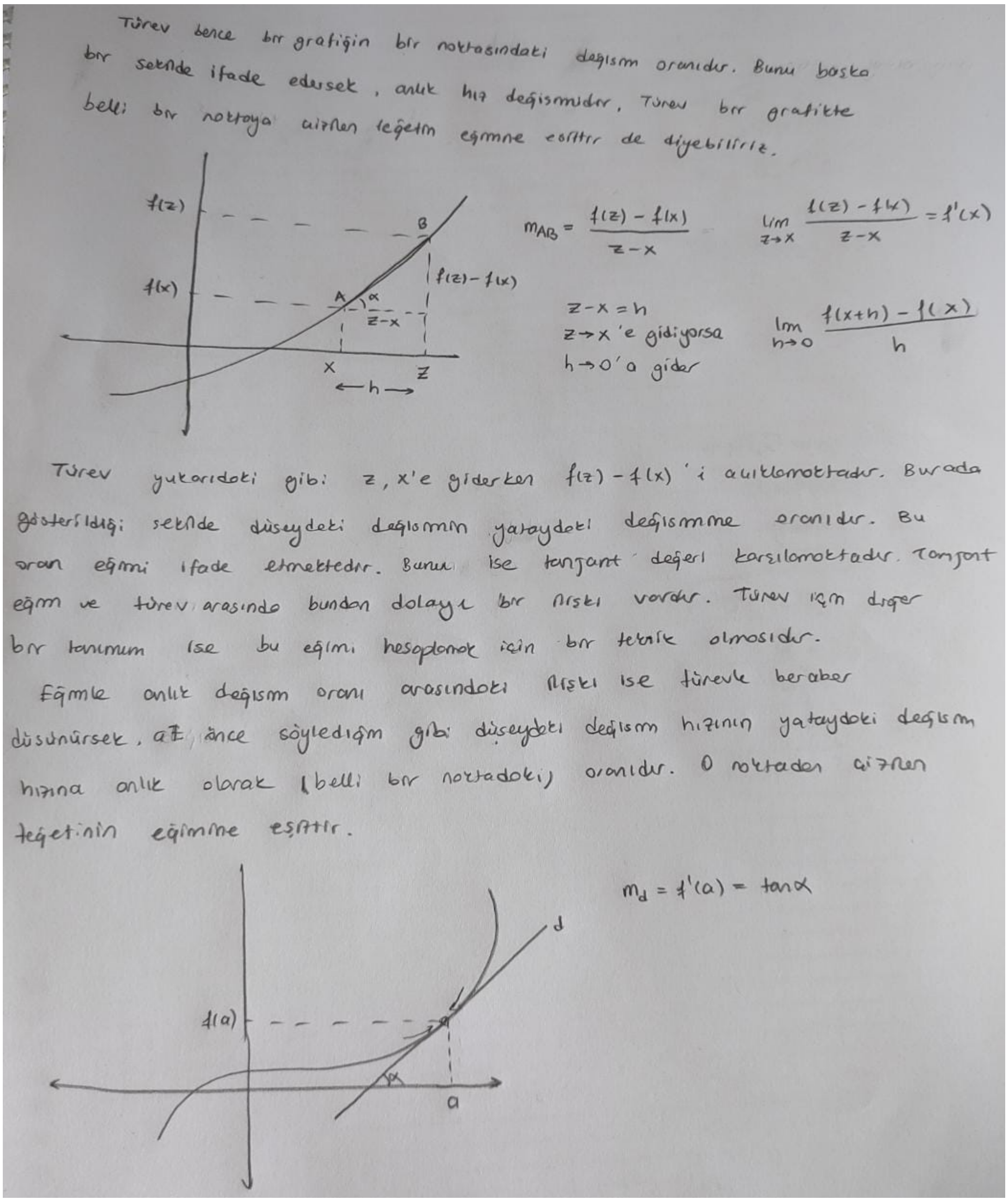
Katılımcı Ö6'ya Ait Ikinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Grafiksel-Eğim- Fonksiyon

Tablo54 incelendiğinde katılımcı Ö6 tıpkı katılımcı Ö5' e benzer şekilde görüşme sorularında herhangi bir kavram imajını kullanamamıştır. Ancak uygulama sorularında bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklamak için sahip olduğu kavram imajları tespit edilmiştir.

Şekil 46

Katılımcı Ö6'nın İkinci Aşama Sorudaki Cevabı



Şekil 46 katılımcı Ö6' nın türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi anlattığı cevap görülmektedir. Katılımcı Ö6 yarı yapılandırılmış görüşme sorularında herhangi bir ilişkiden bahsetmemişken, uygulama soruları olarak betimlenen ikinci aşama sorularda farklı gösterim biçimlerini kullanarak sahip olduğu kavram imajları ile bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışmıştır.

Katılımcı Ö7’ ye ait türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki kavram imajları Tablo 55 ve Tablo 56’ da gösterilmiştir.

Tablo 55

Katılımcı Ö7’ye Ait Birinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: ---
	Eğim: ---
	Türev: ---

Tablo 55 incelendiğinde diğer katılımcılara benzer (Ö5, Ö6, Ö7) bir durum vardır. Katılımcı Ö7’ nin yarı yapılandırılmış görüşme sorularında yer alan türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik herhangi bir kavram imajına sahip olmadığı tespit edilmiştir. Ancak katılımcı Ö7’ ye kavramlar tek tek sorulduğunda ilgili kavram için sahip olduğu kavram imajlarını kullanabilirken, bu üç kavramın birbirleri ile ilişkisini kurarken herhangi bir kavram imajına sahip olmadığı görülmüştür. Fakat durum benzer şekilde diğer katılımcılarda olduğu gibi uygulama sorularında sahip olduğu kavram imajlarını kullanabilmiştir.

Tablo 56

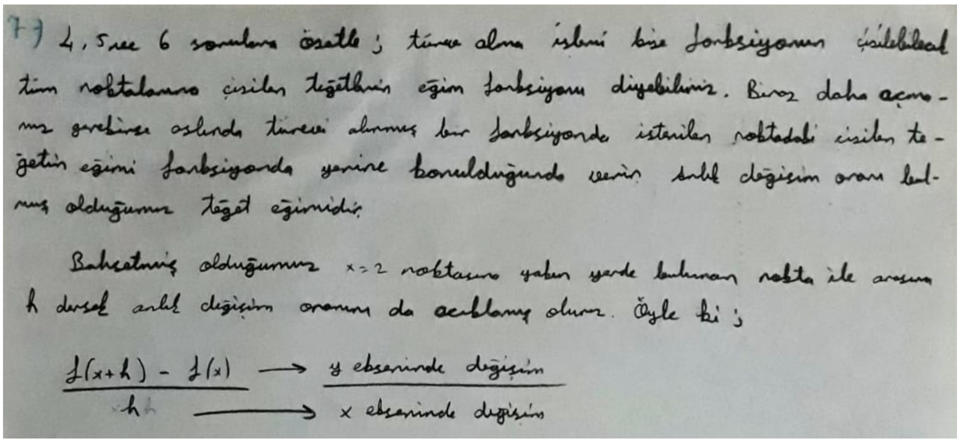
Katılımcı Ö7’ye Ait Ikinci Aşama Sorudaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Türev: Grafiksel-Eğim- Fonksiyon

Tablo56’ da yer alan kavram imajları katılımcı Ö7’ nin ikinci aşamada verdiği cevaplar analiz edilmiştir.

Şekil 47

Katılımcı Ö7'ye Ait Cevap


7) 4, 5 ve 6 sorulara özetle; türev alma işlemi bize fonksiyonun çizilebilecek tüm noktalarına çizilen teğetlerin eğim fonksiyonu diyebiliriz. Biraz daha açmamız gerekirse aslında türevi alınmış bir fonksiyonda istenilen noktadaki çizilen teğetin eğimi fonksiyonda yerine konulduğunda verir anlık değişim oranı bulmuş olduğumuz teğet eğimidir.

Bahsetmiş olduğumuz $x=2$ noktasına yakın yerde bulunan nokta ile arasına h dersek anlık değişim oranını da açıklamış oluruz. Öyle ki;

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \frac{y \text{ ekseninde değişim}}{x \text{ ekseninde değişim}}$$

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları incelenmiştir. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu üç kavramın birbirleri ile ilişkisine yönelik kavram imajları tespit edilmiştir. Yapılan analizlerde çıkan bulgulara yönelik dikkat çeken hususlardan bir tanesi; öğretmen adayları birinci aşama sorulara yönelik (yarı yapılandırılmış görüşme soruları) verdikleri cevaplar incelendiğinde sahip oldukları kavram imajları, ikinci aşama sorularda (uygulama soruları) sahip oldukları kavram imajlarına göre biraz daha az sayıda olduğu görülmüştür. Ayrıca genel olarak bakıldığında ilköğretim matematik öğretmen adayları ilk aşama sorularda sahip oldukları kavram imajlarını ikinci aşama sorularda da kullanabilmiştir. Bu durum birinci sınıflarda katılımcı Ö4 ve Ö6, ikinci sınıflarda katılımcı Ö1 ve Ö3' te görülmüştür.

Katılımcılara bütün kavramlar tek tek sorulduğunda kavram imajlarına sahip oldukları görülmüştür; ancak kavramların birbirleri ile ilişkisini açıklamada kavram imaj hücrelerini etkin bir şekilde kullanamadıkları görülmüştür. Bu durum özellikle birinci aşama sorularda dikkat çeken bir husus olmuştur. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adayları özellikle ikinci aşama sorularda kavramların birbirleri ile olan ilişkisine yönelik kavram imajlarını genel olarak kullanmaya çalışmışlardır. Ancak bu durum hem birinci aşama hem de ikinci aşama sorularda son soruda yer alan türev, eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarını kullanmada bazı zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu zorluklar: bu üç kavramın birbirleriyle aynı olduğu yönündeki ifadeleri olmuştur, bununla birlikte türev kavramını eğim hesabı olduğunu ifade etmelerine rağmen değişim oranı kavramı ile bir ilişkiyi açıklayamadıkları tespit edilmiştir.

Matematik eğitimcileri ile yapılan görüşmelerde ve ikinci aşamada yer alan sorularda verdikleri cevaplar tıpkı ilköğretim matematik öğretmen adaylarında olduğu gibi iki aşamada analiz edilmiştir. İlk aşamada yarı yapılandırılmış görüşme soruları incelenmiş, daha sonra ikinci aşamada yer alan sorulardaki cevaplar analiz edilerek matematik eğitimcilerinin sahip oldukları kavram imajları tespit edilmeye çalışılmıştır. Analiz çerçevesi olarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarına ait kavram imajlarını tespit etmede kullanılan analiz çerçeveleri kullanılmıştır.

5- Matematik Eğitimcilerinin Eğim Konusu Hakkındaki Kavram İmajları

Matematik eğitimcileri ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde ve ikinci aşama sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde

Tablo 57' de eğim kavramı hakkındaki kavram imajları incelenmiştir.

Tablo 57

Matematik Eğitimcilerinin Birinci Aşama Sorularda Yer Alan Eğim Hakkındaki Kavram Imajları

Matematik	Kavram İmajları													
Eğitimcisi	G1	G2	C1	C2	F	f	PK	T1	K1	K2	K3	GD1	GD2	D1
ME1		X						X	X					
ME2	X					X		X	X	X	X	X		
ME3	X	X		X		X	X	X	X	X	X			X
ME4		X					X	X		X	X	X		

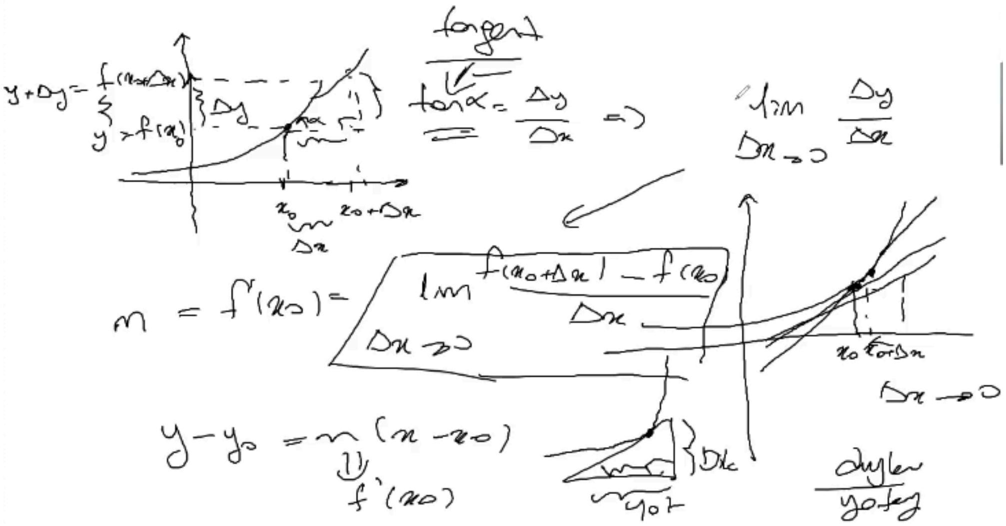
Tablo57 incelendiğinde matematik eğitimcilerinin eğim kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajları tespit edilmeye çalışılmıştır. Tablo57' de dikkat çeken durum ise katılımcı ME3' ün diğer katılımcılara göre daha fazla kategoride kavram imajına sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca katılımcı olarak çalışmada yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Analiz derslerinden sorumlu katılımcı ME2’ nin eğim kavramı ile ilgili sahip olduğu kavram imajları da sayıca katılımcı ME3’ e yakın olduğu söylenebilir. Burada farklı değişkenler devreye girebileceğinden kavram imajlarının tespiti Tablo57’ de betimlenmiştir.

A: Eğim kavramı nedir? Açıklayınız. Derslerinizde eğim kavramına nasıl değiniyorsunuz?

ME3: Eğim kavramına sınıfta türev kavramına değinerek bahsediyorum aslında. Bir fonksiyon eğrisi düşünürsek bir noktadaki türevi yani eğimine bakıyoruz. Öyle ifade edebilirim X noktasının görüntüsü $f(x)$ ve x noktasının Δx kadar ötelenmiş hali görüntüsü de f dy yani Δy dir. *Aslında şöyle gösterebiliriz.*

Şekil 48

ME3’e Ait Eğim Kavramı Hakkındaki Cevabı



Şekil48’ de yer alan katılımcı ME3’ e ait cevap ve yapılan görüşme de kendisinin eğim kavramı hakkında farklı gösterim biçimlerini kullanarak kavramı tanımladığı görülmüştür. Katılımcı ME3’ ün sahip olduğu kavram imajlarını kullanabildiği ve kavram tanım hücresi ile kavram imajı hücresinin birbirlerini desteklemektedir.

Katılımcı ME2' nin eğim kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajları ME3' ün sahip olduğu kavram imajlarına yakındır.

A: Eğim kavramı nedir? Açıklayınız. Derslerinizde eğim kavramına nasıl değiniyorsunuz?

ME2: Öncelikle türev kavramı ile ilgili ne bildiklerini soruyorum. Öğrencilerden gelen cevaplara baktığımız zaman eğim cevabı geliyor tanjant alfa geliyor veya grafik çizerek onun üzerine göstermeye çalışanlar dahi türev kavramını yine ortaya koymadıklarını görüyorum. Öğrencilerden gelen cevaplar neticesinde ben analiz derslerinde öğrencilerime size türevle alakalı bir soru sorulduğunda sizin ona direk eğim şeklinde cevap verebileceklerini söylüyorum.

ME2 ile yapılan görüşmede eğim kavramından derslerinde bahsederken türev kavramı ile ilgili öğrencilerin önceki bilgilerini dikkate aldığı görülmektedir. Öğrencilerin önceki bilgilerine göre ME2 eğim kavramını analiz1 dersinde bahsettiğini ifade etmiştir. Ayrıca ME2 türev ile ilgili bir soru geldiğinde o soruyu eğim ile cevaplayabileceklerinden bahsetmiştir. Bu bağlamda bakıldığında katılımcı ME2' nin öğrencilerinin ön bilgilerini önemsediği söylenebilir. Günlük hayatta eğim kavramını ise aynı şekilde öğrencilerinin deneyimlerini ön planda tutmalarını istemiştir.

A: peki Analiz 1 derslerinizde eğimin formel tanımını nasıl ifade edersiniz? Yani öğretmen adaylarına nasıl izah ediyorsunuz?

ME2: Belli bir nokta seçtiğimizde o noktanın fonksiyondaki görüntüsü ile o noktadaki değişim oranına baktığımızda aslında bize eğimi veriyor. Sonra da açıkçası noktalarla görüntülerinin arasındaki değişim oranının limiti varsa orada bir eğimden söz edebiliriz ayrıca bu eğimi türevli ilişkilendirebiliriz. Burada eğimi tanımlarken de şunu dememiz *gerekir seçtiğimiz aranın açık olması gerekir o seçtiğimiz aralık açık aralık olursa ab aralığında mesela biz sağdan soldan limite bakarız ve orada bir türevin olabileceğini görebiliriz. Seçtiğimiz aralık kapalı olursa biz buna sağdan veya soldan türevle de tanımlayabiliriz ve direk türev tanımını veya türevi orada hesaplayabiliriz, çünkü sağdan soldan limitlerinin eşit olması bizi o noktada bir noktada türevinin olduğunu gösteriyor.*

Yapılan görüşmede ME2' nin eğim kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajı limit kavramını, türev kavramını, seçilen aralığın açık olması gerektiğine değinmektedir. Ancak ME2 bu durumu farklı gösterim biçimleri ile göstermemiştir, sadece sözel olarak formel tanımı vermek istemiştir. Bu bağlamda analiz dersine devam eden öğrencilerin zihinlerinde tam anlamıyla formel tanımın yerleşemeyeceği söylenebilir. Fakat katılımcı olan öğretmen adaylarının sahip olduğu kavram imajları dersin sorumlusu matematik eğitimcisinin sahip olduğu kavram imajlarıyla bazı noktalarda örtüştüğü görülmektedir.

Katılımcı ME1 ile yapılan görüşmede ise eğim kavramı hakkındaki ifadelerinin şu şekilde olduğu görülmektedir.

A: Eğim kavramı nedir? Açıklayınız. Derslerinizde eğim kavramına nasıl değiniyorsunuz?

ME1: Analiz 1 dersinde trigonometrik fonksiyonlar konusu anlatılırken tanjant alfa veya analitik geometride düzlemde doğrunun analitik kısmında eğimden bahsediyorum. Tanım olarak şöyle ifade edecek olursak bir doğrunun X ekseni ile pozitif yönde yapmış olduğu açının tanjantı şeklinde ifade ediyorum ilerleyen konularda mesela türevden bahsederken limitten bahsederken bu baya işime yarıyor. Şöyle ki bir doğru üzerinde seçilen iki noktanın limit yardımıyla birbirine yaklaştırarak orada bir teğetin eğiminden bahsediyorum.

Yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde matematik eğitimcileri genel olarak türev ile ilişkilendirdikleri görülmüştür. Bununla beraber “Trigonometri” kategorisinde yer alan T1 koduna sahip kavram imajı olduğu görülmektedir. Ayrıca katılımcıların hepsinde “Kalkülüs” kategorisinde yer alan K1, K2 ve K3 koduyla kodlanan kavram imajlarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu bağlamda matematik eğitimcileri eğim kavramı hakkındaki kavram imajları genel olarak “Kalkülüs” kategorisinde yer alan ifadelerle eğim kavramını açıklamışlardır. “Kalkülüs” kategorisinde yer alan K1, K2 ve K3 koduna sahip kavram imajları eğim kavramının formel tanımını derslerinde kullanmayı tercih ettikleri görülmektedir.

İkinci aşama sorularda ise matematik eğitimcilerinin eğim kavramı hakkında sahip oldukları kavram imajları ise Tablo 58’ de gösterilmiştir.

Tablo 58

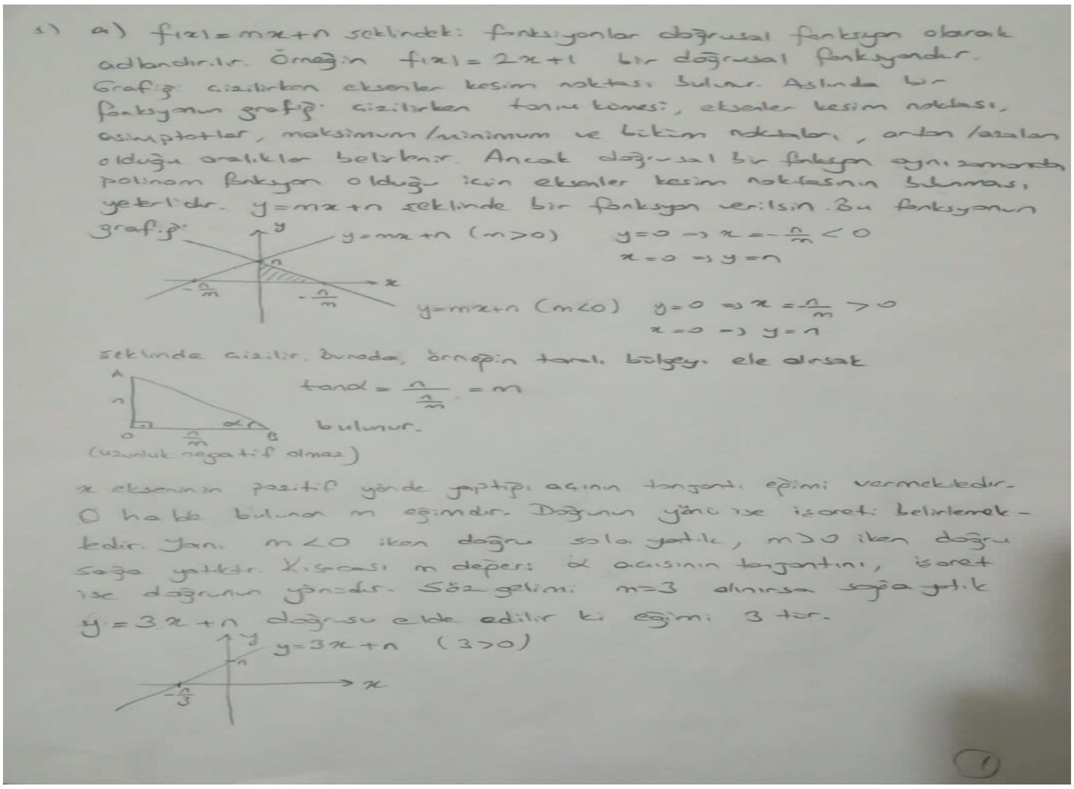
Matematik Eğitimcilerinin Ikinci Aşama Sorularda Yer Alan Eğim Hakkındaki Kavram Imajları

Matematik	Kavram İmajları													
Eğitimcisi	G1	G2	C1	C2	F	f	PK	T1	K1	K2	K3	GD1	GD2	D1
ME1		X				X	X				X	X		
ME2	X	X		X		X		X			X	X		
ME3	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X		
ME4						X	X			X	X	X		

Tablo 58 incelendiğinde matematik eğitimcilerinin hepsinde “Kalkülüs” kategorisinde yer alan K3 imajı, “Fonksiyonel özellik” kategorisinde yer alan “Değişkenler arasında sabit değişim oranı” ile tanımlanan “f” kavram imajına sahip olduğu görülmektedir. Bu bağlamda eğim kavramı ile ilgili matematik eğitimcilerinin sahip olduğu kavram imajı değişkenler arasında sabit değişim oranı olarak yer aldığı söylenebilir. Burada dikkat çeken husus ise eğim kavramını sabit değişim oranı olarak ifade etmeleridir. Eğim kavramını bir anlamda değişim oranı ile ilişkilendirmişlerdir.

Şekil 49

ME3’e Ait Eğim Kavramı Hakkındaki Cevabı



1) a) $f(x)=mx+n$ şeklindeki fonksiyonlar doğrusal fonksiyon olarak adlandırılır. Örneğin $f(x)=2x+1$ bir doğrusal fonksiyondur. Grafiği çizilirken eksenler kesim noktası bulunur. Aslında bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesi, eksenler kesim noktası, asimptotlar, maksimum/minimum ve büküm noktaları, artan/azalan olduğu aralıklar belirlenir. Ancak doğrusal bir fonksiyon aynı zamanda polinom fonksiyon olduğu için eksenler kesim noktasının bulunması yeterlidir. $y=mx+n$ şeklinde bir fonksiyon verilsin. Bu fonksiyonun grafiği

$y=mx+n \ (m>0)$ $\quad y=0 \Rightarrow x=-\frac{n}{m}<0$, $\quad x=0 \Rightarrow y=n$

$y=mx+n \ (m<0)$ $\quad y=0 \Rightarrow x=-\frac{n}{m}>0$, $\quad x=0 \Rightarrow y=n$

şeklinde çizilir. Burada, örneğin taralı bölgeyi ele alırsak

$\tan\alpha = \frac{n}{\frac{n}{m}} = m$

bulunur.

(uzunluk negatif olmaz)

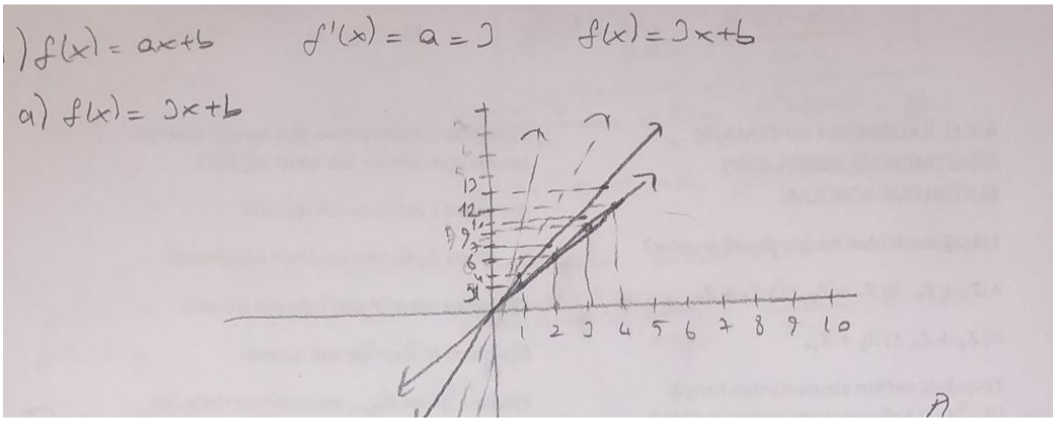
x ekseninin pozitif yönde yaptığı açının tanjantı eğimi vermektedir. O halde bulunan m eğimdir. Doğrunun yönü ise işareti belirlemektedir. Yani $m<0$ iken doğru sola yatık, $m>0$ iken doğru sağa yatıktır. Kısacası m değeri α açısının tanjantını, işaret ise doğrunun yönüdür. Söz gelimi $m=3$ alınırsa sağa yatık $y=3x+n$ doğrusu elde edilir ki eğimi 3'tür.

$y=3x+n \ (3>0)$

Katılımcı ME3 doğrusal bir fonksiyon için eğim kavramı ile ilgili soruyu Şekil49’ da açıklamıştır. Burada dikkat çeken husus ME3’ ün genelde doğrusal bir fonksiyonun eğimi sorulduğunda sadece sağa yatık grafikler yani eğimin pozitif olduğu durumların dışında eğimin negatif olduğu durumlardan da bahsetmesi olmuştur. Farklı gösterim ve ifade biçimleri ile bu durumu Şekil50’ de açıkladığı görülmektedir.

Şekil 50

ME2'ye Ait Eğim Kavramı Hakkındaki Cevabı.



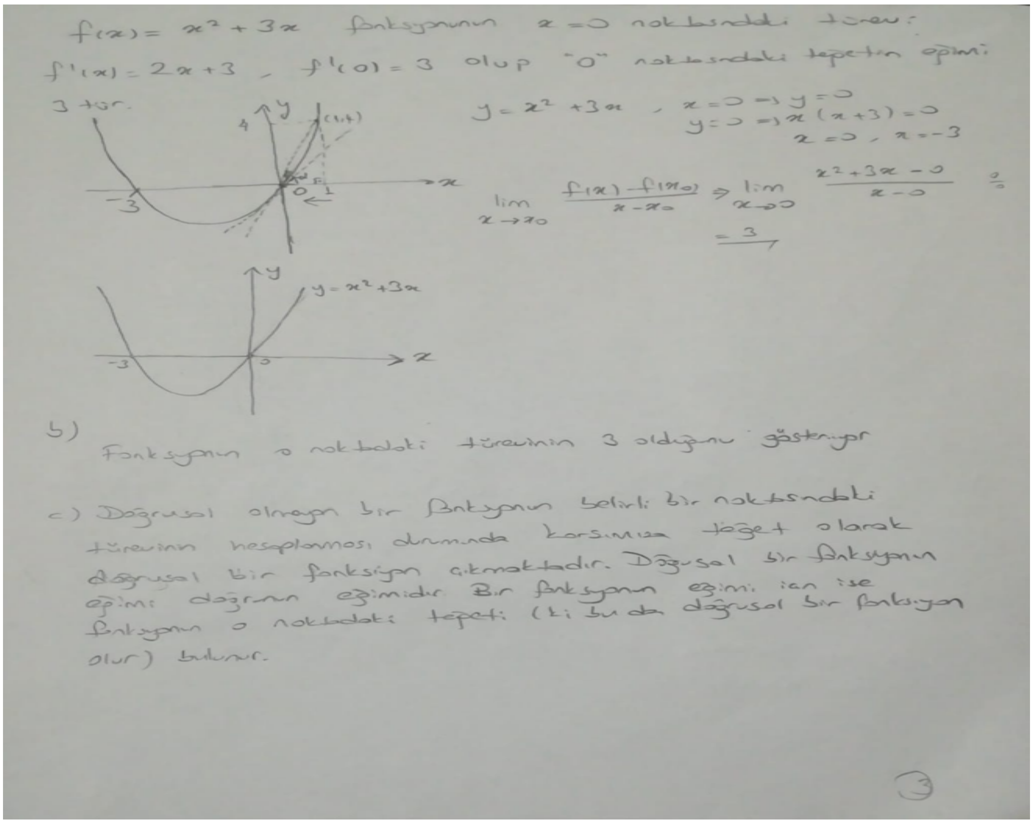
Diğer bir katılımcı olan ME2' ye ait durum Şekil50' de görülmektedir. Burada dikkat çeken durum doğrusal bir fonksiyonun eğimi sorulduğunda sadece prototip diyebileceğimiz durum söz konusudur. Bu durum ilköğretim matematik öğretmen adaylarında da görülmüştür. Sadece pozitif yöndeki durumlar dikkate alınmıştır.

Aynı şekilde katılımcı ME1 ve ME4' e ait doğrusal olan bir fonksiyonun olası grafiği çizilmesi istendiğinde benzer durumların ortaya çıktığı görülmüştür.

Doğrusal olmayan grafiklerde eğim kavramı ile ilgili kavram imajı incelendiğinde ise ME3 ve ME2' ye ait cevaplar incelenmiştir.

Şekil 51

Katılımcı ME3'e Ait Doğrusal Olmayan Fonksiyonun Eğimi Hakkındaki Cevabı



$f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi:

$f'(x) = 2x + 3$, $f'(0) = 3$ olup "0" noktasındaki teğetin eğimi 3 tür.

$y = x^2 + 3x$, $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$

$x = 0$, $x = -3$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x - 0}{x - 0}$ $\frac{0}{0}$

$= 3$

b) Fonksiyonun 0 noktadaki türevinin 3 olduğunu gösteriyor

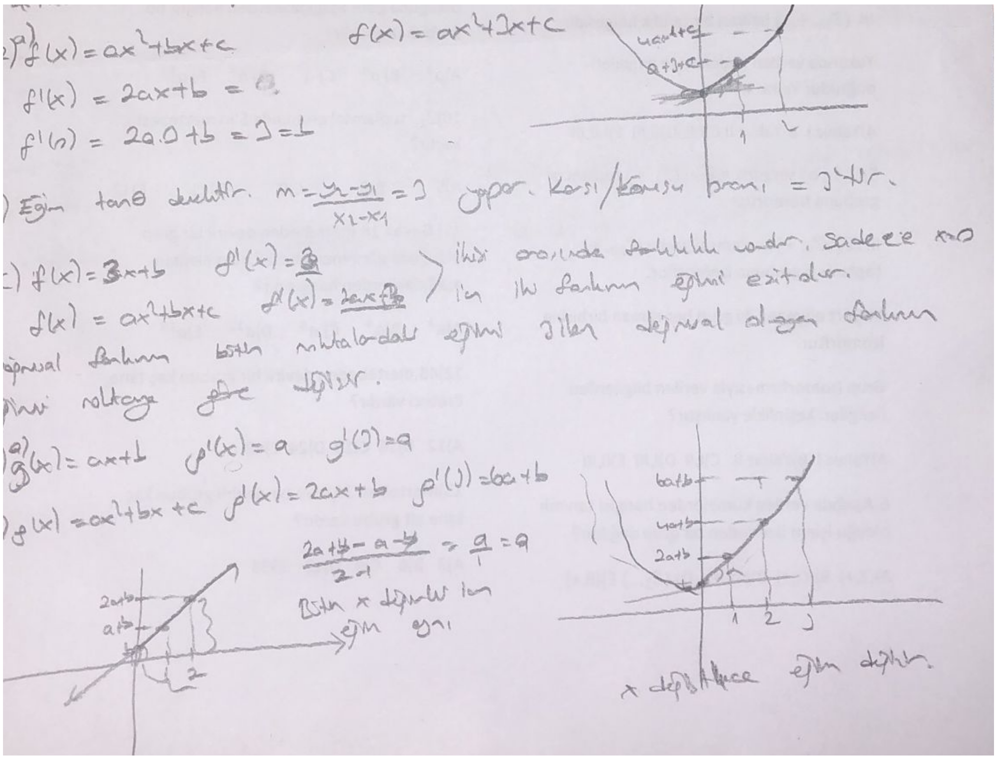
c) Doğrusal olmayan bir fonksiyonun belirli bir noktasındaki türevinin hesaplanması durumunda karşımıza teğet olarak doğrusal bir fonksiyon çıkmaktadır. Doğrusal bir fonksiyonun eğimi doğrunun eğimidir. Bir fonksiyonun eğimi için ise fonksiyonun o noktadaki teğeti (ki bu da doğrusal bir fonksiyon olur) bulunur.

3

Şekil 51 değerlendirildiğinde katılımcı ME3’ ün sahip olduğu kavram imajı burada “Kalkülüs” kategorisinde yer alan imajlara sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca ME3’ ün doğrusal olmayan bir fonksiyona ait grafiği de prototip olan bir durumdan söz edilebilir. Ayrıca doğrusal olmayan bir fonksiyonun eğimi hesaplanırken teğetin eğiminden bahsederek türev kavramıyla da ilişkilendirmiştir.

Şekil 52

Katılımcı ME2’ye Ait Doğrusal Olmayan Fonksiyonun Eğimi Hakkındaki Cevabı



ME2’ nin sahip olduğu kavram imajı “Trigonometri” kategorisinde yer alan T1 koduna sahip imajı göze çarpmaktadır. Yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip olduğu kavram imajlarını uygulama sorularında da kullandığı görülmüştür. Ayrıca doğrusal olmayan bir fonksiyonun olası grafiği için ME3 ile benzer şekilde prototip bir imaja sahip olduğu söylenebilir. Bu durum Analiz1 dersine devam eden ilköğretim matematik öğretmen adaylarının da sahip olduğu kavram imajları ile benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Katılımcı ME1 ve ME4’ e ait doğrusal olmayan bir fonksiyonun olası grafiği çizilmesi istendiğinde benzer durumların ortaya çıktığı görülmüştür.

Matematik eğitimcilerinin eğim kavramı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde sahip oldukları kavram imajlarının birbirine benzer olduğu söylenebilir. Ancak ifade biçimleri ve gösterim biçimlerinde farklılıklar ortaya çıktığı görülmüştür. Bununla beraber yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip oldukları kavram imajlarını uygulama soruları olan ikinci aşama sorularında da kullanabildikleri tespit edilmiştir. Matematik eğitimcilerinin Tall ve Vinner (1981) ve Vinner (1983)'e göre kavram tanımı hücresi ile kavram imajı hücrelerinin etkileşim halinde olduğu söylenebilir.

6- Matematik Eğitimcilerinin Değişim Oran/Anlık Değişim Oranı Kavramı İle İlgili Kavram İmajları

Matematik eğitimcilerinin değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili kavram imajları Tablo59' da gösterilmiştir.

Tablo 59

Matematik Eğitimcilerinin Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Ile Ilgili Kavram Imajları

Matematik Eğitimcisi	Kavram İmajları		
	D1 (Evrensel)	D2(Aralıklı)	D3(Noktasal)
ME1			X
ME2			X
ME3	X		X
ME4			X

Matematik eğitimcilerinin hepsinde değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili kavram imajları "Noktasal" kategorisinde yer alan D3 koduna sahiptir. Ayrıca katılımcı ME3 "Evrensel" kategorisinde yer alan D1 ile kodlanan kavram imajına da sahiptir.

A: Değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı nedir? Açıklayınız. Derslerinizde değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına nasıl değiniyorsunuz?

ME2: Değişim oranına aynı şekilde y deki değişimin x deki değişim oranı şeklinde anlatıyorum grafiklerde ve derslerde genelde değişim oranı ve anlık değişim oranını ben türevin fiziksel yorumlanmasında *öğrencilere daha iyi anladığını görüyorum. Formel bir tanım olarak vermiyorum ancak birinci ve ikinci türev de işte hızla ivmede bu şekilde türevin fiziksel yorumlanmasında öğrencinin de anlık değişim oranını değişim oranı daha iyi anladığını görüyorum dolayısıyla derslerden formel tanımı vermiyorum.*

Katılımcı ME2 ile yapılan görüşmede değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili Analiz1 dersinde formel bir tanımdan bahsetmediğini ifade etmiştir. Ancak değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarından bahsederken türevin fiziksel yorumu şeklinde bahsettiğini bildirmiştir. Bu durum katılımcı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının da benzer imajlara sahip olduğu görülmüştür. Aslında matematik eğitimcilerinin değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkında genel olarak sahip olduğu kavram imajı ise hız ile ilişkilendirmeleri şeklinde olmuştur.

Tablo 60

Matematik Eğitimcilerinin Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Ile Ilgili Kavram Imajları

Matematik Eğitimcisi	Kavram İmajları D1 (Evrensel)	 D2(Aralıklı)	 D3(Noktasal)
ME1	X		
ME2		X	
ME3		X	
ME4			X

İkinci aşama sorularda yer alan değişim oranı/anlık değişim oranı ile ilgili sorularda ise matematik eğitimcilerinin katılımcı ME4 hariç birinci aşama sorularda sahip oldukları kavram imajlarının değiştiği görülmüştür. Genel olarak “Aralıklı” kategorisinde yer alan ortalama değişim hızını göz önünde bulundurdukları görülmüştür. Katılımcı ME1 ise değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili “Evrensel” kategoride yer alan grafiğin genel özelliklerini dikkate aldığı görülmüştür. Aşağıdaki ifade katılımcı ME1’ e ait değişim oranı/anlık değişim oranı kavramına yönelik sahip olduğu D1 kodundaki kavram imajını göstermektedir.

ME1: Doğrusal fonksiyonlarda bu ya pozitif ya da negatif iken doğrulsa olmayan fonksiyonlarda bir değişim söz konusudur. Bu nedenle doğrusal olmayan fonksiyonlarda, değişim oranı eğri boyunca değişir.

Matematik eğitimcileri ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde üçüncü soruda ise türev kavramı ile ilgili kavram imajları incelenmiştir. Türev kavramı ile ilgili kavram imajları için Zandieh (2000)' e ait kavramsal çerçeve kullanılmıştır. Bu analiz çerçevesinde her bir katılımcı için ayrı ayrı tablo kullanılmıştır.

Tablo 61

Katılımcı ME1'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran					
Limit					●
Fonksiyon					◎

Katılımcı ME1 türev kavramına derslerinde epistemolojik olarak değindiğini ifade etmiştir. Matematik tarihini dikkate alarak bu kavram ile ilgili öğrencilerin zihinlerinde türev kavramını anlamlandırmalarının daha yararlı olacağını düşünmektedir. Bu bağlamda bakıldığında katılımcı ME1 türev kavramı ile ilgili kavram imajı süreç-nesne çiftlerinden diğer kategorisinde yer aldığı söylenebilir.

Tablo 62

Katılımcı ME2'ye Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran		●			
Limit		●			
Fonksiyon					

Katılımcı ME2’ nin türev kavramı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde süreç-nesne çiftlerinden sözel-oran çiftine denk gelen oran, limit hücrelerinde olduğu görülmektedir.

> *ME2: derste türev in formel tanımını vermeden önce öğrencilere türev kavramından ne anladıklarını soruyorum ve bana verdikleri cevap x^3’ün türevinin $3x^2$ olduğu. Öğrencilerden formel tanıma yakın bir cevap gelmeyince türev kavramını direk formatını vermeden önce ben sürekliliğin tanımını veriyorum. süreklilik tanımıyla beraber en son türevin formel tanımını veriyorum* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ şeklinde ifade ediyorum.

Tablo 63

Katılımcı ME3’e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran	●		●		
Limit	●				◎
Fonksiyon	◎				

Katılımcı ME3 ile yapılan görüşmede ise türev kavramının doğrudan formel tanımını vermektense bu kavramların epistemolojik olarak öğrencilerin içselleştirmesine önem verdiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda süreç-nesne çiftlerinden diğer kategorisinde kavram imajına sahip olduğu söylenebilir. Fen edebiyat fakültesi matematik bölümündeki dersleri dikkate aldıklarında doğrudan tanımların verilmesinin öğrencilerin zihinlerinde fazla yer etmediği ve ezbere bir durumdan ibaret kaldığından bahsetmiştir.

> *ME3: …fen edebiyat matematik çıkışlıyım türev şudur limit budur süreklilik şudur şeklinde derse işlemektense bu kavramların epistemolojik olarak alt yapıları günlük hayattaki becerileri örneğin birbirlerine olan ilişkilerini konuları ardışık olduğunu görün önünde bulundurarak işliyorum…türevi öğrencilere 2-3 ders saatinde yani 2-3 hafta boyunca içselleştirmelerini istiyorum, örneğin sekant*

doğrularından bahsediyorum eğimden bahsediyorum-teğetin eğiminden bahsediyorum şeklinde türev aslında önce öğrenciler içselleştirdikten sonra formel tanımı vermeye gayret gösteriyorum…Teğetin eğiminin türev olduğunu bahsediyorum.

Tablo 64

Katılımcı ME4'e Ait Türev Kavramı Hakkındaki Kavram Imajı

	Bağlamlar				
Süreç-nesne çiftleri	Grafiksel Eğim	Sözel Oran	Fiziksel Hız	Sembolik Farkların Bölümü	Diğer
Oran					
Limit	●	◎			
Fonksiyon					

Katılımcı ME4 ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmede türev kavramını Analiz1 derslerinde öğrencilere bahsetmeden önce öğrencilerin ön bilgilerinin ne kadar anlamlı olduğuna dikkat ettiğinden bahsetmiştir. Bu bağlamda diğer katılımcılarla benzerlik gösterdiği söylenebilir. Ayrıca türevin formel tanımı yerine bir noktadaki eğimin neden türev olmasından bahsetmiştir. Bu bağlamda katılımcı ME4 süreç-nesne çiftlerinden grafiksel eğim çiftinden limit hücresinde bir kavram imajına sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca süreç-nesne çiftlerinden sözel oran kategorisinde bir kavram imajına sahip olduğu söylenebilir.

ME4: türev kavramına geçmeden önce zaten Analiz1 dersinde eğim kavramı hakkında detaylı bir giriş yapıyorum. Daha sonra öğrencilerin eğim kavramı ile ilgili teğetin bir noktadaki eğimi ile ilişkilendirmelerini istiyorum. Bu süreci o noktaya sağdan soldan limitlerle o noktaya yaklaşan sekant doğrularının limitlerinin istenilen noktaya yaklaştığını göstermeye çalışıyorum. Özetle limit ile türev kavramını ilişkilendirerek ve formel tanımın öğrencilere buldurmaya çalışıyorum.

Daha da önemlisi öğrencilere Geo-Gebra programı ile bu durumun görselleştirmelerine yardımcı olmaktayım.

Katılımcı ME4 türev kavramını öğrencilere farklı olarak dinamik geometri yazılımıyla daha çok içselleştirmelerine yardımcı olduğu söylenebilir.

Türev kavramı ile ilgili matematik eğitimcilerinin her birinin farklı kavram imajlarına sahip olduğu görülmüştür. Türev kavramı ile ilgili sadece bir matematik eğitimcisinin ME4 farklı bir yöntem ile -dinamik geometri yazılımlarını kullanarak- bu kavramı öğrencilerine sunduğu tespit edilmiştir.

7- Matematik Eğitimcilerinin Eğim Ve Anlık Değişim Oranı Arasındaki Kavram İmajları

Tablo 65

Katılımcı ME1'e Ait Eğim Ve Anlık Değişim Kavramları Arasındaki Ilişkiye Ait Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K2/C1
	Anlık Değişim: Noktasal

Katılımcı ME1 ile yapılan görüşmede eğim ve anlık değişim kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken daha önceden sahip olduğu kavram imajlarını kullanarak açıkladığı görülmektedir.

ME1: Aralarında ilişki var tabii ki şöyle bahsediyorum türevin geometrik ve cebirsel yorumlarını bahsederken eğim ve anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi bu şekilde ilişkilendiriyorum. Durum özetle geometrik durumunu bahsederken eğimin cebirsel yorumda ise anlık değişim oranına değinirim. Özellikle teğetin eğiminin türev olduğundan bahsettik orada anlık değişimin aslında türev olduğunu bir bağlamda değişim oranı ile ilişkili olduğunu bağımlı bağımsız değişken arasındaki oranların anlık değişim oranı yani eğime ve aynı zamanda türeve denk geldiğini söylüyorum.

Bununla beraber katılımcı ME1' in ikinci aşama sorularda yer alan eğim ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi farklı kavram imajlarını kullanarak açıkladığı görülmektedir. Anlık değişim oranı "Noktasal" kategoriden grafiğin genel durumundan bahsedilen "Evrensel" kategorisine geçtiği görülmektedir. Ayrıca eğim kavramı ile ilgili farklı kavram imajlarını kullanarak bu iki kavram arasındaki ilişkiyi kurduğu tespit edilmiştir.

Tablo 66

Katılımcı ME1'e Ait Eğim Anlık Değişim Kavramları Arasındaki Ilişkiye Ait Kavram Imajları

Anlık değişim - Eğim arasındaki ilişki	Eğim: G1/G2/C1/C2/GD2
	Anlık Değişim: Evrensel

Bu durumu, *ME1: "Bunu bir konum grafiği üzerinden anlatabiliriz. Konum grafiğinde eğim, nesnenin hızını temsil eder. Buna göre, belirli bir zamandaki eğim değeri, bu nesnenin o andaki hızını temsil eder. Bunun nedenini görmek için, aşağıda gösterilen konum ve zaman grafiğinin eğimini düşünelim."* şeklinde açıklanmıştır. Şekil53' de ise bu durumu farklı gösterim biçimlerini kullanarak ifade etmeye çalışmıştır.

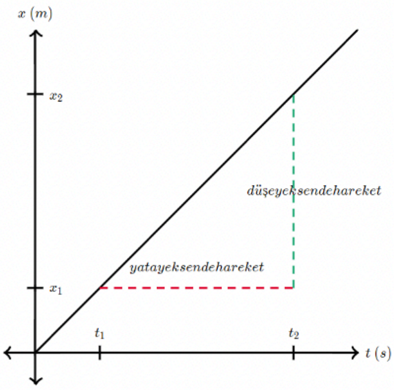
> *"Eğrinin eğimi, t=0 s ile t=3 s zamanları arasında pozitiftir çünkü eğim yukarı yönlüdür. Bunun anlamı, hızın pozitif olduğu ve nesnenin pozitif yönde hareket ettiğidir. Eğrinin eğimi t=0 s ile t=3 s arasında negatiftir çünkü eğim aşağı yönlüdür. Bunun anlamı, hızın negatif olduğu ve nesnenin negatif yönde hareket ettiğidir. t=3 s'de eğim sıfırdır çünkü eğimi temsil eden doğru yataydır. Bunun anlamı, hızın sıfır olmasıdır ve nesne anlık durmuştur.*
>
> *Akılda tutulması gereken şeylerden birisi, bir konum grafiğinin verilen bir andaki eğiminin o andaki anlık hızı vermesidir. Zamandaki iki nokta arasındaki ortalama eğim size zamandaki o iki an arasındaki ortalama hızı verecektir. Anlık hızın ortalama hıza eşit olması gerekmez. Ancak belirli bir süre için eğim sabitse (yani grafik düz bir doğru parçasıysa), bu*

durumda o doğru parçasındaki herhangi iki nokta arasında anlık hız ortalama hıza eşit olacaktır.”

Katılımcı ME1’ in ifadeleri incelendiğinde fonksiyon grafikleri üzerinden eğim anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken farklı kavram imajlarını kullandığı görülmüştür.

Şekil 53

Katılımcı ME1’nin Eğim-Değişim Oranı Arasındaki İlişkiye Yönelik Cevabı



Bu konum grafiğinin eğimi şu formülle verilir:

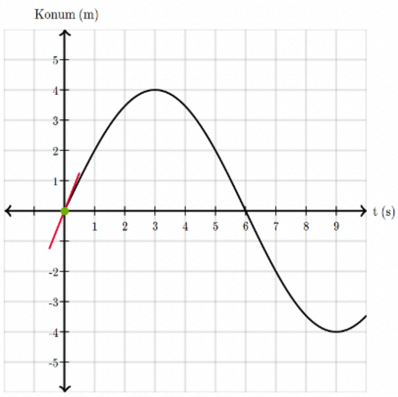
$$\text{eğim} = \frac{\text{düşey eksendeki değişim}}{\text{yatay eksendeki değişim}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Bu eğim ifadesi, hızın tanımı

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

ile aynıdır. Dolayısıyla, bir konum grafiğinin eğimi hıza eşit olmalıdır.

Bu, eğimin değiştiği bir konum grafiği için de doğrudur. Aşağıdaki örnek konum-süre grafiğinde, kırmızı doğru size belirli bir andaki eğimi gösterir. Grafiğin eğiminin belirli anlarda nasıl gözüktüğünü görmek için, aşağıdaki noktayı yatay olarak kaydırmayı deneyin.



Tablo 67

Katılımcı ME2'ye Ait Eğim Anlık Değişim Kavramları Arasındaki Ilişkiye Ait Kavram Imajları

Eğim-Anlık değişim arasındaki ilişki	Eğim: K2
	Anlık Değişim: Noktasal

Benzer şekilde katılımcı ME2 daha önce sahip olduğu kavram imajları ile bu iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. "*eğim ile anlık değişim oranı ile denk olduğunu ifade ediyorum. Yani buda türeve denk oluyor. Aslında eğimin değişim oranı olduğunu bahsediyorum. Grafiklerle ve sözel ifade öğrencilere bahsediyorum."* Bu durum Zandieh (2000) türev kavramsal çerçevesinde yer alan sözel-oran nesne çiftlerinden oran hücresini karşılarken, grafiklerle ifadesi ise grafiksel-eğim nesne çiftinden oran hücresini karşıladığı görülmektedir.

Tablo 68

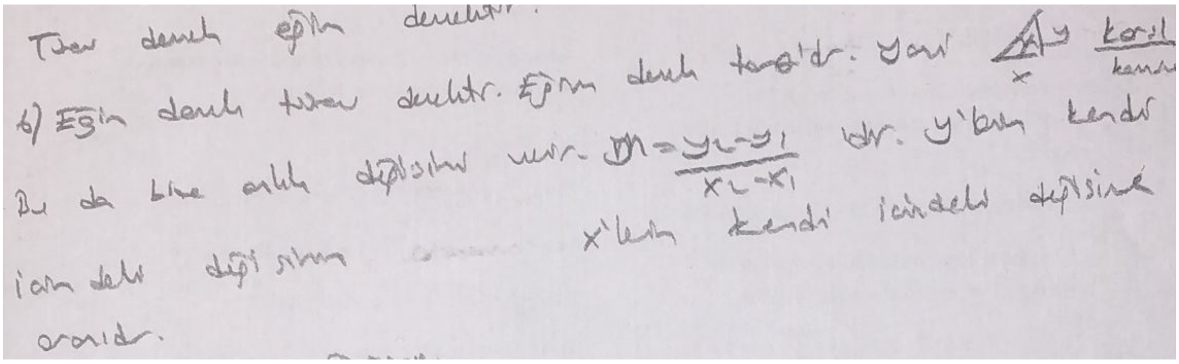
Katılımcı ME2'ye Ait Eğim Anlık Değişim Kavramları Arasındaki Ilişkiye Ait Kavram Imajları

Anlık değişim- Eğim arasındaki ilişki	Eğim: G2/T1/C2/C1
	Anlık Değişim: Noktasal

Tablo 68 incelendiğinde katılımcı ME2' nin görüşme sorularında kullandığı kavram imajlarına benzer kavram imajları olduğu görülmüştür. Buna ek olarak ME2' nin eğim kavramı ile ilgili farklı kavram imajlarını da bu iki kavram arasında kullandığı tespit edilmiştir.

Şekil 54

Katılımcı ME2'ye Ait Eğim Anlık Değişim Oranı Hakkındaki Cevabı



Aslında burada ME2 eğim anlık değişim oranı ve türev kavramlarını birbirleriyle de açıkladığı görülmektedir.

Katılımcı ME3 ve ME4 eğim ve anlık değişim oranı kavramlarına ilişkin sorularda herhangi bir cevap vermedikleri görülmüştür. Açıklama olarak ise bu kavramlar zaten son soru olan eğim değişim oranı ve anlık değişim oranı kavramları arasındaki kavram imajları ile açıklanmaya çalışıldığını ifade etmişlerdir.

8- Matematik Eğitimcilerinin Eğim Ve Anlık Değişim Oranının Türev İle Olan İlişkilerine Yönelik Kavram İmajları

Bu alt problemde Zandieh (2000) türev kavramına yönelik kavramsal çerçevesi, Moore-Russo ve ark. (2011) eğim kavramına yönelik kavramsal çerçeve ve Hauger(1995) değişim oranı kavramına yönelik kavramsal çerçevesi ortak kullanılarak matematik eğitimcilerinin kavram imajları tespit edilmiştir.

Katılımcı ME1' e ait eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramı ile olan ilişkisine dair kavram imajları yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve ikinci aşama sorularda yer alan uygulama sorularında yer alan cevapları incelenmiştir.

Tablo 69

Katılımcı ME1'e Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye Yönelik Görüşme Sorularında Yer Alan Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K1 Türev: -----

Katılımcı ME1 ile yapılan görüşme analiz edildiğinde eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının daha önceden sahip olduğu kavram imajlarını kullandığı görülmektedir. Ancak ME1' e ait türev kavramı ile ilgili kavram imajlarını kullanmadığı görülmüştür.

> *ME1:…teknoloji destekli kullanıyorum. Geometriden cebire geçmeye çalışıyorum. Şöyle ki reimann toplamından bahsederek veriyorum, limiti devreye sokuyorum cebire geçerken. Aslında bu üç kavram benim zihnimde bir elinde geometri diğer elinde cebir olan bir adamın ellerini göğsünde birleştiren birisi olarak tanımlayabilirim bu da türev adam olur yani bir eline eğim bir elinde anlık değişim oranı olan adamın türev adam olduğunu ifade edebilirim.*

Yapılan görüşmede dikkat çeken bir husus ME1' in eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev ile ilişkisini bir metaforla açıkladığı görülmektedir. Ayrıca bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken teknolojiden faydalandığını ifade etmiştir. Bu durum tıpkı katılımcı ME4' te olduğu gibi dinamik geometri yazılımlarını kullandığı söylenebilir. Katılımcı ME4' ten farklı olarak belki de sadece türev kavramının öğretiminde değil bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken farklı temsil biçimleri ve teknolojiden faydalandığı söylenebilir.

Tablo 70

Katılımcı ME1'e Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye Yönelik Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Evrensel
	Eğim: G1/G2/C1/C2/GD2 Türev: Diğer

İkinci aşama sorularda ME1 eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramları ile ilişkisine yönelik kavram imajları Tablo 70' de gösterilmiştir. Dikkat çeken durum ise ME1 yarı yapılandırılmış görüşme sorularında türev kavramına yönelik herhangi bir kavram imajını kullanmazken ikinci aşama sorularda türev kavramına yönelik Zandieh (2000) kavramsal çerçevesine göre "Diğer" hücresinde yer alan kavram imajını kullanmıştır. Ayrıca eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarında sahip olduğu kavram imajları uygulama sorularında da farklılaştığı ve bu kavramlarla türev kavramı arasında kurduğu ilişkiyi açıklamada farklı kavram imajlarını kullandığı görülmüştür.

ME1: Son 3 soru aslında birbirinin tekrarı niteliğinde eğim, oran, anlık hız, türev, değişim gibi kavramları irdeleyerek ve bu değişimin tarihsel sürecine yoğunlaşarak anlatmaya çalışırdım. Bunun içinde zaman yol zaman grafiği kolay bir öğretim sağlayabilir.

Benzer şekilde katılımcı ME2' ye ait eğim ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramlarının türev kavramı ile olan ilişkisine dair kavram imajları yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve ikinci aşama sorularda yer alan uygulama sorularındaki cevapları incelenmiştir.

Tablo 71

Katılımcı ME2'ye Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye yönelik kavram imajları

Anlık değişim–Türev–Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Sözel-Oran-Oran/Limit

Katılımcı ME2 benzer şekilde ME1' nin kavram imajlarında olduğu gibi bu üç kavram hakkında daha önceden sahip olduğu kavram imajlarını kullanarak eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları ile türev kavramı arasındaki ilişkiyi açıklamıştır.

Tablo 72

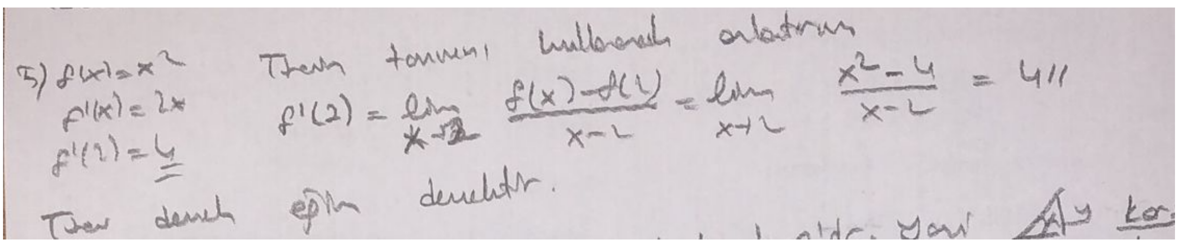
Katılımcı ME2'ye Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye Yönelik Ikinci Aşama Sorulardaki Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K1/K2
	Türev: Sözel-Oran-Limit

Katılımcı ME2 yarı yapılandırılmış sorularda ve uygulama sorularında benzer kavram imajlarını kullanmayı tercih etmiştir.

Şekil 55

Katılımcı ME2'nin Eğim, Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Ve Türev Kavramları Arasındaki İlişkiye Yönelik Cevabı



Katılımcı ME2' nin cevabı incelendiğinde ikinci aşama sorularda yer alan beşinci soruyla bu durumu açıklamayı tercih etmiştir. Türev kavramını eğim ile ilişkilendirmiştir.

“Türev demek eğim demektir.” İfadesini kullanarak bu durumu bu şekilde açıkladığı görülmektedir. Ancak türev kavramı ile eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kavram imajı hücresini kullanmadığı yanıtladığı ikinci aşama soruya verdiği cevapta da görülmüştür.

Tablo 73

Katılımcı ME3’e Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye Yönelik Görüşme Sorularında Yer Alan Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K2
	Türev: Grafiksel-Eğim-Oran/Limit

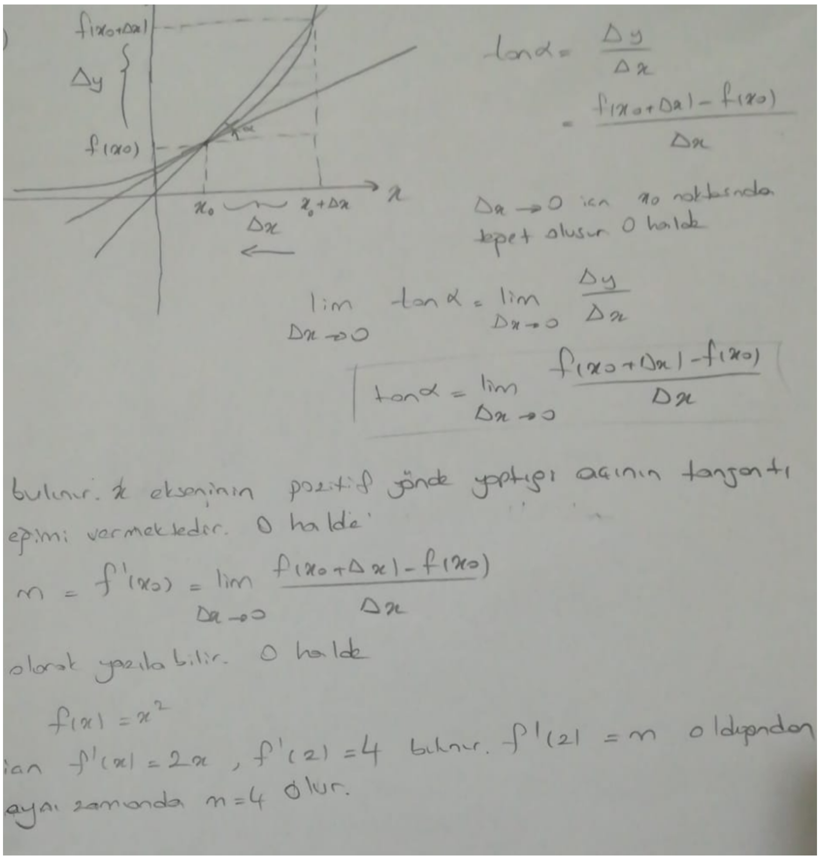
Katılımcı ME3’ e ait kavram imajlarının diğer matematik eğitimcilerinin yarı yapılandırılmış görüşme sorularında sahip olduğu kavram imajları ile benzer olduğu görülmektedir. Bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken sahip olduğu kavram imajları Tablo73’ de gösterilmiştir.

> *ME3: Şimdi matematikte farklı temsil biçimleri var grafiksel sözel cebirsel ve numerik olacak şekilde bir öğrenci bir konuyu anlamlandırmasına ben bir şekilde bakıyorum bu temsil biçimleri arasındaki geçişleri öğrencinin anlamasını bekliyorum dolayısıyla ben eğim türev anlık değişim oranını bu farklı temsil biçimleri ile bir öğrencinin geçiş yapabilmesini öğrenciye izah ediyorum. Ancak edindiğim tecrübeler ve kendi öğrencilerimizden ilköğretim matematik öğretmenliği bölümündeki öğrenciler de genelde grafiksel temsilin daha akılda kalıcı olduğunu görüyorum ancak farklı temsil biçimlerinde de bu üç konuyu ben geçişler yapıyorum ama ilk etapta yukarda da bahsettiğim çizdiğim grafikte anlık değişim oranı eğim ve bunun bir noktadaki türevi izah ediyorum.*

Katılımcı ME3’ ün yukarıda yer alan ifadesi incelendiğinde bu üç kavram arasındaki ilişkiyi farklı temsil biçimleriyle açıklamayı tercih ettiğini ifade etmiştir. Özelikle türev kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajı bu durumu destekler niteliktedir. Zandieh (2000) kavramsal çerçevesinde süreç nesne çiftlerinde yer alan grafiksel eğim çiftinin limit ve oran hücrelerindeki kavram imaj hücresinin dolu olması bu duruma açıklık getirmiştir. Ayrıca Şekil56’ da yer alan cevap incelendiğinde farklı temsil biçimlerini kullandığı ve bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıkladığı görülmektedir.

Şekil 56

Katılımcı ME3’e Ait İkinci Aşamada Yer Alan Eğim, Değişim Oranı/Anlık Değişim Oranı Kavramları İle Türev Kavramı Arasındaki İlişkiye Yönelik Cevabı



Tablo 74

Katılımcı ME4’e Ait Eğim Ve Değişim Oranı Kavramları Ile Türev Arasındaki Ilişkiye Yönelik Görüşme Sorularında Yer Alan Kavram Imajları

Anlık değişim – Türev – Eğim arasındaki ilişki	Anlık Değişim: Noktasal
	Eğim: K3/K2
	Türev: Grafiksel-Eğim-Limit

Katılımcı ME4' ün eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları ile türev kavramı arasındaki ilişkiyi çalışmada yer alan diğer matematik eğitimcilerinin sahip olduğu kavram imajlarına benzer şekilde kavram imajına sahip olduğu tespit edilmiştir.

> *ME4: Aslında matematikte farklı kavramları birbirleriyle ilişkilendirirken farklı temsil biçimlerini işe koşuyorum. Mesela sözel tanım, cebirsel ifade veya grafiksel gösterimleri kullanmayı tercih ederim. Ancak bu tarz öğrencinin zihninde zor şekil alacağını düşündüğüm durumlarda daha öncede bahsettiğim dinamik geometri yazılımlarında geo-gebra kullanarak kavramlar arasındaki ilişkiye değinirim.*

Katılımcı ME4 ile yapılan görüşme bu üç kavram arasındaki ilişkiyi açıklarken farklı temsil biçimlerini kullandığını ifade etmiştir. Bu durum katılımcı ME3 ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca katılımcı ME4 teknoloji desteği ile öğrencilerin zihinlerinde bu üç kavramın daha anlamlı olabileceğini ifade etmiştir. Fakat katılımcı ME4 daha önceki ifadesinde sadece türev kavramı için öğrencilerin kavramsal olarak öğrenmesine teknolojiyi kullanarak katkı sağladığını ifade etmiştir. Katılımcı ME4 ikinci aşama sorularda ise eğim değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik soruyu cevaplamadığı görülmüştür. Dolayısıyla ikinci aşama sorularda yer alan soruda katılımcı ME4' e ait kavram imajları tespit edilememiştir.

Matematik eğitimcileri ile yapılan görüşmede eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik kavram imajları incelenmiştir. Matematik eğitimcilerinin farklı deneyimlere sahip olmalarının sahip oldukları kavram imajlarında farklılık oluşturduğu görülmüştür. Matematik eğitimcilerinin birinci aşama sorularda yer alan görüşme sorularında sahip oldukları kavram imajlarına ikinci aşama sorularda yer alan uygulama sorularında da kullandıkları söylenebilir. Ayrıca ME2, çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Analiz 1, Analiz 2 ve Analiz 3 derslerinden sorumlu öğretim elemanıdır. Bu bağlamda çalışmada yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sahip olduğu kavram imajları ile katılımcı ME2' nin sahip olduğu kavram imajlarının benzerlik gösterdiği söylenebilir. Şöyle ki ilköğretim matematik öğretmen adayları ve ME2' nin "*türev denince eğim aklımıza gelmelidir.*" İfadesini sıkça kullandıkları görülmüştür.

Bölüm 5

Sonuç ve Öneriler

Sonuç

Bu bölümde çalışmada yer alan matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajlarına ve bu kavramlar arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarına yönelik sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı/anlık değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları türev kavramı hakkındaki kavram imajları Zandieh'in (2000), değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları Hauger'in (1995) ve eğim kavramı hakkındaki kavram imajları Moore-Russo, Conner and Rugg'un (2011) analiz çerçeveleri kullanılarak tespit edilmiştir. Bu durum bulgularda çalışmaya ait her alt problem ayrı analiz edilerek rapor edilmiştir. Çalışmaya 3'ü birinci sınıfta öğrenim gören 4'ü de ikinci sınıfta öğrenim gören toplam 7 ilköğretim matematik öğretmen adayı katılmıştır. Bununla beraber Analiz1, Analiz2 ve Analiz3 derslerinden sorumlu farklı üniversitelerde görev yapan 4 öğretim elemanı çalışmada yer almıştır. Çalışmaya katılan öğretim elemanlarından ME2 çalışmada yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Analiz1, Analiz2 derslerinden sorumludur. Çalışmada yer alan durumlar göz önüne alındığında öncelikle ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram imajlarına dair sonuçlar verilmiştir. Daha sonra çalışmanın diğer bir durumu olan matematik eğitimcilerine ait kavram imajlarına ait sonuçlar alan yazındaki çalışmalarla desteklenerek verilmiştir.

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim, Değişim Oranı ve Türev Kavramı Hakkındaki Kavram İmajları

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramına yönelik kavram imajları incelendiğinde, eğim kavramı hakkında farklı kategorilerde yer alan kavram imajlarına sahip olsalar da hepsinde gerçek dünya durumu kategorisinde kavram imajlarına sahip olduğu görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde birbirlerine yakın kavram imajları olduğu görülmektedir. Dikkat çeken kavram imajı ise Moore-Russo, Conner and Rugg (2011) analiz çerçevesinde yer alan "*Rise over run" y'deki değişimlerin x'deki değişimlere bölümü*" geometrik oran kategorisindeki G1 ile kodlanan kavram imajı olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte "*Statik, fiziksel durum (örn. tekerlekli sandalye rampası)*" gerçek dünya durumu kategorisinde yer alan GD1 ile kodlanan kavram imajı da dikkat çekmektedir. Bu durum ilköğretim matematik öğretmen adaylarının gerçek dünya deneyimleriyle eğim kavramı hakkında kavram imajına sahip olduğu göstermektedir. Birinci aşama sorularda eğim kavramı ile ilgili sahip oldukları kavram imajlarını ikinci aşama sorulardaki uygulama sorularında da kullanabildikleri görülmüştür. Hatta ikinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adayları ikinci aşama sorularda daha fazla kategoride kavram imajına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adayları doğrusal bir fonksiyonun belli olan eğimi hakkında olası grafiği çizilmesi istendiğinde sadece pozitif yöndeki grafiği ele aldıkları görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram imajları Tall ve Vinner (1981) kavramsal çerçevesine göre incelendiğinde kavram tanımı hücresi ile kavram imajı hücrelerinin birbirlerini etkilemekte eksik kaldıkları görülmüştür. Bu bağlamda düşünüldüğünde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili sahip oldukları formel tanım aslında kavram imaj hücresi ile etkileşime girmediği görülmüştür. Bunun yanında eğim kavramı ile ilgili kavram imajları da formel tanımı tam olarak karşılamadığı söylenebilir.

Eğim kavramı ile ilgili formel tanımın net olmadığı ve bu tanımı karıştırdıkları tespit edilmiştir. Dolayısıyla ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı hakkında sahip oldukları bazı kavram imajları olmasına rağmen kavrama ait formel tanım vermekte zorlandıkları yani kavram imajı hücresi ile kavram tanımı hücresi arasında bilişsel bir etkileşim olmadığı söylenebilir. Bu durumun Aydeniz'in (2011) bulduğu sonuçlarla çeliştiği de söylenebilir. Ayrıca Vinner'a (1983) göre ders kitaplarında bulunan bazı kavram tanımlarının karışık gelmesinden dolayı kavram tanımını kullanmanın zorunlu olmadığını belirtmiştir. Bununla beraber ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı için kullanılan analiz çerçevesinde eğim kavramına ait belirleyici özellik ve doğrusal sabit kategorisinde herhangi bir kavram imajına rastlanılmadığı görülmüştür. Bu durum literatürde yer alan diğer çalışmalar ile yapılan çalışmada benzerlik gösterdiği söylenebilir (Moore-Russo ve ark., 2011; Stump, 2001; Tyne, 2016). Ancak ilköğretim matematik öğretmen adaylarının davranış göstergesi kategorisinde yani eğimin negatif, pozitif durumuna ait kavram imajlarının olması, Moore-Russo ve ark, (2011) çalışmalarından farklılık gösterdiği görülmüştür. Bu çalışmanın sonuçları Aydeniz (2011)'in çalışmasında yer alan öğretmen adaylarının genellikle eğim kavramını trigonometri ile ilişkilendirmeleri ile çeliştiği görülmektedir. Bu durum bireylerin sahip oldukları farklı deneyimler onların kavram imajlarına etkileyebileceği göz önünde bulundurularak açıklanabilir (Bingölbali & Monaghan, 2008; Crawfort & Scott, 2000; Gülkınık, 2008; Tall & Vinner, 1983). Ayrıca görüşme sorularında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uygulama sorularında da benzer kavram imajlarına sahip oldukları görülmüştür. Uygulama sorularında dikkat çeken durum ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının çoğunluğu eğim kavramını açıklarken doğrusal bir fonksiyonda yani $y=mx+b$ ifadesinde yer alan m katsayısını kullandıkları görülmüştür. Ancak doğrusal olmayan bir fonksiyonun grafiğini çizip üzerinde eğimi tanımlamaları istendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu durumu göstermekte zorlandıkları görülmüştür. Bu bulgu ilgili literatürde yapılan çalışmalarla benzerlik gösterdiği görülmüştür. Çünkü günlük hayatta sıkça karşılaşılan bir kavram olan eğim işlemsel anlayışa daha yatkın olduğu ve bu sebeple kavramsal olarak öğreniminde zorluklar barındırdığı söylenebilir (Barr, 1981; Crawfort & Scott, 2000; Stump, 1999, 2000; Tabaghi Mamolo ve Sinclair, 2009).

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranı ile ilgili kavram imajları incelendiğinde, ilköğretim matematik öğretmen adayları değişim oranında genelde değişim oranını noktasal olarak algıladıkları görülmüştür. Noktasal kategorisinde yer alan kavram imajları değişim oranını anlık hız olarak yorumladıkları görülmektedir. Değişim oranı kavramı incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adayları değişim oranı kavramına ait formel tanımlarının olmadığı görülmüştür. Değişim oranı kavramının özellikle türev kavramı için önemli bir adım olduğu ve kavramsal olarak öğrenilmesinin önemli olduğu (Carlson ve ark., 2002; Kertil, Erbaş ve Çetinkaya, 2017; Monk, 1987; Orton, 1983; Thompson, 1994; Zandieh, 2000) göz önünde bulundurulursa bu kavramın matematikte farklı konuların öğrenilmesinde (fonksiyonlar, limit, süreklilik ve türev vb) fayda sağlayacağı ve akademik olarak başarı sağlayacağı görülmüştür (Carlson ve ark., 2002; Coulombe, 1997; Monk, 1987; NCTM, 2000; Stroup, 2002; Stump, 1997; Thompson, 1994, 2008; Tyne, 2016; Zandieh, 2000). Bir diğer husus ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranını iki nicelik arasındaki değişim olarak yorumladıkları önceki öğrenimleri sebebiyle olduğu söylenebilir. Bununla birlikte değişim oranına ait kavram imajları, değişim oranını genelde anlık hız olarak yorumlamaları lise müfredatında yer alan klasik ifadelerden olan hızın türevi ivmeyi verir gibi türevin fiziksel yorumuna dair ifadelerden kaynaklandığını söylenebilir ve bu durum yapılan (Barış, 2000; Dolores- Flores ve ark, 2017; Hauger, 1995; Orton, 1983; Özmantar ve ark, 2013; Sağel ve Aktaş, 2005; Thompson, 1994;Teuscher & Reys, 2012) çalışmalarla benzerlik göstermektedir.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim kavramı ve değişim oranı/anlık değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adayları bu iki kavram arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajlarının zayıf olduğu görülmüştür. Ancak ilköğretim matematik öğretmen adayları her iki kavramı ayrı ayrı değerlendirmeye aldıkları görülmüştür. Eğim kavramının formel tanımını vermekte güçlük çeken ilköğretim matematik öğretmen adayları aynı şekilde değişim oranı ile ilişkisine yönelik kavramın formel tanımını vermekte güçlük çekmişlerdir. İlköğretim matematik öğretmen adayları eğim kavramı ile değişim oranı kavramlarının aynı olduğunu beyan etmişlerdir. Bu durum iki kavram arasındaki farka dair bir farkındalıkları olmadığı görülmüştür. Çalışmada elde edilen bulgular incelendiğinde alan yazında bu durum ile benzerlik gösteren çalışmaların olduğu görülmektedir (Barr, 1981; Crawfort & Scott, 2000; Johnson, 2010; Orton, 1983; Stump, 2001; Şahin, Yenmez ve Erbaş, 2015; Thomson; 1994, 2008, Tyne, 2016). Bu bağlamda bu iki kavram arasındaki ilişkiye yönelik öğrenciler kavramsal bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir. Bunun sebebi olarak Analiz1 ders saati dikkate alınırsa sadece iki saatlik bir derste, matematikte bir kavramın tam öğrenilmeden sonraki kavramın öğrenilmesinde güçlük çıkarabilmektedir ve bu iki kavram arasındaki ilişkiye yönelik durumun öneminden bahsedilememesi normal karşılanabilir. (Demir, Akbaş ve Gök, 2021; Kuzu, 2017). Eğim ve değişim oranı kavramları arasındaki kavram imajı hakkında Vinner (1983)'a göre durum şu şekilde ifade edilebilir: Kavram tanımı hücresi ve kavram imajı hücresi bilişsel bir etkileşimde bulunmayabilir. Kavram tanımı kavram imajını etkilemediği görülmektedir. Bununla beraber öğretmen adaylarının sahip olduğu yanlış kavram imajı kavramın formel tanımını karşılamadığı görülebilir. Çalışmada elde edilen bulgular neticesinde ilköğretim matematik öğretmenleri eğim kavramını aslında anlık değişim olarak algılamışlardır. Ancak bu durumu gerek uygulama sorularında gerekse yapılan görüşmelerde kavramların tanımlarını ve birbirleri ile olan ilişkilerini açıklamakta güçlük çektikleri görülmüştür. Şöyle ki ilköğretim matematik öğretmen adayları eğimi değişim oranı olarak tanımlamışlardır. Bu bağlamda bu iki kavram öğrenciler tarafından farklı temsil biçimleri (grafiksel, tablo, cebirsel vb.) ile öğrenilmediği düşünülebilir. Çünkü ilköğretim matematik öğretmen adayları sadece aralarında bir ilişkinin varlığından söz etmelerine rağmen bu durumu açıklayamadıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin kavramların öğrenilmesindeki hazırbulunuşluğunu etkileyebileceği düşünüldüğünde Demir, Akbaş ve Gök (2021)'in çalışmasıyla benzerlik gösterdiği söylenebilir.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının türev kavramı hakkındaki kavram imajlarına ait bulgular incelendiğinde, türev kavramı ile ilgili kavram imajlarının kavram tanımını karşılamadığı görülmektedir. Türevin formel tanımını kullanırken bazı kavramsal olarak yanlışlık yaptıkları görülmüştür. Bir *f* fonksiyonun bir noktadaki türevi incelendiğinde $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ formel tanımı kullanılmaktadır. Ancak ilköğretim matematik öğretmen adayları bu durumu $f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{x}$ şeklinde yorumladıkları görülmüştür. Burada dikkat çeken durum ilköğretim matematik öğretmen adaylarının türev kavramının formel tanımını kavramsal olarak algılamadıkları söylenebilir. Kavram imajı hücrelerinin aslında kavram tanımı hücreleri ile bilişsel olarak etkileşim içinde olmadığı ve bu durumun Vinner (1983)'ın bulguları ile örtüştüğü söylenebilir. Ayrıca elde edilen bulgular alan yazında yer alan diğer çalışmalar ile de benzerlik gösterdiği görülmektedir (Amoah & Laridon, 2004; Berry & Nyman, 2003; Cornu,1991; Çekmez, 2013, Duru, 2006; Erdoğan, 2017; Fındık, 2019; Gökçek ve Açıkyıldız, 2015; Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Özmantar ve ark., 2013; Swokowski, 1988; Şahin, Yenmez ve Erbaş, 2015; Ulaş, 2019; Yu, 2020, 2021; Zandieh, 1997, 2000). Türev kavramının farklı öğretim metotları ile öğretilmesi -örneğin teknoloji destekli durumlar- ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu kavrama ait kavram imajlarının daha sağlam olacağı düşünülürse bu durum alan yazında yer alan (Çekmez, 2013; Giraldo ve Carvalho; 2006; Ndlovu, Wessels ve De Villiers, 2010; Isaacson, 1999; Ubuz, 2007) çalışmalar bu duruma benzer sonuçlara sahip olduğu görülmüştür.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ile ilgili sonuçlar incelendiğinde, öğretmen adaylarının bu üç kavram hakkındaki kavram imajları genelde türev kavramı ile açıklamaya yatkın oldukları görülmüştür. Yapılan görüşmelerde ve uygulama sorularında çıkan sonuçlar aslında biz türev hesabı yapıyoruz şeklinde olmuştur. Ancak bu üç kavram arasındaki ilişki sorulduğunda türevin geometrik yorumu eğimdir, türevin fiziksel yorumu değişim oranı/anlık değişim oranıdır ifadelerini kullanmaya yatkın oldukları görülmüştür. Türev kavramına ait kavram imajlarını kullanmaları daha yatkın olmasında rağmen türev kavramı tanımlanırken, kiriş (sekant) doğrularının eğiminin teğete yaklaşımı ve buradan limit yardımıyla teğetin eğimiyle türevin tanımlanması olduğu bilinmektedir. Ancak bu durumla ilgili öğrencilerin kiriş (sekant) doğruları hakkında herhangi bir anlayışının ve kavram imajının olmadığı görülmüştür. Bu sonuçlar alan yazında yer alan (Amit & Vinner, 1990; Bingölbali & Monaghan, 2008; Erdoğan, 2017; Gökçek ve Açıkyıldız, 2016; Hart, 1991; Likwambe & Christiansen, 2008; Nayir, 2013; Orton, 1983; Ubuz, 1996, 2001, 2007) çalışmalarla benzerlik göstermektedir. Bu durum türev kavramının öğretiminin klasik kalkülüs öğretiminden (Breen ve ark., 1992; Doruk ve ark., 2015; Duru, 2006; Grover, 2015; Sağırlı, Kırmacı ve Bulut, 2010) kaynaklanabileceği ve özellikle Analiz1 ders saatinin azaltılması ile ilgili olduğu söylenebilir. Ayrıca yapılan farklı yöntem ve tekniklere sahip çalışmalarda bu durumun farklı olabileceği de aşikardır (bkz. Coe, 2007; Çekmez ve Baki, 2019; Ndlovu, Wessels & De Villiers, 2010). Farklı ülkelerde yapılan çalışmalar göz önüne alındığında araştırmanın sonuçları Cornu (1991)' nun bahsettiği üzere türev kavramının epistemolojik olarak zor bir kavram olduğunu doğrular niteliktedir.

İlgili literatür incelendiğinde üst düzey matematik bilgisi gerektiren kavramların (limit, süreklilik, türev vd.) sadece iki saat teorik derste tanımlarının verilmesi kavramsal öğrenmeye yeterli olmayacağı söylenebilir (Aksu 2016; Bingölbali & Monaghan, 2008; Engin, 2016; Gök, 2016; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983). Özellikle türev kavramı gibi analiz dersinin yapı taşı olarak nitelendirilen bir kavramın daha anlamlı bir şekilde öğretmen adaylarının zihinlerinde yer alması önem arz edeceği düşünülmektedir (Engin, 2016; Gözen, 2001; Herman, 2002; Sağlam, 2011; Yeşildere, 2007). Ayrıca öğrencilere türev kavramının farklı temsil biçimlerinin olduğu ve bu temsil biçimlerinin arasındaki ilişkilerden açıkça söz edilmesi önemli olduğu düşünülmektedir.

Matematik Eğitimcilerinin Eğim, Değişim Oranı ve Türev Kavramı Hakkındaki Kavram İmajları

Matematik eğitimcilerinin eğim kavramı hakkında sahip olduğu kavram imajları da birbirine yakınlık gösterdiği tespit edilmiştir. Matematik eğitimcilerinin verdiği formel tanımlar kavram imajı hücresi ile etkileşime girdiği görülmüştür. Özellikle birinci aşama sorularda verilen formel tanım ile ikinci aşama sorulardaki verilen cevaplar analiz edildiğinde sahip olunan kavram imajları birbirlerini destekler niteliktedir. Ayrıca ME2'nin eğim kavramı ile sahip olduğu kavram imajları ilköğretim matematik öğretmen adayları ile benzerlik gösterdiği söylenebilir. Bu durum (Tall & Vinner, 1981; Vinner,1983) bireyin sahip olduğu kavram imajları geçmiş deneyimleri, ders kitaplarındaki tanımlar ve öğretmeninde etkilenebilir argümanını destekler nitelikte olduğu görülmektedir. Eğim kavramı ile ilgili cevaplar analiz edildiğinde matematik eğitimcileri eğim kavramının negatif veya pozitif durumundan bahsetmediği görülmüştür. Sadece katılımcı ME3 bu durumdan bahsetmiştir. Matematik eğitimcilerinin doğrusal bir fonksiyonun eğimi belli olan olası grafik çizimleri hakkındaki cevapları benzerlik göstermektedir. Yani doğrusal bir fonksiyonun olası grafiği çizilmesi istendiğinde sadece pozitif yöndeki grafik gösterimini tercih ettikleri görülmüştür. Bu durum ME3'te farklılık göstermiştir. Bunun sebebi ise McCarty (2019) bahsettiği üzere kıdem yılı ve görmüş olduğu eğitimleri olabileceği söylenebilir.

Matematik eğitimcileri değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkındaki kavram imajları incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sahip olduğu kavram imajlarına benzer şekilde "Noktasal" kategoride olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar alan yazında yer alan (Byerley & Thomspon, 2017; Hauger,1995, 2000) çalışmalarla benzerlik gösterdiği görülmüştür. Ancak (Dolores-Flores ve ark., 2019; McCarty, 2019) yapılan çalışmaların sonuçlarıyla çeliştiği söylenebilir. Bu durumun matematik eğitimcilerinin geçmişte gördükleri klasik kalkülüs eğitiminden kaynaklanabileceği düşünülebilir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarından farklı olarak matematik eğitimcilerinin ifade ettiği formel tanımla sahip oldukları kavram imajları birbirini destekler niteliktedir. Bu sonucun sebepleri arasında farklı deneyimler ve farklı kaynaklardan konuyu gözlemleme ve bilişsel olarak daha yetkin olmaları gösterilebilir (McCarty, 2019; Tall & Vinner, 1983; Vinner, 1981). Bununla beraber matematik eğitimcileri birinci aşama sorularda sahip olduğu kavram imajlarını ikinci aşama sorularda da kullandıkları görülmüştür. Tall ve Vinner (1981) kavramsal çerçevesine göre matematik eğitimcilerinin değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı hakkında kavram imajları incelendiğinde, kavram tanımı hücresi ile kavram imajı hücrelerinin birbirlerini etkilediği görülmüştür. Bu bağlamda düşünüldüğünde matematik eğitimcilerinin değişim oranı/anlık değişim oranı kavramı ile ilgili sahip oldukları formel tanım aslında kavram imaj hücresi ile etkileşime girdiği görülmüştür.

Matematik eğitimcilerinin türev kavramına yönelik kavram imajları incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarından farklı olarak matematik eğitimcilerinden ME2 ve ME3 türev kavramı hakkında sahip oldukları formel tanımlar kavram imaj hücrelerini destekler nitelikte olduğu görülmüştür. Ancak katılımcı ME1 ve ME2 türevin formel tanımını vermedikleri bu durumu sadece sözel olarak ifade ettikleri görülmüştür. Katılımcı ME2 çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının almış oldukları Analiz derslerinin öğretim elemanıdır. Bu bağlamda matematik eğitimcisi ME2 türev kavramına yönelik verdiği cevaplar ilköğretim matematik öğretmen adaylarının cevapları ile benzerlik gösterdiği söylenebilir. Şöyle ki "*türev denince eğim hesabı yapıyoruz*" ifadesi bu durumu desteklemektedir. Bu sonuçlar alan yazında türev kavramının öğretiminde klasik kalkülüs eğitiminden (Breen ve ark., 1992; Doruk ve ark., 2015; Duru, 2006; Grover, 2015; Sağırlı, Kırmacı ve Bulut, 2010) kaynaklanan sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Ayrıca bu durum türev kavramının işlendiği Analiz1 ders saatinin uygulama ders saatinin azaltılması ile öğretim elemanın türev kavramına derinlemesine girmediği düşünülebilir. Türev kavramına farklı bir yaklaşımla değinen ME1 türev kavramının tarihsel ve epistemolojik olarak öğretilmesi kanaatindedir. Bu durum farklı yöntem ve tekniklerle kalkülüs eğitimi verilen (Coe, 2007; Çekmez ve Baki, 2019; Isaacson, 1999; Ndlovu, Wessels & De Villiers, 2010; Ubuz, 2007) çalışmaların sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Matematik eğitimcileri türev kavramı hakkında öğrencilerin önceki bilgilerini göz önüne alarak türev kavramı için öğretim gerçekleştirdiklerini ifade etmişlerdir. Özellikle katılımcı ME3 farklı temsil biçimleriyle türev kavramı öğretimine önem gösterdiğini belirtmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin türev kavramının öğrencilerde kavramsal olarak daha anlaşılır olduğu kanaatindedir. Bu sonuçlara benzer olarak farklı temsil biçimleri ile öğretime en uygun olan türev kavramı ile ilgili alan yazında yapılan çalışmalar olduğu görülmektedir (Adu-Gyamfi, 1993; Baştürk, 2010; Brenner, ve ark., 1997; Delice ve Sevimli, 2010; Ergene, 2014; Hähkiöniemi, 2006; Porzio, 1994; Kieran, 1994; Tague, 2015). Ancak çalışmanın bu sonucu bir takım sonuçlarla çeliştiği görülmektedir. Öğrencilerin farklı temsil biçimleri arasında bağ kurmasının zor olacağı düşünülmektedir (Amoah ve Laridon, 2004). Bununla beraber sadece katılımcı ME3'e ait türev kavramı hakkında kiriş (sekant) doğrularının teğete ve sekant doğrularının eğimi de teğetin bir noktaya yaklaşımı göz önünde bulundurularak limit kavramı ile bir noktadaki türev kavramının tanımına değinmiştir. Bu durum klasik kalkülüs kitaplarında türev kavramının öğrencilere sunuluş biçimi dikkate alındığında çalışmanın (Berry ve Nyman, 2003; Swokowski, 1988) sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Ayrıca ME1 türev kavramı ile öğrencilerin tarihsel ve epistemolojik olarak öğretiminin yanında dinamik geometri yazılımları ile de gösterimlerinin önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu sonuç dikkate alındığında alan yazında teknoloji destekli öğretim ile farklı gösterim yöntemlerinin türev kavramının öğrenilmesinde önemli olduğu sonucuyla benzerlik gösterdiği söylenebilir (Çekmez ve Baki, 2019; Isaacson, 1999; Ndlovu, Wessels & De Villiers, 2010; Ubuz, 2007).

Matematik eğitimcilerinin eğim, değişim oranı ve türev kavramları arasındaki ilişkiye yönelik kavram imajları ile ilgili sonuçlar incelendiğinde benzer olarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sonuçlarında belirtildiği gibi türev kavramı ile açıklamaya yatkın oldukları görülmüştür. Matematik eğitimcilerinin ifadeleri ve verdikleri cevaplar incelendiğinde *"biz aslında bu üç kavramda türev kavramını inceliyoruz, türev kavramının hazırbulunuşluğunu hazırlıyoruz"* ifadesi yer almıştır. Bununla beraber katılımcılardan ME1 ve ME4'e ait eğim, değişim oranı ve türev kavramları arasındaki ilişkiyi öğrencilere aktarırken dinamik geometri yazılımlarını kullandıkları görülmüştür. Bu sonuçlar (Çekmez, 2013; Çekmez ve Baki, 2019; Hart, 1991; Isaacson, 1999; Ndlovu, Wessels ve De Villiers, 2010; Öztoprakçı, 2014) yapılan çalışmalarda da benzer olarak türev kavramını öğrencilere farklı olarak dinamik geometri yazılımıyla öğretiminin öğrencilerin kavram imajlarını daha etkin kullanmalarına ve bu kavramları daha çok içselleştirmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Katılımcı ME2'ye ait bu üç kavram arasındaki ilişkiye dair kavram imajları incelendiğinde daha çok türev kavramının öğrencilere kalkülüs kitaplarındaki tanıma yönelik öğretimi tercih ettiği söylenebilir. Ayrıca katılımcı ME2'nin ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematik eğitimindeki üst düzey bilgi gerektiren alan derslerin (Analiz1, Analiz2, Analiz3, Cebir, Soyut Matematik vd.) gelecekte meslek hayatlarında kullanmalarının fayda vermeyeceğini ifade etmiştir. Bu durum Kaymakçı, Keskin ve Ev Çimen (2018) yaptıkları çalışmanın bulgularıyla benzerlik göstermektedir. Ancak bu durum alan bilgisi derslerinden özellikle analiz dersinin önemini Thomas ve Finney (2001)

> "*Temelde sayılarla nasıl hesap yapacağınızı, cebirsel ifadeleri nasıl sadeleştireceğinizi ve değişkenlere hesap yapmayı, düzlemdeki noktalar, doğrular ve şekiller hakkında nasıl fikir yürütebileceğinizi öğrenirsiniz. Analiz de bu teknikleri ve becerileri içerir, fakat bunların yanında daha hassas ve daha derin bir seviyede başkalarını da geliştirir. Analiz, aslında, o kadar çok yeni kavram ve sayısal işlem tanımlar ki, gereksinim duyacağınız her şeyi sınıfta öğrenemez hale gelirsiniz*" şeklinde vurgulamaktadır.

Çalışmanın sonuçları dikkate alındığında üst düzey bilgi gerektiren analiz dersinin önemi (Erol, 2013; Thomas & Finney, 2001) yaptıkları çalışma ile paralellik göstermiştir. Bu açıdan düşünüldüğünde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramı hakkındaki kavram imajlarının net olmayacağı söylenebilir.

Öneriler

Bu araştırmada matematik eğitimcilerinin ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik kavram imajları incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgular, ilköğretim matematik öğretmenlerinin eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında kavram imajlarında bazı eksikler olduğu tespit edilmiştir. Bu kapsamda çalışmanın bu bölümünde, çalışmanın bulgularından yola çıkarak araştırmaya ve ileride yapılacak çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Araştırmaya Yönelik Öneriler

Bu araştırmada matematik eğitimcileri ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik kavram imajları Tall ve Vinner (1983)'ın kavram tanımı ve kavram imajı kuramsal çerçevesinde incelenmiştir. Bununla birlikte her bir kavram için analiz çerçeveleri kullanılmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkındaki kavram imajları daha etkin sunabilmeleri için kavramsal olarak bu kavramları ve aralarındaki ilişkileri kurabilmeleri beklenmektedir. Kavram tanımları ile kavram imajı hücrelerinin birbirlerini etkilemediği görüşmüştür (Vinner, 1983). Bu iki hücre arasında bilişsel bir etkinlik sergilemediklerinden dolayı araştırmaya dair kavram imajlarını etkin bir şekilde kullanamadıkları görülmüştür. Bu çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının eğim, değişim oranı ve türev kavramlarına yönelik kavram imajlarının kavram tanımı ve kavram imajı hücresinin etkileşim içinde olmadığı görülmüştür. Bunun bir nedeni Analiz 1 dersinin 2 saat olması olabilir. Çünkü türev kavramı gibi üst düzey düşünme gerektiren kavramlar üzerine çalışmalarda; ders saatlerinin azalması ile birlikte bu kavramların etkili olarak oluşmadığı görülmektedir (Cornu, 1991). Bu bağlamda araştırmada ilköğretim matematik öğretmenleri ile bu kavramlara yönelik daha fazla uygulama yapılması önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmen adaylarının farklı temsil biçimleri ile eğim, değişim oranı ve türev kavramlarını ifade etmeleri kavram imajlarını etkin bir şekilde kullanılması açısından önemlidir (Adu-Gyamfi, 1993; Baştürk, 2010;

Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed & Webb, 1997; Delice ve Sevimli, 2010; Ergene, 2014; Kieran, 1994; Porzio, 1994). Bu duruma ek olarak teknoloji destekli matematik eğitimi ile eğim, değişim oranı ve türev kavramlarının kavramsal olarak öğrenilmesine dolayısıyla yanlış kavram imajlarının önüne geçilebileceği söylenebilir (Çekmez ve Baki, 2019; Hart, 1991; Isaacson, 1999; Ndlovu, Wessels ve De Villiers, 2010). Yapılan çalışmanın sonuçları göstermiştir ki ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında yer alan Analiz derslerinin uygulama saatinin olmaması türev kavramı gibi üst düzey düşünme becerisi gerektiren (Artigue, 2002; Cohen; 2012; Lithner, 2004; Mueller, 2004; Thomas & Finley, 2001; Strasser, 2010) kavramlar için kavramsal öğrenmenin zor olacağı düşünülürse, 2018 de güncellenen ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında Analiz derslerine uygulama saatinin eklenmesi faydalı olacağı söylenebilir.

Matematik eğitimcilerinin sahip oldukları kavram imajları incelendiğinde matematik eğitimcileri bu üç kavram hakkında kavram tanımları ile kavram imajları etkileşim içinde oldukları görülmüştür (McCarty, 2019). Matematik eğitimcileri öğrencilerine farklı temsil biçimleri ile bu üç kavram arasındaki ilişkiyi daha net açıklamaları gerektiği düşünülmektedir (Adu-Gyamfi, 1993; Baştürk, 2010; Brenner ve ark.,1997; Şahin ve ark., 2015). Özellikle ilköğretim matematik öğretmen adayları ile matematik eğitimcisinin kavram imajları birbirlerinden etkilendiği düşünülürse (Vinner, 1983), kavramsal olarak öğretime daha ağırlık vermeleri gerekebilir.

İleride Yapılacak Çalışmalara Öneriler

Bu çalışmada eğim, değişim oranı ve türev kavramları hakkında katılımcıların kavram imajları tespit edilmiştir. Katılımcı olarak ilköğretim matematik öğretmen adayları ile matematik eğitimcileri çalışmaya dahil olmuştur. İleride yapılacak çalışmalarda ise katılımcılara matematik öğretmenlerinin de dahil edilmesi bu üç kavramı meslek hayatlarında kullananlar olarak önemli olduğu düşünülebilir. Bu çalışmada Analiz 1 dersi konusu olan türev kavramı ve alt boyutları incelenmiştir, ileride farklı alan bilgisi dersleri örneğin cebir, lineer cebir, analitik geometri gibi derslerde yer alan kavramların kavram imajları farklı çalışma grupları ile çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Kaynaklar

Açıkyıldız, G. & Gökçek, T. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının türev teğet ilişkisi ile ilgili yaptıkları hatalar. *Journal of Instructional Technologies and Teacher Education,4*(2),. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/jitte/issue/25087/264754

Adu-Gyamfi, K (1993). *External multiple representations in mathematics teaching.* (Unpublished Master Thesis). Graduate Faculty of North Carolina State University, USA.

Aksu, H. H. (2016). Eğitim fakültesinde öğrenim gören öğrencilerin bölümleri hakkındaki görüşleri: Giresun Üniversitesi Örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 24* (1), 299-316. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/kefdergi/issue/22606/241598

Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some Misconceptions in Calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg?. In G. Booker, P. Cobb, ve T. N. de Mendicuti (Eds.), PME 14, (1, pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.

Amoah, V. & Laridon, P. (2004). *Using multiple representations to assess students' understanding of the derivative concept.* In McNamara, O. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 24(1) February 2004. https://research-information.bris.ac.uk/en/publications/research-in-mathematics-education

Altun, M. (2012). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi* (10. baskı). Bursa: Aktüel Yayınları.

Alver, M., & Aydin, E. (2019). Examination of the Restructured Turkish Teaching Undergraduate Program. *International Education Studies, 12*(11), 125-138.

Artigue, M. (2002). Analysis. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Springer.

Ashcraft, M. H., & Ridley, K. S. (2005). Math anxiety and its cognitive consequences. *Handbook of mathematical cognition*, 315-327.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Attorps, I. (2003). Secondary school teachers’ pedagogical content knowledge, In PME Conference, 28(1), 1.

Aydeniz, F. (2011). *Öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili sahip oldukları kavram imajlarının ve matematiksel anlayışların incelenmesi üzerine bir durum çalışması*, (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Aydın, İ. & Peken, M. (2004). Lise Matematik 3. Ankara: İnkılap Yayınları.

Balcı, M. (1999). Matematik analiz I. (6. basım). Ankara: Balcı Yayınları.

Ball, D. (1992). *Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about the subject matter?* In M. Kennedy (Ed.), Teaching academic subjects diverse learners (pp. 63-83). New York, NY: Teachers College Press.

Ball, D.L. (1997). *What Do Students Know? Facing Challenges of Distance, Context, and Desire in Trying to Hear Children.* In: Biddle, B.J., Good, T.L., Goodson, I.F. (eds) International Handbook of Teachers and Teaching. Springer International Handbooks of Education, vol 3. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4942-6_20

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi,* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115–131. https://doi.org/10.2307/30034952

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. Mathematics in School, *10*(1),14–17.

Bartan, M. (2019). Okul öncesi öğretmen ve öğretmen adaylarının okul öncesi öğretmen yetiştirme lisans programı hakkında görüş ve önerileri. *Dumlupınar Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *3*(1), 24-36.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: Recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 57–79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. McGraw-Hill Education (UK).

Bateman, S. M. (2020). *Conceptualizations of Slope and Approaches Used by University Calculus Students and Presented in Calculus Textbooks* (Doctoral dissertation), State University of New York at Buffalo.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479–495. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(3), 389-399. https://doi.org/10.1080/0020739980290309

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9112-2

Bingölbali, E. (2010). *Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler.* MF Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Edt.). Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri, 223-255.

Bingölbali, E., Arslan, S., & Zembat, İ. Ö. (2016). Matematik eğitiminde teoriler. *Ankara: Pegem Akademi*.

Breen, S., Larson, N., O 'Shea, A., & Pettersson, P. (1992). Students' concept images of inverse functions. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.2228-2234. ⟨hal-01288621⟩

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, *34*(4), 663–689. https://doi.org/10.3102/00028312034004663

Bressoud, D. (2015). Insights from the MAA National Study of College Calculus. *The Mathematics Teacher*, *109*(3), 179–185. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.3.0178

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme.* (Doktora Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168–193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study, *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *33*(5), 352-378. Retrieved Apr 29, 2022, from https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/33/5/article-p352.xml

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. Mathematics classrooms that promote understanding, 19-32.

Cheng, I. (2010). Fractions: A New Slant on Slope. Mathematics Teaching in the Middle School, 16(1), 34–41. https://doi.org/10.5951/MTMS.16.1.0034

Coe, E. E. (2007). *Modeling teachers' ways of thinking about rate of change* (Order No. 3258070). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (304895872). https://www.proquest.com/dissertations-theses/modeling-teachers-ways-thinking-about-rate-change/docview/304895872/se-2?accountid=199020

Cohen, B. J. (2012). The Benefits and Costs of an International Currency: Getting the Calculus Right. *Open Economies Review*, *23*(1), 13–31. https://doi.org/10.1007/s11079-011-9216-2

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. In P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics: Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development* (pp. 31–60). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_2

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *In Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME (pp. 322-326).*

Cornu, B. (1991). Limits. In. Tall, D. (Eds), Advanced mathematical thinking. Kluwer, Boston.

Crawford, A. R., & Scott, W. E. (2000). Making Sense of Slope, *The Mathematics Teacher*, *93*(2), 114-118. Retrieved Apr 29, 2022, from https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/93/2/article-p114.xml

Creswell, J. W., Hanson, W. E., Clark, V. L. P., & Morales, A. (2007). Qualitative research designs: Selection and implementation. The Counseling Psychologist, *35*, 236-264.

Çakıcı, D., Alver, B., & Ada, Ş. (2006). Anlamlı öğrenmenin öğretimde uygulanması. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, (13) (13) , 71-80 . Retrieved from* *https://dergipark.org.tr/en/pub/ataunikkefd/issue/2774/37142*

Çekmez, E. (2013*). Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi.* (Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çekmez, E., & Adnan, B. (2019). Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna yönelik anlamalarına etkisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 30-58.

Çetin, N. (2009). The performance of undergraduate students in the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(3), 323-330. https://doi.org/10.1080/00207390802568119

Çetinkaya, B., Erbaş, A.K. ve Alacacı, C. (2013). *Değişim Oranı Olarak Türev ve Tarihsel Gelişimi. Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar*. Ankara: Pegem Akademi,529-555.

Çiltaş, A. (2011). *Dizi ve seriler konusunun matematiksel modelleme yoluyla öğretiminin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğrenme ve modelleme becerileri üzerine etkisi.* (Doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*(3), 281-303.

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). Matematik öğretmeni adaylarının belirli integral konusunda kullanılan temsiller ile işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 9*(3), 581-605.

Demir, N., Akbaş, E. E., & Gök, M. (2021). Yenilenen ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programı ile ilgili öğretim elemanlarının görüşleri. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18(1),* 70-105. https://doi.org/10.33711/yyuefd.859490

Deniz, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğitim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(3), 369–389. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050

Domingos, A. (2009). Learning advanced mathematical concepts: The concept of limit. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 2266-2275). http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-12

Doruk, M., Duran, M., & Kaplan, A. (2017). Lisans öğrencilerinin limit tanımını yorumlama becerileri. *Journal of Education,* 8*(1)*, 177-194. https://doi.org/10.19126/suje.356518

Doruk, M., Duran, M., & Kaplan, A. (2018). Lisans öğrencilerinin türev tanımıyla ilgili yorumları ve türeve yükledikleri anlamlar. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 *(2), 834-856 . DOI: https://10.17240/aibuefd.2018..-431455*

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89–114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions, *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *13*(5), 360-380. Retrieved Apr 28, 2022, from https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/13/5/article-p360.xml

Duru, A. (2006) *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. (Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope / Matematik öğretmeni adaylarının eğim kavramına ilişkin bilgileri. *Eğitimde Kuram ve Uygulama,11*(2),673-693. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/eku/issue/5465/74218

Emin, A., Gerboga, A., Güneş, G., & Kayacıer, M. (2019). *Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik 12 Ders Kitabı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Engin, A. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alan dilini kullanma becerileri ve tutumlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Erdoğan, G. (2017). *Lise matematik öğretmenlerinin noktada türev ve türev fonksiyonu hakkındaki kavram imajları* (Yüksek Lisans Tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya

Ergene, Ö. (2014). *İntegral hacim problemleri çözüm sürecindeki bireysel ilişkilerin uygulama topluluğu bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Marmara Üniversitesi. İstanbul.

Ergene, Ö. (2019). *Matematik öğretmeni adaylarının Riemann toplamlarını kullanarak modelleme yoluyla belirli integrali anlama durumlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Erol, B. (2013). *İlköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinin fizik dersine yönelik tutumları ile öğrenme stilleri arasındaki ilişki* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Ervynck, G. (1983). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. *In Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 330-333).*

Fahy, P. J. (2001). Addressing some Common Problems in Transcript Analysis. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning, 1*(2). https://doi.org/10.19173/irrodl.v1i2.321

Fındık, S. (2019). *Türev Konusunun Matematiksel Sit Kavramı Çerçevesinde Ekolojik Analizi Ve Kavramsal Ilişkilerinin Didaktik Yapılandırılması* (Doktora Tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişejhir.

Francis, E. J. (1992). *The concept of limit in college calculus: assessing student understanding and teacher beliefs* (Doctoral dissertation), University of Maryland at College Park.

Giraldo, V., & Carvalho, L.M. (2002). Theoretical-computational conflicts and the concept image of derivative. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 37−42). Available from http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip22-3/BSRLM-IP-22-3-7.pdf

Gleason, M. A. & Hallett, H. D. (1992). The Calculus Consortium Based at Harvard university. *Focus on Calculus 1,*1-4.

Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(1), 5–36. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9245-4

Gök, M. (2016). Analysis of components of pedagogical content knowledge: content knowledge and knowledge of learners. *Route Educational and Social Science Journal 3*(2), p.217-236

Gözen, Ş. (2001). *Matematik ve öğretimi*, İstanbul: Evrim.

Grabiner, J. V. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly*, *90*(3), 185-194. https://doi.org/10.1080/00029890.1983.11971185

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *25*(2), 116–140. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.2.0116

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *In PME conference* (Vol. 3, pp. 3-65).

Grover, R. (2015). *Student conceptions of functions: how undergraduate mathematics students understand and perceive functions.* School of Education Graduate Theses & Dissertations. 80 Retrieved on 5 December 2018, from https://scholar.colorado.edu/educ_gradetds/80.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*(3), 253-275. https://doi.org/10.1023/A:1009900719800

Gülkılık, H. (2008). *Öğretmen adaylarının bazı geometrik kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram imajlarının ve imaj gelişimlerinin incelenmesi üzerine fenomenografik bir çalışma* (Yüksek Lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Haapasalo, L. (2003). The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa. In *Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, University of Joensuu, Bulletins of the Faculty of Education* (Vol. 86, pp. 1-20).

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57–72. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.004

Hähkiöniemi, M. (2006). Is there a limit in the derivative? – Exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. In M. Bosch (Eds.), Proceedings of the fourth congress of the European society for research in mathematics education (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, Spain, 17 - 21 February 2005, 1758-1767. http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Habineza, F. (2013). A case study of analyzing student teachers' concept images of the definite integral. *Rwandan Journal of Education, 1(2), 38-54.*

Hauger, G. S. (1995). Rate of Change Knowledge in High School and College Students. *https://eric.ed.gov/?id=ED392598*

Hauger, G. S. (2000). Instantaneous rate of change: A numerical approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(6), 891–897. https://doi.org/10.1080/00207390050203379

Hart, D. K. (1991). *Building concept images--supercalculators and students' use of multiple representations in calculus.* (Doctoral dissertation). Oregon State University, USA.

Hartter, B. (1995). *Concept image and concept definition for the topic of the derivative*. (Doctoral Dissertation) Illinois State University, USA.

Heibert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Heid, M. K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *19*(1), 3–25. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.19.1.0003

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Herman, M. F., 2002*, Relationship of college students' Visual preference to use of representations: Conceptual understanding of functions in algebra* (Unpublished doctoral dissertation thesis). The Ohaio State University, USA.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the 4th PME Conference*, 8.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hoffman, T. W. (2015). *Concept image of slope: understanding middle school mathematics teachers' perspective through task based interviews*. (Doctoral Dissertation). The University of North Carolina, USA.

Isaacson, J. D. (1999). *The effects of static graphic, animated graphic, and interactive animated graphic presentations on acquisition of the tangent concept*. (Doctoral Dissertation). University of Florida, USA.

Işık, A. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı . *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi* , 0 (11) , 462-471 . Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/ataunikkefd/issue/2772/37097

Işık, A., Çiltaş, A., & Bekdemir, M. (2008). Matematik eğitiminin gerekliliği ve önemi. *Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, (17).*

Jitendra, A. K. (2005). Mathematics Assessment: Introduction to the Special Issue. *Assessment for Effective Intervention, 30*(2), 1–2. https://doi.org/10.1177/073724770503000201

Johnson*, H. L. (2010). Making sense of rate of change: Secondary students' reasoning about changing quantities.* (Doctoral Dissertation) The Pennsylvania State University*,* USA.

Kabael, T., Barak, B., & Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 5(1).*

Kertil, M., Erbaş, A. K. & Çetinkaya, B. (2017). Pre-service Elementary Mathematics Teachers' Ways of Thinking about Rate of Change in the Context of a Modeling Activity . *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)* , *8*(1) , 188-217 . DOI: https://10.16949/turkbilmat.304212

Kieran, C. (1994). A Functional Approach to the Introduction of Algebra – Some Pros and Cons. In J. P. da Ponte ve J. F. Matos (Eds.), PME 18, (1, pp. 157-175). Lisbon, Portugal.

Kline, M. (1958). The ancients versus the moderns, a new battle of the books. *The Mathematics Teacher, 5*1(6), 418-427.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal Volume 20 Number 4, 282-300

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2), 137–174. https://doi.org/10.1023/A:1016090528065

Konyalıoğlu, A. C., Tortumlu, N. , Kaplan, A. , Işık, A. & Hızarcı, S. (2011). Matematik öğretmen adaylarının integral kavramını kavramsal anlamaları üzerine. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6 (1),1-8.Retrievedfrom https://dergipark.org.tr/tr/pub/befdergi/issue/23152/247308

Kaymakçı, K., Keskin, E., & Ev Çimen, E. (2018). Eskişehir ilindeki ilköğretim matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının lisans eğitiminde aldıkları dersler üzerine görüşleri. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi Eğitim Dergisi, 3(1)*, 23–41.

Kuzu, O. (2021). Matematik ve fen bilgisi öğretmeni adaylarının integral konusundaki yeterliklerinin tanısal değerlendirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(1), 1402–1418. https://doi.org/10.33711/yyuefd.859592

Kupari, P. (2008). Mathematics education in Finnish comprehensive school: characteristics contributing to student success. In *Proceedings of the XI International Congress in Mathematics Education*.

Lewin, K. (1951). *Field theory in social science: selected theoretical papers (Edited by Dorwin Cartwright.).* Harpers.

Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education & Development, 3*(2001), 62–73. https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.115197

Likwambe, B., & Christiansen, I. M. (2008). A case study of the development of in-service teachers' concept images of the derivative. *Pythagoras, 2008(68), 22-31. https://hdl.handle.net/10520/EJC20905*

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 405–427. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, 162-175.

Maharajh, N., Brijlall, D., & Govender, N. (2008). Preservice mathematics students' notions of the concept definition of continuity in calculus through collaborative instructional design worksheets. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(sup1), 93–106. https://doi.org/10.1080/10288457.2008.10740644

McCarty, T. S. (2019). *Analyzing Mathematicians' Concept Images of Differentials* (Doctoral dissertation). West Virginia University, USA.

McDowell, Y. L. (2021). *Calculus Misconceptions of Undergraduate Students.*(Doctoral Dissertation). Columbia University, USA.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). Qualitative research: A guide to design and implementation. John Wiley & Sons.

MEB. (2018a). İköğretim matematik öğretim programı, Milli Eğitim Bakanlığı Ankara.

MEB. (2018b). Ortaöğretim matematik öğretim programı, Milli Eğitim Bakanlığı Ankara.

Moonja, J. & Seong-A, K. (2013). A Case Study on Students' Concept Images of the Uniform Convergence of Sequences of Continuous Functions. Research in Mathematical Education, 17(2), 133–152. https://doi.org/10.7468/JKSMED.2013.17.2.133

Moore, L. C., & Smith, D. A. (1987). Review of *Toward a Lean and Lively Calculus*, by R. G. Douglas. *The College Mathematics Journal*, *18*(5), 439–442. https://doi.org/10.2307/2686974

Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. Educational Studies in Mathematics, 76(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y

Monk, G. S. (1997). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal, 1*(9), 7.

Mueller, E. T. (2004). Event Calculus Reasoning Through Satisfiability. *Journal of Logic and Computation*, *14*(5), 703–730. https://doi.org/10.1093/logcom/14.5.703

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and ınstructors' conceptualızatıons of slope: a comparıson across academıc levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491–1515. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *The Mathematics Educator*, *23*(2). https://ojs01.galib.uga.edu/tme/article/view/1739

Nayir, Ö. (2013). *İlköğretim matematik öğretmenliği adaylarının türevi kavrayışlarının bilişe iletişimsel yaklaşım açısından incelenmesi.* (Doktora Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics NCTM, Reston, VA

National Council of Teachers of Mathematics. (1987). Principles and standards for school mathematics NCTM, Reston, VA

Ndlovu, M., Wessels, D., & De Villiers, M. (2011). An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad. *Pythagoras*, *32*(2), http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i2.52

Nesin, A. (2015). Analiz II. Nesin Yayıncılık, İstanbul.

Neuman, L. W. (2007). Toplumsal araştırma yöntemleri: Nitel ve nicel yaklaşımlar (Çev. S. Özge). *İstanbul: Yayın Odası*.

Nurwahyu, B., Tinungki, G. M., & Mustangin. (2020). Students' concept image and its impact on reasoning towards the concept of the derivative. *European Journal of Educational Research, 9*(4), 1723-1734. https://doi.org/10.12973/eu- jer.9.4.1723

Núñez, R., & Lakoff, G. (2005). The cognitive foundations of mathematics. *Handbook of mathematical cognition*, 109-124.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Öner, A. & Ertekin, E. (2015). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının periyot kavramıyla ilgili kavram imajları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 35* (2), 333-353 . https://dergipark.org.tr/tr/pub/gefad/issue/6772/91159

Öztoprakçi, S. (2014). *Pre-service middle school mathematics teachers' understanding of quadrilaterals through the definitions and their relationships.* (Doctoral dissertation). Middle East Technical University, Ankara, Turkey.

Perry, A. B., Jardine, D., & Shell-Gellasch, A. (2011). Connections between Newton, Leibniz, and calculus I. *Mathematical time capsules*, 133-137.

Poincaré H. (1908). 'Science et Méthode' translated by Francis Maitland 2007, Courier Corporation, New York.

Porzio, D. T. (1994). *The effects of differing technological approaches to calculus on students' use and understanding of multiple representations when solving problems.* (Doctoral Dissertation). Ohio State University, USA.

Punch, K. F. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş: Nicel ve nitel yaklaşımlar*. (Etöz, Z. Çev,) Siyasal kitabevi.

Robinson, M. (2003). *Student Enrollment in High School AP Sciences and Calculus: How does it Correlate with STEM Careers?* Bulletin of Science, Technology & Society, 23(4), 265–273. https://doi.org/10.1177/0270467603256090

Rosenthal, A. (1951). The history of calculus. *The American Mathematical Monthly*, *58*(2), 75-86.

Rösken, B., & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3, 181-204.*

Sağel, M. K., ve Aktaş, M. (Eds.) (2005). Genel Matematik I. Pegem A Yayıncılık.

Sağırlı, M. Ö., Kırmacı, U., & Bulut, S. (2010). Türev konusunda uygulanan matematiksel modelleme yönteminin ortaöğretim öğrencilerinin akademik başarılarına ve öz-düzenleme becerilerine etkisi. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 3(2),* 221-247.

Sağlam, Y. (2011). *Üniversite öğrencilerinin integral konusunda görsel ve analitik stratejileri* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Sanchez, R. A. (1996). *Teacher's and students' mathematical thinking in a calculus classroom: the concept of limit* (Doctoral dissertation), Florida State University, USA.

Selden, A., & Selden, J. (1993). Collegiate mathematics education research: What would that be like?. *The College Mathematics Journal, 24(5)*, 431-445. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973564

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 59-84.

Sfard, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 157–189. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0203_1

Sfard, A. (2005). What Could be More Practical than Good Research? *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 393–413. https://doi.org/10.1007/s10649-005-4818-5

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15. Retrieved Feb 28, 2022, from https://pubs.nctm.org/view/journals/at/26/3/article-p9.xml

Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics, 112*(5), 270-277.

Staley, K. N. (2004). *Tracing the development of understanding rate of change: A case study of changes in a pre -service teacher's pedagogical content knowledge* (Doctoral Dissertation). North Carolina University, USA.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411. https://doi.org/10.2307/30034943

Stewart, J. (1998). Calculus, concepts and context. Monterey, CA: Brooks-Cole.

Stewart, J. (1999). Calculus (4^{th} ed.). Monterey, CA: Brooks-Cole.

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

Strasser, N. (2010). Who Wants To Pass Math? Using Clickers In Calculus. *Journal of College Teaching & Learning (TLC)*, *7*(3). https://doi.org/10.19030/tlc.v7i3.102

Stroup, W. M. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(2), 167–215. https://doi.org/10.1023/A:1021147132127

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144. https://doi.org/10.1007/BF03217065

Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics, 101*(2), 81-89. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x

Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207–227. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00071-2

Swokowski, E.W. (1988). Calculus with analytic geometry (2nd Ed). PWS KENT Publishing Company, Boston.

Şahin, Z., Yenmez, A. A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(1), 177-188.

Tabaghi, S. G., Mamolo, A., & Sinclair, N. (2009). The effect of DGS on students' conception of slope*. In proceedings of the 31st annual meeting of the North American cahpter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 226-234).

Tague, J. (2015). *Conceptions of rate of change: A cross analysis of modes of knowing and usage among middle, high school, and undergraduate students* (Doctoral dissertation). The Ohio State University, USA.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In proceedings of working group (Vol. 3, pp. 13-28). https://www.researchgate.net/profile/David-Tall/publication/242298018_Students%27_Difficulties_in_Calculus_Plenary_presentation_in_Working_Group_3_ICME_Quebec_August_1992/links/546ded870cf2d5ae3670800e/Students-Difficulties-in-Calculus-Plenary-presentation-in-Working-Group-3-ICME-Quebec-August-1992.pdf

Teuscher, D., & Reys, R. E. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, *112*(6), 359-376. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00150.x

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. R., & Giordano, F. R. (2005). Thomas' Calculus Early

Thomas, G. B. & Finney, R.L. (2001). *Calculus ve analitik geometri*, Cilt:1, İstanbul Beta .

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 229–274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In *Proceedings of the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31-49). Morelia: PME.

Turan, B. (2016). *Matematik Öğretmen Adaylarının Limit, Süreklilik ve Türev İle İlgili Kavramsal Yapıları.* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Turner, Kyle R., & Álvarez, James A. (2021). Supporting Connections to Teaching in an Undergraduate Calculus Course. Proceedings of the 48th Annual Meeting of the

Research Council on Mathematics Learning, (). Retrieved from https://par.nsf.gov/biblio/10308950.

Tyne, J. G. (2016.). *Calculus Students' Reasoning About Slope and Derivative as Rates of Change*.(Master Thesis). University of Maine, USA.

Tzur, R., & Simon, M. (2004). Distinguishing Two Stages of Mathematics Conceptual Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(2), 287–304. https://doi.org/10.1007/s10763-004-7479-4

Ubuz, B. (1996). *Evaluating the Impact of Computers on the Learning and Teaching of Calculus.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). University of Nottingham, UK.

Ubuz, B. (2001). First Year Engineering Students' Learning of Point of Tangency, Numerical Calculation of Gradients, and the Approximate Value of a Function at a Point through Computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *20*(1), 113. https://link.gale.com/apps/doc/A77826924/AONE?u=anon~89c02ef5&sid=googleScholar&xid=cf4485c7

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: Stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* *38*(5), 609–637. https://doi.org/10.1080/00207390701359313

Umay, A. (2007). *Eski arkadaşımız okul matematiğinin yeni yüzü*. Ankara: Aydan Web Tesisleri.

Umay, A., Çıkla, O. A. & Duatepe, A. (2006). Matematik dersi 1.-5. sınıf öğretim programının NCTM prensip ve standartlarına göre incelenmesi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,31(31),198-211. https://dergipark.org.tr/en/pub/hunefd/issue/7807/102409

Ülger, A. (1999-II). Analiz Nedir? *Matematik Dünyası Dergisi,* İstanbul.

Vinner, S. (1976). The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(4), 413–429. http://www.jstor.org/stable/3481947

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner S. (2002) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht

Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Introducing derivative via the calculus triangle. *Mathematics Teacher*, *104*(4), 274-278.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual Knowledge in Introductory Calculus, *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *27*(1), 79-95. Retrieved Mar 29, 2022, from https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/27/1/article-p79.xml

Wu, H. (2003). Preservice professional development of mathematics teachers. Retrieved on 26 June 2020, from http://www.math.berkeley.edu/~wu/.

Yapıcıoğlu Ulaş, M. (2019). *Fen ve matematik öğretmen adaylarının türev konusundaki kavram yapılarının repertuar çizelge tekniği ile incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu

Yeşildere, S. (2007). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlilikleri, *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi, 24(2),* 61-70.

Yıldırım, C. (2004). Matematiksel düşünme (4. Baskı). İstanbul: Remzi Kitapevi.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Seçkin Yayıncılık. Ankara.

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods (applied social research methods). London and Singapore: Sage.

YÖK (2018). İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı, Yükseköğretim Kurulu, Ankara.

Yu, F. (2020). Students' Meanings for the Derivative at a Point. Karunakaran, S. S., Reed, Z., &Higgins, A. (Eds.). (2020). Proceedings of the 23rd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Boston, MA. (pp. 681-689)

Yu, F. (2021). What is Instantaneous Rate of Change? Conference: Special Interest Group of the MAA on Research in Undergraduate Mathematics Education https://www.researchgate.net/publication/355484449_What_is_Instantaneous_Rate_of_Change

Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative.* (Doctoral dissertation). Oregon State University, USA.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS issues in mathematics education*, *8*, 103-127.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Zimmermann, W. (1991). Visual Thinking in Calculus. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 127–137). Mathematical Association of America.

EK-A: Birinci Aşama Sorular

I. Aşama Sorular

1. Eğim kavramını açıklayınız.
2. Anlık değişim oranı/değişim oranı kavramı nedir? Açıklayınız.
3. Türev kavramını açıklayınız.
4. Eğim ile anlık değişim oranı/ değişim oranı kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
5. Eğim ile türev kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
6. Anlık değişim oranı/değişim oranı ve türev kavramları arasında ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
7. Türev, anlık değişim oranı/değişim oranı ve eğim kavramları arasında bir ilişki var mıdır? Varsa nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

EK-B: İkinci Aşama Sorular

II. Aşama Sorular

1- f bir doğrusal fonksiyon olup bu fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi m=3 tür. Buna gore;
   a- Koordinat düzleminde f(x) fonksiyonunun olası grafiğini çiziniz.
   b- Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade eder? Açıklayınız.

2- f doğrusal olmayan bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksiyonun bir noktadaki teğetin eğimi m=3'tür.

Örneğin, f(x)=cos(x)+3x

   a- fonksiyonun 0 noktasındaki teğetinin eğimi 3 tür. Bu fonksiyona uygun bir fonksiyon örneği veriniz ve grafiğini çiziniz.
   b- Bir problem durumunda örneğin; günlük yaşam durumu, analizde çözdüğünüz türev soruları, fizik, kimya veya ekonomi gibi matematik dışındaki disiplinlerde eğimin 3 olması sizce ne anlam ifade etmektedir? Açıklayınız.
   c- Birinci sorudaki doğrusal fonksiyonun eğimi ile bu sorudaki fonksiyonun eğimi arasında sizce bir farklılık var mıdır?

3- g bir fonksiyon olmak üzere ve bu fonksiyonun x= 3 noktasındaki anlık değişim oranı/değişim oranıdır. Buna göre;

a- g bir doğrusal fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranını/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?
b- g bir doğrusal olmayan bir fonksiyon olması durumunda x=3 noktasındaki değişim oranı/anlık değişim oranını koordinat düzleminde nasıl gösterirsiniz?
c- Sizce a ve b şıklarındaki fonksiyonların anlık değişim oranlarında bir farklılık var mıdır? Açıklayınız.

4- Arife ve Batuhan $g(x) = x^3 + 4x$ fonksiyonu üzerine bir tartışma gerçekleştirmektedir. Arife bu fonksiyonun her bir noktasındaki anlık değişim oranın hesaplanabileceği, örneğin x=2 noktasındaki anlık değişim oranının 16 olduğunu ve bunun da bu noktadaki türeve eşit olduğunu ifade etmiştir. Batuhan ise bu ikisinin neden eşit olduğunu anlamadığını, bu durumun anlamsız olduğunu iddia etmiştir. Siz Arife' nin yerinde olsaydınız, Batuhan'a bu ilişkiyi nasıl izah edersiniz? Açıklayınız.

5- **Ayşe ve Bilge** türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Ayşe $\boxed{f(x) = x^2}$ fonksiyonun x=2 noktasındaki türevin 4 olduğunu ve bunun da o noktadan geçen teğet doğrusunun eğimine eşit olduğunu ifade etmiştir. **Bilge** ise x=2 noktasında bu ikisinin birbirine neden eşit olduğunu anlamadığını ve anlamsız bir durum olduğunu belirtmiştir. Size Ayşe'nin yerinde olsaydınız, Bilge'ye bu ilişkiyi nasıl anlatırdınız? Açıklayınız.

6- Ali ve Bora türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Ali bir fonksiyonun belirli bir noktasındaki değişim oranı ile o noktadan geçen teğet doğrusunun eğiminin aynı şey olduğunu ifade etmektedir. Örneğin, Ali, Bora'ya $\boxed{f(x) = x^2}$ fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının 4 olduğunu ifade etmektedir. Bora ise anlık değişim oranının neden eğime eşit çıktığını anlamadığını ifade etmiştir. Hatta bu durumun anlamsız bir şey olduğunu iddia etmiştir. Siz Ali'nin yerinde olsaydınız, Bora'ya nasıl yardımcı olurdunuz ve eğim ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız?

7- **Zeynep ve Yeliz** türev kavramının anlamı üzerinde tartışmaktadırlar. Zeynep bir noktadaki türevin, o noktadaki değişim oranı ile o noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimine eşit olduğu belirtmiştir. Zeynep, Yeliz'e $\boxed{f(x) = x^2}$ fonksiyonun x=2 noktasındaki anlık değişim oranının, türevinin ve eğiminin 4'e eşit olduğunu ifade etmiştir. Yeliz ise x=2 noktasındaki eğimin türeve eşit olabileceğini iddia etmiştir. Siz Zeynep'in yerinde olsaydınız, Yeliz'e nasıl yardımcı olurdunuz ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi nasıl açıklardınız?

EK-C: Etik Komisyonu Onay Bildirimi

Tarih: 15/03/2021
Sayı: E-35853172-300-00001497785
0001497785

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Rektörlük

Sayı : E-35853172-300-00001497785 15.03.2021
Konu : Ramazan EROL (Etik Komisyon İzni)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: 27.01.2021 tarihli ve E-51944218-300-00001419684 sayılı yazı.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Doktora programı öğrencisi **Ramazan EROL**'un **Doç. Dr. Elif SAYGI** danışmanlığında yürüttüğü **"Matematik Eğitimcileri ve Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim, Değişim Oranı ve Türev Hakkındaki Kavram İmajlarının İncelenmesi"** başlıklı tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **23 Şubat 2021** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini saygılarımla rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. Vural GÖKMEN
Rektör Yardımcısı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu: 37710CC3-942E-40D3-9374-E1417BA59DD0 Belge Doğrulama Adresi: https://www.turkiye.gov.tr/hu-ebys

Adres: Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara
E-posta:yazimd@hacettepe.edu.tr İnternet Adresi: www.hacettepe.edu.tr Elektronik Ağ: www.hacettepe.edu.tr
Telefon: 0 (312) 305 3001-3002 Faks:0 (312) 311 9992
Kep: hacettepeuniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Sevda TOPAL
Bilgisayar İşletmeni
Telefon: 03123051008

EK-Ç: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

* tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
* görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
* başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
* atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
* kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
* bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16/06/2022

(İmza)

Ramazan EROL

EK-D: Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu

24/06/2022

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı :Matematik Eğitimcileri ve Matematik Öğretmen Adaylarının Eğim, Değişim Oranı ve Türev Hakkındaki Kavram İmajlarının İncelenmesi
Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
24/06/2022	220	43430	16/06/2022	% 4	1862356024

Uygulanan filtreler:
1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı: Ramazan EROL

Öğrenci No.: N16145935

Ana Bilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı — İmza

Programı: Matematik Eğitimi

Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç Dr. Elif SAYGI

EK-E: Thesis/Dissertation Originality Report

24/06/2022

HACETTEPE UNIVERSITY
Graduate School of Educational Sciences
To The Department of Mathematics and Science Education

Thesis Title Investigation of The Concept Images of Mathematics Educators and Preservice Mathematics Teachers About Slope, Rate of Change And Derivative

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
24/06/2022	220	43430	16/06 /2022	% 4	1862356024

Filtering options applied:
1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname: Ramazan EROL

Student No.: N16145935

Department: Mathematics and Science Education

Program: Mathematics Education

Status: ☐ Masters ☒ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.

Signature

ADVISOR APPROVAL

APPROVED
Assoc. Prof. Elif SAYGI

EK-F: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım haklan bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına ilişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü/ Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)

- o Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ... ay ertelenmiştir. (2)

- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

16 /06 /2022

(imza)

Ramazan EROL

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü Üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.

(2) Madde 6.2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3.şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

(3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü Üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir

**Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.*