HALKA YAPISININ SONLU SIFIRLANAN MODÜLLER YARDIMIYLA BELİRLENMESİ

DETERMINING STRUCTURE OF RINGS BY MEANS OF THEIR FINITELY ANNIHILATED MODULES

DENİZ HALİM ÇAĞLAR

PROF. DR. EVRİM AKALAN
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2021

ÖZET

HALKA YAPISININ SONLU SIFIRLANAN MODÜLLER YARDIMIYLA BELİRLENMESİ

Deniz Halim ÇAĞLAR
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Evrim AKALAN

OCAK 2021, 63 sayfa

Bu tez, birimli halkalar üzerindeki modüller teorisinde "sonlu sıfırlanan modüller" olarak da bilinen, H-koşulunu sağlayan modüller üzerine yapılan çalışmalara dayanmaktadır. H-koşulunu sağlayan modüller, Homolojik Cebir ve değişmeli olmayan halkalarda lokalizasyon gibi konularda karşımıza çıkması ve etkin olarak kullanılması sebebiyle halka kuramında önemli yer tutmuş ve pek çok matematikçi tarafından ilgi görmüştür. Literatürde P. Gabriel [8] tarafından ortaya atıldığına inanılan H-koşulu, halkanın yapısı ile üzerindeki modülün yapısı arasında geçiş imkanı tanımaktadır. Bu tezin amacı, sonlu sıfırlanan modüllerin yapısının, örneklerinin ve öneminin ortaya konması, üzerindeki bazı modül sınıfları sonlu sıfırlanan modüllerden oluşan halka yapısının incelenmesidir.

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü, tez konusunun tarihsel gelişimi ve önemi ile ilgili bilgilerden oluşmaktadır. İkinci bölüm, sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde, sonlu sıfırlanan modüller tanımlanıp sağladıkları temel özellikler incelenmiştir. Dördüncü bölümde Artin Halkalar, üzerindeki her modülün sonlu sıfırlanan olması ile karakterize edilmiş, "zayıf H-koşulu" kavramı tanımlanmıştır. Son bölümde ise yarı basit modüller, düzgün modüller, injektif modüller gibi modül sınıfların H-koşulunu sağlamalarının halka yapısına etkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Halka, Modül, Sonlu Sıfırlanan Modül, H-koşulu, Artin Halka, Yarı Basit Modül, Düzgün Modül, İnjektif Modül, Tekil Modül

ABSTRACT

DETERMINING STRUCTURE OF RINGS BY MEANS OF THEIR FINITELY ANNIHILATED MODULES

Deniz Halim ÇAĞLAR
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Evrim AKALAN

Ocak 2021, 63 pages

This thesis is based on work on modules that satisfy the H-condition, also known as "finitely annihilated modules" in the theory of modules on unitary rings. Modules that satisfy the H-condition have taken an important place in ring theory and attracted attention by many mathematicians because of their emergence and effective use in topics such as Homological Algebra and localization in non-commutative rings. The H-condition, believed to have been proposed by P. Gabriel [8] in the literature, allows a transition between the structure of the ring and the structure of the module on it. The purpose of this thesis is to reveal the structure, examples and importance of finitely annihilated modules, to examine the ring structure consisting of finitely annihilated modules on some module classes.

The first chapter of this thesis, which consists of five chapters, consists of information about the historical development and importance of the thesis topic. The second chapter includes the basic definitions and theorems required in the next chapters. In the third chapter, finite annihilated modules are defined and the basic properties they provide are examined. In the fourth chapter, Artinian Rings are characterized by being finite annihilated of each module on it, and the concept of "weak H-condition" is defined. In the last chapter, the effects of semisimple modules, uniform modules, and injective modules to satisfy the H-condition on the ring structure are examined.

Keywords: Ring, Module, Finitely Annihilated Module, H-condition, Artinian Ring, Semisimple Module, Uniform Module, Injective Module, Singular module

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşumunda büyük katkı sağlayan, çalışmaları ve değerli görüşleriyle kendime örnek edindiğim, beni öğrenmeye ve daha sıkı çalışmaya teşvik eden, bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Evrim AKALAN'a;

tezimi okuyup değerlendirmek üzere bana vakit ayıran jüri üyeleri Prof. Dr. Ali ERDOĞAN, Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU, Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU ve Dr. Öğretim Üyesi Fatma KAYNARCA hocalarıma;

bilgi ve önerilerini benden esirgemeyen saygıdeğer Doç. Dr. Bülent SARAÇ hocama;

öğrettiği bilgilerle ufkumu açıp Matematik bilimine farklı bir açıdan bakmamı sağlayan sevgili Doç. Dr. Oğuz YAYLA hocama;

ve son olarak da her zaman bana destek olan, her koşulda yanımda hissettiren ve dik durmamı sağlayan çok kıymetli aileme içtenlikle teşekkür ederim.

Deniz Halim ÇAĞLAR

Ocak 2021, Ankara

İçindekiler

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Semboller

R	Birimli R Halkası
M_R	M sağ R-modülü
$I \lhd R$	I, R halkasının bir ideali
$I \lhd_r R$	I, R halkasının bir sağ ideali
$I \lhd_l R$	I, R halkasının bir sol ideali
$N \leq M$	N, M'nin bir alt modülü
$N \leq_e M$	N, M'nin bir büyük alt modülü
$N \lneqq M$	N, M'nin bir alt modülü ve $N \neq M$
$A \subseteq M$	A, M'nin bir alt kümesi
$\bigoplus M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
$\prod M_i$	M_i modüllerinin dik çarpımı
$Gör f$	f homomorfizmasının Görüntü kümesi
$Çek f$	f homomorfizmasının Çekirdek kümesi
$A \leq_{\oplus} M$	A, M'nin bir dik toplananı
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	M'den N'ye giden tüm homomorfizmaların kümesi
$\mathrm{Soc}\,(M_R)$	Bir M R-modülünün sokulu
$\mathrm{End}_R(M)$	M R-modülünün endomorfizma halkası
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu

Bölüm 1

Giriş

Literatürde P. Gabriel [8] tarafından ortaya atıldığına inanılan H-koşulu, G. Cauchon [5], Beachy ve Blair [4], Faith [7] ve Ghorbani [9] gibi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. "Sonlu Sıfırlanan Modüller" olarak da bilinen H-koşulunu sağlayan modüller, Homolojik Cebir ve değişmeli olmayan halkalarda lokalizasyon gibi konularda karşımıza çıkması ve etkin olarak kullanılması sebebiyle, halka kuramında önemli yer tutmaktadır. Smith ve Woodward [14] makalesinde, sağ Artin halkaların üzerindeki bütün sağ modüllerin sonlu sıfırlanan olması ile karakterize edildiği sonucu genişletmişler, [15] makalesinde ise üzerindeki bazı modül sınıflarının H-koşulunu sağlamasının halka yapısında ne tür sonuçlar doğurduğu üzerinde durmuşlardır. Bu tez, [14] ile [15] makalelerinin ve sonlu sıfırlanan modüllerin inceleneceği, bu modüllerin halka yapısına etkilerinin ortaya konacağı derleme niteliğinde planlanmıştır.

R birimli bir halka ve M bir sağ R modül olsun. M'nin sonlu bir alt kümesi F için $ann_R(M) = ann_R(F)$ eşitliği sağlanıyorsa M modülüne "Sonlu Sıfırlanan Modül" veya H-koşulunu sağlıyor denir. Bir R halkasının H-koşulunu sağlaması ise, üzerindeki tüm sonlu üretilmiş modüllerin H-koşulunu sağlaması ile tanımlanmıştır. Değişmeli bir halkada bu koşul sağlandığından, değişmeli halkalar H-koşulunu her zaman sağlar. Kanıtlanması kolay olan aşağıdaki önerme, R halkasının yapısı ile üzerindeki modülün yapısı arasında geçiş imkanı tanıyan ve H-koşulunun çalışılmasının ne kadar önemli ve yararlı olduğunu ortaya koyan bir sonuçtur.

Önerme. *R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. M modülü H-koşulunu sağlar ancak ve ancak $R/ann_R(M)$, M'nin kopyalarının sonlu bir dik toplamı içine gömülebilir.*

Örneğin; eğer R halkası Artin olmayan, basit bir halka ve S basit sağ R-modül ise S modülü H-koşulunu sağlamaz çünkü $ann_R(S) = 0$ olur ve R_R, S'nin kopyalarının sonlu bir dik toplamı içine gömülemez. Dolayısıyla, Artin olmayan basit halkalar da H-koşulunu sağlamaz. Beachy, Faith ve Ghorbani tarafından Artin halkalar, üzerindeki tüm modüllerin H-koşulunu sağlaması ile karakterize edilmiştir (bkz.[3], [7], [9]). Bu sonucun ardından Beachy ve Blair, H-koşulunu sağlayan modüllerin lineer topolojiler ile ilişkilerini incelemişlerdir (bkz. [4]). Bizim çalışmamıza zemin oluşturacak sonuçlar Smith ve Woodward'ın ([14],[15]) makalelerinde verilen sonuçlardır. Smith ve Woodward'ın [14] makalesinde, Artin halkaların karakterizasyonunu veren sonuç genişletilmiştir.

Smith ve Woodward [15] makalesinde ise bazı modül sınıflarının H-koşulunu sağlaması durumunda halkaya ait özellikler elde edilmiştir. Örneğin, bir R halkasında her basit sağ R-modülün H-koşulunu sağlamasının bir ilkel (primitive) ideal P için R/P halkasının Artin olmasına denk olduğu, her yarı basit sağ R-modülün H-koşulunu sağlamasının ise $J(R)$ Jacobson radikali olmak üzere $R/J(R)$ halkasının Artin olmasına denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca tekil (singular) modüllerin, düzgün (uniform) modüllerin H-koşulunu sağlamaları durumları da incelenmiş; injektif modüllerin H-koşulunu sağlamaları ise yalnızca halkanın Noether olması durumunda ele alınmıştır.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

2.1 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.1.1. R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olsun.

$$\begin{array}{rcl} \cdot : M \times R & \rightarrow & M \\ (m, r) & \mapsto & m.r \end{array}$$

ile tanımlanan dış işlem $r_1, r_2, r \in R$ ve $m_1, m_2, m \in M$ için

(i) $(m_1 + m_2).r = m_1.r + m_2.r$

(ii) $m.(r_1 + r_2) = m.r_1 + m.r_2$

(iii) $m.(r_1.r_2) = (m.r_1).r_2$

koşullarını sağlıyorsa M'ye bir sağ R-modül denir. Ek olarak $1_R \in R$ ve $m.1_R = m$ koşulu sağlanıyorsa M'ye birimsel sağ R-modül denir.

Tanım 2.1.2. R bir halka, M bir R-modül ve N M'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N, M'nin toplamsal alt grubu ve her $a \in N$ ve $r \in R$ için $ar \in N$ oluyorsa N'ye M'nin bir sağ R-alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda $N \subseteq M$ alt modüldür ancak ve ancak*

(a) $N \neq \emptyset$

(b) Her $r \in R$ *ve* $x, y \in N$ *için* $x + yr \in N$

koşulları sağlanır.

Tanım 2.1.4. M bir R-modül olsun. Eğer M'nin kendisinden ve $\{0\}$ alt modülünden başka alt modülü yoksa M'ye basit modül denir.

Tanım 2.1.5. M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \leq K \leq M$ koşulunu sağlayan her K alt modülü için $K = N$ ya da $K = M$ oluyorsa N'ye maksimal alt modül denir.

2.2 Bölüm Modülleri, Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Teorem 2.2.1. *M_R bir modül ve $N \leq M$ olsun. M/N bölüm grubu, üzerinde tanımlı*

$$\begin{aligned} \cdot : M/N \times R &\rightarrow M/N \\ (m+N, r) &\mapsto m.r + N \end{aligned}$$

işlemi ile bir sağ R-modül olur. Burada m.r çarpımı M_R üzerindeki skaler çarpmadır.

Tanım 2.2.2. M_R bir modül ve $N \leq M$ olsun. M/N R-modülüne M'nin N'ye bölüm modülü denir.

Tanım 2.2.3. (1) M ve N iki R-modül olsun. Eğer $f : M \rightarrow N$ dönüşümü her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(xr) = f(x)r$

koşullarını sağlıyor ise f'ye bir R-homomorfizma denir.

(2) $f : M \rightarrow N$ bir R-homomorfizma olsun. Bu durumda,

(i) f bire bir ise monomorfizma,

(ii) f örten ise epimorfizma,

(iii) f hem bire bir hem örten ise izomorfizma

adını alır.

Tanım 2.2.4. M ve N iki R- modül ve $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda

1. $Çekf = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$

2. $Gör f = \{f(x) \mid x \in M\}$

kümeleri tanımlanır. Özel olarak $Çek f \leq M$ ve $Gör f \leq N$ olur.

Teorem 2.2.5. *(1. İzomorfizma Teoremi) M ve N birer R-modül ve $f : M \to N$ bir R-homomorfizma olsun. Bu durumda $M/Çek f \cong Gör f$ izomorfizması vardır.*

Teorem 2.2.6. *(2. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül, H ve K, M'nin iki alt modülü olmak üzere $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ izomorfizması vardır.*

Teorem 2.2.7. *(3. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül olsun, H ve K $H \leq K$ olacak şekilde M'nin alt modülleri olsun. Bu durumda, $(M/H)/(K/H) \cong M/K$ izomorfizması vardır.*

2.3 Dik Toplam, Dik Çarpım ve Serbest Modüller

Herhangi bir $\{M_i \mid i \in I\}$ modüller topluluğunun $\prod_{i\in I} M_i$ kartezyen çarpımının $(\ldots, m_i, \ldots)$ elemanını kısaca (m_i) ile gösterelim. Kartezyen çarpımın (m_i) ve (n_i) gibi iki elemanın toplamını $(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i)$ ve (m_i) elemanının $r \in R$ ile çarpımını $(m_i)r = (m_i r)$ olarak tanımlarsak $\prod_{i\in I} M_i$ bir sağ R-modül yapısı oluşturur. Bu $\prod_{i\in I} M_i$ modülüne M_i modüllerinin dik çarpımı denir.

Tanım 2.3.1. $\prod_{i\in I} M_i$ dik çarpımının,

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \mid \text{en çok sonlu sayıda } i \in I \text{ için } m_i \neq 0\}$$

alt modülüne M_i modüllerinin (dış) dik toplamı denir.

Teorem 2.3.2. *R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere $\{M_i \mid i \in I\}$ kümesi M'nin alt modüllerinin*

(1) $M = \sum_{i\in I} M_i$

(2) Her $k \in I$ için $M_k \cap (\sum_{i\neq k} M_i) = 0$

koşullarını sağlayan bir ailesi olsun. Bu durumda $M \cong \oplus_{i\in I} M_i$ sağlanır.

M modülü ve $\{M_i \mid i \in I\}$ M'nin alt modüllerinin ailesi Teorem 2.3.2'nin koşullarını sağlıyor ise M modülüne bu ailenin iç dik toplamı denir.

Tanım 2.3.3. R birimli bir halka olsun. Boş kümeden farklı bir tabana sahip olan birimsel M_R modülüne serbest modül denir.

Teorem 2.3.4. *R birimli halkası ve M_R birimsel modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M_R serbest modüldür.

(2) M_R modülü her biri sağ R-modül olarak R'ye izomorf olan devirli R-modüllerin bir ailesinin iç dik toplamıdır.

(3) M_R modülü sağ R-modül R'nin kopyalarının bir dik toplamına izomorftur.

(4) (Evrensel Dönüşüm Özelliği) Boştan farklı bir X kümesi ve $i : X \to M$ fonksiyonu vardır öyle ki herhangi bir birimsel R-modül A ve $f : X \to A$ fonksiyonu için $gi = f$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $g : M \to A$ R-modül homomorfizması vardır.

Teorem 2.3.5. *Birimli bir R halkası üzerinde tanımlı her birimsel A_R modülü, serbest bir M_R modülünün homomorf görüntüsüdür.*

2.4 Zincir Koşulları

Tanım 2.4.1. M bir R-modül ve $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun.

(i) Eğer M'nin alt modüllerinin her boştan farklı ailesi bir maksimal (minimal) elemana sahipse M'ye alt modülleri üzerinde maksimum (minimum) koşulunu sağlar denir.

(ii) Eğer M'nin alt modüllerinin $M_1 \leq M_2 \leq \ldots$ şeklindeki her artan zinciri sonlu adımda duruyorsa, yani her $i \geq n$ için $M_i = M_n$ olacak şekilde bir n tam sayısı varsa M'ye artan zincir koşulunu sağlar denir.

(iii) Eğer M'nin alt modüllerinin $M_1 \geq M_2 \geq \ldots$ şeklindeki her azalan zinciri sonlu adımda duruyorsa, yani her $i \geq k$ için $M_i = M_k$ olacak şekilde bir k tam sayısı varsa M'ye azalan zincir koşulunu sağlar denir.

Önerme 2.4.2. *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) M alt modülleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.

2) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her ailesi bir maksimal elemana sahiptir.

3) M'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir, yani N, M'nin bir alt modülü ise $N = Rx_1 + Rx_2 + \ldots + Rx_n$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$ vardır.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$: M, alt modülleri ile artan zincir koşulunu sağlasın ve $\mathscr{M}$, M modülünün alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\mathscr{M}$'nin maksimal elemanının olmadığını varsayalım. Bir $M_1 \in \mathscr{M}$ alalım. M_1 maksimal olmadığından bir $M_2 \in \mathscr{M}$ vardır öyle ki $M_2 > M_1$ olur. Bu işleme devam edilirse M'nin alt modüllerinin $M_1 < M_2 < \ldots$ şeklinde artan bir zincirini elde ederiz. Bu zincir sonlu adımda durmadığından kabulümüz yanlış olur. Dolayısıyla $\mathscr{M}$'nin bir maksimal elemanı vardır.

$(2) \Rightarrow (3)$: N, M modülünün bir alt modülü ve $\mathscr{N}$, N modülünün tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\mathscr{N}$ sıfırı içerdiğinden boştan farklıdır. (2) koşulundan $\mathscr{N}$ kümesi bir maksimal eleman içerir. Bu elemana N' diyelim. $N' \neq N$ ise bir $x \in N \setminus N'$ vardır. $N'' = \{x\} \cup N'$, N'nin bir alt modülü olur. $N'' \in \mathscr{N}$ ve $N'' > N'$ oluşu N' modülünün maksimal olmasıyla çelişir. Böylece $N'' = N$ olur. Dolayısıyla N sonlu üretilmiştir.

$(3) \Rightarrow (1)$: $N_1 \leq N_2 \leq \ldots$, M modülünün alt modüllerinin bir artan zinciri olsun. $N = \cup N_k$ diyelim. Bu durumda (3) koşulundan N modülü sonlu üretilmiştir. X, N modülünün sonlu bir üreteç kümesi olsun. X kümesi sonlu olduğundan bir N_k kümesinde kapsanır. Böylece $N = N_k$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla her $l \geq k$ için $N_l = N_k$ dır. □

Önerme 2.4.3. *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) M, alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.

2) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her ailesi bir minimal elemana sahiptir.

Önerme 2.4.2'nin denk koşullarını sağlayan modüle Noether modül, Önerme 2.4.3'ün denk koşullarını sağlayan modüle Artin modül denir. R_R bir Noether (Artin) modül ise R'ye sağ Noether (Artin) halka denir. Sol Noether (Artin) halka da benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 2.4.4. *1) $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası Noetherdir fakat Artin değildir.*

2) Her değişmeli temel ideal halkası Noetherdir.

3) Her cisim, her bölme halkası, ve sonlu sayıda ideale (ya da elemana) sahip her halka hem Noether hem de Artindir.

4) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Prüfer p-grubu $\mathbb{Z}$-modül olarak Artindir fakat Noether değildir.

Önerme 2.4.5. *M bir R-modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda;*

$$M \text{ Noetherdir} \iff N \text{ ve } M/N \text{ Noetherdir.}$$

Önerme 2.4.6. *Noether modüllerin sonlu dik toplamı da Noetherdir.*

Önerme 2.4.7. *R bir sağ Noether halka ve M bir sonlu üretilmiş sağ R-modül olsun. Bu durumda M Noetherdir.*

Önerme 2.4.8. *M bir R-modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda;*

$$M \text{ Artindir} \iff N \text{ ve } M/N \text{ Artindir.}$$

Önerme 2.4.9. *Artin modüllerin sonlu dik toplamı da Artindir.*

Önerme 2.4.10. *R bir sağ Artin halka ve M bir sonlu üretilmiş sağ R-modül olsun. Bu durumda M Artindir.*

2.5 Asal İdealler

Tanım 2.5.1. R bir halka ve $P \lhd R$ olsun. Eğer $I, J \lhd R$ idealleri için $IJ \subseteq P$ iken ya $I \subseteq P$ ya da $I \subseteq P$ oluyorsa P'ye asal ideal denir. Sıfır idealinin asal ideal olduğu halkaya asal halka denir.

Önerme 2.5.2. *R bir halka olmak üzere $P \lhd R$ ideali için aşağıdaki koşullar denktir:*

a) *P asal idealdir.*

b) *$P \subsetneq I$ ve $P \subsetneq J$ ise $IJ \nsubseteq P$ dir.*

c) *R/P asal halkadır.*

d) *$I \lhd_r R$, $J \lhd_r R$ ve $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ ya da $J \subseteq P$ dir.*

e) *$I \lhd_l R$, $J \lhd_l R$ ve $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ ya da $J \subseteq P$ dir.*

f) *$x, y \in R$ ve $xRy \subseteq P$ ise $x \in P$ ya da $y \in P$ dir.*

P bir R halkasının asal ideali ve $J_1. \ldots .J_n \subseteq P$ ise, bazı $i = 1, \ldots, n$ için $J_i \subseteq P$ olur.

Önerme 2.5.3. *R halkasının her maksimal ideali aynı zamanda asaldır.*

Kanıt. $I \lhd R$ ve $J \lhd R$ iki ideal ve $M \lhd R$ maksimal ideal olsun. Eğer I ve J idealleri M idealinin içinde değilse o zaman $I + M = R$ ve $J + M = R$ elde edilir. Bu durumda

$$R = (I + M)(J + M) = IJ + IM + JM + M^2 \subseteq IJ + M$$

olur ve buradan $IJ \nsubseteq M$ elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.5.2 (b) koşulundan M ideali asaldır. □

Tanım 2.5.4. $P \lhd R$ bir asal ideal olmak üzere başka bir asal ideali kapsamıyorsa P'ye minimal asal ideal denir.

Örneğin; R bir asal halka ise o zaman 0, R'nin bir minimal asal idealidir, hatta tektir.

Önerme 2.5.5. *R'nin her P asal ideali bir minimal asal ideal içerir.*

Teorem 2.5.6. *Sağ ya da sol Noether bir R halkasında yalnız sonlu sayıda minimal asal ideal vardır ve bazı minimal asal ideallerin sonlu çarpımları sıfıra eşittir.*

2.6 Yarı Asal İdealler ve Üstel Sıfırlık

Tanım 2.6.1. R bir halka olmak üzere R'nin bir yarı asal ideali, onun asal ideallerinin bir kesişimidir. Eğer R halkasında 0 yarı asal ideal ise bu R halkasına yarı asal halka denir.

Önerme 2.6.2. *$P \lhd R$ yarı asaldır $\iff$ R/P yarı asal halkadır.*

Önteorem 2.6.3. *R bir halka ve $X \subseteq R$ bir alt kümesi olsun öyle ki "$0 \notin X$" ve "X çarpmaya göre kapalıdır" koşulları sağlansın. $P \lhd R$ ideali de $P \cap X = \emptyset$ olacak şekilde seçilebilen maksimal ideal olsun. Bu durumda P asal idealdir.*

Önerme 2.6.4. *R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda,*

a) R'nin tüm asal ideallerinin kesişimi tam olarak R'nin üstel sıfır elemanlarının kümesidir.

b) R'nin bir I ideali için, R'nin I'yı içeren tüm asal ideallerinin kesişimi bazı n pozitif tamsayıları için $r^n \in I$ olacak şekildeki $r \in R$'lerin oluşturduğu kümedir.

c) R halkası yarı asaldır $\iff$ Sıfırdan farklı üstel sıfır eleman içeremez.

Teorem 2.6.5. *R halkasında bir I ideali yarı asaldır $\iff$ $x \in R$ olmak üzere $xRx \subseteq I$ ise $x \in I$ sağlanır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $\{P_j \mid j \in J\}$ kümesi R'nin asal ideallerinin bir ailesi olsun ve $I = \cap_{j\in J}P_j$ alalım. $x \in R$ için $xRx \subseteq I$ olduğunda her $j \in J$ için $xRx \subseteq P_j$ elde ederiz. Bu durumda $x \in P_j$ olur ve dolayısıyla $x \in I$ dır.

$(\Leftarrow)$: Teoremdeki koşul sağlansın. I idealinin R halkasındaki I'yı içeren tüm asal ideallerin kesişimine eşit olduğunu göstermeliyiz. Bu yüzden herhangi bir $x \in R \setminus I$ için $x \notin P$ olacak şekilde bir $P \supseteq I$ ideali bulmalıyız. $x = x_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hipotezden $x_0Rx_0 \nsubseteq I$ olur ve bu durumda bir $x_1 \in x_0Rx_0 \setminus I$ seçebiliriz. x_1 elemanına hipotezi uygularsak $x_2 \in x_1Rx_1 \setminus I$ elemanı seçebiliriz. Bu şekilde devam ederek $x_{i+1} \in x_iRx_i \setminus I$ olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \ldots \in R \setminus I$ elde ederiz. Tümevarımdan, eğer bir $J \lhd R$ ideali ve bir $x_j \in J$ için, $n \geq j$ olmak üzere $x_n \in J$ olur.
Ayrıca her i için $x_i \notin I$ dır. Zorn Lemmadan her i için $x_i \notin P$ olacak şekilde bir $P \supseteq I$ maksimal ideali vardır. Özel olarak $x = x_0 \notin P$ olur ve P ideali R halkasının öz idealidir.
İddia: P asaldır.
J ve K, R'nin idealleri olmak üzere $P \subset J$, $P \subset K$ olsun. P idealinin maksimalliğinden $x_j \in J$, $x_k \in K$ ve $m = max\{j,k\}$ olmak üzere $x_m \in J \cap K$ olur. Bu durumda $x_{m+1} \in x_mRx_m \subseteq JK$, buradan $JK \nsubseteq P$ elde edilir. Böylece P asal idealdir. Bu nedenle I ideali, R halkasının I'yı içeren asal ideallerinin kesişimine eşittir. Yani I yarı asal idealdir. □

Sonuç 2.6.6. *R bir halka $I \lhd R$ bir ideal olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.*

a) I yarı asal idealdir.

b) $J \lhd R$ ve $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.

c) $J \lhd R$ ve $I \subsetneq J$ ise $J^2 \nsubseteq I$ dır.

d) $J \lhd_r R$, $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.

e) $J \lhd_l R$, $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.

Sonuç 2.6.7. *R bir halka, $I \lhd R$ bir yarı asal ideal olsun. Eğer J, R'nin bir sağ ya da sol ideali ise ve bazı n pozitif tam sayıları için $J^n \subseteq I$ koşulu sağlanıyorsa $J \subseteq I$ olur.*

Tanım 2.6.8. R'nin bir sağ ya da sol J ideali, bazı n pozitif tam sayıları için $J^n = 0$ koşulunu sağlıyorsa J idealine üstel sıfırdır denir. Daha genel olarak, J idealinin her elemanı üstel sıfır ise J'ye nil denir.

Sonuç 2.6.7'den bir yarı asal halkada üstel sıfır sağ ya da sol ideal sadece sıfırdır. Tersine R'nin sıfırdan farklı üstel sıfır ideali yoksa R yarı asal halkadır.

Tanım 2.6.9. R'nin asal radikali, R'nin tüm asal ideallerinin kesişimidir.

R sıfır halka ise asal ideali yoktur ve asal radikal R'ye eşittir. R sıfırdan farklıysa en az bir maksimal ideali vardır ve asaldır. Bu yüzden sıfırdan farklı R halkasının asal radikali bir öz idealdir.

Önerme 2.6.10. *Herhangi bir R halkasının asal radikali nildir.*

2.7 Sıfırlayıcılar

Tanım 2.7.1. R bir halka ve A bir sağ R-modül olsun. Verilen bir $X \subseteq A$ alt kümesi için X'in sıfırlayıcısı $ann(X) = \{r \in R \mid \forall x \in X \text{ için } xr = 0\}$ şeklinde tanımlanır. Bu küme R'nin bir sağ idealidir.

R halkasının açıkça belirtilmesi durumunda, $ann_R(X)$ şeklinde gösterilir ve X'in R içindeki sıfırlayıcısı olarak adlandırırız. Benzer şekilde, X'in bir sağ sıfırlayıcısı alındığında $ann(X)$ yerine $r.ann(X)$ yazabiliriz. X kümesi tek bir x elemanından oluştuğunda $ann(\{x\}) = ann(x)$ şeklinde yazılır. X, A'nın bir alt kümesi olduğunda $ann(X)$ bir sağ idealdir, dahası X, A'nın bir alt modülü ise o zaman $ann(X)$ kümesi R'nin bir çift yönlü idealidir. Sol R-modüllerin alt kümelerinin sıfırlayıcıları da benzer şekilde tanımlanır ve bu kümeler R'nin sol idealleridir. Eğer alınan alt küme bir alt modül ise sıfırlayıcısı yine R'nin çift yönlü idealidir. Son olarak, modüllerde de sıfırlayıcılar tanımlanabilir.

Tanım 2.7.2. R bir halka ve A bir sağ R-modül olsun. Bir $Y \subseteq R$ alt kümesi için Y'nin A'daki sıfırlayıcısı $ann_A(Y) = \{a \in A \mid \forall y \in Y \text{ için } ay = 0\}$ şeklinde tanımlanır. Bu küme A'nın toplamaya göre alt grubudur. Y'nin bir sol R-modül içindeki sıfırlayıcısı da benzer şekilde tanımlanır.

Önerme 2.7.3. *R bir halka, A_R bir sağ R-modül ve I, R'nin bir sol ideali olsun. Bu durumda $ann_A(I)$ kümesi A'nın bir alt modülü olur.*

Tanım 2.7.4. R bir halka ve A bir R-modül olsun. Eğer $ann_R(A) = 0$ ise A'ya vefalı R-modül denir.

Önerme 2.7.5. *R sıfırdan farklı bir halka ve A bir R-modül olsun. Bu durumda A modülü vefalı ise A sıfırdan farklıdır.*

Önerme 2.7.6. *R bir halka ve A bir R-modül olsun. Bu durumda A modülünün sıfırlayıcısı $ann_R(A)$, R'nin bir çift yönlü idealidir ve A modülü $R/ann_R(A)$ üzerinde vefalı modüldür.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} A \times R/ann_R(A) &\rightarrow A \\ (a, r + ann_R(A)) &\mapsto ar \end{aligned}$$

işlemine göre A bir $R/ann_R(A)$-modüldür. Dahası A modülünün $R/ann_R(A)$ halkası içindeki sıfırlayıcısı,

$$ann_{R/ann_R(A)}(A) = \{r + ann_R(A) \mid \text{her } a \in A \text{ ve } r \in R \text{ için } a(r + ann_R(A)) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi bir $x + ann_R(A) \in ann_{R/ann_R(A)}(A)$ alalım. Bu durumda her $a \in A$ için $a(x + ann_R(A)) = 0 = ar$ olur ve buradan $x \in ann_R(A)$ elde ederiz. Yani $ann_{R/ann_R(A)}(A)$ kümesi sıfıra eşittir ve dolayısıyla A modülü vefalı bir $R/ann_R(A)$-modüldür. □

Önerme 2.7.7. *R bir asal halka olsun. Bu durumda R'nin sıfırdan farklı tüm sağ veya sol idealleri vefalıdır.*

Bir sonraki önerme, en azından Noether halkalar üzerinde tanımlı modüllerde bölüm halkası üzerindeki tam vefalı alt modüllerin bulunması için anahtar niteliğindedir.

Önerme 2.7.8. *R bir halka, A bir R-modül olsun. Kabul edelim ki A'nın sıfırdan farklı alt modüllerinin sıfırlayıcıları arasında maksimal olan bir P ideali olsun. Bu durumda P asal idealdir ve $ann_A(P)$ bir tam vefalı R/P modüldür.*

2.8 İlkel ve Yarı İlkel İdealler

Tanım 2.8.1. R bir halka ve P, R'nin bir ideali olsun. Eğer bir A basit sağ (sol) R-modülü için $P = ann_R(A)$ oluyorsa P'ye ilkel ideal denir. Eğer R halkasında 0 sağ (sol) ilkel ideal ise R, sağ (sol) ilkel halka adını alır. Diğer bir deyişle vefalı basit sağ (sol) modüle sahip halkaya sağ (sol) ilkel halka denir. Tüm sağ ilkel halkalar sol ilkel olmak zorunda değildir.

Önerme 2.8.2. *R'nin her sağ ya da sol ilkel ideali asal idealdir. Ayrıca R'nin her maksimal ideali sağ ve sol ilkel idealdir.*

Kanıt. İlkel ideallerin asallığı Önerme 2.7.8'den sağlanır. $M \lhd R$ maksimal ideal olmak üzere bir $K \lhd_r R$ maksimal sağ ideali seçelim ve kabul edelim ki $M \subseteq K$ olsun. Bu durumda R/K basit sağ R-modüldür ve $ann_R(R/K) \lhd R$ sağ ilkel idealdir. $RM = M \subseteq K$ olduğundan $(R/K)M = 0$ olur yani $M = ann_R(R/K)$ elde edilir. Bu durumda M'nin maksimalliğinden $M = ann_R(R/K)$ olur, dolayısıyla M sağ ilkel idealdir. Aynı zamanda simetri özelliğinden sol ilkel ideal olur. □

Değişmeli bir R halkasında her basit modül bir M maksimal ideali için R/M'ye izomorftur ve $ann_R(R/M) = M$ dir. Buradan R'nin her ilkel ideali maksimaldir. Buna denk olarak tüm değişmeli ilkel halkalar basit halkadır. Ancak bu değişmeli olmayan halkalar için geçerli değildir.

Önerme 2.8.3. *Herhangi bir R halkası için aşağıdaki kümeler birbirine eşittir.*

a) $J_a =$ *R'nin tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimi.*

b) $J_b =$ *R'nin tüm maksimal sol ideallerinin kesişimi.*

c) $J_c =$ *R'nin tüm sağ ilkel ideallerinin kesişimi.*

d) $J_d =$ *R'nin tüm sol ilkel ideallerinin kesişimi.*

Tanım 2.8.4. Herhangi bir R halkasında, Önerme 2.8.3'te tanımladığımız kümelere R'nin Jacobson Radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Bu tanımdan yola çıkarak şunu söyleyebiliriz, R halkasının tüm sağ ya da sol ilkel idealleri asal olduğundan R'nin asal radikali Jacobson radikali tarafından kapsanır.

Tanım 2.8.5. Bir R halkasında $J(R) = 0$ ise R'ye yarı ilkel halka denir. R'nin bir yarı ilkel I ideali (ya da J-ideali) $J(R/I) = 0$ koşulunu sağlayan idealdir.

Önerme 2.8.6. *R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.*

(i) *I yarı ilkeldir.*

(ii) *I, sağ ilkel ideallerin bir kesişimidir.*

(iii) *I, sol ilkel ideallerin bir kesişimidir.*

Teorem 2.8.7. *[Jacobson, Azumaya] R bir halka, A sonlu üretilmiş bir sağ R modül olsun. Eğer $A.J(R) = A$ ise $A = 0$ dır.*

Teorem 2.8.7 genellikle Nakayama Önteoremi olarak bilinir. Özel olarak eğer A bir sonlu üretilmiş sağ R-modül ise ve $a_1, \ldots, a_n \in A$ için $a_i + AJ(R)$ kosetleri $A/AJ(R)$ modülünü üretiyorsa o zaman $a_1, \ldots, a_n$ elemanları A modülünü üretir.

2.9 Büyük Genişlemeler

Tanım 2.9.1. B bir R-modül ve $A \leq B$ alt modülü olmak üzere eğer A'nın, B modülünün sıfırdan farklı tüm alt modülleri ile kesişimi sıfırdan farklı ise A'ya B modülünün büyük alt modülü denir. $A \leq_e B$ ile gösterilir. Ayrıca B modülüne de A modülünün bir büyük genişlemesi de denir.

Tanım 2.9.2. R bir halka olsun. Eğer R'nin bir sağ I ideali R_R modülü için büyük alt modül oluyorsa I sağ idealine R'nin büyük sağ ideali denir.

Önerme 2.9.3. *Bir halkanın büyük sağ ideallerinin sonlu kesişimi yine büyük sağ idealdir.*

Kanıt. $k = 1, \ldots, n$ olmak üzere E_k, R halkasının büyük idealleri olsun. Tümevarım yöntemiyle her $k = 1, \ldots, n$ için $\cap_{i=1}^{k} E_i$ idealinin R halkasının büyük sağ ideali olduğunu gösterelim. $k = 1$ için iddia doğrudur. İfadenin k için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $I \lhd_r R$ için

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} E_i\right) \cap I = \left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) \cap (E_{k+1} \cap I) = 0$$

olsun. Tümevarım hipotezinden $\bigcap_{i=1}^{k} E_i$ büyük sağ ideal olduğundan $(E_{k+1} \cap I) = 0$ dır. E_{k+1} büyük sağ ideal olduğundan $I = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $\bigcap_{i=1}^{k+1} E_i$ büyük sağ idealdir. □

Önerme 2.9.4. *B bir R- modül ve $A \leq B$ alt modülü olmak üzere $A \leq_e B$ dir ancak ve ancak sıfırdan farklı her $b \in B$ için bir $r \in R$ vardır öyle ki $br \neq 0$ ve $br \in A$ koşulları sağlanır.*

Önerme 2.9.5. *R bir asal halka ve $I \lhd R$ sıfırdan farklı bir ideal olmak üzere I, R'nin hem büyük sağ hem de büyük sol idealidir.*

Tanım 2.9.6. A ve B R-modül olsun. Bir $f : A \to B$ monomorfizması için $f(A) \leq_e B$ koşulu sağlanıyorsa f'ye büyük monomorfizma denir.

Önerme 2.9.7. *B bir R-modül ve $A \leq B$ alt modülü olmak üzere A büyük alt modüldür ancak ve ancak $A \hookrightarrow B$ içerim dönüşümü büyük monomorfizmadır.*

Önerme 2.9.8. *(a) A, B ve C modülleri $A \leq B \leq C$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $A \leq_e C$ dir ancak ve ancak $A \leq_e B$ ve $B \leq_e C$ dir.*

(b) A_1, A_2, B_1, B_2 bir C modülünün alt modülleri olsun. Eğer $A_1 \leq_e B_1$ ve $A_2 \leq_e B_2$ oluyorsa, $A_1 \cap A_2 \leq_e B_1 \cap B_2$ dir.

(c) C bir R-modül, $A \leq C$ alt modülü ve $f : B \to C$ homomorfizma olsun. Eğer $A \leq_e C$ ise $f^{-1}(A) \leq_e B$ dir. Özel olarak eğer $A \leq_e C$ ise, her $c \in C$ için $\{r \in R \mid cr \in A\}$ sağ ideali R_R modülünün büyük alt modülüdür.

(d) $\{B_i \mid i \in I\}$ bir modül ailesi ve her bir $i \in I$ için $A_i \leq_e B_i$ olsun. Bu durumda $\bigoplus_i A_i \leq_e \bigoplus_i B_i$ sağlanır.

Önerme 2.9.9. *C bir R-modül, A ve B alt modülleri olsun ve kabul edelim ki B modülü $A \cap B = 0$ koşulunu sağlayan maksimal alt modül olsun. Bu durumda $A \oplus B \leq_e C$ ve $(A \oplus B)/B \leq_e C/B$ olur.*

Sonuç 2.9.10. *Bir C modülünün herhangi bir alt modülü, C'nin bir büyük alt modülünün dik toplananıdır.*

Sonuç 2.9.11. *Bir C modülü yarı basittir ancak ve ancak C'nin büyük öz alt modülü yoktur.*

Önerme 2.9.12. *Bir C modülü için aşağıdaki eşitlik sağlanır;*

$$\bigcap \{A \leq C \mid A, C\text{'nin bir büyük alt modülü}\} = Soc(C)$$

2.10 Tekil Modüller

Tanım 2.10.1. A bir sağ R-modül olmak üzere

$$Z(A) = \{x \in A \mid I \leq_e R_R \text{ için } xI = 0\} = \{x \in A \mid ann_R(x) \leq_e R_R\}$$

kümesi A'nın bir alt modülüdür. Bu alt modüle A'nın tekil alt modülü denir. Bir A sağ R-modülü için $Z(A) = A$ ise A modülüne tekil modül, $Z(A) = 0$ ise A modülüne tekilsiz modül denir.

Tekilsiz modül ve tekil olmayan modül kavramları aynı değildir. Bir M sağ R-modülü hem tekil hem de tekilsiz ise M modülü sıfır modüldür.

Örnek 2.10.2. *(i) R bir basit halka olsun. Bu durumda R halkası tekilsizdir.*

(ii) R bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda R'nin sıfırdan farklı tüm idealleri büyük idealdir. Her A R-modülü için

$$Z(A) = \{a \in A \mid ann_R(a) \neq 0\}$$

kümesi A'nın burulmalı alt modülüne eşittir. Dahası

$$A \text{ modülü tekildir} \iff A \text{ burulmalıdır.}$$

Benzer şekilde,

$$A \text{ modülü tekilsizdir} \iff A \text{ burulmasızdır.}$$

Önerme 2.10.3. *A,B ve C sağ R-modüller olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i)

$$\text{Bir } C \text{ modülü tekildir} \iff \text{Bir } B\ R \text{ modülü ve } A \leq_e B \text{ büyük alt modülü için } C \cong B/A \text{ sağlanır.}$$

(ii) $A \leq B$ ve B tekilsiz modül olsun. Bu durumda

$$B/A \text{ tekildir} \iff A \leq_e B \text{ sağlanır.}$$

Önerme 2.10.4. *R bir tekilsiz halka olsun. Bu durumda herhangi bir M sağ R-modülü için $Z(M/Z(M)) = 0$ eşitliği sağlanır.*

Önerme 2.10.5. *R bir tekilsiz halka olsun. Bu durumda M ve N sağ R-modülleri için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) Bir M modülü tekildir $\iff$ her N tekilsiz modülü için $Hom_R(M, N) = 0$ olur.

(ii) Bir N modülü tekilsizdir $\iff$ her M tekil modülü için $Hom_R(M, N) = 0$ olur.

(iii) Tekil sağ R-modüller sınıfı alt modülleri, bölüm modülleri, dik toplamları ve genişlemeleri altında kapalıdır.

(iv) Tekilsiz sağ R-modüller sınıfı alt modülleri, bölüm modülleri, dik çarpımları ve genişlemeleri altında kapalıdır.

2.11 Yarı Basit Modüller

Tanım 2.11.1. R bir halka ve A bir R-modül olsun. A modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamına A modülünün sokulu denir ve $Soc(A)$ ile gösterilir. (Alt modüllerin boş ailesinin toplamı sıfır alt modülü olarak kabul edilir. Bu yüzden $Soc(A) = 0$ dır ancak ve ancak A'nın basit alt modülü yoktur.)

Bir modülün sokulunun sıfırdan farklı olduğunu göstermek için onun bir tane basit alt modülü olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım 2.11.2. Bir A modülü için $Soc(A) = A$ oluyorsa bu A modülüne yarı basit modül denir.

Örnek 2.11.3. *F bir cisim ve A, F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Bu durumda A yarı basittir çünkü A'nın bir boyutlu tüm alt uzayları basit F-alt modüldür.*

Önerme 2.11.4. *R bir halka olmak üzere $Soc(R_R)$, R'nin çift yönlü idealidir.*

Önerme 2.11.5. *R bir yarı asal halka olsun. Bu durumda $Soc(R_R) = Soc({}_RR)$ dir.*

Önerme 2.11.6. *Bir A modülünün sokulu A'nın basit alt modüllerinin dik toplamıdır.*

Önerme 2.11.7. *R bir halka, A bir R modül ve B, C, D modülleri A'nın alt modülleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır;*

a) $B \leq D$ *ise* $(B + C) \cap D = B + (C \cap D)$.

b) $B \leq D$ *ve* $A = B \oplus C$ *ise* $D = B \oplus (C \cap D)$.

Kanıt. $a)$ $\subseteq$: $x \in (B+C)\cap D$ olsun. Bu durumda $x \in B+C$ ve $x \in D$ olur. Yani bir $b \in B$ ve $c \in C$ için $x = b+c$ elde edilir. Öte yandan $x \in D$ ve $B \leq D$ olduğundan $x - b = c \in D$ olur. Dolayısıyla $c \in C \cap D$ olduğu görülür.
$\supseteq$: $b + x \in B + (C \cap D)$ olsun. Bu durumda $x \in C$ ve $x \in D$ olur. Öte yandan $B \leq D$ olduğundan $b + x \in D$ ve $b + x \in B + C$ elde edilir.
Dolayısıyla eşitlik sağlanmış olur.

$b)$ (a) şıkkından $D = (B + C) \cap D = B + (C \cap D)$ eşitliği sağlanır. Öte yandan $A = B \oplus C$ olduğundan $B \cap C = 0$ olur. Bu durumda $B \cap (C \cap D) = (B \cap C) \cap D = 0$ dır. Dolayısıyla $D = B \oplus (C \cap D)$ elde edilir. □

Önerme 2.11.8. *Bir A modülü yarı basittir $\iff$ A'nın her alt modülü dik toplanandır.*

Sonuç 2.11.9. *Bir yarı basit modülün her alt modülü yarı basittir.*

2.12 Yarı Basit Halkalar

Teorem 2.12.1. *[Noether] Herhangi bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) Tüm sağ R-modüller yarı basittir.

(b) Tüm sol R-modüller yarı basittir.

(c) R_R modülü yarı basittir.

(d) ${}_RR$ modülü yarı basittir.

(e) R halkası ya sıfırdır ya da n_i ler pozitif tam sayılar ve D_i ler bölme halkası olmak üzere $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$ olur.

Tanım 2.12.2. Teorem 2.12.1'in koşullarını sağlayan bir halkaya yarı basit halka denir.

2.13 Artin Halkalar

Teorem 2.13.1. *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) R sağ Artindir ve $J(R) = 0$ dır.

(b) R sol Artindir ve $J(R) = 0$ dır.

(c) R halkası yarı basittir.

Tanım 2.13.2. A bir modül olmak üzere A'nın sokul serisi, $soc^0(A) = 0$ ve negatif olmayan her n tam sayısı için

$$soc^{n+1}(A)/soc^n(A) = soc(A/soc^n(A))$$

olmak üzere,

$$soc^0(A) \leq soc^1(A) \leq soc^2(A) \leq \ldots$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.13.3. *R, $R/J(R)$ yarı basit olacak şekilde bir halka olsun. Eğer A bir sağ R-modül ise o zaman negatif olmayan her n tam sayısı için $soc^n(A) = ann_A(J(R)^n)$ dir.*

Teorem 2.13.4. *R bir sağ Artin halka ise o zaman R sağ Noetherdir ve $J(R)$ üstel sıfırdır.*

Sonuç 2.13.5. *Bir sağ ya da sol Noether halka için Jacobson radikali asal radikale eşittir.*

Sonuç 2.13.6. *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) R sağ Artindir ve yarı asaldır.

(b) R sol Artindir ve yarı asaldır.

(c) R yarı basittir.

Sonuç 2.13.7. *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) R asal halkadır ve sağ Artindir.

(b) R asal halkadır ve sol Artindir.

(c) R basit halkadır ve sağ Artindir.

(d) R basit halkadır ve sol Artindir.

(e) R basit ve yarı basit halkadır.

(f) D bir bölme halkası ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere $R \cong M_n(D)$ dir.

Önerme 2.13.8. *R sıfırdan farklı bir sağ ya da sol Artin halka ise R'nin tüm asal idealleri maksimaldir.*

Önerme 2.13.9. *R bir değişmeli Noether halka olsun. Bu durumda,*

$$R \text{ Artindir} \iff R\text{'nin tüm asal idealleri maksimaldir.}$$

Teorem 2.13.10. *[Lenagan] R halkası hem sağ hem de sol Noether halka olsun. Bu durumda*

$$R\text{'nin bir } I \text{ ideali sağ } R\text{-modül olarak Artindir} \iff I \text{ sol } R\text{-modül olarak Artindir.}$$

Teorem 2.13.11. *[Ginn and Moss] R bir sağ ve sol Noether halka olsun. Kabul edelim ki R'nin sağ sokulu E, sağ ya da sol ideal olarak büyük olsun. Bu durumda R Artindir.*

Tanım 2.13.12. R bir halka ve M_R bir sağ R-modül olsun. Eğer M modülü bir büyük Artin alt modül içeriyorsa M modülüne quasi-Artin modül denir. Benzer şekilde R halkası için R_R modülü bir büyük Artin alt modül içeriyorsa R halkası quasi-Artin halka adını alır.

Tanım 2.13.13. R bir halka, M_R bir sağ R-modül olsun. Eğer bir n pozitif tam sayısı için M^n dik toplamının R_R modülüne izomorf olacak şekilde bir alt modülü varsa M_R modülüne tamamen vefalı modül denir.

Önerme 2.13.14.

Bir R halkası sağ quasi-Artindir $\iff$ Her vefalı sağ R modül tamamen vefalıdır.

Önerme 2.13.15. *R bir sağ quasi-Artin halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R yarı asal halkadır.

(ii) R halkası yarı basittir ve sağ Artindir.

Önerme 2.13.16. *R bir sağ quasi-Artin halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R asal halkadır.

(ii) R basit halkadır ve sağ Artindir.

Önerme 2.13.17.

Bir R halkası sağ Artindir $\iff$ Her $A \subseteq R$ çift yönlü ideali için R/A sağ quasi-Artindir.

Tanım 2.13.18. R birimli bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde en az bir $x \in R$ varsa R halkasına Von Neumann regüler halka denir.

Teorem 2.13.19. *(Krull Kesişim Teoremi) R bir Noether halka ve $M \lhd R$ tek maksimal ideali olsun. Bu durumda*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$$

dır.

2.14 Burulmalı ve Burulmasız Modüller

Tanım 2.14.1. A bir değişmeli grup olmak üzere,

$$T(A) = \{a \in A \mid \text{sıfırdan farklı } m \in \mathbb{Z} \text{ için } ma = 0\}$$

kümesi A'nın burulmalı alt grubudur ve bir p asalı için

$$T_p(A) = \{a \in A \mid \text{bazı } n \in \mathbb{N} \text{ için } p^n a = 0\}$$

kümesi A'nın bir p-burulmalı alt grubudur.

Tanım 2.14.2. R bir halka ve $X \subseteq R$ bir alt küme olmak üzere eğer,

(i) $1 \in X$

(ii) X çarpmaya göre kapalıdır.

koşulları sağlanıyor ise X'e çarpımsal küme (birimli, çarpımsal olarak kapalı küme) denir. Şimdi, A bir R-modül olsun. Eğer A'nın her elemanı X'in bazı elemanları tarafından sıfırlanıyorsa A'ya X-burulmalı modül denir. Eğer A'nın içinde X'in elemanları tarafından sıfırlanan tek eleman 0 ise A'ya X-burulmasız modül denir.

Genel durumda, bir modül için "X-burulmalı alt modül" tanımı yapılamaz, çünkü bir A sağ R-modülü için $t_X(A) = \{a \in A \mid \text{bazı } x \in X \text{ için } ax = 0\}$ kümesi, her zaman alt modül olmak zorunda değildir.

Ancak bir A sağ R-modülü için $t_X(A)$ kümesinin bir alt modülü olması için bir koşul vardır. Bunun için bir tanıma ihtiyaç duyacağız.

Tanım 2.14.3. R bir halka, $X \subseteq R$ bir çarpımsal küme olsun. Eğer her $x \in X$, $r \in R$ için $ry = xs$ olacak şekilde bir $y \in X$ ve $s \in R$ varsa ve $rX \cap xR \neq \emptyset$ ise X kümesine sağ Ore koşulunu sağlar denir. Sağ Ore koşulunu sağlayan bir kümeye kısaca sağ Ore kümesi denir. Sol Ore kümesi tanımı da benzer şekilde yapılır.

Önteorem 2.14.4. *X kümesi, R halkasında bir sağ Ore kümesi olsun. Bu durumda,*

a) Verilen $x_1, \ldots, x_n \in X$ için $s_1, \ldots, s_n \in R$ vardır öyle ki $x_1 s_1 = \ldots = x_n s_n$ ve $x_1 s_1 \in X$ sağlanır ve $x_1 R \cap \ldots \cap x_n R \cap X \neq \emptyset$ olur.

b) Herhangi bir A sağ R-modülü için,

$$t_X(A) = \{a \in A \mid \textit{bazı } x \in X \textit{ için } ax = 0\}$$

kümesi, A'nın bir alt modülüdür.

Tanım 2.14.5. R bir halka, X bir sağ Ore kümesi ve A bir sağ R-modül olsun. Bu durumda Önteorem 2.9.4'te tanımlanan $t_X(A)$ kümesi A'nın bir X-burulmalı alt modülüdür. Ayrıca $t_X(R_R)$ kümesi, R'nin bir sağ idealidir ve eğer $f : A \to B$ bir sağ R-modül homomorfizması ise $f(t_X(A)) \leq t_X(B)$ dir.

Önteorem 2.14.6. *R bir halka ve X bir sağ Ore kümesi olsun.*

(a) *A bir sağ R-modül olmak üzere $t_X(A)$ kümesi bir X-burulmalı alt modüldür ve $A/t_X(A)$ bir X-burulmasız modüldür.*

(b) *X-burulmalı bir sağ R-modülün tüm alt modülleri, bölüm modülleri ve toplamları (dik ya da standart) X-burulmalıdır.*

(c) *A bir sağ R-modül ve $B \leq A$ alt modülü için B ve A/B modülleri X-burulmalı ise A modülü de X-burulmalıdır.*

(d) *X-burulmasız sağ R-modüllerin tüm alt modülleri ve dik çarpımları X-burulmasızdır.*

(e) *A bir sağ R modül ve $B \leq A$ onun X-burulmasız alt modülü olsun. Eğer B'nin, A'nın tüm sıfırdan farklı alt modülleriyle kesişimi sıfırdan farklı ise A modülü X-burulmasızdır.*

(f) *A bir sağ R-modül ve $B \leq A$ alt modülü olmak üzere, B ve A/B modülleri X-burulmasız ise A modülü de X-burulmasızdır.*

Önerme 2.14.7. *R bir halka, $X \subseteq R$ bir çarpımsal küme ve A bir X-burulmasız Noether sağ R-modül olsun. $f \in End_R(A)$ ve $A/f(A)$ X-burulmalı ise $Çek(f) = 0$ olur.*

Sonuç 2.14.8. *R bir sağ Noether halka ve $X \subseteq R$ bir sağ Ore kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $l.ann_R(x) = 0$ ise X'in tüm elemanları R'de sıfır bölen değildir.*

Sonuç 2.14.9. *R bir sağ Noether halka olsun.*

(a) *Sonlu üretilmiş bir sağ R-modül üzerinde tanımlı her örten endomorfizma otomorfizmadır.*

(b) *$x, y \in R$ için $xy = 1$ ise $yx = 1$ dir.*

2.15 Kalıtsal Burulma Teorisi

Tanım 2.15.1. Bir $\mathbf{C}$ kategorisi,

1) $Ob(\mathbf{C})$ nesneler sınıfından;

2) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için, $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ morfizmalar kümesinden (farklı (A, B) ve (C, D) çiftleri için

$$Mor_{\mathbf{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathbf{C}}(C, D) = \emptyset$$

olmak üzere);

3) $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ olmak üzere her (g,f) çiftine bunların bileşkesi denilen $g \circ f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,C)$ morfizmasını karşılık getiren $Mor_{\mathbf{C}}(B,C) \times Mor_{\mathbf{C}}(A,B) \to Mor_{\mathbf{C}}(A,C)$ bileşke fonksiyonundan oluşur, öyle ki;

   a) Her A, B, C nesneleri ve $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathbf{C}}(B,C), h \in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ morfizmaları için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır (birleşme kuralı).

   b) Her $A \in Ob(\mathbf{C})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathbf{C}}(B,A)$ için $f \circ 1_A = f$, $1_A \circ g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $1_A \in Mor_{\mathbf{C}}(A,A)$ birim homomorfizması vardır.

Bizim ilgileneceğimiz kategori ise R birimli halkası için $R - Mod$ kategorisidir. Bu kategorinin nesneleri tüm sağ R-modüller, morfizmaları modül homomorfizmaları $(Mor_{R-mod}(M,N) = Hom_R(M,N))$, bileşkeleri ise homomorfizmaların alışılmış bileşkeleridir.

Tanım 2.15.2. $\mathbf{C}$ bir kategori ve $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ çifti $\mathbf{C}$'nin

(i) Her $T \in \mathscr{T}$ ve $F \in \mathscr{F}$ için $Hom(T,F) = 0$

(ii) Her $F \in \mathscr{F}$ için $Hom(A,F) = 0$ sağlanıyorsa $A \in \mathscr{T}$

(iii) Her $T \in \mathscr{T}$ için $Hom(T,B) = 0$ ise $B \in \mathscr{F}$

koşullarını sağlayan iki nesneler sınıfı olsun. Bu durumda $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ ikilisine burulma teorisi denir.

Burada $\mathscr{F}$ sınıfına bir burulmalı sınıf denir ve nesneleri burulmalı nesnelerdir. Benzer şekilde $\mathscr{T}$ sınıfına burulmasız sınıf denir ve nesneleri burulmasız nesnelerdir.

Tanım 2.15.3. $\mathscr{C}$ herhangi bir nesneler sınıfı olsun. Bu durumda;

$$\mathscr{F} = \{F \mid \text{her } C \in \mathscr{C} \text{ için } Hom(C,F) = 0\}$$

$$\mathscr{T} = \{T \mid \text{her } F \in \mathscr{F} \text{ için } Hom(T,F) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan nesneler için $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ ikilisine $\mathscr{C}$ sınıfının ürettiği burulma teorisi denir.

Tanım 2.15.4. $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ bir burulma teorisi olsun. Eğer $\mathscr{T}$ sınıfı kalıtsal ise yani alt modülleri altında kapalı ise $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ burulma teorisine kalıtsaldır denir.

Önerme 2.15.5.

Bir $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ burulma teorisi kalıtsaldır $\iff$ $\mathscr{F}$ injektif bürümleri altında kapalıdır.

Önerme 2.15.6. *$\mathscr{C}$ alt modülleri ve bölüm modülleri altında kapalı bir sınıf olsun. Bu durumda $\mathscr{C}$ tarafından üretilen burulma teorisi kalıtsaldır.*

2.16 İnjektif Modüller

Tanım 2.16.1. R bir halka, A ve B sağ R modül olsun. Eğer herhangi bir $C \leq B$ alt modülü için tüm $C \to A$ homomorfizmaları $B \to A$ homomorfizmalarına genişletilebiliyorsa A modülüne injektif modül denir. Kısacası,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\leq"] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ A & \end{tikzcd}$$

diyagramı sağlanır.

Örneğin, yarı basit bir halka üzerinde tanımlı her modül injektiftir.

Önerme 2.16.2. *İnjektif modüllerin tüm dik toplananları ve dik çarpımları injektiftir.*

Önerme 2.16.3. *[Baer Kriteri] A bir sağ R-modül olsun. Bu durumda A injektif modüldür ancak ve ancak her $I \lhd_r R$ sağ ideali ve her $f \in Hom_R(I, A)$ için bir $a \in A$ vardır öyle ki her $r \in I$ için $f(r) = ar$ dir.*

Tanım 2.16.4. A bir $\mathbb{Z}$-modül olmak üzere eğer sıfırdan farklı her $n \in \mathbb{Z}$ için $nA = A$ eşitliği sağlanıyorsa A'ya bölünebilir modül denir.

Önerme 2.16.5. *(a) Bir A $\mathbb{Z}$-modülü injektiftir ancak ve ancak A bölünebilir modüldür.*

(b) Her $\mathbb{Z}$-modül bir bölünebilir modülün alt modülüdür.

Önteorem 2.16.6. *R bir halka ve D bölünebilir $\mathbb{Z}$-modül olmak üzere $H = Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ grubu bir injektif sağ (ya da sol) R-modüldür.*

Teorem 2.16.7. *[Baer] Her modül injektif bir modülün alt modülüdür.*

Sonuç 2.16.8. *[Baer] Bir A modülü injektiftir ancak ve ancak A, onu içeren her modülün dik toplananıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$): A bir injektif modül ve $A \leq B$ olsun. Bu durumda A modülünün üzerindeki birim dönüşüm $f : B \to A$ homomorfizmasına genişletilebilir. Böylece $B = A \oplus Çekf$ elde edilir.

($\Leftarrow$): Eğer dik toplanan koşulu sağlanıyorsa o zaman A modülü bir injektif modülün dik toplananıdır. Dolayısıyla Önerme 2.16.2'den A injektif modüldür. $\square$

Sonuç 2.16.9.

Değişmeli bir halka regülerdir $\iff$ *Halka üzerinde tanımlı tüm basit modüller injektiftir.*

2.17 İnjektif Bürümler

Tanım 2.17.1. Bir A modülünün öz büyük genişlemesi, $B > A$ iken $A \leq_e B$ koşulunu sağlayan bir B modülüdür. Ayrıca A bir öz büyük genişlemeye sahiptir ancak ve ancak $f(A) \leq C$ koşulunu sağlayan bir $f : A \to C$ büyük monomorfizması vardır.

Önerme 2.17.2. *[Eckmann-Schopf]*

A modülü injektiftir $\iff$ *A'nın öz büyük genişlemesi yoktur.*

Tanım 2.17.3. C bir modül, $A \leq C$ alt modülü olsun. Eğer A'nın C içinde bir öz büyük genişlemesi yoksa, yani bir $B \leq C$ için $A \leq_e B$ iken $A = B$ oluyorsa, A, C modülünde büyükçe kapalıdır denir.

Önerme 2.17.4. *C bir modül, $A \leq_\oplus C$ dik toplananı olsun. Bu durumda A, C modülünde büyükçe kapalıdır.*

Önerme 2.17.5. *E bir injektif modül ve $A \leq E$ alt modülü olsun. Bu durumda,*

A injektiftir $\iff$ *A, E içinde büyükçe kapalıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$): A modülü injektif ise Önerme 2.17.2'den A, kendisini içeren her alt modülün içinde büyükçe kapalıdır.

($\Leftarrow$): A modülü E modülü içinde büyükçe kapalı olsun ve bir $A \leq_e B$ büyük genişlemesini düşünelim. Bu durumda $i : A \to E$ içerim dönüşümü $f : B \to E$ homomorfizmasına genişletilebilir. $A \cap Çekf = 0$ ve $A \leq_e B$ olduğundan $Çekf = 0$ dır, yani $f : B \to f(B)$ bir izomorfizma olur. Bu durumda $A = f(A) \leq_e f(B) \leq E$ ve A modülü E içinde büyükçe kapalı olduğundan $f(B) = A$ elde edilir. Buradan $B = A$ sağlanır. Dolayısıyla A'nın bir öz büyük genişlemesi yoktur ve Önerme 2.17.2'den A injektif modüldür. $\square$

Tanım 2.17.6. A bir modül olmak üzere, A'nın bir büyük genişlemesi olan modüle A modülünün injektif bürümü (injektif zarfı) denir.

Teorem 2.17.7. *[Baer,Eckmann-Schopf] A bir modül olsun. Bu durumda,*

(a) A'yı içeren her injektif modül, A'nın bir injekttif bürümüdür. Özel olarak, A'nın injektif bürümü her zaman vardır.

(b) $A \leq_e B$ olduğunda, A üzerindeki birim dönüşüm injektif bir E modülü için $B \to E$ monomorfizmasına genişletilebilir.

(c) E' injektif modülü için $A \leq E'$ olduğunda A üzerindeki birim dönüşüm $E \to E'$ monomorfizmasına genişletilebilir.

Önerme 2.17.8. *A ve A' birbirine izomorf iki modül ve E ve E' bu modüllerin injektif bürümleri olsun. Bu durumda A'dan A' ye tanımlı herhangi bir izomorfizma Eden E' ye gidecek bir izomorfizmaya genişletilebilir. Özel olarak, Bir A modülü için E ve E' iki injektif bürüm ise A üzerindeki birim dönüşüm Eden E' ye bir izomorfizmaya genişletilebilir.*

Önerme 2.17.9. *Verilen bir A modülü için, A'nın injektif bürümü $E(A)$ şeklinde gösterilir. $E(A)$ modülü izomorfizma farkıyla tek olduğundan A'nın tüm injektif bürümleriyle ilgili genel özellikleri sağlar. Dolayısıyla "$B = E(A)$" eşitliği yalnızca "B, A'nın bir injektif bürümüdür" ifadesi için kullanılır.*

Teorem 2.17.10. *Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R *bir Noether halkadır.*

(ii) İnjektif R*-modüllerin dik toplamı injektiftir.*

(iii) Basit R*-modüllerin sayılabilir sonsuz sayıdaki injektif bürümlerinin ailesinin her dik toplamı injektiftir.*

Önerme 2.17.11. R *bir Noether halka ve* $P \lhd R$ *asal ideal olsun.* $E = E(R/P)$ *ve* $A_n = ann_E(P^n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *diyelim. Bu durumda,*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

sağlanır. Dahası P *ideali,* R*'nin bir maksimal ideali ise* $ann_R(A_n) = P^n$ *ve*

$$ann_R(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$$

elde edilir.

Önerme 2.17.12. A *bir* R*-modül ve* $0 \neq a \in A$ *olsun. Bu durumda bir* S *basit modülü ve* $f : A \to E(S)$ *homomorfizması vardır öyle ki* $f(a) \neq 0$ *olur.*

2.18 Sonlu Ranka Sahip Modüller

Tanım 2.18.1. A bir modül olmak üzere , $E(A)$ injektif bürümü ayrıştırılamaz alt modüllerin sonlu dik toplamı ise A modülüne sonlu ranka sahip modül denir. Literatürde, yer yer sonlu ranka sahip bir modül sonlu boyutlu modül olarak da adlandırılır. Dahası, Önerme 2.14.4 ve Teorem 2.14.6'da verilen denk koşullar sıklıkla sonlu rankın tanımı olarak alınır.

Tanım 2.18.2. A sıfırdan farklı bir modül olmak üzere, A'nın herhangi iki alt modülünün kesişimi sıfırdan farklı ise A'ya düzgün modül denir. Denk olarak A'nın sıfırdan farklı her alt modülü A'da büyük alt modül ise A'ya yine düzgün modül denir.

Önteorem 2.18.3.

$$\text{\textit{Sıfırdan farklı bir } } A \text{ \textit{ modülü düzgündür}} \iff E(A) \text{ \textit{ ayrıştırılamazdır.}}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$): A bir düzgün modül ve $B, C \leq A$ altmodülleri için $E(A) = B \oplus C$ olsun. $(B \cap A) \cap (C \cap A) = 0$ ve A düzgün modül olduğundan ya $B \cap A = 0$ ya da $C \cap A = 0$ sağlanır. Bu durumda $A \leq_e E(A)$ olduğundan ya $B = 0$ ya da $C = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $E(A)$ modülü ayrıştırılamazdır.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki A düzgün modül olmasın. Bu durumda A modülünün $B \cap C = 0$ olacak şekilde B ve C alt modülleri vardır. O zaman sıfırdan farklı bir $E \leq E(A)$ alt modülü vardır ve E modülü B modülü için bir injektif bürümdür. Dahası $B \leq_e E$ olduğundan $E \cap C = 0$ dır, buradan $E \neq E(A)$ elde edilir. Dolayısıyla E modülü $E(A)$ modülünün aşikar olmayan bir dik toplananıdır, yani $E(A)$ modülü ayrıştırılamaz değildir. □

Önerme 2.18.4.

Bir A modülü sonlu ranka sahiptir $\iff$ A düzgün alt modüllerinin dik toplamı olan bir büyük alt modüle sahiptir.

Kanıt. ($\Leftarrow$): Kabul edelim ki $A_1, \ldots, A_n$ modülleri A'nın bağımsız düzgün alt modülleri olsun ve $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq_e A$ koşulu sağlansın. Bu durumda $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq_e E(A)$ olur ve

$$E(A) = E(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) \cong E(A_1) \oplus \ldots \oplus E(A_n)$$

elde edilir. Her bir $E(A_i)$ ayrıştırılamaz olduğundan Önteorem 2.18.3'ten A sonlu ranka sahiptir.

($\Rightarrow$): A sonlu ranka sahip bir modül olsun. Bu durumda ayrıştırılamaz E_i modülleri için $E(A) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ olur ve her bir E_i modülünün sıfırdan farklı olduğunu kabul edebiliriz. Önteorem 2.18.3'ten her bir E_i düzgün modüldür. Dahası $A_i = A \cap E_i$ olacak şekilde tanımlanmış her $A_i \leq A$ alt modülü sıfırdan farklıdır çünkü $A \leq_e E(A)$ dır. Buradan A_i modülleri düzgündür. A_i modülleri, A'nın bağımsız alt modülleridir ve E_i modülleri düzgün olduğundan her i için $A_i \leq_e E_i$ dir. Bu durumda

$$A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq_e E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = E(A)$$

elde edilir ve sonuç olarak $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq_e A$ olur. □

Önteorem 2.18.5. *Bir E modülü n tane düzgün alt modülün sonlu dik toplamı ise E, $(n+1)$ tane sıfırdan farklı alt modülünün dik toplamını içermez.*

Teorem 2.18.6. *[Goldie]*

Bir A modülü sonlu ranka sahiptir $\iff$ *A sıfırdan farklı alt modüllerinin sonsuz dik toplamını içermez.*

Sonuç 2.18.7. *Herhangi bir A Noether modülü sonlu ranka sahiptir.*

Sonuç 2.18.8. *Sıfırdan farklı her Noether modülün bir düzgün alt modülü vardır.*

Önerme 2.18.9.

Bir A modülü sonlu ranka sahiptir $\iff$ *A sonlu üretilmiş bir alt modülünün büyük genişlemesidir.*

Önerme 2.18.10.

Bir A modülü sonlu ranka sahiptir $\iff$ *A büyükçe kapalı alt modülleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.*

2.19 Düzgün Rank

Tanım 2.19.1. A sonlu ranka sahip bir modül ise bir $n \geq 0$ tam sayısı vardır öyle ki $E(A)$ modülü n tane düzgün alt modülün dik toplamıdır. Dahası, Önteorem 2.18.5'ten $E(A)$'nın düzgün alt modüllerin içindeki herhangi bir ayrışımı tam olarak n tane dik toplanana sahiptir. Bu durumda n sayısı tektir. Bu n sayısına düzgün rank, ya da sadece A'nın rankı denir ve $rank(A)$ ile gösterilir. (Literatürde A'nın rankına aynı zamanda Goldie rankı, Goldie Boyutu, düzgün boyut ya da A'nın boyutu dendiği de görülür.)

Önerme 2.19.2. *$A_1, \ldots, A_n$ sonlu ranka sahip modüller olsun. Bu durumda, $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ modülü de sonlu ranka sahiptir ve*

$$rank(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) = rank(A_1) + \ldots + rank(A_n)$$

eşitliği sağlanır. Diğer bir deyişle düzgün rank dik toplamlar üzerinde toplamsaldır.

Önerme 2.19.3. *A bir modül ve $n \geq 0$ bir tam sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) A, sonlu ranka sahiptir ve $rank(A) = n$ dir.

(b) A modülü, n tane düzgün alt modülünün dik toplamına eşit olan bir büyük alt modüle sahiptir.

(c) A modülü, sıfırdan farklı n tane alt modülünün dik toplamını içerir ancak $n+1$ tane sıfırdan farklı alt modülünün dik toplamını içermez.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (c)$: Hipotezden $i = 1, \ldots, n$ olmak üzere $E_i \leq E(A)$ alt modülleri için $E(A) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ dir. Önteorem 2.18.5'ten $E(A)$ modülü $n+1$ tane sıfırdan farklı alt modülünün dik toplamını içeremez. Bu sebeple A modülü de aynı özelliği sağlar Öte yandan A modülü n tane sıfırdan farklı alt modülünün dik toplamını içerir ve bu modüller $E_1 \cap A, \ldots, E_n \cap A$ dır.

$(c) \Rightarrow (b)$: $A_1, \ldots, A_n$ modülleri A modülünün sıfırdan farklı bağımsız alt modülleri olsun. $B, C \leq A_1$ olmak üzere $B \cap C = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı B ve C alt modülleri yoktur, eğer olsaydı A modülü $B \oplus C \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ olacak şekilde $n+1$ tane sıfırdan farklı alt modülünün dik toplamını içerirdi. Bu sebeple A_1 düzgün modüldür ve benzer şekilde her bir A_i düzgün modüldür. Kabul edelim ki $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ modülü A'nın büyük alt modülü olmasın. Bu durumda sıfırdan farklı bir $A_{n+1} \leq A$ modülü vardır öyle ki $(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) \cap A_{n+1} = 0$ sağlanır. Ancak bu durumda A modülü sıfırdan farklı $n+1$ tane alt modülünün dik toplamını içerir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir ve $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq A$ elde edilir.

$(b) \Rightarrow (a)$: Önerme 2.18.4'te kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2.19.4. *A bir modül ve $B \leq A$ alt modülü olsun.*

(a) Kabul edelim ki A sonlu ranka sahip olsun. Bu durumda B sonlu ranka sahiptir ve $rank(B) \leq rank(A)$ sağlanır. Dahası,

$$rank(B) = rank(A) \iff B \leq_e A$$

olur.

(b) Kabul edelim ki B ve A/B modülleri sonlu ranka sahip olsun. Bu durumda A sonlu ranka sahiptir ve

$$rank(A) \leq rank(B) + rank(A/B)$$

sağlanır.

Sonuç 2.19.4 (b) ifadesinde B modülü büyükçe kapalı olursa eşitsizlik

$$rank(A) = rank(B) + rank(A/B)$$

haline gelir.

Sonuç 2.19.5. *A sonlu ranka sahip bir modül ve $f : A \to A$ bir monomorfizma olsun. Bu durumda $f(A) \leq_e A$ elde edilir.*

Tanım 2.19.6. Bir R halkası için R_R sağ R-modülü düzgün boyuta sahip ve R'nin sağ sıfırlayıcı idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağlanıyor ise R'ye sağ Goldie Halkası denir.

Teorem 2.19.7. *R bir asal sağ Goldie halkası olsun ve kabul edelim ki $Soc(R) \neq 0$ olsun. Bu durumda R basit Artin halkadır.*

Tanım 2.19.8. R bir halka olmak üzere, bir $r \in R$ ve herhangi bir $a \in R$ için $ra = 0$ eşitliğinin sağlanması $a = 0$ olmasını gerektiriyor ise r elemanına regüler eleman denir.

Önteorem 2.19.9. *R sonlu sağ Goldie boyutuna sahip bir sağ tekil olmayan halka olsun. Bu durumda R halkasının sağ regüler elemanları regülerdir.*

Sonuç 2.19.10. *R bir yarı asal sağ Goldie halkası olsun. Bu durumda R'nin sağ regüler elemanları regülerdir.*

Teorem 2.19.11. *R, sağ sıfirlayıcıları ile artan zincir koşulunu sağlayan bir yarı asal halka olsun. Bu durumda R halkasının sıfirdan farklı tek yönlü nil ideali yoktur.*

Teorem 2.19.12. *[Goldie] R bir yarı asal Goldie halkası ve $I \leq_e R$ büyük sağ ideali olsun. Bu durumda I ideali R'nin bir regüler elemanını içerir.*

Kanıt. R'nin bir regüler eleman içerdiğini göstermemiz için bir sağ regüler eleman içerdiğini ve Sonuç 2.19.10'u kullanmamız yeterlidir. Teorem 2.19.11'den I bir nil ideal değildir. a_1, I idealinin $r(a_1)$ maksimal olacak şekilde üstel sıfır olmayan bir elemanı olsun. $r(a_1) \subseteq r(a_1^2)$ ve $a_1^2 \in I$ üstel sıfır değildir. a_1'in seçiliminden $r(a_1) = r(a_1^2)$ olmalıdır.

$r(a_1) = 0$ ise istenen elde edilir. $r(a_1) = 0$ olsun. O zaman $r(a_1) \cap I \neq 0$ dır. a_2 elemanı $r(a_1) \cap I$ kümesinin üstel sıfır olmayan bir elemanı olsun. a_2'yi $r(a_2)$ maksimal olacak şekilde seçelim. Benzer şekilde $r(a_2) = r(a_2^2)$ olur.

İddia 1: $a_1R + a_2R$ toplamı diktir.

$r_1, r_2 \in R$ için $a_1r_1 = a_2r_2$ olsun. $a_2 \in r(a_1)$ olduğundan $a_1a_2 = 0$ dır. Bu durumda $a_1^2r_1 = 0$ dır. Buradan $a_1r_1 = 0$ elde ederiz. Yani $a_1R \cap a_2R = 0$ dır. Yani $a_1R + a_2R$ toplamı diktir.

Aynı zamanda $r(a_1 + a_2) = r(a_1) \cap r(a_2)$ olur.

$r(a_1 + a_2) = 0$ durumunda eşitlik sağlanır. Kabul edelim ki $r(a_1 + a_2) \neq 0$ olsun. $r(a_1 + a_2) \cap I$ kümesinden bir a_3 elemanı alalım ve bu eleman üstel sıfır olmasın. a_3 elemanını $r(a_3)$ maksimal olacak şekilde seçelim. Benzer şekilde $r(a_3) = r(a_3^2)$ olmalıdır.

İddia 2: $a_1R + a_2R + a_3R$ toplamı diktir.

$r_1, r_2, x \in R$ için $a_3x = a_1r_1 + a_2r_2$ olsun. $a_3 \in r(a_1 + a_2) = r(a_1) \cap r(a_2)$ olduğundan $a_1a_2 = a_1a_3 = a_2a_3 = 0$ dır. Buradan $a_1r_1 = a_2r_2 = 0$ elde edilir. $a_3x = 0$ dır ve böylece $(a_1R + a_2R) \cap a_3R = 0$ olduğu görülür. Bu özellikleri kullanarak

$$r(a_1 + a_2 + a_3) = r(a_1) \cap r(a_2) \cap r(a_3)$$

olduğu sonucuna varılır. R halkası sonlu Goldie boyutuna sahip olduğundan bu işlem sonlu adımda durur. Yani I idealinin bazı $a_1, \ldots, a_n$ elemanları için $r(a_1 + \ldots + a_n) = 0$ olur ve Sonuç 2.19.10'dan bu eleman regülerdir. □

2.20 İnjektif Modüllerin Dik Toplamları

Teorem 2.20.1. *[Papp, Bass]*

Bir R halkası sağ Noetherdir $\iff$ İnjektif sağ R-modüllerin dik toplamları injektif modüldür.

Sonuç 2.20.2. *[Matlis, Papp] R bir sağ Noether halka olsun. Bu durumda her injektif sağ R-modül düzgün injektif modüllerin bir dik toplamıdır.*

Önerme 2.20.3. *[Matlis] R bir değişmeli Noether halka ve E bir injektif sağ R-modül olsun. Bu durumda,*

E düzgün modüldür $\iff$ Bir $P \lhd R$ asal ideali için $E \cong E((R/P)_R)$ sağlanır.

2.21 Krull Boyutu

Tanım 2.21.1. M bir sağ R-modül olsun. Bu durumda M'nin Krull boyutu $(k(M))$ şu şekilde tanımlanır.

(i) $M = 0$ ise $k(M) = -1$ dir.

(ii) α bir sıralı sayı ve $k(M) \nless \alpha$ ise bu durumda $i = 1, 2, \ldots$ ve $M_i \leq M$ olmak üzere $k(M_i/M_{i-1}) \nless \alpha$ koşulunu sağlayan bir $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots$ sonsuz azalan zinciri yok ise $k(R) = \alpha$ dır.

(iii) $k(M) = \alpha$ olacak şekilde bir α sıralı sayısı her zaman olmak zorunda değildir. Bu durumda M modülünün Krull boyutu yoktur denir.

Bir R halkasının Krull boyutu ise R_R modülünün Krull boyutudur.

Önerme 2.21.2. *(i) M bir modül ve $N \leq M$ alt modül olsun. Bu durumda $k(M/N)$ ve $k(N)$ mevcut ise $k(M) = sup\{k(M/N), k(N)\}$ dir.*

(ii) R bir halka olsun. Bu durumda $k(R)$ ve $k(M)$ mevcut ise $k(R) = \{k(M) \mid M$ sonlu üretilmiş bir $R-$modül$\}$ eşitliği sağlanır.

Önerme 2.21.3. *Bir R halkasının Krull boyutuna sahip her homomorfik görüntüsü $k(R)$ sayısından küçük eşit olacak şekilde bir Krull boyutuna sahiptir.*

Önerme 2.21.4. *Her Noether modül Krull boyutuna sahiptir.*

Önerme 2.21.5. *Krull boyutuna sahip her modül sonlu düzgün boyuta sahiptir.*

Sonuç 2.21.6. *M modülü Krull boyutuna sahip bir modül olsun. Bu durumda $\alpha = sup\{k(M/E) + 1 \mid E \leq_e M\}$ ise $k(M) = \alpha$ dır.*

Sonuç 2.21.7. *Krull Boyutuna sahip olan bir yarı asal halka sağ Goldie halkasıdır.*

Sonuç 2.21.8. *R Krull boyutuna sahip olan bir halka olsun. Bu durumda bir $P \lhd R$ asal ideali için $k(R) = k(R/P)$ dir.*

Bölüm 3

Sonlu Sıfırlanan Modüller

Bu bölümde, Beachy ve Blair'in [4] makalesinden faydalanarak sonlu sıfırlanan modülleri tanımlayacağız ve özelliklerini inceleyeceğiz. "H-koşulunu sağlayan modüller" olarak da bilinen sonlu sıfırlanan modüllerin, Homolojik Cebir ve değişmeli olmayan halkalarda lokalizasyon gibi konularda karşımıza çıkması ve etkin kullanılması sebebiyle halka kuramında önemli bir yeri vardır.

Tanım 3.0.1. M bir R-modül olsun. M modülünün $ann(M) = ann(m_1, \ldots, m_k)$ olacak şekilde sonlu bir $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq M$ alt kümesi varsa M'ye sonlu sıfırlanan modül denir.

Önerme 3.0.2.

M_R modülü sonlu sıfırlanandır $\iff$ $R/ann(M) \hookrightarrow M^{(k)} = M \oplus M \oplus \ldots \oplus M$ (*k tane*) *olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ ve bir gömme homomorfizması vardır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) M_R sonlu sıfırlanan bir modül olsun, yani bir $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq M$ sonlu alt kümesi için $ann(M) = ann(m_1, \ldots, m_k)$ olsun.

$$f : R/ann(M) \to M^{(k)}$$
$$r + ann(M) \mapsto (m_1 r, \ldots, m_k r)$$

fonksiyonunu düşünelim.

a) f iyi tanımlıdır: $r_1, r_2 \in R$ ve $r_1 + ann(M) = r_2 + ann(M)$ olsun. Bu durumda, $r_1 - r_2 \in ann(M)$ olduğundan her $i = 1, \ldots, k$ için $m_i(r_1 - r_2) = 0$, yani $m_i r_1 = m_i r_2$ olur, yani

$$f(r_1) = (m_1 r_1, \ldots, m_k r_1) = (m_1 r_2, \ldots, m_k r_2) = f(r_2)$$

sağlanır.

b) f bir R-modül homomorfizmasıdır: $r_1, r_2, c \in R$ için

$f((r_1 + ann(M) + (r_2 + ann(M)) = f((r_1 + r_2) + ann(M))$

$= (m_1(r_1 + r_2), \ldots, m_k(r_1 + r_2))$

$= (m_1 r_1 + m_1 r_2, \ldots, m_k r_1 + m_k r_2)$

$= (m_1 r_1, \ldots, m_k r_1) + (m_1 r_2, \ldots, m_k r_2) = f(r_1 + ann(M)) + f(r_2 + ann(M))$ sağlanır.

$f((rc) + ann(M)) = (m_1(rc), \ldots, m_k(rc)) = ((m_1 r)c, \ldots, (m_k r)c)$

$= (m_1 r, \ldots, m_k r)c = f(r)c$ elde edilir.

c) f bir gömme homomorfizmasıdır: $r_1, r_2 \in R$ ve $f(r_1 + ann(M)) = f(r_2 + ann(M))$ olsun. Bu durumda, $(m_1 r_1, \ldots, m_k r_1) = (m_1 r_2, \ldots, m_k r_2)$ ve her $i = 1, \ldots, k$ için $m_i(r_1 - r_2) = 0$ sağlanır. Böylece $r_1 - r_2 \in ann(M)$ ve $r_1 + ann(M) = r_2 + ann(M)$ olur, f fonksiyonunun bire bir olduğu görülmüş olur.

Dolayısıyla $f : R/ann(M) \hookrightarrow M^{(k)}$ dönüşümü gömme homomorfizmasıdır.

($\Longleftarrow$) Tersine bir $f : R/ann(M) \hookrightarrow M^{(k)}$ gömme homomorfizması var olsun ve kabul edelim ki $f(1 + ann(M)) = (m_1, \ldots, m_k)$ olsun.

İddia: $ann(M) = ann(m_1, \ldots, m_k)$ dır.

$\subseteq$: $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq M$ olduğundan açıktır.

$\supseteq$: $x \in ann(m_1, \ldots, m_k)$ olsun, yani her $i = 1, \ldots, k$ için $m_i x = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f(x + ann(M)) &= f(1 + ann(M)).x \\ &= (m_1, \ldots, m_k).x \\ &= (0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

olduğundan $x + ann(M) \in Çekf$ olur. f fonksiyonu bire bir olduğundan $x \in ann(M)$ elde edilir.

□

Önerme 3.0.3. *M_R sonlu sıfırlanan bir modül olsun. M modülünü kapsayan bir N R-modülü için $ann(M) = ann(N)$ koşulu sağlanıyorsa N de sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. Hipotezden bir $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq M$ sonlu alt kümesi için $ann(m_1, \ldots, m_k) = ann(M)$ sağlanır. Diğer yandan $M \subseteq N$ olduğundan $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq N$ ve yine hipotezden $ann(m_1, \ldots, m_k) = ann(M) = ann(N)$ dir, yani N modülü de sonlu sıfırlanandır. □

Önerme 3.0.3'ten yola çıkarak, M modülü sonlu sıfırlanan ise M'nin kopyalarının tüm dik toplamları ve dik çarpımları da sonlu sıfırlanandır diyebiliriz. Dahası, herhangi bir M R-modülü için, $I = M$ ve $M_\alpha = M$ olmak üzere $R/ann(M) \to \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ gömme homomorfizmasının varlığı, $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$'nin sonlu sıfırlanan olduğunu gösterir.

Önerme 3.0.4. *R, sağ sıfırlayıcıları üzerinde azalan zincir koşulunun sağlandığı bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda M'nin her alt modülü sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. M bir R-modül olsun ve kabul edelim ki R'nin sağ sıfırlayıcıları üzerinde azalan zincir koşulu sağlansın. Herhangi bir $N \leq M$ alt modülünü alalım. F' alt kümesi, $F \subseteq N \subseteq M$ olacak şekilde sonlu F alt kümelerinin sağ sıfırlayıcıları arasında minimal sıfırlayıcıya sahip alt küme olsun.
Herhangi bir $n \in N$ için, $ann(F' \cup \{n\}) \subseteq ann(F')$ olduğundan $ann(F' \cup \{n\}) = ann(F')$ elde edilir. Dolayısıyla $N.ann(F') = 0$ olur ve $ann(F') = ann(N)$ eşitliği sağlanır. □

Şimdi, Önerme 3.0.4'ün kısmen tersi sayılabilecek önermeyi vereceğiz.

Önerme 3.0.5. *M bir R-modül olmak üzere M'nin tüm alt modülleri sonlu sıfırlanan ise M'nin alt modüllerinin sıfırlayıcıları üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

Kanıt. Kabul edelim ki, $ann(M_1) \supseteq ann(M_2) \supseteq \ldots$ M'nin alt modüllerinin sıfırlayıcılarının bir azalan zinciri olsun. $N_m = \sum_{i=1}^{m} M_i$ diyelim. Bu durumda, herhangi bir $n \in N_m$ aldığımızda $i = 1, \ldots, m$ için $m_i \in M_i$ olmak üzere $n = m_1 + \ldots + m_m$ olur. Öte yandan, $x \in ann(M_m)$ aldığımızda zincir koşulundan her $i \leq m$ için $x \in ann(M_i)$ olur. Böylece $nx = (m_1 + \ldots + m_m)x = m_1x + \ldots + m_mx = 0 + \ldots + 0 = 0$ elde ederiz. Buradan $x \in ann(N_m)$ olur, yani $ann(N_m) = ann(M_m)$ dir.
Hipotezden $x_1, \ldots, x_t \in \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ vardır öyle ki $ann(\sum_{i=1}^{\infty} M_i) = ann(x_1, \ldots, x_t)$ sağlanır. Dahası bir k tam sayısı vardır öyle ki her $j \geq k$ için $\{x_1, \ldots, x_t\} \subseteq N_j$ dir. Böylece $j \geq k$ için $ann(M_j) = ann(N_j) = ann(N_k) = ann(M_k)$ sağlanır ve aldığımız zincirin sonlu adımda durduğu gösterilmiş olur. □

Teorem 3.0.6. *a) R bir halka olmak üzere M ve N R-modülleri için;*

(i) M modülü N modülünün kopyalarının dik toplamı içine gömülebilir.
($f : M \hookrightarrow \oplus N$ gömme homomorfizması vardır.)

(ii) N modülü M modülünün kopyalarının dik toplamının homomorf görüntüsüdür.
($g : \oplus M \to N$ epimorfizması vardır.)

koşulları sağlanıyorsa;

$$M \textit{ sonlu sıfirlanandır} \quad \Longleftrightarrow \quad N \textit{ sonlu sıfirlanandır.}$$

b) M modülü N modülünün kopyalarının bir dik çarpımına gömülebilen bir modül olsun. Eğer N'nin her alt modülü sonlu sıfirlanan ise M modülü için de aynı koşul sağlanır.

c) Eğer M modülünün tüm tam değişmez alt modülleri sonlu sıfirlanan ise o zaman M'nin her alt modülü sonlu sıfirlanandır.

d) $\{N_i\}_{i=1,\dots,n}$ ailesi, her alt modülü sonlu sıfirlanan olan modüllerin bir ailesi ise aynı koşul $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ için de sağlanır.

Kanıt. a) (i) ve (ii) koşulları sağlansın. Bu durumda $ann(M) = ann(N)$ olur. Bunu göstermek için $r \in ann(M)$ alalım. Herhangi bir $n \in N$ için (ii) koşulu sağlandığından bir $(m_1, \dots, m_k) \in \oplus M$ vardır öyle ki $g(m_1, \dots, m_k) = n$ diyebiliriz. $g(m_1, \dots, m_k)r = g(m_1 r, \dots, m_k r) = g(0, \dots, 0) = nr = 0$ eşitliği sağlandığından $r \in ann(N)$ olur, yani $ann(M) \subseteq ann(N)$ dir.

Tersine $x \in ann(N)$ olsun ve $m \in M$ alalım. $f(m) = (n_1, \dots, n_k, 0, \dots) \Rightarrow f(m)x = 0 = f(mx) \Rightarrow mx = 0$ olduğundan $x \in ann(M)$ olur. Buradan $ann(M) \supseteq ann(N)$ ve $ann(M) = ann(N)$ elde edilir.

$(\Rightarrow)$ (i) koşulunun varlığını kullanarak bu yönü ispatlayacağız. M_R sonlu sıfırlanan modül olsun ve kabul edelim ki $ann(M) = ann(m_1, \dots, m_k)$ olsun. O zaman f_α, f'in α. bileşeni olmak üzere, $1 \leq i \leq k$ için $\{f_\alpha(m_i)\}$ kümesi m_i elemanlarının f altındaki görüntülerinin sıfırdan farklı bileşenlerinin kümesi olsun. Bu küme sonludur. Bu kümeye X diyelim ve $r \in ann(X)$ olsun. Bu durumda her α ve i için $f_\alpha(m_i)r = 0$ olur, buradan her i için $f(m_i)r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $r \in ann(M) = ann(N)$ olur ve böylece $ann(X) \subseteq ann(N)$ olduğu gösterilmiş olur. Öte yandan alacağımız her $a \in ann(N)$ ve $f_\alpha(m_i) \in X$ için $f_\alpha(m_i)a = f_\alpha(m_i a) = 0$ ve f bir gömme fonksiyonu olduğundan her i için $m_i a = 0$ olur. Buradan $ann(N) \subseteq ann(X)$ olur ve böylece $ann(N) = ann(X)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ (ii) koşulunun varlığını kullanarak bu yönü ispatlayacağız.
$ann(N) = ann(n_1, \dots, n_k)$ olsun. g_α, g'nin α. bileşeni ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $\{g_\alpha^{-1}(n_i)\}$ sadece sonlu sayıda sıfırdan farklı elemana sahiptir. Bu elemanların oluşturduğu kümeye Y diyelim. Şimdi bir $y \in ann(Y)$ alalım. Bu durumda her α ve

i için $g_\alpha^{-1}(n_i).y = 0$ olur ve buradan $n_i y = 0$ olur, yani $y \in ann(M)$ elde ederiz. Yani $ann(Y) \subseteq ann(M)$ olduğu gösterilmiş olur. Öte yandan alacağımız her $b \in ann(M)$ ve $g_\alpha^{-1}(n_i) \in Y$ için $g_\alpha^{-1}(n_i)b = g_\alpha^{-1}(n_i b) = f(0) = 0$ olur. Buradan $ann(M) \subseteq ann(Y)$ olur ve böylece $ann(M) = ann(Y)$ elde edilir.

b) $M' \leq M$ olmak üzere $N' \subseteq N$, M' nün N içindeki tüm homomorfik görüntülerinin toplamı olsun.

$$\begin{aligned} f : M &\hookrightarrow \prod N \\ M' &\mapsto f(M') = \{f_{\alpha_i}(M')\} \leq \prod N \end{aligned}$$

$N_i = f_{\alpha_i}(M')$ olsun ve buradan $N' = \sum f_{\alpha_i}(M') = \sum N_i \leq N$. Bu durumda M', N'nün kopyalarının dik çarpımı içine gömülebilir.

$$\begin{aligned} M' &\hookrightarrow \prod N' \\ & \quad (f_{\alpha_1}(M'), \ldots, f_{\alpha_k}(M'), \ldots) \end{aligned}$$

O zaman $ann(M') = ann(N')$ olur. Bunu göstermek için $r \in ann(N')$ alalım. $x \in M'$ ise $f(x) \in \prod N'$ olur. $f(x) = (f_{\alpha_1}(x), \ldots)$ ise $f(x)r = (f_{\alpha_1}(x), \ldots)r = 0$ ve buradan $f(xr) = 0$ elde edilir.f bir monomorfizma olduğundan $xr = 0$ ve $r \in ann(M')$ elde edilir.

Tersine $r \in ann(M')$ ve $n \in N'$ alalım. $n = n_1 + \ldots + n_k = f_{\alpha_1}(m_1) + \ldots + f_{\alpha_k}(m_k)$ biçiminde olur. $nr = f_{\alpha_1}(m_1)r + \ldots + f_{\alpha_k}(m_k)r = f_{\alpha_1}(m_1 r) + \ldots + f_{\alpha_k}(m_k r) = f_{\alpha_1}(0) + \ldots + f_{\alpha_k}(0)$ elde edilir. $f(0) = 0$ olduğundan her i için $f_{\alpha_i}(0) = 0$ olur. Buradan $nr = 0$, yani $r \in ann(N')$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $ann(M') = ann(N')$ olur.

İddia: N', M' nün kopyalarının dik toplamının homomorfik görüntüsüdür.

$N' = \sum f_{\alpha_i}(M')$, $f_{\alpha_i} : M' \to N'$ var. Dahası $m_i \in M'$ için

$$\begin{aligned} f : \bigoplus M' &\to N' \\ (m_1, \ldots m_k, 0, \ldots) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(m_i) \end{aligned}$$

var ve bu örtendir.

(a) şıkkının ispatında olduğu gibi (a) şıkkının (ii) özelliğini ve N' modülünün sonlu sıfırlanan oluşunu kullanarak M' modülünün sonlu sıfırlanan olduğu gösterilmiş olur.

c) $M' \leq M$ ve $f_\alpha \in End(M)$ olmak üzere, $N = \sum f_\alpha(M')$ olsun yani N, M' nün tüm homomorfik görüntülerinin toplamı olsun. Bu şekilde tanımlanan N tam değişmez olur. Bu durumda kabulden N sonlu sıfırlanandır.

İddia: $ann(M') = ann(N)$

$\supseteq$: Birim endomorfizma için $f(M') = M'$ olur. Dolayısıyla $M' \subseteq N$ dir. Buradan $ann(N) \subseteq ann(M')$ elde edilir.

$\subseteq$: $r \in ann(M')$ ve $n \in N$ alalım. f_{α_i} homomorfizmalar ve $m_i \in M$ olmak üzere $n = f_{\alpha_1}(m_1) + \ldots + f_{\alpha_k}(m_k)$ şeklindedir. $nr = f_{\alpha_1}(m_1 r) + \ldots + f_{\alpha_k}(m_k r) = f_{\alpha_1}(0) + \ldots + f_{\alpha_k}(0) = 0$ ve dolayısıyla $r \in ann(N)$ olur.

Dolayısıyla $ann(N) = ann(M')$ sağlanır.

Şimdi, N modülünün M' alt modülünün kopyalarının dik toplamının homomorf görüntüsü olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için aşağıda verdiğimiz notu bu ispata uyarlayacağız.

Not. Eğer $f_\alpha : M_\alpha \to X$ R-homomorfizmaları varsa $f : \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \to X$ R- modül homomorfizmaları vardır. Burada M_α'lar aynı olmak zorunda değildir.

$$\begin{aligned} f : \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha &\to X \\ (m_1, \ldots m_k, 0, \ldots) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} f_i(m_i) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f_i(m_i) \in X$ olduğundan $\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i) \in X$ olur ve f bir R-modül homomorfizmasıdır.

Bu nottan yararlanarak her $\alpha \in I$ için $f_\alpha : M' \to N$ homomorfizmalarının varlığı $f : \bigoplus M' \to N$ bir R-homomorfizmasısının varlığını söyler. Dahası f örtendir çünkü her $n \in N$ için $m_i \in M$ olmak üzere $n = f_1(m_1) + \ldots + f_k(m_k)$ olur. Bu durumda $(m_1, \ldots, m_k, 0, \ldots) \in M'$ için $f(m_1, \ldots, m_k, 0, \ldots) = n$ olur.

(a) şıkkının ispatında olduğu gibi N'nin sonlu sıfırlanan olmasını ve (ii) özelliğini kullanırsak M' modülünün sonlu sıfırlanan olduğunu görmüş oluruz.

d) (c) şıkkını kullanırsak, $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ modülünün sadece tam değişmez alt modüllerini düşünmek yeterlidir. Bu alt modüller de $N_i' \subseteq N_i$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i'$ tipindedir. Bunu görmek için $I \leq N$ tam değişmez alt modülünü alalım ve $p_j : N \to N_j$ kanonik projeksiyon ve $i_j : N_j \to N$ kanonik içerim dönüşümü olsun. O zaman

$i_jp_j \in End(N)$ olur ve bu sebeple $i_jp_j(I) \subseteq I$ sağlanır. Buradan,

$$I \subseteq \bigoplus_{j=1}^{n} i_jp_j(I) \subseteq I \Rightarrow I = \bigoplus_{j=1}^{n} i_jp_j(I)$$

sağlanır. $i_jp_j(I) = N'_j$ dersek $I = \oplus_{j=1}^{n} N'_j$ tipinde olduğu kanıtlanmış olur. Kabulden bu tipteki her alt modülün sonlu sıfırlanan olduğu açıktır.

$\square$

Bölüm 4

Artin Halkalar ve H-Koşulu

Tezin bu bölümünde Smith ve Woodward'ın [14] makalesi incelenecektir. Sağ Artin halkaların üzerindeki sayılabilir üretilmiş sağ modüllerin sonlu sıfırlanan olması ile karakterize edildiği sonuç verilecek, zayıf H-koşulu tanımlanacaktır. Bir R-halkasının çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlamasının, üzerindeki sağ R-modüllerin zayıf H-koşulunu sağlamasına denk olduğu kanıtlanacaktır.

Önerme 4.0.1. *R değişmeli bir halka ise üzerindeki her sonlu üretilmiş R-modül H-koşulunu sağlar.*

Kanıt. R değişmeli bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. $X = \{x_1, \dots x_n\}$ için $M = \langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ alalım.
İddia: $ann_R(X) = ann_R(M)$

$\subseteq$: $r \in ann_R(X)$ alalım. Her $m \in M$ için $m = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$ olduğundan

$$mr = (x_1 r_1 + \dots + x_n r_n)r = x_1 r_1 r + \dots + x_n r_n r$$

olur ve R değişmeli olduğundan her $i = 1, \dots, n$ için $r_i r = r r_i$ dir. Dolayısıyla,

$$(x_1 r_1)r + \dots + (x_n r_n)r = (x_1 r)r_1 + \dots + (x_n r)r_n = 0.$$

sağlanır. Buradan $r \in ann_R(M)$ elde edilir.

$\supseteq$: $a \in ann_R(M)$ alalım. $X \subseteq M$ olduğundan ve her $m \in M$ için $ma = 0$ olduğundan özel olarak her $x \in X$ için $xa = 0$ sağlanır. Dolayısıyla $a \in ann_R(X)$ ve bu durumda $ann_R(M) = ann_R(X)$ eşitliği sağlanmış olur. $\square$

Teorem 4.0.2. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) *R sağ Artindir.*

ii) *Her sağ R-modül H-koşulunu sağlar.*

iii) *Her sayılabilir üretilmiş sağ R-modül H-koşulunu sağlar.*

iv) *R, çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ve her devirli sağ R-modül H-koşulunu sağlar.*

Teoremdeki (i) ve (ii) koşullarının denkliği daha önce bağımsız olarak C. Faith, A. Ghorbani, C.R. Hajarnavis, T.H. Lenagan ve ayrıca J.A. Beachy tarafından kanıtlanmıştır. Teorem 4.0.2'yi birkaç önteorem ile kanıtlayabiliriz.

Önteorem 4.0.3. *R bir sağ Artin halka olsun. Bu durumda her sağ R-modül H-koşulunu sağlar.*

Kanıt. M herhangi bir R-modül olsun. $F \subseteq M$ sonlu bir alt küme olsun öyle ki $ann_R(F)$, M'nin sonlu alt kümelerinin sıfırlayıcılarının ailesinde minimal olsun. $m \in M$ alalım. O zaman $ann_R(F \cup \{m\}) \subseteq ann_R(F)$ olduğundan $m.ann_R(F) = 0$ olur. Buradan $M.ann_R(F) = 0$ ve dolayısıyla $ann_R(M) = ann_R(F)$ elde edilir. □

Tanım 4.0.4. R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bir $N \leq M$ sonlu üretilmiş alt modülü için $ann_R(M) = ann_R(N)$ oluyorsa M'ye zayıf H-koşulunu sağlar denir.

Önerme 4.0.5. *Bir modül H- koşulunu sağlıyorsa zayıf H-koşulunu da sağlar.*

Kanıt. M bir R-modül olsun ve kabul edelim ki H-koşulunu sağlasın. Bu durumda bir $X \subseteq M$ sonlu alt kümesi için $ann_R(X) = ann_R(M)$ olur.

Öte yandan X'in ürettiği modül sonlu üretilmiş olup $\langle X \rangle \leq M$ olduğundan $ann_R(M) \subseteq ann_R(\langle X \rangle)$ sağlanır. Ayrıca $X \subseteq \langle X \rangle$ olduğundan $ann_R(\langle X \rangle) \subseteq ann_R(X) = ann_R(M)$ olur. Böylece $ann_R(\langle X \rangle) = ann_R(M)$ elde edilir ve zayıf H-koşulu sağlanmış olur. □

Örnek 4.0.6. *R halkası Artin olmayan basit bir halka ve S basit sağ R-modül olsun. S basit modül olduğundan devirlidir ve zayıf H-koşulunu sağlar. Ancak S modülü H-koşulunu sağlamaz. Çünkü $ann_R(S) = 0$ dır. Eğer H-koşulunu sağlasaydı $R/ann_R(S)$ yani R_R, S modülünün kopyalarının sonlu bir dik toplamı içine gömülebilirdi. R halkası Artin olmayan bir halka olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla, S modülü H-koşulunu sağlamaz.*

Önteorem 4.0.7. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) R, çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.

ii) Her sağ R-modül zayıf H-koşulunu sağlar.

iii) Her sayılabilir üretilmiş sağ R-modül zayıf H-koşulunu sağlar.

iv) Her sol R-modül zayıf H-koşulunu sağlar.

v) Her sayılabilir üretilmiş sol R-modül zayıf H-koşulunu sağlar.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$: R bir halka olsun ve (i) koşulu sağlansın. M bir R-modül olsun ve $\langle X \rangle = N \leq M$ sonlu üretilmiş alt modülü için $ann_R(N)$, M'nin sonlu üretilmiş alt modüllerinin sıfırlayıcılarının ailesinde minimal olan alt modül olsun.
İddia: $ann_R(M) = ann_R(N)$
$m \in M$ alalım. $\langle X \rangle \subseteq \langle X \cup \{m\} \rangle$ ve $ann_R(\langle X \cup \{m\} \rangle) \subseteq ann_R(\langle X \rangle)$ olduğundan $ann_R(\langle X \cup \{m\} \rangle) = ann_R(\langle X \rangle)$ olur. Buradan $m.ann_R(\langle X \rangle) = m.ann_R(N) = 0$. Bu durumda $M.ann_R(N) = 0$, yani $ann_R(N) = ann_R(M)$ eşitliği sağlanır.

$(ii) \implies (iii)$: Her sağ R-modül için zayıf H-koşulu sağlandığından özel olarak (iii) sağlanır.

$(iii) \implies (i)$: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$, R'nin çift yönlü ideallerinin bir azalan zinciri olsun ve $M = (R/I_1) \oplus (R/I_2) \oplus \ldots$ şeklinde bir sağ R-modül M tanımlansın. Bu durumda M sayılabilir üretilmiş bir modüldür. (iii) koşulundan bir sonlu üretilmiş $N \leq M$ alt modülü vardır öyle ki $ann_R(M) = ann_R(N)$ sağlanır. Bir k pozitif tam sayısı için $N \subseteq (R/I_1) \oplus \ldots \oplus (R/I_k)$ dir. O zaman, $I_k = ann_R((R/I_1) \oplus \ldots \oplus (R/I_k)) \subseteq ann_R(N) = ann_R(M) = \bigcap_{n \geq 1} I_n$. Yani $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \ldots$ eşitliğinden alınan zincirin sonlu bir adımda durduğu görülmüş olur.

$(i) \iff (iv) \iff (v)$ Simetriden sağlanır. □

R herhangi bir halka olsun. Bir $A \lhd R$ sağ ideali ve $r \in R$ için tanımlanan $(A : r) = \{s \in R \mid rs \in A\}$ kümesi bir sağ idealdir.
Çünkü, $s_1, s_2 \in (A : r)$ alındığında, $r(s_1 - s_2) = rs_1 - rs_2$ olur, $rs_1, rs_2 \in A$ ve A bir sağ ideal olduğundan $rs_1 - rs_2 \in A$ olur. Dolayısıyla $s_1 - s_2 \in (A : r)$ olduğu görülür. Ayrıca $s \in (A : r)$, $t \in R$ için $s \in (A : r)$ ise $rs \in A$ ve A bir sağ ideal olduğundan $(rs)t = r(st) \in A$ elde edilir. Dolayısıyla $st \in (A : r)$ olup $(A : r)$ kümesi bir sağ idealdir.

Önerme 4.0.8. *$A \lhd R$ bir büyük sağ ideal ise herhangi bir $r \in R$ için $(A : r)$ de büyük sağ idealdir.*

Kanıt. $(A : r) = \{s \in R \mid rs \in A\}$ kümesi olmak üzere,
İddia: $(A : r) \leq_e R$.
$0 \neq I \leq R_R$ sağ idealini alalım. Bu durumda;

1) $rI = 0$ ise $I \cap (A : r) = I \neq 0$ olur.

2) $rI \neq 0$ ise $A \leq_e R$ olduğundan $rI \cap A \neq \{0\}$ olur. Bu durumda sıfırdan farklı bir $x \in I$ vardır öyle ki $rx \in A$ olur. Yani $x \in (A : r)$ elde edilir. Dolayısıyla $I \cap (A : r) \neq \{0\}$ sağlanır.

İki durumda da $I \cap (A : r) \neq \{0\}$ olduğundan $(A : r) \leq_e R$ elde edilmiş olur. □

Tanım 4.0.9. R bir halka olsun. R'nin her E büyük sağ ideali için $I \subseteq E$ ve I sağ ideal olarak R'nin büyük ideali olacak şekilde çift yönlü ideali varsa R'ye sağdan sınırlıdır denir.

Önteorem 4.0.10. *R halkası üzerindeki her devirli R-modül H-koşulunu sağlasın. Bu durumda R sağdan sınırlıdır.*

Kanıt. E, R'nin bir büyük sağ ideali olsun ve $I = ann_R(R/E)$ alalım. $I \lhd R$ çift yönlü idealdir ve $I \subseteq E$ sağlanır. Çünkü herhangi bir $x \in I$ için $(1+E)x = 0+E$ yani $x \in E$ dir.

Hipotezden bir k pozitif tam sayısı vardır öyle ki $1 \leq i \leq k$ olmak üzere bazı $a_i \in R$ elemanları için $I = \bigcap_{i=1}^{k} ann_R(a_i + E)$ sağlanır. Ayrıca, $ann_R(a_i + E) = \{r \in R \mid a_i r \in E\} = (E : a_i)$, yani $1 \leq i \leq k$ olacak şekildeki her i için $ann_R(a_i + E)$ büyük sağ idealdir. Bu durumda Önerme 2.9.3'ten I büyük sağ idealdir. □

Önteorem 4.0.11. *R, sağdan sınırlı bir halka olsun ve kabul edelim ki çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlasın. Bu durumda R'nin büyük sağ sokulu vardır.*

Kanıt. $\{I_i\}_{i \in I}$, R'nin sağ ideal olarak büyük olan çift yönlü ideallerinin ailesi olsun. $I \lhd R$ ise bu ailenin minimal elemanı olsun. $E \lhd R$ sağ ideali için $E \subseteq I$ ve $E_R \leq_e I_R$ koşulları sağlansın. Bu durumda E, R'nin bir büyük sağ ideali olur. Kabulden bir $J \lhd R$ çift yönlü ideali vardır öyle ki $J \subseteq E$'dir ve J, R'nin büyük sağ idealidir. Bu durumda $J \subseteq E \subseteq I$ olur ve buradan $J = I$'dır. Bu yüzden I'nın kendisinden başka büyük alt modülü yoktur. Bu durumda I_R yarı-basittir ve Önerme 2.9.12'den I, R'nin büyük sağ sokuludur. □

M bir R-modül olsun. M modülü sıfırdan farklı alt modüllerinin sonsuz sayıda dik toplamını içermezse M modülü sonlu düzgün boyuta sahiptir denir.

Önteorem 4.0.12. *R bir halka olsun ve her devirli R-modül H-koşulunu sağlasın. Ayrıca R çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlasın. Bu durumda R_R sonlu düzgün boyuta sahiptir.*

Kanıt. $S = \{A_i\}_{i\in I}$, R'nin çift yönlü ideallerinin bir ailesi olsun öyle ki her $i \in I$ için R/A_i R-modülü sonlu düzgün boyutlu olsun. Bu durumda $R \in S$ dir. Kabulden S'nin bir minimal I elemanı vardır. $A \in S$ olsun. $R/(A \cap I)$ R-modülü $(R/A) \oplus (R/I)$ R-modülünün içine gömülebilir. Çünkü;

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow (R/A) \oplus (R/I) \\ r &\mapsto (r + A, r + I) \end{aligned}$$

fonksiyonunu düşünelim.

(i) f iyi tanımlıdır: $r_1, r_2 \in R$ ve $r_1 = r_2$ olsun. Bu durumda
$f(r_1) = (r_1 + A, r_1 + I) = (r_2 + A, r_2 + I) = f(r_2)$.

(ii) f R-homomorfizmadır: $r_1, r_2, r, c \in R$ olsun.
$f(r_1 + r_2) = ((r_1 + r_2) + A, (r_1 + r_2) + I) = (r_1 + A, r_1 + A) + (r_2 + A, r_2 + I)$
$= f(r_1) + f(r_2)$
$f(rc) = (rc + A, rc + I) = c(r + A, r + I) = cf(r)$.

Buradan f bir R homomorfizmadır.
Öte yandan $x \in Çekf$ alalım. O zaman $f(x) = (x + A, x + I) = (0, 0)$ olur ve buradan $x \in I$ ve $x \in A$ elde ederiz. Dolayısıyla $Çekf = A \cap I$ olur. Yani $R/(A \cap I)$ R-modülü $(R/A) \oplus (R/I)$ R-modülünün içine gömülebilir.

Bu durumda hipotezden $(R/A) \oplus (R/I)$ sonlu düzgün boyuta sahiptir ve dolayısıyla $R/(A \cap I)$ da aynı özelliğe sahiptir. Buradan $A \cap I \in S$ ve $A \cap I \subseteq I$ sağlanır. I'nın seçilişinden $A \cap I = I$ dır ve $I \subseteq A$ elde ederiz. Böylece $I = \bigcap\{A \mid A \in S\}$ olur.

Varsayalım ki $I \neq 0$ olsun. $0 \neq a \in I$ alalım. Zorn Lemma'dan bir $E \lhd R$ sağ ideali vardır öyle ki $a \notin E$ özelliğini sağlayan maksimal sağ idealdir. O zaman R/E R-modülünün sıfırdan farklı her alt modülü sıfırdan farklı $a + E$ elemanını içerir. Bu yüzden R/E bir düzgün R-modüldür. Varsayımdan bir $F \subseteq (R/E)$ sonlu alt kümesi için $ann_R(R/E) =$

$ann_R(F)$ sağlanır. Eğer $B = ann_R(R/E)$ ise B bir çift yönlü idealdir öyle ki $B \subseteq E$ dir ve $|F| = n$ olmak üzere $R/B \hookrightarrow (R/E)^n$ gömme homomorfizması vardır. Bu yüzden $B \in S$ olur ve $a \in I \subseteq B \subseteq E$ çelişkisini elde ederiz. Dolayısıyla $I = 0$ dır ve R_R sonlu düzgün boyuta sahiptir. $\square$

Sonuç 4.0.13. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) R sağ Artindir.

ii) Her sağ R-modül H-koşulunu sağlar.

iii) Sayılabilir üretilmiş her sağ R-modül H-koşulunu sağlar.

iv) R, çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ve her devirli sağ R-modül H-koşulunu sağlar.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$: Lemma 4.0.3'te kanıtlanmıştır.

$(ii) \implies (iii)$: Açıktır.

$(iii) \implies (iv)$: Lemma 4.0.7'da kanıtlanmıştır.

$(iv) \implies (i)$: Önteorem 4.0.10 ve 4.0.11'dan R'nin büyük sağ sokulu vardır ve Önteorem 4.0.12'den R'nin sağ sokulu sonlu üretilmiştir. I, R'nin herhangi bir ideali olsun. R, (iv) koşulunu sağladığından R/I'da bu koşulu sağlar, yani R/I'nın sonlu üretilmiş büyük sağ sokulu vardır. Bu yüzden R'nin her halka homomorfizması altındaki görüntüsü sonlu üretilmiş büyük sağ sokula sahiptir ve Önerme 2.13.17'den R sağ Artindir. $\square$

Bölüm 5

Halka Yapısının Sonlu Sıfırlanan Modül Sınıfları ile Belirlenmesi

Bu bölümün temel amacı, üzerindeki bazı modül sınıfları sonlu sıfırlanan modüllerden oluşan halka yapılarının incelenmesi ve bu modül sınıflarının hangi koşullar altında sonlu sıfırlanan olduklarının araştırılmasıdır.

Beş alt bölümden oluşan bu bölümde, basit ve yarı basit modüller, tekil modüller, düzgün ve sonlu boyutlu modüller ve injektif modüller sınıflarının sonlu sıfırlanan olduğu durumlar incelenmiştir. Son kısımda teoriyi aydınlatan bir örneğe yer verilmiştir. Bu bölüm P.F. Smith ve A.R. Woodward'ın [15] makalesinin derlenmesidir.

5.1 Basit ve Yarı Basit Modüller

İlk olarak, basit ve yarı basit modüllerin sonlu sıfırlanan olduğu durumu inceleyeceğiz.

Teorem 5.1.1. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) R'nin her P sağ primitif ideali için R/P Artindir.

ii) Her basit sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$: M bir basit sağ R-modül olsun. O zaman $P = ann_R(M)$, R'nin bir sağ primitif idealidir ve M bir sağ R/P-modül olarak düşünülebilir. R/P Artin olduğundan Sonuç 4.0.13'ten $M_{R/P}$ modülü sonlu sıfırlanandır ve buradan M, R-modül olarak sonlu sıfırlanandır diyebiliriz.

$(ii) \implies (i)$: P, R halkasının bir sağ ilkel ideali olsun. O zaman bir basit U R-modülü için $P = ann_R(U)$ olur.
Varsayımdan U sonlu sıfırlanandır, yani bir $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ sonlu alt kümesi için $P = ann_R(U) = ann_R(u_1, \ldots, u_n)$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned} R/P &\hookrightarrow U^{(n)} \\ r + P &\mapsto (u_1 r, \ldots, u_n r) \end{aligned}$$

gömme homomorfizması vardır. Bu sebeple R/P sağ Artindir ve ayrıca asal halka olduğundan sol Artindir. Böylece R/P Artindir. □

Teorem 5.1.2. *R bir halka ve J, R halkasının Jacobson radikali olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) R/J Artindir.

ii) Her yarı basit sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

iii) Her sayılabilir üretilmiş yarı basit sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$: M bir yarı basit sağ R-modül olsun. Bu durumda $M.J = 0$ olur, yani M bir sağ R/J-modül olarak düşünülebilir. R/J sağ Artin olduğundan Sonuç 4.0.13'ten $M_{R/J}$ sonlu sıfırlanandır ve buradan M, sağ R-modül olarak sonlu sıfırlanandır.

$(ii) \implies (iii)$: (ii)'den her yarı basit sağ R-modül sonlu sıfırlanandır ve özel olarak sayılabilir üretilmiş yarı basit sağ R-modüller de bu koşulu sağlar. Dolayısıyla kanıt açıktır.

$(iii) \implies (i)$: Varsayımdan, her basit sağ R-modül sonlu sıfırlanandır. Bu durumda Teorem 5.1.1'den R'nin her P sağ ilkel ideali için R/P Artindir. Buradan R'nin her sağ ilkel ideali maksimaldir diyebiliriz.

Kabul edelim ki R sonsuz sayıda sağ ilkel ideal içersin ve $P_1, P_2, \ldots$ R'nin ayrık sağ ilkel idealleri olsun. O zaman $M = R/P_1 \oplus R/P_2 \oplus \ldots$ modülü bir sayılabilir üretilmiş yarı basit sağ R-modüldür. Varsayımdan M sonlu sıfırlanandır ve sonlu bir $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ için $ann_R(m_1, \ldots, m_n) = ann_R(M)$ dir. Dahası, bir $k \geq 1$ vardır öyle ki $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq R/P_1 \oplus \ldots \oplus R/P_k$ olur. Bu durumda
$P_1 \cap \ldots \cap P_k = ann_R(R/P_1 \oplus \ldots \oplus R/P_k) \subseteq ann_R(m_1, \ldots, m_n) = ann_R(M) = \bigcap_{i \geq 1} P_i \subseteq P_{k+1}$ elde edilir. Buradan $1 \leq i \leq k$ için $P_i = P_{k+1}$ olur ve çelişki elde ederiz. Bu durumda

J, maksimal ideallerin sonlu bir kesişimidir. $J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ diyelim. Böylece,

$$\begin{aligned} R &\rightarrow R/Q_1 \oplus \ldots \oplus R/Q_m \\ r &\mapsto (r + Q_1, \ldots, r + Q_m) \end{aligned}$$

dönüşümü, $R/J \hookrightarrow R/Q_1 \oplus \ldots \oplus R/Q_m$ gömme homomorfizmasına dönüşür. Dolayısıyla R/J sağ Artindir ve ayrıca yarı asal halka olduğundan sol Artin olur. Sonuç olarak R/J Artin halka olur. $\square$

(i) koşulu simetriktir ve bu yüzden (ii) ve (iii) koşullarının sol versiyonları da ayrıca denktir.

5.2 Kalıtsal Burulma Teorisi ve Tekil Modüller

Tanım 5.2.1. R bir halka ve $\mathscr{C}$, aşağıdaki koşulları sağlayan sağ R-modüllerin bir ailesi olsun.

i) $0 \in \mathscr{C}$.

ii) $\mathscr{C}$ izomorfizmalar altında kapalıdır.

ii) $\mathscr{C}$ alt modülleri altında kapalıdır.

iii) $\mathscr{C}$ dik toplamlar (sayılabilir) altında kapalıdır.

iv) $\mathscr{C}$ bölüm modülleri altında kapalıdır.

Bu durumda, bir T sağ R-modülü için $T \in \mathscr{C}$ ise, T modülüne $\mathscr{C}$-burulmalıdır denir. M bir sağ R-modül olsun. Eğer bir $N \leq M$ alt modülü için M/N modülü $\mathscr{C}$-burulmalı ise N alt modülü M'nin $\mathscr{C}$-yoğun alt modülü adını alır.

Şimdi,

$$Rej_{\mathscr{C}}(M) = \bigcap \{N | N,\ M\text{'nin } \mathscr{C}\text{-yoğun alt modülüdür}\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda,

$$Rej_{\mathscr{C}}(M) = \bigcap \{Çekf \mid \text{Bir } \mathscr{C} - \text{ burulmalı } R - \text{modül } T \text{ için } f: M \rightarrow T \text{ homomorfizma}\}$$

eşitliği sağlanır ve $Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$, R'nin bir çift yönlü idealidir.

Teorem 5.2.2. *$\mathscr{C}$, sağ R modüllerin bir ailesi olsun ve kabul edelim ki Tanım 5.2.1'de verilen koşulları sağlasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) $R/Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$ *sağ Artindir.*

(ii) *R'nin $\mathscr{C}$-yoğun sağ idealleri üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

(iii) *Her $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(iv) *Her sayılabilir üretilmiş $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(v) *R, $\mathscr{C}$-yoğun çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ve her devirli $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$: $Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$, R'nin $\mathscr{C}$-yoğun sağ ideallerinin kesişimi olduğundan her i için I_i'ler $\mathscr{C}$- yoğun idealler olmak üzere $I_i/Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$ kümeleri $R/Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$ halkasının sağ idealidir. Hipotezden $I_1/Rej_{\mathscr{C}}(R_R) \supseteq I_2/Rej_{\mathscr{C}}(R_R) \supseteq \ldots$ azalan zinciri sonlu adımda durur. Bu durumda $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ azalan zincirinin de sonlu adımda durduğu elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: M bir $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modül olsun. Bir $F \subseteq M$ sonlu alt kümesi için $A = ann_R(F)$, diyelim ki $k \geq 1$ ve $f_1, \ldots, f_k \in M$ için $A = ann_R(f_1, \ldots, f_k)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} R/A & \hookrightarrow & M^{(k)} \\ r + A & \mapsto & (f_1 r, \ldots, f_k r) \end{array}$$

gömme homomorfizması vardır. Buradan R/A'nın bir $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modül olduğu görülür. Böylece A, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun idealidir. Hipotezden $A = ann_R(F)$ kümesini M'nin sonlu kümelerinin sıfırlayıcıları arasında minimal olacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda $ann_R(M) = ann_R(F)$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Açıktır.

$(iv) \Rightarrow (v)$: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ zinciri R'nin $\mathscr{C}$-yoğun ideallerinin herhangi bir azalan zinciri olsun ve $X = (R/I_1) \oplus (R/I_2) \oplus \ldots$ diyelim. Bu durumda X sayılabilir üretilmiş $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modüldür ve hipotezden X sonlu sıfırlanandır. Bu durumda bir $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ alt kümesi için $ann_R(X) = ann_R(x_1, \ldots, x_n)$ dir. Bir k pozitif tam sayısı için $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R/I_1 \oplus \ldots \oplus R/I_k$ olur ve bu sebeple $I_1 \cap \ldots \cap I_k \subseteq \bigcap_{j \geq 1} I_j$ elde edilir. Buradan $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \ldots$ sağlanır ve böylece (v) koşulu kanıtlanmış olur.

$(v) \Rightarrow (i)$: A, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun ideali olsun. Eğer B, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun ideali ise o zaman $A \cap B$ de R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun idealidir ve $A \cap B \subseteq A$ olduğundan $A = A \cap B \subseteq B$ elde edilir. Şimdi E, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun ideali olsun ve $C = ann_R(R/E)$ alalım. Burada R/E sağ R-modülü devirli ve $\mathscr{C}$-burulmalıdır. Hipotezden, R/E'nin sonlu bir $\{u_1, \ldots, u_n\}$ alt kümesi için $C = ann_R(u_1, \ldots, u_n)$ dir ve böylece R/C modülünden $R/E^{(n)}$ R-modülüne bir gömme homomorfizması tanımlanabilir. Böylece, C, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun idealidir ve buradan $A \subseteq C \subseteq E$ diyebiliriz. Dolayısıyla $A = Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$ olur. Özel olarak, $Rej_{\mathscr{C}}(R_R)$, R'nin bir $\mathscr{C}$-yoğun idealidir.

Şimdi, (v) koşulundan R/A çift yönlü ideallerinde azalan zincir koşulunu sağlar. Dahası, eğer V bir devirli sağ (R/A)-modül ise o zaman V bir devirli R-modüldür öyle ki $VA = 0$ sağlanır, yani V bir devirli $\mathscr{C}$-burulmalı sağ R-modüldür. Böylece hipotezden V sonlu sıfırlanandır. Buradan her devirli sağ R/A-modül sonlu sıfırlanandır diyebiliriz. Sonuç 4.0.13'den R/A halkası sağ Artindir. □

τ, $Mod - R$ üzerinde kalıtsal burulma teorisi ve M bir sağ R-modül olsun. Eğer bir $N \leq M$ alt modülü için M/N modülü τ-burulmalı ise N'ye, M'nin τ-yoğun alt modülüdür denir. Daha önce yaptığımız gibi,

$$Rej_\tau(M) \;=\; \bigcap \{N | N,\ M\text{'nin bir } \tau\text{-yoğun alt modülü}\}$$

kümesini tanımlayabiliriz. Bu durumda;

$$Rej_\tau(M) \;=\; \bigcap \{Çekf \mid \text{Bir } \tau- \text{ burulmalı } R-\text{modül } T \text{ için } f : M \to T \text{ homomorfizma}\}$$

eşitliği vardır ve $Rej_\tau(R_R)$, R'nin çift yönlü idealidir.

Sonuç 5.2.3. *τ, Mod_R üzerinde bir kalıtsal burulma teorisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *$R/Rej_\tau(R_R)$ sağ Artindir.*

(ii) *R, τ-yoğun sağ idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.*

(iii) *Her τ-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(iv) *Her sayılabilir üretilmiş τ-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(v) *R, τ-yoğun çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ve her devirli τ-burulmalı sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. Teorem 5.2.2'den açıktır çünkü bir kalıtsal burulma teorisinin burulma ailesi, 0'ı içerir ve izomorfizmalar, alt modüller, bölüm modülleri ve sayılabilir dik toplamlar altında kapalıdır. □

R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Bu durumda M'nin tekil alt modülü $Z(M)$, M'nin, R'nin büyük sağ idealleri tarafından sıfırlanan elemanlarının kümesidir. Yani,

$$Z(M) \;=\; \{m \in M| \text{ bir } E \trianglelefteq_e R \text{ sağ ideali için } mE = 0\}$$

dir. Bu durumda, bir M modülü için $Z(M) = M$ oluyorsa bu M modülüne tekil modül denir.

Bir M modülünün sokulu M'nin basit alt modüllerinin dik toplamıdır ve M'nin büyük alt modüllerinin kesişimiyle aynıdır. Tekil sağ R-modüllerin ailesi düşünülerek aşağıdaki sonuç kanıtlanabilir.

Sonuç 5.2.4. *$Soc(R_R)$ sokuluna sahip bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *$R/Soc(R_R)$ sağ Artindir.*

(ii) *R, büyük sağ idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.*

(iii) *Her tekil sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(iv) *Her sayılabilir üretilmiş tekil sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

(v) *R, sağ ideal olarak büyük olan çift yönlü idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ve her devirli tekil sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. Z, tekil sağ R-modüllerin ailesi olsun. O zaman $0 \in Z$ olur ve Z, izomorfizmalar, alt modüller, bölüm modülleri ve sayılabilir dik toplamlar altında kapalıdır. Tanım 5.2.1'den, bir modül tekil ise Z-burulmalıdır.

Şimdi A, R'nin bir sağ ideali olsun ve R/A sağ R-modülünü düşünelim. Eğer R/A tekil ise, o zaman her $r \in R$ için bir $E \trianglelefteq_e R$ büyük sağ ideali vardır öyle ki $rE \subseteq A$ olur. Özel olarak, R'nin bir büyük sağ ideali A tarafından kapsanır, bu yüzden A'nın kendisi de R'nin büyük sağ idealidir.

Tersine, kabul edelim ki A, R'nin büyük sağ ideali olsun. Bir $r \in R$ için $E = \{x \in R|\ rx \in A\}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda E, R'nin bir büyük sağ idealidir ve $rE \subseteq$

A dır. Böylece R/A tekil sağ R-modül olur. Bu nedenle, A, R'nin bir Z-yoğun sağ idealidir ancak ve ancak A, R'nin büyük sağ idealidir. Dahası,

$$\begin{aligned} Rej_Z(R_R) &= \bigcap\{A|\ A,\ R\text{'nin } Z-\text{yoğun sağ idealidir}\} \\ &= \bigcap\{A|\ A,\ R\text{'nin büyük sağ idealidir}\} \\ &= Soc(R_R) \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 5.2.2'den kanıt tamamlanır. □

5.3 Düzgün ve Sonlu Boyutlu Modüller

Bu bölümde düzgün modüllerin ve sonlu düzgün (Goldie) boyutlu modüllerin sonlu sıfırlanan olduğu durumu inceleyeceğiz. Sağ Krull boyuta sahip bir halka üzerinde bu koşulların, halkanın sağ Artin olmasına denk olduğunu göstereceğiz. Daha sonra bunun genel bir durum olmadığına dair bir örnek vereceğiz. Sağ Krull boyuta sahip herhangi bir R halkası için R'nin sağ Krull boyutunu $k(R)$ ile göstereceğiz. Herhangi bir M modülü için M'nin injektif bürümünü $E(M)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.3.1. *Sağ Krull boyuta sahip olan bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R sağ Artindir.

(ii) Sonlu boyutlu her sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

(iii) Her düzgün sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sonuç 4.0.13'den açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Öncelikle R'nin asal halka olduğunu kabul edelim. Bu durumda R halkası asal sağ Goldie halkadır. U bir basit sağ R-modül ve $A = ann_R(E(U))$ olsun. Eğer $A \neq 0$ ise A ideali, R'nin büyük sağ idealidir. Dolayısıyla bir regüler eleman içerir. Ancak $E(U)$ bölünebilir olduğundan $E(U) = E(U).A = 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Böylece $A = 0$ elde edilir. Ayırca $E(U)$ düzgün olduğundan sonlu sıfırlanandır ve bir $n \geq 1$ tam sayısı için $R_R \hookrightarrow E(U)^{(n)}$ gömme homomorfizması vardır. Buradan R_R'nin sokulu bir büyük idealdir. Bu durumda Teorem 2.19.7'den R basit Artin halkadır ve özel olarak R sağ Artindir.

Genel durumda, R'nin tüm P asal idealleri için R/P sağ Artindir. Sonuç 2.21.7'den $k(R) = sup\{k(R/P) \mid P,\ R\text{'nin sağ idealidir}\}$ olur ve buradan R sağ Artindir. □

Bir R halkası için düzgün sol R modüller sonlu sıfırlanan ise hâlâ R'nin sağ Artin olduğu görülebilir. Herhangi bir M sol R-modülü için M'nin R içindeki sol sıfırlayıcısını $l.ann_R(M)$ ile göstereceğiz.

Önerme 5.3.2. *R, sağ Krull boyuta sahip bir halka ve üzerindeki her düzgün sol R-modül sonlu sıfırlanan olsun. Bu durumda R sağ Artindir.*

Kanıt. Öncelikle R'nin asal halka olduğunu kabul edelim. O zaman R bir asal sağ Goldie halkadır. U bir basit sol R-modül ve $A = l.ann_R(E(U))$ olsun. Eğer $A \neq 0$ ise A ideali R'nin büyük sağ idealidir, dolayısıyla bir regüler eleman içerir. Ancak $E(U)$ bölünebilir olduğundan $E(U) = A.E(U) = 0$ olur ve bu bir çelişkidir. Ayrıca $E(U)$ düzgün sol R-modül olduğundan sonlu sıfırlanandır ve bir $n \geq 1$ tam sayısı için ${}_RR \hookrightarrow E(U)^{(n)}$ gömme homomorfizması vardır. Buradan ${}_RR$'nin büyük sokulu vardır yani $Soc({}_RR)$, R'nin bir büyük sol idealidir. Önerme 2.11.5'ten R'nin sıfırdan farklı sağ sokulu vardır ve bu yüzden R sağ Artindir.

Genel durumda, R'nin her P asal ideali için R/P sağ Artindir ve bir önceki kanıtta olduğu gibi R sağ Artindir. □

5.4 İnjektif Modüller

R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere M modülünün sıfır ve kendisinden başka dik toplananı yok ise M'ye ayrıştırılamaz modül dendiğini hatırlayalım.

Teorem 5.4.1. *Değişmeli Noether bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R Artindir.

(ii) Her injektif R-modül sonlu sıfırlanandır.

(iii) Her ayrıştırılamaz injektif R-modül sonlu sıfırlanandır.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sonuç 4.0.13'den açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$: P, R'nin maksimal ideali ve $E = E(R/P)$ olsun. Bu durumda E ayrıştırılamaz injektif R-modüldür. $A = ann_R(E)$ alalım. Önerme 2.17.11'den $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k$ dır. Varsayımdan E sonlu sıfırlanandır, yani bir $n \geq 1$ tam sayısı ve $1 \leq i \leq n$ için $e_i \in E$ olmak üzere $A = ann_R(e_1, \dots, e_n)$ dir. Yine Önerme 2.17.11'den bir $m \geq 1$ tam sayısı vardır öyle ki $1 \leq i \leq n$ için $e_i P^m = 0$ ve $P^m \subseteq A$ olur. Böylece $P^m = P^{m+1} = \dots$ elde edilir.

Şimdi Q, R'nin $Q \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir asal ideali olsun. Teorem 2.13.19'dan $P^m = \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k \subseteq Q$ olur, yani $P \subseteq Q$ ve $P = Q$ elde edilir.

Buradan R'nin her asal ideali maksimaldir ve bu yüzden R Artindir diyebiliriz. □

Bir sonraki kısımda göreceğimiz örnek bize bu koşulun keyfi bir değişmeli halka için geçerli olmadığını gösterir. Ancak değişmeli olmayan durumda bir sağ Noether halka için aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

Önteorem 5.4.2. *R halkası, üzerindeki tüm injektif sağ R-modüllerin sonlu sıfırlanan olduğu bir sağ Noether halka olsun. Bu durumda R'nin büyük sağ sokulu vardır.*

Kanıt. E, tüm basit sağ R-modüllerin injektif bürümlerinin dik toplamı olsun ve R'nin $ann_R(E)$ idealini düşünelim. $ann_R(E) \neq 0$ olsun ve $0 \neq a \in ann_R(E)$ alalım. Önerme 2.17.12'den bir S basit sağ R-modülü ve bir $\phi : R \to E(S)$ R-homomorfizması vardır öyle ki $\phi(a) \neq 0$ olur. Ayrıca $\phi(a) = \phi(1.a) = \phi(1)a = 0$ sağlanır. Bu çelişkiden E'nin vefalı sağ R-modül olduğu sonucu çıkar.

Teorem 2.17.10'dan E injektiftir, yani sonlu sıfırlanandır, böylece bir $n \leq 1$ tam sayısı için $R_R \hookrightarrow E^{(n)}$ gömme homomorfizması vardır. Dolayısıyla R, bazı basit R-modüllerin injektif bürümlerinin içine gömülebilir ve böylece R'nin büyük sağ sokulu vardır. □

Teorem 5.4.3. *Bir R sağ ve sol Noether halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R sağ Artindir.

(ii) R sol Artindir.

(iii) Her injektif sağ R-modül sonlu sıfırlanandır.

(iv) Her injektif sol R-modül sonlu sıfırlanandır.

Kanıt. Teorem 2.13.10'dan, R halkası sağ Artindir ancak ve ancak sol Artindir. Yani $(i) \iff (ii)$ kanıtlanmış olur. $(i) \Rightarrow (iii)$ Sonuç 4.0.13'den açıktır. Bu durumda $(iii) \Rightarrow (i)$ durumunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki her injektif sağ R-modül sonlu sıfırlanan olsun. Bu durumda Önteorem 5.4.2'den R'nin büyük sağ sokulu vardır. Teorem 2.13.11'den R hem sağ hem de sol Artindir. □

5.5 Örnek

Genel durumda, üzerinde tanımlı her düzgün modül veya her injektif modül sonlu sıfırlanan olsa dahi, bu özellik halkanın Artin olduğunu söylemek için yeterli değildir. Bu kısımda, üzerindeki tüm injektif modüllerin sonlu sıfırlanan olduğu ancak Artin olmayan bir halka örneği vereceğiz.

K bir cisim ve $R = \{\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \mid k_n \in K, \exists N$ öyle ki $k_N = k_{N+1=\ldots}\}$ olsun. O zaman R bir değişmeli von Neumann regüler halkadır. $S = \{\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \in R \mid$ en fazla sonlu tane $n \geq 1$ için $k_n \neq 0\}$ ve her bir $m \geq 1$ için $U_m = \{\{k_n\} \in R \mid$ her $n \neq m$ için $k_n = 0\}$ olsun. Bu durumda her $m \geq 1$ için U_m, R'nin bir minimal idealidir ve $S = \oplus_{m \geq 1} U_m$ olur. Buradan S yarı basittir ve $S \subseteq Soc(R)$ elde edilir. $0 \neq r = \{k_1, k_2, \ldots\} \in R$ olsun ve kabul edelim ki bazı $i \geq 1$ için $k_i \neq 0$ olsun. $k_i = 1$ ve her $n \neq i$ için $k_n = 0$ olacak şekilde bir $\{k_n\} \in R$ elemanı için $\{k_n\} = e_i$ ise o zaman $0 \neq re_i \in U_i \cap rR$ olur. Buradan S, R'nin bir büyük ideali olur. Yani $S = Soc(R)$ elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow K \\ \{k_1, \ldots, k_m, k, k, \ldots\} &\mapsto k \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda φ bir halka epimorfizmasıdır ve çekirdeği S'dir. Buradan $R/S \cong K$ olur, yani S, R'nin bir maksimal idealidir.

Önteorem 5.5.1. *Sıfırdan farklı her R-modülün bir basit alt modülü vardır.*

Kanıt. M herhangi bir R-modül olsun. Eğer $MS = 0$ ise, M bir R/S-modül olarak düşünülebilir ve buradan yarı basittir, dolayısıyla bir basit alt modül içerir. Eğer $MS \neq 0$ ise o zaman bir $m \in M$ vardır öyle ki $mS \neq 0$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow mS \\ s &\mapsto ms \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda φ bir R-homomorfizmasıdır, yani $mS \cong S/ker\varphi$ olur ve mS yarı basittir. Bu durumda M bir basit alt modül içerir. □

Önteorem 5.5.2. *Her sonlu boyutlu R-modül sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. U bir düzgün R-modül olsun. Önteorem 5.5.1'den U'nun bir basit alt modülü vardır. Bu basit modül A olsun. R bir von Neumann regüler halka olduğundan ve Sonuç 2.16.9'dan

A injektiftir. Yani Sonuç 2.16.8'den U'nun bir dik toplananıdır. U düzgün olduğundan $A = U$ olur. Dolayısıyla her düzgün R-modül basittir.

M bir sonlu boyutlu R-modül olsun. Bu durumda U_i'ler düzgün R-modül olmak üzere bir $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ dik toplamı vardır öyle ki bu dik toplam M'nin büyük alt modülüdür. Burada her bir U_i basittir, yani injektiftir ve M'nin dik toplananıdır. Dolayısıyla $M = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ elde edilir. Dolayısıyla her sonlu boyutlu R-modül, basit modüllerin sonlu bir dik toplamıdır ve dolayısıyla sonlu sıfırlanandır.

R değişmeli olduğundan, her sonlu boyutlu R-modül sonlu sıfırlanandır. $\square$

R halkasının Artin olmadığı açıktır ve dahası sonlu (Goldie) boyutlu değildir. Çünkü $Soc(R) = \oplus_{m \geq 1} U_m$ sonsuz dik toplamını içerir. Şimdi her injektif R-modülün sonlu sıfırlanan olduğunu göstereceğiz. Fakat öncesinde birkaç önteorem kanıtlamamız gerekir.

Önteorem 5.5.3. *U bir basit R-modüldür ancak ve ancak $U \cong R/S$ dir ya da bir $m \geq 1$ için $U \cong U_m$ dir.*

Kanıt. U bir basit R-modül olsun. $0 \neq u \in U$ olsun ve $M = ann_R(u) = ann_R(U)$ alalım. O zaman M, R'nin bir maksimal ideali olur ve $U \cong R/M$ dir. Eğer $S \subseteq M$ ise S ve M maksimal olduğundan $S = M$ olur ve dolayısıyla $U \cong R/S$ elde edilir. Kabul edelim ki $S \nsubseteq M$ olsun. O zaman bir pozitif m tam sayısı vardır öyle ki $U_m \nsubseteq M$ olur, bu yüzden $R = U_m \oplus M$ ve $U \cong R/M \cong U_m$ elde edilir. $\square$

Önteorem 5.5.4. *Λ boştan farklı herhangi bir indis kümesi olmak üzere $X = (R/S)^{(\Lambda)}$ olsun. Bu durumda X injektif modüldür.*

Kanıt. A, R'nin bir ideali ve $\varphi : A \to X$ bir R-homomorfizması olsun. $B = A \cap S$ alalım. Bu durumda $B = B^2 \subseteq SB \subseteq B$ olur ve $B = SB$ elde edilir. Bu yüzden $\varphi(B) = \varphi(SB) \subseteq S\varphi(B) \subseteq SX = 0$ olur. $A \subseteq S$ ise $A = B$ olur ve $\varphi = 0$ elde edilir. Bu durumda φ homomorfizması R'ye genişletebilir. $A \nsubseteq S$ ise $R = A + S$ olur ve bir $a \in A$ ve $s \in S$ için $1 = a + s$ elde edilir. Her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \theta : R &\to X \\ r &\mapsto \varphi(a)r \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu bir R-homomorfizmasıdır ve $r \in A$ için $\theta(r) = \varphi(a)r = \varphi(ar) = \varphi(ar) + \varphi(sr) = \varphi(ar + sr) = \varphi(r)$ olur, yani φ homomorfizması θ yardımıyla R'ye genişletilebilir. Bu durumda Önerme 2.16.3'ten X bir injektif R-modüldür. $\square$

Önteorem 5.5.5. *$i \geq 1$ ve Λ_i boştan farklı indis kümesi olmak üzere $X_i \cong U_i^{(\Lambda_i)}$ olsun. O zaman X_i bir injektif modüldür.*

Kanıt. Her bir $\lambda \in \Lambda_i$ için $X_{i\lambda} \cong U_i$ ve $X_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_i} X_{i\lambda}$ olur. Bu durumda her bir $X_{i\lambda}$ basit modüldür ve dolayısıyla injektiftir. Kabul edelim ki Λ_i sonsuz bir küme ve $Y_i = \prod_{\lambda \in \Lambda_i} X_{i\lambda}$ olsun. Bu durumda Y_i injektiftir.

Şimdi kabul edelim ki $X_i \leq_e Z \leq Y_i$ olsun. $0 \neq z \in Z$ için $\lambda \in \Lambda_i$ ve $z_{i\lambda} \in X_{i\lambda}$ olmak üzere $z = \{z_{i\lambda}\}$ olur. Bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 = rz \in X_i$ olur. Bu durumda bir $\mu \in \Lambda_i$ için $z_{i\mu} \neq 0$ elde edilir. Buradan her $\lambda \in \Lambda_i$ için $z_{i\lambda} = 0$ ya da $rz_{i\lambda} \neq 0$ olur. Böylece en fazla sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda_i$ için $z_{i\lambda} \neq 0$ elde edilir ve $z \in X_i$ olur. Dolayısıyla $X_i = Z$ dir ve X_i injektif R-modüldür. □

Önteorem 5.5.6. *X sıfırdan farklı injektif bir R-modül olsun. Bu durumda Λ_i indis kümeleri için $X_0 = (R/S)^{(\Lambda_i)}$ ve $X_i \cong U_i^{\Lambda_i}$ $(i \geq 1)$ ve $\Lambda_i = \emptyset$ $(i \geq 0)$ iken $X_i = 0$ olacak şekilde $X \cong \prod_{i \geq 0} X_i$ sağlanır.*

Kanıt. Önteorem 5.5.1'den X'in bir büyük sokulu vardır ve $X = E(soc(X))$ sağlanır. Bu durumda, Λ_i indis kümeleri için $X_0 = (R/S)^{(\Lambda_i)}$ ve $X_i \cong U_i^{\Lambda_i}$ $(i \geq 1)$ ve $\Lambda_i = \emptyset$ $(i \geq 0)$ iken $X_i = 0$ olacak şekilde, basit R-modüllerin karakterizasyonundan $X = E(\bigoplus_{i \geq 0} X_i)$ olur. $\prod_{i \geq 0} X_i$ injektif olduğundan $\bigoplus_{i \geq 0} X_i$ alt modülünün $\prod_{i \geq 0} X_i$ modülünün büyük alt modülü olduğunu göstermek yeterlidir.

$0 \neq x \in \prod_{i \geq 0} X_i$ olsun, o zaman bazı $x_i \in X_i$ $i \geq 0$ için $x = \{x_i\}$ olur. Her $i \geq 1$ için $x_i = 0$ ise $x \in \bigoplus_{i \geq 0} X_i$ sağlanır. Bir $j \geq 1$ için $x_i \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $i \neq j$ için $e_j x_i = 0$ ve $e_j x_j = x_j$ iken $e_j x = \{e_j x_i\}$ olur. Böylece $0 = e_j x \in \bigoplus_{i \geq 0} X_i$ elde edilir. Dolayısıyla $X = E(\bigoplus_{i \geq 0} X_i) \cong \prod_{i \geq 0} X_i$ olduğu görülür. □

Teorem 5.5.7. *Her injektif R-modül sonlu sıfırlanandır.*

Kanıt. X bir injektif R-modül olsun. Bu durumda Önteorem 5.5.6'dan Λ_i indis kümeleri için $X_0 = (R/S)^{(\Lambda_i)}$ ve $X_i \cong U_i^{\Lambda_i}$ $(i \geq 1)$ ve $\Lambda_i = \emptyset$ $(i \geq 0)$ iken $X_i = 0$ olacak şekilde $X \cong \prod_{i \geq 0} X_i$ sağlanır.

$\Lambda' = \{i \geq 0 \mid \Lambda_i \neq \emptyset\}$ olsun. Her bir $i \in \Lambda'$ için $X_i = 0$ olur. $0 \neq x_i \in X_i$ alalım. Bu durumda her $i \geq 1, i \in \Lambda'$ için $ann_R(x_i) = ann_R(U_i) = ann_R(X_i)$ ve $0 \in \Lambda'$ ise $ann_R(x_0) = ann_R(R/S) = ann_R(X_0)$ sağlanır. Her $i \geq 0, i \notin \Lambda'$ için $x_i = 0$ ve $x = \{x_i\}_{i \geq 0} \in X$ olsun. Bu durumda $ann_R(X) = \bigcap_{i \geq 0} ann_R(x_i) = \bigcap_{i \in \Lambda'} ann_R(X_i) = ann_R(X)$ elde edilir. Dolayısıyla X sonlu sıfırlanandır. □

SONUÇ

Bu tezde, sonlu sıfırlanan modüller incelenmiş ve bu modül sınıfının halka yapısını belirlemede önemli bir rol oynadığı Smith ve Woodward'ın [14] ve [15] makaleleri derlenerek ortaya konmuştur.

Artin halkaların üzerindeki her modülün sonlu sıfırlanan olması ile karakterize edildiği sonuç, elde edilmiş en önemli sonuçlardandır. Literatürdeki önemli halka çeşitlerinin sonlu sıfırlanan modüller yardımıyla karakterize edilmesi ve Smith ve Woodward'ın incelediklerinin dışındaki modül sınıflarının H-koşulunu sağlamaları durumunda halkaya ait özelliklerin belirlenmesi önemli araştırma sorularıdır.

Kaynakça

[1] Alizade R. and Pancar A., Homoloji cebire giriş, **2016**.

[2] Anderson F.W. and Fuller K.R., Rings and categories of modules, Graduate Texts in Mathematics 13, Springer, New York, **1974**.

[3] Beachy J.A., On quasi-Artinian Rings, J. London Math. Soc. (2) 3, 449-452, **(1971)**.

[4] Beachy J.A. and Blair W.D., Finitely annihilated modules and orders in artinian rings, Communications in Algebra, 1-34, **(1978)**,

[5] Cauchon G., Les T-anneaux, la condition (H) de Gabriel et ses consequences, Comm. Algebra, 4 (1), 11-50 **(1976)**

[6] Chatters A.W. and Hajarnavis C.R., Rings with chain conditions, Research Notes in Mathematics, vol 44, Boston Mass., **1980**.

[7] Faith C., Modules finite over endomorphism rings, in: Lectures on rings and modules, Tulane Univ. Ring and Operator Theory year 1970-1971, Vol. I, Lecture Notes in Math. 246, 145-189 **1972**.

[8] Gabriel P. , Des cat'egories ab'eliennes, Bull Soc. Math. France, 90, 323-448 **1962**.

[9] Ghorbani A., Further characterizations of Artinian Rings, Acta. Math. Hungar., 102, 85-89 **2004**.

[10] Goodearl K.R. and Warfield R.B., Jr., An Introduction To Noncommutative Noetherian Rings, London Mathematical Society Student Texts, vol. 61, Cambridge University Press **2004**.

[11] Gordon R. and Robson J.C., Krull dimension, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 133, American Mathematical Society, Providence, R.I., **1973**.

[12] Hungerford T.W., Algebra, Graduate Texts in Mathematics vol 73, Springer-Verlag, New york **2003**.

[13] Sharpe D.W. and Vamos P., Injective modules, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 62, Cambridge University Press, London **1972**.

[14] Smith P.F. and Woodward A.R., Artinian rings and the H-condition, Bull London Math. Society 571-574 **(2006)**.

[15] Smith P.F. and Woodward A.R., On finitely annihilated modules and artinian rings, Mediterranean Journal of Mathematics 301-311 **(2006)**.

[16] Stenström B., Rings of quotients, Springer-Verlag, New York, **1975**.