T_0-METRİKİMSİ UZAYLARIN SİMETRİSİZLİĞİNE YAKLAŞIM TEORİLERİ

THEORIES OF APPROXIMATION TO THE ASYMMETRY OF T_0-QUASI-METRIC SPACES

NEZAKAT JAVANSHIR

PROF. DR. FİLİZ YILDIZ

Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2021

ÖZET

T_0-METRİKİMSİ UZAYLARIN SİMETRİSİZLİĞİNE YAKLAŞIM TEORİLERİ

NEZAKAT JAVANSHIR

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Filiz YILDIZ

Aralık 2021, 89 sayfa

Bu tezin amacı; metrik olmayan ve asimetrik uzaklık fonksiyonları olarak da bilinen T_0-metrikimsilerin simetrisizliğine yani, T_0-metrikimsilerin bir metrik olmaya ne kadar yakın ya da uzak olduğunu belirlemeye yönelik çeşitli özgün metriksel yaklaşım teorilerini, asimetrik ortama özgü biçimde inşa etmektir.

Altı bölümden oluşan tez çalışmasının birinci bölümünde, dayandığı temel fikirlerden söz edilerek tezin konusuna giriş yapılmıştır.

T_0-metrikimsilerin bazı temel özellikleri ile bu ortamda geliştirilmiş olan çeşitli asimetrik yapılar ikinci bölümün ilk kısmında hatırlatılmış, sonrasında bu yapılardan elde edilen yeni sonuçlar sunulmuştur. Bu bölümün son kısmı ise, tüm özellikleri detaylarıyla incelenen ve tez boyu kullanacağımız çeşitli T_0-metrikimsi uzay örneklerine adanmıştır.

Metriğin simetri özelliği göz önüne alınarak, T_0-metrikimsi uzayın noktalarının birbirlerine olan uzaklıklarına, bu noktalar arasındaki diğer noktalar ile kurulan simetrik-antisimetrik yollar aracılığıyla yaklaşım yapmayı sağlayan, daha önce tanımlanmış simetrik-antisimetrik bağlantılılık teorileri, bu tezin temel tabanını oluşturmaktadır. Tezin üçüncü bölümünde, öncelikle bu teorilerin detayları hatırlatılarak, ikinci kısımda, ilgili teoriler çerçevesinde elde ettiğimiz yeni sonuçlar ve örneklere değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, diğer bir özgün çalışma olarak; T_0-metrikimsi uzaylar için simetrik ve antisimetrik bağlantılı genişleme teorileri inşa edilmiştir. Özellikle, her

sınırlı T_0-metrikimsi uzayın, bir simetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye ve her metrik uzayın, bir antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahip oldukları kanıtlanmıştır. Ayraca, "Her T_0-metrikimsi uzay, antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahip midir? " sorusu incelenmiş, ve farklı koşullar içeren teoremlerin yanı sıra, (ters) örnekler aracılığıyla bu soruya olumlu yanıtlar verilmiştir.

Simetrisizliğe bir diğer yeni yaklaşım olarak, topolojik açıdan yaklaşım, beşinci bölümde ele alınmıştır. Bu çerçevede, simetrik ve antisimetrik bağlantılılık teorilerinin, T_0-metrikimsinin simetrizasyon topolojisine göre doğal yerelleştirmeleri olan yerel simetrik ve yerel antisimetrik bağlantılılık teorileri inşa edilmiştir. Yerel (anti)simetrik bağlantılı uzayların diğer yapılar ile ilişkileri, altuzaylarda kalıtsallıkları, çarpımları, vs... gibi tüm özellikleri, ilk iki alt bölümde detaylarıyla araştırılmış ve örnekler yardımıyla kullanışlı bir çok sonuca ulaşılmıştır.

Bu bölümün son kısmında ise, T_0-metrikimsiler üreterek, bunların asimetrik topoloji içerisindeki gelişiminde kilometre taşı olan asimetrik norm teorisi, T_0-metrikimsilerin simetrisizliğine yaklaşmak amacıyla alternatif bir diğer çalışma ortamı olarak ele alınmıştır.

Tezde elde edilen bulguların ve ileriye dönük çalışma konusu olabilecek açık soruların sunulduğu son bölüm ile tez tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: T_0-Metrikimsi, Antisimetrik uzay, Simetrik çift, Antisimetrik nokta, Simetrizasyon topolojisi, Simetri bileşen, Yıldız uzay, Antisimetrik bağlantılılık, Sınırlı yarıçap, İzometri, Simetrik bağlantılı genişleme, Yerel antisimetrik bağlantılı uzay, Ortak-kompaktlık, Asimetrik normlu gerçel vektör uzay

ABSTRACT

THEORIES OF APPROXIMATION TO THE ASYMMETRY OF T_0-QUASI-METRIC SPACES

NEZAKAT JAVANSHIR

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Filiz YILDIZ

December 2021, 89 pages

The aim of this thesis is to construct various original metric approach theories specific to the asymmetric environment for the asymmetry of T_0-quasi-metrics, non-metrics and also known as asymmetric distance functions, that is, to determine how close or far T_0-quasi-metrics are from being a metric.

In the first chapter of the thesis, which consists of six chapters, the main ideas on which it is based are mentioned and an introduction to the subject of the thesis is made.

Some of the basic features of T_0-quasi-metrics and various asymmetric structures developed in this environment are reminded in the first part of the second chapter, after that the new results obtained from these structures are presented in the second part. The last part of this chapter is devoted to various examples of T_0-quasi-metric spaces, are studied in detail which we will use throughout the thesis.

Considering the symmetry feature of the metric, the previously defined symmetric-antisymmetric connectedness theories, which enable the approximation of the distances of the points of the T_0-quasi-metric space to each other, through the symmetric-antisymmetric paths established with the other points between these points, form the basis of this thesis. In the third chapter of the thesis, firstly the details of these theories are reminded, and in the second part, new results and examples that we have obtained within the framework of the relevant theories are mentioned.

In the fourth chapter, as another original work; the theories of symmetric and antisymmetric connection extensions are established for a T_0-quasi-metric space. In particular, it is proved that every bounded T_0-quasi-metric space has a symmetrically connected one-point extension, and every metric space has an antisymmetrically connected one-point extension. Also, "Does every T_0-quasi- metric space have an antisymmetrically connected extension?" question is investigated, and the positive answers are given to this question by means of (counter)examples as well as theorems involving different conditions.

As another new approach to asymmetry, the topological approach is discussed in the fifth chapter. In this framework, local symmetric and local antisymmetric connectedness theories, which are natural localizations of symmetric and antisymmetric connectedness theories according to the symmetrization topology of T_0-quasi-metric, are constructed. All the properties of locally (anti)symmetrically connected spaces such as their relations with other structures, their inheritance in subspaces, products, etc. have been investigated in detail in the first two subsections, and many useful results have been reached with the help of examples.

In the last part of the fifth chapter, asymmetric norm theory, which is a milestone in their development in asymmetric topology by producing T_0-quasi-metrics, is considered as another alternative working environment in order to approach to the asymmetry of T_0-quasi-metrics.

The thesis is completed with the last chapter, in which the findings obtained in the thesis and open questions that could be the subject of future study are presented.

Keywords: T_0-quasi-metric, Antisymmetric space, Symmetric pair, Antisymmetric point, Symmetrization topology, Symmetry component, Star space, Antisymmetrically connected, Bounded radius, Isometry, Symmetrically connected extension, Locally antisymmetrically connected space, Join-compactness, Asymmetrically normed real vector space

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca, bütün zorlukları aşmam için yardım eden, bana her türlü desteklerini esirgemeyen, merhamet, sabır, bilgi birikimi ve tecrübeleri ile çalışmamı yönlendiren, kendisinden çok şey öğrendiğim saygıdeğer danışmanım sayın Prof. Dr. Filiz YILDIZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Saygıyla andığımız sayın Prof. Dr. H.-Peter A. KÜNZI'ye, katkılarından dolayı teşekkür ediyorum.

Tez izleme komitesinde değerli görüşleri ile araştırmanın şekillenmesinde yardımcı olan sayın hocalarım, Prof. Dr. Rıza ERTÜRK ve Prof. Dr. Duran TÜRKOĞLU'na teşekkür ederim.

Sevgi ve desteklerini hiç eksik etmeyen aileme, özellikle sevgili anneme ve babama teşekkürlerimi bildiriyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$x \vee y$	x ve y 'nin en küçük üst sınırı
$\triangle_X$	X 'in köşegeni
d	d T_0-metrikimsisi
d_X	d 'nin X kümesi üzerine kısıtlaması
d^{-1}	d 'nin duali
d^s	d 'nin simetrizasyon metriği
τ_d	d 'nin ürettiği topolojisi
τ_{d^s}	d 'nin simetrizasyon topolojisi
τ_{st}	standart topoloji
$\leq_d$	d 'nin özelleştirme kısmi sıralaması
Z_d	X 'in simetrik çiftler kümesi
$Z_d(x)$	x 'in simetri kümesi
R_d	X 'in antisimetrik çiftler kümesi
$R_d(x)$	x 'in antisimetri kümesi
P_{xy}	x 'den y 'ye (anti) simetrik yol
$C_d(x)$	x 'in simetri bileşeni
$T_d(x)$	x 'in antisimetri bileşeni
$\Vert . \Vert$	norm
$\Vert . \vert$	asimetrik norm
$d_{\Vert . \vert}$	asimetrik normdan üretilen T_0-metrikimsi

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı; simetrisiz (asimetrik) yapıya sahip, yani metrik olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın simetrisizliğine çeşitli teoriler yardımı ile metriksel yaklaşımlar yapmaktır.

Bir X kümesi üzerinde her $x, y, z \in X$ için
i) $d(x,x) = 0$, *ii)* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, *iii)* $d(x,y) = 0 = d(y,x)$ ise $x = y$ koşullarını sağlayan, simetrisiz bir $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu, yani metrik olmayan d *T_0-metrikimsisi* için d^{-1} fonksiyonu, $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$ olarak tanımlanır ve d^{-1} 'e, d'nin *dual T_0-metrikimsisi* denir. Açıktır ki, $d^s = d \vee d^{-1}$ olarak tanımlı d^s fonksiyonu simetri özelliğini sağlar ve bir metriktir. Dikkat edilirse, d metrik ise $d^s = d$ dir. Bu çalışmada d^s ve τ_{d^s}'e, sırasıyla *d'nin simetrizasyon metriği ve topolojisi* denilecektir.

Bu kavramlar çerçevesinde, bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı için $d(x,y) \neq d(y,x)$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarının bulunabileceği dikkate alındığında; *$d(x,y)$ ile $d(y,x)$ uzaklıklarının birbirlerine ne derece yakın veya uzak olabilecekleri sorusu*, asimetrik topolojide önemli bir araştırma konusu oluşturmaktadır. Buna göre;

Prof. Dr. Filiz Yıldız ve Prof. Dr. H.-Peter A. Künzi, T_0-metrikimsilerin simetrisizliği çerçevesinde, iki noktanın birbirlerine olan asimetrik uzaklıklarının ölçümüne yaklaşımlar geliştirmek amacıyla *simetrik yol* ve dual olarak, *antisimetrik yol* kavramlarını ilk olarak [18] 'de sunmuşlardır. Aynı çalışmada, bu kavramlar yardımı ile T_0-metrikimsi uzaylar ortamında *simetrik bağlantılılık* ve simetrik bağlantılılığın duali olarak, *antisimetrik bağlantılılık* teorilerini inşa etmişlerdir. Bunu takiben de, Grafik Teori [5, 8]'de yer alan grafiksel bağlantılılık yapısı ile bu teoriler arasındaki ilişkilerden yararlanarak, önemli bir sonuç olan *"Bir T_0-metrikimsi uzay, simetrik bağlantılıdır ya da antisimetrik bağlantılıdır"* gerçeğini kanıtlamışlardır [18]. Bu çalışmalar çerçevesinde ayrıca, bazı T_0 metrikimsilerin fazlasıyla simetrisiz (asimetrik) olmaları nedeniyle, metrik uzaylara dual (karşıt) olarak doğal biçimde ortaya çıkan yeni bir uzay tipi, aynı çalışmada *antisimetrik uzay* adı altında tanımlanmıştır.

Yukarıda ifade edilenler doğrultusunda [18]'i temel kaynak alan bu tez çalışması, T_0-metrikimsilerin simetrisizliğine farklı ve özgün teoriler aracılığıyla yeni yaklaşımlar sunmaktadır. Bu çerçevede; T_0-metrikimsilere özgü tanımlanmış çeşitli yapılar ve örneklerin hatırlatılmasından sonra, öncelikle simetrik ve antisimetrik bağlantılılık teorileri üzerine elde ettiğimiz yeni sonuçlar üçüncü bölümde vurgulanmıştır.

Tez çalışmamızda simetrisizliğe özgün bir yaklaşım olarak öncelikle, simetrik bağlantılı ve antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi genişleme teorileri inşa edilmiştir. Bu çerçevede, simetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın simetrik bağlantılı genişlemeye sahip olup olmaması konusu üzerine çeşitli teoremler ve (ters) örnekler sunularak, simetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın *sınırlı* olması gibi, belirli koşullar altında simetrik bağlantılı bir genişlemeye sahip olabileceği gösterilmiştir. Ayrıca simetrik bağlantılılığın, simetrizasyon topolojisine göre yoğun olan altuzaylarda bile kalıtsal bir özellik olmadığını gösteren özgün ve kullanışlı örneklere değinilmiştir.

Bu çalışmalara dual olarak ise; antisimetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahip olup olmaması konusunda incelemeler yapılmış ve bu çerçevede, kayda değer sonuçlar elde edilmiştir. Burada, bir metrik uzayın antisimetrik bağlantılı bir tek-nokta genişlemeye sahip olduğu kanıtlanmış ve böylece, antisimetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahip olabilmesi için uzayın sınırlı olması koşulunun gerekmediği görülmüştür. Ayrıca, antisimetrik bağlantılılık özelliğinin, simetrizasyon topolojisine göre yoğun olan altuzaylarda kalıtsal olduğu sonucu elde edilmiştir.

Bir T_0-metrikimsi uzayın simetrisizlik derecesi için yaklaşımlar yapılmaya beşinci bölümde de devam edilerek, simetrisizliğe yeni bir yaklaşım, ilk kez topolojik bakış açısıyla burada inşa edilmiştir. Buna göre; bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı için, τ_{d^s} simetrizasyon topolojisi yardımı ile, simetrik bağlantılılık ve antisimetrik bağlantılılık kavramları yerelleştirilerek *yerel simetrik bağlantılılık* ve *yerel antisimetrik bağlantılılık* kavramları tanımlanmıştır. İnşa edilen teori çerçevesinde, öncelikle bu kavramların belirli koşullar altında kalıtsal olup olmadıkları konusunda sonuçlar ve (ters) örnekler sunulmuş, sonrasında ise, çarpımsallık ve uygun dönüşümler altında korunma gibi özellikleri detaylı biçimde ele alınmıştır. Son kısımda ise, önceki bölümlerde kurduğumuz yaklaşımlar, asimetrik normlu gerçel vektör uzaylar çerçevesinde değerlendirilerek, (anti)-simetrik bağlantılılık ve yerel (anti)simetrik bağlantılılık yapıları ile ilgili bazı sonuçların, asimetrik normlardan üretilen T_0-metrikimsi uzaylarda daha kolaylaştığı görülmüştür.

Tez boyunca elde edilen bazı bulguların kısaca özetlendiği son bölümde ise, ileriye dönük çalışmalara konu olabilecek araştırma soruları ayrıca ifade edilmiştir.

2. T_0-METRİKİMSİ UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle, T_0-metrikimsilerin literatürde yer alan bazı temel özellikleri ile T_0-metrikimsilere özgü olarak [18] 'de tanımlanan çeşitli yapılar ilk kısımda hatırlatılmış ve bunları takiben, ikinci kısımda bu yapılar çerçevesinde elde edilen bazı özgün sonuçlar sunulmuştur. Bu bölümün son kısmı ise, özellikleri orjinal biçimde bu tezde incelenen ve tezin kalanında gerekli olan çeşitli T_0-metrikimsi uzay örneklerine adanmıştır.

2.1. T_0-Metrikimsilere Özgü Temel Özellikler ve Yapılar

Bu alt bölümde, ağırlıklı olarak [18] olmak üzere, [1, 2, 3, 10, 12] kaynaklarından yararlanılarak, sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanımlar, önermeler, sonuçlar ve gösterimler verilecektir.
Bir (X, d) metrik uzayında, simetri özelliği sayesinde her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ olduğu açıktır. Şimdi, simetri özelliğini sağlaması gerekmeyen, yani, metrik olmayan bir fonksiyon yardımıyla tanımlı T_0*-metrikimsi* kavramını hatırlayalım:

2.1.1. Tanım. X bir küme ve $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

(1) $d(x, x) = 0$,

(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

koşulları sağlanıyorsa, d 'ye *yarı-metrikimsi* denir. Ek olarak, her $x, y \in X$ için,

$$d(x, y) = 0 = d(y, x) \Longrightarrow x = y$$

oluyorsa d 'ye T_0*-metrikimsi* denir. Ayrıca, d *'nin duali*

$$d^{-1} : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d^{-1}(x, y) = d(y, x)$$

biçiminde tanımlanır. Açıkça, $d = d^{-1}$ ise d metriktir.
Diğer yandan, d *'nin simetrizasyon metriği* d^s her $x, y \in X$ için

$$d^s(x, y) = d(x, y) \vee d(y, x)$$

yani, kısaca $d^s = d \vee d^{-1}$ eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca, bir d T_0-metrikimsinin *di-simetri fonksiyonu*, her $(x, y) \in X \times X$ için

$$F_d(x, y) = d(x, y) - d(y, x)$$

biçimindedir.

Bu tez çalışmasında, τ_{d^s}, d 'nin *simetrizasyon topolojisi* olarak adlandırılacaktır. Açıkça, $\tau_{d^s} = \tau_{(d^{-1})^s}$ dır. T_0-metrikimsiler üzerine diğer bazı çalışmalar için okuyucuya [6, 7, 11, 13, 14, 16] kaynakları önerilebilir.

2.1.2. Tanım. [17] (X, d) ve (Y, e) iki yarı-metrikimsi uzay ve $f : (X, d) \to (Y, e)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

eşitliği sağlanıyorsa f 'ye *izometri* denir. Burada, (X, d) ve (Y, e) T_0-metrikimsi uzay olursa, f bire-bir olur.

T_0-metrikimsi uzaylar çerçevesinde önemli yere sahip ve bu tez çalışması boyunca kullanılacak aşağıdaki eşitsizliğin kanıtı [2] 'de verilmiştir.

2.1.3. Not. d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. Her $a, b, x, y \in X$ için

$$|d(x, y) - d(a, b)| \leq d^s(x, a) + d^s(y, b)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin bir uygulaması olarak, di-simetri fonksiyonunun $\tau_{d^s} \times \tau_{d^s}$ çarpım topolojisine göre sürekli olduğunu ifade eden aşağıdaki önerme [18] 'de kanıtlanmıştır.

2.1.4. Önerme. *(X, q) T_0-metrikimsi uzay ve her $x, y \in X$ için $F_q(x, y) = q(x, y) - q(y, x)$ olsun. Bu durumda, $F_q : (X \times X, \tau_{q^s} \times \tau_{q^s}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_m)$ di-simetri fonksiyonu süreklidir. Burada, τ_m mutlak değer metriğinden üretilen standart (doğal) topolojidir.*

2.1.5. Tanım. (X, d) T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun.

$$x \leq_d y \Longrightarrow d(x, y) = 0$$

biçiminde tanımlı $\leq_d$ sıralamasına, X üzerinde d 'nin *özelleştirme (kısmi) sıralaması* denir.

Tanım 2.1.1 'de görüldüğü gibi, metrik olmayan bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayında $d(x,y) \neq d(y,x)$ olacak biçimde $x, y \in X$ vardır. Buradan yola çıkarak, bir T_0-metrikimsi uzayda simetrik çiftler kümesi tanımını görelim:

2.1.6. Tanım . [18] (X,d) T_0-metrikimsi uzay olsun. $d(x,y) = d(y,x)$ olacak biçimde $(x,y) \in X \times X$ ikilisine *simetrik çift* ve

$$Z_d = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) = d(y,x)\}$$

bağıntısına, *simetrik çiftler kümesi* denir. Ayrıca, her $x \in X$ için

$$Z_d(x) = Z(x) = \{y \in X : (x,y) \in Z_d\}$$

kümesi, *x 'in simetri kümesi* olarak adlandırılır. Açıkça, Z_d simetrik çiftler kümesi X üzerinde bir yansımalı ve simetrik bağıntıdır. Üstelik, $(x,y) \in Z_d$ olmak üzere, $d(x,y) = d^{-1}(x,y) = d^s(x,y)$ olur.

Böylece, Z_d kümesinin tanımı yardımıyla aşağıdaki denklik açıktır.

2.1.7. Önerme . *[18] (X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olmak üzere,*

$$(X,d) \text{ metrik uzaydır} \iff Z_d = X \times X.$$

2.1.8. Önerme . *[18] (X,d) T_0-metrikimsi uzayının Z_d simetrik çiftler kümesi $X \times X$ 'de $\tau_{d^s} \times \tau_{d^s}$-kapalıdır.*

Burada, T_0-metrikimsi uzaylara özgü olarak, simetrik nokta tanımını göreceğiz:

2.1.9. Tanım . [18] (X,d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x \in X$ olsun. Her $y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (yani, $y \in X$ için $y \in Z_d(x)$) oluyorsa x 'e X uzayının bir *simetrik noktası* denir. Diğer bir ifade ile,

$$\text{Her } y \in X \text{ için } (x,y) \text{ simetrik çifttir} \iff x \in X \text{ simetrik noktadır.}$$

2.1.10. Sonuç . *[18] (X,d) T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$(X,d) \text{ metrik uzaydır} \iff X \text{ uzayındaki tüm noktalar simetrik noktadır.}$$

Bu aşamada, simetrik çiftler kümesinin duali olan, antisimetrik çiftler kümesi ve simetrik noktanın duali olan, antisimetrik nokta tanımları verilecek:

2.1.11. Tanım . [18] (X, d) T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = d(y, x) \Longrightarrow x = y$$

(yani, $x \neq y \Longrightarrow d(x, y) \neq d(y, x)$) oluyorsa (x, y) ikilisine *antisimetrik çift* ve

$$R_d = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \neq d(y, x)\}$$

kümesine, X 'in *antisimetrik çiftler kümesi* denir. Açıkça, R_d bağıntısı simetri özelliğine sahiptir, fakat yansıma ve geçişkenlik özelliklerine sahip değildir. Ayrıca, $x \in X$ için

$$R_d(x) = R(x) = \{y \in X : (x, y) \in R_d\}$$

kümesi, x *'in antisimetri kümesi* olarak adlandırılır.

2.1.12. Tanım . [18] (X, d) T_0-metrikimsi uzay ve $x \in X$ olsun. Her $y \in X \setminus \{x\}$ için $d(x, y) \neq d(y, x)$ (yani, her $y \in X \setminus \{x\}$ için $y \in R_d(x)$) oluyorsa x 'e X uzayının bir *antisimetrik noktası* denir. Diğer bir ifade ile,

Her $y \in X \setminus \{x\}$ için (x, y) antisimetrik çifttir $\Longleftrightarrow$ $x \in X$ antisimetrik noktadır.

Bu aşamada, metrik uzaylara dual (karşıt) olan yani, hiç simetrik çifte sahip olmayan yeni bir uzay tanımını görebiliriz:

2.1.13. Tanım . [18] (X, d) T_0-metrikimsi uzayında her $(x, y) \in X \times X$ çifti antisimetrik, yani, $Z_d = \triangle_X$ ise (X, d) *antisimetrik uzaydır.* Diğer bir ifade ile,
“ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x) \Longleftrightarrow x = y$ koşulu sağlanıyorsa (X, d) uzayı antisimetriktir ” denir.

2.1.14. Önerme . *[18] (a) Antisimetrik uzayın her altuzayı antisimetrik uzaydır.*
(b) (X, d) antisimetrik uzaydır $\Longleftrightarrow$ X uzayındaki tüm noktalar antisimetrik noktadır.

2.1.15. Önerme . *[18] X üzerinde m bir metrik ve d bir antisimetrik T_0-metrikimsi olsun. Bu durumda, $d + m$ fonksiyonu X üzerinde bir antisimetrik T_0-metrikimsi olur.*

Şimdi, bir T_0-metrikimsi uzayın simetrisizlik derecesine farklı bir açıdan yaklaşım yapmak üzere, tez çalışması boyunca kullanacağımız ve [1] 'de tanımlanmış olan *asimetrik normlu gerçel vektör uzay* kavramını görelim:

2.1.16. Tanım . [1] X bir gerçel vektör uzay olsun. Bir $\|.| : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \geq 0$ için,

(1) $\|x| = \| - x| = 0 \Longleftrightarrow x = \mathbf{0}$,

(2) $\|\alpha x| = \alpha \|x|$,

(3) $\|x + y| \leq \|x| + \|y|$,

özelliklerini sağlıyorsa, $\|.|$ dönüşümüne X üzerinde bir *asimetrik norm* ve $(X, \|.|)$ uzayına bir *asimetrik normlu (gerçel vektör) uzay* denir. Burada, $\mathbf{0}$, X vektör uzayının sıfır vektörüdür. Ayrıca, her $x \in X$ için $\|x|^{-1} = \| - x|$ dır. Buradan, $\|.|^s = \|.| \vee \|.|^{-1} = \|.\|$, X üzerinde normdur.

Her normdan bir metrik elde ettiğimiz gibi, her asimetrik normdan da bir T_0-metrikimsi elde edilebilir. Gerçekten, $d_{\|.|} : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$, $d_{\|.|}(x, y) = \|x - y|$ şeklinde tanımlanan $d_{\|.|}$ dönüşümü bir T_0-metrikimsidir. Çünkü, $d_{\|.|}(x, y) = \|x - y| = \| - (x - y)| = d_{\|.|}(y, x) = 0$ olursa $\|x - y| = \| - (x - y)| = 0 \Rightarrow x = y$ elde edilir.
Buna rağmen, her T_0-metrikimsi, bir asimetrik normdan elde edilemeyebilir. Örneğin, $\mathbb{R}$ üzerinde,

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq y \\ 1 & ; \ x > y \end{cases}$$

doğal T_0-metrikimsisi bir asimetrik normdan elde edilmemektedir. Gerçekten, d doğal T_0-metrikimsisi bir asimetrik normdan elde edilemez. Gerçekten, her $\alpha \geq 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(\alpha x, \alpha y) = \alpha d(x, y)$ olurdu. Fakat, $\alpha = 2$, $x = 3$ ve $y = 1$ için, $d(\alpha x, \alpha y) = d(6, 2) = 1 \neq 2 = 2d(3, 1) = \alpha d(x, y)$ dır.
Tanım 2.1.16 'dan, her normlu gerçel vektör uzay asimetrik normlu gerçel vektör uzaydır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin,

$$\|.| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\|x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

bir asimetrik normdur, fakat norm değildir. Çünkü $\alpha = -1$ ve $x = 2$ alınırsa $\|\alpha x| = 0 \neq 2 = |\alpha|\|x|$ olduğundan $\|.|$ norm değildir. Açıkça,

$$\|x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

asimetrik normu ile elde edilen

$$d_{\|.|} = u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d_{\|.|}(x, y) = u(x, y) = max\{x - y, 0\}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde Örnek 2.3.1 'de sunacağımız standart T_0-metrikimsi olur.

2.1.17. Not . Her $x, y \in X$ için $d_{\|.|^s}(x, y) = d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$ ve $(d_{\|.|})^s(x, y) = d_{\|.|}(x, y) \vee (d_{\|.|})^{-1}(x, y) = d_{\|.|}(x, y) \vee d_{\|.|}(y, x) = \|x - y| \vee \|y - x| = \|x - y\|$ olduğundan, $d_{\|.|^s} = (d_{\|.|})^s$ dır. Kısaca, $d_{\|.|^s} = (d_{\|.|})^s$, normdan üretilen bir metrik olur.

T_0-metrikimsi uzaylar üzerinde elde edilen ifadeler, asimetrik normlu gerçel vektör uzaylara taşındığında bu denkliklerin daha kolaylaştığını 5.3 alt bölümünde göreceğiz. Şimdi ise, bizim için gerekli olan bazı ifadeleri hatırlayalım:

2.1.18. Tanım . [18] $(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

$$Z_{d_{\|.|}}(\mathbf{0}) = \{x \in X : d_{\|.|}(\mathbf{0}, x) = d_{\|.|}(x, \mathbf{0})\} = \{x \in X : \|x| = \| - x|\}$$

dır.

2.1.19. Sonuç . *[18] $(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olmak üzere,*

$$(X, \|.|) \textit{ normlu uzaydır} \iff \boldsymbol{0} \textit{ simetrik noktadır.}$$

2.2. T_0-Metrikimsi Uzaylarda Bazı Yeni Sonuçlar

Bu kısımda, T_0-metrikimsi uzaylara özgü olarak, önceki bölümde sunulan temel yapılardan elde ettiğimiz bazı önermeler ve sonuçlara değinilmiştir.

2.2.1. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay, $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,* *(1)* $B_{d^s}(x,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon) \bigcap B_{d^{-1}}(x,\varepsilon)$,

(2) $\tau_{d \vee d^{-1}} = \tau_d \vee \tau_{d^{-1}}$ *dır.*

Şimdi, bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayda Z_d simetrik çiftler kümesi ve R_d antisimetrik çiftler kümesi ile ilgili önemli önermeleri inceleyelim:

2.2.2. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,* $Z_d \cup R_d = X \times X$ *dır.*

Kanıt. Her zaman $Z_d \cup R_d \subseteq X \times X$ olduğu açıktır. $X \times X \subseteq Z_d \cup R_d$ olduğunu görmek için, $(x,y) \in X \times X$ alalım. O halde,
(1) (x,y) simetrik çift ise $(x,y) \in Z_d$, ($(x,x) \in Z_d$ olduğuna dikkat edelim)
(2) (x,y) antisimetrik çift ise $(x,y) \in R_d$ olduğundan, istenilen elde edilmiştir. □

2.2.3. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,* $Z_d(x) \cup R_d(x) = X$ *dır.*

Kanıt. Her zaman $Z_d(x) \cup R_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. $X \subseteq Z_d(x) \cup R_d(x)$ olduğunu görmek için, $y \in X$ alalım. O halde,
(1) (x,y) simetrik çift ise $(x,y) \in Z_d$ ve buradan, $y \in Z_d(x)$ olur ($(x,x) \in Z_d$ olduğuna dikkat edelim) .
(2) (x,y) antisimetrik çift ise $(x,y) \in R_d$, yani, $y \in R_d(x)$ olur. □

2.2.4. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, $Z_d(x)$ kümesi X uzayında τ_{d^s}-kapalıdır.*

Kanıt. $X \setminus Z_d(x)$ kümesinin τ_{d^s}-açık olduğunu görmek için $a \in X \setminus Z_d(x)$ alalım. Buradan, $a \notin Z_d(x)$, yani, $d(x,a) \neq d(a,x)$ olur. Şimdi, $\varepsilon = |d(a,x) - d(x,a)|$ için $B_{d^s}(a, \frac{\varepsilon}{4}) \subseteq X \setminus Z_d(x)$ olduğunu gösterelim: Tersine, bir $z \in B_{d^s}(a, \frac{\varepsilon}{4})$ için $z \notin X \setminus Z_d(x)$ olduğunu kabul ettiğimizde $z \in Z_d(x)$ ve dolayısıyla $d(z,x) = d(x,z)$ dir. Şimdi, Not 2.1.3 'ü kullanarak

$\varepsilon = |d(a,x) - d(x,a)| = |d(a,x) - d(z,x) + d(x,z) - d(x,a)|$
$\leq |d(a,x) - d(z,x)| + |d(x,z) - d(x,a)|$
$\leq d^s(a,z) + d^s(x,x) + d^s(x,x) + d^s(z,a)$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Yani, $z \in X \setminus Z_d(x)$ olduğundan, $X \setminus Z_d(x)$ altkümesi τ_{d^s}-açık ve $Z_d(x)$ altkümesi τ_{d^s}-kapalıdır. □

Şimdi, R_d antisimetrik çiftler kümesi tanımını ele alarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

2.2.5. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olmak üzere, R_d antisimetrik çiftler kümesi, $X \times X$ uzayında $\tau_{d^s} \times \tau_{d^s}$-açıktır.*

Kanıt. Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayında $Z_d \cap R_d = \emptyset$ ve $R_d = (X \times X) \setminus Z_d$ dır. Şimdi, Önerme 2.1.8 gereği, Z_d kümesi $X \times X$ 'de $\tau_{d^s} \times \tau_{d^s}$-kapalı olduğundan, Z_d kümesinin tümleyeni R_d kümesi $X \times X$ uzayında $\tau_{d^s} \times \tau_{d^s}$-açıktır. □

2.2.6. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olmak üzere her $x \in X$ için $R_d(x)$, x 'in antisimetri kümesi X uzayında τ_{d^s}-açıktır.*

Kanıt. Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayında her $x \in X$ için $Z_d(x) \cap R_d(x) = \emptyset$ ve $R_d(x) = X \setminus Z_d(x)$ dır. O halde, Önerme 2.2.4 gereği, her $x \in X$ için $Z_d(x)$ kümesi X 'de τ_{d^s}-kapalı olduğundan, $Z_d(x)$ 'in tümeleyeni $R_d(x)$ kümesi X 'de τ_{d^s}-açıktır. □

Bu aşamada, simetrik noktalar ve antisimetrik noktalar ile ilgili bir kaç önerme incelenecektir. Açıkça, simetrik noktalardan oluşan bir uzayda tüm çiftler simetriktir. Böylece, *simetrik noktalardan oluşan uzay metrik uzaydır.* Ayrıca, Tanım 2.1.9 'dan aşağıdaki önermeler ve sonuçları elde edebiliriz:

2.2.7. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$x \in X \text{ simetrik noktadır} \iff Z_d(x) = X.$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $Z_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X$ aldığımızda, x simetrik nokta olduğundan, $d(x, y) = d(y, x)$ ve dolayısıyla, $y \in Z_d(x)$ dir.
$(\Leftarrow)$ $x \in X$ simetrik nokta olmasın. O zaman, $d(x, y) \neq d(y, x)$ ve $x \neq y$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. Buradan, $y \notin Z_d(x)$, yani $Z_d(x) \neq X$ çelişkisi elde edilir. □

Önerme 2.2.7 'ye benzer biçimde aşağıdaki önermeyi elde edebiliriz:

2.2.8. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$x \in X \text{ antisimetrik noktadır} \iff R_d(x) = X \setminus \{x\}.$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) $R_d(x) \subseteq X \setminus \{x\}$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X \setminus \{x\}$ aldığımızda, x antisimetrik nokta olduğundan, $d(x,y) \neq d(y,x)$ dir. Buradan, $y \in R_d(x)$ olur.
($\Leftarrow$) $x \in X$ antisimetrik nokta olmasın. O zaman, $d(x,y) = d(y,x)$ olacak biçimde bir $x \neq y \in X$ vardır. Buradan, $y \notin R_d(x)$, yani $R_d(x) \neq X \setminus \{x\}$ çelişkisi elde edilir. □

Aşağıdaki önermelerde bir T_0-metrikimsi uzayda simetrik noktalar ve antisimetrik noktaların birbirlerine göre durumları incelenecektir:

2.2.9. Önerme . *En az iki noktaya sahip bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayda bir nokta hem simetrik hem antisimetrik olamaz.*

Kanıt. (X,d) T_0-metrikimsi uzay ve $a \in X$ hem simetrik nokta hem de antisimetrik nokta olsun. Simetrik nokta tanımına göre her $b \in X$ için $d(a,b) = d(b,a)$ ve antisimetrik nokta tanımına göre $d(a,b) \neq d(b,a)$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. □

2.2.10. Sonuç . Simetrik (Antisimetrik) bir noktaya sahip bir (X,d) T_0-metrikimsi uzay, antisimetrik (simetrik) nokta bulunduramaz.

Kanıt. Tersini düşünelim. (X,d) T_0-metrikimsi uzay, $a \in X$ simetrik nokta ve $b \in X$ antisimetrik nokta olsun. Simetrik nokta tanımından $d(a,b) = d(b,a)$ ve antisimetrik nokta tanımından $d(a,b) \neq d(b,a)$ çelişkisi elde edilir. □

Önerme 2.2.6 'da, bir nokta ile antisimetrik çift oluşturan tüm noktaların kümesinin (noktanın antisimetri kümesi) τ_{d^s}-açık olduğu görülmüştü. Şimdi ise, bir T_0-metrikimsi uzayın tüm antisimetrik noktalarının kümesinin τ_{d^s}-açık olduğu kanıtlanacaktır.

2.2.11. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, X 'in antisimetrik noktalarının kümesi τ_{d^s}-açıktır.*

Kanıt. $B = \{x \in X : R_d(x) = X \setminus \{x\}\}$ antisimetrik noktalar kümesinin τ_{d^s}-açık olduğunu, yani, her $y \in B$ için B kümesinin y noktasını içeren bir yuvarı kapsadığını görelim: Burada, $y \in B$ ise $R_d(y) = X \setminus \{y\}$ yani, her $y \neq x \in X$ için $d(x,y) \neq d(y,x)$ dir. Şimdi, $0 < \varepsilon < inf\{|d(x,y) - d(y,x)| : \ x \in X\}$ olmak üzere $B_{d^s}(y, \frac{\varepsilon}{4}) \subseteq B$ dir. Gerçekten, $z \in B_{d^s}(y, \frac{\varepsilon}{4})$ ve $z \notin B$ olacak biçimde bir $z \in X$ olduğunu kabul ettiğimizde, $z \notin B$ olduğundan, $R_d(z) \neq X \setminus \{z\}$ yani, $d(a,z) = d(z,a)$ olacak biçimde bir $z \neq a \in X$ vardır. O halde, Not 2.1.3 kullanılarak

$\varepsilon < |d(a,y) - d(y,a)| = |d(a,y) - d(a,z) + d(z,a) - d(y,a)|$
$\leq |d(a,y) - d(a,z)| + |d(z,a) - d(y,a)|$
$\leq d^s(a,a) + d^s(y,z) + d^s(a,a) + d^s(z,y)$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$
çelişkisi elde edilir. Böylece, $B_{d^s}(y, \frac{\varepsilon}{4}) \subseteq B$ olduğundan, B kümesi τ_{d^s}-açıktır. $\square$

Tanım 2.1.13 ve buraya kadar elde ettiğimiz bilgilerden aşağıdaki sonucu görebiliriz:

2.2.12. Sonuç . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

(a) (X,d) bir simetrik noktaya sahipse antisimetrik uzay olamaz.

(b) (X,d) bir antisimetrik noktaya sahipse metrik uzay olamaz.

(c) (X,d) antisimetrik uzaydır $\Longleftrightarrow R_d = (X \times X) \setminus \triangle_X = \{(x,y):\ x \neq y\}$.

2.3. Çeşitli T_0-Metrikimsi Uzay Örnekleri

Bu kısımda, tezde çoğunlukla kullanacağımız T_0-metrikimsi uzay örneklerinin detayları incelenecektir.

2.3.1. Örnek . $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, $u(x,y) = max\{x - y, 0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{R}, u)$ uzayını ele alalım. Burada, her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x,x) = x - x = 0$ dır. Diğer yandan, u 'nun üçgen eşitsizliğini ve T_0 koşulunu sağladığı kolayca görülebilir. Böylece, $(\mathbb{R}, u)$ bir T_0-metrikimsi uzaydır. $(\mathbb{R}, u)$ uzayına *standart T_0-metrikimsi uzay* denir [2].

Diğer yandan, u 'nun duali, $u^{-1}(x,y) = u(y,x) = max\{y-x, 0\}$ dir. Ayrıca, u 'nun simetrizasyon metriği, $u^s(x,y) = u(x,y) \vee u^{-1}(x,y) = |x-y|$, $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğidir. Böylece, açıkça, u 'nun simetrizasyon topolojisi τ_{u^s} Standart topoloji olur.

Ayrıca, bu uzayda her $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ $(x < y)$ için $u(x,y) = x - y = 0 = u(y,x)$ $(u(x,y) = 0 = y - x = u(y,x))$ olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $Z_u(x) = \{x\}$ ve $Z_u = \{(x,x) :\ x \in \mathbb{R}\} = \triangle_{\mathbb{R}}$ dir yani, $(\mathbb{R}, u)$ bir antisimetrik T_0-metrikimsi uzaydır ve Sonuç 2.2.12 (a) gereği, $(\mathbb{R}, u)$ uzayının simetrik noktası yoktur.

2.3.2. Örnek . X bir küme ve $\leq$ sıralaması X üzerinde bir kısmi sıralama olsun. Bu durumda,

$$d_{\leq} : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$$

$$d_{\leq}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq y \\ 1 & ; \ x \nleq y \end{cases}$$

fonksiyonu X üzerinde bir T_0-metrikimsidir [18]. Gerçekten, her $x \in X$ için $d_{\leq}(x,x) = x - x = 0$ dır. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını kontrol etmek üzere çeşitli olasılıkları inceleyelim; Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ durumunda,

(1) $y \leq z$ ise, $d_{\leq}(x,z) = 0$, $d_{\leq}(x,y) = 0$ ve $d_{\leq}(y,z) = 0$,

(2) $x \leq z$ ve $y \nleq z$ ise, $d_{\leq}(x,z) = 0$, $d_{\leq}(x,y) = 0$ ve $d_{\leq}(y,z) = 1$,

(3) $x \nleq z$ ise $d_{\leq}(x,z) = 1$, $d_{\leq}(x,y) = 0$ ve $d_{\leq}(y,z) = 1$,

ve $x \nleq y$ durumunda,

(4) $y \nleq z$ ise, $d_{\leq}(x,z) = 1$, $d_{\leq}(x,y) = 1$ ve $d_{\leq}(y,z) = 1$,

(5) $x \nleq z$ ve $y \leq z$ ise, $d_{\leq}(x,z) = 1$, $d_{\leq}(x,y) = 1$ ve $d_{\leq}(y,z) = 0$,

(6) $x \leq z$ ve ise, $d_{\leq}(x,z) = 0$, $d_{\leq}(x,y) = 1$ ve $d_{\leq}(y,z) = 0$,

olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, her $x, y \in X$ için $d_{\leq}(x,y) = d_{\leq}(y,x) = 0$ olursa, açıkça, $x = y$ ve buradan, $(X, d_{\leq})$ bir T_0-metrikimsi uzaydır. (X, d) uzayına *doğal* T_0*-metrikimsi uzay* denir. Ayrıca, $d_{\leq}$ 'nin duali,

$$(d_{\leq})^{-1} : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$(d_{\leq})^{-1}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ y \leq x \\ 1 & ; \ y \nleq x \end{cases}$$

ve $d_{\leq}$ 'nin simetrizasyon metriği, $(d_{\leq})^s : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$$(d_{\leq})^s(y,x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ 1 & ; \ x \neq y \end{cases}$$

ayrık metrik olur. Böylece, $d_{\leq}$ 'nin simetrizasyon topolojisi de ayrık topolojidir

Diğer yandan, bu uzayda her $x \in X$ için $Z_{d_{\leq}}(x) = \{x\}$ ve $Z_{d_{\leq}} = \{(x,x) : \ x \in X\} = \triangle_X$ olduğundan, $(X, d_{\leq})$ bir antisimetrik T_0-metrikimsi uzaydır ve Sonuç 2.2.12 (a) gereği, $(X, d_{\leq})$ uzayının simetrik noktası yoktur.

Örnek 2.3.2 'de X kümesi yerine gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ yazılırsa aşağıdaki örneği elde ederiz:

2.3.3. Örnek . $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq y \\ 1 & ; \ x > y \end{cases}$$

fonksiyonu ile kurulan $(\mathbb{R}, d)$ uzayı antisimetrik T_0-metrikimsi uzaydır.

2.3.4. Örnek . Bu çalışmada **Sorgenfrey 1** adı altında ele alacağımız

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$p(x,y) = \begin{cases} x - y & ; \ x \geq y \\ 1 & ; \ x < y \end{cases}$$

biçiminde tanımlı p fonksiyonu bir T_0-metrikimsidir [18]. Gerçekten, her $x \in \mathbb{R}$ için $p(x,x) = 0$ olduğu açıktır. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını görmek için farklı olasılıkları inceleyelim: Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

(1) $x < y < z$ ise $p(x,z) = 1$, $p(x,y) = 1$ ve $p(y,z) = 1$,

(2) $x < z \leq y$ ise $p(x,z) = 1$, $p(x,y) = 1$ ve $p(y,z) = y - z$,

(3) $z \leq x < y$ ise $p(x,z) = x - z$, $p(x,y) = 1$ ve $p(y,z) = y - z$,

(4) $x \geq y \geq z$ ise $p(x,z) = x - z$, $p(x,y) = x - y$ ve $p(y,z) = y - z$,

(5) $y > x \geq z$ ise $p(x,z) = x - z$, $p(x,y) = 1$ ve $p(y,z) = y - z$,

(6) $y \geq z > x$ ise $p(x,z) = 1$, $p(x,y) = 1$ ve $p(y,z) = y - z$,

olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $p(x,y) = 0 = p(y,x)$ iken $x = y$ olduğu açıktır. Buradan, $(\mathbb{R}, p)$ bir T_0-metrikimsi uzay olur. Ayrıca, p 'nin duali,

$$p^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$p^{-1}(x,y) = \begin{cases} y - x & ; \ y \geq x \\ 1 & ; \ y < x \end{cases}$$

biçiminde ve p 'nin simetrizasyon metriği,

$$p^s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$p^s(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ sup\{1, |x-y|\} & ; \ x \neq y \end{cases}$$

biçimindedir. τ_p ve $\tau_{p^{-1}}$ topolojilerini üreten taban elemanları $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için sırayla,

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : p(x,y) < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x]$$

ve

$$B_{p^{-1}}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : p(y,x) < \varepsilon\} = [x, x+\varepsilon)$$

ve $1 < \varepsilon$ için sırayla,

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : p(x,y) < \varepsilon\} = \mathbb{R}$$

ve

$$B_{p^{-1}}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : p(y,x) < \varepsilon\} = \mathbb{R}$$

biçimindedir. Şimdi, Önerme 2.2.1 (a) 'dan, $0 < \varepsilon \leq 1$ için

$$B_{p^s}(x,\varepsilon) = [x, x+\varepsilon) \cap (x-\varepsilon, x] = \{x\}$$

olur, yani, τ_{p^s} simetrizasyon topolojisi ayrık topolojidir.

Burada, *p 'nin simetrizasyon metriği ayrık metrik olmamasına rağmen, simetrizasyon metriğinin ürettiği topoloji ayrık topolojidir.*

Ayrıca, bu uzayda her $x \in \mathbb{R}$ için $p(x, x+1) = 1 = p(x+1, x)$ olduğundan, $Z_p(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = x \pm 1\}$ ve $Z_p = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ y = x \pm 1\}$ dır. Böylece, $Z_p \neq \triangle_{\mathbb{R}}$ olur yani, **Sorgenfrey 1** antisimetrik uzay değildir. Dikkat edilirse, bu uzay metrik uzay da değildir. Gerçekten, $1 \neq 3$ olmasına rağmen, $p(1,3) = 1 \neq 2 = p(3,1)$ dır.

Diğer yandan, bu uzay ne simetrik nokta ne de antisimetrik noktaya sahip değildir. Çünkü,

(1) $a \in \mathbb{R}$ simetrik nokta olursa, $b = a+2$ aldığımızda $p(a,b) \neq p(b,a)$ elde edilir. Böylece, a simetrik nokta olamaz.

(2) $a \in \mathbb{R}$ antisimetrik nokta olursa, $b = a+1$ aldığımızda $p(a,b) = p(b,a)$ elde edilir. Böylece, a antisimetrik nokta olamaz.

Bu aşamada, yukarıdaki örnek yardımıyla iki metrik uzayın birleşiminin metrik uzay olamayabileceğini görebiliriz:

2.3.5. Örnek . Sorgenfrey 1 uzayının T_0-metrikimsi fonksiyonunu $A = \{0,1\}$ ve $B = \{2,3\}$ altkümeleri üzerine kısıtladığımızda elde edilen (A, p_A) ve (B, p_B) alt T_0-metrikimsi uzaylarını ele alalım. Açıkça, (A, p_A) ve (B, p_B) metrik uzaylardır. Şimdi, $(A \cup B, p_{(A\cup B)})$ T_0-metrikimsi uzayında $p_{(A\cup B)}(0,3) \neq p_{(A\cup B)}(3,0)$ olduğundan, bu uzayın metrik uzay olmadığı görülür.

2.3.6. Örnek . Sorgenfrey 2 adı altında ele alacağımız

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$s(x,y) = \begin{cases} min\{1, x-y\} & ; \ x \geq y \\ 1 & ; \ x < y \end{cases}$$

biçiminde tanımlı s fonksiyonu bir T_0-metrikimsidir [18]. Gerçekten, her $x \in \mathbb{R}$ için $s(x,x) = 0$ olduğu açıktır. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını görmek için farklı olasılıkları inceleyelim. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

(1) $x < y < z$ ise $s(x,z) = 1$, $s(x,y) = 1$ ve $s(y,z) = 1$,

(2) $x < z \leq y$ ise $s(x,z) = 1$, $s(x,y) = 1$ ve $s(y,z) = min\{1, y-z\}$,

(3) $z \leq x < y$ ise $s(x,z) = min\{1, x-z\}$, $s(x,y) = 1$ ve $s(y,z) = min\{1, y-z\}$,

(4) $x \geq y \geq z$ ise $s(x,z) = min\{1, x-z\}$, $s(x,y) = min\{1, x-y\}$ ve $s(y,z) = min\{1, y-z\}$,

(5) $y > x \geq z$ ise $d(x,z) = min\{1, x-z\}$, $d(x,y) = 1$ ve $d(y,z) = min\{1, y-z\}$,

(6) $y \geq z > x$ ise $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$ ve $d(y,z) = min\{1, y-z\}$,

olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, s 'nin duali:

$$s^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$s^{-1}(x,y) = \begin{cases} min\{1, y-x\} & ; \ y \geq x \\ 1 & ; \ y < x \end{cases}$$

olmak üzere, s 'nin simetrizasyon metriği,

$$s^s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$s^s(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ y = x \\ 1 & ; \ y \neq x \end{cases}$$

ayrık metriktir. Buradan, s 'nin simetrizasyon topolojisi τ_{s^s} ayrık topoloji olur.
Ayrıca, bu uzayda $x \in \mathbb{R}$ aldığımızda $y \geq x+1$ olacak biçimde tüm $y \in \mathbb{R}$ noktaları için $s(x,y) = 1 = s(y,x)$ sağlandığından, $Z_s(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq x+1\}$ ve $Z_s = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ y \geq x+1\}$ dır. Böylece, $Z_s \neq \triangle_{\mathbb{R}}$ olur, yani, **Sorgenfrey 2** antisimetrik uzay değildir. Dikkat edilirse, bu uzay metrik uzay da değildir. Gerçekten, $1 \neq \frac{1}{2}$ olmasına rağmen, $d(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 1 = d(\frac{1}{2}, 1)$ dır.
Sorgenfrey 1 uzayına benzer biçimde **Sorgenfrey 2** uzayı da ne simetrik ne de antisimetrik noktaya sahip değildir.

2.3.7. Not . Bu çalışmada, sırasıyla, X ve Y kümeleri üzerinde verilen d ve q T_0-metrikimsilerinin çarpımı, $X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde

$$D((x,y),(a,b)) = (d \times q)((x,y),(a,b)) = d(x,a) \vee q(y,b)$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Son olarak, tez çalışmamızda kullanacağımız ve asimetrik normlu gerçel vektör uzayda önemli yere sahip olan bir örneği inceleyelim:

2.3.8. Örnek . Her $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|x| = x_1 \vee x_2 \vee 0$ olmak üzere, $(\mathbb{R}^2, \|.|)$ uzayı asimetrik normlu gerçel vektör uzaydır. Gerçekten, her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\alpha \geq 0$ için

(1) $\|(x_1, x_2)| = \|(-x_1, -x_2)| = (0,0) \Longleftrightarrow (x_1, x_2) = (0,0)$,

(2) $\|\alpha(x_1, x_2)| = \alpha\|(x_1, x_2)|$,

(3) $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)| \leq \|(x_1, x_2)| + \|(x_1, x_2)|$,

dır. $(\mathbb{R}^2, \|.|)$ asimetrik normlu uzayı, bir normlu uzay değildir. Gerçekten, normlu uzayın tanımından her $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için, $\|(x_1, x_2)| = 0$ ancak ve ancak $(x_1, x_2) = (0, 0)$ olmalıdır. Fakat, $(0, 0) \neq (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ için, $\|(-1, -1)| = (-1) \vee (-1) \vee 0 = 0$ dır. Yani, $(\mathbb{R}^2, \|.|)$ normlu uzay değildir.

Şimdi, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|x| = x_1 \vee x_2 \vee 0$ asimetrik normundan üretilen $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayın özelliklerini inceleyelim: $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayı antisimetrik uzay değildir. Gerçekten, $(-1, 0) \neq (0, -1)$ için, $d_{\|.|}((-1, 0), (0, -1)) = \|(-1, 0) - (0, -1)| = 1 = \|(0, -1) - (-1, 0)| = d_{\|.|}((0, -1), (-1, 0))$ olduğundan bu uzay antisimetrik değildir. Açıkça, metrik uzay da değildir. Örneğin, $(1, 2), (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ için $d_{\|.|}((1, 2), (1, 3)) = \|((1, 2) - (1, 3))| = 0 \neq 1 = \|((1, 3) - (1, 2))| = d_{\|.|}((1, 3), (1, 2))$ dır.

$(\mathbb{R}^2, \|.|)$ asimetrik normlu gerçel vektör uzayında her $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\|x| = \| - x| \text{ ancak ve ancak } x_1 = -x_2.$$

dır. Gerçekten, $x_1 = -x_2$ ise $\|x| = \| - x|$ olduğu açıktır. Diğer yönünü görmek için $x_1 \leq x_2$ olduğunu kabul edelim:

(1) $0 \leq x_1$ ise $\|x| = x_2$ ve $\| - x| = 0$ olur. Böylece, $x_1 = x_2 = 0$ elde edilir.

(2) $x_1 < 0 \leq x_2$ ise $\|x| = x_2$ ve $\| - x| = -x_1$ olur. Böylece, $x_1 = -x_2$ elde edilir.

(3) $x_2 < 0$ ise $\|x| = 0$ ve $\| - x| = -x_1$ olur. Böylece, $x_1 \leq x_2$ olduğundan $-x_1 = -x_2 = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak, "$(0, 0)$" noktasının simetri kümesi,

$$Z_{\|.|}((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2\}$$

dır [18](Burada, $Z_{d_{\|.|}}$ yerine $Z_{\|.|}$ kullanılmıştır) . Şimdi, her $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$Z_{\|.|}(h) = \{(x + h_1, -x + h_2) : x \in \mathbb{R}\}$$

olduğunu görelim: $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ için, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,
$\|((h_1, h_2), (t_1, t_2))| = \|((t_1, t_2), (h_1, h_2))| \Longrightarrow$
$(h_1 - t_1) \vee (h_2 - t_2) \vee 0 = (t_1 - h_1) \vee (t_2 - h_2) \vee 0 = x$ aldığımızda, $h_1 - t_1 = t_2 - h_2 = x$ elde edilir. Buradan, $t_1 = h_1 - x$ ve $t_2 = x + h_2$ olur. Yani, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ile simetrik olan tüm çiftler, $\{((h_1 + x_1, h_2 + x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2\} = \{(x + h_1, -x + h_2) : x \in \mathbb{R}\}$

biçimindedir.

Şimdi, $\mathbb{R}^2$ üzerinde $d_{\|.|}((x,y),(a,b)) = (x-a) \vee (y-b) \vee 0$ aslında, $\mathbb{R}$ üzerindeki $u(x,y) = max\{x-y, 0\}$ standart T_0-metrikimsinin kendisi ile çarpımı olduğunu görelim: Gerçekten, her $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$ için, $(u \times u)((x,y),(a,b)) = u(x,a) \vee u(y,b) = (x - a) \vee (y-b) \vee 0$ dır. O halde, $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ uzayı, $(\mathbb{R}, u)$ standart T_0-metrikimsi uzayının kendisi ile çarpımı olan $(\mathbb{R}^2, u \times u)$ çarpım uzayıdır. Diğer yandan, $d(= d_{\|.|})$ 'nin duali

$$d^{-1}((x,y),(a,b)) = d((a,b),(x,y)) = (a-x) \vee (b-y) \vee 0$$

ve dolayısıyla,

$d^s((x,y),(a,b)) = d((x,y),(a,b)) \vee d^{-1}((x,y),(a,b)) =$

$d((x,y),(a,b)) \vee d((a,b),(x,y)) = u(x,a) \vee u(y,b) \vee u(a,x) \vee u(b,y) =$

$(x-a) \vee (y-b) \vee 0 \vee (a-x) \vee (b-y) \vee 0 = |x-a| \vee |y-b| \vee 0 =$

$|x-a| \vee |y-b| = u^s(x,a) \vee u^s(y,b)$

biçimindedir. Şimdi, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği topolojinin taban elemanlarını bulalım:

$B_{d^s}((x,y),\varepsilon) = \{(a,b) : d^s((x,y),(a,b)) < \varepsilon\}$

$= \{(a,b) : |x-a| \vee |y-b| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$

dır. ($|x-a| \vee |y-b| < \varepsilon$ ise $|y-b| < \varepsilon$ ve $|x-a| < \varepsilon$ dır. Yani, $x-\varepsilon < a < x+\varepsilon$ ve $y-\varepsilon < b < y+\varepsilon$)

Burada, dikkat edilirse, $B_{d^s}((x,y),\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ yuvarını üreten metrik, $q((x,a),(y,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ Öklid metriğidir.

Sonuç olarak, τ_{u^s}, *$\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerinde τ_{d^s} simetrizasyon topolojisi, aslında $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerindeki $\tau_{u^s} \times \tau_{u^s}$ çarpım topolojisi yani, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklid topolojisidir.*

Bu örnekte, ayrıca *antisimetrik uzay olan* $(\mathbb{R}, u)$ *standart T_0-metrikimsi uzayının kendisi ile çarpımından oluşan uzayın antisimetrik uzay olmadığını* görüyoruz.

3. T_0-METRİKİMSİ UZAYLARDA SİMETRİK VE ANTİSİMETRİK BAĞLANTILILIK

Bu bölümün ilk kısmında sunulacak olan temel tanımlar, önermeler, sonuçlar ve gösterimler [18] 'den alınmıştır. Bölümün ikinci kısmı ise, simetrik bağlantılılık ve antisimetrik bağlantılılık teorileri hakkında tezde elde ettiğimiz yeni sonuçlar ve özgün örneklerden oluşmaktadır.

3.1. Simetrik ve Antisimetrik Bağlantılı Uzaylar Hakkında Temel Bilgiler

Metriğin simetri özelliğini sağlamayan bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayda, bazı $x, y \in X$ noktaları için $d(x, y) \neq d(y, x)$ olabileceği, yani, (X, d) T_0-metrikimsi uzayının bir asimetrik yapıya sahip olduğu bilinmektedir. Böylece doğal olarak, "Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayının simetri ya da asimetri derecesine nasıl yaklaşım yapılır?" sorusu ortaya çıkar. Hans-Peter A. Künzi ve Filiz Yıldız, (X, d) T_0-metrikimsi uzayında her $x, y \in X$ için $d(x, y)$ 'nin $d(y, x)$ 'den farklı olma derecesine (ölçümüne) yeni bir yaklaşım yapmak amacı ile x 'den y 'ye *simetrik yol* ve simetrik yolun duali olan *antisimetrik yol* kavramlarını ilk olarak [18] 'de sunmuşlardır. Bu iki kavram yardımı ile de, (X, d) T_0-metrikimsi uzayının *simetrik bağlantılılığını* ve *antisimetrik bağlantılılığını* tanımlamışlardır.

3.1.1. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun. Her $i = 0, ..., n-1$ için (x_i, x_{i+1}) simetrik çiftler olacak şekilde $x = x_0$ 'dan $y = x_n$ 'ye bir $P_{xy} = P(x = x_0, x_1, ..., x_n = y)$ yoluna, *simetrik yol* ve $P_{xx} = P(x, x)$ yoluna *düğüm* denir. Bir simetrik yolda, $x = y$ durumu hariç, noktalar sadece bir kere kullanılır.

Şimdi, önemli kavramlardan biri olarak, simetrik bağlantılılık tanımı verilecektir.

3.1.2. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer, x 'den y 'ye bir P_{xy} simetrik yolu varsa, *x ile y simetrik bağlantılıdır* denir.

3.1.3. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun.

$$xC_d y := x \text{ ile } y \text{ simetrik bağlantılıdır}$$

biçiminde tanımlı "C_d" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre,

$$\overline{x} = [x] = C_d(x) = \{y \in X : x \textit{ ile } y \textit{ simetrik bağlantılıdır}\}$$

kümesi, x *'in simetri bileşeni* (simetrik bağlantılı bileşeni) olarak adlandırılacaktır.

3.1.4. Tanım. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için x ile y simetrik bağlantılı ise, diğer bir ifade ile her $x \in X$ için $C_d(x) = X$ oluyorsa (X, d) uzayı *simetrik bağlantılıdır* denir.

Açıkça, $C_d(x)$ *kümesi,* X *'in* x *noktasını içeren ve simetrik bağlantılı olan en büyük altuzayıdır.*

3.1.5. Not. (X, d) T_0-metrikimsi uzay olmak üzere, her $x \in X$ için $Z_d(x) \subseteq C_d(x)$ dir. Buna rağmen $C_d(x)$, $Z_d(x)$ 'in altkümesi olmayabilir. Üstelik belirli koşullarda $Z_d(x) = C_d(x)$ ve hatta $C_d(x)$ bir metrik altuzay olabilir. Bu iki durum, ileride bir örnek ile gösterilecektir.

3.1.6. Önerme. *(X, d) T_0-metrikimsi uzayı simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow C_d = X \times X$.*

3.1.7. Önerme. *(X, d) T_0-metrikimsi uzayı simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow (X, d^{-1})$ T_0-metrikimsi uzayı simetrik bağlantılıdır.*

3.1.8. Önerme. *Metrik uzaylar, simetrik bağlantılıdır.*

Önerme 3.1.8 'den, (X, d^s) uzayı simetrik bağlantılıdır.

3.1.9. Önerme. *En az iki noktaya sahip antisimetrik uzay simetrik bağlantılı olamaz.*

Şimdi, simetrik yolun duali olan antisimetrik yol tanımı verilerek, bir T_0-metrikimsi uzayda iki noktanın antisimetrik bağlantılılığı ve dolayısıyla bir T_0-metrikimsi uzay için antisimetrik bağlantılılık kavramı ve ilgili önermeler ile teoremler sunulacaktır.

3.1.10. Tanım. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun. Her $i = 0, ..., n-1$ için (x_i, x_{i+1}) antisimetrik çiftler olacak biçimde x 'den y 'ye $P_{xy} = P(x = x_0, x_1, ..., x_n = y)$ yoluna, *antisimetrik yol* denir.

3.1.11. Tanım. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer, x 'den y 'ye bir P_{xy} antisimetrik yolu varsa, ya da $x = y$ ise x *ile* y *antisimetrik bağlantılıdır* denir.

3.1.12. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x, y \in X$ olsun.

$$xT_d y := x \text{ ile } y \text{ antisimetrik bağlantılıdır}$$

biçiminde tanımlı "T_d" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre

$$\overline{x} = [x] = T_d(x) = \{y \in X : x \textit{ ile } y \textit{ antisimetrik bağlantılıdır}\}$$

kümesi x *'in antisimetri bileşeni* (antisimetrik bağlantılı bileşen) olarak adlandırılacaktır.

3.1.13. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için, x ile y antisimetrik bağlantılı ise, diğer bir ifade ile her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ oluyorsa, (X, d) uzayı *antisimetrik bağlantılıdır* denir.

Açıkça, $T_d(x)$ *kümesi,* X *'in* x *noktasını içeren ve antisimetrik bağlantılı olan en büyük altuzayıdır.*

3.1.14. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

(a) $x \in X$ antisimetrik noktadır $\Longleftrightarrow C_d(x) = \{x\}$ dır.

(b) $x \in X$ simetrik noktadır $\Longleftrightarrow T_d(x) = \{x\}$ dır.

Şimdi, Önerme 3.1.8 'de verilen, "Metrik uzaylar, simetrik bağlantılıdır " gerçeğine benzer biçimde aşağıdaki önerme [18] 'de kanıtlanmıştır.

3.1.15. Önerme . *Antisimetrik uzaylar antisimetrik bağlantılıdır.*

3.1.16. Önerme . *(X, d) T_0-metrikimsi uzayı, " metrik uzaydır $\Longleftrightarrow$ her $x \in X$ için $T_d(x) = \{x\}$ dir. "*

Bu aşamada, $T_d(x)$ 'in önemli bir karakterizasyonunu aşağıdaki önerme aracılığıyla görebiliriz:

3.1.17. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $(x, y) \in X \times X$ çifti, $\varepsilon \geq 0$ için $|F_d(x, y)| = |d(x, y) - d(y, x)| = \varepsilon$ olacak şekilde bir antisimetrik çift olsun. Bu durumda, $d^s(a, x) < \frac{\varepsilon}{4}$ ve $d^s(b, y) < \frac{\varepsilon}{4}$ koşullarını sağlayan (a, b) çifti, (X, d) 'de antisimetrik çifttir.*

3.1.18. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, x 'in antisimetri bileşeni $T_d(x)$ kümesi, ya $\{x\}$ ya da τ_{d^s}-açık olur.*

3.1.19. Sonuç . *(X, d) T_0-metrikimsi uzayı hiç simetrik nokta bulundurmasın. O halde, her $x \in X$ için x 'in antisimetri bileşeni $T_d(x)$ kümesi, hem τ_{d^s}-açık hem de τ_{d^s}-kapalı olur.*

Aşağıdaki önerme, [8] 'de verilen "Bir grafiğin, kendisi ya da tümleyeni grafik teori anlamında bağlantılıdır" gerçeğinden yararlanılarak [18] 'de kanıtlanmıştır.

3.1.20. Önerme . *Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı, simetrik bağlantılıdır ya da antisimetrik bağlantılıdır.*

Aşağıdaki örnekte göreceğimiz gibi, bazı uzaylar hem simetrik bağlantılı hem de antisimetrik bağlantılı olabilir.

3.1.21. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde, $x \geq y$ ise, $s(x, y) = min\{x-y, 1\}$ ve $x < y$ ise $s(x, y) = 1$ biçiminde tanımlanan **Sorgenfrey 2** uzayının hem simetrik bağlantılı hem de antisimetrik bağlantılı olduğu [18] 'de gösterilmiştir.

3.1.22. Teorem . *(X, d) ve (Y, q) iki simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$D : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) \vee q(y_1, y_2)$$

olmak üzere, $(X \times Y, D)$ çarpım T_0-metrikimsi uzayı da simetrik bağlantılıdır.

3.1.23. Not . Yukarıdaki teoremde, D çarpım T_0-metrikimsi tanımında "$\vee$" yerine "+" kullanılırsa da, çarpım uzayı simetrik bağlantılı olur.

Tümevarım aracılığıyla Teorem 3.1.22 'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

3.1.24. Sonuç . *Simetrik bağlantılı uzayların sonlu çarpımları simetrik bağlantılıdır.*

3.2. Simetrik ve Antisimetrik Bağlantılı Uzaylarda Özgün Sonuçlar

Bu kısımda, T_0-metrikimsi uzaylar çerçevesinde simetrik bağlantılılık ve antisimetrik bağlantılılık teorileri ile ilgili elde ettiğimiz yeni önerme ve sonuçlar sunulacaktır. Ayrıca, 2.3. alt bölümünde sunulan T_0-metrikimsi uzay örneklerinin simetrik bağlantılı ve / veya antisimetrik bağlantılı olup olmadıkları incelenecektir.

3.2.1. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, X bir antisimetrik noktaya sahipse (X,d) simetrik bağlantılı olamaz.*

Kanıt. X bir antisimetrik noktaya sahip olsun ve (X,d) 'nin simetrik bağlantılı olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $x \in X$ için $C_d(x) = X$ olur. Şimdi, $y \in X$ antisimetrik nokta olursa Önerme 3.1.14 (a) 'dan $C_d(y) = \{y\}$ olur ki, bu çelişkidir. □

"Metrik uzaylar simetrik bağlantılıdır (Önerme 3.1.8) " ifadesinin diğer yönünün doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

3.2.2. Örnek . $X = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde d T_0-metrikimsiyi; $d(1,3) = 8$, $d(3,1) = 10$, $d(1,2) = 9 = d(2,1)$ ve $d(2,3) = 1 = d(3,2)$ biçiminde yani, $d(i,j) = d_{ij}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi olarak tanımlayalım. Buna göre, d, T_0-metrikimsi koşullarını sağlar. Özellikle üçgen eşitsizliği koşuluna bakılırsa,

$d(1,2) = 9 \le 8+1 = d(1,3)+d(3,2)$, $d(3,1) = 10 \le 1+9 = d(3,2)+d(2,1)$

$d(1,3) = 8 \le 9+1 = d(1,2)+d(2,3)$, $d(2,1) = 9 \le 1+10 = d(2,3)+d(3,1)$

$d(2,3) = 1 \le 9+8 = d(2,1)+d(1,3)$, $d(3,2) = 1 \le 10+9 = d(3,1)+d(1,2)$

elde edilir. Açıkça, $P(1,2,3)$ yolu tüm noktaları birbirlerine bağlayan simetrik yoldur. Böylece, (X,d) metrik uzay olmamasına rağmen simetrik bağlantılı uzay olur.

Bu aşamada, farklı özelliklere sahip olan ve çalışmamızın devamında da kullanacağımız özgün bir uzay örneğini inceleyeceğiz:

3.2.3. Örnek . $X = [0,\infty)$ olmak üzere,

$$d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$$

$$d(x,y) = \begin{cases} x-y & ;\ y \le x \\ x+y & ;\ y > x \end{cases}$$

biçiminde tanımlı d fonksiyonu ile kurulan ***Yıldız Uzayı*** adı altında ele alacağımız (X,d) bir T_0-metrikimsi uzaydır. Diğer iki koşul kolayca görülebileceği için sadece üçgen eşitsizliğinin sağlanmasına dair ihtimalleri ele alalım: Her $x,y,z \in X$ için

(1) $z \leq y \leq x$ ise $d(x,z) = x - z$, $d(x,y) = x - y$ ve $d(y,z) = y - z$,

(2) $z \leq x < y$ ise $d(x,z) = x - z$, $d(x,y) = x + y$ ve $d(y,z) = y - z$,

(3) $x < z \leq y$ ise $d(x,z) = x + z$, $d(x,y) = x + y$ ve $d(y,z) = y - z$,

(4) $x < y < z$ ise $d(x,z) = x + z$, $d(x,y) = x + y$ ve $d(y,z) = y + z$,

(5) $y \leq x < z$ ise $d(x,z) = x + z$, $d(x,y) = x - y$ ve $d(y,z) = y + z$,

(6) $y < z \leq x$ ise $d(x,z) = x - z$, $d(x,y) = x - y$ ve $d(y,z) = y + z$,

olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, d 'nin duali

$$d^{-1} : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$$

$$d^{-1}(x,y) = \begin{cases} y - x & ; \ x \leq y \\ x + y & ; \ x > y \end{cases}$$

ve d 'nin simetrizasyon metriği,

$$d^s : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$$

$$d^s(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ x + y & ; \ x \neq y \end{cases}$$

biçimindedir. Böylece, (X, d^s) T_0-metrikimsi uzayının "0" noktasında ürettiği yuvar

$$B_{d^s}(0,\varepsilon) = \{y \in X : d^s(0,y) < \varepsilon\} = [0,\varepsilon)$$

olur. Yani, "0" noktasındaki simetrizasyon topolojisi, Standart topoloji ("0" noktasının Standart topolojiye göre komşuluğunun X kümesi üzerine kısıtlaması) olur.

Şimdi, (X,d), (X,d^{-1}) ve (X,d^s) T_0-metrikimsi uzaylarının, "0" noktası dışındaki noktalarının $X \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde ürettikleri topolojilerin taban elemanlarını bulalım:

$0 \neq x \in X$ olsun. Bu durumda, $0 < \varepsilon < x$ için

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x]$$

$$B_{d^{-1}}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d^{-1}(x,y) < \varepsilon\} = [x, x + \varepsilon)$$

ve

$$B_{d^s}(x,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon) \cap B_{d^{-1}}(x,\varepsilon) = \{x\}$$

biçimindedir. Buradan, $X \setminus \{0\}$ üzerinde d 'nin ürettiği topoloji üst limit topolojisi, d^{-1} 'in ürettiği topoloji alt limit topolojisi ve d^s 'nin ürettiği topoloji (simetrizasyon topoloji) ayrık topoloji olur.

Ayrıca, bu uzayda her $x \in X$ için $d(x,0) = x = d(0,x)$ olduğundan, "0" simetrik nokta, $Z_d(x) = \{x, 0\}$ ve $Z_d = \{(x,0),(0,x) : \ x \in X\}$ dir. Böylece, $Z_d \neq \triangle_X$ olduğundan, (X,d) Yıldız Uzayı antisimetrik uzay değildir.

Şimdi, (X,d) Yıldız Uzayının simetrik bağlantılı olduğunu yani her $x \in X$ için $C_d(x) = X$ olduğunu görelim: Her zaman $C_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X$ alalım. $P(x,0,y)$ yolu x 'den y 'ye bir simetrik yol olduğundan, $y \in C_d(x)$ yani, $X \subseteq C_d(x)$ ve dolayısıyla, $C_d(x) = X$ dir. Böylece, (X,d) simetrik bağlantılı uzay olur.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, Yıldız Uzayında "0" simetrik noktadır. Bu durumu aşağıdaki önerme ile genelleştirebiliriz:

3.2.4. Önerme . *En az bir simetrik noktaya sahip (X,d) T_0-metrikimsi uzay, simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,d) T_0-metrikimsi uzay ve $a \in X$ simetrik nokta olsun. Her $x \in X$ için, $C_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X$ alalım. $a \in X$ simetrik nokta olduğundan, $P(x,a,y)$, x 'den y 'ye bir simetrik yoldur. Böylece, $y \in C_d(x)$ ve buradan, $X \subseteq C_d(x)$ dir. O halde, $x \in X$ için $C_d(x) = X$ ve (X,d) bir simetrik bağlantılı uzaydır. $\square$

Önerme 3.2.4 'ün sonucu olarak, simetrik noktalardan oluşan uzaylar simetrik bağlantılı olur. Şimdi, Önerme 3.2.4 'ün tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

3.2.5. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde, $x \geq y$ ise $p(x,y) = x - y$ ve $x < y$ ise $p(x,y) = 1$ olmak üzere, $(\mathbb{R},p)$ **Sorgenfrey 1** uzayında her $x \in \mathbb{R}$ için $Z_p(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = x \pm 1\}$ olduğundan, açıkça, $C_p(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = x \pm k, \ k \in \mathbb{Z}\} \neq \mathbb{R}$ dır. Buradan, $(\mathbb{R},p)$ uzayının simetrik bağlantılı olmadığı görülür. Diğer yandan, **Sorgenfrey 1** uzayı simetrik noktaya sahip değildir ve metrik uzay da değildir (Örnek 2.3.4).

Şimdi, **Sorgenfrey 1** uzayının T_0-metrikimsi fonksiyonunu $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerine kısıtladığımızda

$$p_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow [0,\infty)$$

$$p_{\mathbb{Z}}(x,y)=\begin{cases} x-y & ; x\geq y \\ 1 & ; x<y \end{cases}$$

fonksiyonu ile oluşan $(\mathbb{Z},p_{\mathbb{Z}})$ uzayının simetrik bağlantılı olduğunu görelim: Gerçekten, her $x,y\in\mathbb{Z}$ için $x<y$ ise, $P(x,x+1,x+2,...,y)$ yolu, x 'den y 'ye bir simetrik yol ve $y<x$ ise $P(y,y+1,y+2,...,x)$ yolu, y 'den x 'e bir simetrik yol olur. Böylece, $(\mathbb{Z},p_{\mathbb{Z}})$ simetrik bağlantılı uzaydır. Açıkça, $(\mathbb{Z},p_{\mathbb{Z}})$ metrik uzay değildir ve simetrik noktaya da sahip değildir çünkü $p_{\mathbb{Z}}(1,5)=1\neq 4=p_{\mathbb{Z}}(5,1)$.

Bu örnekte, *simetrik bağlantılı olmayan* $(\mathbb{R},p)$ *uzayının simetrik bağlantılı olan bir* $(\mathbb{Z},p_{\mathbb{Z}})$ *altuzayına sahip olduğu da ortaya çıkmıştır.*

Önerme 3.1.8 'den metrik uzaylar simetrik bağlantılı idi. Şimdi, "Bir simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay hangi koşul altında metrik uzay olur? " sorusunu inceleyelim:

3.2.6. Önerme . (X,d) *simetrik bağlantılı* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Eğer* Z_d *simetrik çiftler kümesi geçişkenlik özelliğini sağlıyorsa,* (X,d) *metrik uzay olur.*

Kanıt. (X,d) simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun ve Z_d simetrik çiftler kümesi geçişkenlik özelliğini sağlasın. Şimdi, (X,d) 'nin metrik uzay olduğunu görmek için $x,y\in X$ alalım. (X,d) simetrik bağlantılı olduğundan, x 'den y 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir $P(x=x_0,x_1,...,x_n=y)$ yolu vardır. Simetrik çift tanımından $(x_0,x_1)\in Z_d$, $(x_1,x_2)\in Z_d$, ..., $(x_{n-1},x_n)\in Z_d$ olur. Şimdi, Z_d geçişkenlik özelliğini sağladığından, $(x=x_0,y=x_n)\in Z_d$ yani, $d(x,y)=d(y,x)$ dir. Böylece, (X,d) metrik uzay olur. □

Aşağıda verilecek olan kapsama sonraki teoremde kullanılacaktır.

3.2.7. Not . (X,d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Bu durumda, her $a\in A$ için $C_{d_A}(a)\subseteq C_d(a)$ olur. Gerçekten, her $b\in C_{d_A}(a)$ için A 'da bir $P(a=a_0,a_1,...,a_n=b)$ simetrik yolu vardır. Şimdi, her $i=0,1,...,n$ için $a_i\in A\subseteq X$ olduğundan, $P(a=a_0,a_1,...,a_n=b)$, X üzerinde bir simetrik yoldur. Yani, $b\in C_d(a)$ olur.

Bu kapsamanın diğer yönünün doğru olamayacağını ileride bir örnek ile göreceğiz.

3.2.8. Teorem . (X,d) *bir* T_0*-metrikimsi uzay ve her* $i\in I$ *için* $A_i\subseteq X$ *olmak üzere* $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\neq\emptyset$ *olsun. Bu durumda, her* $i\in I$ *için* (A_i,d_{A_i}) *altuzayları simetrik bağlantılı ise* $(\bigcup\limits_{i\in I}A_i,d_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i})$ T_0*-metrikimsi uzayı, simetrik bağlantılı olur.*

Kanıt. $(\bigcup_{i\in I} A_i, d_{\bigcup_{i\in I} A_i})$ uzayının simetrik bağlantılı olduğunu görmek için $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alalım ve $C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(a) = \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğunu görelim; $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan, $a \in A_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. Şimdi, $b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alalım.

(1) $b \in A_{i_0}$ ise, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayı simetrik bağlantılı olduğundan, $(A_{i_0}, d_{A_{i_0}})$ uzayı da simetrik bağlantılıdır ve buradan, Not 3.2.7 kullanılarak, $b \in C_{d_{A_{i_0}}}(a) \subseteq C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(a)$ elde edilir.

(2) $i_0 \neq i_1 \in I$ olmak üzere, $b \in A_{i_1}$ olsun. Diğer yandan, $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ olduğundan, bir $x \in X$ vardır öyle ki her $i \in I$ için $x \in A_i$ dir. Şimdi, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayı simetrik bağlantılı olduğundan, $a \in C_{d_{A_{i_0}}}(x)$ ve $b \in C_{d_{A_{i_1}}}(x)$ dir. O halde, C_d 'nin geçişme özelliğinden ve Not 3.2.7 yardımıyla, $\bigcup_{i\in I} A_i$ üzerinde a 'dan b 'ye simetrik yol vardır yani, $b \in C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(a)$ olur.

Böylece, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(a)$ olur. Yani, $(\bigcup_{i\in I} A_i, d_{\bigcup_{i\in I} A_i})$ simetrik bağlantılıdır. $\square$

3.2.9. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$ olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayı simetrik bağlantılı ve her $i \neq j$ için $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ ise $(\bigcup_{i\in I} A_i, d_{\bigcup_{i\in I} A_i})$ simetrik bağlantılı uzay olur.*

Kanıt. Her $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ için a 'dan b 'ye bir simetrik yol olduğunu görelim:

(1) Bir $i_0 \in I$ için $a, b \in A_{i_0}$ ise her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayı simetrik bağlantılı olduğundan, A_{i_0} altkümesinde a 'dan b 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ yolu vardır. Diğer yandan, $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan, $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ yolu, $\bigcup_{i\in I} A_i$ üzerinde de a 'dan b 'ye simetrik yoldur.

(2) Şimdi, $i \neq j$ olmak üzere, $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ durumunu inceleyelim: $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ olduğundan, $x \in A_j \cap A_i$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Şimdi, (A_i, d_{A_i}) ve (A_j, d_{A_j}) altuzayları simetrik bağlantılı olduklarından, Not 3.2.7 yardımıyla, $a \in C_{d_{A_i}}(x) \subseteq$

$C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(x)$ ve $b \in C_{d_{A_j}}(x) \subseteq C_{d_{\bigcup_{i\in I} A_i}}(x)$ dır. Böylece, C_d 'nin geçişme özelliğinden, $\bigcup_{i\in I} A_i$ üzerinde a ile b simetrik bağlantılı olur. $\square$

3.2.10. Önerme . *(X,d) ve (Y,e) iki T_0-metrikimsi uzay ve $f:(X,d)\longrightarrow (Y,e)$ bir örten izometri olsun. Bu durumda,*

$$(X,d) \text{ uzayı simetrik bağlantılıdır} \Longleftrightarrow (Y,e) \text{ uzayı simetrik bağlantılıdır.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $a,b\in Y$ alalım. f 'nin örtenliğinden, $f(x)=a$ ve $f(y)=b$ olacak şekilde $x,y\in X$ vardır. (X,d) simetrik bağlantılı olduğundan, X 'de bir $P(x=x_0,x_1,...,y=x_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu vardır, öyle ki $i=0,...,n-1$ için, $d(x_i,x_{i+1})=d(x_{i+1},x_i)$ dır. Ayrıca, f izometri olduğundan $i=0,...,n-1$ için $d(x_i,x_{i+1})=e(f(x_i),f(x_{i+1}))$ dır. Şimdi $i=0,...,n-1$ için $e(f(x_i),f(x_{i+1}))=d(x_i,x_{i+1})=d(x_{i+1},x_i)=e(f(x_{i+1}),f(x_i))$ olduğundan, $P(a=f(x)=f(x_0),f(x_1),...,b=f(y)=f(x_n))$ $(n\in\mathbb{N})$, Y üzerinde a 'dan b 'ye bir simetrik yoldur. Yani, (Y,e) simetrik bağlantılı uzaydır.
$(\Leftarrow)$ $x,y\in X$ alalım. Bu durumda, $f(x)=a$ ve $f(y)=b$ olmak üzere, $a,b\in Y$ dir. (Y,e) simetrik bağlantılı olduğundan, Y 'de bir $P(a=a_0,a_1,...,b=a_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu vardır öyle ki $i=0,...,n-1$ için, $e(a_i,a_{i+1})=e(a_{i+1},a_i)$ dır. Şimdi, f örten olduğundan, her $a_i\in Y$ için $f(x_i)=a_i$ olacak şekilde bir $x_i\in X$ vardır $(i=0,...,n-1)$. Ayrıca, f izometri olduğundan, $i=0,...,n-1$ için $d(x_i,x_{i+1})=e(f(x_i),f(x_{i+1}))=e(a_i,a_{i+1})=e(a_{i+1},a_i)=e(f(x_{i+1}),f(x_i))=d(x_{i+1},x_i)$ olduğu görülür. O halde, $P(x=x_0,x_1,...,y=x_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu, X üzerinde x 'den y 'ye bir simetrik yol ve böylece, (X,d) simetrik bağlantılı uzay olur. $\square$

3.2.11. Önerme . *X en az iki elemanlı bir küme ve (X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, (X,d) uzayı, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük elemana sahip ise (X,d) simetrik bağlantılı uzay olamaz.*

Kanıt. Tersine, $a\in X$, $\leq_d$ sıralamasına göre en büyük eleman ve (X,d) simetrik bağlantılı uzay olsun. Simetrik bağlantılılıktan, her $x\in X$ için $C_d(x)=X$ dır. Buradan, $C_d(a)=X$ olur. Şimdi, her $x\in X$ için $x\in C_d(a)$ olduğundan, a 'dan x 'e bir $P(a=x_0,x_1,...,x_n=x)$ simetrik yolu vardır. Burada, $d(a,x_1)=d(x_1,a)$ ve $i=1,,...,n-1$ için $d(x_i,x_{i+1})=d(x_{i+1},x_i)$ dır. Şimdi, a elemanı $\leq_d$ sıralamasına göre en büyük eleman olduğundan, $x_1\leq_d a$ ve buradan $d(x_1,a)=0$ ve dolayısıyla $d(a,x_1)=d(x_1,a)=0$

dır. Bu durumda, T_0-metrikimsi tanımından $a = x$ elde edilir ki bu, a 'nın en büyük eleman olması ile çelişir. Böylece, (X, d) simetrik bağlantılı uzay olamaz. □

Şimdi, bir T_0-metrikimsi uzayda antisimetrik bağlantılılık ile ilgili özgün teorem, önerme, sonuç ve (ters) örnekler inceleyeceğiz:

Bir d T_0-metrikimsinin duali tanımı ele alınarak aşağıdaki önerme kanıtlanabilir:

3.2.12. Önerme . *(X, d) T_0-metrikimsi uzayı antisimetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ (X, d^{-1}) T_0-metrikimsi uzayı antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $x \in X$ alalım. $T_{d^{-1}}(x) = X$ olduğunu görelim: (X, d) antisimetrik bağlantılı olduğundan, $T_d(x) = X$ dir, yani her $x \neq y \in X$ için $d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i)$ $(i = 0, ..., n-1)$ olacak biçimde $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ yolu vardır. d^{-1} tanımından $d^{-1}(x_{i+1}, x_i) = d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i) = d^{-1}(x_i, x_{i+1})$ $(i = 0, ..., n-1)$ elde edilir. Buradan, $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ $(i = 0, ..., n-1)$ yolu, (X, d^{-1}) uzayında x 'den y 'ye bir antisimetrik yoldur, yani her $x \in X$ için $T_{d^{-1}}(x) = X$ dir.
$(\Leftarrow)$ $x \in X$ alalım. $T_d(x) = X$ olduğunu görelim: (X, d^{-1}) antisimetrik bağlantılı olduğundan, $T_{d^{-1}}(x) = X$ dir, yani her $x \neq y \in X$ için $d^{-1}(x_i, x_{i+1}) \neq d^{-1}(x_{i+1}, x_i)$ $(i = 0, ..., n-1)$ olacak biçimde $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ yolu vardır. d^{-1} tanımından $d(x_{i+1}, x_i) = d^{-1}(x_i, x_{i+1}) \neq d^{-1}(x_{i+1}, x_i) = d(x_i, x_{i+1})$ $(i = 0, ..., n-1)$ elde edilir. Buradan, $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ $(i = 0, ..., n-1)$ yolu, (X, d) uzayında x 'den y 'ye bir antisimetrik yoldur, yani her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ dir. □

Önerme 3.1.9 'a benzer biçimde aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

3.2.13. Önerme . *En az iki noktaya sahip bir metrik uzay, antisimetrik bağlantılı olamaz.*

Kanıt. X en az iki elemanlı bir küme, (X, d) metrik uzay ve antisimetrik bağlantılı olsun. O halde, her $x, y \in X$ için x 'den y 'ye antisimetrik çiftlerden oluşan bir $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ yolu vardır. Fakat (X, d) metrik uzay olduğundan $i = 0, 1, ..., n-1$ için tüm (x_i, x_{i+1}) ler simetrik çiftlerdir ki, bu bir çelişkidir. Yani (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay değildir. □

3.2.14. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, X bir simetrik noktaya sahipse (X, d) antisimetrik bağlantılı olamaz.*

Kanıt. $y \in X$ bir simetrik nokta ve (X,d) antisimetrik bağlantılı uzay olsun. Antisimetrik bağlantılılık tanımından, her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ olur. Diğer yandan, Önerme 3.1.14 (b) 'den $T_d(y) = \{y\}$ dir ki, bu çelişkidir. □

Bu tez çalışmasında çok önemli yere sahip ve [18] 'de farklı bir kanıtla sunulan bir teoremi özgün kanıtıyla sunalım:

3.2.15. Teorem . *Normlu olmayan asimetrik normlu gerçel vektör uzay antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $(X, \|.|)$ normlu olmayan asimetrik normlu gerçel vektör uzay olsun. Şimdi $d = d_{\|.|}$ olmak üzere $\|.|$ asimetrik normundan üretilen (X,d) T_0-metrikimsi uzayının antisimetrik bağlantılı olduğunu yani, her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ olduğunu görelim: $(X, \|.|)$ normlu uzay olmadığından, açıkça, $(X, \|.|)$ ve dolayısıyla (X,d) T_0-metrikimsi uzayı simetrik noktaya sahip değildir. Şimdi, Sonuç 3.1.19 gereği, her $x \in X$ için $T_d(x)$ kümeleri hem τ_{d^s}-açık hem τ_{d^s}-kapalıdırlar. Diğer yandan, d^s bir normdan üretilmiştir (Not 2.1.17). Normlu uzaylar ($f : [0,1] \longrightarrow X, f(t) = tx + (1-t)y$ sürekli fonksiyonu sayesinde) yol-bağlantılı [15] olduklarından, üretilen (X, τ_d) topolojik uzayı yol-bağlantılı ve dolayısıyla bağlantılı uzaydır. Şimdi, bağlantılı uzayların hem açık hem kapalı altkümeleri, $\emptyset$ ve X ve $T_d(x) \neq \emptyset$ olduğundan, $T_d(x) = X$ dır. □

3.2.16. Örnek . Her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\|x| = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee 0$ asimetrik normunda üretilen $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Öncelikle, $(\mathbb{R}^3, \|.|)$ uzayının asimetrik normlu gerçel vektör uzay olduğunu görelim: Gerçekten, her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\alpha \geq 0$ için,

$\|(x_1, x_2, x_3)| = \|(-x_1, -x_2, -x_3)| = (0,0,0)$ ancak ve ancak $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$,

$\|\alpha(x_1, x_2, x_3)| = \alpha\|(x_1, x_2, x_3)|$,

$\|(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)| \leq \|(x_1, x_2, x_3)| + \|(y_1, y_2, y_3)|$,

dır. Şimdi, $(\mathbb{R}^3, \|.|)$ asimetrik normlu uzayın bir normlu uzay olmadığını görelim. Normlu uzayın tanımından, her $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ için, $\|(x_1, x_2, x_3)| = 0$ ancak ve ancak $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ olmalıdır. Fakat, $(0,0,0) \neq (-1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$ için, $\|(-1,-1,-1)| = (-1) \vee (-1) \vee (-1) \vee 0 = 0$ dır. Yani, $(\mathbb{R}^3, \|.|)$ normlu uzay değildir. Böylece, Teorem 3.2.15 gereği, $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ antisimetrik bağlantılı uzaydır.

Aşağıda sunacağımız örnek, detaylarıyla incelenecek özgün bir uzay örneğidir.

3.2.17. Örnek . $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. A üzerinde

$$e^{'}(x,y) = \begin{cases} |x-y| & ;\ x < y \text{ ve } (x,y) \neq (2^{-(n+1)}, 2^{-n}),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ 2|x-y| & ;\ \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

fonksiyonu ile inşa edilen $(A, e^{'})$ bir T_0-metrikimsi uzaydır. Gerçekten, $e^{'}$ 'nün bir T_0-metrikimsi olduğunu kanıtlayalım. Her $x, y \in A$ için $e^{'}(x,x) = 0$ ve $e^{'}(x,y) = e^{'}(y,x) = 0 \implies x = y$ olduğu kolayca görülür. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını görelim; Her $x, y, z \in A$ için $x = y$ ya da $y = z$ durumunda açıkça, üçgen eşitsizliği sağlanır.
$e^{'}(x,z) = |x-z|$ ise $e^{'}(x,z) \leq |x-y| + |y-z| = e^{'}(x,y) + e^{'}(y,z)$ olur.
$e^{'}(x,z) = 2|x-z|$ durumunda farklı iki olasılığı inceleyelim:

1. $x \geq z$ durumunda,
   (a) $y \geq x \geq z$ ise $e^{'}(x,z) = 2|x-z| \leq 2|y-z| = e^{'}(y,z)$
   (b) $x > y \geq z$ ise $e^{'}(x,z) = 2|x-z| \leq 2|x-y| + 2|y-z| = e^{'}(x,y) + e^{'}(y,z)$
   (c) $x \geq z > y$ ise $e^{'}(x,z) = 2|x-z| \leq e^{'}(x,y) = 2|x-y|$
2. $x = 2^{-(n+1)}$, $z = 2^{-n}$ $(x < z)$ durumunda,
   (a) $x < y < z$ ihtimali imkansızdır çünkü A kümesi tanımından x ile z 'nin arasında başka nokta olamaz.
   (b) $y < x < z$ ise $y < x = 2^{-(n+1)}$ olduğundan, $y = 2^{-(n+2)}$ alabiliriz ki bu durumda $e^{'}(x,y) + e^{'}(y,z) \geq 2.|2^{-(n+2)} - 2^{-(n+1)}| + |2^{-(n+2)} - 2^{-n}|$
   $= 2^{-(n+1)} + 3.2^{-(n+2)} = 5.2^{-(n+2)} > 2^{-n} = e^{'}(x,z)$ olur.
   (c) $x < z < y$ ise $e^{'}(x,z) = 2^{-n}$ olur. Şimdi, y noktası büyüdükçe üçgen eşitsizliğinin sağ tarafı da büyüdüğü için burada $y = 2^{-(n-1)}$ durumunu incelemek yeterli olacaktır. Böylece, $e^{'}(x,y) + e^{'}(y,z) \geq |2^{-(n+1)} - 2^{-(n-1)}| + 2.|2^{-(n-1)} - 2^{-n}|$
   $= 3.2^{-(n+1)} + 2^{-(n-1)} > 2^{-n} = e^{'}(x,z)$
   olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, $e^{'}$ 'nün duali

$$(e^{'})^{-1}(x,y) = \begin{cases} |y-x| & ;\ y < x \text{ ve } (y,x) \neq (2^{-(n+1)}, 2^{-n}),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ 2|y-x| & ;\ \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ve simetrizasyon metriği,

$$(e^{'})^{s}(x,y) = \begin{cases} 0 & ;\ x = y \\ 2|x-y| & ;\ x \neq y \end{cases}$$

biçimindedir. Burada, dikkat edilirse, $0 \in A$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_{(e^{'})^s}(0,\varepsilon) = \{0, ..., \frac{1}{2^n}\}$ $(\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2})$ dır. Böylece, $X \setminus B_{(e^{'})^s}(0,\varepsilon) = \{\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-2}}, ..., \frac{1}{2}\}$ olduğundan, $e^{'}$ 'nün "0" noktasındaki simetrizasyon topolojisi, sonlu tümleyenler topolojisidir.

Diğer yandan, her $x, y \in A \setminus \{0\}$ için $m(x,y) = |x-y|$ olmak üzere, $(e^{'})^s(x,y) = 2m(x,y)$ dır. Şimdi, $m \leq e' \leq (e^{'})^s = 2m$ olduğundan, $\tau_m \subseteq \tau_{e'} \subseteq \tau_{(e^{'})^s} = \tau_{2m}$ dir. Ayrıca, $\tau_{2m} \subseteq \tau_m$ olduğundan, $\tau_{(e^{'})^s} = \tau_m$ elde edilir. Buradan, $\tau_{(e^{'})^s}$, A 'nın $A \setminus \{0\}$ altkümesi üzerinde, $\mathbb{R}$ 'nin τ_m Standart topolojisinin $A \setminus \{0\}$ üzerine kısıtlaması olarak, ayrık topoloji olur.

Ayrıca, $e^{'}$ tanımından, $e^{'}(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2^n} = e^{'}(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$ olduğundan,

$$Z_{e^{'}} = \{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}), (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \triangle_A$$

biçimindedir. Böylece, $Z_{e^{'}} \neq \triangle_A$ olduğundan, $(A, e^{'})$ antisimetrik T_0-metrikimsi uzay değildir.

Bu uzayda her $x \neq 0$ için açıkça $e^{'}(x,0) \neq e^{'}(0,x)$ olduğundan, "0" antisimetrik noktadır.

Şimdi, (A, e') uzayının antisimetrik bağlantılı, yani, her $x \in A$ için $T_{e'}(x) = A$ olduğunu görelim: Her $y \in A$ için $P(x, 0, y)$ yolu, x 'den y 'ye bir antisimetrik yol olduğundan, $T_{e'}(x) = A$ yani, (A, e') antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzaydır. Ayrıca, bu uzay simetrik bağlantılı değildir. Gerçekten, "0" antisimetrik nokta olduğundan, Önerme 3.1.14 (a) gereği, $C_{e'}(0) = \{0\} \neq A$ dır.

Şimdi, yukarıdaki örnekte ele alınan durumu doğrulayan bir genelleştirmeyi sunalım:

3.2.18. Önerme . *En az bir antisimetrik noktaya sahip T_0-metrikimsi uzay, antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $a \in X$, (X, d) T_0-metrikimsi uzayının antisimetrik noktası olsun. Her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $T_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X$ alalım. $a \in X$ antisimetrik nokta olduğundan, $P(x, a, y)$, x 'den y 'ye bir antisimetrik yoldur. Böylece, $y \in T_d(x)$ ve buradan $X \subseteq T_d(X)$ elde edilir. O halde, (X, d) bir antisimetrik bağlantılı uzay olur. □

Önerme 3.2.18 'in tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

3.2.19. Örnek . $x \geq y$ için $p(x,y) = x - y$ ve $x < y$ için $p(x,y) = 1$ olmak üzere, $(\mathbb{R}, p)$ **Sorgenfrey 1** T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Her $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ için, $P_{xy}(x, x -$

$2, y+2, y)$, x 'den y 'ye bir antisimetrik yol olduğundan, bu uzay antisimetrik bağlantılı uzaydır. ($y < x$ için, $P_{xy}(y, y-2, x+2, x)$, y 'den x 'e bir antisimetrik yol olur). Üstelik, $(\mathbb{R}, p)$ **Sorgenfrey 1** uzayı antisimetrik noktaya sahip değildir (Örnek 2.3.4).

Şimdi, "iki antisimetrik bağlantılı uzayın çarpımı antisimetrik bağlantılı mıdır? " sorusunu araştıralım:

3.2.20. Teorem . *(X, d) ve (Y, q) iki antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay ise*

$$D : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) \vee q(y_1, y_2)$$

olmak üzere, $(X \times Y, D)$ T_0-metrikimsi uzayı da antisimetrik bağlantılıdır.

Kanıt. Her $(x, y) \in X \times Y$ için $T_D((x, y)) = X \times Y$ olduğunu görelim: $(a, b) \in X \times Y$ ise $a, x \in X$ ve $b, y \in Y$ dir. (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay olduğundan, X 'de $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = x)$ $(n \in \mathbb{N})$, a 'dan x 'e bir antisimetrik yoldur, yani her $i = 0, 1, ..., n-1$ için $d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i)$ dır. Benzer biçimde, (Y, q) antisimetrik bağlantılı uzay olduğundan, Y 'de $P(b = y_0, y_1, ..., y_m = y)$ $(m \in \mathbb{N})$, b 'den y 'ye bir antisimetrik yoldur, yani, her $j = 0, 1, ..., m-1$ için $q(y_j, y_{j+1}) \neq q(y_{j+1}, y_j)$ dır.
Şimdi, $P((x_0, y_0) = (a, b), (x_1, b), ..., (x, b), (x, y_1), (x, y_2), ..., (x, y))$ yolunun, $X \times Y$ üzerinde, (a, b) 'den (x, y) 'ye bir antisimetrik yol olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $i = 0, ..., n-1$ için:
$D((x_i, b), (x_{i+1}, b)) = d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i) = D((x_{i+1}, b), (x_i, b))$ dır.
Her $i = 0, ..., m-1$ için:
$D((x, y_j), (x, y_{j+1})) = q(y_i, y_{j+1}) \neq q(y_{j+1}, y_j) = D((x, y_{j+1}), (x, y_j))$ dır.
Böylece, $P((x_0, y_0) = (a, b), (x_1, b), ..., (x, b), (x, y_1), (x, y_2), ..., (x, y))$ yolu, $X \times Y$ üzerinde (a, b) 'den (x, y) 'ye bir antisimetrik yol, yani, $(a, b) \in T_D((x, y))$ olur. □

3.2.21. Not . Yukarıda verilen D çarpım T_0-metrikimsi tanımında "$\vee$" yerine "+" kullanılırsa da çarpım uzayının antisimetrik bağlantılı olduğu açıkça görülür.

Tümevarımdan, Teorem 3.2.20 'nin sonucu olarak aşağıdaki ifade elde edilir:

3.2.22. Sonuç . *Antisimetrik bağlantılı uzayların sonlu sayıda çarpımları antisimetrik bağlantılıdır.*

Aşağıda sunulacak olan kapsamaya, sonraki teoremlerin kanıtında ihtiyaç duyulacaktır.

3.2.23. Not . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda, her $a \in A$ için $T_{d_A}(a) \subseteq T_d(a)$ olur. Gerçekten, her $b \in T_{d_A}(a)$ için A üzerinde antisimetrik çiftlerden oluşan bir $P(a = a_0, a_1, ..., a_n = b)$ yolu vardır. Şimdi, her $i = 0, 1, ..., n$ için $a_i \in A \subseteq X$ olduğundan, $P(a = a_0, a_1, ..., a_n = b)$ yolu, X üzerinde antisimetrik çiftlerden oluşan bir yol ve $b \in T_d(a)$ dır.

Bu kapsamanın diğer yönü doğru değildir. Gerçekten, Örnek 3.2.17 'de sunulan, $(A, e^{'})$ T_0-metrikimsi uzayında, $T_{e'}(\dfrac{1}{2}) = A \nsubseteq \{\dfrac{1}{2}\} = T_{e'_{A\setminus\{0\}}}(\dfrac{1}{2})$ dır.

3.2.24. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$ ve $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayları antisimetrik bağlantılı ise $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, d_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i})$ antisimetrik bağlantılı uzay olur.*

Kanıt. Teorem 3.2.8 'in kanıtına dual olarak benzer biçimde görülür. □

3.2.25. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$ olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayları antisimetrik bağlantılı ve her $i \neq j$ için $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ ise $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, d_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i})$ antisimetrik bağlantılı uzay olur.*

Kanıt. Her $a, b \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ için a 'dan b 'ye bir antisimetrik yol olduğunu görelim:

(1) $a, b \in A_{i_0}$ olacak biçimde $i_0 \in I$ varsa, her $i \in I$ için (A_i, d_{A_i}) altuzayları antisimetrik bağlantılı olduğundan, A_{i_0} altkümesinde a 'dan b 'ye antisimetrik çiftlerden oluşan bir $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ yolu vardır. Diğer yandan, $A_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ olduğundan, $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ yolu $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ üzerinde de a 'dan b 'ye antisimetrik yoldur.

(2) $i \neq j$ olmak üzere, $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ durumunu inceleyelim: $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ olduğundan, $x \in A_j \cap A_i$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Hipotezden, (A_i, d_{A_i}) ve (A_j, d_{A_j}) altuzayları antisimetrik bağlantılı olduklarından ve Not 3.2.23 sayesinde, $a \in T_{d_{A_i}}(x) \subseteq T_{d_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}}(x)$ ve $b \in T_{d_{A_i}}(x) \subseteq T_{d_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}}(x)$ dir. O halde, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ üzerinde a ile b antisimetrik bağlantılıdır. □

3.2.26. Teorem. *(X,d) ve (Y,e) iki T_0-metrikimsi uzay ve $f:(X,d)\longrightarrow(Y,e)$ bir örten izometri olsun. Bu durumda,*

$$(X,d) \text{ uzayı antisimetrik bağlantılıdır} \Longleftrightarrow (Y,e) \text{ uzayı antisimetrik bağlantılıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) $a,b\in Y$ alalım. f 'nin örtenliğinden, $f(x)=a$ ve $f(y)=b$ olacak biçimde $x,y\in X$ vardır. (X,d) antisimetrik bağlantılı olduğundan, X 'de bir $P(x=x_0,x_1,...,y=x_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu vardır, öyle ki $i=0,...,n-1$ için, $d(x_i,x_{i+1})\neq d(x_{i+1},x_i)$ dır. f 'nin izometri oluşundan, $i=0,...,n-1$ için $d(x_i,x_{i+1})=e(f(x_i),f(x_{i+1}))$ dır. Şimdi, $i=0,...,n-1$ için $e(f(x_i),f(x_{i+1}))=d(x_i,x_{i+1})\neq d(x_{i+1},x_i)=e(f(x_{i+1}),f(x_i))$ olduğundan, $P(a=f(x)=f(x_0),f(x_1),...,b=f(y)=f(x_n))$ $(n\in\mathbb{N})$, Y üzerinde a 'dan b 'ye bir antisimetrik yoldur. Yani, (Y,e) antisimetrik bağlantılı uzaydır.

($\Leftarrow$) $x,y\in X$ alalım. Bu durumda, $f(x)=a$ ve $f(y)=b$ olmak üzere, $a,b\in Y$ dir. (Y,e) antisimetrik bağlantılı olduğundan, Y 'de bir $P(a=a_0,a_1,...,b=a_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu vardır öyle ki $i=0,...,n-1$ için, $e(a_i,a_{i+1})\neq e(a_{i+1},a_i)$ dır. Şimdi, f örten olduğundan, her $a_i\in Y$ için $f(x_i)=a_i$ olacak biçimde bir $x_i\in X$ vardır $(i=0,...,n-1)$. f 'nin izometri olması gerçeğinden, $i=0,...,n-1$ için $d(x_i,x_{i+1})=e(f(x_i),f(x_{i+1}))=e(a_i,a_{i+1})\neq e(a_{i+1},a_i)=e(f(x_{i+1}),f(x_i))=d(x_{i+1},x_i)$ olur. O halde, $P(x=x_0,x_1,...,y=x_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ yolu, X üzerinde x 'den y 'ye bir antisimetrik yol ve böylece de (X,d) antisimetrik bağlantılı uzay olur. $\square$

Şimdi, "Antisimetrik bağlantılı bir uzayın altuzayları antisimetrik bağlantılı mıdır?" sorusunu ele alalım. Bu soruya olumsuz yanıt olarak, aşağıdaki örneği sunabiliriz:

3.2.27. Örnek. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\|(x_1,x_2)|=x_1\vee x_2\vee 0$ asimetrik normundan üretilen $(\mathbb{R}^2,d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Burada, her $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ için $Z_{d_{\|.|}}(h)=C_{d_{\|.|}}(h)$ dir. Gerçekten, $Z_{d_{\|.|}}(h)\subseteq C_{d_{\|.|}}(h)$ olduğu açıktır. Şimdi, bir $(z_1,z_2)\in C_{d_{\|.|}}((h_1,h_2))$ alalım. Bu durumda, (h_1,h_2) 'den (z_1,z_2) 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir yol vardır. Ayrıca, (h_1,h_2) ile simetrik olan çiftler, $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(x+h_1,-x+h_2)$ biçiminde olduğu için (Örnek 2.3.8), $P((h_1,h_2),(x_1+h_1,-x_1+h_2),...(x_n+h_1,-x_n+h_2)=(z_1,z_2))$, bir simetrik yoldur. Böylece, $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $(z_1,z_2)=(x+h_1,-x+h_2)$ biçimindedir. Kısaca, her $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ için $Z_{d_{\|.|}}((h_1,h_2))=C_{d_{\|.|}}((h_1,h_2))$ olur. Yani, her $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ noktasının simetri bileşeni

$$C_{d_{\|.|}}(h)=\{(x+h_1,-x+h_2):x\in\mathbb{R}\}$$

biçimindedir. Şimdi, $C_{d_{\|.|}}(h) \neq \mathbb{R}^2$ olduğundan, $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ simetrik bağlantılı uzay değildir. O halde, Önerme 3.1.20 'den, $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ antisimetrik bağlantılı uzaydır.

Diğer yandan, her $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ için $Z_{d_{\|.|}}(h) = C_{d_{\|.|}}(h)$ olduğundan, *her* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *için* $C = C_{d_{\|.|}}((h_1, h_2))$ *olmak üzere* (C, d_C) *metrik uzaydır.*

Bu aşamada ise, "Antisimetrik bağlantılı uzayın altuzayı hangi koşullar altında antisimetrik bağlantılı olur? " sorusu incelenecektir. Bu soruya yanıt olarak gerekli koşulu sunmadan önce yardımcı bir önermeye değineceğiz.

3.2.28. Önerme. *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $A \subseteq X$ altkümesi X 'de τ_{d^s}-yoğun olsun. Bu durumda, her $a \in A$ için $T_A(a) = T_X(a) \bigcap A$ eşitliği sağlanır (Burada, $T_A(a) = T_{d_A}(a)$ ve $T_X(a) = T_{d_X}(a)$ dır).*

Kanıt. $(\subseteq)$ $b \in T_A(a)$ alalım. Buradan, a ile b, (A, d_A) altuzayında antisimetrik bağlantılıdır. Böylece, her $i = 0, ..., n-1$ için $a_i \in A$ olmak üzere bir $P_{ab}(a = a_0, ..., a_{n-1}, a_n = b)$ antisimetrik yolu vardır. Şimdi $A \subseteq X$ olduğundan, P_{ab} yolu, X üzerinde a 'dan b 'ye bir antisimetrik yoldur. Buradan $b \in T_X(a) \bigcap A$ elde edilir.
$(\supseteq)$ $a \neq b$ olmak üzere, $b \in T_X(a) \bigcap A$ alalım. $b \in T_X(a)$ olduğundan, her $i = 0, ..., n-1$ için $y_i \in X$ olmak üzere, antisimetrik çiftlerden oluşan $P(a = y_0, ..., b = y_n)$ yolu vardır. Her $i = 0, ..., n-1$ için $d(y_i, y_{i+1}) \neq d(y_{i+1}, y_i)$ olduğundan $|F_d(y_i, y_{i+1})| = |d(y_i, y_{i+1}) - d(y_{i+1}, y_i)| = \varepsilon_i$ olacak şekilde $\varepsilon_i > 0$ vardır. Şimdi, $m = min\{\varepsilon_i : \ i = 0, ..., n-1\}$ ve $\delta = \frac{m}{4}$ alalım. Burada, A, X 'de τ_{d^s}-yoğun olduğundan, her $i = 1, ..., n-1$ için $u_i \in B_{d^s}(y_i, \delta) \bigcap A$ vardır. Şimdi, $a = y_0 = u_0$ ve $b = y_n = u_n$ dediğimizde, her $i = 1, ..., n-2$ için (u_i, u_{i+1}) antisimetrik çifttir. Gerçekten, bir (u_i, u_{i+1}) çifti simetrik çift olursa, Not 2.1.3 kullanılarak,
$m \leq |d(y_i, y_{i+1}) - d(y_{i+1}, y_i)| = |d(y_i, y_{i+1}) - d(u_i, u_{i+1}) + d(u_{i+1}, u_i) - d(y_{i+1}, y_i)|$
$\leq |d(y_i, y_{i+1}) - d(u_i, u_{i+1})| + |d(u_{i+1}, u_i) - d(y_{i+1}, y_i)|$
$\leq d^s(y_i, u_i) + d^s(y_{i+1}, u_{i+1}) + d^s(u_{i+1}, y_{i+1}) + d^s(u_i, y_i) < 4\delta = m$
çelişkisi elde edilir. Şimdi, $P(a, u_1, ..., u_{n-1}, b)$ 'deki ardışık bütün çiftlerin A üzerinde antisimetrik olduğunu göstermek için (a, u_1) ve (u_{n-1}, b) çiftlerinin antisimetrik çiftler olduklarını görmemiz yeterli olacaktır. Tersini kabul edelim: (a, u_1) simetrik çift olsun. Bu durumda $d(a, u_1) = d(u_1, a)$ elde edilir. Şimdi, Not 2.1.3 kullanılarak,
$m < |F_d(a, y_1)| = |d(a, y_1) - d(y_1, a)| = |d(a, y_1) - d(a, u_1) + d(u_1, a) - d(y_1, a)| < d^s(y_1, u_1) + d^s(u_1, y_1) < \delta + \delta = 2\delta = \frac{m}{2}$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Benzer şekilde (u_{n-1}, b) de antisimetrik çift olur. Yani, a ile b antisimetrik bağlantılı ve dolayısıyla, $b \in T_A(a)$ dır. $\square$

3.2.29. Sonuç . *(X, d) antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay ve $A \subseteq X$ altkümesi X 'de τ_{d^s}-yoğun ise (A, d_A) altuzayı antisimetrik bağlantılı olur.*

Kanıt. Her $a \in A$ için $T_A(a) = A$ olduğunu görelim: Hipotezden, $T_X(a) = X$ dir. O halde, Önerme 3.2.28 'daki eşitlikten, $T_A(a) = T_X(a) \bigcap A = X \bigcap A = A$ olur. $\square$

Şimdi, Önerme 3.2.28 'deki eşitliğin simetri bileşenler için ve Sonuç 3.2.29 'un bir benzerinin simetrik bağlantılılık için sağlanmadığını, ayrıca Sonuç 3.2.29 'un tersinin de doğru olamayacağını aşağıdaki örnekte görebiliriz. Kısaca, bu örnekte;

(1) Antisimetrik bağlantılı bir τ_{d^s}-yoğun altuzaya sahip olmasına rağmen, kendisi antisimetrik bağlantılı olmayan,

(2) Simetrik bağlantılı olmasına rağmen, τ_{d^s}-yoğun ve simetrik bağlantılı olmayan bir altuzaya sahip,

(3) $C_A(a) = C_X(a) \bigcap A$ eşitliğinin bir x noktası için sağlanmadığını gösteren,

bir T_0-metrikimsi uzayı inceleyeceğiz:

3.2.30. Örnek . $X = [0, \infty)$ üzerinde $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; \ y \leq x \\ x + y & ; \ y > x \end{cases}$$

biçiminde tanımlı d fonksiyonu ile elde edilen (X, d) Yıldız Uzayı bir antisimetrik uzay değildir (Örnek 3.2.3).

Şimdi, $F = X \setminus \{0\}$ olmak üzere, (F, d_F) altuzayının antisimetrik uzay olduğunu görmek için $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in F$ alalım. Böylece, iki durum söz konusudur:
(a) $x > y$ olursa $d_F(x, y) = x - y \neq x + y = d_F(y, x)$,
(b) $y > x$ olursa $d_F(x, y) = x + y \neq y - x = d_F(y, x)$
elde edilir. Her iki durumda $d_F(x, y) \neq d_F(y, x)$ olduğundan, (F, d_F) altuzayı antisimetriktir. O halde Önerme 3.1.15 gereğince, (F, d_F) antisimetrik bağlantılı uzay olur.

Diğer yandan, Örnek 3.2.3 'den $B_{d^s}(0, \varepsilon) = \{y \in X : d^s(0, y) < \varepsilon\} = [0, \varepsilon)$ olduğu bilinmektedir. Şimdi, F altuzayının X uzayında τ_{d^s}-yoğun olduğunu görelim: Tersine,

F 'nin X 'de τ_{d^s}-yoğun olmadığını kabul edelim. Bu durumda, $G \bigcap (X \setminus \{0\}) = \emptyset$ olacak biçimde bir $G \in \tau_{d^s}$ vardır. Buradan, $G \subseteq \{0\}$ olur. Diğer yandan, "0" noktasının τ_{d^s} topolojisine göre yuvarları $[0, \varepsilon)$ biçiminde olduğundan, $[0, \varepsilon) \subseteq \{0\}$ çelişkisi elde edilir.

Üstelik, $Z_d = \{(x, 0), (0, x) : x \in X\}$ olduğundan, $T_d(0) = \{0\} \neq X$ dır. Buradan, (X, d) Yıldız Uzayı antisimetrik bağlantılı değildir.

Böylece, (X, d) *Yıldız Uzayı antisimetrik bağlantılı olmamasına rağmen,* τ_{d^s}*-yoğun ve antisimetrik bağlantılı olan bir altuzaya sahiptir.*

Örnek 3.2.3 'de gördüğümüz gibi, (X, d) Yıldız Uzayı simetrik bağlantılıdır. Şimdi, (F, d_F) antisimetrik uzay olduğundan, Önerme 3.1.9 gereğince, simetrik bağlantılı uzay değildir.

Böylece, (X, d) *Yıldız Uzayı simetrik bağlantılı olmasına rağmen,* τ_{d^s}*-yoğun olan ve aynı zamanda simetrik bağlantılı olmayan bir altuzaya sahiptir.*

Diğer yandan, (F, d_F) antisimetrik uzayında $C_{d_F}(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$ ve (X, d) Yıldız Uzayı simetrik bağlantılı olduğundan, $C_d(\frac{1}{2}) = X$ dır. O halde, $C_{d_F}(\frac{1}{2}) \neq C_d(\frac{1}{2}) \cap F$ olur. O halde, *Önerme 3.2.28 'deki eşitliğin simetri bileşenler için sağlanmadığını görebiliriz.*

Dikkat edilirse, burada $C_d(\frac{1}{2}) = X \nsubseteq \{\frac{1}{2}\} = C_{d_F}(\frac{1}{2})$ dır. Böylece, daha önce söz verildiği gibi, *Not 3.2.7 'deki kapsamanın diğer yönünün doğru olamayacağı da ortaya çıkmıştır.*

4. SİMETRİK BAĞLANTILI VE ANTİSİMETRİK BAĞLANTILI GENİŞLEMELER

Bu bölümde, T_0-metrikimsi uzaylarda *simetrik bağlantılı genişleme* ve *antisimetrik bağlantılı genişleme* teorileri kurularak bir T_0-metrikimsi uzayın hangi koşullar altında simetrik bağlantılı genişleme ya da antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahip olabileceği incelenecektir. Ayrıca, bu iki kavramın, kalıtsal olup olmadığı araştırılacak ve önemli (ters) örneklerde T_0-metrikimsi uzayların altuzayları da ele alınarak, simetrik bağlantılı genişleme ve antisimetik bağlantılı genişleme kavramlarının detayları bu (alt) uzaylarda açıklanacaktır. Sunulacak olan teorem, önerme, sonuç ve örnekler [7] makalesinde yayınlanmıştır.

4.1. T_0-Metrikimsi Uzaylarda Simetrik Bağlantılı Genişlemeler

Bu kısımda, T_0-metrikimsi uzaylar çerçevesinde, simetrik bağlantılı genişleme teorisi kurulacak ve bu tür genişlemelerin varlığı çeşitli koşullar altında araştırılacaktır. (Klasik topolojide bağlantılı genişlemeler [4] 'de incelenmiştir.)

4.1.1. Tanım . (X, d) T_0-metrikimsi uzay ve (Y, e) simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d) uzayı (Y, e) uzayının bir altuzayına izometrik ise yani, bir $j : (X, d) \to (Y, e)$ izometrik gömme dönüşümü varsa (Y, e) uzayına, (X, d) 'nin *simetrik bağlantılı genişlemesidir* denir.

Bu durumda, $Y \setminus j(X)$ kümesi, Y genişlemesinin *kalanı* olarak adlandırılır.

Tanımdan aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz:

4.1.2. Önerme . (Y, e) *T_0-metrikimsi uzayı,* (X, d) *'nin bir simetrik bağlantılı genişlemesi ise* (Y, e^{-1}) *T_0-metrikimsi uzayı da,* (X, d^{-1}) *'nin simetrik bağlantılı genişlemesi olur.*

Kanıt. (Y, e) uzayı (X, d) uzayının bir simetrik bağlantılı genişlemesi olduğundan, bir $j : (X, d) \to (Y, e)$ izometrik gömme dönüşümü vardır. Burada, her $x, y \in X$ için $d(x, y) = e(j(x), j(y))$ olduğundan, $d^{-1}(x, y) = d(y, x) = e(j(y), j(x)) = e^{-1}(j(x), j(y))$ dir, yani, $j : (X, d^{-1}) \to (Y, e^{-1})$ bir izometrik gömme dönüşümüdür. Diğer yandan, Önerme 3.1.7 'den (Y, e) simetrik bağlantılı olduğundan, (Y, e^{-1}) de simetrik bağlantılıdır. $\square$

4.1.3. Teorem . *Her sınırlı (X, d) T_0-metrikimsi uzay bir simetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. $\infty \notin X$ olmak üzere, $Y = X \cup \{\infty\}$ kümesini tanımlayalım. Şimdi, (X, d) sınırlı olduğundan, her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq t$ olacak biçimde bir $t > 0$ vardır. Burada, $Y = X \cup \{\infty\}$ üzerinde,

$$e(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & ;\ x, y \in X \\ t & ;\ x = \infty, y \in X \\ t & ;\ y = \infty, x \in X \\ 0 & ;\ x = \infty, y = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlı e fonksiyonu ile elde edilen (Y, e), bir T_0-metrikimsi uzaydır. Diğer iki özellik kolayca görülebileceği için burada sadece üçgen eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayalım: Her $x, y, z \in Y$ için

(1) $x, y, z \in X$ durumunda $e(x, y) = d(x, y)$,

(2) $x = y = z = \infty$ durumunda $e(x, z) = e(x, y) = e(y, z) = 0$,

(3) $x, y \in X$ ve $z = \infty$ durumunda $e(x, z) = e(y, z) = t$ ve $e(x, y) = d(x, y) \leq t$,

(4) $x, z \in X$ ve $y = \infty$ durumunda $e(x, y) = e(y, z) = t$ ve $e(x, z) = d(x, z) \leq t$,

(5) $y, z \in X$ ve $x = \infty$ durumunda $e(x, z) = e(x, y) = t$ ve $e(y, z) = d(y, z) \leq t$,

olduğundan, üçgen eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, her $x, y \in Y$ için $e(x, \infty) = t = e(\infty, x)$ ve $e(y, \infty) = t = e(\infty, y)$ olduğundan, $P(x, \infty, y)$, x 'den y 'ye bir simetrik yoldur. Yani, (Y, e) uzayı (X, d) 'nin simetrik bağlantılı tek-nokta genişlemesidir. □

4.1.4. Örnek . $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesine, X 'in elemanları ile karşılaştırılamayacak biçimde "∞" elemanını ekleyerek genişletilmiş yeni bir $Y = X \bigcup \{\infty\}$ kümesini kuralım. Burada,

$$\preceq = \{(x, y) :\ x \leq y,\ x, y \in X\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

olmak üzere $\preceq$ bağıntısı Y üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Böylece, $(Y, \preceq)$ ikilisi $(X, \leq)$ 'den genişletilmiş bir kısmi sıralı küme olur. Şimdi, X üzerinde "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısından üretilen

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d_{\leq}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq y \\ 1 & ; \ x \not\leq y \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Örnek 2.3.2 gereği $(X, d_{\leq})$ bir T_0-metrikimsi uzaydır. Benzer biçimde, Y üzerinde "$\preceq$" bağıntısı ile üretilen

$$d_{\preceq} : Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d_{\preceq}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \preceq y \\ 1 & ; \ x \not\preceq y \end{cases}$$

fonksiyonu bir T_0-metrikimsidir. Diğer yandan, sınırlı olan $(X, d_{\leq})$ T_0-metrikimsi uzayı Teorem 4.1.3 'den simetrik bağlantılı bir (Y, e) tek-nokta genişlemesine sahip olduğu biliniyor. Şimdi, Y üzerinde $e = d_{\preceq}$ olduğunu görelim: Her $x, y \in Y$ için

(1) $x \preceq y$ ise x ile y karşılaştırılabilir olduğundan $x, y \in X$ dir. Bu durumda, $e(x,y) = d_{\leq}(x,y) = 0$ dır.

(2) $x \not\preceq y$ ise $d_{\preceq}(x,y) = 1$ dır. Burada, iki farklı durum söz konusudur:

(a) $x = \infty$ ve $y \in X$ ise $e(x,y) = d_{\leq}(x,y) = 1$,

(b) $y = \infty$ ve $x \in X$ ise $e(x,y) = d_{\leq}(x,y) = 1$ dır

(3) $y = \infty$ ve $x = \infty$ ise $e(x,y) = 0$ ve $d_{\preceq}(x,y) = 0$ dır.

Sonuç olarak, $d_{\preceq}(x,y) = e(x,y)$ elde edilir.

4.1.5. Önerme . *$u(x,y) = max\{x - y, 0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{R}, u)$ standart T_0-metrikimsi uzayı, simetrik bağlantılı olan sonlu kalanlı bir simetrik bağlantılı (Y, e) genişlemesine sahip olamaz.*

Kanıt. Tersine, $(\mathbb{R}, u)$ T_0-metrikimsi uzayının sonlu kalanlı simetrik bağlantılı bir (Y, e) genişlemesine sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, öncelikle Tanım 4.1.1 'den, (Y, e) uzayının bir $(j(\mathbb{R}), e_{\mathbb{R}})$ altuzayı, $(\mathbb{R}, u)$ uzayına izometrik olacak biçimde bir $j : (\mathbb{R}, u) \to (Y, e)$ izometrik gömme dönüşümü vardır. Ayrıca, $Y = j(\mathbb{R}) \cup F$ olacak biçimde, boş kümeden farklı, sonlu ve $j(\mathbb{R})$ ile ayrık olan bir F kümesi vardır. Şimdi, $(\mathbb{R}, u)$ uzayının sınırlı ve dolayısıyla kabulümüzün yanlış olduğunu görelim:

Bunun için, $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in \mathbb{R}$ ve $f \in F$ alalım. Şimdi, (x, f) ve (y, f) çiftleri (Y, e) uzayında simetrik çiftler olmaları durumunda $e(x, f) = e(y, f)$ eşitliği sağlanır. Gerçekten, $e(x, f) > e(y, f)$ olursa $0 < e(x, f) - e(y, f) \leq e(x, y) = u(x, y)$ ve $0 < e(x, f) - e(y, f) = e(f, x) - e(f, y) \leq e(y, x) = u(y, x)$ dır. Buradan, $u(x, y) > 0$ ve

$u(y,x) > 0$ olur ki, bu durum u standart T_0-metrikimsi tanımı ile çelişir.

Ayrıca, (Y,e) uzayında (x,f) simetrik çift olmak üzere, x 'e bağlı olmayacak biçimde $a_f := e(x,f)$ sabitini tanımlayalım. ($f \in F$ için (x,f) simetrik çifti yoksa $a_f = 0$ dır.)

Şimdi, $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in \mathbb{R}$ alalım. (Y,e) simetrik bağlantılı olduğundan, (Y,e) üzerinde x 'den y 'ye bir P_{xy} simetrik yolu olmalıdır.

Diğer yandan, genelliği bozmaksızın, $(\mathbb{R},u)$ antisimetrik uzay olduğundan, P_{xy} yolu içerisinde, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin elemanları olup ve aynı zamanda ardışık olan noktaların olmadığını varsayabiliriz. Böylece, her i için $f_i \in F$, $x_i \in \mathbb{R}$ ve her ardışık çift simetrik olmak üzere, P_{xy} yolu

$$P_{xy} = P(x, f_1, f_2, ..., f_k, x_{k+1}, f_{k+2}, f_{k+3}, ..., f_s, x_{s+1}, ..., x_h, ..., f_p, y)$$

biçimindedir. Şimdi, e 'ye göre üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$u(x,y) = e(x,y) \leq e(x,f_1) + e(f_1,f_2) + ... + e(f_k, x_{k+1})$

$+ ... + e(f_p, y) < \sum\limits_{f \in F} 2a_f + \sum\limits_{i,j,i \neq j} e(f_i, f_j)$

elde edilir. Buradan, u standart T_0-metrikimsisi sınırlı olur ki, bu çelişkidir.

4.1.6. Teorem . *Her (X,d) T_0-metrikimsi uzayı, sayılabilir metrik uzay kalanlı bir simetrik bağlantılı genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde her $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$e((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = d(x_1,y_1) \vee (x_2 - y_2) \vee (x_3 - y_3)$$

olacak biçimde e fonksiyonunu tanımlayalım. d bir T_0-metrikimsi olduğundan, e 'nin T_0-metrikimsi olduğu kolayca kanıtlanabilir.

Bir $x_0 \in X$ alalım. Açıkça, $K_{d^s}(x_0,n) = \{y \in X : \ d^s(x_0,y) \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ için $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_{d^s}(x_0,n)$ dır.

Şimdi, $M = \{(x_0, 2n, -2n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ ve $Y = \{(x,0,0) : x \in X\} \cup M$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda, $X' = \{(x,0,0) : x \in X\} \subseteq Y$ olmak üzere, e 'yi X' altkümesi üzerine kısıtladığımızda oluşan $(X', e_{X'})$ altuzayı

$$f : X \longrightarrow X' \ : x \mapsto (x,0,0)$$

izometri dönüşümü ile (X,d) uzayına izometriktir.

Diğer yandan, (M, e_M), (Y,e) 'nin metrik altuzayıdır: Gerçekten, her $n,k \in \mathbb{N}$ için

$$e((x_0,2n,-2n),(x_0,2k,-2k)) = d(x_0,x_0)\vee(2n-2k)\vee(-2n+2k) = 2|n-k| =$$
$$d(x_0,x_0)\vee(2k-2n)\vee(-2k+2n) = e((x_0,2k,-2k),(x_0,2n,-2n))$$

dır. Üstelik, M sayılabilirdir.

Şimdi, (Y,e) uzayının simetrik bağlantılı olduğunu görelim: Bir $x\in X$ alalım. Böylece, bir $n\in\mathbb{N}$ için $x\in K_{d^s}(x_0,n)$ dır. Böylece, $d(x,x_0)\le d^s(x,x_0)\le n$ olduğundan,

$$e((x,0,0),(x_0,2n,-2n)) = 2n$$

dır. Benzer biçimde, $d(x_0,x)\le d^s(x_0,x)\le n$ olduğundan,

$$e((x_0,2n,-2n),(x,0,0)) = 2n$$

dır. Sonuç olarak, $((x,0,0),(x_0,2n,-2n))$, (Y,e) üzerinde simetrik çifttir ve X' 'deki her nokta, (Y,e) 'nin M metrik altuzayındaki bir nokta ile simetrik bağlantılı olduğundan, (Y,e) simetrik bağlantılı uzaydır. Böylece, (Y,e) uzayı, $(X',e_{X'})$ ve dolayısıyla (X,d) uzayının simetrik bağlantılı genişlemesi olur. □

4.1.7. Uyarı . Yukarıdaki önermenin kanıtında M kümesi yerine, M 'nin $M^{'}=\{(x_0,4n,-4n):\ n\in\mathbb{N}\}$ altkümesi de kullanılabilirdi.

Aşağıdaki örnekte, simetrik bağlantılı ve simetrizasyon topolojisine göre yoğun olan bir altuzaya sahip olmasına rağmen, kendisi simetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayı sunulacaktır.

4.1.8. Örnek . $A=\{0\}\cup\{\frac{1}{2^n}:n\in\mathbb{N}\}$ üzerinde

$$e^{'}(x,y)=\begin{cases}|x-y| & ;\ x<y \text{ ve } (x,y)\neq(2^{-(n+1)},2^{-n}),\ \forall n\in\mathbb{N}\\ 2|x-y| & ;\ \text{aksi taktirde}\end{cases}$$

T_0-metrikimsi fonksiyonu ile kurulan $(A,e^{'})$ T_0-metrikimsi uzayı simetrik bağlantılı değildir (Örnek 3.2.17).

Şimdi, $B=A\setminus\{0\}$ altkümesini alalım ve $(B,e^{'}_B)$ altuzayının simetrik bağlantılı, ayrıca B altkümesinin $\tau_{(e^{'})^s}$-yoğun olduğunu görelim:

Açıkça, her $a,b\in B$ için $a=\frac{1}{2^n}$ ve $b=\frac{1}{2^m}$ olacak biçimde $n,m\in\mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $n>m$ yani, $a<b$ ise $Z_{e'}$ tanımından

$$P(a=\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}},...,\frac{1}{2^m}=b)$$

yolu, a 'dan b 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir yol ve $n < m$ yani, $a > b$ ise $Z_{e'}$ tanımından

$$P(a = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, ..., \frac{1}{2^m} = b)$$

yolu, a 'dan b 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir yoldur. Buradan, (B, e'_B) simetrik bağlantılı uzay olur.

Şimdi, $B = A \backslash \{0\}$ altkümesinin $\tau_{(e')^s}$-yoğun olmadığını kabul edelim. Bu durumda, $G \cap B = \emptyset$ olacak biçimde bir $G \in \tau_{(e')^s}$ vardır ve dolayısıyla, $G \subseteq \{0\}$ dır. Ancak, Örnek 3.2.17 'de görüldüğü gibi, $(e')^s$ 'nün "0" noktasındaki simetrizasyon topolojisi, sonlu tümleyenler topoloji idi. Bu durumda, $G = \{0\} \in \tau_{(e')^s}$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $B = A \setminus \{0\}$ altkümesi A 'da $\tau_{(e')^s}$-yoğun olur.

Aşağıda, antisimetrik olup, simetrik bağlantılı olmayan bir T_0-metrikimsi uzayın, simetrik bağlantılı bir tek-nokta genişlemeye sahip olduğu, üstelik, uzayın, genişlemesinde simetrizasyon topolojisine göre yoğun olduğunu gösteren bir örneği inceleyeceğiz:

4.1.9. Örnek . $X = [0, \infty)$ üzerinde $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; y \leq x \\ x + y & ; y > x \end{cases}$$

fonksiyonu ile oluşturulan (X, d) Yıldız Uzayı simetrik bağlantılıdır (Örnek 3.2.3). Diğer yandan, Örnek 3.2.30 'den, (X, d) 'nin τ_{d^s}-yoğun olan (F, d_F) altuzayı ($F = X \setminus \{0\}$) antisimetrik uzay idi. Böylece, Önerme 3.1.9 gereğince, (F, d_F) simetrik bağlantılı değildir. Burada,

Simetrik bağlantılı olmayan (F, d_F) uzayı, bir simetrik bağlantılı (X, d) tek-nokta genişlemesine sahip olur. Üstelik, F altkümesi X 'de τ_{d^s}-yoğundur.

4.2. T_0-Metrikimsi Uzaylarda Antisimetrik Bağlantılı Genişlemeler

Bu kısımda, simetrik bağlantılı genişleme teorisinin duali olarak antisimetrik bağlantılı genişleme yapısı inşa edilerek, T_0-metrikimsi uzaylar çerçevesinde antisimetrik bağlantılı genişlemeler ile ilgili teoremler ve örnekler incelenecektir.

4.2.1. Tanım . (X, d) T_0-metrikimsi uzay ve (Y, e) antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d) uzayı (Y, e) uzayının bir altuzayına izometrik ise yani, bir

$j : (X, d) \to (Y, e)$ izometrik gömme dönüşümü varsa (Y, e) uzayına, (X, d) 'nin *antisimetrik bağlantılı genişlemesidir* denir.

Bu durumda, $Y \setminus j(X)$ kümesi, Y 'nin *kalanı* olarak adlandırılır.

Tanımdan aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz:

4.2.2. Önerme . *(Y, e) T_0-metrikimsi uzayı, (X, d) T_0-metrikimsi uzayının bir antisimetrik bağlantılı genişlemesi ise (Y, e^{-1}) T_0-metrikimsi uzayı da, (X, d^{-1}) T_0-metrikimsi uzayının antisimetrik bağlantılı genişlemesi olur.*

Kanıt. Önerme 4.1.2 'nin kanıtına benzer biçimde, dual olarak görülebilir. □

4.2.3. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve her $y \in X$ için $d(x_0, y) - d(y, x_0) \neq r$ olacak biçimde, $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda, (X, d) uzayı antisimetrik bağlantılı bir (Y, e) tek-nokta genişlemesine sahiptir. Yani, (X, d) uzayı, tek-nokta kalanlı antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. $\infty \notin X$ olmak üzere $Y = X \cup \{\infty\}$ kümesini kuralım. Şimdi, X üzerinde d T_0-metrikimsisi yardımıyla Y üzerinde bir e fonksiyonunu, her $x \in X$ için

$r > 0$ ise $e(\infty, x) = d(x_0, x)$ ve $e(x, \infty) = d(x, x_0) + r$,

$r < 0$ ise $e(\infty, x) = d(x_0, x) - r$ ve $e(x, \infty) = d(x, x_0)$ ve

$e(\infty, \infty) = 0$

biçiminde tanımlayalım. Açıkça, $e(x, x) = 0$ ve $e(x, y) = e(y, x) = 0 \iff x = y$ dır. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını görelim: Her $x, y \in X$ için

$$e(\infty, x) - e(\infty, y) = d(x_0, x) - d(x_0, y) \leq d(y, x) = e(y, x)$$

$$e(x, \infty) - e(y, \infty) = d(x, x_0) - d(y, x_0) \leq d(x, y) = e(x, y)$$

$$e(x, y) = d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq e(x, \infty) + e(\infty, y)$$

olduğundan, e bir T_0-metrikimsidir. Şimdi, (Y, e) 'nin antisimetrik bağlantılı olduğunu görmek için ∞ 'un antisimetrik nokta olduğunu kanıtlayalım: $x \in X$ olsun.

(1) $r > 0$ ise $e(x, \infty) = d(x, x_0) + r = d(x_0, x) = e(\infty, x)$ veya

(2) $r < 0$ ise $e(\infty, x) = d(x_0, x) - r = d(x, x_0) = e(x, \infty)$

olduğunu varsayalım. İki durumda da, $d(x_0, x) - d(x, x_0) = r$ olur ki, bu çelişkidir. Yani, ∞ antisimetrik nokta ve Önerme 3.2.18 'den, (Y, e) uzayı antisimetrik bağlantılıdır. □

4.2.4. Sonuç . *Her metrik uzay, antisimetrik bağlantılı bir tek-nokta genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. (X, d) metrik uzay olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için $d(x, y) - d(y, x) = 0$ dır. Buradan, d, Teorem 4.2.3 'ün koşullarını sağlar ve (X, d) uzayı, antisimetrik bağlantılı bir tek-nokta genişlemeye sahip olur. □

Şimdi, bu aşamada

"Her T_0-metrikimsi uzay, antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahip midir?"

sorusu doğal biçimde ortaya çıkar. Bu soru çerçevesinde, antisimetrik bağlantılı genişlemeler için özel olarak yeni bir kavram tanımlayıp, bu kavram sayesinde önemli sonuçlar elde edeceğiz:

4.2.5. Tanım . (X, d) T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer $\sup\limits_{x \in X} d(x, x_0) < \infty$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ varsa, (X, d) uzayına *sınırlı yarıçapa sahiptir* denir. Burada, x_0, (X, d) uzayının *taban noktası* olarak adlandırılacaktır.

Dikkat edilirse, "sınırlı yarıçaplı" kavramı "sınırlı" kavramının genelleştirilmiş halidir. Yani, sınırlı uzaylar sınırlı yarıçapa sahiptirler. Ayrıca, yukarıdaki tanımda üçgen eşitsizliği uygulandığında, herhangi bir $y \in X$ için $\sup\limits_{a \in X} d(a, y) \leq \sup\limits_{a \in X} d(a, x_0) + d(x_0, y)$ sağlandığından, x_0 yerine y yazabiliriz.

Aşağıdaki örnek yardımıyla "sınırlı yarıçaplı" ve "sınırlı" kavramları arasındaki farkı görebiliriz:

4.2.6. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde $u(x, y) = max\{x - y, 0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{R}, u)$ standart T_0-metrikimsi uzayının fonksiyonunu, $[0, \infty)$ kümesi üzerine kısıtladığımızda elde edilen $([0, \infty), u_{[0,\infty)})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Açıkça, $([0, \infty), u)$ ve $([0, \infty), u^{-1})$ uzayları sınırlı değildir. Buna rağmen, $([0, \infty), u^{-1})$ uzayı sınırlı yarıçapa sahiptir. Gerçekten, her $x \in [0, \infty)$ için $u(0, x) = u^{-1}(x, 0) = 0$ olduğundan, $\sup\limits_{x \in [0,\infty)} u^{-1}(x, 0) < \infty$ dır. Burada, $\sup\limits_{x \in [0,\infty)} u(x, 0) = \infty$ olduğundan, $([0, \infty), u)$ uzayı sınırlı yarıçapa sahip değildir.

4.2.7. Önerme . *(X, d) T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer (X, d) ve (X, d^{-1}) uzayları sınırlı yarıçapa sahip ise (X, d) sınırlı uzay olur.*

Kanıt. x_0, (X,d) uzayının taban noktası ve y_0, (X,d^{-1}) uzayının taban noktası olsun. Şimdi, $x,y \in X$ için üçgen eşitsizliğinden, $d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y)$ ve dolayısıyla, $d(x,y) \leq \sup_{x\in X} d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + \sup_{y\in X} d(y_0,y) = \sup_{x\in X} d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + \sup_{y\in X} d^{-1}(y,y_0)$ olur, dolayısıyla (X,d) ve (X,d^{-1}) uzaylarının sınırlı yarıçapa sahip olmaları gerçeğinden, $d(x,y) < \infty$ elde edilir. Böylece, (X,d) sınırlıdır. □

4.2.8. Teorem . *(X,d) T_0-metrikimsi uzayı, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük elemana sahip olmasın. Bu durumda, ∞ elemanı $\leq_e$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre (Y,e) uzayının en büyük elemanı olacak biçimde (X,d) uzayı bir antisimetrik bağlantılı (Y,e) tek-nokta genişlemesine sahiptir ancak ve ancak (X,d) sınırlı yarıçapa sahiptir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $Y = X \cup \{\infty\}$ ve ∞ elemanı, $\leq_e$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük eleman olmak üzere (Y,e) uzayı (X,d) 'nin antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemesi olsun. Şimdi, $x,y \in X$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden $d(x,y) = e(x,y) \leq e(x,\infty) + e(\infty,y)$ olur. Ayrıca, ∞ elemanı, $\leq_e$ sıralamasına göre (Y,e) uzayının en büyük elemanı olduğundan, $e(x,\infty) = 0$ ve dolayısıyla, $d(x,y) \leq e(\infty,y)$ dir. Böylece, $y \in X$ olmak üzere, $\sup_{x\in X} d(x,y) \leq e(\infty,y)$ olur yani, (X,d) sınırlı yarıçapa sahiptir.
$(\Leftarrow)$ (X,d) sınırlı yarıçapa sahip olsun. $Y = X \cup \{\infty\}$ üzerinde, e fonksiyonunu, $x \in Y$ ise $e(x,\infty) = 0$ ve $x \in X$ ise $e(\infty,x) = \sup_{a\in X} d(a,x)$ biçiminde tanımlayalım. Şimdi, e 'nin üçgen eşitsizliğini sağladığını görelim:

(1) $x,y \in X$ olsun. Açıkça, $e(x,\infty) - e(y,\infty) = 0 - 0 = 0 \leq d(x,y) = e(x,y)$ dır. Buradan, $e(x,\infty) \leq e(x,y) + e(y,\infty)$ olur.

(2) d, üçgen eşitsizliğini sağladığından, her $a \in X$ için $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x)$ ve dolayısıyla $\sup_{a\in X} d(a,x) \leq \sup_{a\in X} d(a,y) + d(y,x)$ dır. Bu durumda, $e(y,x) = d(y,x)$ olduğundan, $e(\infty,x) \leq e(\infty,y) + e(y,x)$ dir.

(3) Her $x,y \in X$ için açıkça, $d(x,y) \leq \sup_{a\in X} d(a,y)$ dır. Şimdi, $e(x,y) = d(x,y)$, $e(x,\infty) = 0$ ve $e(\infty,y) = \sup_{a\in X} d(a,y)$ olduğundan, $e(x,y) \leq e(x,\infty) + e(\infty,y)$ elde edilir.

Böylece, diğer koşulları da sağlayacağı kolayca görülebileceğinden, e, Y üzerinde bir T_0-metrikimsi olur. Şimdi, $x \in X$ için $e(x,\infty) = e(\infty,x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\sup\limits_{a \in X} d(a, x) = 0$ ve dolayısıyla,

$$x \leq_d y \Longleftrightarrow d(x, y) = 0$$

tanımından, x noktası, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre (X, d) uzayının en büyük elemanı olur. Fakat, bu durum (X, d) uzayının en büyük elemana sahip olmaması ile çelişir ve buradan, her $x \in X$ için $e(x, \infty) \neq e(\infty, x)$ dır. Böylece, ∞ antisimetrik bir nokta ve Önerme 3.2.18 gereği, (Y, e) antisimetrik bağlantılı bir uzay olur. O halde, (X, d) uzayı antisimetrik bağlantılı (Y, e) tek-nokta genişlemesine sahiptir. □

4.2.9. Teorem . *(X, d) T_0-metrikimsi uzay olsun. $a \in X$ noktası, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük ya da en küçük eleman olursa, a antisimetrik noktadır.*

Kanıt. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun.

(1) $a \in X$ noktası, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük eleman olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $x \leq_d a$ ve $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralaması tanımından $d(x, a) = 0$ olur. Şimdi, a noktasının antisimetrik olduğunu görelim: Tersine, a 'nın antisimetrik nokta olmadığı kabul edilirse, $d(a, b) = d(b, a)$ olacak biçimde bir $a \neq b \in X$ vardır. Diğer yandan, her $x \in X$ için $d(x, a) = 0$ dır. Şimdi, x yerine b yazıldığında, $d(a, b) = d(b, a) = 0$ ve T_0-metrikimsi tanımından $a = b$ elde edilir ki, bu çelişkidir.

(2) $a \in X$ noktası, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en küçük eleman olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $a \leq_d x$ ve $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralaması tanımından $d(a, x) = 0$ olur. Şimdi, a noktasının antisimetrik olduğunu görelim: Tersine, a 'nın antisimetrik nokta olmadığı kabul edilirse, $d(a, b) = d(b, a)$ olacak biçimde bir $a \neq b \in X$ vardır. Diğer yandan, her $x \in X$ için $d(a, x) = 0$ dır. Şimdi, x yerine b yazıldığında, $d(a, b) = d(b, a) = 0$ ve T_0-metrikimsi tanımından $a = b$ elde edilir ki, bu çelişkidir.

Böylece, a antisimetrik nokta olur. □

Teorem 4.2.9 'un sonucu olarak; bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayına, $\leq_d$ özelleştirme kısmi sıralamasına göre en büyük ya da en küçük elemanı ekleyerek, (X, d) 'nin bir antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemesini elde edebiliriz.

4.2.10. Sonuç . *(X, d), $x_0 \in X$ taban noktası ile sınırlı yarıçaplı bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$y \mapsto d(x_0, y) - d(y, x_0)$$

dönüşümü alttan sınırlıdır.

Kanıt. (X, d), $x_0 \in X$ taban noktası ile sınırlı yarıçaplı bir T_0-metrikimsi uzay ise bir b pozitif gerçel sayısı vardır öyle ki, her $y \in X$ için $\sup_{y \in X} d(y, x_0) \leq b$ dir. Bu durumda, her $y \in X$ için $d(x_0, y) - d(y, x_0) \geq -d(y, x_0) \geq -b$ olur. Yani, $d(x_0, y) - d(y, x_0)$ değeri $-b$ sayısı ile alttan sınırlıdır. □

Diğer bir sonuç olarak, aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

4.2.11. Sonuç . *(X, d), $x_0 \in X$ taban noktası ile sınırlı yarıçaplı bir T_0-metrikimsi uzay olsun. O halde, (X, d), bir antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. Sonuç 4.2.10 ve Teorem 4.2.3 'den açıktır. □

Sonuç 4.2.11 'i sınırlı uzaylar üzerinde uyguladığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

4.2.12. Sonuç . *Her sınırlı T_0-metrikimsi uzay, bir antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. Sınırlı T_0-metrikimsi uzaylar sınırlı yarıçaplıdır. Böylece, Sonuç 4.2.11 'den istenilen elde edilir. □

Sonuç 4.2.4 'de görüldüğü gibi, bazı sınırlı olmayan uzaylar da antisimetrik bağlantılı tek-nokta genişlemeye sahip olabilirler.

Şimdi, Teorem 4.1.6 'ya benzer biçimde aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

4.2.13. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, (X, d) uzayı, sayılabilir antisimetrik T_0-metrikimsi uzay kalanlı bir antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahiptir.*

Kanıt. $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde her $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$e((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = d(x_1, y_1) \vee (x_2 - y_2) \vee (x_3 - y_3)$$

olacak biçimde e fonksiyonunu tanımlayalım. d T_0-metrikimsi olduğundan, e 'nin $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir T_0-metrikimsi olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi, $x_0 \in X$ alalım. Açıkça, $K_{d^s}(x_0, n) = \{y \in X : \ d^s(x_0, y) \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ için $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{d^s}(x_0, n)$ dır.

Diğer yandan, $M = \{(x_0, 2n, -3n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $Y = \{(x, 0, 0) : x \in X\} \cup M$ kümesini tanımlayalım. Burada, (M, e_M), (Y, e) 'nin antisimetrik altuzayıdır. Gerçekten, $(x_0, 2n, -3n) \neq (x_0, 2k, -3k)$ olmak üzere her $(x_0, 2n, -3n), (x_0, 2k, -3k) \in M$ için $n \neq k$ olur, şimdi, $n > k$ ise

$$e((x_0, 2n, -3n), (x_0, 2k, -3k)) = d(x_0, x_0) \vee (2n - 2k) \vee (-3n + 3k) = 2(n - k),$$

$$e((x_0, 2k, -3k), (x_0, 2n, -3n)) = d(x_0, x_0) \vee (2k - 2n) \vee (-3k + 3n) = 3(n - k),$$

ve $k > n$ ise

$$e((x_0, 2n, -3n), (x_0, 2k, -3k)) = d(x_0, x_0) \vee (2n - 2k) \vee (-3n + 3k) = 3(k - n),$$

$$e((x_0, 2k, -3k), (x_0, 2n, -3n)) = d(x_0, x_0) \vee (2k - 2n) \vee (-3k + 3n) = 2(k - n)$$

dır. Şimdi, $x \in X$ için $((x, 0, 0), (x_0, 2n, -3n))$ çiftinin (Y, e) üzerinde antisimetrik çift olduğunu görelim: Bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in K_{d^s}(x_0, n)$ dır. Bu n için $d(x, x_0) \leq d^s(x, x_0) \leq n$ olduğundan,

$$e((x, 0, 0), (x_0, 2n, -3n)) = d(x, x_0) \vee (0 - 2n) \vee (0 + 3n) = 3n$$

ve benzer biçimde, $d(x_0, x) \leq d^s(x_0, x) \leq n$ olduğundan,

$$e((x_0, 2n, -3n), (x, 0, 0)) = d(x_0, x) \vee (2n - 0) \vee (-3n - 0) = 2n$$

dır. Sonuç olarak, $((x, 0, 0), (x_0, 2n, -3n))$ çifti (Y, e) üzerinde antisimetrik çifttir. Şimdi, $X' = \{(x, 0, 0) : x \in X\}$ olmak üzere, e T_0-metrikimsiyi X' üzerine kısıtladığımızda oluşan $(X', e_{X'})$ uzayı (X, d) uzayı ile izometrik olur. Sonuç olarak, X' uzayındaki her nokta, (M, e_M) antisimetrik uzayındaki bir nokta ile antisimetrik bağlantılı olduğundan, (Y, e) uzayı $(X', e_{X'})$ 'nin ve dolayısıyla (X, d) uzayının antisimetrik bağlantılı bir genişlemesidir. Üstelik, M sayılabilir olduğundan istenilen sağlanır. $\square$

Sonuç 3.2.29 gereğince, antisimetrik bağlantılı bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayın τ_{d^s}-yoğun altuzayı da antisimetrik bağlantılıdır. Burada, τ_{d^s}-yoğunluk koşulunun gerekli olduğunu aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

4.2.14. Örnek . $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $d = d_{\|.|}$ olmak üzere, $\|(x_1, x_2)| = x_1 \vee x_2 \vee 0$ asimetrik normundan üretilen $(\mathbb{R}^2, d)$ T_0-metrikimsi uzayının antisimetrik bağlantılı olduğunu ve $C = C_d((0,0)) = \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere, (C, d_c) 'nin metrik uzay olduğunu Örnek 3.2.27 'de görmüştük. Ayrıca, Önerme 3.2.13 gereği, (C, d_c) antisimetrik bağlantılı uzay değildir.

Diğer yandan, $\mathbb{R}^2$ üzerinde τ_{d^s} simetrizasyon topolojisi, Öklid topolojisidir (Örnek 2.3.8) ve açıkça, $C_d((0,0)) = \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ doğrusu, $\mathbb{R}^2$ 'de τ_{d^s}-yoğun değildir.

Yukarıda, antisimetrik bağlantılı olmayan bir (X, d) uzayının, içerisinde τ_{e^s}-yoğun olmadığı antisimetrik bağlantılı olan bir (Y, e) üstuzaya sahip olabileceğini gösteren bir örnek incelenmiştir.

5. YEREL SİMETRİK BAĞLANTILILIK VE YEREL ANTİSİMETRİK BAĞLANTILILIK

Bir T_0-metrikimsi uzayın simetrisizlik derecesine yeni ve farklı yaklaşımlar geliştirmeye bu bölümde de devam edilerek, simetrik bağlantılılık ve antisimetrik bağlantılılık kavramlarının yerel karşılıkları inşa edilecektir. Simetrisizlik teorisine topolojik bir bakış açısıyla farklı yaklaşımlar sağlamak için simetrik ve antisimetrik bağlantılılığın, simetrizasyon topolojisine göre yerelleştirilmiş durumları incelenecektir.

5.1. Yerel Simetrik Bağlantılı T_0-Metrikimsi Uzaylar

Bu kısımda, *yerel simetrik bağlantılılık* tanımı verilerek, bu tanım ile ilgili örnekler, teoremler ve önemli sonuçlar incelenecektir. Burada sunulacak olan tüm çalışmalar [6] makalesi olarak yayınlanmıştır.

5.1.1. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Her $x \in X$ için $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ ise (X, d) uzayına *yerel simetrik bağlantılıdır* denir.

5.1.2. Örnek . $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\|(x_1, x_2)| = x_1 \vee x_2 \vee 0$ asimetrik normundan üretilen $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Bu uzayda $\tau_{d^s_{\|.|}}$ simetrizasyon topolojisi Öklid topolojidir. Ayrıca, Örnek 3.2.27 'de kanıtlandığı gibi, her $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ için $Z_{d_{\|.|}}((h_1, h_2)) = C_{d_{\|.|}}((h_1, h_2)) = \{(x + h_1, -x + h_2) : x \in \mathbb{R}\}$ dır. O halde, $(0, 0)$ noktasının simetri bileşeni olan $C_{d_{\|.|}}((0, 0)) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ doğrusu $\mathbb{R}^2$ 'de $\tau_{d^s_{\|.|}}$-açık olmadığından, $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ uzayı yerel simetrik bağlantılı değildir.

5.1.3. Önerme . *Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı yerel simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ (X, d^{-1}) T_0-metrikimsi uzayı yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $\tau_{d^s} = \tau_{(d^{-1})^s}$ olduğundan, istenilen açıkça elde edilir. □

5.1.4. Teorem . *Simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay, yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. Simetrik bağlantılılık tanımına göre, her $x \in X$ için $C_d(x) = X$ dir ve $X \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir. Böylece, (X, d) yerel simetrik bağlantılı uzay olur. □

5.1.5. Örnek . $X = [0, \infty)$ üzerinde

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; y \leq x \\ x + y & ; y > x \end{cases}$$

fonksiyonu ile elde edilen (X, d) Yıldız Uzayını ele alalım. Örnek 3.2.3 'de bu uzayın simetrik bağlantılı olduğu görüldü. Şimdi, Teorem 5.1.4 gereği, (X, d) Yıldız Uzayı yerel simetrik bağlantılı olur.

Teorem 5.1.4 'ün tersinin her zaman doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

5.1.6. Örnek . $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde d T_0-metrikimsiyi; $d(1, 3) = 8$, $d(3, 1) = 6$, $d(1, 2) = 9$, $d(2, 1) = 7$ ve $d(2, 3) = 1 = d(3, 2)$ biçiminde yani, $d(i, j) = d_{ij}$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi olarak tanımlayalım. Buna göre, d, T_0-metrikimsi koşullarını sağlar. Özellikle üçgen eşitsizliği koşuluna bakılırsa,

$d(1, 2) = 9 \leq 8 + 1 = d(1, 3) + d(3, 2)$, $d(1, 3) = 8 \leq 9 + 1 = d(1, 2) + d(2, 3)$

$d(2, 3) = 1 \leq 7 + 8 = d(2, 1) + d(1, 3)$, $d(3, 1) = 6 \leq 1 + 7 = d(3, 2) + d(2, 1)$

$d(2, 1) = 7 \leq 1 + 6 = d(2, 3) + d(3, 1)$, $d(3, 2) = 1 \leq 6 + 9 = d(3, 1) + d(1, 2)$

elde edilir. Açıkça, (X, d) simetrik bağlantılı uzay değildir. Çünkü örneğin 1 'den 2 'ye simetrik yol yoktur. Ayrıca, (X, d^s) metrik uzay olduğundan T_2 ve dolayısıyla T_1 uzaydır. Sonlu küme üzerinde T_1 olan tek topoloji ayrık topoloji olduğundan, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği τ_{d^s} (simetrizasyon) topolojisi, ayrık topolojidir. Böylece, (X, d) yerel simetrik bağlantılıdır.

Şimdi, Önerme 3.1.8 ve Teorem 5.1.4 'den aşağıdaki sonucu elde edebiliriz:

5.1.7. Sonuç . *Metrik uzaylar yerel simetrik bağlantılıdır.*

Sonuç 5.1.7 'nin tersinin her zaman doğru olmayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

5.1.8. Örnek . Örnek 5.1.5 'de gördüğümüz gibi, Yıldız Uzayı yerel simetrik bağlantılıdır. Buna rağmen, metrik uzay değildir. (Örneğin, bu uzayda $d(1,2) = 3 \neq 1 = d(2,1)$ dır.)

Şimdi, Teorem 5.1.4 'ün tersinin ne zaman doğru olacağını incelemek amacıyla, yerel simetrik bağlantılı bir uzayın belirli bir koşul altında simetrik bağlantılı olabileceğini gösteren bir teoremi sunacağız. Bunun için öncelikle aşağıdaki önermeyi görelim:

5.1.9. Önerme . *Bir X kümesi üzerinde $R \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı ve her $x \in X$ için $[x]$, bu bağıntıya göre x 'in denklik sınıfı olsun. Bu durumda, X üzerinde bir τ topolojisi alındığında, her $x \in X$ için, $[x]$, τ-açıktır $\Longrightarrow$ her $x \in X$ için, $[x]$, τ-kapalıdır.*

Kanıt. Her $x \in X$ için $[x]$ τ-açık olsun. Bir $a \in X$ için, $[a]$ 'nın τ-kapalı yani $X \setminus [a]$ 'nın τ-açık olduğunu görelim: Her $y \in X \setminus [a]$ için, $y \notin [a]$ ve denklik bağıntısı özelliğinden, $[y] \cap [a] = \emptyset$ dır. Şimdi, $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ olduğundan, $X \setminus [a] = \bigcup_{a \neq x \in X} [x]$ elde edilir. Her $x \in X$ için $[x]$ τ-açık olduğundan, $\bigcup_{a \neq x \in X} [x]$ kümesi ve dolayısıyla $X \setminus [a]$, τ-açıktır. Buradan, $[a]$, τ-kapalıdır. $\square$

Önerme 5.1.9 'dan *yerel simetrik bağlantılı bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayda, tüm simetri bileşenler τ_{d^s}-kapalıdır.* Böylece,

5.1.10. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda (X, d) yerel simetrik bağlantılı ve (X, τ_{d^s}) bağlantılı uzay ise (X, d) simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) yerel simetrik bağlantılı ve (X, τ_{d^s}) bağlantılı uzay olsun. Şimdi, (X, d) uzayında her $x \in X$ için $X = C_d(x)$ olduğunu gösterelim: Tersine, bir $y \in X$ için, $X \neq C_d(y)$ olsun. (X, d) uzayı yerel simetrik bağlantılı olduğundan, $C_d(y)$, τ_{d^s}-açık ve Önerme 5.1.9 'dan, $C_d(y)$, τ_{d^s}-kapalı ve dolayısıyla, $X \setminus C_d(y)$, τ_{d^s}-açıktır. Diğer yandan, $X = C_d(y) \cup (X \setminus C_d(y))$ olduğundan, X kümesi, iki ayrık, boş kümeden farklı ve τ_{d^s}-açık altkümesinin birleşimi şeklinde yazılabilir ve bu, X uzayının bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde, her $x \in X$ için $X = C_d(x)$ ve (X, d) simetrik bağlantılı uzay olur. $\square$

Örnek 5.1.6 'da sunulan yerel simetrik bağlantılı uzayın simetrizasyon topolojisi özel olarak ayrık idi. Şimdi, bu durumu genelleştirerek aşağıdaki önermeyi sunabiliriz:

5.1.11. Önerme . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer d 'nin simetrizasyon topolojisi τ_{d^s}, ayrık topoloji ise (X, d) yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) T_0-metrikimsi uzay olmak üzere τ_{d^s} ayrık topoloji ise her $x \in X$ için $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir. Yani, (X, d) yerel simetrik bağlantılı uzaydır. □

Önerme 5.1.11 'in tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnek ile görelim:

5.1.12. Örnek. Örnek 5.1.5 'den Yıldız Uzayı yerel simetrik bağlantılıdır. Fakat, Örnek 3.2.3 'de gördüğümüz gibi, bu uzayın simetrizasyon topolojisi ayrık değildir.

Önerme 5.1.11 'den aşağıdaki sonucu elde edebiliriz:

5.1.13. Sonuç. *(a) X sonlu bir küme ve (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ise (X, d) yerel simetrik bağlantılı uzaydır.*
(b) X kümesi üzerinde $\leq$ bir kısmi sıralama ve

$$d_{\leq}(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq y \\ 1 & ; x \nleq y \end{cases}$$

fonksiyonu, $\leq$ kısmi sıralamasının X üzerinde ürettiği doğal T_0-metrikimsi olsun. Bu durumda, $(X, d_{\leq})$ yerel simetrik bağlantılıdır.

Kanıt. (a) (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d^s) metrik uzay olduğundan T_2 ve dolayısıyla T_1 uzaydır. Sonlu küme üzerinde T_1 olan tek topoloji ayrık topoloji olduğundan, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği τ_{d^s} (simetrizasyon) topolojisi, ayrık topolojidir. Böylece, Önerme 5.1.11 'den (X, d) yerel simetrik bağlantılı olur.
(b) $d_{\leq}$ tanımından, $(d_{\leq})^s$ simetrizasyon metriği ayrıktır (Örnek 2.3.2). Dolayısıyla, $\tau_{(d_{\leq})^s}$ ayrık topoloji ve Önerme 5.1.11 'den $(X, d_{\leq})$ yerel simetrik bağlantılı olur. □

5.1.14. Tanım. Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı, τ_{d^s} simetrizasyon topolojisine göre kompakt ise, (X, d) uzayına *ortak-kompakttır* [9] denir.

5.1.15. Önerme. *Bir ortak-kompakt yerel simetrik bağlantılı (X, d) T_0-metrikimsi uzayı, sonlu sayıda simetri bileşene sahiptir.*

Kanıt. (X, d) ortak-kompakt ve yerel simetrik bağlantılı bir T_0-metrikimsi uzay olsun. O halde, her $x \in X$ için $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir. Bu durumda, simetri bileşenler ailesi $\{C_d(x)\}_{x \in X}$, X uzayının bir τ_{d^s}-açık örtüsü olur. Diğer yandan, (X, d) uzayı ortak-kompakt olduğundan, (X, τ_{d^s}) kompakttır ve buradan, $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_d(x_i)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak, X, sonlu sayıda simetri bileşene sahiptir. □

5.1.16. Teorem . *Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı ya antisimetrik bağlantılıdır ya da yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) uzayı antisimetrik bağlantılı olmasın. O halde, Önerme 3.1.20 'den, (X, d) simetrik bağlantılı ve böylece, Teorem 5.1.4 'den yerel simetrik bağlantılıdır. $\Box$

5.1.17. Teorem . *(X, d) yerel simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, her $x \in X$ antisimetrik noktası için $\{x\} \in \tau_{d^s}$ dır. (Yani, her $x \in X$ antisimetrik noktası τ_{d^s}-izole noktadır)*

Kanıt. $x \in X$ antisimetrik nokta olsun. Böylece, Önerme 3.1.14 (a) 'dan, $C_d(x) = \{x\}$ dır. Ayrıca, (X, d) yerel simetrik bağlantılı olduğundan, her $a \in X$ için $C_d(a) \in \tau_{d^s}$ dır. O halde, her $x \in X$ antisimetrik noktası için de $C_d(x) = \{x\} \in \tau_{d^s}$ olur. $\Box$

Yukarıdaki Teoremin tersinin her zaman doğru olamayacağını bir ters örnek ile görelim:

5.1.18. Örnek . Örnek 5.1.2 'den $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ uzayı yerel simetrik bağlantılı değildir. Ayrıca, bu uzay hiç antisimetrik noktaya sahip değildir, çünkü, Örnek 2.3.8 'den, her $h \in \mathbb{R}^2$ noktasının, bir $Z_{d_{\|.|}}(h) = \{(x + h_1, -x + h_2) : x \in \mathbb{R}\}$ simetri kümesi vardır.

Şimdi, Önerme 5.1.11 'in tersinin hangi koşul altında doğru olacağını ifade edelim:

5.1.19. Teorem . *Bir (X, d) antisimetrik T_0-metrikimsi uzayı, yerel simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ τ_{d^s} ayrık topolojidir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ (X, d) antisimetrik ve yerel simetrik bağlantılı uzay olsun. Her $x \in X$ için x antisimetrik noktadır. O halde, Teorem 5.1.17 'den, $\{x\}$ tek nokta kümesi τ_{d^s}-açıktır. Buradan, τ_{d^s} ayrık topolojidir. (x, τ_{d^s}-izole noktadır)
$(\Leftarrow)$ Önerme 5.1.11 'den açıktır. $\Box$

Şimdi, yerel simetrik bağlantılılığın kalıtsal bir özellik olup olmadığı ile ilgili bir örnek incelenecektir. Aşağıda, kendisi yerel simetrik bağlantılı olmamasına rağmen, τ_{d^s}-yoğun ve yerel simetrik bağlantılı olan bir altuzaya sahip uzay örneğini göreceğiz:

5.1.20. Örnek . $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde

$$e'(x, y) = \begin{cases} |x - y| & ; \ x < y \text{ ve } (x, y) \neq (2^{-(n+1)}, 2^{-n}) \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 2|x - y| & ; \ \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

fonksiyonu ile inşa edilen $(A, e^{'})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım: Açıkça, "0" antisimetrik noktadır. Böylece, Önerme 3.1.14 (a) gereğince, $C_{e'}(0) = \{0\}$ dır. Örnek 3.2.17 'den, $\tau_{(e')^s}$ simetrizasyon topolojisi, "0" noktasında sonlu tümleyenler topolojisi ve "0" dışındaki noktalar kümesi $(A \setminus \{0\})$ üzerinde ayrık topolojidir. Burada, $C_{e'}(0) = \{0\}$ sonlu tümleyenler topolojisine göre açık olmadığından, $(A, e^{'})$ yerel simetrik bağlantılı uzay değildir.

Şimdi, Örnek 4.1.8 'de A 'nın $\tau_{(e')^s}$-yoğun altkümesi olduğu kanıtlanan $B = A \setminus \{0\}$ kümesini ele alalım. Burada, B altkümesi üzerindeki $\tau_{(e')^s}$ simetrizasyon topolojisi ayrık topoloji olduğundan, Önerme 5.1.11 gereği, (B, e'_B) uzayı yerel simetrik bağlantılıdır.

Bu aşamada, çarpım T_0-metrikimsi uzaylarda yerel simetrik bağlantılılık ile ilgili bir kaç önerme ve örnek inceleyeceğiz:

5.1.21. Önerme . *(X, d) ve (Y, q) iki T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda $X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde $D((x, y), (a, b)) = d(x, a) \vee q(y, b)$ çarpım T_0-metrikimsi olmak üzere,*

$$D^s((x, y), (a, b)) = d^s(x, a) \vee q^s(y, b)$$

dır.

Kanıt. Her $(x, y), (a, b) \in X \times Y$ için, $D((x, y), (a, b)) = d(x, a) \vee q(y, b)$ olduğundan, $D^{-1}((x, y), (a, b)) = D((a, b), (x, y)) = d(a, x) \vee q(b, y) = d^{-1}(x, a) \vee q^{-1}(y, b)$ dir. Dolayısıyla, $D^s((x, y), (a, b)) = D((x, y), (a, b)) \vee D^{-1}((x, y), (a, b)) = d(x, a) \vee q(y, b) \vee d^{-1}(x, a) \vee q^{-1}(y, b) = d^s(x, a) \vee q^s(y, b))$ elde edilir. □

5.1.22. Önerme . *$X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde, $x \in X$, $y \in Y$ ve $\varepsilon > 0$ için*

$$B_D((x, y), \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon) \times B_q(y, \varepsilon)$$

dır.

Kanıt. $(\subseteq)$ $(a, b) \in B_D((x, y), \varepsilon)$ $(x, a \in X, y, b \in Y)$ alalım. Buradan, $D((x, y), (a, b)) < \varepsilon$ olur. Şimdi, D çarpım T_0-metrikimsi tanımından, $D((x, y), (a, b)) = d(x, a) \vee q(y, b) < \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $d(x, a) < \varepsilon$ ve $q(y, b) < \varepsilon$, dolayısıyla $a \in B_d(x, \varepsilon)$ ve $b \in B_q(y, \varepsilon)$ olur. Yani, $(a, b) \in B_d(x, \varepsilon) \times B_q(y, \varepsilon)$ ve $B_D((x, y), \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \times B_q(y, \varepsilon)$ dır.
$(\supseteq)$ Şimdi, $(a, b) \in B_d(x, \varepsilon) \times B_q(y, \varepsilon)$ $(x, a \in X, y, b \in Y)$ alalım. Buradan, $d(x, a) < \varepsilon$

ve $q(y,b) < \varepsilon$ olur. Şimdi, D çarpım T_0-metrikimsi tanımından, $D((x,y),(a,b)) = d(x,a) \vee q(y,b) < \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $(a,b) \in B_D((x,y),\varepsilon)$ olur. Yani, $B_d(x,\varepsilon) \times B_q(y,\varepsilon) \subseteq B_D((x,y),\varepsilon)$ dır. $\square$

Böylece aşağıdaki eşitlik ortaya çıkar:

5.1.23. Sonuç . *$X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için*

$$B_{D^s}((x,y),\varepsilon) = B_{d^s}(x,\varepsilon) \times B_{q^s}(y,\varepsilon)$$

dır.

5.1.24. Önerme . *(X,d) ve (Y,q) iki T_0-metrikimsi uzay, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda, $C_d(x) \times C_q(y) \subseteq C_D((x,y))$ dır.*

Kanıt. $(a,b) \in X \times Y$ olmak üzere $(a,b) \in C_d(x) \times C_q(y)$ alalım. Buradan, $a \in C_d(x)$ ve $b \in C_q(y)$ dır. $a \in C_d(x)$ olduğundan, (X,d) uzayında a 'dan x 'e bir $P_1(a = x_0, x_1, ..., x = x_n)$ simetrik yolu ve $b \in C_q(y)$ olduğundan, (Y,q) uzayında b 'den y 'ye bir $P_2(b = y_0, y_1, ..., y = y_m)$ simetrik yolu vardır. Bu durumda, her $i = 0,1,...,n-1$ için $d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_i)$ ve her $j = 0,1,...,m-1$ için $q(y_j, y_{j+1}) = q(y_{j+1}, y_j)$ dır. Şimdi, $P((x_0,y_0) = (a,b),(x_1,b),...,(x,b),(x,y_1),(x,y_2),...,(x,y))$ yolunun, $(X \times Y, D)$ çarpım uzayında (a,b) 'den (x,y) 'ye bir simetrik yol olduğunu görelim: Gerçekten, her $i \in \mathbb{N}$ için
$D((x_i,b),(x_{i+1},b)) = d(x_i,x_{i+1}) = d(x_{i+1},x_i) = D((x_{i+1},b),(x_i,b))$ ve
$D((x,y_j),(x,y_{j+1})) = q(y_j,y_{j+1}) = q(y_{j+1},y_j) = D((x,y_{j+1}),(x,y_j))$
dır. Böylece, $P((x_0,y_0) = (a,b),(x_1,b),...,(x,b),(x,y_1),(x,y_2),...,(x,y))$ yolu, $X \times Y$ üzerinde (a,b) 'den (x,y) 'ye bir simetrik yol olur. Buradan, $(a,b) \in C_D((x,y))$ ve dolayısıyla $C_d(x) \times C_q(y) \subseteq C_D((x,y))$ olur. $\square$

Yukarıdaki önermede verilen kapsamanın diğer yönünün her zaman doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

5.1.25. Örnek . $X = \{0,1\}$ ve $u(x,y) = max\{x-y,0\}$ olmak üzere, (X,u) ve (X,u^s) T_0-metrikimsi uzaylarını ele alalım. Açıkça, $C_u(0) = \{0\}$ ve $C_{u^s}(0) = \{0,1\}$ dir. Buradan, $C_u(0) \times C_{u^s}(0) = \{(0,0),(0,1)\}$ olur. Ayrıca, $X \times X$ üzerinde $D((x,y),(a,b)) = u(x,a) \vee u^s(y,b)$ çarpım T_0-metrikimsisine göre, $C_D((0,0)) = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)\} = X \times X$ dır. Gerçekten, $P((0,0),(1,1),(1,0),(0,1))$ yolu, $X \times X$ üzerinde tüm noktaları birbirlerine bağlayan simetrik yoldur. O halde, $(X \times X, D)$ simetrik bağlantılı uzaydır, ayrıca, $C_u(0) \times C_{u^s}(0) \subseteq C_D((0,0))$ ve $C_D((0,0)) \nsubseteq C_u(0) \times C_{u^s}(0)$ dır.

5.1.26. Sonuç . *(X, d) ve (Y, q) iki T_0-metrikimsi uzay olmak üzere, $X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde*
(i) $\tau_D = \tau_d \times \tau_q$
(ii) $\tau_{D^s} = \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$.

Kanıt. Burada, (i) ve (ii) 'nin kanıtları benzer biçimde olduğu için sadece (ii) 'nin kanıtı verilecektir:
$(\subseteq)$ $C \in \tau_{D^s}$ alalım. Açıkça, $C = A \times B$ olacak biçimde $A \subset X$ ve $B \subset Y$ vardır. Şimdi, $A \times B \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ olduğunu görmek için $(a, b) \in A \times B$ alalım. $A \times B = C \in \tau_{D^s}$ olduğundan, $B_{D^s}((a, b), \varepsilon) \subseteq A \times B$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi, Sonuç 5.1.23 'den, $B_{D^s}((a, b), \varepsilon) = B_{d^s}(a, \varepsilon) \times B_{q^s}(b, \varepsilon) \subseteq A \times B$ olur. Buradan, $A \times B \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ yani, $\tau_{D^s} \subseteq \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ dır.
$(\supseteq)$ Şimdi, $A \times B \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ alalım ve $A \times B \in \tau_{D^s}$ olduğunu görelim: Gerçekten her $(a, b) \in A \times B$ için, $A \times B \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ olduğundan, $B_{d^s}(a, \varepsilon_1) \times B_{q^s}(b, \varepsilon_2) \subseteq A \times B$ olacak biçimde, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ vardır. Şimdi, $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ için, Sonuç 5.1.23 'ü kullanarak, $B_{d^s}(a, \varepsilon) \times B_{q^s}(b, \varepsilon) = B_{D^s}((a, b), \varepsilon) \subseteq A \times B$ olur. Buradan, $A \times B \in \tau_{D^s}$ yani, $\tau_{d^s} \times \tau_{q^s \subseteq} \tau_{D^s}$ dır. □

5.1.27. Teorem . *(X, d) ve (Y, q) yerel simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzaylar olsun. O halde, $(X \times Y, D)$ çarpım uzayı da yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) ve (Y, q) iki yerel simetrik bağlantılı uzay olsun. $(X \times Y, D)$ uzayının yerel simetrik bağlantılı olduğunu yani, her $(x, y) \in X \times Y$ için $C_D((x, y)) \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ olduğunu görelim: Şimdi, (X, d) ve (Y, q) yerel simetrik bağlantılı uzaylar olduklarından, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ ve $C_q(y) \in \tau_{q^s}$ dır. O halde, çarpım topolojisi için taban tanımından, $C_d(x) \times C_q(y)$, $\tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ çarpım topolojisinin bir taban elemanıdır. Ayrıca, Önerme 5.1.24 'den, $C_d(a) \times C_q(b) \subseteq C_D((a, b))$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla her $(a, b) \in C_D((x, y))$ için $(a, b) \in C_d(a) \times C_q(b) \subseteq C_D((a, b)) = C_D((x, y))$ olacak biçimde $C_d(a) \times C_q(b)$ taban elemanı bulunduğundan, $C_D((x, y)) \in \tau_{d^s} \times \tau_{q^s}$ olur. Böylece, Sonuç 5.1.26 (ii) 'den, $C_D((x, y)) \in \tau_{D^s}$ dır. Yani, $(X \times Y, D)$ uzayı yerel simetrik bağlantılı olur. □

Bu teorem sayesinde, tümevarım aracılığı ile aşağıdaki ifade elde edilir:

5.1.28. Sonuç . *Sonlu sayıda yerel simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzayların çarpımı da yerel simetrik bağlantılı olur.*

Teorem 5.1.27 'nin tersinin her zaman doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görebiliriz: Buna göre; aşağıda, yerel simetrik bağlantılı olmayan iki uzayın çarpımlarının yerel simetrik bağlantılı olabileceğini gösteren bir örneği inceleyelim:

5.1.29. Örnek . Her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\|x| = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee 0$ asimetrik normunda üretilen $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım (Örnek 3.2.16). Bu uzayda, $C_{d_{\|.|}}(0,0,0) = linZ_{d_{\|.|}}(0,0,0) = \mathbb{R}^3$ [18] olduğundan, $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ simetrik bağlantılıdır. Teorem 5.1.4 gereği, yerel simetrik bağlantılı uzay olur. Şimdi, $d(= d_{\|.|})$ T_0-metrikimsisinin duali
$d^{-1}((x,y,z),(a,b,c)) = d((a,b,c),(x,y,z)) = (a-x) \vee (b-y) \vee (z-c) \vee 0$
ve dolayısıyla,
$d^s((x,y,z),(a,b,c)) = d((x,y,z),(a,b,c)) \vee d^{-1}((x,y,z),(a,b,c)) = d((x,y,z),(a,b,c)) \vee d((a,b,c),(x,y,z)) = u(x,a) \vee u(y,b) \vee u(z,c) \vee u(a,x) \vee u(b,y) \vee u(c,z) = (x-a) \vee (y-b) \vee (z-c) \vee 0 \vee (a-x) \vee (b-y) \vee (c-z) \vee 0 = |x-a| \vee |y-b| \vee |z-c| \vee 0 = |x-a| \vee |y-b| \vee |z-c| = max\{u^s(x,a), u^s(y,b), u^s(z,c)\}$
biçimindedir. Şimdi, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği topolojinin taban elemanlarını bulalım.
$B_{d^s}((x,y,z),\varepsilon) = \{(a,b,c) : d^s((x,y,z),(a,b,c))$
$= \{(a,b,c) : max\{|x-a|, |y-b|, |z-c|\} < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \times (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$.

Burada, dikkat edilirse,
$B_{d^s}((x,y,z),\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \times (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$
yuvarını üreten metrik, $q((x,a),(y,b),(z,c)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ metriğidir.

Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3$ üzerinde τ_{d^s} simetrizasyon topolojisi, aslında $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerindeki $\tau_{u^s} \times \tau_{u^s} \times \tau_{u^s}$ çarpım topolojisidir ki bu topoloji $\mathbb{R}^3$ üzerinde Öklid topolojisidir.

Açıkça, $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ uzayı aslında, $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ ve $(\mathbb{R}, u)$ uzaylarının çarpımıdır. Üstelik, Örnek 5.1.2 'den $(\mathbb{R}^2, d_{\|.|})$ *yerel simetrik bağlantılı uzay değildir*. Diğer yandan, $(\mathbb{R}, u)$ antisimetrik uzaydır ve simetrizasyon topolojisi standart topolojidir (Örnek 2.3.1). O halde, Teorem 5.1.19 'dan $(\mathbb{R}, u)$ *yerel simetrik bağlantılı uzay değildir*. Buna rağmen, $(\mathbb{R}^3, d_{\|.|})$ *yerel simetrik bağlantılı uzaydır.*

5.1.30. Önerme . *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay, $A, B \subseteq X$ τ_{d^s}-kapalı iki altküme ve (A, d_A) ve (B, d_B) yerel simetrik bağlantılı altuzaylar olsun. Bu durumda, $(A \cup B, d_{A\cup B})$ altuzayı da yerel simetrik bağlantılı uzaydır.*

Kanıt. $x \in A \cup B$ alalım ve $C_{d_{A\cup B}}(x) \in \tau_{d^s|_{A\cup B}}$ olduğunu görelim: Bunun için $z \in C_{d_{A\cup B}}(x)$ olsun. Burada, bileşen özelliğinden, $C_{d_{A\cup B}}(z) = C_{d_{A\cup B}}(x)$ dır. Şimdi,

(1) $z \in A \cap B$ durumunda, (A, d_A) ve (B, d_B) yerel simetrik bağlantılı olduğundan, $C_{d_A}(z) \in \tau_{d^s|_A}$ ve $C_{d_B}(z) \in \tau_{d^s|_B}$ dir. Şimdi, altuzay topolojisi tanımından, $C_{d_A}(z) = G \cap A$ ve $C_{d_B}(z) = H \cap B$ olacak biçimde $G, H \in \tau_{d^s}$ vardır. Diğer yandan, $C_{d_A}(z) \cup C_{d_B}(z) \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$ olduğundan,
$(A \cap G) \cup (B \cap H) = C_{d_A}(z) \cup C_{d_B}(z) \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$ dir. Burada,
$(A \cap G) \cup (B \cap H) = ((A \cap G) \cup B) \cap ((A \cap G) \cup H)$
$= (A \cup B) \cap (G \cup B) \cap (A \cup H) \cap (G \cup H)$
olduğu açıktır. Diğer yandan,
$G \subseteq G \cup B$ ve $H \subseteq H \cup A$ olduğundan, $G \cap H \subseteq (B \cup G) \cap (A \cup H)$ dır. Buradan,
$(A \cup B) \cap (G \cap H) \subseteq (A \cup B) \cap (B \cup G) \cap (A \cup H)$ olur. Böylece,
$(A \cup B) \cap (G \cap H) \cap (G \cup H) \subseteq (A \cup B) \cap (B \cup G) \cap (A \cup H) \cap (G \cup H)$
elde edilir. $G, H \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $G \cup H \in \tau_{d^s}$ ve $G \cap H \in \tau_{d^s}$ olduğu açıktır.
Şimdi, $V = G \cup H$ ve $U = G \cap H$ diyelim. Bu durumda,
$(A \cup B) \cap U \cap V \subseteq (A \cap G) \cup (B \cap H) \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$
olur. Şimdi, $U \cap V = U' \in \tau_{d^s}$ aldığımızda, $z \in (A \cup B) \cap U' \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$ ve $C_{d_{A\cup B}}(x) = C_{d_{A\cup B}}(z)$ olduğundan, $C_{d_{A\cup B}}(x) \in \tau_{d^s|_{A\cup B}}$ elde edilir.

(2) $z \in A$ ve $z \notin B$ ise $z \in X \setminus B$ olur. $X \setminus B$ τ_{d^s}-açık olduğundan, $z \in U \subset X \setminus B$ olacak biçimde bir $U \in \tau_{d^s}$ vardır ($U \cap B = \emptyset$). Not 3.2.7 gereği, $C_{d_A}(z) \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$ dır. Diğer yandan, (A, d_A) yerel simetrik bağlantılı olduğundan, $C_{d_A}(z) \in \tau_{d^s|_A}$ ve dolayısıyla altuzay topolojisi tanımından, $C_{d_A}(z) = A \cap G$ olacak biçimde bir $G \in \tau_{d^s}$ vardır. Şimdi, $G \cap U = V$ aldığımızda $V \in \tau_{d^s}$ olduğu açıktır. Ayrıca,
$z \in A \cap V \subseteq (A \cup B) \cap V = (A \cap V) \cup (B \cap V)$ dır. Şimdi, $B \cap V = B \cap G \cap U = \emptyset$ olduğundan, $A \cap V = (A \cup B) \cap V$ dir. Böylece, $A \cap V \subseteq A \cap G = C_{d_A}(z) \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z)$ olduğundan, $z \in (A \cup B) \cap V = A \cap V \subseteq A \cap G \subseteq C_{d_{A\cup B}}(z) = C_{d_{A\cup B}}(x)$
elde edilir. Ayrıca, $(A \cup B) \cap V \in \tau_{d^s|_{A\cup B}}$ olduğundan, $C_{d_{A\cup B}}(x) \in \tau_{d^s|_{A\cup B}}$ gerçeği bulunur.

(3) $z \in B$ ve $z \notin A$ durumunun kanıtı, kanıt (2) 'ye benzer biçimde görülür. $\square$

Şimdi, yerel simetrik bağlantılılığın hangi fonksiyonlar altında korunduğunu inceleyelim. Bunun için öncelikle aşağıda verilen notu dikkate alalım:

5.1.31. Not . (X, d) ve (Y, e) iki T_0-metrikimsi uzay ve $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ bir izometri olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için $d(x, y) = e(f(x), f(y))$ ve $d(y, x) = e(f(y), f(x))$ dır. Şimdi, simetrizasyon metriği tanımını da dikkate aldığımızda $d^s(x, y) = d(x, y) \vee d(y, x) = e(f(x), f(y)) \vee e(f(y), f(x)) = e^s(f(x), f(y))$ dır.

5.1.32. Teorem . *(X, d) ve (Y, e) iki T_0-metrikimsi uzay ve $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ bir örten izometri olsun. Bu durumda, (X, d) yerel simetrik bağlantılı uzaydır $\Longleftrightarrow$ (Y, e) yerel simetrik bağlantılı uzaydır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) Her $y \in Y$ için $C_e(y) \in \tau_{e^s}$ olduğunu görelim: Bunun için bir $b \in C_e(y)$ alalım. Simetri bileşen tanımından Y üzerinde b 'den y 'ye simetrik çiftlerden oluşan bir $P(b = y_0, y_1, ..., y_n = y)$ yolu vardır. Örtenlikten, $f(a) = b = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ..., $f(x) = y = y_n$ olacak biçimde $a = x_0, x_1, ..., x = x_n \in X$ vardır. Şimdi, izometri sayesinde

$$d(a, x_1) = e(f(a), f(x_1)) = e(f(x_1), f(a)) = d(x_1, a)$$

$$d(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2)) = e(f(x_2), f(x_1)) = d(x_2, x_1)$$

$$.$$

$$.$$

$$d(x_{n-1}, x) = e(f(x_{n-1}), f(x)) = e(f(x), f(x_{n-1})) = d(x, x_{n-1})$$

dır. Böylece, $P'(a, x_1, ..., x_{n-1}, x)$, X üzerinde a 'dan x 'e bir simetrik yol olur. Yani, $a \in C_d(x)$ ve (X, d) yerel simetrik bağlantılı olduğundan, $a \in C_d(x) \in \tau_{d^s}$ dır. Buradan, $a \in B_{d^s}(a, \varepsilon) \subseteq C_d(x)$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi, $B_{e^s}(b, \varepsilon) \subseteq C_e(y)$ olduğunu görelim:

Tersine, $z \in B_{e^s}(b, \varepsilon)$ ve $z \notin C_e(y)$ olacak biçimde bir $z \in Y$ olduğunu kabul edelim. Böylece, Not 5.1.31 'i kullanarak, $d^s(a, f^{-1}(z)) = e^s(b, z) < \varepsilon$ olur, yani, $f^{-1}(z) \in B_{d^s}(a, \varepsilon) \subseteq C_d(x)$ dır. Ayrıca, $a \in C_d(x)$ olduğundan, açıkça, $C_d(a) = C_d(x)$ dır. Buradan, $f^{-1}(z) \in C_d(a)$ olur ve X üzerinde $f^{-1}(z)$ 'den a 'ya bir $P_1(f^{-1}(z), x_1, ..., x_{n-1}, a)$ simetrik yolu vardır. Yani,

$$d(f^{-1}(z), x_1) = d(x_1, f^{-1}(z))$$

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$$

$$.$$

.

$$d(x_{n-1}, a) = d(a, x_{n-1})$$

olur. Şimdi, P_1 yolu dikkate alındığında, $x_i \neq x_{i+1}$, $(i = 0, ..., n-1)$ olduğundan, f 'nin bire-bir oluşundan $f(x_i) \neq f(x_{i+1})$, $(i = 0, ..., n-1)$ dir. O halde, izometri tanımından

$$e(z, f(x_1)) = d(f^{-1}(z), x_1) = d(x_1, f^{-1}(z)) = e(f(x_1), z)$$

$$e(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = e(f(x_2), f(x_1))$$

.

.

$$e(f(x_{n-1}), f(a)) = d(x_{n-1}, a) = d(a, x_{n-1}) = e(f(a), f(x_{n-1}))$$

dır. Buradan, Y üzerinde z 'den $f(a) = b$ 'ye bir $P_2(z, ..., b)$ simetrik yolu elde edilir. Böylece, oluşturduğunuz yeni $P_3(z, ..., b, ..., y)$ yolu, z 'den y 'ye bir simetrik yol olur. Yani, $z \in C_e(y)$ dır ki, bu bir çelişkidir.

$(\Leftarrow)$ Her $x \in X$ için $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ olduğunu görelim: Bunun için bir $a \in C_d(x)$ alalım. Simetri bileşen tanımından X üzerinde a 'dan x 'e simetrik çiftlerden oluşan bir $P(a = x_0, x_1, ..., x_n = x)$ yolu vardır (her $i = 0, 1, ..., n-1$ için $x_i \neq x_{i+1}$ dir). Bu durumda, $f(a) = b = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ..., $f(x) = y = y_n$ olmak üzere $b, y_1, ..., y \in Y$ dir. Üstelik, f 'nin bire-bir oluşundan $y_i \neq y_{i+1}$ $(i = 0, ..., n-1)$ olur. Şimdi, izometri sayesinde

$$e(b, y_1) = d(a, x_1) = d(x_1, a) = e(y_1, b)$$

$$e(y_1, y_2) = d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = e(y_2, y_1)$$

.

.

$$e(y_{n-1}, y) = d(x_{n-1}, x) = d(x, x_{n-1}) = e(y, y_{n-1})$$

olduğundan, $P'(b, y_1, ..., y_{n-1}, y)$ yolunun Y üzerinde b 'den y 'ye bir simetrik yol olduğu görülür. Yani, $b \in C_e(y)$ ve (Y, e) yerel simetrik bağlantılı olduğundan, $b \in C_e(y) \in \tau_{e^s}$ dır. Buradan, $y \in B_{e^s}(b, \varepsilon) \subseteq C_e(y)$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi, $B_{d^s}(a, \varepsilon) \subseteq C_d(x)$ olduğunu görelim:

Tersine, $z \in B_{d^s}(a, \varepsilon)$ ve $z \notin C_d(x)$ olacak biçimde bir $z \in X$ olduğunu kabul edelim. Böylece, Not 5.1.31 'i kullanarak, $e^s(b, f(z)) = d^s(a, z) < \varepsilon$ olur, yani, $f(z) \in$

$B_{e^s}(b,\varepsilon) \subseteq C_e(y)$ dır. Ayrıca, $b \in C_e(y)$ olduğundan, açıkça, $C_e(b) = C_e(y)$ dır. Buradan, $f(z) \in C_e(b)$ olur ve böylece Y üzerinde $f(z)$ 'den b 'ye bir $P_1(f(z), y_1, ..., y_{n-1}, b)$ simetrik yolu vardır. Yani, $y_0 = f(z)$ ve $y_n = b$ olmak üzere $y_i \neq y_{i+1}$, $(i = 0, ..., n-1)$ ve

$$e(f(z), y_1) = e(y_1, f(z))$$

$$e(y_1, y_2) = e(y_2, y_1)$$

$$.$$

$$.$$

$$e(y_{n-1}, b) = e(b, y_{n-1})$$

dır. Şimdi, izometri tanımından

$$d(z, x_1) = e(f(z), y_1) = e(y_1, f(z)) = d(x_1, z)$$

$$d(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2)) = e(f(x_2), f(x_1)) = d(x_2, x_1)$$

$$.$$

$$.$$

$$d(x_{n-1}, a) = e(y_{n-1}, b) = e(b, y_{n-1}) = d(a, x_{n-1})$$

elde edilir. Üstelik, f 'nin bire-bir oluşundan da, $x_0 = z$ ve $x_n = a$ olmak üzere $x_i \neq x_{i+1}$, $(i = 0, ..., n-1)$ olacağından X üzerinde simetrik bir $P_2(z, ..., a)$ yolu elde edilir. Ayrıca, $a \in C_d(x)$ olduğundan, a 'dan x 'e bir simetrik yol vardır. Böylece, oluşturduğumuz yeni $P_3(z, ..., a, ..., x)$ yolu, z 'den x 'e bir simetrik yol olur. Yani, $z \in C_d(x)$ dır ki, bu bir çelişkidir. □

Aşağıdaki örnek, *simetrik bağlantılı olmamasına rağmen yerel simetrik bağlantılı olan, üstelik, simetrizasyon topolojisi ayrık olmayan bir uzay* örneğidir ve Prof. Dr. H.-P. A. Künzi tarafından önerilmiştir:

5.1.33. Örnek. $X = [0,1)$ üzerinde kısıtlanmış $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y & ; y \leq x \\ x + y & ; y > x \end{cases}$$

Yıldız fonksiyonu ile kurulan (X, d) T_0-metrikimsi uzayını ve

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq y \\ 1 & ; x > y \end{cases}$$

olmak üzere $Y = \{0,1\}$ üzerinde $2q$ fonksiyonu ile inşa edilen $(Y, 2q)$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Burada, $D((x,y),(a,b)) = d(x,a) \vee 2q(y,b)$ olmak üzere, $(X \times Y, D)$ T_0-metrikimsi çarpım uzayı simetrik bağlantılı değildir. Gerçekten, $x, y \in X$, $x \neq 0$ ve $x < y$ olmak üzere,

$$\begin{cases} D((0,0),(0,1)) = d(0,0) \vee 2q(0,1) = 0, D((0,1),(0,0)) = d(0,0) \vee 2q(1,0) = 2 \\ D((x,0),(0,0)) = d(x,0) \vee 2q(0,0) = x, D((0,0),(x,0)) = d(0,x) \vee 2q(0,0) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x,0),(0,1)) = d(x,0) \vee 2q(0,1) = x, D((0,1),(x,0)) = d(0,x) \vee 2q(1,0) = 2 \\ D((x,1),(0,0)) = d(x,0) \vee 2q(1,0) = 2, D((0,0),(x,1)) = d(0,x) \vee 2q(0,1) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x,1),(0,1)) = d(x,0) \vee 2q(1,1) = x, D((0,1),(x,1)) = d(0,x) \vee 2q(1,1) = x \\ D((x,0),(y,0)) = d(x,y) \vee 2q(0,0) = x+y, D((y,0),(x,0)) = d(y,x) \vee 2q(0,0) = y-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x,1),(y,1)) = d(x,y) \vee 2q(1,1) = x+y, D((y,1),(x,1)) = d(y,x) \vee 2q(1,1) = y-x \\ D((x,1),(y,0)) = d(x,y) \vee 2q(1,0) = 2, D((y,0),(x,1)) = d(y,x) \vee 2q(0,1) = y-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x,0),(y,1)) = d(x,y) \vee 2q(0,1) = x+y \\ D((y,1),(x,0)) = d(y,x) \vee 2q(1,0) = 2 \end{cases}$$

dır. Simetrik çiftleri dikkate aldığımızda, $P_1((x,0),(0,0),(y,0))$ ve $P_2((x,1),(0,1),(y,1))$ iki tane farklı simetrik yoldur. Böylece, $C_D((0,0)) = X \times \{0\}$ ve $C_D((0,1)) = X \times \{1\}$ dır. Kısaca, $X \times Y = C_D((0,0)) \cup C_D((0,1))$ olduğundan, $(X \times Y, D)$ simetrik bağlantılı uzay değildir. (Örneğin, $(0,0)$ ile $(y,1)$ noktaları simetrik bağlantılı değiller).

Diğer yandan, $\tau_{D^s} = \tau_{d^s} \times \tau_{2q^s}$ simetrizasyon topolojisinin ayrık topoloji olmaması gerçeği Örnek 3.2.3 yardımı ile açıkça görülür. Şimdi, $(X \times Y, D)$ uzayının yerel simetrik bağlantılı olup olmadığını inceleyelim: $0 \neq x \in X$ olmak üzere,

$C_D((0,0)) = C_D((x,0)) = \{(0,0),(x,0) : x \in X\} = X \times \{0\}$

$C_D((0,1)) = C_D((x,1)) = \{(0,1),(x,1) : x \in X\} = X \times \{1\}$

gerçeğinden, $(X \times Y, D)$ uzayı yerel simetrik bağlantılı olur. Çünkü $X \in \tau_{(d^s)_X} = (\tau_{d^s})_X$ ve $\tau_{((2q)^s)_Y} = (\tau_{(2q)^s})_Y = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, Y\}$ olduğundan $X \times Y$ üzerindeki tüm noktaların simetri bileşenleri $\tau_{D^s}(= \tau_{d^s} \times \tau_{(2q)^s}$)-açıktır.

5.2. Yerel Antisimetrik Bağlantılı T_0-Metrikimsi Uzaylar

Bu kısımda, T_0-metrikimsi uzaylar ortamında yerel simetrik bağlantılılık teorisinin dual karşılığı, ve aynı zamanda antisimetrik bağlantılılığın yerelleştirmesi olan *yerel antisimetrik bağlantılılık* teorisi inşa edilecek ve bu çerçevede elde edilen çeşitli sonuçlar ile (ters) örneklere değinilecektir.

5.2.1. Tanım . (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ ise (X, d) uzayına *yerel antisimetrik bağlantılıdır* denir.

5.2.2. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde $x \geq y$ için $s(x, y) = min\{x - y, 1\}$ ve $x < y$ için $s(x, y) = 1$ biçiminde tanımlı, $(\mathbb{R}, s)$ **Sorgenfrey 2** T_0-metrikimsi uzayında, τ_{s^s} (simetrizasyon) topolojisi ayrık topolojidir (Örnek 2.3.6). Böylece, her $x \in \mathbb{R}$ için $T_s(x)$ bileşenleri τ_{s^s}-açık olduğundan, $(\mathbb{R}, s)$ **Sorgenfrey 2** uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır.

5.2.3. Örnek . $X = [0, \infty)$ üzerinde $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; y \leq x \\ x + y & ; y > x \end{cases}$$

fonksiyonu ile elde edilen (X, d) Yıldız Uzayını ele alalım. Örnek 3.2.3 'den bu uzayda "0" simetrik noktadır ve "0" noktasındaki topoloji standart topolojidir. Diğer yandan, Önerme 3.1.14 (b) gereğince, $T_d(0) = \{0\}$ olur. Böylece, $\{0\}$ tek nokta kümesi standart topolojiye göre açık olmadığından, Yıldız Uzayı yerel antisimetrik bağlantılı değildir.

5.2.4. Önerme . *Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ (X, d^{-1}) T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $\tau_{d^s} = \tau_{(d^{-1})^s}$ olduğundan, istenilen açıkça elde edilir. $\square$

5.2.5. Teorem . *Antisimetrik bağlantılı bir T_0-metrikimsi uzay, yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ dir. Şimdi, $X \in \tau_{d^s}$ olduğundan, her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$, Yani (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır. $\square$

Teorem 5.2.5 'in tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnekler ile görebiliriz:

5.2.6. Örnek. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $d(1, 4) = 1$, $d(4, 1) = 3$, $d(1, 2) = 8$, $d(2, 1) = 9$ ve $d(2, 3) = 6 = d(3, 2)$, $d(1, 3) = 4 = d(3, 1)$, $d(4, 3) = 5 = d(3, 4)$ ve $d(2, 4) = 7 = d(4, 2)$ biçiminde yani, $d(i, j) = d_{ij}$ olmak üzere,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Buna göre; d T_0-metrikimsi koşullarını sağlar. Özellikle üçgen eşitsizliği koşuluna bakılırsa,

1. $d(1, 2) = 8 \leq 4 + 6 = d(1, 3) + d(3, 2)$, $d(1, 2) = 8 \leq 1 + 7 = d(1, 4) + d(4, 2)$
2. $d(1, 3) = 4 \leq 8 + 6 = d(1, 2) + d(2, 3)$, $d(1, 3) = 4 \leq 1 + 5 = d(1, 4) + d(4, 3)$
3. $d(1, 4) = 1 \leq 8 + 7 = d(1, 2) + d(2, 4)$, $d(1, 4) = 1 \leq 4 + 5 = d(1, 3) + d(3, 4)$
4. $d(2, 3) = 6 \leq 9 + 4 = d(2, 1) + d(1, 3)$, $d(2, 3) = 6 \leq 7 + 5 = d(2, 4) + d(4, 3)$
5. $d(2, 4) = 7 \leq 9 + 1 = d(2, 1) + d(1, 4)$, $d(2, 4) = 7 \leq 6 + 5 = d(2, 3) + d(3, 4)$
6. $d(2, 1) = 9 \leq 6 + 4 = d(2, 3) + d(3, 1)$, $d(2, 1) = 9 \leq 7 + 3 = d(2, 4) + d(4, 1)$
7. $d(3, 1) = 4 \leq 6 + 9 = d(3, 2) + d(2, 1)$, $d(3, 1) = 4 \leq 5 + 3 = d(3, 4) + d(4, 1)$
8. $d(4, 1) = 3 \leq 7 + 9 = d(4, 2) + d(2, 1)$, $d(4, 1) = 3 \leq 5 + 4 = d(4, 3) + d(3, 1)$
9. $d(3, 2) = 6 \leq 4 + 8 = d(3, 1) + d(1, 2)$, $d(3, 2) = 6 \leq 5 + 7 = d(3, 4) + d(4, 2)$
10. $d(4, 2) = 7 \leq 3 + 8 = d(4, 1) + d(1, 2)$, $d(4, 2) = 7 \leq 5 + 6 = d(4, 3) + d(3, 2)$

elde edilir. Açıkça, (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay değildir. Çünkü örneğin 1 'den 3 'e antisimetrik yol yoktur. Ayrıca, (X, d^s) metrik uzay olduğundan T_2 ve dolayısıyla T_1 uzaydır. Sonlu küme üzerinde T_1 olan tek topoloji ayrık topolojidir. Böylece, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği τ_{d^s} (simetrizasyon) topoloji, ayrık topoloji olduğundan, her $x \in X$ için $T_d(x)$ kümeleri τ_{d^s}-açıktır. O halde, (X, d) yerel antisimetrik bağlantılıdır.

5.2.7. Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq y \\ 1 & ; x > y \end{cases}$$

fonksiyonu ile elde edilen $(\mathbb{R}, d)$ T_0-metrikimsi uzayının her noktası antisimetrik olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $T_d(x) = X \in \tau_{d^s}$ dir. Yani, $(\mathbb{R}, d)$ uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır.

Önerme 3.1.15 ve Teorem 5.2.5 'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

5.2.8. Sonuç . *Her antisimetrik uzay, yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) antisimetrik uzay ve $x \in X$ olsun. Her $x \neq y \in X$ için, $d(x, y) \neq d(y, x)$ olduğundan, $T_d(x) = X$ ve buradan, $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ dır. Yani, (X, d) yerel antisimetrik bağlantılıdır. □

Sonuç 5.2.8 'in tersinin her zaman doğru olamayacağını aşağıdaki örnekler ile görebiliriz:

5.2.9. Örnek . Örnek 5.2.6 'da sunduğumuz uzay, açıkça antisimetrik uzay olmamasına rağmen yerel antisimetrik bağlantılıdır.

5.2.10. Örnek . Örnek 2.3.4 'de verilen, $(\mathbb{R}, p)$ **Sorgenfrey 1** T_0-metrikimsi uzayında simetrizasyon topoloji ayrık topoloji olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $T_p(x) \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleri τ_{p^s}-açıktır. Böylece, $(\mathbb{R}, p)$ **Sorgenfrey 1** uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır, fakat $p(1, 2) = 1 = p(2, 1)$ olduğundan, antisimetrik uzay değildir.

5.2.11. Önerme . *(X, d) yerel antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, X 'in tüm noktalarının antisimetri bileşenleri τ_{d^s}-kapalıdır.*

Kanıt. Yerel antisimetrik bağlantılılıktan, her $x \in X$ için $T_d(x)$ kümesi τ_{d^s}-açıktır. Böylece, Önerme 5.1.9 gereği, her $x \in X$ için $T_d(x)$ kümesi τ_{d^s}-kapalı olur. □

Şimdi, Sonuç 5.2.8 'in tersinin hangi koşul altında doğru olduğunu görelim:

5.2.12. Teorem . *(X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı ve (X, τ_{d^s}) bağlantılı uzay ise (X, d) antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı ve (X, τ_{d^s}) bağlantılı uzay olsun. Şimdi, (X, d) uzayının antisimetrik bağlantılı yani, her $x \in X$ için $X = T_d(x)$ olduğunu gösterelim: Tersine, bir $y \in X$ için, $X \neq T_d(y)$ olduğunu kabul edelim. Burada, (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı olduğundan, $T_d(y)$, τ_{d^s}-açıktır. Diğer yandan, Önerme 5.2.11 gereği, $T_d(y)$, τ_{d^s}-kapalı ve dolayısıyla, $X \setminus T_d(y)$, τ_{d^s}-açıktır. Ayrıca, $X = T_d(y) \cup (X \setminus T_d(y))$ olduğundan, X kümesi, iki ayrık, boş kümeden farklı ve τ_{d^s}-açık altkümesinin birleşimi şeklinde yazılabilir ve bu, X uzayının bağlantılı olması ile çelişir. Dolayısıyla, her $x \in X$ için $X = T_d(x)$ ve (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay olur. □

5.2.13. Önerme. *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda d 'nin simetrizasyon topolojisi τ_{d^s}, ayrık topoloji ise (X,d) yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,d) T_0-metrikimsi uzayı için τ_{d^s} ayrık topoloji ise her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir. Böylece, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı uzay olur. □

Önerme 5.2.13 'ün tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görelim:

5.2.14. Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde,

$$t(x,y) = \begin{cases} x-y & ; x \geq y \\ 2(y-x) & ; x < y \end{cases}$$

fonksiyonu ile kurulan $(\mathbb{R},t)$ uzayının antisimetrik T_0-metrikimsi uzay olduğu kolayca görülebilir. Böylece, Sonuç 5.2.8 gereği, bu uzay yerel antisimetrik bağlantılı olur.

Diğer yandan, her $x,y \in \mathbb{R}$ için açıkça, $m(x,y) \leq t^s(x,y) \leq 2m(x,y)$(m, mutlak değer metriğidir) olduğundan, t 'nin simetrizasyon topolojisi τ_{t^s}, $\mathbb{R}$ 'nin τ_m standart topolojisi ile çakışır.

Özel olarak, metrik uzaylar ile ilgili aşağıdaki örneği inceleyelim:

5.2.15. Örnek. (X,d_a) ayrık metrik uzayını ele alalım. Bu uzay metrik uzay olduğundan, Önerme 3.2.13 gereği, antisimetrik bağlantılı değildir. Diğer yandan, ayrık metriğin ürettiği τ_{d_a} topolojisi ayrık topoloji olduğundan, $T_{d_a}(x) \in \tau_{d_a}$ dır. Şimdi, $d_a = d_a^s$ gerçeğinden, $\tau_{d_a} = \tau_{d_a^s}$ ve böylece, her $x \in X$ için $T_{d_a}(x) \in \tau_{d_a^s}$, yani (X,d_a) yerel antisimetrik bağlantılı uzay olur.

5.2.16. Önerme. *Bir (X,d) metrik uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ τ_d ayrık topolojidir.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) (X,d) metrik uzay olduğundan, her $x \in X$ için $T_d(x) = \{x\}$ olduğu açıktır. Ayrıca, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı ise, her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ dır. O halde, her $x \in X$ için $T_d(x) = \{x\} \in \tau_{d^s}$ olur. Böylece, d metriği için $\tau_d = \tau_{d^s}$ gerçeğinden, $\{x\} \in \tau_d$ elde edilir. Buradan, τ_d ayrık topolojidir.
($\Leftarrow$) Önerme 5.2.13 'den açıktır. □

5.2.17. Örnek. $u(x,y) = max\{x-y, 0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{R},u)$ standart T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Örnek 2.3.1 'den, $(\mathbb{R},u^s)$ metrik uzay ve τ_{u^s} standart topolojidir. Böylece, Önerme 5.2.16 'dan $(\mathbb{R},u^s)$ yerel antisimetrik bağlantılı uzay değildir.

Şimdi, Önerme 5.1.11 yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz:

5.2.18. Sonuç . *(a) X sonlu bir küme ve (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ise (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır.*
(b) X kümesi üzerinde $\leq$ bir kısmi sıralama ve

$$d_{\leq}(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq y \\ 1 & ; x \nleq y \end{cases}$$

fonksiyonu, $\leq$ kısmi sıralamasının X üzerinde ürettiği doğal T_0-metrikimsi olsun. Bu durumda, $(X, d_{\leq})$ yerel antisimetrik bağlantılıdır.

Kanıt. (a) (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d^s) metrik uzay olduğundan T_2 ve dolayısıyla T_1 uzaydır. Sonlu küme üzerinde T_1 olan tek topoloji ayrık topoloji olduğundan, d^s simetrizasyon metriğinin ürettiği τ_{d^s} (simetrizasyon) topolojisi, ayrık topolojidir. Böylece, Önerme 5.2.13 'den (X, d), yerel antisimetrik bağlantılıdır.
(b) $d_{\leq}$ tanımından, $(d_{\leq})^s$ simetrizasyon metriği ayrıktır (Örnek 2.3.2). Dolayısıyla, $\tau_{(d_{\leq})^s}$ ayrık topoloji ve Önerme 5.2.13 'den $(X, d_{\leq})$ yerel antisimetrik bağlantılı olur. □

Önerme 3.1.20 ve Teorem 5.2.5 'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

5.2.19. Sonuç . *Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı ya simetrik bağlantılıdır ya da yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

5.2.20. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde

$$p(x, y) = \begin{cases} x - y & ; x \geq y \\ 1 & ; x < y \end{cases}$$

fonksiyonu ile elde edilen $(\mathbb{R}, p)$ **Sorgenfrey 1** T_0-metrikimsi uzayını ele alalım. Örnek 3.2.5 'de görüldüğü gibi, bu uzay simetrik bağlantılı değildir. O halde, Sonuç 5.2.19 'dan **Sorgenfrey 1** T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılı olur.

Şimdi, ek olarak, hem simetrik bağlantılı hem yerel antisimetrik bağlantılı olan uzay örneklerini görelim:

5.2.21. Örnek . (1) Örnek 3.1.21 'den **Sorgenfrey 2** uzayı hem simetrik bağlantılı hem de antisimetrik bağlantılı uzaydır. Böylece, Teorem 5.2.5 'den bu uzay ayrıca, yerel

antisimetrik bağlantılıdır.
(2) Örnek 5.2.6 'da sunulan (X,d) uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır. Ayrıca, bu uzay antisimetrik bağlantılı değildir, çünkü 1 'den 3 'e antisimetrik yol yoktur. Böylece, Önerme 3.1.20 gereğince, (X,d) simetrik bağlantılı uzaydır.

Yerel antisimetrik bağlantılılığı aşağıdaki denklik ile de karakterize edebiliriz:

5.2.22. Teorem . *Bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ Her $x \in X$ simetrik noktası için $\{x\} \in \tau_{d^s}$ dır. (Yani, her $x \in X$ simetrik noktası, τ_{d^s}-izole noktadır.)*

Kanıt . ($\Rightarrow$) Her $x \in X$ simetrik noktası için Önerme 3.1.14 (b) 'den $T_d(x) = \{x\}$ olduğu açıktır. Ayrıca, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı olduğundan, her $a \in X$ için $T_d(a) \in \tau_{d^s}$ dır. O halde, her $x \in X$ simetrik noktası için $T_d(x) = \{x\} \in \tau_{d^s}$ olur.
($\Leftarrow$) Her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ olduğunu görelim: Her $x \in X$ için iki durum vardır:

(a) x simetrik nokta olursa Önerme 3.1.14 (b) 'den, $T_d(x) = \{x\}$ dır. Hipotezden, $\{x\} \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir.

(b) x simetrik nokta olmazsa, $T_d(x) \neq \{x\}$ dir. Şimdi, Teorem 3.1.18 'den ($T_d(x)$ kümesi ya $\{x\}$ ya da τ_{d^s}-açıktır), $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ ve dolayısıyla, (X,d) T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır. $\square$

Teorem 5.2.22 'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

5.2.23. Sonuç . *Simetrik nokta bulundurmayan bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Şimdi, yerel antisimetrik bağlantılılık özelliğinin, altuzaylarda kalıtsal oluşunun hangi koşul altında gerçekleşeceğini inceleyelim:

5.2.24. Teorem . *(X,d) bir yerel antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, $A \subseteq X$, τ_{d^s}-yoğun ise (A,d_A) yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $a \in A$ alalım. Önerme 3.2.28 'den, τ_{d^s}-yoğun A altkümesi için $T_A(a) = T_X(a) \bigcap A$ olduğu bilinmektedir. Kabulden, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı, yani $T_X(a) \in \tau_{d^s}$ dir. O halde, altuzay topolojisi tanımından, $T_A(a) \in (\tau_{d^s})_A$ olur. Ayrıca, $\tau_{d^s_A} = (\tau_{d^s})_A$ olduğundan, $T_A(a) \in \tau_{d^s_A}$ ve böylece, (A,d_A) yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır. $\square$

Yukarıdaki teoremde, kalıtsallık için altuzayın τ_{d^s}-yoğun oluşu gerekli koşuldur. Gerçekten; aşağıdaki örnekte, yerel antisimetrik bağlantılı bir uzayın, τ_{d^s}-yoğun olmayan bir altuzayının yerel antisimetrik bağlantılı olamayacağını görebiliriz:

5.2.25. Örnek . $\mathbb{R}^2$ üzerinde $d = d_{\|.|}$ olmak üzere $\|(x_1, x_2)| = x_1 \vee x_2 \vee 0$ asimetrik normundan üretilen $(\mathbb{R}^2, d)$ T_0-metrikimsi uzay, antisimetrik bağlantılıdır (Örnek 3.2.27). Böylece, Teorem 5.2.5 gereği, $(\mathbb{R}^2, d)$ yerel antisimetrik bağlantılı uzay olur. Şimdi, bu uzayın, τ_{d^s}-yoğun olmayan $C = C_d((0,0)) = \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ altkümesini alalım ve (C, d_C) altuzayının yerel antisimetrik bağlantılı olmadığını görelim:

Örnek 3.2.27 'den, (C, d_C) metrik uzaydır. O halde, her $(a, -a) \in C$ simetrik noktadır. Böylece, Önerme 3.1.14 (b) 'den, $T_{d_C}((a, -a)) = \{(a, -a)\}$ olur. Ayrıca, Örnek 2.3.8 'de görüldüğü gibi, $\mathbb{R}^2$ üzerinde τ_{d^s} simetrizasyon topolojisi, τ_{st} standart topoloji olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ 'nin bilinen $\tau_{st} \times \tau_{st}$ Öklid topolojisidir. Şimdi, $T_{d_C}((a, -a)) = \{(a, -a)\}$ kümesinin $(\tau_{d^s})_C$-açık olmadığını görelim:

Açıkça, $d^s_C = (d^s)_C$ metriğinin C üzerinde ürettiği $\tau_{d^s_C}$ topolojisi, $\mathbb{R}$ 'nin τ_{st} standart topolojisi ile homeomorftur. Böylece, $T_{d_C}((a, -a)) = \{(a, -a)\}$ kümesi $\tau_{d^s_C} = (\tau_{d^s})_C$ topolojisine göre açık olmadığından, (C, d_C) yerel antisimetrik bağlantılı uzay değildir.

Teorem 5.2.24 'de sunulan gerçeğe karşın; aşağıdaki örnekte, *τ_{d^s}-yoğun ve yerel antisimetrik bağlantılı altuzaya sahip olmasına rağmen, kendisi yerel antisimetrik bağlantılı olmayan bir uzay* ele alacağız:

5.2.26. Örnek . Örnek 5.2.3 'den Yıldız Uzayı yerel antisimetrik bağlantılı değildir. Buna rağmen, Örnek 3.2.30 'da gördüğümüz gibi, bu uzayın τ_{d^s}-yoğun olan $(X \setminus \{0\}, d_{X\setminus\{0\}})$ altuzayı antisimetrik uzaydır. Böylece, Sonuç 5.2.8 'den $(X \setminus \{0\}, d_{X\setminus\{0\}})$ yerel antisimetrik bağlantılı uzay olur.

Şimdi, Tanım 5.1.14 kullanılarak, aşağıdaki önermeyi kanıtlayabiliriz:

5.2.27. Önerme . *Bir ortak-kompakt yerel antisimetrik bağlantılı (X, d) T_0-metrikimsi uzayı, sonlu sayıda antisimetri bileşene sahiptir.*

Kanıt. (X, d) uzayı yerel antisimetrik bağlantılı olduğundan her $x \in X$ için $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ dir. O halde, antisimetri bileşenler ailesi $\{T_d(x)\}_{x \in X}$, X uzayının bir τ_{d^s}-açık örtüsü olur. Ayrıca, X ortak-kompakt olduğundan, (X, τ_{d^s}) kompakttır ve buradan, $X = \bigcup_{i=1}^{n} T_d(x_i)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, X sonlu sayıda antisimetri bileşene sahiptir. □

Şimdi, yerel antisimetrik bağlantılılığın hangi fonksiyon altında korunabileceğini inceleyelim:

5.2.28. Teorem. *(X,d) ve (Y,e) iki T_0-metrikimsi uzay ve $f:(X,d)\longrightarrow(Y,e)$ bir örten izometri olsun. Bu durumda, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır $\Longleftrightarrow$ (Y,e) yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır.*

Kanıt. İzometri tanımı ve antisimetri bileşenlerin özellikleri yardımıyla, Teorem 5.1.32 'nin kanıtına benzer biçimde görülür. □

5.2.29. Teorem. *(X,d) bir T_0-metrikimsi uzay, $A,B\subseteq X$ τ_{d^s}-kapalı iki altküme ve (A,d_A) ve (B,d_B) yerel antisimetrik altuzaylar olsun. Bu durumda, $(A\cup B,d_{A\cup B})$ altuzayı da yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır.*

Kanıt. Teorem 5.1.30 'un kanıtına dual olarak benzer bir metot ile görülür. □

Aşağıdaki örnek, *antisimetrik bağlantılı olmamasına rağmen yerel antisimetrik bağlantılı olup ayrıca, simetrizasyon topolojisi ayrık olmayan bir uzay* örneğidir.

5.2.30. Örnek. $X=[0,1)$ üzerinde $u(x,y)=max\{x-y,0\}$ T_0-metrikimsi ve $Y=\{0,1\}$ üzerinde d ayrık metrik olmak üzere, (X,u) ve (Y,d) T_0-metrikimsi uzaylarını ele alalım ($d=d^s$ olduğuna dikkat edelim). Burada, $Q((x,y),(a,b))=u(x,a)\vee d(y,b)$ olmak üzere $(X\times Y,Q)$ T_0-metrikimsi çarpım uzayı antisimetrik bağlantılı değildir. Gerçekten, her $x,y\in X$ için $x<y$, $(x\neq 0)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} Q((x,0),(x,1))=1, Q((x,1),(x,0))=1, Q((0,0),(x,0))=0, Q((x,0),(0,0))=x \\ Q((0,0),(0,1))=1, Q((0,1),(0,0))=1, Q((0,1),(x,1))=0, Q((x,1),(0,1))=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q((x,0),(y,0))=0, Q((y,0),(x,0))=y-x, Q((x,1),(y,1))=0, Q((y,1),(x,1))=y-x \\ Q((x,0),(y,1))=1, Q((y,1),(x,0))=1, Q((x,0),(0,1))=1, Q((0,1),(x,0))=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q((0,0),(x,1))=1, Q((x,1),(0,0))=1 \\ Q((y,0),(0,1))=1, Q((0,1),(y,0))=1 \end{cases}$$

dır. Burada, antisimetrik çiftleri dikkate aldığımızda, $P_1((0,0),(x,0),(y,0))$ ve $P_2((0,1),(x,1),(y,1))$ iki tane farklı antisimetrik yoldur. Böylece, $T_Q((0,0))=X\times\{0\}$ ve $T_Q((0,1))=X\times\{1\}$ olur. Kısaca, $X\times Y=T_Q((0,0))\cup T_Q((0,1))$ olduğundan, $(X\times Y,Q)$ antisimetrik bağlantılı uzay değildir. (Örneğin, $(0,0)$ ile $(y,1)$ noktaları antisimetrik bağlantılı değiller).

Diğer yandan, $X \times Y$ üzerinde $\tau_{Q^s} = \tau_{u^s} \times \tau_{d^s}$ simetrizasyon topolojisinin ayrık topoloji olmadığını görüyoruz (Çünkü, X üzerindeki τ_{u^s} topolojisi standart topolojidir). Şimdi, $(X \times Y, Q)$ uzayının yerel antisimetrik bağlantılı olup olmadığını inceleyelim: $x, y \in X$, $x < y$ $(x \neq 0)$ olmak üzere,
$T_Q((0,0)) = T_Q((x,0)) = \{(0,0),(x,0),(y,0)\} = X \times \{0\}$
$T_Q((0,1)) = T_Q((x,1)) = \{(0,1),(x,1),(y,1)\} = X \times \{1\}$
gerçeğinden, $(X \times Y, Q)$ uzayı yerel antisimetrik bağlantılı olur çünkü, $X \in (\tau_{u^s})_X = \tau_{u^s_X}$ ve $(\tau_{d^s})_Y = \tau_{d^s_Y} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, Y\}$ olduğundan $X \times Y$ üzerindeki tüm noktaların antisimetri bileşenleri τ_{Q^s}-açıktır.

5.2.31. Teorem . *(X,d) ve (Y,q) iki T_0-metrikimsi uzay, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda, $T_d(x) \times T_q(y) \subseteq T_D((x,y))$ dır.*

Kanıt. $(a,b) \in X \times Y$ olmak üzere, $(a,b) \in T_d(x) \times T_q(y)$ alalım. Buradan, $a \in T_d(x)$ ve $b \in T_q(y)$ dır. $a \in T_d(x)$ olduğundan, X 'de, a 'dan x 'e $P_1(a = x_0, x_1, ..., x = x_n)$ antisimetrik yolu ve $b \in T_q(y)$ olduğundan, Y 'de, b 'den y 'ye $P_2(b = y_0, y_1, ..., y = y_m)$ antisimetrik yolu vardır. $P_1(a = x_0, x_1, ..., x = x_n)$ antisimetrik yol olduğundan, her $i = 0, 1, ..., n-1$ için $d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i)$ ve $P_2(b = y_0, y_1, ..., y = y_m)$ antisimetrik yol olduğundan, her $j = 0, 1, ..., m-1$ için $q(y_j, y_{j+1}) \neq q(y_{j+1}, y_j)$ dır. Şimdi,
$P((x_0, y_0) = (a,b), (x_1, b), ..., (x,b), (x,y_1), (x,y_2), ..., (x,y))$ yolunun, D çarpım T_0-metrikimsi tanımına göre, (a,b) 'den (x,y) 'ye bir antisimetrik yol olduğunu görelim:
Gerçekten, her $i = 0, 1, ..., n-1$ ve $j = 0, 1, ..., m-1$ için
$D((x_i, b), (x_{i+1}, b)) = d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i) = D((x_{i+1}, b), (x_i, b))$
ve $D((x, y_j), (x, y_{j+1})) = q(y_j, y_{j+1}) \neq q(y_{j+1}, y_j) = D((x, y_{j+1}), (x, y_j))$ dır. Bu durumda, $P((x_0, y_0) = (a,b), (x_1, b), ..., (x,b), (x,y_1), (x,y_2), ..., (x,y))$ yolu, $X \times Y$ üzerinde (a,b) 'den (x,y) 'ye bir antisimetrik yoldur. Böylece, $(a,b) \in T_D((x,y))$ yani, $T_d(x) \times T_q(y) \subseteq T_D((x,y))$ dır. $\square$

Teorem 5.2.31 'de verilen kapsamanın diğer yönünün her zaman doğru olamayacağını bir örnek ile görelim:

5.2.32. Örnek . $X = [0,1)$ üzerinde kısıtlanmış $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y & ; y \leq x \\ x + y & ; y > x \end{cases}$$

Yıldız fonksiyonu ile kurulan (X,d) T_0-metrikimsi uzayını ve

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq y \\ 1 & ; x > y \end{cases}$$

olmak üzere $Y = \{0,1\}$ üzerinde $2q$ fonksiyonu ile inşa edilen $(Y,2q)$ T_0-metrikimsi uzayını ele alalım (Örnek 5.1.33). Burada, (X,d) uzayında $T_d(0) = \{0\}$ ve $(Y,2q)$ uzayında $T_{2q}(0) = \{0,1\}$ dır. Açıkça, $(x,1),(a,0) \in X \times Y$ için $D((x,1),(a,0)) = 2$ ve $D((a,0),(x,1)) < 2$ dır. Böylece, $a,x \in X$ olmak üzere $\{(x,1),(a,0)\}$ çiftleri antisimetrik çifttir ve dolayısıyla, $(X \times Y, D)$ çarpım T_0-metrikimsi uzayı antisimetrik bağlantılıdır. O halde, $T_D((0,0)) = X \times Y \nsubseteq \{(0,0),(0,1)\} = T_d(0) \times \tau_{2q}(0)$ olur.

5.2.33. Teorem. *(X,d) ve (Y,q) yerel antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzaylar olsun. Bu durumda, $(X \times Y, D)$ çarpım uzayı yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. Teorem 5.1.27 kanıtına benzer biçimde, Teorem 5.2.31 ve Sonuç 5.1.26 (ii) 'den istenilen elde edilir. □

Teorem 5.2.33 'ün, tümevarım aracılığıyla elde edilen sonucunu aşağıda sunalım:

5.2.34. Sonuç. *Sonlu sayıda yerel antisimetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzayların çarpımı da yerel antisimetrik bağlantılı olur.*

Teorem 5.2.33 'ün tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnek ile görelim:

5.2.35. Örnek. Örnek 5.1.33 'de sunulan, (X,d) ve $(Y,2q)$ T_0-metrikimsi uzaylarını ele alalım. Burada, $T_d(0) = \{0\} \notin \tau_{d^s}$ olduğundan, (X,d) yerel antisimetrik bağlantılı uzay değildir. Ayrıca, Sonuç 5.2.18 (b) 'den, $(Y,2q)$ yerel antisimetrik bağlantılıdır. Buna rağmen, $(X \times Y, D)$ çarpım uzayı simetrik bağlantılı olmadığından, Önerme 3.1.20 gereğince, antisimetrik bağlantılı ve dolayısıyla Teorem 5.2.5 'den $(X \times Y, D)$ yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır.

Son olarak, elde ettiğimiz önermelerden aşağıdaki sonucu kanıtlayabiliriz:

5.2.36. Sonuç. *Bir (X,d) T_0-metrikimsi uzayı yerel simetrik bağlantılıdır ya da yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,d) T_0-metrikimsi uzayının yerel simetrik bağlantılı olmasın. Bu durumda, Önerme 5.1.4 'den (X,d) simetrik bağlantılı değildir. O halde, Önerme 3.1.20 'den, (X,d) antisimetrik bağlantılı ve Teorem 5.2.5 'den yerel antisimetrik bağlantılıdır. □

Hem yerel simetrik bağlantılı hem de yerel antisimetrik bağlantılı olan uzaylar da vardır. Buna örnek olarak aşağıdaki uzayları inceleyebiliriz:

5.2.37. Örnek . $\mathbb{R}$ üzerinde, $x \geq y$ ise $s(x,y) = min\{x-y, 1\}$ ve $x < y$ ise $s(x,y) = 1$ ile tanımlı, $(\mathbb{R}, s)$ **Sorgenfrey 2** T_0-metrikimsi uzayının simetrizasyon topolojisi ayrık idi (Örnek 2.3.6). O halde, Önerme 5.1.11 ve Önerme 5.2.13 gereğince, $(\mathbb{R}, s)$ **Sorgenfrey 2** hem yerel simetrik bağlantılı hem de yerel antisimetrik bağlantılı uzaydır.

5.2.38. Örnek . $X = \{0,1\}$ ve $u(x,y) = max\{x-y, 0\}$ olmak üzere, (X,u) ve (X,u^s) T_0-metrikimsi uzaylarını ele alalım. O halde, $X \times X$ çarpım kümesi sonlu olduğundan, Önerme 5.1.13 (a) ve Önerme 5.2.18 (a) 'dan, $X \times X$ üzerinde $D((x,y),(a,b)) = u(x,a) \vee u^s(y,b)$ olmak üzere, $(X \times X, D)$ çarpım T_0-metrikimsi uzayı hem yerel simetrik bağlantılı hem de yerel antisimetrik bağlantılıdır.

5.3. Asimetrik Normlu Gerçel Vektör Uzaylar Çerçevesinde İlgili Teoriler

T_0-metrikimsi uzayların simetrisizliğini araştırmak amacıyla önceki bölümlerde elde edilen bazı özgün yaklaşımları, şimdi, asimetrik normlardan üretilen T_0-metrikimsiler ortamında inceleyeceğiz.

5.3.1. Tanım. $(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, X üzerinde $\|.|$ asimetrik normu ile üretilen $d_{\|.|}(x,y) = \|x-y|$ T_0-metrikimsisine göre $\mathbf{0}$ 'ın antisimetri kümesi,

$$R_{d_{\|.|}}(\mathbf{0}) = \{x \in X : d_{\|.|}(\mathbf{0},x) \neq d_{\|.|}(x,\mathbf{0})\} = \{x \in X : \|x| \neq \|-x|\}$$

dır.

Şimdi, asimetrik normlu gerçel vektör uzaylarda bir kaç önemli önermeye değinelim: Aşağıda sunulacak olan dört önermede $R_{d_{\|.|}}(x)$ yerine $R(x)$ ve $T_{d_{\|.|}}(x)$ yerine $T(x)$ kullanılacaktır.

5.3.2. Önerme. $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* d, X *üzerinde* $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi olsun. Bu durumda, her* $x \in X$ *için*
(a) $R(x) = R(\mathbf{0}) + x$
(b) $T(x) = T(\mathbf{0}) + x$.

Kanıt.(a) $(\subseteq)$ Her $y \in R(x)$ için $d(x,y) \neq d(y,x)$ yani, $\|x-y| \neq \|y-x|$ ve böylece $x-y \in R(\mathbf{0})$ (aynı zamanda $y-x \in R(\mathbf{0})$) olur. O halde, $y = (y-x)+x \in R(\mathbf{0})+x$ yani, $R(x) \subseteq R(\mathbf{0})+x$ dır.
$(\supseteq)$ $y \in R(\mathbf{0})$ alalım. Buradan, $\|y| \neq \|-y|$ olur. Şimdi, $d(x+y,x) = \|y| \neq \|-y| = d(x,x+y)$ olduğundan, $x+y \in R(x)$, yani $R(\mathbf{0})+x \subseteq R(x)$ dir.
(b) $(\subseteq)$ $y \in T(x)$ alalım. Böylece, x 'den y 'ye bir $P(x = x_0, x_1, ..., x_n = y)$ antisimetrik yolu vardır. Buradan, her $i = 0, ..., n-1$ için $d(x_i, x_{i+1}) \neq d(x_{i+1}, x_i)$, yani

$$\|x_i - x_{i+1}| \neq \|x_{i+1} - x_i|$$

olur. Şimdi, $P'(x_0 - x = 0, x_1 - x, ..., x_n - x = y - x)$ yolunun bir antisimetrik yol olduğunu görelim: Gerçekten, $i = 0, ..., n-1$ için

$$\|(x_i - x) - (x_{i+1} - x)| = \|x_i - x_{i+1}| \neq \|x_{i+1} - x_i| = \|(x_{i+1} - x) - (x_i - x)|$$

olduğundan, $d((x_i - x), (x_{i+1} - x)) \neq d((x_{i+1} - x), (x_i - x))$ dir.
Böylece, $y - x \in T(\mathbf{0})$ yani, $y \in T(\mathbf{0}) + x$ olur.
$(\supseteq)$ $y \in T(\mathbf{0}) + x$ alalım. Böylece, $y = c + x$ olacak biçimde $c \in T(\mathbf{0})$ vardır. Dolayısıyla, $\mathbf{0}$ ' dan c 'ye bir $P(\mathbf{0} = x_0, x_1, ..., x_n = c)$ antisimetrik yolu vardır. Buradan, her $i = 0, ..., n-1$ için

$$d(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - x_{i+1}| \neq \|x_{i+1} - x_i| = d(x_{i+1}, x_i)$$

olur. Şimdi, $P'(x_0 + x = x, x_1 + x, ..., x_n + x = c + x)$ yolunun bir antisimetrik yol olduğunu görelim: Gerçekten, $i = 0, ..., n-1$ için

$$\|(x_i + x) - (x_{i+1} + x)| = \|x_i - x_{i+1}| \neq \|x_{i+1} - x_i| = \|(x_{i+1} + x) - (x_i + x)|$$

$d((x_i + x), (x_{i+1} + x)) \neq d((x_{i+1} + x), (x_i + x))$ olur.
Buradan, $y = c + x \in T(x)$ dir. $\square$

5.3.3. Önerme . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* $x \in X$ *olsun. Bu durumda,* $x \in R(\mathbf{0})$ *ise* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *için* $\alpha x \in R(\mathbf{0})$ *dır.*

Kanıt. $x \in R(\mathbf{0})$ için $R(\mathbf{0})$ tanımından, $\|x| \neq \|-x|$ dır. Şimdi, $\alpha > 0$ ise, $\|\alpha x| \neq \|-\alpha x|$ olduğundan $\alpha x \in R(\mathbf{0})$ elde edilir. Eğer $\alpha < 0$ olursa, $\alpha' = -\alpha$ alındığında $\|\alpha x| = \|-\alpha' x| \neq \|\alpha' x| = \|-\alpha x|$ olur, yani, $\alpha x \in R(\mathbf{0})$ dır. $\square$

5.3.4. Önerme . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *olsun. Bu durumda,* $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$*,* x *'den* y *'ye bir antisimetrik yol ise* $P'(\lambda x = \lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n = \lambda y)$*,* λx *'den* λy *'ye bir antisimetrik yol olur.*

Kanıt. $P(x = x_0, x_1, ..., y = x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, x 'den y 'ye bir antisimetrik yol olduğundan, $i = 0, ..., n-1$ için, $x_i - x_{i+1} \in R(\mathbf{0})$ dir. Şimdi, Önerme 5.3.3 gereğince, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $i = 0, ..., n-1$ için $\lambda x_i - \lambda x_{i+1} \in R(\mathbf{0})$ elde edilir. Buradan, $i = 0, ..., n-1$ için, $(\lambda x_i, \lambda x_{i+1})$ antisimetrik çifttir, yani, $P'(\lambda x = \lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n = \lambda y)$ yolu, λx 'den λy 'ye bir antisimetrik yoldur. $\square$

5.3.5. Önerme . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay,* $x, y \in X$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda,* $y \in R^n(x)$ *ise* $y \in R(\mathbf{0}) + R(\mathbf{0}) + ... + x$ *olur. (Burada, toplanan n tane değer vardır.)*

Kanıt. $y \in R^n(x)$ alalım. Tanımdan, $(x, x_1), ..., (x_{n-1}, y) \in R$ yani, $x_1 \in R(x)$, $x_2 \in R(x_1)$, ..., $y \in R(x_{n-1})$ olacak biçimde $x_1, ..., x_{n-1} \in X$ vardır. Buradan, $x_1 - x \in R(0)$, $x_2 - x_1 \in R(\mathbf{0})$, ..., $y - x_{n-1} \in R(\mathbf{0})$ ve dolayısıyla, $y - x \in R(\mathbf{0}) + ... + R(\mathbf{0})$ olur. Sonuç olarak, $y \in R(\mathbf{0}) + R(\mathbf{0}) + ... + x$ elde edilir. $\square$

5.3.6. Teorem . *$(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olsun. X uzayı, $\|.|$ asimetrik normundan üretilen d T_0-metrikimsiye göre bir simetrik noktaya sahipse $\boldsymbol{0}$ simetrik noktadır.*

Kanıt. $\mathbf{0}$ 'ın simetrik nokta olduğunu görmek için $b \in X$ olmak üzere $d(b, \mathbf{0}) = \|b| = \| - b| = d(\mathbf{0}, b)$ olduğunu gösterelim: $a \in X$ simetrik nokta olsun. Böylece, her $a \neq y \in X$ için $d(a, y) = \|a - y| = \|y - a| = d(y, a)$ dır. Şimdi, y yerine $a - b \in X$ alındığında, $d(a, a - b) = \|a - a + b| = \|a - b - a| = d(a - b, a)$, yani, $\|b| = \| - b|$ dir. $\square$

Bir asimetrik normlu gerçel vektör uzayda, $\mathbf{0}$ simetrik nokta ise tüm noktaların simetrik olacağı açıktır. Böylece, Teorem 5.3.6 'dan aşağıdaki karakterizasyon ortaya çıkar.

5.3.7. Sonuç . *$(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olsun. X uzayı, $\|.|$ asimetrik normundan üretilen d T_0-metrikimsiye göre bir simetrik noktaya sahiptir $\Longleftrightarrow$ $\|.|$ bir normdur (Yani, (X, d) metrik uzaydır).*

Sonuç 5.3.7, asimetrik normlanamayan T_0-metrikimsi uzaylar için geçerli değildir. Örneğin, Örnek 3.2.3 'de tanımladığımız T_0-metrikimsi *Yıldız Uzayı* metrik uzay olmamasına rağmen bir simetrik noktaya sahip idi.

Şimdi, asimetrik normdan üretilen T_0-metrikimsi uzaylarda simetrik bağlantılılık ve yerel simetrik bağlantılılık ile ilgili kullanışlı önermeler ve teoremler incelenecektir. Tanım 3.1.4 'e göre, bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayda her $x \in X$ için $C_d(x) = X$ oluyorsa, (X, d) simetrik bağlantılı olur. Buna göre, simetrik bağlantılılık, asimetrik normlardan üretilen T_0-metrikimsi uzaylarda aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

5.3.8. Teorem . *$(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve (X, d), $\|.|$ asimetrik normundan üretilen T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, (X, d) simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ $C_d(\boldsymbol{0}) = X$.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) (X,d) simetrik bağlantılı ise, her $x \in X$ için, $C_d(x) = X$ dir. Buradan, $C_d(\mathbf{0}) = X$ olur.
($\Leftarrow$) (X,d) uzayının simetrik bağlantılı olduğunu, yani her $x \in X$ için, $C_d(x) = X$ olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $C_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Bir $y \in X = C_d(\mathbf{0})$ alalım. Burada, X vektör uzay olduğundan, $y - x \in X = C_d(\mathbf{0})$ dır. O halde, $\mathbf{0}$ 'dan $y - x$ 'e bir $P(\mathbf{0}, ..., y-x)$ simetrik yolu vardır. Bu durumda, simetrik yol tanımı kullanılarak, x 'den y 'ye yeni bir $P'(x, ..., y)$ simetrik yolu elde edilir. Böylece, $y \in C_d(x)$ ve dolayısıyla $C_d(x) = X$ olur. $\Box$

5.3.9. Önerme . *$(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve (X,d), $\|.|$ asimetrik normundan üretilen T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için*

$$C_d(x) \in \tau_{d^s} \Longleftrightarrow C_d(\boldsymbol{0}) \in \tau_{d^s}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) Her $x \in X$ için, $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $C_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ dir.
($\Leftarrow$) $C_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ olsun. Her $x \in X$ için $C_d(x) = C_d(\mathbf{0}) + x$ eşitliği [18] 'den bilinmektedir. Burada, $C_d(\mathbf{0}) + x \in \tau_{d^s}$ olduğunu görmek için $z \in C_d(\mathbf{0}) + x$ alalım. Bu durumda, $z - x \in C_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $B_{d^s}(z-x, \varepsilon') \subseteq C_d(\mathbf{0})$ olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ vardır. Şimdi, $B_{d^s}(z, \varepsilon') \subseteq C_d(x)$ olduğunu görmek için $a \in B_{d^s}(z, \varepsilon')$ alalım. Bu durumda, $d^s(z,a) < \varepsilon'$ olur. Diğer yandan, $d^s(z-x, a-x) = \|z-x-a+x\| = \|z-a\| = d^s(z,a) < \varepsilon'$ olduğundan, $a - x \in B_{d^s}(z-x, \varepsilon')$ dir. O halde, $a - x \in B_{d^s}(z-x, \varepsilon') \subseteq C_d(\mathbf{0})$ ve böylece, $a - x \in C_d(\mathbf{0})$, dolayısıyla $a \in C_d(\mathbf{0}) + x = C_d(x)$ elde edilir. Yani, $B_{d^s}(z, \varepsilon') \subseteq C_d(x)$, ve $C_d(x) \in \tau_{d^s}$ dır. $\Box$

Aşağıdaki teoremde göreceğimiz gibi, asimetrik normdan üretilen T_0-metrikimsi uzayda, simetrik bağlantılılık ile yerel simetrik bağlantılılık kavramları denktir:

5.3.10. Teorem . *$(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve (X,d), $\|.|$ asimetrik normundan üretilen T_0-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, (X,d) simetrik bağlantılıdır $\Longleftrightarrow$ (X,d) yerel simetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) (X,d) simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzay ise Önerme 5.1.4 'den, (X,d) yerel simetrik bağlantılıdır.
($\Leftarrow$) (X,d) yerel simetrik bağlantılı uzay olsun. Şimdi, $d = d_{\|.|}$ olmak üzere, Not 2.1.17 kullanılarak, $\|.|^s = \|.\|$ ve dolayısıyla $\tau_{\|.|^s} = \tau_{\|.\|} = \tau_{d^s}$ dır. Burada, $\|.\|$ normdur.

Her normlu gerçel vektör uzay yol-bağlantılı olduğundan, normdan üretilen $(X, \tau_{\|.\|})$ topolojik uzayı yol-bağlantılıdır. Böylece, $\tau_{\|.\|} = \tau_{d^s}$ olduğundan, (X, τ_{d^s}) topolojik uzayı da yol-bağlantılı ve dolayısıyla bağlantılıdır. O halde, Teorem 5.1.10 'dan, (X, d) simetrik bağlantılı uzay olur. □

Önerme 5.3.9 ve Teorem 5.3.10 'dan, aşağıdaki denkliği elde edebiliriz:

5.3.11. Sonuç . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X, d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,*

$$C_d(\boldsymbol{0}) \in \tau_{d^s} \iff (X, d) \text{ simetrik bağlantılıdır.}$$

Bu aşamada, asimetrik normdan üretilen T_0-metrikimsi uzayların antisimetrik bağlantılılık ve yerel antisimetrik bağlantılılık yapıları ile ilgili teoremler ve sonuçlar incelenecektir. Bu incelemede öncelikle gerekli olan yardımcı ifadeyi sunalım:

5.3.12. Önerme . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olsun.* X *uzayı,* $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* d T_0*-metrikimsiye göre bir antisimetrik noktaya sahipse* $\boldsymbol{0}$ *antisimetrik noktadır.*

Kanıt. $\mathbf{0}$ 'ın antisimetrik nokta olduğunu göstermek için, her $b \in X$ için, $d(b, \mathbf{0}) = \|b| \neq \| - b| = d(\mathbf{0}, b)$ olduğunu görelim: $a \in X$ antisimetrik nokta olsun. Buradan, her $a \neq y \in X$ için $d(a, y) = \|a - y| \neq \|y - a| = d(y, a)$ dır. Şimdi, y yerine $a - b \in X$ alınırsa, $d(a, a - b) = \|a - a + b| \neq \|a - b - a| = d(a - b, a)$, yani, $\|b| \neq \| - b|$ elde edilir. □

5.3.13. Teorem . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olmak üzere,* $\boldsymbol{0}$, $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* d T_0*-metrikimsiye göre antisimetrik noktadır* $\Longrightarrow$ X *'in bütün noktaları* d *'ye göre antisimetriktir (Yani,* (X, d) *antisimetrik uzaydır).*

Kanıt. $x \in X$ alalım. x 'in antisimetrik nokta yani, her $x \neq y \in X$ için, $d(x, y) = \|x - y| \neq \|y - x| = d(y, x)$ olduğunu görelim: Bunun için $x - y = a \in X$ alınırsa, $\mathbf{0}$ antisimetrik nokta olduğundan, $d(x, y) = \|x - y| = \|a| \neq \| - a| = \|y - x| = d(y, x)$ elde edilir. □

Önerme 5.3.12 ve Teorem 5.3.13 'den aşağıdaki karakterizasyon elde edilir:

5.3.14. Sonuç . $(X, \|.|)$ bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay olsun. (X,d) T_0-metrikimsi uzayı, antisimetrik uzaydır $\Longleftrightarrow$ (X,d) bir antisimetrik noktaya sahiptir .

5.3.15. Önerme . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X,d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda, her* $x \in X$ *için*

$$T_d(x) \in \tau_{d^s} \Longleftrightarrow T_d(\boldsymbol{0}) \in \tau_{d^s}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Her $x \in X$ için, $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $T_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ dir.
$(\Leftarrow)$ $T_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ olsun. Öncelikle, Önerme 5.3.2 (b) 'den, $T_d(x) = T_d(\mathbf{0}) + x$ eşitliği göz önüne alınırsa $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ olduğunu görmek için $z \in T_d(\mathbf{0}) + x$ alalım. Bu durumda, $z - x \in T_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s}$ olduğundan, $B_{d^s}(z - x, \varepsilon') \subseteq T_d(\mathbf{0})$ olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ vardır. Buna göre, $B_{d^s}(z, \varepsilon') \subseteq T_d(x)$ olduğunu kanıtlamak için $a \in B_{d^s}(z, \varepsilon')$ alalım. Bu durumda, $d^s(z,a) < \varepsilon'$ olur. Diğer yandan, $d^s(z - x, a - x) = \|z - x - a + x\| = \|z - a\| = d^s(z,a) < \varepsilon'$ olduğundan, $a - x \in B_{d^s}(z - x, \varepsilon')$ olur. Böylece, $a - x \in B_{d^s}(z - x, \varepsilon') \subseteq T_d(\mathbf{0})$ 'dan $a - x \in T_d(\mathbf{0})$ ve dolayısıyla, $a \in T_d(\mathbf{0}) + x$ yani, $a \in T_d(x)$ elde edilir. O halde, $B_{d^s}(z, \varepsilon') \subseteq T_d(x)$ dir ve böylece, $T_d(x) \in \tau_{d^s}$ olur. $\square$

Önerme 5.3.15 'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

5.3.16. Sonuç . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X,d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,* (X,d) *yerel antisimetrik bağlantılıdır* $\Longleftrightarrow$ $T_d(\boldsymbol{0}) \in \tau_{d^s}$ *dır.*

Bu aşamada, bir asimetrik normdan üretilen T_0-metrikimsi uzay ortamında antisimetrik bağlantılılık yapısını karakterize edelim:

5.3.17. Teorem . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X,d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,* (X,d) *antisimetrik bağlantılıdır* $\Longleftrightarrow$ $T_d(\boldsymbol{0}) = X$.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ (X,d) antisimetrik bağlantılı olduğundan, her $x \in X$ için $T_d(x) = X$ dir. Buradan, $T_d(\mathbf{0}) = X$ olur.
$(\Leftarrow)$ (X,d) uzayının antisimetrik bağlantılı olduğunu, yani her $x \in X$ için, $T_d(x) = X$ olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $T_d(x) \subseteq X$ olduğu açıktır. Şimdi, $y \in X = T_d(\mathbf{0})$

alalım. Burada, X vektör uzay olduğundan, $y-x \in X = T_d(\mathbf{0})$ dır. O halde, $\mathbf{0}$ 'dan $y-x$ 'e bir $P(\mathbf{0}, ..., y-x)$ antisimetrik yolu vardır. Buradan, antisimetrik yol tanımı kullanılarak, x 'den y 'ye yeni bir $P'(x, ..., y)$ antisimetrik yolu elde edilir. Böylece, $y \in T_d(x)$ ve dolayısıyla, $T_d(x) = X$ olur. $\square$

5.3.18. Teorem . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X, d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,* (X, d) *antisimetrik bağlantılıdır* $\Longleftrightarrow$ (X, d) *yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ (X, d) antisimetrik bağlantılı olsun. Teorem 5.2.5 'den, (X, d) yerel antisimetrik bağlantılıdır.
$(\Leftarrow)$ (X, d) yerel antisimetrik bağlantılı uzay olsun. Şimdi, $d = d_{\|.|}$ olmak üzere, Not 2.1.17 kullanılarak, $\|.|^s = \|.\|$ ve dolayısıyla, $\tau_{\|.|^s} = \tau_{\|.\|} = \tau_{d^s}$ dır. Burada, $\|.\|$ normdur. Her normlu gerçel vektör uzay yol-bağlantılı olduğundan, normdan üretilen $(X, \tau_{\|.\|})$ topoloji uzayı yol-bağlantılıdır. Böylece, $\tau_{\|.\|} = \tau_{d^s}$ olduğundan, (X, τ_{d^s}) topolojik uzayı da yol-bağlantılı ve dolayısıyla bağlantılıdır. O halde, Teorem 5.1.10 'dan, (X, d) antisimetrik bağlantılı uzay olur. $\square$

5.3.19. Sonuç . $(X, \|.|)$ *bir asimetrik normlu gerçel vektör uzay ve* (X, d), $\|.|$ *asimetrik normundan üretilen* T_0*-metrikimsi uzay olsun. Bu durumda,* $T_d(\mathbf{0}) \in \tau_{d^s} \Longleftrightarrow$ (X, d) *antisimetrik bağlantılıdır.*

Teorem 5.2.5 ve Teorem 3.2.15 'den aşağıdaki sonuç açıktır.

5.3.20. Sonuç . *Normlu olmayan asimetrik normlu gerçel vektör uzay yerel antisimetrik bağlantılıdır.*

6. SONUÇ

Bu tezin ana fikri; simetrisiz, dolayısıyla metrik olamayan T_0-metrikimsi uzayların simetrisizlik derecesine, özgün teoriler yardımıyla çeşitli yaklaşımlar yapmaktır.

Metriğin simetri özelliği göz önüne alınarak, simetrisizliğe bir çeşit yaklaşım amacıyla daha önce inşa edilen simetrik ve antisimetrik bağlantılılık yapıları, tezin temel çatısını oluşturmaktadır. Tezde bu yapılar üzerine bazı yeni sonuçlar sunulduktan sonra, simetrik ve antisimetrik bağlantılı genişleme teorileri kurularak, çeşitli özellikleri sağlayan T_0-metrikimsi uzayların simetrik bağlantılı ve/veya antisimetrik bağlantılı genişlemeye sahip olabilecekleri kanıtlandı. Burada, ileriye dönük olarak;

"Bir (X, d) T_0-metrikimsi uzayı, hangi şartlar altında içerisinde τ_{e^s}-yoğun olduğu bir (Y, e) (anti)simetrik bağlantılı genişlemeye sahiptir?"

sorusunun incelenmesi planlanmaktadır.

Tezin diğer özgün teorileri olarak; T_0-metrikimsi uzayların simetrisizliğine, topolojik bakış açısıyla yeni yaklaşımlar sağlayan yerel simetrik ve yerel antisimetrik bağlantılılık yapıları inşa edilerek, bu çerçevede kayda değer birçok sonuç elde edildi. Bunu takiben,

"(X, d) yerel simetrik bağlantılı T_0-metrikimsi uzayı için, X'in τ_{d^s}-yoğun olan bir F altkümesi alındığında (F, d_F) uzayı yerel simetrik bağlantılı mıdır?"

sorusu ise, farklı bir araştırma konusu oluşturmaktadır.

T_0-metrikimsi üreten ve bu nedenle T_0-metrikimsilerin asimetrik-fonksiyonel yönlerinin geliştirilmesinde kilometre taşı olan asimetrik norm teorisine, simetrisizlik derecesine yaklaşım amacıyla alternatif bir diğer çalışma ortamı olarak, tezin sonunda yer verildi. Bu çerçevede, norm olmayan asimetrik normlardan üretilen T_0-metrikimsiler ile çalışıldığında, simetrisizliğe dair daha güçlü sonuçların elde edilebildiği ve tezde inşa edilen bazı yapıların karakterizasyonlarına yönelik yeni soruların ortaya çıktığı görülmüştür.

Bunların yanı sıra; Sorgenfrey topolojik uzayın ters örnek oluşturduğu ve böylece olumsuz yanıtlanan *"Simetrik bağlantılı bir T_0-metrikimsi ile belirlenen topoloji, metriklenebilir midir ?"* sorusunun, hangi şartlarda olumlu yanıta sahip olabileceği incelenmeye değer bir problemdir.

Kaynaklar

[1] Cobzaş Ş., Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Frontiers in Mathematics, Springer, Basel, **2012**.

[2] Demetriou N., Künzi H.-P. A., A study of quasi-pseudometrics, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46 (1), 33-52, **2017**.

[3] Fletcher P., Lindgren W. F., Quasi-Uniform Spaces, Dekker, New York. **1982**.

[4] Gruenhage G., Kulesza J., Le Donne A., Connectifications of metrizable spaces, Topology and its Applications, 82, 171–179, **1998**.

[5] Hellwig A. and Volkmann L. The Connectivity of a Graph and its Complement, Discrete Applied Mathematics, 156, 29 3325-3328, **2008**.

[6] Javanshir N., Yıldız F., Locally symmetrically connected T_0-quasi-metric spaces, Quaestiones Mathematicae, DOI: 10.2989/16073606.2021.1882602, **2021**.

[7] Javanshir N., Yıldız F., Symmetrically connected and antisymmetrically connected T_0-quasi-metric extensions, Topology and its Applications 276, 107179, **2020**.

[8] J. R. Wilson, Introduction to Graph Theory, Oliver and Boyd, Edinburgh, **1972**.

[9] Kopperman R., H. M. Mack J., Somerset D.W. B. Joincompact spaces, continuous lattices, and C*-algebras, 31 Algebra Universalis, Basel, 38: 289-323, **1997**.

[10] Künzi H.-P. A., An introduction to quasi-uniform spaces, in: Beyond Topology, eds. F. Mynard and E. Pearl (Eds.), Beyond Topology, in: Contemp. Math. 486, 239–304, **2009**.

[11] Künzi H.-P.A., Yıldız F., Convexity structures in T_0-quasi-metric spaces, Topology and its Applications 200, 2–18, **2016**.

[12] Künzi H.-P.A., Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology, in: Handbook of

the History of General Topology, vol.3, in: Hist. Topol., vol.3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp.853–968, **2001**.

[13] Künzi H.-P. A., Yıldız F., Extensions of T_0-quasi-metric spaces, Acta Mathematica Hungarica, 153(1) 196-215, **2017**.

[14] Künzi H.-P.A., Vajner V., Weighted quasi-metrics, Annals of the New York Academy of Sciences, 728, 64-77, **1994**.

[15] Munkres J. Topology 1 (Second ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc. ISBN 978-0-13-181629-9., **2000**.

[16] Plastria F., Asymmetric distances, semidirected networks and majority in Fermat-Weber problems, Annals of Operations Research, 167, 121-155, **2009**.

[17] Willard S., General Topology, Dover Publications, **2004**.

[18] Yıldız F., Künzi H.-P.A. Symmetric connectedness in T_0-quasi-metric spaces, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin 26, (5), 659-679, **2019**.