SİMİTLİ ÇEŞİTLEM ÜZERİNDE PARAMETRİK KODLAR VE SIFIRLAYAN İDEALLER

VANISHING IDEALS AND PARAMETERIZED CODES ON TORIC VARIETY

ESMA BARAN ÖZKAN

Doç. Dr. MESUT ŞAHİN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır

2021

Sevgili manevi amcam Mehmet Ali TARHAN'ın anısına.

ÖZET

SİMİTLİ ÇEŞİTLEM ÜZERİNDE PARAMETRİK KODLAR VE SIFIRLAYAN İDEALLERİ

Esma BARAN ÖZKAN

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mesut ŞAHİN

Ağustos 2021, 136 sayfa

X, split T_X simiti ile sonlu cisim üzerinde bir tam simpleksel simitli çeşitlem olsun. Bu tez çalışması, T_X simitinin matrislerle parametrize edilen alt gruplarından elde edilen parametrik kodlar üzerinedir. Bu parametrik kodların temel parametrelerini hesaplamak için bu alt grupların sıfırlayan ideallerinin üreteçlerini bulmak çok önemlidir. Tezin giriş bölümünde simitli kodların önemi ve literatür taraması verilmiştir. Tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir. İkinci bölümde afin simitli çeşitlemler için gerekli olan afin çeşitlem alt yapısı oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde simit tanımlandıktan sonra, simitin karakter ve bir parametreli alt grup kavramları verilmiş ve kafesler ile ilişkilendirilmiştir. Afin simit üzerinden afin simitli çeşitlem tanımı verildikten sonra afin simitli çeşitlemlerin farklı inşaları anlatılmıştır. Rasyonel çokyüzlü konilerin temel konuları verilmiş ve afin simitli çeşitlemlerle nasıl ilişkilendirildiği açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde sonlu afin çeşitlemler izomorfizmler ile yapıştırılarak afin veya projektif olmayan çeşitlemler oluşturulmuştur. Bu bölüm bu çeşitlemlerin daha iyi kavranması için projektif çeşitlemler ile başlamıştır. Fan olarak isimlendirilen güçlü rasyonel çokyüzlü konilerin sonlu koleksiyonunun içerdiği konilere karşılık gelen afin simitli çeşitlemlerin nasıl yapıştırıldığı tarif edilmiş, böylece genel simitli çeşitlemler inşa edilmiştir. Bu bölümün esas ve son amacı genel simitli çeşitlemlerin noktalarının tıpkı

projektif uzayda olduğu gibi homojen koordinatlar ile ifade edilebildiğini göstermektir.

Verilen bir Q matrisi için, T_X simitinin Q matrisinin sütunları tarafından parametrelenen alt grubu $T_{X,Q}$ olsun. Beşinci bölümde $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin sıfırlayan idealinin üreteç kümesini belirleyen 3 metot verilmiştir. Geliştirilen ilk yöntemde eliminasyon teoriden faydalanılmıştır. Bu metot ile $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin üreteçlerini hesaplamak için bir algoritma ve bu algoritmanın `Macaulay2` kodu yazılmıştır. Aynı idealin üreteçlerini, bu ideali tanımlayan kafesin bazı ile bulunan başka bir metot elde edilmiştir. $I(T_{X,Q}) = I_L$ olacak şekilde L kafesini bulmaya yönelik bir algoritma ve bu algoritmayı `Macaulay2` programında uygulayan bir prosedür verilmiştir. Böylece $I(T_{X,Q})$ idealinin tam kesişim olup olmadığı kolayca kontrol edilmiştir. Bu bölümde son olarak bazı şartlar altında, L kafesini kavramsal olarak belirleyen bir yöntem elde edilmiş ve Nullstellensatz (Sıfır Yeri) Teoremi sonlu cisim üzerinde kanıtlanmıştır.

Altıncı bölüm tezin esas amacı olan homojen polinom fonksiyonlarının $T_{X,Q}$ kümesinde hesaplanmasıyla oluşturulan $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodları içermektedir. Bu amaca yönelik önce lineer kodlar konusu anlatılmıştır. $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodun boyutu $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin dereceli Hilbert fonksiyonu ile hesap edildiğinden dereceli Hilbert fonksiyonların bazı özellikleri verilmiştir. $T_{X,Q}$ alt grubunun parametrik tanımı kullanılarak, kodun uzunluğuna eşit olan $T_{X,Q}$ alt grubunun eleman sayısını direk hesaplayan bir algoritma ve kodun minimum uzaklığı için bir alt sınır elde edilmiştir. Uygulama olarak, Hirzebruch yüzeyin simitten elde edilen parametrik kodların parametreleri hesaplanmıştır. Son olarak projektif uzaydan başka bir simitli çeşitleme geçmenin ayrıca T_X simiti yerine $T_{X,Q}$ parametrik alt grubunda çalışmanın avantajını gösteren örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simitli çeşitlem, Parametrik kodlar, Hesaplama kodları, Sıfırlayan idealler, Simitli idealler, Dereceli halkalar, Çok dereceli Hilbert fonksiyonlar, Kafes idealler

ABSTRACT

VANISHING IDEALS AND PARAMETERIZED CODES ON TORIC VARIETY

Esma BARAN ÖZKAN

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mesut ŞAHİN

August 2021, 136 pages

Let X be a complete simplicial toric variety over a finite field with a split torus T_X. This thesis is on parameterized codes obtained from the subgroups of the torus T_X parameterized by matrices. It is very important to find the generators of the vanishing ideals of these subgroups to compute basic parameters of these codes. In the introduction part of the thesis, the significance and a literature review of toric codes are given. The results obtained in the thesis are summarized. The second chapter includes some background of affine varieties required for the affine toric varieties.

In the third chapter, after defining torus, the concepts of character and one parameter subgroup of a torus are presented, and are associated with lattices. After giving the definition of toric variety, the different constructions of affine toric varieties are explained. The basic topics of rational polyhedral cones are given and, their connections its with affine toric varieties is explained.

In the fourth chapter, by gluing affine varieties with isomorphisms, abstract varieties other than affine or projective varieties are constructed. This chapter starts with projective varieties for a better understanding of these varieties. How to glue affine toric varieties corresponding to elements in a finite collection of strong rational polyhedral cones, called fan, is described, and so general toric varieties are constructed. The main and final purpose of this section is to show that the points of a general toric variety

can be expressed with homogeneous coordinates as in projective space.

For a given matrix Q, denote by $T_{X,Q}$ the subgroup of the torus T_X parameterized by the columns of Q. In the fifth chapter, 3 algorithms are given to determine a generating set of the vanishing ideal of $T_{X,Q}$. Elimination theory is used in the first algorithm developed. A `Macaulay2` code is written to implement the algorithm. Another method for finding the generators of the same ideal using the base of the lattice describing this ideal is obtained. An algorithm for finding the lattice L such that $I(T_{X,Q}) = I_L$ and a procedure implementing this algorithm in the `Macaulay2` program is presented. Thus, it is easily checked whether the vanishing ideal $I(T_{X,Q})$ is a complete intersection or not. In this section, finally, a method for conceptually determining the lattice L is obtained and a Nullstellensatz Theorem is proven on a finite field under some conditions.

The sixth chapter constitutes the heart of the thesis and includes parameterized codes constructed by calculating homogeneous polynomial functions in the set $T_{X,Q}$. For this purpose, firstly, basic topics of linear codes are explained. Since the dimension of parametric code $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ is calculated with multigraded Hilbert function of toric set $T_{X,Q}$, some properties of multigraded Hilbert functions are given. Using parametric definition of the $T_{X,Q}$, an algorithm directly computing the number of elements of the subgroup $T_{X,Q}$ which is equal to the length of the code and a lower bound for the minimum distance of the code is obtained. As an application, the basic parameters of the parameterized codes obtained from the torus of the Hirzebruch surface are calculated. Finally, examples illustrating the advantage of passing from projective space to arbitrary toric variety, in addition to working with parameterized toric set $T_{X,Q}$ instead of the torus T_X are given.

Keywords: Toric Variety, Parameterized codes, Evaluation codes, Vanishing ideals, Toric ideals, Graded rings, ideals and modules,Multigraded Hilbert functions, Lattice ideals

TEŞEKKÜR

Tanıştığımız günden bugüne meslek hayatımda rol model olarak aldığım, cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan, derin bilgi birikiminden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim, tecrübeleriyle çalışmama farklı açılardan bakabilmemi sağlayan, tüm sabrı ve inancı ile çalışmalarımda beni cesaretlendiren, beraber çalışmaktan mutlu olduğum ve her zaman öğrencisi olmaktan büyük gurur duyduğum çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Mesut Şahin'e;

Kıymetli vakitlerini ve değerli görüşlerini esirgemeyen jüri üyeleri Prof. Dr. Müfit SEZER, Doç. Dr. Oğuz YAYLA, Prof. Dr. Evrim Akalan ve Doç. Dr. Selma Altınok Bhupal hocalarıma;

Tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen sevgili meslektaşım Yağmur Çakıroğlu'na ve çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Celalettin Kaya'ya ;

Beni ben yapan, üzerimde en büyük emekleri olan, kendimi en çaresiz hissettiğim her an bana tekrardan umut olan, tüm hayatım boyunca beni koşulsuz seven ve destekleyen annem Rahime Baran'a, babam Ali İhsan Baran'a ve kardeşlerime;

Bana gösterdiği sevgi ve saygı ile her zaman güçlü ve mutlu olmamı sağlayan, tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan sevgili eşim Nuri Özkan'a

Günlüğüne "Matematikçi olacağım." yazarak beni bugünlere ulaştıran 17 yaşındaki kız çocuğuna,

Son olarak Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Programı kapsamında burs veren TÜBİTAK'a;

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

1 GİRİŞ

Hata düzeltme kodları, bilgilerin dijital iletişim kanallarında güvenilir bir şekilde iletilmesinde önemli bir rol oynar. Kod çözücünün hataları tanımasına ve düzeltmesine izin verecek şekilde mesajımızı kodlayarak, alınan mesajın doğruluğunu büyük ölçüde artırılabiliriz. Kodlama teorisinin amacı, mesajı mümkün olduğunca yüksek hızla ve yüksek doğruluk oranıyla iletebilecek kodlar inşa etmektir. Bu amaca yönelik; matematiğin çeşitli alanlarına ait yapıları kullanılarak kodlar geliştirilmiştir. Kodlama teorisine cebirsel geometrik yaklaşım, cebirsel eğriler ile 1981'de V.D. Goppa tarafından geliştirilmiştir [1].

Eğriler üzerindeki cebirsel geometrik kodlar kapsamlı şekilde çalışılmış, fakat yüksek boyutlu çeşitlemler ile elde edilen kodlar parametrelerinin hesaplanmasının zorluğu ile merak uyandıran bir araştırma konusu olma özelliğini korumaktadır. Simitli çeşitlemler, cebirsel geometri ve kombinatorik arasındaki bağlantıları gösteren çok ilginç ve zengin yapılardır. Böylece simitli çeşitlemlerden elde edilen kodların parametrelerini kombinatorik yapılar aracılığıyla hesaplamak kolaylaşmıştır, üstelik çok iyi parametrelere sahip kodlar elde edilebilmektedir.

$\mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde simitli kodlar bir X simitli çeşitlem üzerindeki polinom fonksiyonlarının $T \subset X$ simitinin rasyonel noktalarında hesaplanmasıyla elde edilen hesaplama kodlarıdır. İlk olarak, Hansen bazı politoplara karşılık gelen iki boyutlu simitli çeşitlemlerin özelliklerini kullanarak simitli kodları tanımlamış ve parametrelerini hesaplamıştır [2,3]. Bu kodlarda polinomlar politopların kafes noktalarına karşılık gelen monomların lineer kombinasyonu olduğundan kodların boyutu politopların kafes noktalarının sayısıdır. Diğer yandan bu polinomlar iki boyutlu X simitli çeşitleminin simitinin rasyonel noktalarında hesaplandığı için kodların uzunluğu $(q-1)^2$'dir. [4] çalışmasında Hansen tarafından verilen simitli kod tanımından daha genel bir tanım verilmiş ve $\mathbb{F}_8$ cismi üzerinde uzunluğu 49, boyutu 11 olan kodlar arasında en büyük minimum uzaklığa sahip kodu inşa edilerek bilinen en iyi kod rekoru kırılmıştır. Bu durum simitli kodlara yönelik çalışmaları artırmıştır. Genel durumların aksine özel durumlarda kodların minimum uzaklığını belirlemek çok zor bir görevdir, minimum uzaklık için bazı alt ve üst sınırlar farklı metotlarla verilmiştir [5–8].

Son zamanlarda simitli çeşitlemlerden elde edilen kodlar farklı iki metotla genelleştirilmiştir. Birincisinde hesaplama yapılırken politopların bütün kafes noktaları yerine bazı kafes noktalarına karşılık gelen monomların ürettiği polinom fonksiyonları alınarak kodlar üretilmiştir. Bu metot ile elde edilen simitli kodların alt sınıfı ilk kez [9] çalışmasında daha iyi kodlar elde etmek için incelenmiştir. Brown ve Kasprzyk bu yöntemi kullanarak aynı boyut ve uzunluktaki mevcut en iyi bilinen minimum uzaklığı aşan 7 lineer kod sergilemiştir [10]. İkinci metot olarak polinom fonksiyonlarını simitli çeşitlemin simiti yerine simitin herhangi bir Y alt kümesinde hesaplayarak kodlar inşa edilmiştir. Bu metot kullanılarak [11] makalesinde simitin tam kesişim alt kümelerinde tanımlanan kodların minimum uzaklığına alt sınır verilmiştir. Bu yaklaşımda kodların parametrelerini hesaplarken Y kümesinin $I(Y)$ sıfırlayan idealinin üreteçlerini belirlemek ve sonra $I(Y)$ idealinin Hilbert fonksiyonunun değerlerini yorumlamak çok önemlidir. Bu amaca yönelik [12] çalışmasında simitin tam kesişim alt kümelerinin dereceli Hilbert fonksiyonlarının önemli özellikleri keşfedilerek kodların boyut ve uzaklığının hesaplanması için kullanılmıştır. Benzer şekilde X, projektif uzay ise sıfırlayan ideal kullanılarak minimum uzaklık hesaplanabilir [13].

Renteria, Simis ve Villerreal bir Q matrisinin sütunları tarafından parametrize edilen $T_{X,Q}$ simitin alt kümesini tanımlamışlar ve bu kümeler üzerinde hesaplanan hesaplama kodunu parametrik kod olarak nitelendirmişlerdir [14]. Ayrıca bu çalışmada $T_{X,Q}$ simitli kümenin sıfırlayan idealinin 1 boyutlu kafes ideali olduğu ispatlanmış ve bağlantılı graflara karşılık gelen kodların uzunluğu hesaplanmıştır. Q köşegen matris olduğunda projektif uzayda $T_{X,Q}$ kümesinin sıfırlayan idealinin kafesi daha açık olarak belirlenmiştir [15]. $T_{X,Q}$ projektif simit olduğunda, yani Q birim matris olduğunda, kodların bütün parametreleri [16] makalesinde sunulmuştur. Bu çalışmalardan sonra parametrik kodlar farklı açılardan incelenmiştir, bkz [17–19]. Dias ve Neves tarafından kodlar projektif uzaydan ağırlıklı projektif simit üzerine genelleştirilmiştir [20]. Bu çalışmada ağırlıklı projektif simitin sıfırlayan idealinin 1 boyutlu kafes ideali olduğu ve bir boyutlu ağırlıklı projektif simitli kodun MDS kod olduğu ispatlanmıştır. Şahin daha genel simitli çeşitlemler için parametrik kümelerin sıfırlayan idealinin kafesi vermeden kafes ideal olduğunu ve simitin alt gruplarının tam olarak paremetrik kümelerden oluştuğunu kanıtlamıştır [21].

Bu tez çalışmasının amacı genel simitli çeşitlemlerin parametrik kümeleri üzerinde hesaplanan kodların paremetrelerini belirlemeye çalışmaktır. Bu amaca yönelik ilk olarak $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin bir üreteç kümesini bulmak için bir algoritma sunan bir teorem verilmiştir [22]. Bu teorem [14] makalesinde projektif uzayda verilen Teorem 2.1'in genel versiyonudur. Bu algoritmayı uygulayan bir `Macaulay2` kodu yazılmıştır. İkinci olarak karşılık geldiği ideal $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan ideali olan L kafesinin çok faydalı bir tanımı verilmiş olup böylece $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçleri L kafesinin bir bazı ile elde edilmiştir [23]. L kafesinin verilen bu tanımı ile L kafesinin bir bazını çıktı olarak veren bir algoritma ve bu algoritmanın `Macaulay2` kodu verilmiştir. L kafesinin diğer avantajı, $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin tam kesişim olup olmadığını kontrol edilebilmesini sağlamasıdır. Her $I(T_{X,Q})$ ideali için L kafesinin üreteçlerini hesaplayan bir algoritma sunulmuş, fakat kafesin kavramsal tanımı bazı şartların varlığında verilmiştir. Bu şartlar altında sonlu cisimler üzerinde Sıfır Yeri (Nullstellensatz) teoremi ispatlanmıştır [22].

$T_{X,Q}$ kümesinin parametrik tanımından yararlanarak $T_{X,Q}$'nun eleman sayısını dolayısıyla $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodunun uzunluğunu hesaplamak için direk bir yöntem sağlamıştır [23]. Kodun uzunluğunu hesaplamak için verilen ikinci yöntem projektif uzayda geçerli olan [14, Önerme 3.3]'den esinlenilmiştir. Kafes noktalarının kodun uzunluğunu belirleyen bir politop tanımlanmıştır, böylece daha genel simitli çeşitlemler için bu yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca bizim verdiğimiz politop daha basittir, dolayısıyla daha hızlı bir şekilde kodun uzunluğu hesaplanabilir.

$\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodun minimum uzaklığı için $T_{X,Q}$ kümesinin parametrik tanımı aracılığıyla bir alt sınır verilmiştir. Hirzebruch yüzeyin simitinden elde edilen kodların parametreleri hesaplanmıştır. Son olarak kod inşa ederken projektif uzay yerine daha genel simitli çeşitlemleri ve simit yerine parametrik alt kümeleri tercih etmenin avantajlarını gösteren örnekler sunulmuştur [23].

2 AFİN ÇESİTLEMLER

Bu bölüm, tezin temel öğelerinden olan simitli çeşitlemlerin anlaşılması için afin çeşitlemler ile ilgili temel tanımlardan ve ispatsız olarak teoremlerden oluşacaktır.

2.1 Sıfırlayan İdealler ve Afin Çeşitlemler

Tanım 2.1.1. $\mathbb{K}$ *cismi verilsin.* $\mathbb{K}^r$ *kartezyen çarpımına (r-boyutlu)* ***afin uzay*** *denir.*

Verilen $(p_1, \ldots, p_r) \in \mathbb{K}^r$ noktasını $\mathbf{p}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. $E \subseteq S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ *olmak üzere*

$$V(E) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{K}^r \mid \forall\, f \in E \text{ için } f(\mathbf{p}) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye E kümesinin tanımladığı ***afin çeşitlem*** *denir ve $V(E)$ ile gösterilir. $E = \{f_1, \ldots, f_k\}$ sonlu kümesi için $V(E)$ afin çeşitlemi $V(f_1, \ldots, f_k)$ ile de gösterilebilir.*

Örnek 2.1.3. $\mathbb{K}$ *bir cisim olmak üzere $\mathbb{K}$ afin uzayının çeşitlemlerini bulalım. $\mathbb{K}$ afin uzayı ve boş küme birer çeşitlemdir, çünkü $V(0_{\mathbb{K}}) = \mathbb{K}$, $V(1_{\mathbb{K}}) = \emptyset$. $\mathbb{K}$ bir tamlık bölgesidir, dolayısıyla her $f \in \mathbb{K}[x]$ polinomunun en fazla derecesi kadar kökü vardır [24, Teorem 14.1.11]. Bu takdirde $\mathbb{K}$ afin uzayının kendisi hariç her çeşitlemi sonludur. Diğer yandan $p_i \in \mathbb{K}$ olmak üzere $V((x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_k)) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ her sonlu alt küme çeşitlemdir.*

$E_1, E_2 \subseteq S$ ve $E_1 \subseteq E_2$ ise $V(E_2) \subseteq V(E_1)$ olduğu kolayca görülür. Bu takdirde E kümesinin ürettiği ideal $\langle E \rangle$ olmak üzere $V(E) \supset V(\langle E \rangle)$ olur. Diğer yandan $f_i \in E,\ g_i \in S$ olmak üzere $\langle E \rangle$ idealinin herhangi bir elemanı $\sum\limits_i f_i g_i$ sonlu toplam şeklindedir, dolayısıyla $V(E) \subseteq V(\langle E \rangle)$ sağlanır. Sonuç olarak her afin çeşitlem bir ideal tarafından tanımlanabilir. Ayrıca polinom halkalarındaki Hilbert baz teoremi [25, Teorem 4, s.74] gereğince her ideal sonlu üreteçli olduğu için bütün afin çeşitlemler, sonlu sayıda polinomun ortak çözümlerinin kümesi şeklinde olacaktır.

Örnek 2.1.4. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ *herhangi bir sonlu cisim olsun. Bu takdirde $I = \langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle \subset S$ idealinin tanımladığı çeşitlem $V(I) = V(x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r) = \mathbb{K}^r$ olur.*

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}^2$ *afin uzayında birim çember* $V(x^2+y^2-1)$ *afin çeşitlemi ile verilebilir. Benzer şekilde konikler de afin çeşitlemdir. Fakat her eğri afin çeşitlem değildir.* $y = \sin x$ *eğrisinin afin çeşitlem olmadığını gösterelim: Varsayalım ki* $y = \sin x$ *eğrisi afin çeşitlem olsun. Bu durumda en az bir* $f \in \mathbb{R}[x, y]$ *polinomu vardır öyle ki her* $p \in \mathbb{R}$ *için* $f(p, \sin p) = 0$. $g = g(x) = f(x, 0)$ *şeklinde tanımlanırsa, her* $k \in \mathbb{Z}$ *için* $g(k2\pi) = f(k2\pi, 0) = f(k2\pi, \sin k2\pi) = 0$ *olur ki* $g \in \mathbb{R}[x]$ *polinomunun sonsuz sayıda kökü vardır. Bu bir çelişkidir ve ispat sonlanır.*

Önerme 2.1.6. *[26]* $\{I_i\}$, *S polinom halkasının herhangi bir idealler ailesi olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $V(0) = \mathbb{K}^r, V(1) = \emptyset$.

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$.

(iii) $\bigcap\limits_i V(I_i) = V(\sum\limits_i I_i)$.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{K}$ *bir cisim olmak üzere* $\mathbb{K}^r$ *afin uzayının her noktası bir çeşitlemdir. Gerçekten, her* $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^r$ *için* $V(x_1 - p_1, \ldots, x_r - p_r) = \{\mathbf{p}\}$ *olur. Sonlu sayıda afin çeşitlemin birleşimi de afin çeşitlem olduğu için* $\mathbb{K}^r$ *uzayının her sonlu kümesi afin çeşitlemdir.*

Önerme 2.1.6 gösteriyor ki herhangi $V(I)$ afin çeşitlemi üzerinde

$$\{A \subseteq V(I) \mid V(I) \setminus A, \text{ afin çeşitlem}\}$$

kümeler ailesi bir topolojidir ve bu topolojiye **Zariski topoloji** denilmiştir. $W \subseteq V(I)$ kümesinin kapanışı $\overline{W}$, W kümesini kapsayan $V(I)$ çeşitleminin en küçük alt çeşitlemidir. Bir afin çeşitleminin açık kümelerine **yarı afin çeşitlem** denir.

Bir ideal ile bir afin çeşitlem tanımlandığı gibi bir afin çeşitlemde S halkasında bir ideal tanımlar:

Tanım 2.1.8. *Her* $Y \subseteq \mathbb{K}^r$ *kümesi için*

$$\{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] \mid \forall\, \mathbf{p} \in Y \text{ } \textit{için}\; f(\mathbf{p}) = 0\}$$

alt kümesi bir idealdir. Bu ideale Y'nin ***sıfırlayan ideali*** *denir ve* $I(Y)$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.1.9. *$\mathbb{K}$ cismi sonsuz ise $I(\mathbb{K}^r) = \{0\}$ olduğu kolayca görülür. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ için $I(\mathbb{K}^r) = \langle x_1^q - x_1, \dots, x_r^q - x_r \rangle$ eşitliğini ispatlayalım. " $\supset$ " kapsaması aşikardır. $I(\mathbb{K}^r)$ idealinden bir f polinomu alalım. f polinomuna bölme algoritmasını uygulayalım:*

$$f = f_1(x_1^q - x_1) + \cdots + f_r(x_r^q - x_r) + g.$$

$x_1 > x_2 > \cdots > x_k$ lex monom sıralamasını [25, Tanım 3, s. 56] alırsak $x_i^q - x_i$ bölen polinomlarının baş terimi x_i^q olur ve bölme algoritmasından, g polinomunun her monomu her $i \in \{1, \dots, r\}$ için x_i^q monomlarına bölünemez [25, Teorem 3, s. 64]. Dolayısıyla $\mathrm{der}_{x_i}(g) \leq q-1$ elde edilir. Bu yüzden [27, Lemma 2.1] gereği $g = 0$, çünkü $g \in I(\mathbb{K}^r)$. Sonuç olarak $I(\mathbb{K}^r) \subset \langle x_1^q - x_1, \dots, x_r^q - x_r \rangle$ kapsaması da ispatlanır. Benzer şekilde $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ ise $I((\mathbb{K}^*)^r) = \langle x_1^{q-1} - 1, \dots, x_r^{q-1} - 1 \rangle$ eşitliği de gösterilir.

Örnek 2.1.10. *$\mathbb{K}^2$ afin düzleminde $I(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle$ olur. $\langle x, y \rangle$ idealindeki her polinom $g(x,y)x + h(x,y)y$ formatında olduğundan ispatın bir yönü açıktır. Diğer kapsamayı ispatlamak için, $f(0,0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $f \in \mathbb{K}[x,y]$ polinomu alalım. Bu durumda f polinomunun sabit terimi sıfır olacağından dolayı $f \in \langle x, y \rangle$ olur ki istenendir. Benzer şekilde $\mathbb{K}^r$ afin uzayında bir $\mathbf{p}$ noktasının sıfırlayan idealinin $\langle x_1 - p_1, \dots x_r - p_r \rangle$ ideali olduğu gösterilir, bu ideal maksimaldir [25, Önerme 9, s.201]. $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim ise tek elemanlı afin çeşitlemin ideali maksimal idealdir, tersi ise cebirsel kapalı cisim üzerinde geçerlidir.*

Önerme 2.1.11. *[25, Önerme 10, s.202] $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı bir cisim ise S polinom halkasında I idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul $I = \langle x_1 - p_1, \dots x_r - p_r \rangle$ olacak şekilde $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^r$ elemanının var olmasıdır.*

Yukarıdaki önerme gereği $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı bir cisim ise maksimal idealler ile tek elemanlı çeşitlemler arasında birebir örten eşleme vardır.

Önerme 2.1.12. *[25] $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{K}^r$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.*

(i) $Y_1 \subseteq Y_2 \implies I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(ii) $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

(iii) $J_1 \subseteq I(V(J_1))$

(iv) $I(Y_1) = I(\overline{Y_1})$

(v) $\overline{Y_1} = V(I(Y_1))$

$\mathscr{V} = \{V \subset \mathbb{K}^r \mid V \text{ afin çeşitlem}\}$ ve $\mathscr{I} = \{I \subset S \mid I, \text{ ideal}\}$ olmak üzere $F_1 : \mathscr{I} \to \mathscr{V}$, $I \mapsto V(I)$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Fakat birebir değildir. Eğer cisim kapalı değilse birçok idealin afin çeşitlemi boş kümedir: $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $I_p = \langle p \rangle = \mathbb{R}[x]$, $I_2 = \langle 1 + x^2 \rangle$ ideallerinin afin çeşitlemleri boş kümedir. Eğer $\mathbb{K}$ cismi kapalı olursa sadece polinom halkasının kendisi boş kümeyi temsil edecektir:

Teorem 2.1.13. *[25, Teorem 1, s. 170](Zayıf Nullstellensatz) $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı cismi ve $I \subseteq S$ ideali verilsin. Bu takdirde $V(I) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $I = S$ eşitliğinin sağlanmasıdır.*

$\mathbb{K}$ cisminin cebirsel kapalı seçilmesi bu dönüşümün birebir olması için yeterli değildir: Her a, b pozitif tam sayısı için $V(x_1^a, x_2^b) = \{(0,0)\}$. Dolayısıyla her a, b pozitif tam sayısına karşılık gelen $V(x_1^a, x_2^b)$ çeşitleminin ideali aynıdır: $I(V(x_1^a, x_2^b)) = \langle x, y \rangle$. Aşağıda verilen radikal ideal tanımı aracılığla bu eşitlikler genellenecektir.

Tanım 2.1.14. *Verilen $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideali için*

$$\sqrt{I} = \{f \mid \exists z \geq 0 \text{ tam sayısı için } f^z \in I\} \supseteq I$$

*kümesi de bir idealdir ve bu ideale I idealinin radikali denir [25, s. 175]. Eğer $I = \sqrt{I}$ ise I idealine **radikal ideal** denir.*

Teorem 2.1.15. *[25, Teorem 6, s. 176](Güçlü Nullstellensatz) $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı bir cisim ve $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ bir ideal olmak üzere $I(V(J)) = \sqrt{J}$.*

$F_2 : \mathscr{V} \to \mathscr{I}$, $V \mapsto I(V)$ dönüşümü iyi tanımlıdır. $\mathbb{K}$ cismine bağlı olmadan F_2 dönüşümü her zaman birebirdir, çünkü $V(I(V)) = V$. Her çeşitlemin sıfırlayan ideali radikal olduğundan bu dönüşüm örten değildir [25, Sonuç 3, s. 176]. $V(I) = V(\sqrt{I})$ eşitliği F_1 dönüşümünün birebir olmadığını gösterir, örten olduğu açıktır. F_2 dönüşümünün değer kümesini ve F_1 dönüşümünün tanım kümesini $\sqrt{\mathscr{I}} = \{I \subset S \mid I \text{ radikal ideal}\}$ radikal idealler kümesine kısıtlayalım. Ayrıca $\mathbb{K}$ cismini cebirsel kapalı alalım. Bu durumda her I radikal ideali için $I(V(I)) = \sqrt{I}$ olduğundan F_2 dönüşümü örtendir. Ayrıca F_1 dönüşümü birebirdir: I, J idealleri için $V(I) = V(J)$ olsun, dolayısıyla

$I(V(I)) = I(V(J))$. Diğer yandan $I(V(I)) = \sqrt{I} = I$, $I(V(J)) = \sqrt{J} = J$ eşitliklerinden $I = J$. Sonuç olarak iki dönüşümde birebir ve örtendir, üstelik $V(I(V)) = V$, $I(V(I)) = \sqrt{I} = I$ olduğundan birbirlerinin tersidir.

$\mathbb{K}$ cismi kapalı değilse yukarıda verilen Nullstellensatz Teoremlerini uygulayamayız, dolayısıyla radikal idealler ve çeşitlemler arasında eşlemeden bahsedemeyiz. [28] çalışmasında benzer aşamalar sonlu cisimlere uyarlanmıştır. $I(V)$ sıfırlayan idealinin radikal ideal olması her zaman geçerlidir, yani $\mathbb{K}$ cismine bağlı değildir. Bu nedenle öncelikle sonlu cisim polinom halkasının radikal idealleri incelenmiştir.

Lemma 2.1.16. *[28, Lemma 3.1.1] $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ olmak üzere her $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideali için*

$$I + \langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle$$

ideali radikaldir.

Bu lemmayı $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ halkasının $\langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle$ idealini kapsayan idealleri radikaldir veya $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/\langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle$ bölüm halkasının her ideali radikaldir şeklinde de yorumlayabiliriz.

Teorem 2.1.17. *[28, Teorem 3.1.3] $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ olmak üzere her $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideali için $V(I) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $1 \in I + \langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle$.*

Teorem 2.1.18. *[28, Teorem 3.1.2] $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ sonlu cisim üzerinde tanımlı polinom halkası olmak üzere herhangi I ideali için $I(V(I)) = I + \langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle$ eşitliği sağlanır.*

$\mathbb{K}$ cismi kapalı ise maksimal idealer ile tek elemanlı afin çeşitlemler arasında birebir örten bir eşleme olduğunu söylemiştik. Şimdi asal idealerin, afin çeşitlemlerin bir alt kümesi ile birebir örten eşlendiğini gösterelim: $V \subseteq \mathbb{K}^r$ afin çeşitlem olsun. Eğer her V_1, V_2 iki afin çeşitlemi için $V = V_1 \cup V_2$ olması $V_1 = V$ veya $V = V_2$ olmasını gerektiriyorsa V afin çeşitlemine **indirgenemez** çeşitlem denir.

Önerme 2.1.19. *[25, Önerme 3, s.198] $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim olmak üzere V çeşitleminin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart $I(V)$ idealinin asal olmasıdır.*

Her I asal ideali için $V(I)$ afin çeşitlemi indirgenemez değildir. Örneğin $I = \langle x_1x_4 - x_2x_3 \rangle \subset \mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ideali asaldır fakat $V(I) \subset \mathbb{F}_2^4$ çeşitlemi indirgenebilirdir. $\mathbb{K}$

cebirsel kapalı bir cisim ise her I asal ideali için $V(I)$ indirgenemez bir afin çeşitlemdir. Sonuç olarak indirgenemez afin çeşitlemler ile asal idealler $V \mapsto I(V)$, $I \mapsto V(I)$ dönüşümleri ile birebir ve örten eşleşir [25, Sonuç 4, s.199].

2.2 Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. *Herhangi bir $V \in \mathbb{K}^r$ afin çeşitlemi için $\phi : V \to \mathbb{K}$ fonksiyonu en az bir $f \in S$ polinomunun V kümesine kısıtlanışına eşit oluyorsa V üzerinde* ***polinom fonksiyon*** *denir. V üzerinde polinom fonksiyonlarının kümesini $P(V, \mathbb{K})$ ile gösterelim:*

$$P(V, \mathbb{K}) = \{\phi : V \to \mathbb{K} \mid \exists f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] \text{ için } \phi = f|_V\}.$$

$S \to P(V, \mathbb{K})$, $f \mapsto f|_V$ halka homomorfizması örtendir ve çekirdeği $I(V)$ idealidir, dolayısıyla $P(V, \mathbb{K}) \cong S/I(V)$. $f, g \in S$ olmak üzere $f|_V = g|_V$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $f - g \in I(V)$. Böylece bir çeşitlemin üzerinde tanımlı olan polinom fonksiyonların halkası aşağıdaki şekilde de ifade edilir:

Tanım 2.2.2. *V bir afin çeşitlem olmak üzere $S/I(V)$ bölüm halkasına V afin çeşitleminin* ***afin koordinat halkası*** *denir ve $\mathbb{K}[V]$ ile gösterilir.*

$\mathbb{K}[V]$ bölüm halkasının her denklik sınıfı V üzerinde bir polinom fonksiyona karşılık gelir. Her $f \in S$ için $f + I(V) \in \mathbb{K}[V]$ denklik sınıfını $\bar{f}$ ile gösterelim.

r pozitif tamsayı olmak üzere $\{1, \ldots, r\}$ kümesi tez boyunca $[r]$ ile gösterilecektir. $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkası $\{x_i + I(V) \mid i \in [r]\}$ tarafından üretilen bir sonlu $\mathbb{K}$-cebiridir. Daha genel olarak her $I \subseteq S$ ideali için S/I halkası $\{x_i + I \mid i \in [r]\}$ tarafından üretilen bir sonlu $\mathbb{K}$-cebiridir. Diğer yandan her sonlu üretilmiş r boyutlu $\mathbb{K}$-cebiri için bir $I \subseteq S$ ideali vardır öyle ki $\mathbb{K}$-cebiri S/I halkasına izomorftur: A, $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ kümesi tarafından üretilen bir $\mathbb{K}$-cebiri olsun. Bu takdirde A cebirinin her elemanı $\{a_1^{b_1} \cdots a_r^{b_r} \mid \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r\}$ kümesinin elemanlarının bir $\mathbb{K}$-lineer toplamıdır, yani

$$A = \left\{ \sum_i c_i a_1^{b_{i1}} \cdots a_r^{b_{ir}} \mid \mathbf{b}_i \in \mathbb{N}^r,\ c_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\phi_A : S \to A$, $x_i \mapsto a_i$ dönüşümü örten halka homomorfizmasıdır ve $A \simeq S/\text{Çek}\phi_A$. Her sonlu üretilmiş bir $\mathbb{K}$-cebiri koordinat halkası değildir. $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı olmak üzere A sonlu üretilmiş $\mathbb{K}$-cebiri, indirgenmiş (nilpotent elemanı olmayan) ise koordinat halkasıdır: A cebiri bir I ideali için S/I bölüm halkasına izomorftur. Öte yandan A cebiri indirgenmiş olduğundan, I radikaldir ve $I = I(V(I))$, dolayısıyla $S/I \simeq \mathbb{K}[V(I)]$. Bu yüzden sonlu üretilmiş $\mathbb{K}$-cebirinin koordinat halkası olması için gerek ve yeter şart indirgenmiş $\mathbb{K}$-cebiri olmasıdır [29, Teorem 1.25].

$f, g \in S$ olmak üzere f/g geleneksel olarak $\mathbb{K}^n$ üzerinde **rasyonel fonksiyon** olarak adlandırılır ve bu elemanlar $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ tamlık bölgesinin kesirler cismini oluşturur:

$$\mathbb{K}(x_1, \dots, x_r) = \{f/g \mid f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r],\ g \neq 0\}$$

g fonksiyonun sıfırlandığı yerlerde f/g bir fonksiyon tanımlamaz. Fakat $\mathbb{K}^r$ afin uzayının bazı yarı afin çeşitlemelerinde iyi tanımlıdır. f/g rasyonel fonksiyonu $\mathbb{K}^r \setminus V(g)$ kümesi üzerinde iyi tanımlıdır.

V bir indirgenemez afin çeşitlem olmak üzere $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkasının kesirler cismi $\mathbb{K}(V)$ ile gösterilir:

$$\mathbb{K}(V) = (\mathbb{K}[V] \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{K}[V] = \{\bar{f}/\bar{g} \ \mid \ \bar{f}, \bar{g} \in \mathbb{K}[V],\ g \notin I(V)\}$$

$\mathbb{K}(V)$ cisminin elemanları V üzerinde **rasyonel fonksiyon** olarak adlandırılır. Benzer şekilde bu rasyonel fonksiyonlar V afin çeşitlemi üzerinde iyi tanımlı olmayabilir. V afin çeşitleminin bazı yarı afin çeşitlemlerinde iyi tanımlıdır.

Tanım 2.2.3. *V bir indirgenemez afin çeşitlem ve $\mathbf{p} \in V$ olmak üzere*

$$\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}} = \{\bar{f}/\bar{g} \in \mathbb{K}(V) \ \mid \ g(\mathbf{p}) \neq 0\}$$

kümesi $\mathbb{K}(V)$ cisminin alt halkasıdır ve bu halkanın elemanlarına $\mathbf{p}$ noktasında ***düzenli fonksiyon*** *denir. $U \subseteq V$ açık alt kümesinin her noktasında düzenli olan fonksiyona U üzerinde* ***düzenli*** *denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu halka $\mathscr{O}(U)$ ile gösterilir. Bu durumda her $\mathbf{p} \in V$ için $\mathscr{O}(U) = \bigcap_{\mathbf{a} \in U} \mathscr{O}_{V,\mathbf{a}}$ ve $\mathbb{K}[V] \subset \mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ olduğu açıktır.*

$\mathbf{p} \in V$ olmak üzere $m_{V,\mathbf{p}} = \{\bar{f} \in \mathbb{K}[V] \mid f(\mathbf{p}) = 0\}$ kümesi $\mathbb{K}[V]$ halkasının bir maksimal idealdir, çünkü $g \mapsto g(\mathbf{p})$, $\mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}$ dönüşümü birebir halka homomorfizmasıdır ve $\mathbb{K}[V]/m_{V,\mathbf{p}} \simeq \mathbb{K}$. $\mathbb{K}[V]$ halkasının $m_{V,\mathbf{p}}$ maksimal idealindeki yerelleştirmesi

$$(\mathbb{K}[V] \setminus m_{V,\mathbf{p}})^{-1}\mathbb{K}[V] = \{\bar{f}/\bar{g} \ \mid \ f \in \mathbb{K}[V],\ g \in \mathbb{K}[V] \setminus m_{V,\mathbf{p}}\}$$

$\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ halkasıdır, dolayısıyla $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkadır. Tek maksimal ideali

$$m_{V,\mathbf{p}} = \{\bar{f}/\bar{g} \in \mathbb{K}(V) \mid g(\mathbf{p}) \neq 0, f(\mathbf{p}) = 0\}.$$

Örnek 2.2.4. *$V = V(x_1x_4 - x_2x_3) \subset \mathbb{K}^4$ olmak üzere $\phi = \overline{x_1}/\overline{x_2} \in \mathbb{K}(V)$ rasyonel fonksiyonunun $U = \{\mathbf{p} \in V \mid p_2 \neq 0 \text{ veya } p_4 \neq 0\} \subset V$ açık kümesinde düzenli bir fonksiyon olduğunu gösterelim: U kümesi $U_1 = \{\mathbf{p} \in V \mid p_2 \neq 0\}$, $U_2 = \{\mathbf{a} \in V \mid a_4 \neq 0\}$ kümelerinin birleşimidir. Herhangi $\mathbf{p} \in U_1$ elemanı için*

$$\phi = \overline{x_1}/\overline{x_2},\ x_2(\mathbf{p}) \neq 0$$

olduğundan $\phi \in \bigcap_{\mathbf{p}\in U_1} \mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$. Şimdi U_2 kümesinden bir $\mathbf{p}$ elemanı alalım. $I(V) \supseteq \langle x_1x_4 - x_2x_3\rangle$ olduğu aşikardır, bu sebeple $\mathbb{K}(V)$ cisminde $\overline{x_1}/\overline{x_2} = \overline{x_3}/\overline{x_4}$. Bu durumda $\phi = \overline{x_3}/\overline{x_4}$ elde edilir ve $x_4(\mathbf{p}) \neq 0$ olduğundan $\phi \in \bigcap_{\mathbf{a}\in U_2} \mathscr{O}_{V,\mathbf{a}}$.

Yukarıdaki örnekte ϕ fonksiyonunun bir noktadaki düzenli olduğunu gösterirken seçtiğimiz temsilci ile sadece o noktadaki düzenlilik değil bu noktayı kapsayan açık bir küme üzerinde düzenlilik gösterilmiştir. Yani örnekte U_1, U_2 açık kümelerinin her noktasındaki düzenliliği göstermek için farklı temsilci kullanılmamıştır. Aşağıdaki lemma düzenli fonksiyon tanımınını her noktada yerel temsilcilerle değil bir noktanın açık komşuluğunda yerel temsilcilerle uygulanabileceğini veriyor. Sonuç olarak düzenli fonksiyon tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir. İki tanım ile elde ettiğimiz bir noktadaki düzenli fonksiyonların oluşturduğu halkalar izomorftur [30, Teorem 3.2.c]. Bu tanım ile düzenli fonksiyon tanımı afin olmayan çeşitlemler için genişletilebilir.

Tanım 2.2.5. *U bir yarı afin çeşitlem ve $\mathbf{p} \in U$ olsun. Bu takdirde*

$$\forall\, \mathbf{p}' \in U_{\mathbf{p}} \text{ için } \phi(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p}')}{g(\mathbf{p}')},\ g(\mathbf{p}') \neq 0$$

olacak şekilde $f, g \in S$ polinomları ve $U_{\mathbf{p}} \subseteq U$ açık kümesi varsa $\phi : U \to \mathbb{K}$ fonksiyonu $\mathbf{p} \in U$ noktasında düzenlidir denir. Eğer U kümesinin her noktası için ϕ düzenli ise ϕ fonksiyonuna U kümesinde düzenli denir.

Teorem 2.2.6. *[30, Teorem 3.2] V bir indirgenemez afin çeşitlem ve $\mathbb{K}$ cismi cebirsel kapalı olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.*

(i) $\mathscr{O}(V) \simeq \mathbb{K}[V]$.

(ii) $\mathbf{p} \mapsto m_{V,\mathbf{p}}$ *dönüşümü* $\mathbb{K}[V]$ *halkasının maksimal idealleri ile* V *afin çeşitleminin noktalarını birebir ve örten eşler.*

$\mathbb{K}$ cismi cebirsel kapalı olmak üzere, $\mathbb{K}[V]$ halkasının maksimal idealleri ile V afin çeşitleminin noktaları birebir ve örten eşleştiğinden, V çeşitlemini $K[V]$ halkasının maksimal ideallerinin kümesi ile ifade edebiliriz. Genel olarak, R bir değişmeli halka olmak üzere R halkasının maksimal ideallerinin kümesine halkanın **maksimum spektrumu** denir ve $\mathrm{Specm}(R)$ ile gösterilir. Sonuç olarak $V \simeq \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[V])$.

Tanım 2.2.7. *V bir afin çeşitlem ve $g \in S$ olmak üzere*

$$V_g = \{\mathbf{p} \in V \mid g(\mathbf{p}) \neq 0\}$$

*kümesi V üzerindeki Zariski topolojisine göre açık bir kümedir ve bu kümeye **temel açık küme** denir.*

V afin çeşitleminin temel açık kümelerinin oluşturduğu aile V üzerindeki Zariski topolojisinin bir tabanıdır [31, s. 17].

Önerme 2.2.8. *[31, Lemma 2.1] $\mathbb{K}$ cismi cebirsel kapalı olmak üzere, V_g temel açık kümesi üzerinde tanımlanan düzenli fonksiyonlarının halkası $\mathbb{K}[V]$ cebirinin $\{g, g^2, \dots\}$ çarpımsal kümesine göre yerelleştirmesidir:*

$$\mathscr{O}(V_g) = \mathbb{K}[V]_g = \{\bar{f}/\bar{g}^i \mid \bar{f} \in \mathbb{K}[V],\ i \geq 0\} \subset \mathbb{K}(V)$$

Örnek 2.2.9. $(\mathbb{K}^*)^r = V_{x_1 \cdots x_r} = \mathbb{K}^r \backslash V(x_1 \cdots x_r)$*, $\mathbb{K}^r$ afin uzayında açık kümedir. Yukarıdaki önerme aracılığıyla $(\mathbb{K}^*)^r$ açık kümesinin düzenli fonksiyonlar halkası Laurent polinom halkasıdır:*

$$\mathscr{O}((\mathbb{K}^*)^r) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]_{x_1 \cdots x_r} = \mathbb{K}[x_1^{\pm}, \dots, x_r^{\pm}]$$

Tanım 2.2.10. *V_1, V_2 bir afin çeşitlem veya yarı afin çeşitlem olsun. $\phi : V_1 \to V_2$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa **morfizm** denir:*

(i) ϕ *süreklidir.*

(ii) Her $U \subseteq V_2$ açık kümesi için $f \in \mathscr{O}(U)$ ise $f \circ \phi \in \mathscr{O}(\phi^{-1}(U))$ olmalıdır.

ϕ birebir, örten ve ϕ, ϕ^{-1} morfizm ise ϕ fonksiyonuna **izomorfizm** denir.

Önerme 2.2.11. *[30, Lemma 3.6] V_1 yarı afin çeşitlem veya afin çeşitlem ve $V_2 \subseteq \mathbb{K}^r$ bir afin çeşitlem olsun. $\phi : V_1 \to V_2$ morfizm olması için gerek ve yeter şart her $i \in [r]$ için $x^i \circ \phi \in \mathscr{O}(V_1)$ olmasıdır, burada $x^i : V_2 \to \mathbb{K}$, i. koordinat fonksiyonudur.*

Yukarıdaki lemmayı iki özel duruma uygulayalım: V_1 yarı afin çeşitlem veya afin çeşitlem olmak üzere V_1 kümesinden $\mathbb{K}$ cismine tanımlanan bütün morfizmler tam olarak $\mathscr{O}(V_1)$ halkasının elemanlarıdır. İkinci olarak $V_2 \subseteq \mathbb{K}^r, V_1$ afin çeşitlem olmak üzere $\phi : V_1 \to V_2$ morfizm olması için gerek ve yeter koşul her $i \in [r]$ için $x^i \circ \phi \in \mathbb{K}[V_1]$ olmasıdır.

Örnek 2.2.12. *$V = V(f_1, \ldots, f_k) \subset \mathbb{K}^r$ ve $g \in S$ olmak üzere, V_g açık kümesi $V_1 = V(f_1, \ldots, f_k, 1 - gy) \subset \mathbb{K}^r \times \mathbb{K}$ afin çeşitlemine izomorftur. $\pi : \mathbb{K}^r \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}^r$ iz düşümü fonksiyonu morfizmdir, çünkü her $i \in [r]$ için $x^i \circ \pi$ polinomdur. Ayrıca π iz düşümü fonksiyonu birebirdir ve $\pi(V_1) = V_g$. Diğer yandan*

$$\pi^{-1} : V_g \to V_1, \pi^{-1}(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, 1/g(x_1, \ldots, x_r))$$

fonksiyonu da $x_1, \ldots, x_r, 1/g(x_1, \ldots, x_r) = y \in \mathscr{O}(V_1)$ olduğundan Önerme 2.2.11 gereği morfizmdir. Sonuç olarak V_g temel açık kümesi izomorfizm altında ayrıca kapalı bir kümedir.

Bir V çeşitleminin $\mathscr{O}(V)$, $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ halkaları izomorfizme bağlı invaryantlarıdır. V çeşitleminin yerine bu afin çeşitleme izomorf bir yarı afin çeşitlem veya bir afin çeşitlem alırsak, bu kümelerin düzenli fonksiyon halkaları da izomorftur.

Önerme 2.2.13. *[30, Önerme 3.5] V_1 yarı afin çeşitlem veya afin çeşitlem ve $V_2 \subseteq \mathbb{K}^r$ bir afin çeşitlem olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\phi : V_1 \to V_2$ bir morfizm ise her $f \in \mathbb{K}[V_2]$ için $\phi^* : \mathbb{K}[V_2] \to \mathscr{O}(V_1)$, $\phi^*(f) = f \circ \phi$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{K}$-cebir homomorfizmasıdır.

(ii) V_1, V_2 kümelerinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{O}(V_1)$, $\mathbb{K}[V_2]$ halkalarının izomorfik $\mathbb{K}$-cebiri olmasıdır.

Teorem 2.2.6 ile bir indirgenemez afin çeşitlemin koordinat halkası ve düzenli fonksiyonlar halkası izomorftur. Bu takdirde yukarıdaki önermeden, iki afin çeşitlemin izomorf olması için gerek ve yeter şart koordinat halkalarının izomorfik $\mathbb{K}$-cebiri olmasıdır.

Örnek 2.2.14. *$V_1 = V(x_1x_2 - 1),\ V_2 = V({x_1}^2 - {x_2}^2 - 1) \subset \mathbb{K}^2$ afin çeşitlemlerinin izomorf olduğunu gösterelim.*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[x_1, x_2] & \to & \mathbb{K}[x_1, x_2]/\langle {x_1}^2 - {x_2}^2 - 1\rangle \\ x_1 & \mapsto & x_1 - x_2 + \langle {x_1}^2 - {x_2}^2 - 1\rangle \\ x_2 & \mapsto & x_1 + x_2 + \langle {x_1}^2 - {x_2}^2 - 1\rangle \end{array}$$

dönüşümü örten $\mathbb{K}$-cebiri homomorfizmasıdır ve çekirdeği $\langle x_1x_2 - 1\rangle$ idealidir, dolayısıyla

$$\phi^* : \mathbb{K}[V_1] \to \mathbb{K}[V_2],\ \overline{x_1} \mapsto \overline{x_1 - x_2},\ \overline{x_2} \mapsto \overline{x_1 + x_2}$$

izomorfizmasıyla $\mathbb{K}[V_1] \simeq \mathbb{K}[V_2]$. Önerme 2.2.13 gereği $V_1,\ V_2$ afin çeşitlemleri izomorftur. Şimdi ϕ^* $\mathbb{K}$-cebiri homomorfizmasına karşılık gelen izomorfizmayı bulalım: $h_1 = \phi^*(\overline{x_1}),\ h_2 = \phi^*(\overline{x_2}) \in \mathbb{K}[V_2]$ olduğundan Önerme 2.2.11'den

$$\phi : V_2 \to V_1,\ \phi((p_1, p_2)) = (h_1((p_1, p_2)), h_2((p_1, p_2))) = (p_1 - p_2, p_1 + p_2)$$

morfizmdir. Diğer yandan $\phi(V_2) = V_1$ ve ϕ birebirdir.

Örnek 2.2.15. *Örnek 2.2.12 ile $(\mathbb{K}^*)^r = \mathbb{K}^r \backslash V(x_1 \cdots x_r) \subset \mathbb{K}^r$ açık kümesi $V(1 - yx_1 \cdots x_r) \subset \mathbb{K}^{r+1}$ afin çeşitlemine izomorftur. $(\mathbb{K}^*)^r$ kümesinin koordinat halkası*

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]_{x_1 \cdots x_r} = \mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_r^{\pm}]$$

Laurent polinom halkasıdır. Dolayısıyla $\mathbb{K}[V(1 - yx_1 \cdots x_r)] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y]/I(\langle 1 - yx_1 \cdots x_r\rangle)$, $\mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_r^{\pm}]$ halkaları izomorfik $\mathbb{K}$-cebiridir.

Bu alt bölümü afin çeşitlemlerin kartezyen çarpımlarından bahsederek sonlandıralım. Her $i \in [s], j \in [k]$ için $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r],\ g_j \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ olmak üzere $V_1 = V(f_1, \ldots, f_s) \subseteq \mathbb{K}^r,\ V_2 = V(g_1, \ldots, g_k) \subseteq \mathbb{K}^n$ afin çeşitlemlerinin $V_1 \times V_2$ kartezyen çarpımları $\mathbb{K}^{r+n}$ afin uzayında afin çeşitlemdir: Burada $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r],\ \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ cebirlerini $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_n]$ cebirinin alt cebiri olarak düşünelim. $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_k \in$

$\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_n]$ olmak üzere

$$V_1 \times V_2 = V(f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_k) \subseteq \mathbb{K}^{r+n}.$$

Diğer yandan

$$I(V_1 \times V_2) = I(V_1) + I(V_2) \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_n]$$

eşitliği mevcuttur [32].

Önerme 2.2.16. *[32, Önerme 2.3.10] $V_1 \subset \mathbb{K}^r$, $V_2 \subset \mathbb{K}^n$ afin çeşitlemleri indirgenemez ise $V_1 \times V_2$ afin çeşitlemi de indirgenemezdir.*

2.3 Boyut

Bir afin çeşitlemin boyutu topolojideki boyut tanımı üzerinden tanımlanmıştır. C elemanları boş kümeden farklı bir kümeler ailesi olsun. C kümesinin " $\subset$ " kapsama bağıntısına göre tam sıralı olan alt kümesine **zincir** denir. Bir $C' \subset C$ zincirinin uzunluğu $|C'| - 1$ olarak tanımlanır. k uzunluğunda bir zincir

$$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_k$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.1. *V bir afin çeşitlem ve τ, V üzerinde tanımlanan Zariski topoloji olsun. τ topolojik uzayının* ***boyutu****, τ'nun indirgenemez elemanlarından oluşan zincirinin uzunluğunun maksimumudur.*

Zariski topoloji aracılığıyla bir afin çeşitlemin boyutunu hesaplayabiliriz. Ayrıca Zariski topoloji Noetherian topoloji (Bir topolojik uzayın her indirgenemez farklı kapalı alt kümelerinin azalan zinciri sonlu ise Noetherian denir.) olduğu için her afin çeşitlemin boyutu sonludur [33, Lemma 2.13].

Örnek 2.3.2. *$\mathbb{K}$ afin uzayının indirgenemez afin çeşitlemleri bir elemanlı alt kümeleri ve kendisidir, dolayısıyla* $\operatorname{boy} \mathbb{K} = 1$.

Şimdi halkalar üzerinde boyut tanımından bahsedelim.

Tanım 2.3.3. *R bir halka olmak üzere R halkasının asal ideallerinin maksimum uzunluktaki zincirinin uzunluğuna R halkasının* ***Krull boyutu*** *denir.*

Tanım gereğince Noetherian bir halkanın Krull boyutu sonludur.

Örnek 2.3.4. *Her cismin tek asal ideali sıfır ideali olduğu için Krull boyutu sıfırdır.*

Örnek 2.3.5. *$\mathbb{Z}$ halkasının maksimum uzunluktaki bir asal idealler zinciri $z \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\{0\} \subset \langle z \rangle$ zinciridir, dolayısıyla $\operatorname{boy} \mathbb{Z} = 1$. Genellersek her esas ideal bölgesinin Krull boyutu 1'dir.*

Örnek 2.3.6. *S polinom halkası için $\operatorname{boy} S = r$, çünkü asal idealler kümesinde*

$$\{0\} \subset \langle x_1 \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$$

zincirinin uzunluğu maksimumdur [29, Sonuç 5.7].

Tanım 2.3.7. *$P \subset R$ halkasında bir asal ideal olmak üzere P idealinin kapsadığı R halkasının asal ideallerinin*

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_k = P$$

zincirlerinin maksimum uzunluğuna idealin ***yüksekliği*** *denir ve $\operatorname{ht} P$ ile gösterilir. Eğer $I \subset R$ ideali asal değilse idealin yüksekliği I idealini içeren minimum yüksekliğe sahip asal idealin yüksekliği ile tanımlanır, yani*

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} P \mid P \textit{ asal ve } P \supset I\}.$$

Teorem 2.3.8. *(30, Teorem 1.8) R sonlu üretilmiş bir $\mathbb{K}$-cebiri ve tamlık bölgesi olsun. $P \subset R$ asal bir ideal olmak üzere*

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{boy} R/P = \operatorname{boy} R$$

Bir afin çeşitlemin boyutu ile cebirde halkaların Krull boyutu koordinat halkaları üzerinden ilişkilendirilmiştir.

Önerme 2.3.9. *(30, Önerme 1.7) V bir afin çeşitlem olmak üzere V afin çeşitleminin boyutu ile $K[V]$ koordinat halkasının boyutu aynıdır.*

boy $S = r$ olduğundan Önerme 2.3.9 ile boy $\mathbb{K}^r = r$. Önerme 2.3.9 ve Teorem 2.3.8 gereği verilen bir $V \subseteq \mathbb{K}^r$ afin çeşitlemi için ht $I(V)$ + boy V = boy $S = r$ eşitliği elde edilir.

Önerme 2.3.10. *([30], Önerme 1.7) V bir açık küme olmak üzere* boy V = boy $\bar{V}$.

2.4 Normallik ve Düzgünlük

Tanım 2.4.1. *R tamlık bölgesinin kesirler cismi F olsun. Verilen bir $k \in F$ elemanı $R[x]$ halkasının bir monik polinomunun (baş katsaysı 1 olan) kökü ise R üzerinde **tamdır** denir. F cisminin her tam elemanı R tamlık bölgesinin elemanı ise R tamlık bölgesine **normal** denir.*

Örnek 2.4.2. *Her $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ elemanı $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır, çünkü $x - z \in \mathbb{Z}[x]$ monik polinomunun köküdür. Her $\frac{z}{z'} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ rasyonel sayısı $\mathbb{Z}$ üzerinde tam değildir. Varsayalım ki tam olsun. O zaman bir $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} + x^k \in \mathbb{Z}[x]$ monik polinomunun köküdür, yani*

$$c_0 + c_1 \frac{z}{z'} + \cdots + c_{k-1} \frac{z^{k-1}}{(z')^{k-1}} + \frac{z^k}{(z')^k} = 0.$$

Eşitliğin iki tarafını $(z')^{k-1}$ ile çarparsak

$$c_0 (z')^{k-1} + c_1 z (z')^{k-2} + \cdots + c_{k-1} z^{k-1} + \frac{z^k}{z'} = 0$$

elde edilir, buradan $\frac{z}{z'} \in \mathbb{Z}$ olur ki çelişkidir. Sonuç olarak $\mathbb{Z}$ normaldir. İkinci bir yol olarak $\mathbb{Z}$ esas ideal bölgesi olduğu için tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir, dolayısıyla normaldir diyebiliriz [29, Önerme 8.8].

Değişmeli cebirde verilen normallik tanımı cebirsel geometride bir afin çeşitlemin koordinat halkasına uygulanarak afin çeşitlemin normalliği tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.3. *V bir indirgenmez afin çeşitlem olsun. $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkası normal ise V afin çeşitlemine **normal** denir.*

Örnek 2.4.4. *$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ polinom halkası tamdır, çünkü $\mathbb{K}$ cisim olduğu için $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir [24, Sonuç 16.2.11].*

Örnek 2.4.5. *$V = V(x_1^3 - x_2^2) \subset \mathbb{K}^2$ olsun. $\overline{x_2}/\overline{x_1}$ rasyonel fonksiyonu $x^2 - \overline{x_1} \in \mathbb{K}[V][x]$ monik polinomunun köküdür, çünkü $(\overline{x_2}/\overline{x_1})^2 = \overline{x_1}$. Bu sebeple $\overline{x_2}/\overline{x_1} \in \mathbb{K}(V)$ elemanı*

$\mathbb{K}[V]$ üzerinde tamdır, fakat $\mathbb{K}[V]$ cebirinin elemanı değildir:

$$\phi^* : \mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, x_2]/\langle x_1^3 - x_2^2 \rangle \to \mathbb{K}[t^2, t^3];\ \overline{x_1} \mapsto t^2,\ \overline{x_2} \mapsto t^3$$

dönüşümü $\mathbb{K}$-cebir izomorfizmasıdır. Varsayalım ki $\overline{x_2}/\overline{x_1} \in \mathbb{K}[V]$ olsun. Bu takdirde $\phi^*\left(\overline{x_2}/\overline{x_1}\right) = t \notin \mathbb{K}[t^2, t^3]$ olur ki bu çelişkidir. Sonuç olarak V normal afin çeşitlem değildir.

Önerme 2.4.6. *[34, Önerme 3.0.11] V bir indirgenmez afin çeşitlem olsun. V afin çeşitleminin normal olması için gerek ve yeter koşul her $\mathbf{p} \in V$ noktası için $\mathcal{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının normal olmasıdır.*

Verilen V indirgenemez afin çeşitlem normal değil ise normalleştirilebilir. $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkasına $\mathbb{K}(V)$ cisminin $\mathbb{K}[V]$ üzerinde tam olan elemanları eklenerek normal hale getirilir. V afin çeşitlemininin normalizasyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{K}[V]' = \{f \in \mathbb{K}(V) \mid f,\ \mathbb{K}[V]\,\text{cebiri üzerinde tamdır}\ \}$$

halkasına $\mathbb{K}[V]$ halkasının **integral kapanışı** denir. $\mathbb{K}[V]'$ halkası normaldir ve sonlu üretilmiş indirgenmiş $\mathbb{K}$-cebiridir [29, Teorem 8.26]. Dolayısıyla bir normal afin çeşitlemin koordinat halkasıdır, bu afin çeşitlemi V' ile gösterelim. V' afin çeşitlemine V afin çeşitleminin **normalizasyonu** denir. Doğal içerme fonksiyonuna $\mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[V]' \subset \mathbb{K}(V)$ karşılık gelen $V' \to V$ morfizmine **normalizasyon dönüşümü** denir.

Tanım 2.4.7. *V bir afin çeşitlem ve $\mathbf{p} \in V$ olsun. $I(V) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \subseteq S$ olmak üzere*

$$J_{\mathbf{p}}(f_1, \ldots, f_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_r}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

*matrisine p noktasında **Jacobian matris** denir. Eğer bu matrisin rankı $r - \text{boy}\,V$ ise V afin çeşitlemine p noktasında **düzgün** veya **tekil olmayan** denir. Eğer V afin çeşitleminin her noktası düzgün ise V'ye **düzgün afin çeşitlem** denir.*

Bir polinomun değişkenlerinden birine göre kısmi türevi kavramı her cisim üzerinde anlamlıdır. Fakat cismin karakteristiğine bağlı bazı durumlar olabilir. Örneğin $\mathbb{K}$ cisminin karakteristiği $p > 0$ ise $f(x) = x^p$ için $\partial f/\partial x = 0$. $J_{\mathbf{p}}$ matrisinin rankı I idealinin seçilen üreteçlerine bağlı değildir [30].

Örnek 2.4.8. *$V = V(x_1^3 - x_2^2) \subset \mathbb{K}^2$ afin çeşitleminin $\mathbf{p}$ noktası için $J_{\mathbf{p}}(x_1^3 - x_2^2) = \begin{bmatrix} 3p_1 & -2p_2^2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı $\mathbf{p} = (0,0)$ haricinde 1'dir. Ayrıca* boy $V = 1$ *olduğundan V afin çeşitleminin her $\mathbf{p} \neq (0,0)$ noktası düzgündür.*

Düzgünlük yerel halkalar üzerinden tanımlanabilir.

Tanım 2.4.9. *R bir Noetherian yerel halka, $\mathbf{m} \in R$ maksimal ideali olsun. $k = R/\mathbf{m}$ olmak üzere* boy R = boy$_k$ $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ *şartı sağlanırsa R'ye **düzenli yerel halka** denir. Burada $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ kümesi k kalıntı cismi üzerinde vektör uzayıdır, skalerle çarpma $a \in \mathbf{m}, r \in R$ için*

$$(a + \mathbf{m}^2)(r + \mathbf{m}) = ar + \mathbf{m}^2$$

şeklindedir.

$\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının Krull boyutu V afin çeşitleminin boyutuna eşittir [30, Teorem 3.2]. Bu takdirde $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının düzenli olması için

$$\text{boy}\, V = \text{boy}_k(\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}/\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2)$$

eşitliği sağlanmalıdır, burada $\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}} = \{\overline{f}/\overline{g} \in \mathscr{O}_{V,\mathbf{p}} \mid f(\mathbf{p}) = 0\}$.

Örnek 2.4.10. *$V = \mathbb{K}^r$ afin çeşitleminin her noktası için $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının düzenli olduğunu gösterelim. $m_{V,\mathbf{p}} = \{\bar{f} \in \mathbb{K}[V] \,|\, f(\mathbf{p}) = 0\} = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_r - p_r \rangle$ olduğundan $\boldsymbol{p} \in \mathbb{K}^n$ noktası için $k = \mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}/\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}$ olmak üzere $\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}/\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2$, k-vektör uzayının bir elemanı*

$$\sum_{i=1}^{r}(x_i - p_i)\frac{f_i}{g_i} + \mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2 = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{g_i} + \mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}\right)\left((x_i - p_i) + \mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2\right)$$

şeklinde ifade edilir, burada $\frac{f_i}{g_i} \in \mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$. Böylece $\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}/\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2$ vektör uzayının bir bazını

$$(x_i - p_i) + \mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2,\ i \in [r]$$

elemanları oluşturur. Sonuç olarak boy$_k(\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}/\mathscr{m}_{V,\mathbf{p}}^2) = r$ *elde edilir ki istenendir.*

Teorem 2.4.11. *[30, Teorem 5.1] V bir afin çeşitlem olsun. Verilen bir $\mathbf{p} \in V$ noktası için $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının düzenli olması için gerek ve yeter şart V afin çeşitleminin $\mathbf{p}$ noktasında düzgün olmasıdır.*

V afin çeşitleminin $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkasının düzenli olması V afin çeşitleminin p noktasında düzgün olması ile paraleldir. Dolayısıyla bir V afin çeşitleminin düzgünlük tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir:

Tanım 2.4.12. *V bir afin çeşitlem ve $p \in V$ olsun. $\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}}$ yerel halkası düzenli ise V afin çeşitlemine p noktasında* ***düzgün*** *denir.*

Verilen bir V afin simitli çeşitleminin düzgün olmayan noktalarının kümesi V afin simitli çeşitleminin

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{k \times r}$$

Jacobian matrisinin bütün $(r - \text{boy}\, V) \times (r - \text{boy}\, V)$ alt matrislerinin determinantlarını sıfırlayan kümesidir, yani kapalı bir alt kümesidir [30, Teorem 5.3].

Önerme 2.4.13. *[34, Önerme 1.0.9] Her düzgün indirgenemez afin çeşitlem normaldir.*

3 AFİN SİMİTLİ ÇESİTLEMLER

Bu bölüm afin simitli çeşitlemlere ayrılmıştır. Afin simitli çeşitlemlerin 2 temel yapısı vardır: Afin simit ve afin çeşitlem. Afin simitli çeşitlem tanımı ilk olarak bu 2 yapı üzerinden verilecektir. Sonra afin simitli çeşitlemlerin afin yarıgrup cebirleri ve simitli idealler ile inşa edildiğini göreceğiz. Rasyonel çokyüzlü konilerden tanımlanan afin yarıgruplar aracılığıyla afin simitli çeşitlemleri rasyonel çokyüzlü konilerle ilişkilendirilecektir. Bu bölümün geneli, simitli geometrinin en temel kaynaklarından birisi olan [34] kitabı kullanılarak oluşturulmuştur. Bölüm boyunca $\mathbb{K}$ cismi cebirsel kapalı kabul edilecektir.

3.1 Afin Simit

Tanım 3.1.1. *$(\mathbb{K}^*)^n$ açık kümesine izomorf afin çeşitleme n-boyutlu* ***afin simit*** *denir.*

$(\mathbb{K}^*)^n$ açık kümesinin grup olması simite de grup yapısını kazandırır.

Örnek 3.1.2. *$V = V(x^2 - y) \subset \mathbb{K}^2$ ise $V \cap (\mathbb{K}^*)^2 = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{K}^*\}$ 1-boyutlu bir simittir. $\phi(x) = (x, x^2)$ ile tanımlanan $\phi : \mathbb{K}^* \to V \cap (\mathbb{K}^*)^2$ fonksiyonu birebir ve örtendir. $x^1 \circ \phi(x) = x$ ve $x^2 \circ \phi(x) = x^2$ polinom fonksiyonları olduğundan ϕ morfizmdir. Benzer şekilde $\phi^{-1} : V \cap (\mathbb{K}^*)^2 \to \mathbb{K}^*$, $\phi^{-1}(x, x^2) = x$ fonksiyonu da morfizm olduğundan $V \cap (\mathbb{K}^*)^2, \mathbb{K}^*$ izomorftur. $V \cap (\mathbb{K}^*)^2$ simiti $(t_1, t_1^2)(t_2, t_2^2) = (t_1t_2, t_1^2t_2^2)$ işlemi altında gruptur.*

T, n-boyutlu bir simit olsun. Simit ile ilgili bazı temel bilgileri vermeden önce, kafes tanımından bahsedelim. Sonlu üretilmiş serbest değişmeli gruba **kafes** denir. Üreteç sayısı kafesin rankını belirler, n ranklı kafes $\mathbb{Z}^n$ grubuna izomorftur.

Tanım 3.1.3. *$\chi : T \to \mathbb{K}^*$ fonksiyonu morfizm ve grup homomorfizması ise T simitinin* ***karakteri*** *denir ve*

$$\{\chi : T \to \mathbb{K}^* \mid \chi \text{ morfizm ve grup homomorfizması}\}$$

grubuna da T simitinin ***karakter grubu*** *denir.*

Örnek 3.1.4. *Her* $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(\mathbb{K}^*)^n$ *simiti için* $x^{\boldsymbol{m}}(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ *karakterini verir. Ayrıca* $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin her karakteri bu şekilde tanımlanır, sonuç olarak* $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin karakter grubu* $\mathbb{Z}^n$ *grubuna izomorftur, dolayısıyla*

$$\{\chi : (\mathbb{K}^*)^n \to \mathbb{K}^* \mid \chi \textit{ morfizm ve grup homomorfizması}\} = \{x^{\boldsymbol{m}} \mid \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n\} \cong \mathbb{Z}^n.$$

Bu karakterler $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin koordinat halkası* $\mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ *Laurent polinom halkası için bir baz teşkil eder.*

Herhangi bir $T \cong (\mathbb{K}^*)^n$ simitinin karakter grubu n ranklı bir kafestir. Karakter grubunun izomorf olduğu her kafese T simitinin **karakter kafesi** denir. Bu kafeslerden biri M olmak üzere her $\mathbf{m} \in M$ elemanına karşılık gelen karakteri $\chi^{\mathbf{m}} : T \to \mathbb{K}^*$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.5. $\lambda : \mathbb{K}^* \to T$ *fonksiyonu morfizm ve grup homomorfizması ise* T *simitinin* ***bir parametreli alt grubu*** *denir ve*

$$\{\lambda : \mathbb{K}^* \to T \mid \lambda \textit{ morfizm ve grup homomorfizması}\}$$

grubuna da T *simitinin* ***bir parametreli alt gruplar grubu*** *denir.*

Örnek 3.1.6. *Her* $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(\mathbb{K}^*)^n$ *simiti için* $t \mapsto (t^{u_1}, \ldots, t^{u_n})$ *bir parametreli alt grubunu tanımlar. Ayrıca* $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin her bir parametreli alt grubu bu şekilde tanımlanır, dolayısıyla* $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin bir parametreli alt gruplar grubu* $\mathbb{Z}^n$ *kafesine izomorftur.*

Herhangi bir $T \cong (\mathbb{K}^*)^n$ simitinin bir parametreli alt gruplar grubu n ranklı bir kafestir. Bu kafese izomorf olan her kafese T simitinin **bir parametreli alt gruplar kafesi** denir. N bir T simitinin bir parametreli alt gruplar kafesi olmak üzere her $\mathbf{u} \in N$ elemanına karşılık gelen alt grubu $\lambda^{\mathbf{u}} : \mathbb{K}^* \to T$ ile gösterelim.

$\mathbf{m} \in M$ ve $\mathbf{u} \in N$ olmak üzere T simitinin karakter grubundan ve bir parametreli alt grubundan sırasıyla $\chi^{\mathbf{m}}$, $\lambda^{\mathbf{u}}$ elemanlarını alalım. $\chi^{\mathbf{m}}$ ve $\lambda^{\mathbf{u}}$ dünüşümleri grup homomorfizması olduğundan dolayı $\chi^{\mathbf{m}} \circ \lambda^{\mathbf{u}} : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*$ dönüşümü de bir grup endomorfizması ve morfizmdir, dolayısıyla Örnek 3.1.4 ile her $\chi^{\mathbf{m}} \circ \lambda^{\mathbf{u}}$ için bir $\ell \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $\chi^{\mathbf{m}} \circ \lambda^{\mathbf{u}} : t \mapsto t^l$. Bu takdirde

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z},\ (\mathbf{m}, \mathbf{u}) \mapsto \langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle = l$$

dönüşümü bilineerdir. Sonuç olarak $M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ ve $N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, yani M, N kafesleri birbirinin dual kafesidir.

Örnek 3.1.7. *$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $(\mathbb{K}^*)^n$ simitinin herhangi bir $\chi^{\boldsymbol{m}}$ karakterini ve $\lambda^{\boldsymbol{u}}$ bir parametreli alt grubunu alalım. Bu durumda bilineer dönüşüm klasik iç çarpımdır:*

$$\chi^{\boldsymbol{m}} \circ \lambda^{\boldsymbol{u}} : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*,\ t \mapsto t^{\langle m, u \rangle}$$

$$M \times N \to \mathbb{Z},\ (\chi^{\boldsymbol{m}}, \lambda^{\boldsymbol{u}}) \mapsto \langle m, u \rangle$$

Her $\mathbf{t} \in T$ elemanı bir $M \to \mathbb{K}^*$, $\mathbb{Z}$-modül homomorfizması tanımlar: $\mathbf{m} \mapsto \chi^{\mathbf{m}}(\mathbf{t})$. Ayrıca bütün homomorfizmalar bu şekilde oluşmaktadır, dolayısıyla

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{K}^*) \simeq T.$$

Diğer yandan $\mathbf{u} \otimes t \to \lambda^{\mathbf{u}}$ izomorfizması ile çarpım modülü simite izomorftur: $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}^* \simeq T$. Dolayısıyla bir parametreli alt gruplar grubunun bir kafesi N olan bir simit T_N ile gösterilebilir.

Tanım 3.1.8. *Bir V indirgenemez afin çeşitlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa **simitli afin çeşitlem** denir.*

- *V afin çeşitlemi bir T simiti içerir.*
- *Kısıtlanışı T simitinin çarpma işlemi olacak şekilde bir $\varphi : T \times V \to V$ cebirsel etki vardır, yani φ bir morfizmdir ve V üzerindeki T simitinin grup etkisidir.*

Örnek 3.1.9. *$\mathbb{K}^r$ afin uzayı simitli çeşitlemdir:*

- *$(\mathbb{K}^*)^n \subset \mathbb{K}^n$ simitini içerir.*
- *$\varphi : (\mathbb{K}^*)^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \phi((t_1, \ldots, t_n), (a_1, \ldots, a_n)) = (t_1 a_1, \ldots t_n a_n)$ dönüşümü cebirsel etkidir:*

  1. *Her $i \in [n]$ için $x^i \circ \varphi$ polinom fonksiyonu olduğu için ϕ morfizmdir.*

2. *Verilen* $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in (\mathbb{K}^*)^n$ *ve* $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{K}^n$ *için* $\phi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}(p_1, \ldots, p_n)) = \phi(\boldsymbol{ts}, (p_1, \ldots, p_n))$.

3. $1 \in \mathbb{K}$ *birim eleman olmak üzere* $\phi((1, \ldots, 1), (p_1, \ldots, p_n)) = (p_1, \ldots, p_n)$.

4. $\varphi\big|_{(\mathbb{K}^*)^n}$ *dönüşümü* $(\mathbb{K}^*)^n$ *simitinin çarpma işlemidir.*

Örnek 3.1.10. $V = V(x_1x_2 - x_3x_4) \subset \mathbb{K}^4$ *afin çeşitleminin afin simitli çeşitlem olduğunu gösterelim:*

- $T = V \cap (\mathbb{K}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1t_2t_3^{-1}) \mid t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{K}^*\}$ *kümesinin simit olduğunu gösterelim:*

  1. $\phi : (\mathbb{K}^*)^3 \to (\mathbb{K}^*)^4,\ \phi(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3^{-1})$ *fonksiyonu morfizmdir, çünkü* $x^i \circ \phi$ *fonksiyonları düzenlidir.*

  2. ϕ *birebir fonksiyondur ve* $\phi((\mathbb{K}^*)^3) = T$.

  3. $\phi^{-1} : T \to (\mathbb{K}^*)^3,\ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$ *dönüşümü de polinom fonksiyonlarından oluştuğundan morfizdir. Sonuç olarak* T, V *tarafından kapsanılan bir simittir.*

- *Yukarıdaki örnekten* $\varphi : (\mathbb{K}^*)^4 \times \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4, \varphi((t_1, t_2, t_3, t_4), (p_1, p_2, p_3, p_4)) = (t_1p_1, t_2p_2, t_3p_3, t_4p_4)$ *dönüşümü* $(\mathbb{K}^*)^4$ *simitinin* $\mathbb{K}^4$ *üzerinde bir cebirsel etkisidir. Verilen* $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3, t_1t_2t_3^{-1}) \in T \subset (\mathbb{K}^*)^4$ *noktası için* $V = \boldsymbol{t}V$ *olduğunu gösterirsek bu etkiyi* V *üzerine kısıtlayabiliriz: Her* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in V \subset \mathbb{K}^4$ *noktası için*

  $$(x_1x_2 - x_3x_4)(\boldsymbol{t}\mathbf{p}) = 0$$

  olduğundan $V \supseteq \boldsymbol{t}V$ *kapsaması ispatlanır. Bu kapsamada her* $\boldsymbol{t}$ *yerine* $\boldsymbol{t}^{-1}$ *alırsak* $V \supseteq \boldsymbol{t}^{-1}V$ *elde edilir ki istenilen eşitlik ispatlanır.*

3.2 Simitli İdealler

Verilen bir M karakter kafesli T simiti için $A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_r\} \subset M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_A : \ T &\to (\mathbb{K}^*)^r \\ \mathbf{t} &\mapsto (\chi^{\mathbf{m}_1}(\mathbf{t}), \ldots, \chi^{\mathbf{m}_r}(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm morfizm ve grup homomorfizmasıdır. Üstelik T simitinden $(\mathbb{K}^*)^r$ simitine tanımlı morfizm ve grup homomorfizması dönüşümler bu şekilde tanımlanır. Aşağıda verilen önermeden ötürü $\phi_A((\mathbb{K}^*)^s) \subseteq (\mathbb{K}^*)^r$ kümesi simittir ve T_A ile gösterilir.

Önerme 3.2.1. *T_1, T_2 simit ve $\phi : T_1 \to T_2$ morfizm ve grup homomorfizması olmak üzere $\phi(T_1)$ bir simittir.*

Önerme 3.2.2. *$T_A \subseteq (\mathbb{K}^*)^r$ kümesinin Zariski kapanışını Y_A ile gösterelim. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:*

(i) *Y_A afin simitli çeşitlemdir ve simiti T_A'dır.*

(ii) $\mathbb{Z}A = \{\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{m}_i z_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$, *$T_A$ simitinin bir karakter kafesidir.*

(iii) $\operatorname{boy} Y_A = \operatorname{rank} \mathbb{Z}A$.

$M = \mathbb{Z}^s$ ise $A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_r\} \subset \mathbb{Z}^s$ alt kümesi $s \times r$ boyutlu $[\mathbf{m}_1\ \mathbf{m}_2 \cdots \mathbf{m}_r]$ tam sayılar matrisi ile temsil edilecektir, yani matrisin sütunlarının kümesi $\mathbb{Z}^s$ kafesinin alt kümesi olarak düşünülecektir.

Örnek 3.2.3. *$A = [\,1\;2\,]$ olmak üzere $\phi_A : \mathbb{K}^* \to (\mathbb{K}^*)^2$, $t \mapsto (t, t^2)$ dönüşümü morfizm ve grup homomorfizmasıdır. Gör$(\phi_A) = T_A = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{K}^*\}$ kümesi bir simittir ve Zariski kapanışı $Y_A = V(x_2 - x_1^2)$ afin simitli çeşitlemidir. Her $m \in \mathbb{Z}A = \mathbb{Z}$ için $\chi^{\boldsymbol{m}} : T_A \to \mathbb{K}^*$ karakteri $(t, t^2) \mapsto t^m$ şeklinde tanımlanır. Her $u = a \in N = \mathbb{Z}$ için T_A simitinin bir parametreli alt grubu $\lambda^u : \mathbb{K}^* \to T_A$, $\lambda^u(t) = (t^u, t^{2u})$ ile tanımlanır.*

Y_A kümesi ile sadece bir afin simitli çeşitlem verilmemiştir, ileride bütün afin simitli çeşitlemlerin tam olarak bu şekilde tanımlanabileceğini göreceğiz. Verilen bir $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ vektörü $\mathbf{m}^+, \mathbf{m}^- \in \mathbb{N}^r$ olacak şekilde $\mathbf{m} = \mathbf{m}^+ - \mathbf{m}^-$ tek türlü yazılır. Her $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r$ sayısı için $x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$ monomu $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ ile gösterilecektir. Y_A afin simitli çeşitleminin sıfırlayan idealini vermek için kafes ideali tanımlayalım: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ olmak üzere, $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} \in S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ binomlarının ürettiği ideale **binom ideal** denir. $L \subseteq \mathbb{Z}^r$ bir kafes olmak üzere

$$I_L = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L \rangle = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{m}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}^-} \mid \mathbf{m} \in L \rangle.$$

binom idealine **kafes ideal** denir.

Teorem 3.2.4. *[35] I, S halkasında bir binom ideal olsun. I binom idealinin kafes ideal olması için gerek ve yeter şart her $i \in [r]$ için $x_i + I$, S/I halkasının sıfırlayan elemanı değildir.*

[35] çalışmasında kafes ideallerinin temel özellikleri verilmiştir. $\mathbb{Z}^r \to M$, $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{m}_i$ grup homomorfizmasının çekirdeğini L_A ile gösterelim. L_A, $\mathbb{Z}^r$ kafesinin bir alt kafesidir.

Önerme 3.2.5. *$Y_A \subseteq \mathbb{K}^r$ simitli afin çeşitleminin sıfırlayan ideali I_{L_A} kafes idealidir.*

$Y_A = \overline{T_A}$ olduğundan Önerme 2.1.12 ile T_A simitinin sıfırlayan ideali de I_{L_A} kafes idealidir.

Örnek 3.2.6. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *için L_A kafesi Çek$_{\mathbb{Z}}A$ olur, buradan $L_A = \mathbb{Z}\{(3, 4, -5)\}$ elde edilir. I_{L_A} idealinin $I = \langle x_1^3 x_2^4 - x_3^5 \rangle$ idealine eşit olduğunu kanıtlayalım. $I \subseteq I_{L_A}$ kapsaması aşikardır, diğer kapsamanın ispat için bir $f \in I_{L_A}$ elemanını alalım ve $x_3 > x_2 > x_1$ lex monom sıralamasına göre bölme algoritmasnı uygularsak $\mathrm{der}_{x_3}(g) \leq 4$ olmak üzere $f = (x_1^3 x_2^4 - x_3^5)h + g$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikten $g \in I(Y_A)$ elde edilir, dolayısıyla $g(t_1^5 t_2^5, t_2^2, t_1^3 t_2^2)$ sıfır polinomudur. g polinomunun baş monomu $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}}$ olmak üzere $g(t_1^5 t_2^5, t_2^2, t_1^3 t_2^2)$ polinomunda baş monomdan gelen terimi sıfırlamak için g polinomunun bir monomu vardır, yani g polinomunun bir $\boldsymbol{x}^b$ monomu için $(\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}})(t_1^5 t_2^5, t_2^2, t_1^3 t_2^2) = 0$. Bu eşitlikten $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{x}^b \in I_{L_A}$ ifadesi sağlanır, yani $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in L_A$. g polinomunun her monomu için $\mathrm{der}(x_3) \leq 4$ olduğundan $|a_3 - b_3| \leq 4$. L_A kafesinde bu şartı sağlayan tek eleman sıfır vektörü olduğu için $g = 0$ olur ki $f \in I$, bu ispatı tamamlar. Sonuç olarak $I(Y_A) = \langle x_1^3 x_2^4 - x_3^5 \rangle$ ve $Y_A = V(x_1^3 x_2^4 - x_3^5)$.*

Verilen örnekte $I(Y_A)$ idealinin üreteçleri L_A kafesinin bir bazının elemanlarına karşılık gelen binomlardan oluşmuştur, fakat bu durum aşağıda verilen örnekte olduğu gibi her zaman geçerli değildir.

Örnek 3.2.7. $A = [\,3\;4\;5\,]$ *matrisinin çekirdeği*

$$L_A = \{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r \mid 3m_1 + 4m_2 + 5m_3 = 0\} = \mathbb{Z}\{(2, 1, -2), (1, -2, 1)\}$$

kafesidir. I_{L_A} idealinin $I = \langle x_1^2 x_2 - x_3^2, x_1 x_3 - x_2^2 \rangle$ idealine eşit olup olmadığını inceleyelim: $I \subseteq I_{L_A}$ kapsaması aşikar olduğu için $I \subseteq I_{L_A}$ ifadesinin doğruluğunun *incelenmesi kafidir. $f \in I_{L_A}$ elemanına $x_2 > x_1 > x_3$ lex monom sıralamasına göre bölme algoritmasını uygularsak*

$$f = (x_1^2x_2 - x_3^2)h_1 + (x_1x_3 - x_2^2)h_2 + g$$

eşitliği yazılır öyle ki g polinomunun monomları $x_1^2x_2$, x_2^2 monomlarına bölünemez. Yukarıda verilen örneğe benzer şekilde g polinomunun baş monomu $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}}$ olmak üzere g polinomunun $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{x}^{b} \in I_{L_A}$ olacak şekilde bir binomu vardır. Eğer bu şartı sağlayan sıfır harici bir binom varsa kapsama doğru değildir. $x_1^3 - x_2x_3 \in I_{L_A}$ binomunun monomları $x_1^2x_2$, x_2^2 monomlarına bölünemez, sonuç olarak

$$I_{L_A} \neq \langle x_1^2x_2 - x_3^2, x_1x_3 - x_2^2 \rangle.$$

$x_1^3 - x_2x_3$ binomunu I idealine üreteç olarak ekleyerek

$$I = \langle x_1^2x_2 - x_3^2, x_1x_3 - x_2^2, x_1^3 - x_2x_3 \rangle \supset I_{L_A}$$

kapsamasının varlığını inceleyelim: Benzer şekilde bir $f \in I_{L_A}$ elemanının I idealinin üreteçlerine bölümünden kalan g' polinomunun I_{L_A} idealine ait bir $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{x}^{b}$ binomu olup olmadığına bakalım, yani $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ elemanı

$$\{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^3 \mid 3m_1 + 4m_2 + 5m_3 = 0,\ |m_1| \leq 2,\ |m_2| \leq 1,\ (m_1, m_2) \notin \{(-2,-1),(2,1)\}\}$$

kümesinin elemanı olmalıdır. Bu küme sadece sıfır elemanını ihtiva ettiği için g polinomu sıfırdır, böylece $I(Y_A) = I(T_A) = \langle x_1^2x_2 - x_3^2, x_1x_3 - x_2^2, x_1^3 - x_2x_3 \rangle$ ve $Y_A = V(x_1^2x_2 - x_3^2, x_1x_3 - x_2^2, x_1^3 - x_2x_3) \subseteq T_A = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{K}^*\}$.

Bir I_L kafes idealinin üreteçlerini L kafesinin **baz ideali** ile bulabiliriz. L kafesinin herhangi bir $\mathbb{Z}$-bazının her $\mathbf{m}$ vektörünün tanımladığı $\mathbf{x}^{\mathbf{m}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}^-}$ binomlarının ürettiği ideale L kafesinin **kafes baz ideali** denir. S polinom halkasında I ve J idealleri verilsin. Aşağıda tanımlanan ideale I'nın J'ye göre **doygun ideali** denir.

$$I : J^{\infty} = \{F \in S \mid \exists k \in \mathbb{Z}^* \text{ için } F \cdot J^k \subseteq I\}$$

Lemma 3.2.8. *[36, Lemma 7.6] L bir kafes olsun. L kafesinin bir baz idealinin,*

$\langle x_1 \cdots x_r \rangle$ idealine göre doygun ideali I_L kafes idealidir.

Tanım 3.2.9. *I_L kafes ideali asalsa **simitli ideal** denir.*

I_{L_A} kafes ideali asaldır, çünkü Y_A indirgenemez bir afin çeşitlemdir, yani simitli idealdir. Bu sebeple şimdi simitli idealleri daha yakından anlamaya çalışalım.

Önerme 3.2.10. *[34, Önerme 1.1.11] $I \subseteq S$ idealinin simitli ideal olması için gerek ve yeter şart binom ve asal ideal olmasıdır.*

$L \subseteq \mathbb{Z}^r$ alt kafesinin rankı n olsun.

$$\mathrm{Sat}(L) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r \mid \exists k \in \mathbb{Z}^* \text{ için } k\mathbf{a} \in L\}$$

kafesine L kafesinin **doygun kafesi** denir, ayrıca $L = \mathrm{Sat}(L)$ ise L kafesine **doygun** denir. L kafesinin doygun olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{Z}^r/L$ grubunun sıfırlayan elemanının olmamasıdır. Böylece $\mathbb{Z}^r/L$ grubunu belirleyerek L kafesinin doygun olup olmadığı öğrenilebilir. $\mathtt{L}$ matrisinin sütunları L kafesinin herhangi bir bazının elemanları olsun. $\mathtt{L}$ matrisinin Smith normal formu vardır, yani $P\mathtt{LK} =$ köşegen$[\mathtt{d_1}, \ldots \mathtt{d_n}, 0, \ldots, 0]$ eşitliğini sağlayan $P \in M_{r\times r}(\mathbb{Z})$, $K \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ unimodüler matrisleri $(\det(P) = \pm 1, \det(K) = \pm 1)$ mevcuttur. Burada her i için d_i doğal sayı ve $d_i | d_{i+1}$ şartı sağlanır. Satırları P matrisinin son $r-n$ satırı olan $r-n\times r$ alt matrisinin $\mathbb{Z}$-çekirdeği $\mathrm{Sat}(L)$ kafesine eşittir, ayrıca $\mathbb{Z}^r/L \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-n}$ denkliği vardır [36].

Teorem 3.2.11. *$L \subseteq \mathbb{Z}^r$ alt kafesinin rankı n olmak üzere aşağıdakiler eş değerdir.*

(i) *I_L simitli idealdir.*

(ii) *L kafesi doygundur.*

(iii) *$\mathbb{Z}^r/L$ grubunun sıfırlayan elemanı yoktur.*

(iv) *$L = L_A$ eşitlğini sağlayan, $r-n\times r$ boyutlu bir A matrisi vardır.*

Sonuç olarak bütün simitli idealler $I(Y_A) = I_{L_A}$ sıfırlayan ideali formundadır. Bu takdirde her simitli ideal bir afin simitli çeşitlem tanımlar: $V(I(Y_A)) = Y_A$.

Örnek 3.2.12. *$\phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$, $(t_1, t_2) \mapsto (t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir morfizmdir. $I = \langle x_1x_3 - x_2^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, x_1, x_3]$ olmak üzere*

$$\text{Gör}(\phi) = \{(t_1^2, t_1t_2, t_2^2) \mid t_1,\, t_2 \in \mathbb{K}\} = V(I)$$

olduğunu gösterelim: Gör(ϕ) $\subseteq V(I)$ kapsaması açıktır, diğer kapsamayı ispatlamak için bir $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ elemanı alalım. Bu durumda $p_1 p_3 = p_2^2$ sağlanır. Eğer $p_1 = 0$ ise $p_2 = 0$ olur. $t_1 = 0$, $t_2 = p_3^{1/2}$ alırsak $\boldsymbol{p} = (0, 0, t_2^2)$ elde edilir ki istenendir.

Şimdi $I($Gör$(\phi)) = I$ olduğunu kanıtlayalım. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin çekirdeği $L_A = \mathbb{Z}\{(1, -2, 1)\}$ kafesidir. Örnek 3.2.6'da verilen ispata benzer şekilde $I = I_{L_A}$ eşitliği ispatlanabilir, yani I simitli idealdir. Bu takdirde I asaldır ve $I($Gör$(\phi)) = I(V(I)) = I$. Sonuç olarak $Y_A =$ Gör(ϕ).

Bu durum her zaman geçerli değildir. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere Çek$_{\mathbb{Z}}A =$ Çek$_{\mathbb{Z}}B$ eşitliğinden ötürü $Y_B = Y_A = V(x_1 x_3 - x_2^2)$. Fakat B matrisinin sütunlarının tanımladığı

$$\phi' : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3,\ (t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2)$$

morfizminin görüntü kümesi Y_B afin simitli çeşitlemine eşit değildir. Çünkü her $p_3 \in \mathbb{K}$ için $(0, 0, p_3)$ noktası Y_B afin simitli çeşitleminin elemanı iken Gör(ϕ') kümesinin elemanı değildir.

Bu alt bölümü sonlu cisim üzerinde $A = [\mathbf{m}_1\ \mathbf{m}_2 \cdots \mathbf{m}_r] \in M_{s \times r}(\mathbb{N})$ matrisinin tanımladığı T_A simitinin sıfırlayan idealini hesaplamak için bir yöntem veren aşağıdaki teorem ile sonlandıralım. Bu yöntemde kafes ideal aracılığıyla değil eliminasyon teori yardımı ile sıfırlayan ideal hesaplanmıştır.

Teorem 3.2.13. *[17, Theorem 3.4] $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ olmak üzere S polinom halkasının bir genişlemesi $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]$ halkası olsun. Bu takdirde*

$$J = \langle \{\{x_i - \mathbf{y}^{\boldsymbol{m}_i}\}_{i=1}^r \cup \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^s \rangle.$$

olmak üzere $I(T_A) = J \cap S$'dir.

3.3 Afin Yarıgrup Cebirleri

Tanım 3.3.1. *M, n ranklı kafes ve $A = \{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_r\} \subset M$ verilsin.*

$$\mathbb{N}A = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{m}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N} \right\} \subseteq M$$

yarıgrubuna ***afin yarıgrup*** *denir.* $\mathbb{N}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\} = \mathbb{N}^r \subset \mathbb{Z}^r$ *en basit afin yarıgrup örneğidir.*

$\mathscr{S}$ herhangi bir afin yarıgrup olmak üzere

$$\mathbb{K}[\mathscr{S}] = \left\{ \sum_{a \in \mathscr{S}} \lambda_a \chi^a \mid \lambda_a \in \mathbb{K} \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır ve $\chi^a \cdot \chi^{a'} = \chi^{a+a'}$ şeklinde tanımlanan çarpmaya göre bir $\mathbb{K}$-cebiridir. $\mathscr{S} = \mathbb{N}A = \{\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{m}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ olmak üzere $\chi^{\mathbf{m}_1}, \ldots, \chi^{\mathbf{m}_r}$ elemanları $\mathbb{K}[\mathscr{S}] \subseteq \mathbb{K}[M]$ $\mathbb{K}$-cebirinin üreteçleridir.

M kafesinin üreteçleri $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ olmak üzere her $\mathbf{e}_i$ için $x_i = \chi^{e_i}$ alırsak $\mathbb{K}[M] = \mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ Laurent polinom halkasıdır. Bu yüzden her $\mathscr{S} \subseteq M$ afin yarıgrubu için $\mathbb{K}[\mathscr{S}]$ cebiri tamlık bölgesidir. Sonuç olarak $\mathbb{K}[\mathscr{S}]$ sonlu üretilmiş $\mathbb{K}$-cebiri ve tamlık bölgesi olduğu için koordinat halkasıdır.

T simitinin karakter grubunun kafesi M olmak üzere $\mathbb{K}[M] = \mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ cebiri T simitinin koordinat halkasıdır. Dolayısıyla T simitinin koordinat halkası $\mathbb{K}[M]$ ile gösterilebilir.

Teorem 3.3.2. *[36, Teorem 7.3] M, n ranklı kafes ve $A = \{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_r\} \subset M$ verilsin. Bu takdirde $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ ve $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I_{L_A}$ cebirleri $\mathbb{K}$-izomorftur.*

İspat 1. *$\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ cebirinin üreteçleri $\chi^{\boldsymbol{m}_1}, \ldots, \chi^{\boldsymbol{m}_r}$ olmak üzere her $i \in [r]$ için ϕ_A morfizmine karşılık gelen $\mathbb{K}$-cebir homomorfizması*

$$\phi_A^* : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] \to \mathbb{K}[M], \quad \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i \circ \phi_A = \chi^{\boldsymbol{m}_i}$$

şeklindedir. ϕ_A^* homomorfizmasının görüntü kümesi $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ cebiridir, ϕ_A^* homomorfizmasının çekirdeğinin

$$I_{L_A} = \langle \mathbf{x}^{\boldsymbol{u}} - \mathbf{x}^{\boldsymbol{v}} \mid \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in L_A \rangle = \langle \mathbf{x}^{\boldsymbol{u}} - \mathbf{x}^{\boldsymbol{v}} \mid u_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + u_r \boldsymbol{m}_r = v_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + v_r \boldsymbol{m}_r \rangle$$

ideali olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $\mathbf{x}^{\boldsymbol{u}} - \mathbf{x}^{\boldsymbol{v}}$ binomu I_{L_A} idealinin bir üreteci olsun. $u_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + u_r \boldsymbol{m}_r = v_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + v_r \boldsymbol{m}_r$ gereğince $\phi_A(\mathbf{x}^{\boldsymbol{u}} - \mathbf{x}^{\boldsymbol{v}}) = \chi^{\boldsymbol{m}_1 u_1} \cdots \chi^{\boldsymbol{m}_r u_r} - \chi^{\boldsymbol{m}_1 v_1} \cdots \chi^{\boldsymbol{m}_r v_r} = 0$ olur ki $I_{L_A} \subseteq Çek\phi_A$ sağlanır. Şimdi diğer kapsamayı ispatlayalım. Varsayalım ki $Çek\phi_A \nsubseteq I_{L_A}$ olsun, bu durumda $Çek\phi_A \setminus I_{L_A} \neq \emptyset$ olur. $\prec$, S halkası *üzerinde bir monom sıralaması olmak üzere* $Çek\phi_A \setminus I_{L_A} \neq \emptyset$ *kümesinin baş monomu en küçük olan polinomu* f *ve* $BM_{\prec}(f) = \boldsymbol{x^a}$ *olsun.* $f(\chi^{\boldsymbol{m}_1}, \ldots, \chi^{\boldsymbol{m}_r}) = 0$ *sağlanır, çünkü* $f \in Çek\phi_A$ *dir. Bu yüzden* f *polinomunun baş monomu* $\boldsymbol{x^a}$ *olmak üzere* f *polinomunun bir* $\boldsymbol{x^b}$ *monomu vardır öyle ki* $\boldsymbol{x^a} - \boldsymbol{x^b} \in I_{L_A} \subseteq Çek\phi_A$ *sağlanır. Dolayısıyla* $f - (\boldsymbol{x^a} - \boldsymbol{x^b})$ *polinomu* $Çek\phi_A \setminus I_{L_A}$ *kümesinin elemanıdır ve baş teriminin derecesi* f *polinomundan küçüktür. Bu bir çelişkidir ve dolayısıyla* $Çek\phi_A = I_{L_A}$ *olur ki istenendir.*

Yukarıda verdiğimiz Teorem gereğince $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$, Y_A afin simitli çeşitleminin koordinat halkasıdır. $\mathbb{Z}A$, Y_A afin simitli çeşitleminin simiti T_A'nın karakter kafesi olduğundan $\mathbb{K}[T_A] = \mathbb{K}[\mathbb{Z}A]$. Diğer yandan $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ halkasının Krull boyutu Y_A afin simitli çeşitleminin boyutuna eşittir, yani $\operatorname{boy} \mathbb{K}[\mathbb{N}A] = \operatorname{boy} Y_A = \operatorname{rank} \mathbb{Z}A$. Sonuç olarak Teorem 2.3.8 gereği $I(Y_A) = I_{L_A}$ idealinin yüksekliği $r - \operatorname{rank} \mathbb{Z}A = \operatorname{rank} L_A$.

Örnek 3.3.3. *Örnek 3.2.6 için* $Y_A = V(x_1^3x_2^4 - x_3^5)$ *afin çeşitleminin koordinat halkası Teorem 3.3'den*

$$\mathbb{K}[\mathbb{N}A] = \mathbb{K}[\chi_1^5\chi_2^2, \chi_2, \chi_1^3\chi_2^2] \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]/\langle x_1^3x_2^4 - x_3^5\rangle.$$

A bir kafesin bir alt kümesi olmak üzere Y_A afin simitli çeşitlemi, I_{L_A} simitli ideali ve $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ afin yarıgrup cebiri yapıları incelenmiştir. Şimdi bu yapıları vermemizin esas amacına sıra gelmiştir, bu yapıların hepsi ile bütün afin simitli çeşitlemleri tanımlayabiliriz.

Teorem 3.3.4. V *bir afin çeşitlem olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) V *afin simitli çeşitlemdir.*

(ii) Bir kafesin bir A *alt kümesi için* $V = Y_A$.

(iii) V *bir simitli idealin sıfırlayan kümesidir.*

(iv) V *afin çeşitleminin koordinat halkası bir afin yarıgrup cebiridir.*

Örnek 3.3.5. *Örnek 3.1.10'dan* $V = V(x_1x_2 - x_3x_4) \subset \mathbb{K}^4$ *afin simitli çeşitlemdir.*

- $\mathbb{Z}^3$ *kafesinin* $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,-1)\}$ *alt kümesi için için Önerme 3.2.2'de tanımlanan* Y_A *kümesi* V *afin simitli çeşitleminine eşittir. Çünkü* $I_{L_A} = \langle x_1x_2 - x_3x_4\rangle$.

- $I = \langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle$ *binom ideali asal olduğu için simitli idealdir ve* V *afin simitli çeşitlemini tanımlar.*

- $\mathbb{K}[\mathbb{N}A] = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3^{-1}]$ *afin yarıgrup cebiri* $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]/\langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle$ *cebirine izomorf olduğundan* $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$, V *simitli çeşitleminin koordinat halkasıdır.*

3.4 Koniler ve Afin Simitli Çeşitlemler

N, n ranklı bir kafes olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}^n$ grubuna izomorftur, dolayısıyla N kafesi n ranklı serbest $\mathbb{Z}$-modüldür. N kafesinin skalerlerini reel sayılar ile genişletirsek $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ vektör uzayını verir.

Tanım 3.4.1. $A = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *olmak üzere*

$$\sigma = \{\mathbf{v} \in N_{\mathbb{R}} \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \lambda_i \geq 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

kümesine ***çokyüzlü koni*** *ve* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *vektörlerine de* σ *konisinin* ***üreteçleri*** *denir,* $\sigma = Koni(A)$ *ile gösterilir. Eğer* $A \subseteq N$ *ise* σ*'ya* ***rasyonel çokyüzlü koni*** *denir.*

Çokyüzlü koniler konvekstir, yani $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \sigma$ iken $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda\mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{v}' \in \sigma$. Bir koniyi kapsayan en küçük boyutlu vektör uzayının boyutu koninin **boyutu** olarak tanımlanır.

Örnek 3.4.2. $\sigma = Koni(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) \subset \mathbb{R}^3$ *rasyonel konveks çokyüzlü konidir.* $\text{boy}\,\sigma = 3$ *olur, çünkü* σ *konisinin üreteç kümesinin en fazla* $\mathbb{R}$*-lineer bağımsız eleman sayısı üçtür.*

N bir kafes olmak üzere $\{f : N \to \mathbb{Z} | f, \mathbb{Z}-\text{modül homomorfizması}\} = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ kümesi de $\mathbb{Z}^n$ grubuna izomorf bir kafesdir ve N kafesinin **dual kafesi** denir. N kafesinin duali M olmak üzere $\langle , \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$, $\langle f, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{v})$ dönüşümü $\mathbb{Z}$-bilineerdir. $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vektör uzayının duali $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ uzayıdır.

Tanım 3.4.3. $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *herhangi bir konveks çokyüzlü koni olmak üzere*

$$\sigma^{\vee} = \{\mathbf{m} \in M_{\mathbb{R}} \mid her\, \mathbf{v} \in \sigma \ için\, \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \geq 0\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$$

konisine σ *konisinin* ***dual konisi*** *denir.*

Önerme 3.4.4. *Herhangi bir $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ konveks çokyüzlü konisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.*

(i) $\sigma^{\vee}$ *konveks çokyüzlü bir konidir.*

(ii) σ *rasyonel koni ise* $\sigma^{\vee}$ *dual konisi de rasyoneldir.*

(iii) $((\sigma^{\vee})^{\vee}) = \sigma$.

$\mathbf{m} \in M_{\mathbb{R}}$ olmak üzere iki küme tanımlanır.

$$H_{\mathbf{m}} = \{\mathbf{v} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle = 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

kümesine **hiperdüzlem**

$$H_{\mathbf{m}}^{+} = \{\mathbf{v} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \geq 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

kümesine de **kapalı yarıuzay** denir. Eğer $\sigma \subseteq H_{\mathbf{m}}^{+}$ ise $H_{\mathbf{m}}$ kümesine **destek hiperdüzlemi** ve $H_{\mathbf{m}}^{+}$ kümesine de **destek yarıuzayı** denir. $H_{\mathbf{m}}$ destek hiperdüzlemi olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{m} \in \sigma^{\vee} \backslash \{0\}$ olmasıdır. Ayrıca, $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_r$ elemanları $\sigma^{\vee}$ dual konisinin üreteçleri olmak üzere

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^{r} H_{\mathbf{m}_i}^{+}.$$

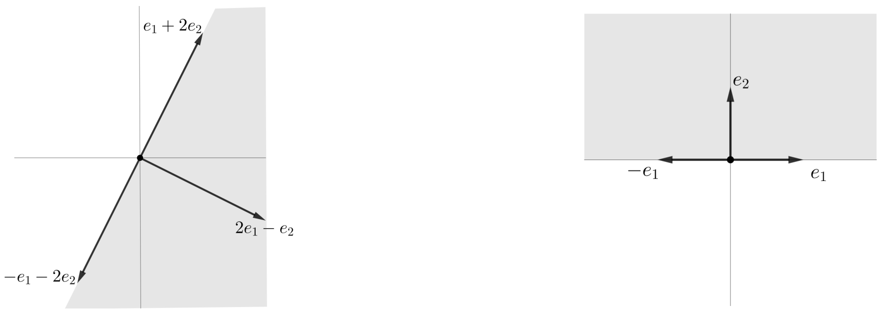
Bu durumda her konveks çokyüzlü koni sonlu sayıda kapalı yarıuzayların kesişimidir.

Önerme 3.4.5. $\sigma = Koni(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ *bir konveks çokyüzlü bir koni olmak üzere*

$$\sigma^{\vee} = \bigcap_{i=1}^{r} H_{\mathbf{v}_i}^{+}$$

eşitliği mevcuttur.

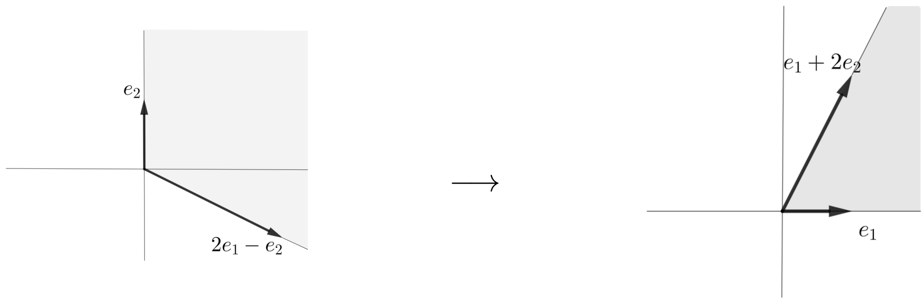
Örnek 3.4.6. $\sigma = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ *konisinin dual konisinin destek yarıuzaylarının grafikleri aşağıda verilmiştir:*



(a) $H^+_{2e_1-e_2}$ (b) $H^+_{e_2}$

Şekil 1: $\sigma^\vee$ konisinin destek yarı uzayları

Önerme 3.4.5 gereğince bu iki kümenin kesişimi σ konisinin dual konisini verir.



(a) $\sigma = \mathrm{Koni}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ (b) $\sigma^\vee = \mathrm{Koni}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1)$

Şekil 2: σ ve dual konisi $\sigma^\vee$

Tanım 3.4.7. *$\sigma \subseteq N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ konveks çokyüzlü bir koni ve $\mathbf{m} \in \sigma^\vee \backslash \{0\}$ olmak üzere*

$$\tau = H_\mathbf{m} \cap \sigma = \{\mathbf{v} \in \sigma \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$$

*çokyüzlü konisine σ konisinin **yüzü** denir ve $\tau \preceq \sigma$ şeklinde gösterilir. Eğer $\tau \neq \sigma$ ise **düzgün yüzü** denir ve $\tau \prec \sigma$ ile gösterilir.*

Bir konveks çokyüzlü koninin herhangi bir yüzü de konveks çokyüzlü konidir. Benzer şekilde rasyonel bir koninin her yüzü de rasyoneldir. İki yüzün ara kesiti de yüzdür. $\sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ konveks çokyüzlü konisinin i-boyutlu yüzlerinin kümesi $\sigma(i)$ ile gösterilir. Bir koninin bir boyutlu yüzüne **ışın**, $\mathrm{boy}(\sigma) - 1$ boyutlu yüzüne de **yüzüt** denir.

Önerme 3.4.8. *$\sigma = Koni(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) \subseteq N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ bir konveks çok yüzlü bir koni olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) *$\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_r$ elemanları $\sigma^\vee$ dual konisinin üreteçleri olsun. Bu takdirde* boy $\sigma = n$ *ise σ konisinin yüzütleri $i \in [r]$ olmak üzere $H_{\mathbf{m}_i} \cap \sigma$ konileridir.*

(ii) Her $\tau \neq \sigma$ yüzü, τ yüzünü kapsayan yüzütlerin ara kesitidir.

Önerme 3.4.9. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ bir konveks çokyüzlü koni olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) $\{0\} \in \sigma(0)$.

(ii) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(iii) $\operatorname{boy} \sigma^{\vee} = n$.

(iv) σ konisinin kapsadığı tek vektör uzayı sıfır alt uzayıdır.

Bu şartlardan birini sağlayan konveks çokyüzlü koniye **güçlü konveks** denir.

Tanım 3.4.10. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ rasyonel çokyüzlü konveks konisinin $\rho \prec \sigma$ herhangi bir ışını olmak üzere $\rho \cap N \simeq \mathbb{N}$ yarıgrubunun tek üretecine ρ ışınının **ilkel üreteci** denir.*

Lemma 3.4.11. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ rasyonel güçlü konveks çokyüzlü konisinin ışınları $\rho_1, \ldots, \rho_r$ ve bu ışınların ilkel üreteçleri sırasıyla $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ olsun. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ kümesi σ konisinin üreteç kümesidir.*

Koni$(\mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ konisi rasyonel güçlüdür. Koni$(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dual konisi güçlü değildir. Sonuç olarak güçlü konveks çokyüzlü bir koninin duali güçlü konveks olmayabilir. Maksimum boyutlu güçlü konveks çokyüzlü bir koninin duali güçlü konvekstir.

Tanım 3.4.12. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ konveks çokyüzlü bir koni olsun.*

1. *σ konisinin minimal üreteçleri N kafesinin bir bazının alt kümesi ise σ konisine **düzgün** denir.*

2. *σ konisinin minimal üreteçleri $\mathbb{R}$-lineer bağımsız ise σ konisine **simpleksel** denir.*

Düzgün bir koni simplekseldir, fakat tersi doğru değildir. Örneğin $\sigma = \text{Koni}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ konisi simpleksel iken düzgün değildir. Üreteçleri $\mathbb{R}$-lineer bağımsız olduğu için σ simplekseldir. Üreteçler $\mathbb{Z}$-lineer bağımsız fakat $\mathbf{e}_2$ elemanı $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ elemanlarının bir $\mathbb{Z}$ lineer kombinasyonu olmadığı için $\mathbb{Z}^2$ kafesinin bir bazının alt kümesi olamaz, dolayısıyla σ düzgün değildir.

Önerme 3.4.13. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ konveks çokyüzlü bir koni olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur.*

(i) σ konisinin ışın sayısı boy σ *ise σ simplekseldir.*

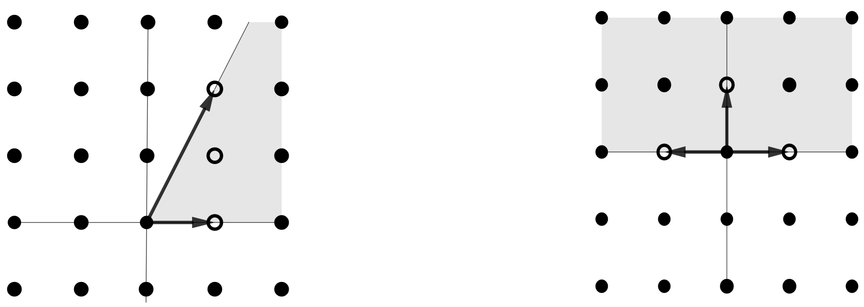
(ii) σ düzgün bir koni değil ise, σ konisini ihtiva eden her koni de düzgün değildir.

(iii) σ düzgün (simpleksel) bir koni ise her yüzü de düzgündür (simplekseldir).

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ herhangi bir çokyüzlü koni olmak üzere $\sigma \cap N$ kümesinin herhangi bir noktasına σ konisinin **kafes noktası** denir. Bir rasyonel çokyüzlü koninin kafes noktaları afin yarıgrup oluşturur.

Önerme 3.4.14. *[34, Önerme 1.2.17] $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ rasyonel çokyüzlü konveks bir koni olmak üzere $\mathcal{S}_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ afin yarıgruptur.*

Örnek 3.4.15. *Örnek 3.4.6'dan $\sigma_1 = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ konisinin duali ${\sigma_1}^\vee = Koni(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$ konisidir. ${\sigma_1}^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ afin yarıgrubunun üreteçleri $(1,0),(1,1),(1,2)$ kafes noktalarıdır: ${\sigma_1}^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = \mathbb{N}\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$.*
$\sigma_2 = Koni(\mathbf{e}_2)$ konisi için ${\sigma_2}^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = Koni(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cap \mathbb{Z}^2$ afin yarıgrubunun üreteçleri $(1,0),(-1,0),(0,1)$ kafes noktalarıdır. ${\sigma_2}^\vee$ konisinin üreteçleri ile ${\sigma_2}^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ afin yarıgrubunun üreteçleri aynı fakat σ_1 konisi ile ${\sigma_1}^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ afin yarıgrubunun üreteçleri aynı değildir.



(a) $\mathcal{S}_{\sigma_1} = {\sigma_1}^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ (b) $\mathcal{S}_{\sigma_2} = {\sigma_2}^\vee \cap \mathbb{Z}^2$

$\mathcal{S}$ bir afin yarıgrup olmak üzere $\mathcal{S} \cap (-\mathcal{S}) = \{\emptyset\}$ şartını sağlarsa **güçlü** afin yarıgrup denir. Güçlü afin yarıgrubunun minimal üreteç kümesi tektir, bu kümeye **Hilbert baz** denir. Bu küme aşağıdaki önerme ile ifade edilmiştir.

Tanım 3.4.16. *Bir $\mathcal{S}$ afin yarıgrubunun bir $\mathbf{m} \neq 0$ elemanının $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$, $\mathbf{m}', \mathbf{m}'' \in \mathcal{S}$ şeklinde her yazılışında, $\mathbf{m}'$ ve $\mathbf{m}''$ elemanlarından en az biri sıfır ise $\mathbf{m}$ elemanına **indirgenemez eleman** denir.*

Önerme 3.4.17. *$\mathscr{S}$ bir güçlü afin yarıgrup olsun. Bu takdirde*

$$\mathscr{H} = \{\mathbf{m} \in \mathscr{S} \mid \mathbf{m} \textit{ indirgenemez}\}$$

kümesi aşağıda verilen özellikleri sağlar.

(i) $\mathscr{H}$ sonlu kümedir ve $\mathscr{S}$ afin yarıgrubunu üretir.

(ii) $\mathscr{S}$ afin yarıgrubunun $\mathscr{H}$ kümesini kapsayan bir üreteç kümesi yoktur.

σ maksimum boyutlu rasyonel çokyüzlü konveks koni ise $\sigma^\vee$ güçlü konveks rasyonel çokyüzlü bir konidir, dolayısıyla $\sigma^\vee \cap M$ güçlü afin yarıgruptur. Bu takdirde $\sigma^\vee \cap M$ afin yarıgrubunun $\mathscr{H}$ Hilbert bazı vardır. $\mathscr{H}$ bazı $\sigma^\vee$ konisinin ışınlarının ilkel üreteçlerini içerir, çünkü ilkel üreteçler indirgenemezdir. Üstelik $\mathscr{H}$ bazı $\sigma^\vee$ konisinin tek rasyonel minimal üreteç kümesidir.

Her afin yarıgrup bir afin simitli çeşitlem verdiğinden, $\mathscr{S}_\sigma$ afin yarıgrubu da koordinat halkası $\mathbb{K}[\mathscr{S}_\sigma]$ cebiri olan afin simitli çeşitlemini verir.

Teorem 3.4.18. *$\sigma \subseteq N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ rasyonel çokyüzlü konveks koni olmak üzere $U_\sigma = \operatorname{Specm}(\mathbb{K}[\mathscr{S}_\sigma])$ kümesi afin simitli çeşitlemdir, ayrıca U_σ afin simitli çeşitleminin simiti T olmak üzere*

$$\sigma \textit{ güçlü konvekstir} \iff T \simeq T_N = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{K}^* \iff \operatorname{boy} U_\sigma = n.$$

Örnek 3.4.19. *$\sigma = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere Örnek 3.4.15 ile $\mathscr{S}_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = \mathbb{N}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$. Bu durumda*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

için $U_\sigma = Y_A$. $L_A = \mathbb{Z}\{(1, -2, 1)\}$ ve Lemma 3.2.8 gereği simitli ideal $I_{L_A} = \langle x_1x_3 - x_2^2\rangle : \langle x_1x_2x_3\rangle^\infty = \langle x_1x_3 - x_2^2\rangle$. Sonuç olarak $U_\sigma = V(x_1x_3 - x_2^2)$ ve

$$\mathbb{K}[\mathscr{S}_\sigma] = \mathbb{K}[\chi^{\mathbf{e}_1}, \chi^{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}, \chi^{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1}] \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]/\langle x_1x_3 - x_2^2 \rangle.$$

σ güçlü konveks bir koni olduğundan $T \simeq (\mathbb{K}^*)^2$, dolayısıyla U_σ afin simitli çeşitleminin simitinin bir parametreli alt gruplar grubu $\mathbb{Z}^2$ kafesine izomorftur. Diğer yandan $\mathbb{Z}^2$

kafesinin duali de $\mathbb{Z}^2$ olduğundan karakterler grubu da $\mathbb{Z}^2$ kafesine izomorftur.

Örnek 3.4.20. *$\sigma = Koni(0) \subset \mathbb{R}^2$ konisinin duali $\sigma^\vee = Koni(\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2)$ konisidir. $\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{N}\{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2\}$ afin yarıgrubuna karşılık gelen U_σ afin simitli çeşitlemidir:*

$$U_\sigma = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}]) = V(x_1x_3 - 1, x_2x_4 - 1) \simeq (\mathbb{K}^*)^2.$$

Örnek 3.4.21. *Farklı koniler aynı afin simitli çeşitlemi verebilir. Örneğin $\sigma_1 = Koni(e_1) = {\sigma_1}^\vee \subset \mathbb{R}$, $\sigma_2 = Koni(-e_1) = {\sigma_2}^\vee \subset \mathbb{R}$ alırsak aynı simitli çeşitlemler elde edilir: $U_{\sigma_1} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{K}$, $U_{\sigma_2} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x^{-1}]) = \mathbb{K}$.*

Örnek 3.4.22. *Her rasyonel çokyüzlü konveks koniye karşılık gelen bir afin simitli çeşitlem vardır, fakat tersi doğru değildir. Örneğin $\mathcal{S} = \mathbb{N}\{2, 3\}$ afin yarıgrubunun tanımladığı afin simitli çeşitlem $V = V(x_1^3 - x_2^2)$ olmak üzere $\mathcal{S} = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $\sigma \subset \mathbb{R}$ çokyüzlü konveks koni yoktur. $\mathbb{R}$ vektör uzayı 4 farklı rasyonel çokyüzlü konveks içerir:*

$$\tau = Koni(0) = \{0\}, \sigma_0 = Koni(e_1) = \mathbb{R}^+, \sigma_1 = Koni(-e_1) = \mathbb{R}^-, \sigma_2 = Koni(e_1, -e_1) = \mathbb{R}.$$

Bu konilere karşılık gelen afin yarıgrupların hiçbiri $\mathcal{S}$ kümesine eşit değildir.

3.5 Afin Simitli Çeşitlemlerin Özellikleri

Bu alt bölümde afin çeşitlemler için verilen bazı tanımları ve özellikleri afin simitli çeşitlemler üzerinde inceleyeceğiz.

Bölüm 2.4'te normal afin çeşitlem tanımı verilmiştir. Normallik tanımı başta anlaşılması ve kullanılması zor olarak görünür. Fakat simitli afin çeşitlemler için ele alınınca koniler aracılığıyla yorumlamak kolaylaşmıştır. Aşağıda verilen teorem aracılığıyla bir simitli çeşitlemin normal olup olmadığı kolayca anlaşılabilir. Öncelikle doygun afin yarıgrup tanımını verelim.

Tanım 3.5.1. *$\mathcal{S} \subseteq M$ bir afin yarıgrup olsun.*

$$Sat(\mathcal{S}) = \{m \in M \mid \exists k \in \mathbb{N} \setminus 0 \; için \; km \in \mathcal{S}\}$$

*kümesine $\mathcal{S}$ afin yarıgrubunun **doygun afin yarıgrubu** denir. Eğer $Sat(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ise*

$\mathscr{S}$ *afin yarıgrubuna* ***doygun*** *denir.*

Teorem 3.5.2. *V afin simitli çeşitlem verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) V normaldir.

(ii) Bir $\mathbb{N}A$ doygun afin yarıgrubu için $V = Y_A$.

(iii) Bir $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ rasyonel güçlü konveks çokyüzlü konisi için $V = U_\sigma$.

Örnek 3.5.3. *Örnek 3.4.19'den $V = V(x_1x_3 - x_2^2) \subset \mathbb{K}^3$ olmak üzere $\sigma = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ için $U_\sigma = V$ olduğunu biliyoruz. σ rasyonel güçlü konveks çokyüzlü koni olduğundan dolayı V normal simitli çeşitlemdir. Diğer yandan V afin simitli çeşitlemi Örnek 3.2.12 ile $V = Y_A$'dır, burada $A = \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$. $\mathbb{NA}$ afin yarıgrubu doygun değildir, çünkü $(1,0),(0,1) \notin \mathbb{NA}$. Fakat V normaldir, bu durum yanlış afin kafesin seçilmesindendir. $M = \mathbb{Z}^2$ kafesi yerine $\mathbb{Z}A$ kafesi seçilirse $(\mathbb{NA})$ afin yarıgrubu doygundur.*

Verilen bir $\mathscr{S} \subseteq M$ afin yarıgrubuna karşılık gelen afin çeşitlem $V = \operatorname{Specm}(\mathbb{K}[\mathscr{S}])$ olsun. $\mathscr{S}$ afin yarıgrubunun herhangi bir sonlu üreteç kümesinin ürettiği koni $\operatorname{Koni}(\mathscr{S}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ve duali $\sigma = \operatorname{Koni}(\mathscr{S})^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu notasyonları kullanarak V afin simitli çeşitleminin normalizasyon dönüşümünü verelim:

Önerme 3.5.4. *σ güçlü konvekstir ve doğal içerme homomorfizmasına $\mathbb{K}[\mathscr{S}] \to \mathbb{K}[\mathscr{S}_\sigma]$ karşılık gelen $U_\sigma \to V$ morfizması bir normalizasyon dönüşümüdür.*

Önerme 3.5.4'den $\mathbb{K}[\mathscr{S}]$ halkasının integral kapanışı $\mathbb{K}[\mathscr{S}_\sigma]$ halkasıdır. Bu durumda $V = \operatorname{Specm}(\mathbb{K}[\mathscr{S}])$ afin simitli çeşitleminin normalizasyonu U_σ afin simitli çeşitlemidir ve $\operatorname{Sat}(\mathscr{S}) = \operatorname{Koni}(\mathscr{S}) \cap M = \mathscr{S}_\sigma$.

Örnek 3.5.5. *$A = \{2,3\} \subset \mathbb{Z}$ olmak üzere $Y_A = V(x_1^3 - x_2^2) \subset \mathbb{K}^2$ afin simitli çeşitlemi normal değildir, çünkü $\mathbb{N}A$ doygun değildir. $Koni(A) = Koni(2e_1, 3e_1) = Koni(e_1) \subset \mathbb{R}$ olduğundan $Sat(\mathbb{NA}) = \mathbb{N}$. Sonuç olarak $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkasının integral kapanışı $\mathbb{K}[\mathbb{N}]$ halkasıdır ve V afin simitli çeşitleminin normalizasyonu $\mathbb{K}$ afin uzayıdır.*

Düzgün afin simitli çeşitlemler de koniler aracılığıyla karakterize edilebilir.

Teorem 3.5.6. *$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ bir rasyonel güçlü konveks çokyüzlü koni olsun. Bu takdirde U_σ afin simitli çeşitleminin düzgün olması için gerek ve yeter şart σ konisinin düzgün olmasıdır.*

Rasyonel güçlü çokyüzlü konveks koninin her yüzü de rasyonel güçlü çokyüzlü konveks koni olduğundan her yüzü de bir afin simitli çeşitlem tanımlar. $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ bir rasyonel güçlü çokyüzlü konveks koni ve $\tau \preceq \sigma$ bir yüzü olsun. $\tau = H_{\mathbf{m}} \cap \sigma$ olacak şeklinde $\mathbf{m} \in \sigma^{\vee} \cap M$ elemanı bulunur. Bu ifade $\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma}]$ ve $\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\tau}]$ afin yarıgrup cebirleri arasında aşağıdaki ilişkinin kurulmasını sağlar.

Önerme 3.5.7. *Yukarıdaki gösterimler ile aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\mathcal{S}_{\tau} = \mathcal{S}_{\sigma} + \mathbb{Z}\{-\mathbf{m}\}$.

(ii) $\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\tau}]$ *afin yarıgrup cebiri* $\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma}]$ *afin yarıgrup cebirinin* $\{\chi^{\mathbf{m}}, \chi^{2\mathbf{m}}, \dots\}$ *çarpımsal kümesine göre yerelleştirilmesidir, yani*

$$\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\tau}] = \mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma}]_{\chi^{\mathbf{m}}}.$$

Sonuç olarak Önerme 2.2.8 gereği U_{τ}, U_{σ} afin simitli çeşitleminin temel açık kümesine izomorftur, yani $U_{\tau} \simeq (U_{\sigma})_{\chi^{\mathbf{m}}}$.

Örnek 3.5.8. $\sigma = Koni(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$, *2 boyutlu güçlü rasyonel çokyüzlü bir konidir, ayrıca* $\sigma^{\vee} = \sigma$*. Önerme 3.4.8'den*

$$\sigma(1) = \{\tau_1 = (H_{\mathbf{e}_1} \cap \sigma) = Koni(\mathbf{e}_2),\, \tau_2 = (H_{\mathbf{e}_2} \cap \sigma) = Koni(\mathbf{e}_1)\}.$$

σ, τ_1 *konilerine karşılık gelen afin simitli çeşitlemleri bulalım:*

$$\sigma \to \sigma^{\vee} \to \mathcal{S}_{\sigma} = \mathbb{N}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \to \mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma}] = \mathbb{K}[x_1, x_2] \to U_{\sigma} = \mathbb{K}^2$$

$$\tau_1 \to {\tau_1}^{\vee} = Koni(\pm\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to \mathcal{S}_{\tau_1} = \mathbb{N}\{\pm\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \to U_{\tau_1} = V(x_1x_2 - 1) \subset \mathbb{K}^3$$

Aşağıda verilen izomorfizm ile $U_{\tau_1} \simeq (U_{\sigma})_{x_1} = U_{\sigma} \setminus V(x_1)$ *elde edilir:*

$$g : U_{\tau_1} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{K}^3 \mid p_1p_2 = 1\} = \{(1/p_2, p_2, p_3) \mid p_2 \neq 0\} \to (U_{\sigma})_{x_1} = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

$$g(p_1, p_2, p_3) = (p_2, p_3) \in (U_{\sigma})_{x_1}.$$

4 NORMAL SİMİTLİ ÇESİTLEMLER

Bu bölümün ana amacı fanların tarif ettiği normal simitli çeşitlemleri tanımlamaktır. Tezin amacına yönelik normal simitli çeşitlemlerin özellikleri verilecektir. Bu bölümde kaynak belirtilmeden verilen iddialar, teoremler ve önermeler ispatları verilmeden [34] kitabından alınmıştır. Bu bölümde $\mathbb{K}$ cismi cebirsel kapalı kabul edilecektir.

4.1 Projektif Çeşitlemler

Bu alt bölümde genel simitli çeşitlemlerin en basit klasik örneği olan projektif çeşitlemleri ele alacağız.

Tanım 4.1.1. $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *uzayında tanımlanan*

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{p}' \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \ni \mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p}$$

bağıntı denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesine n-boyutlu ***Projektif Uzay*** *denir. Bir diğer ifadeyle afin uzayda orjinden geçen tüm doğruların kümesi şeklinde de tanımlanabilir ve n-boyutlu projektif uzay $\mathbb{P}^n$ ile gösterilir:*

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim .$$

Her $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ elemanı $\mathbb{P}^n$ uzayında bir nokta tanımlar, bu nokta $\mathbf{p}$ noktasının denklik sınıfıdır. $\mathbf{p}$ noktasının denklik sınıfı $[\mathbf{p}] = [p_0 : \cdots : p_n]$ olmak üzere denklik sınıfının elemanlarına bu noktanın **homojen koordinatları** denir.

Şimdi çeşitlem tanımını projektif uzaya genişletelim. $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasından herhangi bir f polinomu ile projektif uzayda bir sıfırlayan küme tanımlayamayız. Örneğin $f(x_0, x_1) = x_1^2 - x_0 \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ alalım. $\mathbb{P}^1$ projektif uzayda $[4 : 2] = [8 : 4]$ fakat $f(4, 2) = 0$, $f(8, 4) = 8$. Sonuç olarak projektif uzayın bir noktasının farklı homojen koordinatları için farklı sonuçlar alabiliyoruz. Bu problemi çözmek için $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $\mathbb{N}$-dereceli polinom halkasının homojen polinomları ile çalışmak gerekmektedir. Bu sebepten kısaca dereceli halka kavramını ve çok temel özelliklerini verelim.

Tanım 4.1.2. *R bir halka ve $\mathscr{A}$ bir grup olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan R halkasının $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ alt grupları ailesi varsa R halkasına $\mathscr{A}$-**dereceli halka** denir.*

1. $R = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} R_\alpha$

2. Her $\alpha, \alpha' \in \mathscr{A}$ için $R_\alpha R_{\alpha'} \subseteq R_{\alpha+\alpha'}$

Her $\alpha \in \mathscr{A}$ için birim elmanı haricinde R_α grubunun her elemanına ***homojen*** *denir. Her $f \in R$ elemanı $f_i \in R_i$ olmak üzere $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$ şeklinde yazılır, bu yazılış tek türlüdür ve f_i elemanlarına f elemanının* ***homojen parçası*** *denir.*

Lemma 4.1.3. *[37, Lemma 2.2.7] $R = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} R_\alpha$, $\mathscr{A}$-dereceli bir halka ve $I \subseteq R$ bir ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar denktir.*

(i) *I ideali homojen elemanlar tarafından üretilir.*

(ii) *Her $\alpha \in \mathscr{A}$ için $I_\alpha = R_\alpha \cap I$ olmak üzere $I = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} I_\alpha$.*

(iii) *$f \in I$ olması için gerek ve yeter şart f elemanının her homojen parçası için $f_i \in I$.*

Tanım 4.1.4. *R, $\mathscr{A}$-dereceli bir halka ve $I \subseteq R$ bir ideal olsun. I ideali yukarıdaki denk şartları sağlarsa* ***homojen ideal*** *veya* ***$\mathscr{A}$-dereceli ideal*** *denir. Homojen ideallerin toplamı, çarpımı, kesişimi homojendir; ayrıca homojen idealin radikal ideali de homojendir.*

Lemma 4.1.5. *[37, Uyarı 2.2.9]$R = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} R_\alpha$, $\mathscr{A}$-dereceli bir halka ve $I \subseteq R$ homojen ideal olsun. Bu takdirde R/I bölüm halkası $\mathscr{A}$-dereceli bir halkadır ve*

$$R/I = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} (R_\alpha / I_\alpha).$$

Örnek 4.1.6. *$\mathscr{A}$ bir grup ve $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset \mathscr{A}$ olsun. $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ polinom halkasında her x_i değişkenin derecesi a_i olmak üzere bir monom*

$$\mathrm{der}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}) = \mathrm{der}(x_1^{m_1} \ldots x_r^{m_r}) = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \in \mathbb{N}A$$

şeklinde derecelendirilsin. S_α, α dereceli monomların ürettiği $\mathbb{K}$-vektör uzayı olmak üzere S $\mathscr{A}$-dereceli bir halkadır.

$S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ polinom halkasında her değişkenin derecesi $\mathrm{der}(x_i) = 1$ olmak üzere her $d \in \mathbb{N}$ için S_d derecesi d olan monomların ürettiği $\mathbb{K}$-vektör uzayı olsun.

Bu durumda $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ $\mathbb{N}$-dereceli bir halkadır ve projektif uzayda bu halka ile çalışacağız.

Tanım 4.1.7. *$I \subseteq S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ homojen ideal ve $f_1, \ldots, f_k \in S$ homojen polinomlar olmak üzere $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ olsun. Bu durumda*

$$\{[p_0 : \cdots : p_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_i(p_0, \ldots, p_n) = 0, \ \forall\, i \in [k]\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye I kümesinin tanımladığı ***projektif çeşitlem*** *denir, $V(I)$ veya $V(f_1, \ldots, f_k)$ ile gösterilir.*

Projektif çeşitlemlerin herhangi kesişimi ve sonlu sayıda birleşimi de projektif çeşitlemdir. Ayrıca boş küme ve projektif uzay da projektif çeşitlemdir [30, Önerme 2.1]. Dolayısıyla projektif çeşitlemlerin tümleyenlerinin kümesi $\mathbb{P}^n$ üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye **Zariski topoloji** denilmiştir. Bu topoloji $V(I)$ projektif çeşitlemi üzerine indirgenirse $V(I)$ üzerinde de topoloji tanımlar:

$$\{A \subseteq V(I) \mid V(I) \setminus A \,\text{projektif çeşitlem}\}$$

Bir projektif çeşitleminin açık kümelerine **yarı projektif çeşitlem** denir. $W \subseteq V(I)$ kümesinin kapanışı $\overline{W}$, W kümesini kapsayan $V(I)$ projektif çeşitleminin en küçük alt çeşitlemidir.

Tanım 4.1.8. *$Y \subseteq \mathbb{P}^n$ alt kümesi üzerinde sıfır değerini alan homojen polinomların ürettiği*

$$I(Y) = \langle f \in S \mid \forall\, [P] \in Y \text{ için } f(P) = 0, \ f \text{ homojen} \rangle$$

homojen idealdir ve bu ideale Y'nin ***sıfırlayan ideali*** *denir [25, Önerme 4, s. 380].*

V bir projektif çeşitlem olmak üzere $S/I(V)$, $\mathbb{N}$-dereceli halkadır ve V projektif çeşitlemin **homojen koordinat halkası** denir. $\mathbb{K}[V]$ ile gösterilir: $\mathbb{K}[V] = \bigoplus\limits_{d \in \mathbb{N}} (S_d/I(V)_d)$.

Tanım 4.1.9. *$V = V(I)$ bir projektif çeşitlem olmak üzere I homojen idealinin $\mathbb{K}^{n+1}$ afin uzayında tanımladığı $\hat{V} = V(I)$ afin çeşitlemine V projektif çeşitlemin* ***afin konisi*** *denir. $\hat{V}$ afin çeşitlemi*

$$V = (\hat{V} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim = \{[\mathbf{p}] \mid \mathbf{p} \in \hat{V} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

eşitliğini sağlar ve iki çeşitlemin koordinat halkaları aynıdır $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[\hat{V}]$.

Rasyonel Fonksiyonlar: S polinom halkasının bir i dereceli homojen polinomu ile projektif çeşitlem tanımlanır, fakat $\mathbb{P}^n$ projektif uzayında veya herhangi bir alt kümesinde bir fonksiyon tanımlamaz. Çünkü projektif uzayının bir noktasının homojen koordinatlarında farklı değer alır:

$$[p_0 : \cdots : p_n] = [\lambda p_0 : \cdots : \lambda p_n] \Longrightarrow f(p_0, \ldots, p_n) \neq (f(\lambda p_0, \ldots, \lambda p_n) = \lambda^i f(p_0, \ldots, p_n)).$$

Fakat $f, g \in S_i$ olmak üzere f/g fonksiyonu $\mathbb{P}^n$ uzayında iyi tanımlı olmasa bile bazı açık kümelerinde iyi tanımlıdır ve geleneksel olarak $\mathbb{P}^n$ projektif uzayında **rasyonel fonksiyon** olarak adlandırılır:

$$\{f/g \mid f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] \mid g \neq 0 \text{ ve } \operatorname{der}(f) = \operatorname{der}(g)\} \subseteq \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_r)$$

Benzer şekilde V projektif çeşitlemin koordinat halkasının elemanları V üzerinde bir fonksiyon vermez. V üzerinde geleneksel olarak bir rasyonel fonksiyon koordinat halkasının dereceleri eşit olan iki polinomunun bölümü ile tanımlanır. V indirgenemez bir projektif çeşitlem ve $\mathbb{K}(\hat{V})_0$, $\mathbb{K}(\hat{V})$ cisminin 0 dereceli elemanlarının kümesi olmak üzere

$$\mathbb{K}(V) = \{\overline{f}/\overline{g} \in \mathbb{K}(\hat{V}) \mid \overline{f}, \overline{g} \in \mathbb{K}[\hat{V}] = \mathbb{K}[V],\ g \neq 0 \text{ ve } \operatorname{der}(f) = \operatorname{der}(g)\} = \mathbb{K}(\hat{V})_0$$

V projektif çeşitleminin rasyonel fonksiyonlar cismidir. $\mathbb{K}(V)$ cismindeki fonksiyonlar V kümesinin alt kümelerinde tanımlı fonksiyonlardır. Şimdi noktada ve yarı projektif çeşitlem üzerinde tanımlı olan fonksiyonları verelim. Bu tanımı afin uzaya benzer şekilde iki farklı yol ile vereceğiz, iki tanımda elde edilen düzenli fonksiyon halkaları birbirine izomorftur [30, Teorem 3.4(b)].

Tanım 4.1.10. *V bir indirgenemez projektif çeşitlem ve $\mathbf{p} \in V$ olmak üzere*

$$\mathscr{O}_{V,\mathbf{p}} = \{\bar{f}/\bar{g} \in \mathbb{K}(V) \ \mid \ g(\mathbf{p}) \neq 0\}$$

*kümesi $\mathbb{K}(V)$ cisminin alt halkasıdır ve bu halkanın elemanlarına $\mathbf{p}$ noktasında **düzenli fonksiyon** denir. $U \subseteq V$ alt kümesinin her noktasında düzenli olan fonksiyona U*

üzerinde ***düzenli*** *denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu halka $\mathscr{O}(U)$ biçiminde gösterilir.*

Tanım 4.1.11. *U bir yarı projektif çeşitlem ve $\mathbf{p} \in U$ olsun. Bu takdirde*

$$\forall \mathbf{p}' \in U_{\mathbf{p}} \textit{ için } \phi(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p}')}{g(\mathbf{p}')},\ \mathrm{der}(f) = \mathrm{der}(g),\ g(\mathbf{p}') \neq 0$$

olacak şekilde $f, g \in S$ polinomları ve $\mathbf{p} \in U_{\mathbf{p}} \subseteq U$ açık kümesi varsa $\phi : U \to \mathbb{K}$ fonksiyonu $\mathbf{p} \in U$ noktasında ***düzenlidir*** *denir. Eğer U kümesinin her noktası için ϕ düzenli ise ϕ fonksiyonuna U kümesinde düzenli denir.*

Teorem 4.1.12. *[30, Teorem 3.4(a)]Bir indirgenemez projektif çeşitlem üzerinde tanımlı düzenli fonksiyonlar sadece sabit fonksiyonlardır, yani $\mathscr{O}(V) = \mathbb{K}$.*

Afin uzayda morfizm tanımı afin ve yarı afin çeşitlemler arasında verilmişti. Şimdi bu tanım daha genelleştirilerek afin uzay ile projektif uzay ilişkilendirilecektir.

Tanım 4.1.13. *V_1, V_2 bir çeşitlem (afin çeşitlem, yarı afin çeşitlem, projektif çeşitlem, yarı projektif çeşitlem) olsun. $\phi : V_1 \to V_2$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa* ***morfizm*** *denir:*

(i) ϕ süreklidir.

(ii) Her $U \subseteq V_2$ açık kümesi için $f \in \mathscr{O}(U)$ ise $f \circ \phi \in \mathscr{O}(\phi^{-1}(U))$ olmalıdır.

ϕ birebir, örten ve ϕ, ϕ^{-1} morfizm ise ϕ fonksiyonuna **izomorfizm** denir. Önerme 2.2.11 ve Önerme 2.2.13, V_1 bir çeşitlem iken de geçerlidir:

Önerme 4.1.14. *[30, Lemma 3.6] V_1 çeşitlem ve $V_2 \subseteq \mathbb{K}^r$ bir afin çeşitlem olsun. $\phi : V_1 \to V_2$ morfizm olması için gerek ve yeter şart her $i \in [r]$ için $x^i \circ \phi \in \mathscr{O}(V_1)$ olmasıdır, burada x^i, i. koordinat fonksiyonudur.*

Önerme 4.1.15. *[30, Önerme 3.5] V_1 çeşitlem ve $V_2 \subseteq \mathbb{K}^r$ bir afin çeşitlem olmak üzere aşagıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\phi : V_1 \to V_2$ bir morfizm ise her $f \in \mathbb{K}[V_2]$ için $\phi^* : \mathbb{K}[V_2] \to \mathscr{O}(V_1)$, $\phi^*(f) = f \circ \phi$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{K}$-cebir homomorfizmasıdır.

(ii) V_1, V_2 kümelerinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{O}(V_1)$, $\mathbb{K}[V_2]$ halkalarının izomorfik $\mathbb{K}$-cebiri olmasıdır.

Afin Parçalar: $\mathbb{P}^n$ projektif uzay afin uzayların birleşimidir. Her $i = 0, \ldots, n$ için

$$U_i = \mathbb{P}^n \setminus V(x_i) = \{[p_0 : p_1 : \cdots : p_n] \mid p_i \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Ayrıca her $i = 0, \ldots, n$ için

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{K}^n,\ [p_0 : p_1 : \cdots : p_n] \mapsto \left(\frac{p_0}{p_i}, \ldots, \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, \ldots, \frac{p_n}{p_i}\right)$$

dönüşümü izomorfizmdir [30, Önerme 3.3]. Dolayısıyla her U_i kümesi $\mathbb{K}^n$ afin uzayına izomorftur. U_i kümesinin koordinat halkası yani üzerinde tanımlı olan düzenli fonksiyonlar halkası

$$\mathbb{K}[U_i] = (\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{x_i})_0 = \mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right].$$

$V = V(f_1, \ldots, f_k) \subseteq \mathbb{P}^n$ bir projektif çeşitlem olsun. Şimdi bir projektif çeşitlemin afin açık örtüsünden bahsedelim. Her

$$V \cap U_i = V\left(f_1\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right), \ldots, f_k\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right)$$

kümesi bir afin çeşitleme izomorftur: Her $j \in [k]$ için

$$g_j(y_1, \ldots, y_n) = f_j(y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$$

olmak üzere $\phi_i(V \cap U_i) = V(g_1, \ldots, g_k) \subseteq K^n$. Ayrıca bu kümeler V projektif çeşitlemini örter:

$$V = \bigcup_{i=0}^{k} (V \cap U_i).$$

$V \cap U_i$ kümesine V projektif çeşitleminin **afin parçası** denir. Bir $V \cap U_i$ afin parçasının üzerinde tanımlı düzenli fonksiyonlar halkası

$$\mathbb{K}[V \cap U_i] \simeq (\mathbb{K}[V]_{x_i})_0 \simeq (\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{x_i})_0 / (I(V)_{x_i})_0$$

[34, Lemma 2.0.3].

Örnek 4.1.16. *$V=V(x_0x_2-x_1^2)\subset\mathbb{P}^3$ projektif çeşitlemini*

$$U_0=\mathbb{P}^3\setminus V(x_0),U_1=\mathbb{P}^n\setminus V(x_1),U_2=\mathbb{P}^3\setminus V(x_2)$$

olmak üzere

$$V_0=(V\cap U_0),V_1=(V\cap U_1),V_2=(V\cap U_2),V_3=(V\cap U_3)$$

kümeleri örter. Bu kümeler, izomorf olduğu afin çeşitlemler ile aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{rcl} V_0 & \simeq & \left\{\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{{p_1}^2}{{p_0}^2},\frac{p_3}{p_0}\right)\mid p_0\neq 0\right\}=V(y_2-{y_1}^2)\simeq\mathbb{K}^2\\ [p_0:p_1:p_2:p_3] & \underset{\phi_0}{\longrightarrow} & \left(\frac{p_1}{p_0},\frac{{p_1}^2}{{p_0}^2},\frac{p_3}{p_0}\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V_2 & \simeq & \left\{\left(\frac{p_1}{p_2},\frac{{p_1}^2}{{p_2}^2},\frac{p_3}{p_2}\right)\mid p_2\neq 0\right\}=V(y_2-{y_1}^2)\simeq\mathbb{K}^2\\ [p_0:p_1:p_2:p_3] & \underset{\phi_2}{\longrightarrow} & \left(\frac{p_1}{p_2},\frac{p_1^2}{p_2^2},\frac{p_3}{p_2}\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V_3 & \simeq & \left\{\left(\frac{p_0}{p_3},\frac{p_1}{p_3},\frac{p_2}{p_3}\right)\mid p_3\neq 0\right\}=V(y_1y_3-{y_2}^2)\subset\mathbb{K}^3\\ [p_0:p_1:p_2:p_3] & \underset{\phi_2}{\longrightarrow} & \left(\frac{p_0}{p_3},\frac{p_1}{p_3},\frac{p_2}{p_3}\right)\end{array}.$$

Son olarak

$$V_1=V_2\cap V_0$$

olduğundan ötürü $V=V_0\cup V_2\cup V_3$. Diğer yandan afin parçaların koordinat halkaları aşağıda verilmiştir:

$$\mathbb{K}[V_0]=\mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0},\frac{x_3}{x_0}\right]/\left\langle\frac{x_2}{x_0}-\frac{{x_1}^2}{{x_0}^2}\right\rangle\simeq\mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0},\frac{x_3}{x_0}\right],\ \frac{x_2}{x_0}\mapsto\frac{x_1^2}{x_0^2}$$

$$\mathbb{K}[V_2]=\mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_2},\frac{x_1}{x_2},\frac{x_3}{x_2}\right]/\left\langle\frac{x_0}{x_2}-\frac{{x_1}^2}{x_2^2}\right\rangle\simeq\mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_2},\frac{x_3}{x_2}\right],\ \frac{x_0}{x_2}\mapsto\frac{{x_1}^2}{x_2^2}$$

$$\mathbb{K}[V_3]=\mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_3},\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right]/\left\langle\frac{x_0}{x_3}\frac{x_2}{x_3}-\frac{x_1^2}{x_3^2}\right\rangle.$$

Projektif Uzayların Kartezyen Çarpımı: $\mathbb{K}^r,\mathbb{K}^n$ iki afin uzayın $\mathbb{K}^r\times\mathbb{K}^n$ kartezyen çarpımı $\mathbb{K}^{r+n}$ afin uzayı olarak tanımlandığı için $\mathbb{K}^r\times\mathbb{K}^n$ çarpımında çeşitlem tanımlarken de bir zorluk yoktur. $\mathbb{P}^n$ projektif uzayda $S=\mathbb{K}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ polinom halkasını değişkenlerin derecesi 1 olmak üzere her $d \in \mathbb{N}$ için S_d grubunu d toplam dereceli monomların ürettiği vektör uzayı alarak $\mathbb{N}$-dereceli halka olarak kabul etmiştik. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n'}$ iki tane projektif uzayın çarpımında ise $\mathbb{N}^2$-dereceli $\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y'_n]$ polinom halkası ile çalışacağız öyle ki

$$\mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(x_0) = \mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(x_1) = \cdots = \mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(x_n) = (1,0)$$

$$\mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(y_0) = \mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(y_1) = \cdots = \mathrm{der}_{\mathbb{N}^2}(y'_n) = (0,1).$$

Projektif uzaya benzer şekilde $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n'}$ uzayında homojen polinomlar çeşitlem tanımlar ve çeşitlemlerin idealleri $\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y'_n]$ polinom halkasında homojendir.

Projektif Simitli Çeşitlemler: $(\mathbb{K}^*)^n$ yarı açık afin çeşitlemine izomorf projektif çeşitleme n-boyutlu **projektif simit** denir. $\mathbb{P}^n$ projektif uzayı

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}^n} = \mathbb{P}^n \setminus V(x_0 x_1 \ldots x_n) &= \{[p_0 : \cdots : p_n] \mid p_0 p_1 \ldots p_n \neq 0\} \\ &= \{[1 : t_1 \cdots : t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}^*\} \simeq (\mathbb{K}^*)^n \end{aligned}$$

simitini içerir. Projektif uzayın tanımı gereğince

$$T_{\mathbb{P}^n} = (\mathbb{K}^*)^{n+1} / \{(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak $T_{\mathbb{P}^n}$ simitinin karakter grubu

$$M_{T_{\mathbb{P}^n}} = \{(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} m_i = 0\} \simeq \mathbb{Z}^n$$

kafesine izomorftur:

$$\begin{aligned} M_{T_{\mathbb{P}^n}} &\simeq \{\chi : T_{\mathbb{P}^n} \to \mathbb{K}^* \mid \chi \text{ morfizm ve grup homomorfizması}\} \\ (m_0, m_1, \ldots, m_n) &\longmapsto \chi^{\mathbf{m}}([p_0 : \cdots : p_n]) = x^{\mathbf{m}}(p_0, \ldots, p_n) = p_0^{m_0} \cdots p_n^{m_n} \end{aligned}$$

Diğer yandan bir parametreli alt gruplar grubu da $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1,1,\ldots,1) \simeq \mathbb{Z}^n$ kafesine izomorftur:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1,1,\ldots,1) &\simeq \{\lambda : \mathbb{K}^* \to T_{\mathbb{P}^n} \mid \lambda \text{ morfizm ve grup homomorfizması}\} \\ (u_0, u_1, \ldots, u_n) + \mathbb{Z}(1,1,\ldots,1) &\longmapsto \lambda^{\mathbf{u}}(t) = (t^{u_1}, \ldots, t^{u_n}) \end{aligned}$$

Afin simitli çeşitlem tanımı projektif uzaya benzer şekilde uyarlanabilir:

Tanım 4.1.17. *Bir V indirgenemez projektif çeşitlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa* ***projektif simitli çeşitlem*** *denir.*

- *V simitli çeşitlemi bir $T_{\mathbb{P}^n}$ simiti içerir.*
- *Kısıtlanışı $T_{\mathbb{P}^n}$ simitinin çarpma işlemi olacak şekilde bir $T_{\mathbb{P}^n} \times V \to V$ cebirsel etki vardır.*

Örnek 4.1.18. *$\mathbb{P}^n$ projektif uzayı projektif simitli çeşitlemdir.*

1. $T_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{P}^n$ simitini içerir.
2. $\varphi : T_{\mathbb{P}^n} \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, \phi([1 : t_1 : \cdots : t_n], [p_0 : \cdots : p_n]) = [p_0 : p_1t_1 : \cdots : p_nt_n]$ dönüşümü cebirsel etkidir.

Bölüm 3.2'de verilen ϕ_A dönüşümünü hatırlayalım: Bir M karakter kafesli T afin simiti için $A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_r\} \subset M$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \phi_A : & T & \to & (\mathbb{K}^*)^r \\ & \mathbf{t} & \mapsto & (\chi^{\mathbf{m}_1}(\mathbf{t}), \ldots, \chi^{\mathbf{m}_r}(\mathbf{t})) \end{array}$$

ϕ_A ile $\pi : (\mathbb{K}^*)^r \to T_{\mathbb{P}^{r-1}}$ dönüşümlerinin bileşke fonksiyonu ile projektif simitli çeşitlemler elde edilir.

Önerme 4.1.19. *$\pi \circ \phi_A$ dönüşümününün görüntü kümesinin $\mathbb{P}^{r-1}$ projektif uzayda Zariski kapanışını X_A ile gösterelim. X_A projektif simitli çeşitlemdir ve simitinin kafesi $\mathbb{Z}'A$ kafesidir:*

$$\mathbb{Z}'A = \left\{ \sum_{i=1}^{r} z_i \boldsymbol{m}_i \mid \sum_{i=1}^{r} z_i = 0 \right\}.$$

$$\begin{array}{rccccl} \pi \circ \phi_A : & T & \xrightarrow{\phi_A} & (\mathbb{K}^*)^r & \xrightarrow{\pi} & T_{\mathbb{P}^{r-1}} \subset \mathbb{P}^{r-1} \\ & \mathbf{t} & \mapsto & (\chi^{\boldsymbol{m}_1}(\boldsymbol{t}), \ldots, \chi^{\boldsymbol{m}_r}(\boldsymbol{t})) & \mapsto & [\chi^{\boldsymbol{m}_1}(\boldsymbol{t}) : \cdots : \chi^{\boldsymbol{m}_r}(\boldsymbol{t})] \end{array}$$

Şimdi X_A projektif simitli çeşitleminin $\hat{X}_A$ afin konisi ile Y_A afin simitli çeşitleminin ilişkisini verelim:

Önerme 4.1.20. *Yukarıda verilen gösterimlere göre aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(i) $\hat{X}_A = Y_A$.

(ii) $I_{L_A} = I(X_A)$.

(iii) I_{L_A} *kafes ideali homojendir.*

(iv) $\langle \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{u}\rangle = \cdots = \langle \boldsymbol{m}_r, \boldsymbol{u}\rangle = k$ *olacak şekilde* $\boldsymbol{u} \in N$ *ve* $k \in \mathbb{N}$ *vardır.*

$M = \mathbb{Z}^s$ kafesi için yukarıdaki önermede verilen son şart $A = [\mathbf{m}_1\, \mathbf{m}_2 \cdots \mathbf{m}_r]$ matrisinin $\mathbb{Q}$ üzerinden satır uzayının $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^r$ elemanını içermesi ile denktir.

Örnek 4.1.21.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$\begin{array}{rccc} \pi \circ \phi_A : & (\mathbb{K}^*)^2 & \to & T_{\mathbb{P}^2} \subset \mathbb{P}^2 \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & [t_1^2 : t_1 t_2 : t_2^2] \end{array}$$

dönüşümünün tanımladığı X_A *projektif simitli çeşitlemini bulalım:* $I(Y_A) = I_{L_A} = \langle x_1x_3 - x_2^2\rangle \subset \mathbb{K}[x_1, x_1, x_3]$ *ideali homojendir ve Önerme 4.1.20 gereğince* $X_A = V(x_1x_3 - {x_2}^2)$.

Örnek 4.1.22. $A = [0\ 1\ 2\ 3]$ *için* $I(Y_A) = I_{L_A} = \langle x_3 - x_2^2, x_4 - x_2x_3\rangle$ *ideali homojen olmadığından ötürü* $I_{L_A} \neq I(X_A)$.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $X_A = X_{A'}$*, çünkü* $\pi(\phi_A(\mathbb{K}^*)) = \pi(\phi'_A((\mathbb{K}^*)^2))$*. Diğer yandan* A' *matrisinin satır uzayı* $(1, 1, 1, 1)$ *elemanını ihtiva ettiği için* $I_{L_{A'}} = \langle x_1x_3 - x_2^2, x_1^2x_4 - x_2^3\rangle = I(X'_A) = I(X_A)$ *ve* $X_A = V(x_1x_3 - x_2^2, x_1^2x_4 - x_2^3)$.

Örnekte verilen matrise $(1, 1, 1, 1)$ satırı ilave edilerek Önerme 4.1.20'de verilen şartlar sağlanmıştır, böylece X_A projektif çeşitleminin sıfırlayan ideali hesaplanmıştır. Bu durum $M = \mathbb{Z}^s$ kafesinin her alt kümesinde geçerlidir, yani verilen $A = [\mathbf{m}_1\ \mathbf{m}_2\ \cdots \mathbf{m}_r]$ matrisine $(1, 1, \ldots, 1)$ satırını ekleyerek elde ettiğimiz matris A' olmak üzere $X_A = X_{A'}$ ve $I(X_A) = I(Y_{A'})$.

Örnek 4.1.23.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin tanımladığı projektif simitli çeşitlem $\mathbb{P}^2$ *projektif uzayıdır, çünkü* $I(X_A) = I(Y_{A'}) = \{0\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. *Benzer şekilde her* $i \in [r]$ *için* $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^r$ *olmak üzere* $A = [\mathbf{0}\ \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_r] \in M_{r\times r}(\mathbb{Z})$ *matrisi için* $X_A = \mathbb{P}^r$.

Son olarak aşağıdaki önerme ile verilen M kafesinin bir $A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_r\} \subset M$ alt kümesi için X_A projektif simitli çeşitlemin afin parçaları, yani $X_A \cap U_i$ yarı projektif çeşitlemi izomorfizm aracılığıyla belirlenecektir.

Önerme 4.1.24. $A_i = A - \boldsymbol{m}_i = \{\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}_i \mid j \neq i\}$ *ve* $\mathcal{S}_i = \mathbb{N}A_i$ *olmak üzere*

$$X_A \cap U_i \simeq Y_{A_i} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathcal{S}_i]) \subset \mathbb{K}^{r-1}.$$

4.2 Afin Çeşitlemleri Yapıştırma

Projektif çeşitlemlerin afin çeşitlemlere izomorf açık kümelerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini son kesimde görmüştük. Benzer bir yol ile sonlu afin çeşitlemlerden projektif çeşitlem veya afin çeşitlem olmayan soyut çeşitlemler elde edilir. Böylece daha genel simitli çeşitlemler inşa edilir. Şimdi sonlu afin çeşitlemler aracılığıyla genel bir çeşitlemin inşasını verelim.

$V_1, \ldots, V_r$ afin çeşitlemleri ve $i \neq j$ olmak üzere her $i, j \in [r]$ için $V_{ij} \subseteq V_i$ açık kümeleri verilsin. Her V_{ij}, V_{ji} açık kümeleri üzerinde tanımlanan $g_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ izomorfizmaları aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

(ii) Her i, j, k için $g_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$.

(iii) Her i, j, k için $V_{ij} \cap V_{ik}$ kümesi üzerinde $g_{ij} = g_{kj} \circ g_{ik}$.

$V_1, \ldots, V_r$ afin çeşitlemlerinin ayrık birleşimi üzerinde

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{p}' \iff \mathbf{p} = \mathbf{p}' \text{ veya } \exists\, g_{ij} \ni \mathbf{p}' = g_{ij}(\mathbf{p})$$

tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır. $X = \bigsqcup_{i=1}^{r} V_i / \sim$ bölüm kümesine **Çeşitlem** denir.

Afin çeşitlemleri yapıştırarak elde edilen çeşitlemler projektif ve afin uzaylar ile birlikte ele alınmayınca soyut kalacaktır. Aşağıda verilen örnekler tanımı daha iyi anlamamızı sağlayacaktır.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{P}^2 = \{[p_0 : p_1 : p_2] \mid p_i \in \mathbb{K}\}$ *projektif uzayın afin parçaları ve bu parçaların izomorf olduğu afin çeşitlemler aşağıda verilmiştir:*

$$U_0 = \{[p_0 : p_1 : p_2] = [1 : p_1/p_0 : p_2/p_0] \mid p_0 \neq 0\} \overset{\phi_0}{\simeq} W_0 = \{(p_1/p_0, p_2/p_0) \mid p_0 \neq 0\} = \mathbb{K}^2$$

$$U_1 = \{[p_0 : p_1 : p_2] = [p_0/p_1 : 1 : p_2/p_1] \mid p_1 \neq 0\} \overset{\phi_1}{\simeq} W_1 = \{(p_0/p_1, p_2/p_1) \mid p_1 \neq 0\} = \mathbb{K}^2$$

$$U_2 = \{[p_0 : p_1 : p_2] = [p_0/p_2 : p_1/p_2 : 1] \mid p_2 \neq 0\} \overset{\phi_2}{\simeq} W_2 = \{(p_0/p_2, p_1/p_2) \mid p_2 \neq 0\} = \mathbb{K}^2$$

1. W_{01}*,* W_{10} *kümeleri* W_0 *ve* W_1 *afin çeşitlemlerinin sırasıyla temel açık kümeleridir:*

$$W_{01} = (W_0)_{y_1} = \{(p_1/p_0, p_2/p_0) \mid p_0,\, p_1 \neq 0\} \subset W_0,$$

$$W_{10} = (W_1)_{y_1} = \{(p_0/p_1, p_2/p_1) \mid p_1,\, p_0 \neq 0\} \subset W_1.$$

W_{01}*,* W_{10} *temel açık kümeleri üzerinde tanımlanan*

$$g_{01} : W_{01} \to W_{10},\ (p_1/p_0, p_2/p_0) \mapsto (p_0/p_1, p_2/p_1)$$

$$g_{10} : W_{10} \to W_{01},\ (p_0/p_1, p_2/p_1) \mapsto (p_1/p_0, p_2/p_0)$$

dönüşümleri izomorfizmadır ve $g_{01} = g_{10}^{-1}$.

2. Benzer şekilde W_0 *ve* W_2 *afin çeşitlemlerinin sırasıyla*

$$W_{02} = (W_0)_{y_2} = \{(p_1/p_0, p_2/p_0) \mid p_0,\, p_2 \neq 0\} \subset W_0,$$

$$W_{20} = (W_2)_{y_1} = \{(p_0/p_2, p_1/p_2) \mid p_2,\, p_0 \neq 0\} \subset W_2$$

kümeleri temel açık kümeleridir ve

$$g_{02} : W_{02} \to W_{20},\ (p_1/p_0, p_2/p_0) \mapsto (p_0/p_2, p_1/p_2)$$

$$g_{20} : W_{20} \to W_{02},\ (p_0/p_2, p_1/p_2) \mapsto (p_1/p_0, p_2/p_0)$$

dönüşümleri izomorfizmadır, ayrıca $g_{02} = g_{20}^{-1}$.

3. Son olarak

$$W_{12} = (W_1)_{y_2} = \{(p_0/p_1, p_2/p_1) \mid p_1,\, p_2 \neq 0\} \subset W_1,$$

$$W_{21} = (W_2)_{y_2} = \{(p_0/p_2, p_1/p_2) \mid p_2,\, p_1 \neq 0\} \subset W_2$$

olmak üzere

$$g_{12} : W_{12} \to W_{21},\ (p_0/p_1, p_2/p_1) \mapsto (p_0/p_2, p_1/p_2)$$

$$g_{21} : W_{21} \to W_{12},\ (p_0/p_2, p_1/p_2) \mapsto (p_0/p_1, p_2/p_1)$$

dönüşümleri izomorfizmadır ve $g_{12} = g_{21}^{-1}$.

- W_{01}, W_{10} *temel afin açık kümeleri* $U_0 \cap U_1$ *kümesine izomorftur:*

$$\begin{array}{cccccc} g_{01}: & W_{01} & \simeq & U_0 \cap U_1 & \simeq & W_{10} \\ & (p_1/p_0, p_2/p_0) & \underset{\phi_0^{-1}}{\longmapsto} & [p_0 : p_1 : p_2] & \underset{\phi_1}{\longrightarrow} & (p_0/p_1, p_2/p_1) \end{array}$$

$i \neq j$ *olmak üzere her* i, j *için de* $W_{ij} \simeq U_i \cap U_j$ *denkliği benzer şekilde gösterilir.*

- *Her* W_i *afin parçasının temel açık kümelerinin kesişimi izomorftur:*

$$W_{01} \cap W_{02} \simeq W_{10} \cap W_{12} \simeq W_{20} \cap W_{21} \simeq U_0 \cap U_1 \cap U_2.$$

- $W_{01} \cap W_{02}$ *kümesi üzerinde* $g_{01} = g_{21} \circ g_{02}$, $g_{02} = g_{12} \circ g_{02}$.
  $W_{10} \cap W_{12}$ *kümesi üzerinde* $g_{10} = g_{20} \circ g_{12}$, $g_{12} = g_{02} \circ g_{10}$.
  $W_{20} \cap W_{21}$ *kümesi üzerinde* $g_{20} = g_{10} \circ g_{21}$, $g_{21} = g_{01} \circ g_{20}$.

Bu izomorfizmalar çeşitlem tanımında istenilen şartları sağlar. Sonuç olarak $W_0 = W_1 = W_2 = \mathbb{K}^2$ *afin uzayları*

$$g_{01} : \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}^* \times \mathbb{K},\ (y_1, y_2) \mapsto (1/y_1, y_2/y_1),\ g_{10} = g_{01}^{-1} = g_{01}$$

$$g_{02} : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^* \times \mathbb{K},\ (y_1, y_2) \mapsto (1/y_2, y_1/y_2),\ g_{20} = g_{02}^{-1},\ g_{20}(y_1, y_2) = (y_2/y_1, 1/y_1)$$

$$g_{12} : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*,\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1/y_2, 1/y_2),\ g_{21} = g_{12}^{-1} = g_{12}$$

izomorfizması ile yapıştırılırsa $\mathbb{P}^2$ uzayı elde edilir:

$$W_0 \sqcup W_1 \sqcup W_2 = \{(1, y_1, y_2), (y_1, 1, y_2), (y_1, y_2, 1) \mid y_1, y_2 \in \mathbb{K}\}$$

kümesinde

$$\forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}\; \textit{için}\, (1, y_1, y_2) \sim (1/y_1, 1, y_2/y_1)$$

$$\forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*\; \textit{için}\, (1, y_1, y_2) \sim (1/y_2, y_1/y_2, 1)$$

$$\forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*\; \textit{için}\, (y_1, 1, y_2) \sim (y_1/y_2, 1/y_2, 1)$$

denklik bağıntısının ayrık denklik sınıflarının kümesi

$$W_0 \sqcup W_1 \sqcup W_2/ \sim = \{\overline{(1, y_1, y_2)} \mid y_1, y_2 \in \mathbb{K}\} \cup \{\overline{(0, 1, y_2)} \mid y_2 \in \mathbb{K}\} \cup \{\overline{(0, 0, 1)}\}$$

şeklindedir ve bu kümenin $\mathbb{P}^2$ projektif uzayını

$$\mathbb{P}^2 = \{[1 : y_1 : y_2] \mid y_1, y_2 \in \mathbb{K}\} \cup \{[0 : 1 : y_2] \mid y_2 \in \mathbb{K}\} \cup \{[0 : 0 : 1]\}$$

verdiği aşikardır.

Örnek 4.2.2. *(Ağırlıklı Projektif Uzay) ebob$(w_0, w_1, \ldots, w_n) = 1$ olmak üzere $w_0, w_1, \ldots, w_n$ pozitif tam sayıları verilsin. $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ uzayında tanımlanan*

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{p}' \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \ni\; \mathbf{p}' = (\lambda^{w_0}, \ldots, \lambda^{w_1})\mathbf{p}$$

denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesine n-boyutlu ***Ağırlıklı Projektif Uzay*** *denir ve $\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_1)$ ile gösterilir:*

$$\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_1) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/ \sim .$$

$\mathbb{P}(1, \ldots, 1)$ ağırlı projektif uzayı $\mathbb{P}^n$ projektif uzayıdır. $\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_1)$ ağırlıklı projektif uzayın dereceli polinom halkası her x_i değişkeninin derecesi w_i olmak üzere $\mathbb{N}$-dereceli $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasıdır. Bu takdirde $\boldsymbol{x^a}$ monomunun derecesi

$$\mathrm{der}_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{x^a}) = a_0 w_0 + \cdots + a_n w_n$$

eşitliği ile verilir. f homojen polinom ise $f = 0$ ağırlıklı projektif uzayda iyi tanımlıdır, dolayısıyla homojen idealler ile çeşitlem tanımlayabiliriz. Şimdi $\mathbb{P}(1,1,2)$ ağırlıklı projektif uzayının çeşitlem olduğunu gösterelim. Projektif uzaya benzer şekilde ağırlıklı projektif uzayı da afin çeşitleme izomorf afin parçaların birleşimi şeklinde yazabiliriz:

$$U_0 = \{[p_0 : p_1 : p_2] \mid p_0 \neq 0\} \overset{\phi_0}{\simeq} W_0 = \{(p_1/p_0, p_2/p_0^2) \mid p_0 \neq 0\} = \mathbb{K}^2$$

$$U_1 = \{[p_0 : p_1 : p_2] \mid p_1 \neq 0\} \overset{\phi_1}{\simeq} W_1 = \{(p_0/p_1, p_2/p_1^2) \mid p_1 \neq 0\} = \mathbb{K}^2$$

$$U_2 = \{[p_0 : p_1 : p_2] | p_2 \neq 0\} \overset{\phi_2}{\simeq} W_2 = \{(p_0^2/p_2, p_0p_1/p_2, p_1^2/p_2) | p_2 \neq 0\} = V(y_1y_3 - y_2^2) \subset \mathbb{K}^3$$

olmak üzere $\mathbb{P}(1,1,2) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. W_0, W_1, W_2 *kümelerinin afin açık kümeleri*

$$W_{01} = (W_0)_{y_1} = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K},\ W_{02} = (W_0)_{y_2} = \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \subset W_0,$$

$$W_{10} = (W_1)_{y_1} = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K},\ W_{12} = (W_1)_{y_2} = \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \subset W_1,$$

$$W_{20} = (W_2)_{y_1} = V(y_1y_3 - y_2^2)_{y_1},\ W_{21} = (W_1)_{y_3} = V(y_1y_3 - y_2^2)_{y_3} \subset W_2$$

arasında aşağıdaki tanımlanan dönüşümler izomorfizmdir ve çeşitlem tanımındaki şartlar sağlanır:

$$g_{01} : W_{01} \to W_{10},\ (y_1, y_2) \mapsto (1/y_1, y_2/y_1^2),\ g_{10} : W_{10} \to W_{01},\ g_{10} = g_{01}$$

$$g_{02} : W_{02} \to W_{20},\ (y_1, y_2) \mapsto (1/y_2, y_1/y_2, y_1^2/y_2),\ g_{02} : W_{20} \to W_{02},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_2/y_1, 1/y_1)$$

$$g_{12} : W_{12} \to W_{21},\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1^2/y_2, y_1/y_2, 1/y_2),\ g_{21} : W_{21} \to W_{12},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto, (y_1/y_2, 1/y_3).$$

Yukarıdaki izomorfizmler ile W_0, W_1, W_2 afin çeşitlemlerinin yapıştırılması ile $\mathbb{P}(1,1,2)$ ağırlıklı uzay elde edilir.

Örnek 4.2.3. $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{K}^2$ *kartezyen çarpımı çeşitlemdir.* U_0, U_1 *afin parçalarının birleşimidir öyle ki*

$$U_0 = \{([1 : p_1/p_0] : p_2, p_3) \mid p_0 \neq 0\} \simeq W_0 = \{(p_1/p_0, p_2, p_3) \mid p_0 \neq 0\} = \mathbb{K}^3$$

$$U_1 = \{([p_0/p_1 : 1], p_2, p_3) \mid p_1 \neq 0\} \overset{\phi_1}{\simeq} W_1 = \{(p_0/p_1, p_2, p_3) \mid p_1 \neq 0\} = \mathbb{K}^3.$$

W_0, W_1 afin çeşitlemleri

$$g_{01} : W_{01} \to W_{10},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto (1/y_1, y_2, y_3),\ g_{10} : W_{10} \to W_{01},\ g_{10} = g_{01}$$

izomorfizması ile yapıştırılarak X çeşitlemi elde edilir.

Şimdi çeşitlemler üzerinde bazı tanımları verelim. Her $i \in [r]$ için $h_i : V_i \to X$, $\mathbf{p} \mapsto [\mathbf{p}]$ dönüşümleri tanımlansın. $X = \bigsqcup_{i=1}^{r} V_i / \sim$ üzerinde bölüm topolojisi ile bölüm uzayını oluşturabiliriz. $U \subseteq X$ alt kümesi açık olması için gerek ve yeter koşul her $i \in [r]$ için $h_i^{-1}(U) \subseteq V_i$ açık olmasıdır. O halde

$$U_i = \{[\mathbf{p}] \in X \mid \mathbf{p} \in V_i\}$$

kümesi X bölüm uzayının açık kümesidir, çünkü h_i homomorfizması ile V_i açık kümesine izomorftur. $Y \subseteq X$ kapalı alt kümelerine X çeşitleminin **altçeşitlemleri** denir. X çeşitlemi iki öz altçeşitlemlerinin birleşimine eşit değilse **indirgenemez** denir.

Tanım 4.2.4. *$X = \bigsqcup_{i=1}^{r} V_i / \sim$ çeşitlemi ve $U \subseteq X$ açık kümesi verilsin. Her $\phi \circ h_i : h_i^{-1}(U) \to \mathbb{K}$ dönüşümü düzenli ise $\phi : U \to \mathbb{K}$ dönüşümüne U kümesi üzerinde* ***düzenlidir*** *denir.*

Bir indirgenemez projektif ve afin çeşitlemin rasyonel fonksiyonlar cisminin fonksiyonları çeşitlemin tamamında tanımlı değildir, açık kümelerinde tanımlı rasyonel fonksiyonları içerir. Bu X çeşitlemi için aşağıdaki tanım ile genellenir.

Tanım 4.2.5. *X indirgenmez çeşitlemi ve $U_1, U_2 \subset X$ açık kümeleri verilsin. $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{K}$, $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{K}$ düzenli fonksiyonlar olmak üzere*

$$\phi_1 \sim \phi_2 \iff \exists\, U \subseteq U_1 \cap U_2 \text{ açık} \ni \phi_1|_U = \phi_2|_U$$

bağıntısı denklik bağıntısıdır.

$$\mathbb{K}(X) = \{\phi : U \to \mathbb{K} \mid \phi \text{ düzenli, } U \subseteq X \text{ açık}\} \sim$$

denklik sınıflarının kümesine X çeşitleminin ***rasyonel fonksiyonlar cismi*** *denir.*

Tanım 4.2.6. *X indirgenemez çeşitlemi ve $\mathbf{p}$ noktası verilsin. $\mathbf{p}$ noktasının bir açık* *komşuluğunda düzenli, $\mathbb{K}(X)$ cisminin her elemanına $\mathbf{p}$ noktasında **düzenli bir fonksiyon** denir, bu takdirde*

$$\mathcal{O}_{X,\mathbf{p}} = \{\phi : U_{\mathbf{p}} \to \mathbb{K} \mid \phi \text{ düzenli, } \mathbf{p} \in U_{\mathbf{p}} \subseteq X \text{ açık}\}/\sim$$

$\mathbf{p}$ noktasında düzenli fonksiyonların halkasıdır.

Son olarak afin çeşitlemler için tanımladığımız normallik tanımını çeşitlemler için verelim.

Tanım 4.2.7. *X çeşitlemi indirgenmez ve her $\mathbf{p}$ noktası için $\mathcal{O}_{X,\mathbf{p}}$ halkası normal ise X çeşitlemine **normal** denir.*

Aşağıdaki önermede bir çeşitlemin normalliğinin afin parçalarının normalliği ile ilişkili olduğu ifade edilmiştir.

Önerme 4.2.8. *[34, Önerme 3.0.12] $X = \bigsqcup_{i=1}^{r} V_i/\sim$ çeşitleminin normal olması için gerek ve yeter şart V_i afin çeşitlemlerinin normal olmasıdır.*

4.3 Fanlar ve Simitli Çeşitlemler

Bu kesimin 2 temel öğesi fanlar ve simitli çeşitlemlerdir. İlk olarak bu öğeler tanımlanacak, sonra bir fana karşılık gelen simitli çeşitlem inşa edilecektir.

Tanım 4.3.1. *Bir X indirgenmez çeşitlemi aşağıda verilen özellikleri sağlarsa **simitli çeşitlem** denir.*

- *X çeşitlemi bir T simiti içerir.*
- *Kısıtlanışı T simitinin çarpma işlemi olacak şekilde bir $\varphi : T \times X \to X$ cebirsel etki vardır, yani φ bir morfizmdir ve X üzerindeki T simitinin grup etkisidir.*

Tanım 4.3.2. *Σ, $N_{\mathbb{R}}$ vektör uzayında sonlu sayıda konilerin kümesi olsun. Σ kümesi aşağıda verilen özellikleri sağlasın.*

1. *Her $\sigma \in \Sigma$ güçlü rasyonel çokyüzlü bir konidir.*
2. *$\sigma \in \Sigma$ ise σ konisinin her yüzü de Σ kümesinin elemanıdır.*
3. *$\sigma, \sigma' \in \Sigma$ ise $\sigma \cap \sigma' \prec \sigma, \sigma'$ olur.*

*Bu takdirde Σ kümesine $N_{\mathbb{R}}$ vektör uzayında **fan** denir. Σ fanındaki k-boyutlu koniler $\Sigma(k)$ ile gösterilir.*

Bu bölümde fanlar ile çeşitlemleri ilişkilendireceğiz. Bir fana karşılık gelen çeşitlem, fandaki konilere karşılık gelen afin simitli çeşitlemlerin yapıştırılması ile elde edilir. Fan afin simitli çeşitlemlerin nasıl yapıştırılacağını da tarif eder. Şimdi bir Σ fanının bir çeşitlem oluşturabileceğini gösterelim:

1. Önerme 3.4.14 gereğince Σ fanındaki her σ_1 güçlü konisi bir normal simitli afin çeşitlem verir: $U_{\sigma_1} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma_1}])$.

2. Her $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ konileri ortak yüzü $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ boyunca kesiştiği için en az bir $\mathbf{m} = \sigma_1{}^{\vee} \cap (-\sigma_2)^{\vee} \cap M$ elemanı vardır öyle ki

$$\sigma_1 \cap H_{\mathbf{m}} = \tau = \sigma_2 \cap H_{\mathbf{m}}.$$

$$\mathcal{S}_{\tau} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{-\mathbf{m}\} = \mathcal{S}_{\sigma_2} + \mathbb{Z}\{\mathbf{m}\}$$

eşitlikleri sağlanır [34, Lemma 1.2.13].

3. Önerme 3.5.7 ile $U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}$ afin çeşitlemlerinin temel açık kümeleri $(U_{\sigma_1})_{\chi^{\mathbf{m}}}, (U_{\sigma_2})_{\chi^{-\mathbf{m}}}$ U_{τ} afin simitli çeşitlemine izomorftur:

$$(U_{\sigma_1})_{\chi^{\mathbf{m}}} \overset{g_{\sigma_1}}{\simeq} U_{\tau} \overset{g_{\sigma_2}}{\simeq} (U_{\sigma_2})_{\chi^{-\mathbf{m}}}.$$

4. Her $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ için $U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}$ afin simitli çeşitlemleri $(U_{\sigma_1})_{\chi^{\mathbf{m}}}, (U_{\sigma_2})_{\chi^{-\mathbf{m}}}$ temel afin açık kümeleri boyunca

$$g_{\sigma_1\sigma_2} : (U_{\sigma_1})_{\chi^{\mathbf{m}}} \to (U_{\sigma_2})_{\chi^{-\mathbf{m}}},\ g_{\sigma_1\sigma_2} = g_{\sigma_2} \circ g_{\sigma_1}$$

izomorfizması ile yapıştırılabilir, çünkü çeşitlem tanımındaki şartlar sağlanır. Bu çeşitlemi X_{Σ} ile gösterelim.

Teorem 4.3.3. *Σ, $N_{\mathbb{R}}$ vektör uzayında bir fan olmak üzere X_{Σ} çeşitlemi normal simitli çeşitlemdir ve simiti T olmak üzere $T \simeq T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}^*$. Üstelik bütün normal simitli çeşitlemler bu şekilde ortaya çıkar, yani her normal simitli çeşitlem bir fan ile belirlenir.*

Örnek 4.3.4. *$N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ vektör uzayının içerdiği rasyonel güçlü koniler*

$$\sigma_0 = Koni(e_1),\ \sigma_1 = Koni(e_1),\ \tau = \{0\}.$$

Bu sebeple $\mathbb{R}$ vektör uzayında 4 tane fan vardır:

$$\Sigma_1 = \{\tau\}$$

$$\Sigma_2 = \{\sigma_0, \tau\}$$

$$\Sigma_3 = \{\sigma_1, \tau\}$$

$$\Sigma_4 = \{\sigma_0, \sigma_1, \tau\}$$

Bu fanlara karşılık gelen simitli çeşitlemleri bulalım.

1. $\tau^{\vee} = Koni(e_1, -e_1) \to \mathbb{K}[x^{\pm}] \to X_{\Sigma_1} = U_\tau = V(x_1x_2 - 1) \simeq \mathbb{K}^*$.
2. ${\sigma_0}^{\vee} = Koni(e_1) \to \mathbb{K}[x] \to U_{\sigma_0} = \mathbb{K}$. $X_{\Sigma_2} \simeq U_{\sigma_0} = \mathbb{K}$ *olur, çünkü* $\tau \subset \sigma_1$.
3. ${\sigma_1}^{\vee} = Koni(-e_1) \to \mathbb{K}[x^{-1}] \to U_{\sigma_1} = \mathbb{K}$. *Benzer şekilde* $\tau \subset \sigma_1$ *olduğundan* $X_{\Sigma_3} \simeq \mathbb{K}$.
4. σ_0, σ_1 *konilerinin ortak yüzü* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \tau$ *konisidir ve* $\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_{\sigma_0} + \mathbb{Z}\{e_1\} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{-e_1\}$. $x^{-1} = y$ *olmak üzere* $U_{\sigma_0} \simeq \mathbb{K} \simeq U_{\sigma_1}$ *afin çeşitlemleri*
$$g_{12}^* : \mathbb{K}[y]_y \simeq \mathbb{K}[x]_x,\ y \mapsto x^{-1}$$

$$g_{12} : (U_{\sigma_0})_x = \mathbb{K}^* \to (U_{\sigma_1})_y = \mathbb{K}^*,\ g_{12}(p) = 1/p$$

izomorfizması ile yapıştırılırsa X_{Σ_2} simitli çeşitlemi elde edilir:

$$U_{\sigma_0} \sqcup U_{\sigma_1} = \{(1,p), (p,1) \mid p \in \mathbb{K}\}$$

kümesinde

$$\forall\, p \in \mathbb{K}^*\ i\c{c}in\, (1,p) \sim (1/p, 1)$$

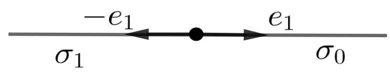
denklik bağıntısının ayrık denklik sınıflarının kümesi

$$X_{\Sigma_2} = U_{\sigma_0} \sqcup U_{\sigma_1}/\sim = \{\overline{(1,p)} \mid p \in \mathbb{K}\} \cup \{\overline{(0,1)}\}$$

şeklindedir ve $\mathbb{P}^1$ *projektif uzayı*

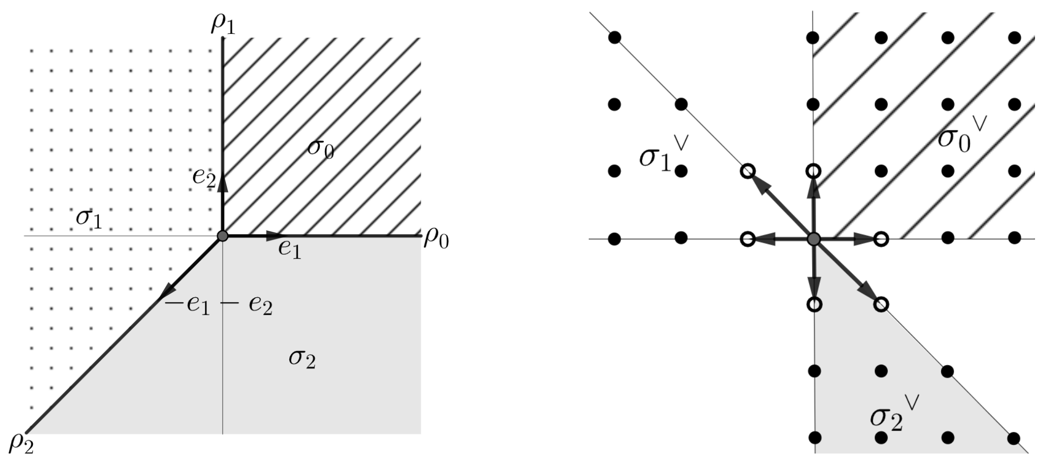
$$\mathbb{P}^1 = \{[1 : p] \mid p \in \mathbb{K}\} \cup \{[0 : 1]\}$$

verir. Bu çeşitlem ve $\mathbb{P}^1$ *projektif uzayın afin parçaları ve izomorfizmaları aynıdır, dolayısıyla* $X_{\Sigma_2} \simeq \mathbb{P}^1$.



$\mathbb{P}^1$ projektif uzayına karşılık gelen fan

Örnek 4.3.5. $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \tau = \{0\}\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^2$ *vektör uzayında bir fandır.* Σ *fanı ve bu fandaki konilerin dual konileri kafes noktaları ile aşağıda verilmiştir:*



(a) $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ (b) $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee, \sigma_2^\vee$

Σ *fanınına karşılık gelen* X_Σ *simitli çeşitlemi*

$$U_{\sigma_0} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma_0}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathbb{N}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1, x_2]) \simeq \mathbb{K}^2$$

$$U_{\sigma_1} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma_1}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathbb{N}\{-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1\}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1}]) \simeq \mathbb{K}^2$$

$$U_{\sigma_2} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\sigma_2}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[\mathbb{N}\{-\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_2^{-1}, x_1 x_2^{-1}]) \simeq \mathbb{K}^2$$

afin çeşitlemleri ile örtülür. Bu afin çeşitlemler aşağıda verilen izomorfizmlar ile yapıştırılarak X_Σ *simitli çeşitlemi elde edilir:* $y = x_1^{-1}, z = x_2 x_1^{-1}, v = x_1 x_2^{-1}, w = x_2^{-1}$ *olsun.*

1. σ_0, σ_1 konilerinin ortak yüzü $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \rho_1$ konisidir ve $\mathcal{S}_{\rho_1} = \mathcal{S}_{\sigma_0} + \mathbb{Z}\{-\boldsymbol{e}_1\} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{\boldsymbol{e}_1\}$. Bu sebeple $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_1}$ afin simitli çeşitlemleri

$$(U_{\sigma_0})_{x_1} \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}, (U_{\sigma_1})_y \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

afin açıkları boyunca

$$g_{01}^* : \mathbb{K}[y, z]_y \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2]_{x_1},\ y \mapsto x_1^{-1},\ z \mapsto x_2 x_1^{-1}$$

$$g_{01} : (U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq (U_{\sigma_1})_y,\ (p_1, p_2) \mapsto (1/p_1, p_2/p_1)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır.

2. σ_1, σ_2 konilerinin ortak yüzü $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \rho_2$ konisidir ve $\mathcal{S}_{\rho_2} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{-(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)\} = \mathcal{S}_{\sigma_2} + \mathbb{Z}\{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1\}$. Bu sebeple $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_2}$ afin simitli çeşitlemleri

$$(U_{\sigma_1})_z \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*, (U_{\sigma_2})_v \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$$

afin açıkları boyunca

$$g_{12}^* : \mathbb{K}[w, v]_v \simeq \mathbb{K}[y, z]_z,\ w \mapsto yz^{-1}\ v \mapsto z^{-1}$$

$$g_{12} : (U_{\sigma_1})_z \simeq (U_{\sigma_2})_v,\ (p_1, p_2) \mapsto (p_1/p_2, 1/p_2)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır.

3. σ_0, σ_2 konilerinin ortak yüzü $\sigma_0 \cap \sigma_2 = \rho_0$ konisidir ve $\mathcal{S}_{\rho_0} = \mathcal{S}_{\sigma_0} + \mathbb{Z}\{-\boldsymbol{e}_2\} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{\boldsymbol{e}_2\}$. Bu sebeple $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_2}$ afin simitli çeşitlemleri

$$(U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*, (U_{\sigma_2})_w \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

afin açıkları boyunca

$$g_{02}^* : \mathbb{K}[w, v]_w \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2]_{x_2},\ w \mapsto x_2^{-1},\ v \mapsto x_1 x_2^{-1}$$

$$g_{02} : (U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq (U_{\sigma_2})_w,\ (p_1, p_2) \mapsto (1/p_2, p_1/p_2)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır. Örnek 4.2.1'de $\mathbb{P}^2$ projektif uzayın afin çeşitlemlerin yapış-

tırılması ile elde edildiğini vermiştik. X_Σ simitli çeşitlemin afin çeşitlemleri ve yapıştırıldığı izomorfizmler $\mathbb{P}^2$ projektif uzayı ile aynıdır, dolayısıyla $X_\Sigma \simeq \mathbb{P}^2$. Genel olarak düşünürsek $N = \mathbb{Z}^n$ ve Σ, $N_\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ vektör uzayında

$$\{\boldsymbol{e}_0 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \cdots - \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset N$$

alt kümesinin tüm özalt kümelerinin ürettiği konilerden oluşan fan olsun. $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ olmak üzere

$$\sigma_i = Koni(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

fandaki maksimum boyutlu (n-boyutlu) konilerdir. Dual konileri ve karşılık gelen afin simitli çeşitlemler aşağıda verilmiştir:

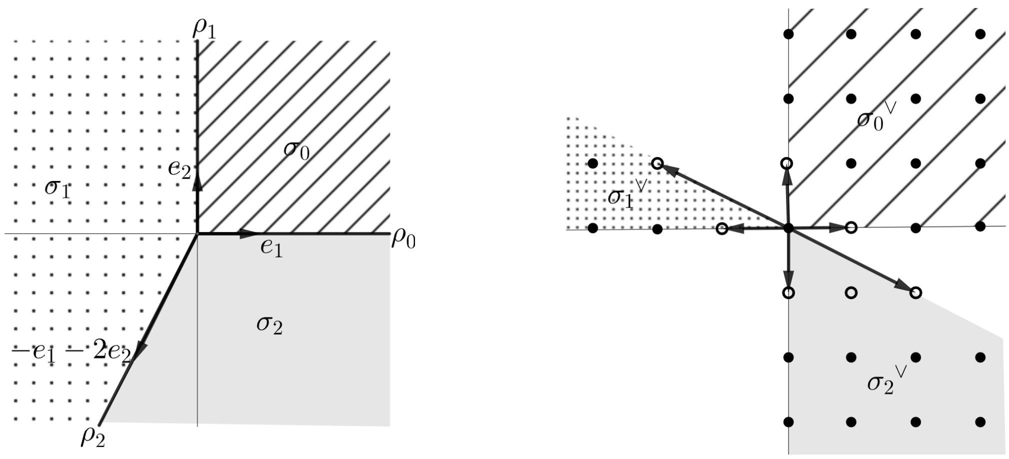
$${\sigma_0}^\vee = Koni(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n),\ U_{\sigma_0} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]) \simeq \mathbb{K}^n$$

$${\sigma_i}^\vee = Koni(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_i, \ldots, -\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_i),\ i \neq 0$$

$$U_{\sigma_i} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1 x_i^{-1}, \ldots, x_i^{-1}, \ldots, x_n x_i^{-1}]) \simeq \mathbb{K}^n.$$

Σ fanının tanımladığı izomorfizmler ile bu afin simitli çeşitlemler yapıştırılarak $\mathbb{P}^n$ projektif uzayı elde edilir.

Örnek 4.3.6. *$N_\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ vektör uzayında $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \tau = \{0\}\}$ fanına karşılık gelen simitli çeşitlemin $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ ağırlıklı projektif uzay olduğunu gösterelim: Σ fanı ve bu fandaki konilerin dual konileri kafes noktaları ile aşağıda verilmiştir:*



(a) $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ (b) ${\sigma_0}^\vee, {\sigma_1}^\vee, {\sigma_2}^\vee$

X_Σ *simitli çeşitleminin afin parçaları* $y = x_1^{-1}, z = x_2x_1^{-1}, w = x_2^{-1}, v = x_1x_2^{-1}$ *olmak üzere*

$$U_{\sigma_0} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1, x_2]) \simeq \mathbb{K}^2$$

$$U_{\sigma_1} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_1^{-1}, x_2x_1^{-2}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[y, z]) \simeq \mathbb{K}^2$$

$$U_{\sigma_2} = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[x_2^{-1}, x_1^2x_2^{-1}, x_1x_2^{-1}]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{K}[v, w, w^2v^{-1}])$$

afin simitli çeşitlemleridir. $U_{\sigma_2} \simeq V(y_1y_3 - y_1^2) \subset \mathbb{K}^3$, *çünkü*

$$\phi^* : \mathbb{K}[y_1, y_2, y_3] \to \mathbb{K}[v, w, w^2v^{-1}],\ y_1 \mapsto v, y_2 \mapsto w, y_3 \mapsto w^2v^{-1}$$

$\mathbb{K}$*-cebir homomorfizmasıdır ve çekirdeği* $\langle y_1y_3 - y_1^2\rangle$ *idealidir.* $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}$ *afin simitli çeşitlemleri* Σ *fanının tanımladığı aşağıdaki izomorfizmler ile yapıştırılır.*

1. σ_0, σ_1 *konilerinin ortak yüzü* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \rho_1$ *konisidir ve* $\mathcal{S}_{\rho_1} = \mathcal{S}_{\sigma_0} + \mathbb{Z}\{-\mathbf{e}_1\} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{\mathbf{e}_1\}$. *Bu sebeple* $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_1}$ *afin simitli çeşitlemleri*

$$(U_{\sigma_0})_{x_1} \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}, (U_{\sigma_1})_y \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

afin açıkları boyunca

$$g_{01}^* : \mathbb{K}[y, z]_y \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2]_{x_1},\ y \mapsto x_1^{-1},\ z \mapsto x_2x_1^{-1}$$

$$g_{01} : (U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq (U_{\sigma_1})_y,\ (p_1, p_2) \mapsto (1/p_1, p_2/p_1)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır.

2. σ_1, σ_2 *konilerinin ortak yüzü* $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \rho_2$ *konisidir ve* $\mathcal{S}_{\rho_2} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{-(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1)\} = \mathcal{S}_{\sigma_2} + \mathbb{Z}\{\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1\}$. *Bu sebeple* $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_2}$ *afin simitli çeşitlemleri*

$$(U_{\sigma_1})_z \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*, (U_{\sigma_2})_{y_3} \simeq V(y_1y_3 - y_1^2)_{y_3}$$

afin açıkları boyunca

$$g_{12}^* : \mathbb{K}[w, v, v^2w^{-1}]_{v^2w^{-1}} \simeq \mathbb{K}[y, z]_z,\ w \mapsto y^2z^{-1},\ v \mapsto z^{-1}y,\ v^2w^{-1} \mapsto z^{-1}$$

$$g_{12} : (U_{\sigma_1})_z \simeq (U_{\sigma_2})_{y_3},\ (p_1, p_2) \mapsto (p_1^2/p_2, p_1/p_2, 1/p_2)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır.

3. σ_0, σ_2 *konilerinin ortak yüzü* $\sigma_0 \cap \sigma_2 = \rho_0$ *konisidir ve* $\mathcal{S}_{\rho_0} = \mathcal{S}_{\sigma_0} + \mathbb{Z}\{-\mathbf{e}_2\} = \mathcal{S}_{\sigma_1} + \mathbb{Z}\{\mathbf{e}_2\}$. *Bu sebeple* $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_2}$ *afin simitli çeşitlemleri*

$$(U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*, (U_{\sigma_2})_{y_1} \simeq V(y_1y_3 - y_1^2)_{y_1}$$

afin açıkları boyunca

$$g_{02}^* : \mathbb{K}[w, v, v^2w^{-1}]_w \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2]_{x_2},\ w \mapsto x_2^{-1},\ v \mapsto x_1x_2^{-1},\ v^2w^{-1} \mapsto x_1^2x_2^{-1}$$

$$g_{02} : (U_{\sigma_0})_{x_2} \simeq (U_{\sigma_2})_{y_1},\ (p_1, p_2) \mapsto (1/p_2, p_1/p_2, p_1^2/p_2)$$

izomorfizmi ile yapıştırılır. Örnek 4.2.2 ile $X_\Sigma \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$ *olduğu açıktır.*

Σ fanının özelliklerinden faydalanılarak tanımladığı X_Σ simitli çeşitleminin özelliklerini daha kolay bir şekilde öğrenebiliriz. Teorem 4.3.8 tanım olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.3.7. Σ, *$N_\mathbb{R}$ vektör uzayında bir fan olsun.*

1. *Eğer* $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_\mathbb{R}$ *ise* Σ *fanına* ***tam*** *denir.*

2. *Her* $\sigma \in \Sigma$ *simpleksel (düzgün) ise* Σ *fanına* ***simpleksel (düzgün)*** *denir.*

Teorem 4.3.8. Σ, *$N_\mathbb{R}$ vektör uzayında bir fan olsun. Bu durumda*

(i) X_Σ *simitli çeşitlemi tamdır* $\Longleftrightarrow$ Σ *fanı tamdır.*

(ii) X_Σ *simitli çeşitlemi düzgündür* $\Longleftrightarrow$ Σ *fanı düzgündür.*

(iii) X_Σ *simitli çeşitlemi simplekseldir* $\Longleftrightarrow$ Σ *fanı simplekseldir.*

4.4 Asal Bölenler

Tanım 4.4.1. *X indirgenemez çeşitlemi ve $D \subset X$ indirgenemez alt çeşitlemi verilsin. Eğer* $\operatorname{boy} D = \operatorname{boy} X - 1$ *ise D çeşitlemine* ***asal bölen*** *denir.*

Asal bölen tanımını afin uzayda yorumlayalım. V indirgenemez afin çeşitlem ve D bir asal böleni olsun. D çeşitlemini bir $I \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ asal ideali tanımlar: $D = V(I)$. Diğer yandan

$$\operatorname{ht} I + \operatorname{boy} D = r$$

$$\operatorname{ht} I(V) + \operatorname{boy} V = r$$

eşitliklerinden dolayı $\operatorname{ht} I = \operatorname{ht} I(V) + 1$. Sonuç olarak V afin çeşitleminin asal bölenleri ile S polinom halkasının yüksekliği $\operatorname{ht} I(V) + 1$ olan $I(V)$ idealini içeren asal idealleri (veya $\mathbb{K}[V]$ koordinat halkasının yüksekliği 1 olan asal idealleri) arasında birebir ve örten ilişki vardır. Özel olarak $V = \mathbb{K}^r$ alırsak S polinom halkasının yüksekliği 1 olan idealleri $\mathbb{K}^r$ afin uzayının asal bölenlerini tanımlar.

Tanım 4.4.2. *X indirgenemez çeşitleminin asal bölenleri tarafından üretilen serbest grubunu $Div(X)$ ile gösterelim. $Div(X)$ grubunun her elemanına X çeşitleminin* ***Weil böleni*** *denir:*

$$Div(X) = \left\{ \sum_i z_i D_i \mid D_i \subset X \textit{ asal bölen}, \; z_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Şimdi $\mathrm{Div}(X)$ grubunun bir alt kümesini rasyonel fonksiyonlar aracılığıyla tanımlayacağız. X indirgenemez normal bir çeşitlem, D bir asal böleni olsun. X çeşitleminin bir $f \neq 0$ rasyonel fonksiyonunun D üzerinde sıfırlama mertebesi $v_D(f)$ ile gösterilir. Eğer $v_D(f) > 0$ (veya $v_D(f) < 0$) ise f fonksiyonu D boyunca $v_D(f)$ (veya $|v_D(f)|$) katlı **köke** (veya **kutba**) sahip denir. $v_D(f)$ sonlu sayıda asal bölenler hariç sıfır değerini alır. Bu gösterimler altında aşağıdaki tanımları verelim:

Tanım 4.4.3. *$f \in \mathbb{K}(X)^*$ rasyonel fonksiyonunun* ***böleni***

$$div(f) = \sum_{D \subset X} v_D(f) D$$

şeklinde tanımlanır. $div(f)$ bir Weil bölendir, yani $div(f) \in Div(X)$. Bir Weil bölen $div(f)$ formunda ise ***esas bölen*** *denir, bütün esas bölenlerin kümesi $Div_0(X)$ ile gösterilir:*

$$Div_0(X) = \{div(f) \mid f \in \mathbb{K}(X)^*\} \subset Div(X).$$

Verilen $f, g \in \mathbb{K}(X)^*$ için $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$ ve $\mathrm{div}(f^{-1}) = -\mathrm{div}(f)$. Böylece $\mathrm{Div}_0(X)$, $\mathrm{Div}(X)$ grubunun alt grubudur.

Örnek 4.4.4. *$\mathbb{P}$ projektif uzayda $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{x_1 - x_2}{x_2}\right)^2$ rasyonel fonksiyonu verilsin.*

$\mathbb{P}$ *projektif uzayın asal bölenleri tek elemanlı alt kümeleridir ve*

$$v_D(f) = \begin{cases} 2, & D = D_1 \\ 1, & D = D_2 \\ -3, & D = D_3 \\ 0, & D \notin D_1, D_2, D_3 \end{cases}$$

, burada $D_1 = \{[1:1]\}$, $D_2 = \{[1:0]\}$, $D_3 = \{[0:1]\}$. *Bu takdirde*

$$div(f) = 2D_1 + D_2 - 3D_3 \in Div_0(\mathbb{P}).$$

Örnek 4.4.5. $X = \mathbb{P}^2$ *projektif uzayının* $f = \frac{(x_1^2+x_2^2-x_3^2)^2}{x_1^3 x_2}$ *rasyonel fonksiyonunun bölenini bulalım:* $D_1 = V(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$, $D_2 = V(x_1)$, $D_3 = V(x_2)$ *olmak üzere*

$$v_D(f) = \begin{cases} 2, & D = D_1 \\ -3, & D = D_2 \\ -1, & D = D_3 \end{cases}.$$

Böylece $div(f) = 2D_1 - 3D_2 - D_3 \in Div_0(\mathbb{P})$.

Önerme 4.4.6. *[30, Önerme 1.12.A] R bir Noetherian halkası olsun. R'nin tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olması için gerek ve yeter şart 1 boyutlu her idealinin esas ideal olmasıdır.*

Önerme 4.4.7. *[30, Önerme 1.13] D,* $\mathbb{K}^r$ *afin uzayda asal bölen olması için ve gerek ve yeter şart bir* $f \in S$ *indirgenemez polinomu için* $D = V(f)$ *şeklinde yazılmalıdır.*

Örnek 4.4.8. *Yukarıda verilen önerme sonucunda* $\mathbb{K}^r$ *afin uzayının her asal böleni bir* $f \in S$ *indirgenemez polinomu için* $V(f)$ *formundadır. Bu sebepten her* $i \in [k]$, $j \in [k']$ *için* $f_i, g_j \in S$ *polinomları indirgenemez olmak üzere*

$$\phi = \frac{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}}{g_1^{z_1} \cdots f_k^{z'_k}}$$

rasyonel fonksiyonunun böleni

$$div(\phi) = n_1V(f_1) + \cdots + n_kV(f_k) - z_1V(g_1) - \cdots - z'_kV(g'_k) \in Div_0(\mathbb{K}^r).$$

Tanım 4.4.9. *X indirgenemez normal çeşitlemi verilsin.*

*(i) $D, D' \subset X$ asal bölenlerinin farkı esas bölen ise iki asal bölen **lineer denktir** denir ve $D \sim D'$ ile gösterilir: $\exists f \in \mathbb{K}(X)^*$ için $D - D' = div(f) \Rightarrow D \sim D'$.*

*(ii) $\mathrm{Cl}(X) = Div(X)/Div_0(X)$ grubuna X çeşitleminin **bölüm grubu** denir.*

Örnek 4.4.10. *D, $\mathbb{K}^r$ afin uzayının bir asal böleni olsun: Bir $f \in S$ indirgenemez polinomu için $D = V(f)$. f polinomunun böleni*

$$div(f) = v_D(f)D = D$$

olduğundan her asal bölen esas bölendir. Bu sebepten $\mathrm{Cl}(X) = \emptyset$.

Aşağıda verilen teorem örnekteki durumu genel olarak ifade etmiştir.

Teorem 4.4.11. *R tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi ve $X = \mathrm{Specm}(R)$ olsun. Bu takdirde $\mathrm{Cl}(X) = \emptyset$.*

Örnek 4.4.12. *$X = (\mathbb{K}^*)^r$ simiti için $\mathrm{Cl}(X) = \emptyset$, çünkü*

$$\mathbb{K}[(\mathbb{K}^*)^r] = \mathbb{K}[x_1^{\pm}, \ldots, x_r^{\pm}] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]_{x_1 \cdots x_r}$$

ve tek türlü çarpanlara ayırma bölgesinin yerelleştirilmesi de tek türlü çarpanlara ayırma bölgesidir.

Simitli çeşitlemler üzerinde simitin cebirsel etkisi olduğundan, bu etki altında sabit asal bölenler kullanılarak simitin karakterlerinin bölenleri tanımlanmıştır. $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ vektör uzayındaki Σ fanının tanımladığı simitli çeşitlem X_Σ olsun. Bu takdirde $\operatorname{boy} X_\Sigma = n$'dir. X_Σ simitli çeşitlemi ve D asal böleni verilsin. X_Σ simitli çeşitleminin simiti T olmak üzere $DT = D$ ise D asal bölenine T-**sabit asal bölen** denir. Σ fanının her 1-boyutlu konisi (ışını) X_Σ simitli çeşitleminin T grubunun etkisinde bir $\dim X - 1$-boyutlu yörüngesine karşılık gelir. Her $\rho \in \Sigma(1)$ ışını için karşılık gelen

$\dim X - 1$-boyutlu yörüngenin Zariski kapanışı bir sabit asal bölendir ve D_ρ ile gösterilir. T simitinin karakter grubu M kafesine izomorf olsun. T simiti açık bir küme ve her $\mathbf{m} \in M$ için $\chi^{\mathbf{m}}$ karakteri T üzerinde rasyonel fonksiyon olduğu için $\chi^{\mathbf{m}} \in \mathbb{K}(X_\Sigma)$. Σ fanındaki her ρ ışınının ilkel üreteci $\mathbf{v}_\rho$ ile gösterilir. Bu gösterimleri kullanarak aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 4.4.13. *X_Σ simitli çeşitleminin simitinin herhangi bir karakteri $\chi^{\boldsymbol{m}}$ olsun.*

(i) $v_{D_\rho}(\chi^{\boldsymbol{m}}) = \langle \boldsymbol{m}, \mathbf{v}_\rho \rangle$.

(ii) $div(\chi^{\boldsymbol{m}}) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle \boldsymbol{m}, \mathbf{v}_\rho \rangle D_\rho$

Her $\sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho D_\rho$ toplamı X_Σ simitli çeşitleminin Weil bölenidir, ayrıca her sabit Weil böleni bu formdadır. Böylece

$$\mathrm{Div}_{T_N}(X_\Sigma) = \left\{ \sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho D_\rho \mid z_\rho \in Z \right\} \in \mathrm{Div}(X_\Sigma)$$

kümesi X_Σ simitli çeşitleminin T_N-sabit Weil bölenlerinin grubudur.

Teorem 4.4.14. *Birinci dönüşüm $\boldsymbol{m} \mapsto div(\chi^{\boldsymbol{m}})$ ve ikinci dönüşüm $\sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho D_\rho \mapsto [\sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho D_\rho]$ olmak üzere*

$$M \longrightarrow Div_T(X_\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Ayrıca aşağıda verilen dizinin tam dizi olması için gerek ve yeter şart $\{\mathbf{v}_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ kümesinin $N_\mathbb{R}$ vektör uzayını üretmesidir:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_T(X_\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0\ .$$

Sonuç 4.4.15. $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ *sonlu üretilmiş değişmeli bir gruptur.*

Her $\rho_i \in \Sigma(1)$ ışınına paralel olan T-sabit asal bölen D_i ile gösterilir.

Örnek 4.4.16. *$\sigma = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $U_\sigma = V(x_1x_2 - x_3)$ afin simitli çeşitlemi, σ konisi ve bütün yüzlerinden oluşan*

$$\Sigma = \{\sigma, \tau = \{0\}, \rho_1 = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \rho_2 = Koni(\mathbf{e}_2)\}$$

fanına karşılık gelir. $T \subset U_\sigma$ *simitinin karakter grubu* $\mathbb{Z}\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}^2$ *kafesine izomorf olduğundan Teorem 4.4.14 gereği*

$$\boldsymbol{m} \overset{\phi}{\mapsto} \langle \boldsymbol{m}, 2\mathbf{e}_1 - e_2 \rangle D_1 + \langle \boldsymbol{m}, e_2 \rangle D_2 = (2m_1 - m_2)D_1 + m_2 D_2$$

$$D_1 z_1 + D_2 z_2 \overset{\beta}{\mapsto} [D_1 z_1 + D_2 z_2]$$

olmak üzere

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} Div_{T_N}(U_\sigma) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(U_\sigma) \longrightarrow 0$$

tam dizidir. Bu durumda β *örten olup* $\mathrm{Cl}(U_\sigma) = Gör(\beta) = \{z_1[D_1] + z_2[D_2] \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$. *Her* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$ *için* $div(\chi^{\boldsymbol{m}}) = (2m_1 - m_2)D_1 + m_2 D_2 \in Gör(\phi)$ *ve* $Gör(\phi) = Çek(\beta)$. *Dolayısıyla* $\mathrm{Cl}(U_\sigma)$ *kümesinde* $2[D_2]$, $[D_2] - [D_1]$ *elemanları sıfıra eşittir ve*

$$\mathrm{Cl}(U_\sigma) = \{0 = 2[D_1], [D_1]\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Örnek 4.4.17. $X_\Sigma = \mathbb{P}^n$ *olmak üzere* Σ *fanının ışınlarının ilkel üreteçleri*

$$\boldsymbol{e}_0 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \cdots - \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{Z}^n = N$$

vektörleridir.Bu takdirde $M = \mathbb{Z}^n$ *ve*

$$\boldsymbol{m} \overset{\phi}{\mapsto} (-m_1 - m_2 - \cdots - m_n)D_0 + m_1 D_1 + \cdots + m_n D_n$$

$$D_0 z_0 + \cdots + D_n z_n \overset{\beta}{\mapsto} [D_0 z_0 + D_n z_n]$$

olmak üzere

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\phi} Div_{T_N}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0$$

tam dizidir. Bu tam diziden $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = Gör(\beta)$, *yani* $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n)$ *bölüm grubu* $[D_0], \ldots, [D_n]$ *elemanlarının ürettiği değişmeli gruptur. Diğer yandan her* $i \in [n]$ *için* $div(\chi^{\boldsymbol{e}_i}) = -D_0 + D_i \in Gör(\phi) = Çek(\beta)$ *olup,* $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n)$ *bölüm grubunda* $[D_0] = [D_i]$ *eşitliği mevcuttur. O halde*

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \{[D_0]z_0 \mid z_0 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

$$D_0 z_0 + \cdots D_n z_n \overset{\beta}{\mapsto} [D_0(z_0 + \cdots + z_n)].$$

Sonuç olarak yukarıda verilen tam dizi $\phi = [\boldsymbol{e}_0 \cdots \boldsymbol{e}_n]^T$ $\beta = [1\,1 \cdots\, 1]$ *olmak üzere*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

ile temsil edilebilir.

Yukarıda verilen örneklerde Teorem 4.4.14 ile normal simitli çeşitlemlerin bölüm grubu hesaplanmıştır. Bu hesaplama daha kolay hale getirilebilir. T, X_Σ simitli çeşitleminin simiti olsun. $T \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}^* \simeq (\mathbb{K}^*)^n$ olduğundan, T simitinin bir parametreli alt gruplar grubu ve karakter grubu $\mathbb{Z}^n$ kafesine izomorftur. Σ fanının ışınlarının ilkel üreteçleri $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{Z}^n$ olsun öyle ki bu vektörler $\mathbb{R}^n$ vektör uzayını üretsin. Bu durumda Teorem 4.4.14 ile $\mathscr{A} \simeq \mathrm{Cl}(X)$ olmak üzere

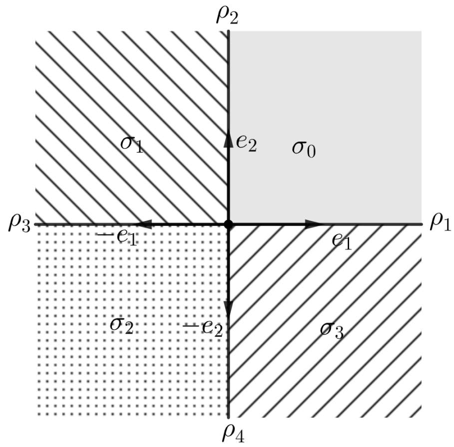
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\beta} \mathscr{A} \longrightarrow 0\,.$$

dizisi tamdır, burada ϕ matrisinin satırları Σ fanının ışınlarının ilkel üretecidir: $\phi = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r]^T$. Bu tam dizi gereğince $\mathscr{A}$ grubu ϕ matrisinin eş çekirdeğidir: $\mathscr{A} = \mathbb{Z}^r/\mathrm{Gör}(\phi)$. ϕ matrisinin Smith Normal formu hesaplanarak $\mathscr{A}$ grubu ve β matrisi bulunur. ϕ matrisinin Smith normal formu $D = \text{köşegen}[d_1, \ldots, d_n, 0, \ldots, 0]$ olmak üzere $P \in M_{r\times r}(\mathbb{Z})$, $K \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ unimodüler matrisleri($\det(P) = \pm 1, \det(K) = \pm 1$) mevcuttur öyle ki $D = P\phi K$. Böylece

$$\mathbb{Z}^r/\mathrm{Gör}(\phi) \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-n}.$$

Ayrıca varsayalım ki $\mathbb{Z}^r/\mathrm{Gör}(\phi)$ grubunun sıfırlayan elemanı olmasın. Bu takdirde $\mathbb{Z}^r/\mathrm{Gör}(\phi) \simeq \mathbb{Z}^{r-n}$ olup $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}^{r-n}$. $\mathbb{Z}^r/\mathrm{Gör}(\phi)$ grubunun sıfırlayan elemanı olmadığından Teorem 3.2.11 gereği $\mathrm{Gör}(\phi)$ kafesi doygundur ve satırları P matrisinin son $r-n$ satırı olan $(r-n)\times r$ alt matrisinin $\mathbb{Z}$-çekirdeği $\mathrm{Gör}(\phi)$ kafesine eşittir. Bu takdirde $\mathrm{Gör}(\phi) = \mathrm{Çek}(\beta)$ olduğundan P matrisinin son $r-n$ satırı olan $(r-n)\times r$ alt matrisi β matrisi olarak seçilebilir [36].

Örnek 4.4.18. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *kartezyen çarpımı aşağıda şekilde verilen* Σ *fanına karşılık gelen simitli çeşitlemdir.*



Şekil 7: $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$

Bu durumda Teorem 4.4.14 ile $\mathscr{A} \simeq \mathrm{Cl}(X)$ *olmak üzere*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\beta} \mathscr{A} \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır, burada ϕ *matrisinin satırları* Σ *fanının ışınlarının ilkel üretecidir:*

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T .$$

Bu tam dizi gereği $\mathscr{A}$ *grubu* ϕ *matrisinin eş çekirdeğidir:* $\mathscr{A} = \mathbb{Z}^4/G\ddot{o}r(\phi)$. ϕ *matrisinin Smith Normal formu hesaplanarak* $\mathscr{A}$ *grubu ve* β *matrisi bulunur.* ϕ *matrisinin Smith Normal formunu* `Macaulay2` *programı ile hesaplamak için* `smithNormalForm Phi` *komutu kullanılır:* $D = P\phi K$*, burada*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O halde $\mathscr{A} = \mathbb{Z}^2$ *ve* $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5 Bölüm Temsili

$\mathbb{P}^n$ projektif uzayın $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ kümesinin

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{p}' \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \ni \mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p}$$

denklik bağıntısına göre bölüm kümesi şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. $\mathbb{P}^n$ projektif uzay bir grubun yörüngeleri şeklinde de ifade edilebilir:

$$G = \{(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$$

grubu $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ kümesine

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} & \to & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ ((\lambda, \lambda, \ldots, \lambda), \mathbf{p}) & \mapsto & (\lambda p_1, \ldots, \lambda p_{n+1}) \end{array}$$

ile etkir ve G'nin $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$'deki yörüngelerinin birleşimi $\mathbb{P}^n$ uzayını verir:

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/G.$$

Projektif uzaya benzer şekilde daha genel simitli çeşitlemler de bu şekilde ifade edilebilir. Bu alt bölümde verilen daha genel bir normal simitli çeşitlemin bölüm temsili verilecektir.

Σ, $N_{\mathbb{R}}$ vektör uzayında bir fan olmak üzere Σ fanının ışınları $\rho_1, \ldots, \rho_r \in N_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in N$ ilkel vektörleriyle üretilsin. Eğer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ kümesi $N_{\mathbb{R}}$ vektör uzayını üretiyorsa Teorem 4.4.14 gereği

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{m} & \overset{\phi}{\mapsto} & (\langle \mathbf{m}, \mathbf{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{m}, \mathbf{v}_r \rangle) \\ \mathbf{z} & \overset{\beta}{\mapsto} & [z_1 D_1 + \cdots + z_r D_r] \end{array}$$

olmak üzere aşağıdaki dizi tamdır.

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0\,. \qquad (1)$$

Bu diziye $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{K}^*)$ faktörü uygulanarak aşağıdaki dizi elde edilir:

$$\mathfrak{P}^* : 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Cl}(X_\Sigma),\mathbb{K}^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^r,\mathbb{K}^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{K}^*) \longrightarrow 1 \qquad (2)$$

$\mathbb{K}^*$ bölünebilir (divisible) bir grup olduğundan injektif $\mathbb{Z}$-modüldür [38, Lemma 3.9, s. 195]. Böylece [38, Önerme 4.6, s. 202] gereği $\mathfrak{P}^*$ dual dizisi bir tam dizidir. Diğer yandan

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{K}^*) \simeq T_N$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^r,\mathbb{K}^*) \simeq (\mathbb{K}^*)^r$$

denklikleri mevcuttur. $G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Cl}(X_\Sigma),\mathbb{K}^*)$ olmak üzere $\mathfrak{P}^*$ tam dizisinden

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{K}^*)^r \longrightarrow T_N \longrightarrow 1$$

tam dizisi elde edilir. Bu takdirde $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ kümesi M kafesi için bir baz olmak üzere

$$\begin{aligned} G &= \{\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_r)\in(\mathbb{K}^*)^r \mid \forall\, \mathbf{m}\in M \text{ için } t_1^{\langle \mathbf{m},\mathbf{v}_1\rangle} t_2^{\langle \mathbf{m},\mathbf{v}_2\rangle}\cdots t_r^{\langle \mathbf{m},\mathbf{v}_r\rangle}=1\} \\ &= \{\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_r)\in(\mathbb{K}^*)^r \mid \forall\, i\in[n] \text{ için } t_1^{\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{v}_1\rangle} t_2^{\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{v}_2\rangle}\cdots t_r^{\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{v}_r\rangle}=1\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$T_N \simeq (\mathbb{K}^*)^r/G.$$

Böylece X_Σ simitli çeşitleminin simiti bölüm grubu ile ifade edilir. Bu alt bölümde yukarıda verilen notasyonlar kullanılacaktır.

Örnek 4.5.1. *$\mathbb{P}^n$ projektif uzayına karşılık gelen Σ fanının ışınlarının ilkel üreteçleri*

$$\boldsymbol{e}_0 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \cdots - \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{e}_1,\ \dots,\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{Z}^n \simeq N$$

vektörleridir ve $\{\boldsymbol{e}_1,\dots \boldsymbol{e}_n\}$ kümesi $\mathbb{Z}^n \simeq M$ kafesinin bir bazıdır. Bu takdirde

$$\begin{aligned} G &= \{\mathbf{t}=(t_0,\dots,t_n) \mid \forall\, \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n \textit{ için } t_0^{\langle \mathbf{m},\boldsymbol{e}_0\rangle} t_1^{\langle \mathbf{m},\boldsymbol{e}_1\rangle}\cdots t_r^{\langle \mathbf{m},\boldsymbol{e}_n\rangle}=1\} \\ &= \{\mathbf{t}=(t_0,\dots,t_n) \mid \forall\, \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n \textit{ için } t_0^{-m_1-\cdots-m_n} t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}=1\}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\mathbf{m}$ vektörünü $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\in\mathbb{Z}^n$ alırsak $t_0^{-1}t_1=\cdots=t_0^{-1}t_n=1$ elde edilir ve *buradan*

$$G = \{(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset (\mathbb{K}^*)^r.$$

$\mathbb{P}^n$ *projektif uzayının simitinin bölüm temsili* G *grubu ile tanımlanır.*

Yukarıda verilen örnekte tam diziler aracılığıyla projektif uzayın simitini G grubu aracılığıyla ifade edilmiştir. Diğer yandan $\mathbb{P}^n$ projektif uzayın G'nin $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$'deki yörüngelerinin birleşimi olduğunu hatırlayalım. Benzer şekilde herhangi normal simitli çeşitlemin simitinin bölüm temsili simitli çeşitlemin tamamı için genişletilebilir. Şimdi bu genelleştirilmeyi vermek için bazı notasyon ve tanımlar verilecektir.

Tanım 4.5.2. X_Σ *simitli çeşitlemi verilsin. Her* $\rho_i \in \Sigma(1)$ *ışını için* x_i *bir değişken olmak üzere*

$$S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$$

polinom halkasına X_Σ *simitli çeşitleminin* ***homojen koordinat halkası*** *denir.*

Σ fanında σ konisi verilsin. σ konisi Σ fanındaki başka bir koninin özalt kümesi değilse Σ fanının **maksimal** konisi denir. Σ fanının maksimal konilerinin kümesi $\Sigma_{max} \subset \Sigma$ ile gösterilir.

Tanım 4.5.3. X_Σ *simitli çeşitlemi verilsin. Her bir* $\sigma \in \Sigma$ *konisi için* S *polinom halkasında*

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho_i \notin \sigma(1)} x_i$$

monomu tanımlansın, burada $\sigma(1) = \{\rho \in \Sigma(1) \mid \rho \subset \sigma\}$.

$$B(\Sigma) = \langle \boldsymbol{x}^{\hat{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma_{max} \rangle \subset S$$

monom idealine ***bağıntısız (irrelevant) ideal*** *denir.*

Teorem 4.5.4. $N_\mathbb{R}$ *vektör uzayı üzerinde* Σ *fanı ve* X_Σ *simitli çeşitlemi verilsin. Eğer* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *kümesi* $N_\mathbb{R}$ *vektör uzayını üretiyorsa*

$$X_\Sigma \simeq (\mathbb{K}^r \setminus V(B(\Sigma)))/G$$

olması için gerek ve yeter koşul X_Σ *simitli çeşitleminin simpleksel olmasıdır.*

Teorem 4.5.4 gereği her $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^r \setminus V(B(\Sigma))$ elemanı için $G \cdot \mathbf{p}$ yörüngesi X_Σ simpleksel simitli çeşitleminde bir nokta verir, bu noktayı $[\mathbf{p}] = [p_1 : p_2 : \cdots : p_r] = G \cdot \mathbf{p}$ ile gösterelim:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{K}^r \setminus V(B(\Sigma)) &\rightarrow X_\Sigma \\ \mathbf{p} &\mapsto [\mathbf{p}] \end{aligned}$$

$G \cdot \mathbf{p}$ yörüngesinin elemanlarına $[\mathbf{p}] \in X_\Sigma$ noktasının **homojen koordinatları** denir.

Örnek 4.5.5. *$X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ olsun. Bu takdirde Örnek 4.4.18'den*

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad \textit{ve} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0\,,$$

bir tam dizidir. $\pi : (t_1, \ldots, t_4) \to [t_1 t_3^{-1}, t_2 t_4^{-1}]$ olmak üzere $\mathfrak{P}$ dizisinin duali de

$$\mathfrak{P}^* : 0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} (\mathbb{K}^*)^4 \xrightarrow{\pi} (\mathbb{K}^*)^2 \longrightarrow 0$$

tam dizidir. Buradan

$$G = \textit{Çek}(\pi) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^*\}.$$

Diğer yandan $B(\Sigma) \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ bağıntısız idealinin üreteçleri

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_0}} = \prod_{\rho_i \notin \sigma_0(1)} x_i = x_3 x_4$$

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_1}} = \prod_{\rho_i \notin \sigma_1(1)} x_i = x_1 x_4$$

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_2}} = \prod_{\rho_i \notin \sigma_2(1)} x_i = x_1 x_2$$

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_3}} = \prod_{\rho_i \notin \sigma_3(1)} x_i = x_2 x_3$$

monomlarıdır ve

$$\begin{aligned} V(B(\Sigma)) &= V(x_3x_4, x_1x_4, x_1x_2, x_2x_3) = V(x_1, x_3) \cup V(x_2, x_4) \\ &= (\{(0,0)\} \times \mathbb{K}^2) \cup (\mathbb{K}^2 \times \{(0,0)\}). \end{aligned}$$

Σ fanındaki her koni simpleksel olup X_Σ simplekseldir, dolayısıyla Teorem 4.5.4 ile G grubu $\mathbb{K}^4 \setminus V(B(\Sigma))$ kümesine

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\} &\to \mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\} \\ ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2), \mathbf{p}) &\mapsto (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \lambda_1 p_3, \lambda_2 p_4) \end{aligned}$$

ile etkir ve

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = (\mathbb{K}^4 \setminus V(B(\Sigma)))/G.$$

Örnek 4.5.6. *$w_1, \ldots, w_n$ pozitif tam sayıları verilsin.*

$$\{(-w_1\boldsymbol{e}_1 - w_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - w_n\boldsymbol{e}_n), \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset \mathbb{Z}^n$$

kümesinin özalt kümelerinin ürettiği konilerin oluşturduğu fan Σ olsun. X_Σ normal simitli çeşitleminin bölüm temsilcisini bulalım. Σ fanının ışınlarının ilkel üreteçleri $\mathbf{v}_0 = -w_1\boldsymbol{e}_1 - w_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - w_n\boldsymbol{e}_n, \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{v}_n = \boldsymbol{e}_n$ vektörleridir, dolayısıyla $\phi = [\mathbf{v}_0\, \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]^T$ olup

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

tam dizidir. Bu tam dizinin duali de tam dizidir:

$$\mathfrak{P}^* : 1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} (\mathbb{K}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{K}^*)^n \longrightarrow 1$$

öyle ki $\pi : \mathbf{t} \mapsto (t_0^{-w_1}t_1, t_0^{-w_2}t_2, \ldots, t_0^{-w_n}t_n)$. Bu tam dizilerden $\mathrm{Cl}(X_\Sigma) \simeq \mathscr{A} = \mathbb{Z}$ ve

$$G = \text{Çek}(\pi) = \{(t, t^{w_1}, t^{w_2}, \ldots, t^{w_n}) \mid t \in \mathbb{K}^*\} \simeq \mathbb{K}^*$$

elde edilir. Σ_{max} kümesi

$$\sigma_i = \text{Koni}(\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n),\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

konilerini içerir. O halde $V(B(\Sigma)) = V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{\mathbf{0}\}$ *eşitliği elde edilir.* $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{Z}^n$ *kümesinin her özalt kümesinin elemanları* $\mathbb{R}$*-lineer bağımsız olduğundan* Σ *fanı simplekseldir. Bu sebeple* X_Σ *simplekseldir ve* $X_\Sigma \simeq (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/G$*. Sonuç olarak* X_Σ *çeşitlemi*

$$[p_0 : p_1 : \cdots : p_n] = G \cdot (p_0, \ldots, p_n) = \{p_0 t, p_1 t^{w_1}, \ldots, p_n t^{w_n}\}$$

olmak üzere

$$X_\Sigma = \{[p_0 : p_1 : \cdots : p_n] \mid \mathbf{p} \neq \mathbf{0}\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu küme $\mathbb{P}(1, w_1, \ldots, w_n)$ *ağırlıklı projektif uzayın tanımını verir, bu yüzden* $X_\Sigma \simeq \mathbb{P}(1, w_1, \ldots, w_n)$.

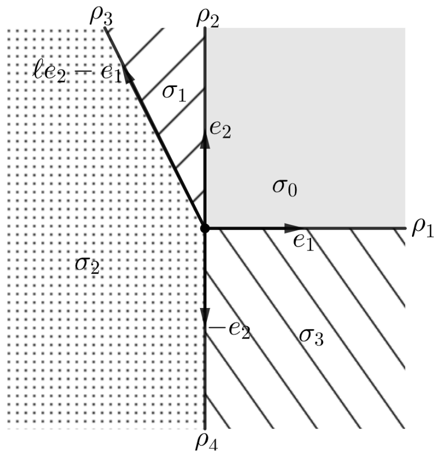
$\sigma \subset N_\mathbb{R}$ n-boyutlu koni olmak üzere U_σ afin simitli çeşitleminin simiti de bölüm temsili ile ifade edilebilir.

Örnek 4.5.7. $\sigma = Koni(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ *olmak üzere* $U_\sigma = V(x_1 x_3 - x_2^2)$ *afin simitli çeşitlemi verilsin.* U_σ *afin simitli çeşitleminin bölüm temsilini bulalım. Örnek 4.4.16'dan* Σ *fanının ışınları* $\rho_1 = Koni(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$, $\rho_2 = Koni(\boldsymbol{e}_2)$ *konileridir ve bu konilerin ilkel üreteçleri* $\mathbf{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ *ve* $\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{e}_2$ *vektörleridir. G çarpımsal grubu sonludur:*

$$\begin{aligned} G &= \{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \mid t_1^{\langle \boldsymbol{e}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} t_2^{\langle \boldsymbol{e}_1, \mathbf{v}_2 \rangle} = t_1^{\langle \boldsymbol{e}_2, \mathbf{v}_1 \rangle} t_2^{\langle \boldsymbol{e}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} = 1\} \\ &= \{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \mid t_1^2 = t_1^{-1} t_2 = 1\} = \{(1,1), (-1,-1)\} \subset (\mathbb{K}^*)^2. \end{aligned}$$

Diğer yandan Σ *fanı,* $\Sigma_{max} \subset \Sigma$ *alt kümesinin tek elemanı* σ *konisinin ışınları haricinde ışın ihtiva etmediğinden* $V(B(\Sigma)) = \emptyset$*. Bu takdirde* $U_\sigma \simeq \mathbb{K}^2/G$.

Örnek 4.5.8. *Aşağıda verilen* Σ *fanına karşılık gelen simitli çeşitlemi bölüm temsili ile belirleyelim.*



Şekil 8: $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ *uzayında* Σ *fanının ilkel ışın üreteçleri* $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,\ell)$ *ve* $\mathbf{v}_4 = (0,-1)$ *vektörleridir.* $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,\ell,-1)$ *ve* $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olsun.* $\phi = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$ *ve* $\pi : \mathbf{t} \mapsto (t_1 t_3^{-1}, t_2 t_3^{\ell} t_4^{-1})$ *olmak üzere aşağıdaki tam diziler mevcuttur:*

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\beta} \mathscr{A} \longrightarrow 0\ ,$$

$$\mathfrak{P}^* : 1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} (\mathbb{K}^*)^4 \xrightarrow{\pi} (\mathbb{K}^*)^2 \longrightarrow 1\ .$$

Bu takdirde $\mathrm{Cl}(X_\Sigma) \simeq \mathscr{A} = \mathbb{Z}^2$ *ve*

$$G = \textit{Çek}(\pi) = \{(t_1, t_2, t_1, t_1^{\ell} t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{K}^*\} \simeq (\mathbb{K}^*)^2.$$

Sonuç olarak, $T_X \simeq (\mathbb{K}^*)^2 \simeq (\mathbb{K}^*)^4/G$ *kümesi* X_Σ *simitli çeşitleminin simitidir. Ayrıca* $\mathfrak{P}$ *tam dizisinden* $L_\beta = \textit{Gör}\phi = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$*. Şimdi* $\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ *polinom halkasının bağıntısız idealini bulalım.* $B(\Sigma) \subset \mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ *bağıntısız idealini*

$$\boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_0}} = x_3x_4,\ \boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_1}} = x_1x_4, \boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_2}} = x_1x_2,\ \boldsymbol{x}^{\hat{\sigma_3}} = x_2x_3$$

monomları üretir, o halde

$$\begin{aligned} V(B(\Sigma)) &= V(x_1x_4, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4) = V(x_1,x_3) \cup V(x_2,x_4) \\ &= (\{0\} \times \mathbb{K} \times \{0\} \times \mathbb{K}) \cup (\mathbb{K} \times \{0\} \times \mathbb{K} \times \{0\}). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$X_\Sigma \simeq (\mathbb{K}^4 \setminus V(B(\Sigma)))/G.$$

*X_Σ normal simitli çeşitlemine **Hirzebruch yüzey** denir ve $\mathscr{H}_\ell$ ile gösterilir. $\ell = 0$ ise $\mathscr{H}_\ell = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ olur.*

4.6 Homojen Koordinatlar

Projektif ve afin uzayda verilen çeşitlem tanımı X_Σ simpleksel simitli çeşitleme de uyarlanabilir. $\mathscr{H}_\ell$ Hirzebruch yüzeyi için düşünelim: $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ homojen polinom halkasının herhangi bir polinomu ile çeşitlem tanımlanamaz, çünkü aynı noktada farklı değerler verebilir: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathscr{H}_2$ yüzeyinde $[1:1:1:1], [2:1:2:4]$ noktaları eşittir, çünkü $(1,1,1,1), (2,1,2,4)$ noktaları aynı G-yörüngededir: $(2,1,2,4) \in G(1,1,1,1) = G$. Fakat $f = x_1x_2 - x_3x_4$ olmak üzere $f(1,1,1,1) \neq f(2,1,2,4)$. Bu problemi çözmek için projektif uzaya benzer şekilde dereceli halka ile çalışmak gerekmektedir.

Σ, $N_\mathbb{R}$ vektör uzayında bir fan olmak üzere Σ fanının ışınları $\rho_1, \ldots, \rho_r \in N_\mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in N$ ilkel vektörleriyle üretilsin. Eğer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ kümesi $N_\mathbb{R}$ vektör uzayını üretiyorsa Teorem 4.4.14 gereği

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{m} & \overset{\phi}{\mapsto} & (\langle \mathbf{m}, \mathbf{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{m}, \mathbf{v}_r \rangle) \\ \mathbf{z} & \overset{\beta}{\mapsto} & [z_1 D_1 + \cdots + z_r D_r] \end{array}$$

olmak üzere aşağıdaki dizi tamdır.

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0\,. \tag{3}$$

X_Σ simitli çeşitleminin $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ koordinat halkasında her x_i değişkeninin derecesi bu tam dizi ile tanımlanır. Her $i \in [r]$ için x_i değişkeninin derecesi $\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^r$ elemanının β dönüşümü altında görüntüsü ile tanımlanır, yani $\mathrm{der}(x_i) = \beta\mathbf{e}_i = [D_i]$. Bu takdirde $\mathbf{x}^\mathbf{a}$ monomunun derecesi

$$\mathrm{der}(\mathbf{x}^\mathbf{a}) = \beta\mathbf{a} = [D_1 a_1 + \cdots + D_r a_r]$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$S = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Cl}(X_\Sigma)} S_\alpha,$$

$\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$-dereceli bir halkadır öyle ki S_α, derecesi $\alpha \in \mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ olan monomların ürettiği vektör uzayıdır.

Örnek 4.6.1. *Örnek 4.5.8'den $\mathscr{H}_\ell$ Hirzebruch yüzeyininin bölüm grubu $\mathbb{Z}^2$ kafesine izomorftur: $\mathrm{Cl}(\mathscr{H}_\ell) \simeq \mathbb{Z}^2$. Üstelik $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ koordinat halkasında değişkenlerin derecesi*

$$\mathrm{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_1) = \beta(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1,\ \mathrm{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_3) = \beta(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1$$

$$\mathrm{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_2) = \beta(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2,\ \mathrm{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_4) = \beta(\boldsymbol{e}_4) = \ell\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

olmak üzere $S = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} S_\alpha$.

Örnek 4.6.2. *$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ simitli çeşitleminin $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ koordinat halkası $\mathbb{Z}^2$-dereceli bir halkadır, çünkü Örnek 4.4.18'de $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}^2$. S polinom halkasında $\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}}$ monomunun derecesi β matrisi ile tanımlanır:*

$$\mathrm{der}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}}) = \beta\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \end{bmatrix}.$$

α, β matrisinin sütunlarının ürettiği afin yarıgrubunun bir elemanı değilse, yani $\alpha \notin \mathbb{N}\{(1,0),(0,1)\}$, S_α vektör uzayı boş kümedir.

Örnek 4.6.3. *Örnek 4.5.7'den $\sigma = Koni(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $U_\sigma = V(x_1x_3 - x_2^2)$ afin simitli çeşitlemi için $U_\sigma \simeq \mathbb{K}^2/G$ denkliği vardır, burada $G = \{(1,1),(-1,-1)\} \subset (\mathbb{K}^*)^2$. $\mathbf{z} \overset{\beta}{\mapsto} [D_1z_1 + D_2z_2]$ olmak üzere aşağıda verilen dizi tamdır:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\beta} \mathrm{Cl}(U_\sigma) \longrightarrow 0$$

Örnek 4.4.16'dan U_σ afin simitli çeşilemine karşılık gelen Σ fanının ışınları 2 tanedir, dolayısıyla homojen polinom halkasının 2 değişkeni vardır: $S = K[x_1, x_2]$. S homojen koordinat halkası $\mathrm{Cl}(U_\sigma)$-dereceli ve değişkenlerin dereceleri $\mathrm{der}(x_1) = \beta(\mathbf{e}_1) = [D_1]$, $\mathrm{der}(x_2) = \beta(\mathbf{e}_2) = [D_2]$ şeklindedir. Üstelik $\mathrm{Cl}(U_\sigma)$ kümesinde $2[D_2] = 0$, $[D_2] - [D_1] = 0$ olduğundan $\mathrm{der}(x_1) = \beta(\mathbf{e}_1) = \mathrm{der}(x_2) = \beta(\mathbf{e}_2) = [D_2]$. Sonuç olarak değişkenlerinin dereceleri $\bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olmak üzere $S = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} S_\alpha$ polinom halkası $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-dereceli *bir halkadır.*

Örnek 4.6.3'de derecesi birim eleman olan homojen polinomların vektör uzayı boştan farklıdır: $S_{\bar{0}} = \mathbb{K}[x_1^2, x_1x_2, x_2^2]$. Diğer yandan yukarıda verdiğimiz diğer örneklerde $S_{(0,0)}$ vektör uzayı sadece $\mathbb{K}$ cisminden oluşmaktadır. Bu durum farklı yollar ile karakterize edilebilir.

$\mathscr{A}$ bir grup ve S polinom halkası $\mathrm{der}(x_i) = a_i \in A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset \mathscr{A}$ olmak üzere $\mathscr{A}$-dereceli bir polinom halkası olsun. Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}A$ ise $S_\alpha = \emptyset$ olur. Ayrıca $\mathbb{Z}^r \to \mathscr{A}$, $e_i \mapsto a_i$ grup homomorfizmasının çekirdeği L_A kafesi olmak üzere $S_0 = \mathbb{K}[L_A \cap \mathbb{N}^r]$ [36].

Örnek 4.6.4. *$S = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ halkası $\mathscr{A} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-dereceli olsun öyle ki* $\mathrm{der}(x_1) = (1, \bar{1}), \mathrm{der}(x_2) = (-2, \bar{1}), \mathrm{der}(x_3) = (1, \bar{0})$. *$L_A \subset \mathbb{Z}^3$ kafesinin ve $L_A \cap \mathbb{N}^3$ yarıgrubunun bir bazları sırasıyla* $\{(2, 0, -2), (-1, 1, 3)\}$, $\{(4, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 4)\}$ *kümeleridir. Dolayısıyla*

$$S_{(0,0)} = \mathbb{K}[x_1^4x_2^2, x_1x_2x_3, x_2^2x_3^4]$$

olur.

Teorem 4.6.5. *[36, Theorem 8.6] $\mathscr{A}$ bir grup ve S polinom halkası* $\mathrm{der}(x_i) = a_i \in A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset \mathscr{A}$ *olmak üzere $\mathscr{A}$-dereceli bir polinom halkası olsun. $\mathscr{A}$ grubunun birim elemanı $\mathbf{0}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir.*

(i) Her $\alpha \in \mathscr{A}$ elemanı için S_α sonlu boyutlu $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır.

(ii) Derecesi $\mathbf{0}$ olan polinomlar sadece sabit polinomlardır.

(iii) Her $a_i \in A$ için S_{a_i} sonlu boyutlu $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır.

(iv) $L_A \cap \mathbb{N}^n = \{\mathbf{0}\}$, yani L_A kafesi ***pozitiftir****.*

(v) $\mathbb{N}A$ afin yarıgrubu güçlüdür ($\mathbb{N}A \cap (-\mathbb{N}A) = \{\mathbf{0}\}$) ve S polinom halkasının derecesi $\mathbf{0}$ olan değişkeni yoktur.

Tanım 4.6.6. *$\mathscr{A}$ bir değişmeli serbest grup olmak üzere, S, $\mathscr{A}$-dereceli polinom halkası Teorem 4.6.5'de verilen denk şartları sağlarsa* ***pozitif dereceli*** *polinom halkası denir.*

5 SİMİTLİ ÇEŞİTLEMLERİN PARAMETRİK ALT GRUPLARI

Σ, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir simpleksel tam fan olmak üzere Σ fanının ışınları $\rho_1, \ldots, \rho_r \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{Z}^n$ ilkel vektörleriyle üretilsin. Herhangi bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ fanına karşılık gelen X simitli çeşitlemi $T_X \simeq (\mathbb{K}^*)^n$ split simiti içersin. Varsayalım ki $\mathrm{Cl}(X)$ grubunun sıfırlayan elemanı olmasın. Bundan sonra bütün simitli çeşitlemler bu şekilde kabul edilecektir. Örneğin düzgün simitli çeşitlemlerin bölüm grubunun sıfırlayan elemanı yoktur [34, Önerme 4.2.5, Önerme 4.2.6]. Şimdi T_X simitinin geometrik bölüm temsilini aşağıdaki tam dizilerle inşa ederek hatırlayalım. Σ fanı tam olduğu için Teorem 4.4.14 gereği, $\phi = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r]^T = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ matrisi ve $\mathscr{A} \simeq \mathrm{Cl}(X)$ olmak üzere

$$\mathfrak{P} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\beta} \mathscr{A} \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Tam dizinin duali de tam olduğundan

$$\mathfrak{P}^* : 0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} (\mathbb{K}^*)^r \xrightarrow{\pi} T_X \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır, burada $\pi(t_1, \ldots, t_r) = [\mathbf{t}^{\mathbf{u}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{u}_n}]$ ve i doğal gömme fonksiyonudur. Bu takdirde

$$G = \text{Çek}(\pi) = \{\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^r \mid \forall\, \mathbf{m} \in \text{Gör}(\phi) = L_\beta \,\text{için}\, \mathbf{t}^{\mathbf{m}} = 1\}$$

olmak üzere $T_X \simeq (\mathbb{K}^*)^r/G$'dir.

X simitli çeşitleminin koordinat halkası $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olsun. $\mathrm{Cl}(X)$ grubunun sıfırlayan elemanı olmadığı için $\mathfrak{P}$ tam dizisinden $d = r - n$ olmak üzere $\mathscr{A} = \mathbb{Z}^d$'dir. $S = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} S_\alpha$ halkası her x_i değişkeni için $\mathrm{der}(x_i) = \beta(\mathbf{e}_i) = \beta_i \in \mathbb{Z}^d$ olmak üzere $\mathbb{Z}^d$-dereceli bir halkadır. $\alpha \notin \mathbb{N}\beta$ ise $\mathrm{boy}_{\mathbb{K}} S_\alpha = 0$ olur, yani S halkasının homojen polinomları $\beta_1, \ldots, \beta_r$ elemanlarının ürettiği $\mathbb{N}\beta$ afin yarıgrubu ile desteklenir. X tam bir çeşitlem olduğundan her α için S_α vektör uzayı sonlu boyutludur [34, Önerme 5.3.7, Önerme 4.3.8]. Diğer yandan $\mathscr{A}$ serbest grup olduğundan S pozitif dereceli polinom halkasıdır. Üstelik aşağıda verilen sonuç ile her $\beta_j \in \mathbb{N}^d$ şeklinde seçilebilir.

Sonuç 5.0.1. *[36, Sonuç 7.23] $\mathscr{A}$ kafesi ve $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset \mathscr{A}$ alt kümesi verilsin. $\mathbb{N}A$ afin yarıgrubu güçlü ise $\mathrm{rank}(\mathscr{A}) = d$ olmak üzere $\mathbb{N}A$ yarıgrubu $\mathbb{N}^d$ uzayına* *gömülebilir.*

$Y \subset X$ alt kümesi üzerinde sıfır değerini alan homojen polinomların ürettiği

$$I(Y) = \{f \in S \mid \forall\, [P] \in Y \text{ için } f(P) = 0,\ f \text{ homojen}\}$$

ideali homojen idealdir ve bu ideale Y'nin **sıfırlayan ideali** denir.

Bu bölüm $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde X simitli çeşitleminin parametrik simitli kümelerinin sıfırlayan idealleri üzerinedir. Bölümde [22] ve [23] makalelerinden faydalanılmıştır. Yukarıda verilen notasyon ve ifadeler tezin kalan kısmı boyunca kullanılacaktır.

Tanım 5.0.2. *Bir $Q = [\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_2 \cdots \boldsymbol{q}_r] \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$ matrisi verilsin.*

$$T_{X,Q} = \{[\mathbf{t}^{\boldsymbol{q}_1} : \cdots : \mathbf{t}^{\boldsymbol{q}_r}] \mid \mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s\} \subset T_X$$

kümesine Q matrisinin parametrelediği ***simitli küme*** *denir.*

Örnek 5.0.3. *X, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ üzerinde $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ simitli çeşitlemi ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $T_{X,Q}$ parametrik kümesini belirleyelim. Örnek 4.5.5'den*

$$G = \text{Çek}(\pi) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_3^*\} = \{(1,1,1,1), (1,2,1,2), (2,1,2,1), (2,2,2,2)\}$$

ve $T_X \simeq (\mathbb{K}^*)^2 \simeq (\mathbb{K}^*)^4/G$ elde edilir. Dolayısıyla

$$T'_Q = \{(\mathbf{t}^{\boldsymbol{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\boldsymbol{q}_4}) \mid \mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^4\} = \{(t_1t_2, t_2t_3, t_3t_4, t_1t_4) | \mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^4\}$$

olmak üzere $T_{X,Q} = T'_Q/G$'dir.

$$T'_Q = \{(1,1,1,1), (1,1,2,2), (1,2,2,1), (1,2,1,2), (2,2,1,1), (2,2,2,2), (2,1,2,1), (2,1,1,2)\}$$

kümesinde G grubunun aynı yörüngede olan elemanları belirleyelim. Sonuç olarak

$$[1:1:1:1] = G(1,1,1,1) = G,$$

$$[1:1:2:2] = \{(1,1,2,2),(2,1,1,2),(1,2,2,1),(2,2,1,1)\}$$

eşitliklerinden $T_{X,Q} = \{[1:1:1:1],[1:1:2:1]\}$ *olur.*

5.1 Eliminasyon Teori İle Sıfırlayan İdeal Bulma

Bu bölümde, $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin sıfırlayan idealinin üreteçlerini hesaplamak için algoritma veren bir yöntem verilecektir. Öncelikle, bu yöntemin ispatında kullanılan bazı temel teoremleri verelim.

Lemma 5.1.1. *[27, Lemma 2.1]* $\mathbb{K}$ *herhangi bir cisim ve* $f \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_s]$ *her* i *için* $\mathrm{der}_{x_i}(f) \leq k_i$ *şartını sağlayan bir polinom olsun. Her* $1 \leq i \leq s$ *için* $\mathbb{K}_i$*,* $\mathbb{K}$ *cisminin sonlu alt kümeleri olsun öyle ki* $|\mathbb{K}_i| \geq k_i + 1$ *şartını sağlasınlar. Eğer* f*,* $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \times \cdots \times \mathbb{K}_s$ *kümesinde sıfırlanıyorsa* $f = 0$*'dır.*

Teorem 5.1.2. *[25, Teorem 2, s.116]* $I \subset \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_k]$ *bir ideal ve* G*,* $x_1 > x_2 > \cdots > x_k$ *lex monom sıralamasına göre* I *idealinin bir Gröbner bazı olsun. Bu takdirde her* $0 \leq l \leq k$ *için*

$$G_l = G \cap \mathbb{K}[x_{l+1},\ldots,x_k]$$

kümesi $I_l = I \cap \mathbb{K}[x_{l+1},\ldots,x_k]$ l*. eliminasyon idealinin bir Gröbner bazıdır.*

$X = \mathbb{P}^n$ iken $S = \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, $\mathscr{A} = \mathbb{Z}$-dereceli bir halkadır öyle ki her değişkenin derecesi $\mathrm{der}_{\mathbb{Z}}(x_i) = \beta_i = 1$'dir. Projektif parametrik kümenin sıfırlayan idealini hesaplamak için bir yöntem [14, Teorem 2.1] makalesinde sunulmuştur. [20] çalışmasında aynı yöntemi Dias ve Neves, $\mathbb{P}(w_1,...,w_r)$ ağırlıklı projektif uzayın simiti için, yani Q birim matris, $\beta = [w_1,...,w_r]$ iken ispatlamışlardır. Aşağıdaki teoremde, bu yöntem daha genel simitli çeşitlemler için verilmiştir.

Teorem 5.1.3. $R = \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s,z_1,\ldots,z_d,w]$*,* S *polinom halkasının bir genişlemesi olsun. Bu takdirde*

$$J = \langle \{x_i\mathbf{y}^{\mathbf{q}_i^-}\boldsymbol{z}^{\beta_i^-} - \mathbf{y}^{\mathbf{q}_i^+}\boldsymbol{z}^{\beta_i^+}\}_{i=1}^r \cup \{y_i^{q-1}-1\}_{i=1}^s, w\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}\mathbf{z}^{\beta_1^-}\cdots\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}\mathbf{z}^{\beta_r^-} - 1\rangle.$$

olmak üzere $I(T_{X,Q}) = J \cap S$*'dir.*

İspat 2. *Birinci olarak* $I(T_{X,Q}) \subseteq J \cap S$ *kapsamasını kanıtlayalım.* $I(T_{X,Q})$ *homojen ideal olduğundan, homojen polinomlar üretir.* $I(T_{X,Q})$ *idealinin bir üretecini alalım:* $f =$

$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^{\mathbf{m}_i}$, $\operatorname{der}(f)=\alpha=\sum_{j=1}^{r}\beta_j m_{ij}$. *Binom teoremini kullanarak her* $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i}$ *monomunu*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i} &= x_1^{m_{i1}}\cdots x_r^{m_{ir}}\\
&= \left(x_1-\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^+}z^{\beta_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}}+\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^+}z^{\beta_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^+}}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(x_r-\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^+}z^{\beta_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_1^-}}+\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^+}z^{\beta_r^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}}\right)^{m_{ir}}\\
&= \sum_{j=1}^{r} g_{ij}\frac{x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}}{\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}\right)^{m_{ir}}}+\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^+}z^{\beta_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^+}z^{\beta_r^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}}\right)^{m_{ir}}\\
&= \sum_{j=1}^{r} g_{ij}\frac{x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}}{\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}\right)^{m_{ir}}}+z^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}}\right)^{m_{ir}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır öyle ki her $i\in[k]$ *için* $g_{i1},...,g_{ir}\in R$. f *polinomunun her* $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i}$ *monomunu bu şekilde yazarsak*

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{j=1}^{r} g_j\frac{x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}}{\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}\right)^{m_1'}\cdots\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}\right)^{m_r'}}+z^{\alpha}\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}}\right)^{m_{i1}}\cdots\left(\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^+}}{\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}}\right)^{m_{ir}}\\
&= \sum_{j=1}^{r} g_j\frac{x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}}{\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}z^{\beta_1^-}\right)^{m_1'}\cdots\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}z^{\beta_r^-}\right)^{m_r'}}+z^{\alpha}f(\mathbf{y}^{q_1},\ldots,\mathbf{y}^{q_r}),
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir, burada $g_j=\sum_{i=1}^{k}c_jg_{i,j}$ *ve* $m_j'=\sum_{i=1}^{k}m_{ij}$*'dir.* $m=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r}m_{ij}$ *ve* $h=\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}\mathbf{z}^{\beta_1^-}\cdots\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}\mathbf{z}^{\beta_r^-}$ *olmak üzere son eşitliği* h^m *monomu ile çarpmak*

$$fh^m=\sum_{j=1}^{r}G_j\left(x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}\right)+z^{\alpha'}\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}\cdots\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}\right)^m f(\mathbf{y}^{q_1},\ldots,\mathbf{y}^{q_r}),$$

ifadesini verir, burada

$$\alpha'=\sum_{j=1}^{r}\left[\beta_j^-(m-m_{ij})+\beta_j^+m_{ij}\right]\in\mathbb{N}^n,\quad G_j=g_j\prod_{j=1}^{r}\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}\right)^{m-m_j'}\in\ R.$$

Bölme algoritmasını kullanarak $F=\left(\mathbf{y}^{\mathbf{q}_1^-}\cdots\mathbf{y}^{\mathbf{q}_r^-}\right)^m f(\mathbf{y}^{q_1},\ldots,\mathbf{y}^{q_r})\in K[y_1,\ldots,y_s]$ *polinomunu* $\{{y_i}^{q-1}-1\}_{i=1}^{s}$ *binomlarına bölelim:*

$$fh^m=\sum_{j=1}^{r}G_i\left(x_j\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-}z^{\beta_j^-}-\mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+}z^{\beta_j^+}\right)+z^{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{s}H_i({y_i}^{q-1}-1)+E(y_1,\ldots,y_s)\right).\qquad(4)$$

Şimdi her $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in(\mathbb{K}^*)^s$ *için* $E(\mathbf{t})=0$ *olduğunu gösterelim. (4) eşitliğinde* *her i,j,k için $x_i = \mathbf{t}^{\mathbf{q}_i}, y_j = t_j$ ve $z_k = 1$ alırsak $f \in I(T_{X,Q})$ olduğu için*

$$0 = 0h^m = \sum_{j=1}^{r} G_j 0 + \sum_{i=1}^{s} H_i 0 + E(t_1,\dots,t_s)$$

ulaşılır. Dolayısıyla E, $(\mathbb{K}^*)^s$ üzerinde sıfırlanır. Öte yandan her $i \in [s]$ için $\mathrm{der}_{y_i}(E) < q-1$ olduğundan, Lemma 5.1.1'den $E = 0$ sonucuna verir.

(4) eşitliğini w^m ile çarparak

$$f(hw)^m = \sum_{j=1}^{r} w^m G_j \left(x_j \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-} \boldsymbol{z}^{\beta_j^-} - \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+} \boldsymbol{z}^{\beta_j^+} \right) + w^m \boldsymbol{z}^{\alpha'} \sum_{i=1}^{s} H_i ({y_i}^{q-1} - 1).$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $H \in R$ olmak üzere binom teoreminden

$$f(hw)^m = f(hw-1+1)^m = f(H(hw-1)+1) = fH(hw-1) + f$$

eşitliği yazılır. Böylece son iki eşitlikten

$$f = \sum_{j=1}^{r} w^m G_i \left(x_j \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-} \boldsymbol{z}^{\beta_j^-} - \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+} \boldsymbol{z}^{\beta_j^+} \right) + w^m \boldsymbol{z}^{\alpha'} \sum_{i=1}^{s} H_i ({y_i}^{q-1} - 1) - fH(hw-1)$$

elde edilir ve $I(T_{X,Q}) \subset J \cap S$ kapsaması sağlanır.

Buchberger algoritması [25, Teorem 2, p.87] J idealinin üreteçleri binom olduğundan herhangi bir Gröbner bazı da binomlardan oluştuğunu söyler. Teorem 5.1.2 gereği $J \cap S$ idealini de binomlar üretir. O halde ters kapsamayı ispatlayabilmek için bir $f = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}} \in J \cap S$ binomu verilsin. Bu takdirde

$$f = \sum_{j=1}^{r} G_j \left(x_j \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^-} \boldsymbol{z}^{\beta_j^-} - \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j^+} \boldsymbol{z}^{\beta_j^+} \right) + \sum_{i=1}^{s} H_i ({y_i}^{q-1} - 1) + H(hw-1), \tag{5}$$

eşitliğini sağlayan $G_1,\dots,G_r,H_1,\dots,H_s,H \in R$ polinomları mevcuttur. Son eşitlik $R[{z_1}^{-1},\dots,{z_d}^{-1}]$ halkasında da geçerli olduğundan her $i \in [s]$, $j \in [r]$ için $y_i = 1$, $x_j = \boldsymbol{z}^{\beta_j}$ ve $w = 1/\boldsymbol{z}^{\beta_1^-} \cdots \boldsymbol{z}^{\beta_r^-}$ alırsak

$$\boldsymbol{z}^{a_1\beta_1+\cdots+a_r\beta_r} - \boldsymbol{z}^{b_1\beta_1+\cdots+b_r\beta_r} = 0$$

elde edilir. Böylece $a_1\beta_1+\cdots+a_r\beta_r = b_1\beta_1+\cdots+b_r\beta_r$ eşitliği sağlanır ve $f = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} -$

$\boldsymbol{x^b}$ *homojendir. f binomunun her $[\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1} : \ldots : \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}] \in T_{X,Q}$ noktasında sıfırlandığını gösterelim. (5) eşitliğinde her i, j, k için $x_i = \mathbf{t}^{\mathbf{q}_i}, y_j = t_j, z_k = 1$ ve $w = 1/\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1^-} \cdots \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r^-}$ alırsak $f(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) = 0$ olur, yani $f \in I(T_{X,Q})$'dir. Sonuç olarak $J \cap S \subset I(T_{X,Q})$ kapsaması sağlanır.*

Uyarı. X tam simitli çeşitleminin ϕ matrisi ve $\mathfrak{P}$ tam dizisi ile birden fazla β matrisi bulunabilir. Sonuç 5.0.1'den dolayı her $\beta_j \in \mathbb{N}^d$ şeklinde seçilebilir.

Örnek 5.1.4. *$X = \mathscr{H}_2$ Hirzebruch yüzeyinin fanının ışınları $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 2)$, ve $\mathbf{v}_4 = (0, -1)$ vektörleri ile üretilir. Bu takdirde*

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

ϕ matrisinin smith normal formunu aşağıdaki prosedür ile hesaplayarak β matrisini de bulalım.

```
i1 : Phi=matrix{{1,0},{0,1},{-1,2},{0,-1}}; r=numRows Phi;
i2 : n=numColumns Phi; (D,P,K) = smithNormalForm Phi; Beta=P^{n..r-1};
o2 = | -1  2 -1  0 |
     |  0  1  0  1 |
```

Birinci satırı -1 ile çarpıp ikinci satırın iki katını birinci satıra eklersek elemanları pozitif olan $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi bulunur.

Uyarı. Farklı Q matrisleri aynı $T_{X,Q} \subset T_X$ parametrik simitli kümeyi tanımlayabilir. $\mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde çalıştığımızdan ötürü Q matrisinin girdilerini $q - 1$ den küçük pozitif tam sayılara kısıtlayabiliriz, çünkü her $t \in \mathbb{F}_q^*$ için $t^{q-1} \equiv 1 \bmod q$ sağlanır.

Q ve β matrislerinin elemanlarının pozitif seçilebilmesi Teorem 5.1.2 ile verilen eşitliği sadeleştirmiştir. Böylece $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçlerini aşağıdaki yöntem ile daha kolay hesaplanabilir.

Teorem 5.1.5. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_d]$, S polinom halkasının genişlemesi olsun. Bu takdirde*

$$J = \langle \{x_i - \mathbf{y}^{\mathbf{q}_i} \boldsymbol{z}^{\beta_i}\}_{i=1}^r \cup \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^s \rangle.$$

olmak üzere $I(T_{X,Q}) = J \cap S$ eşitliği sağlanır.

Teorem 5.1.5, $\beta \in M_{d\times r}(\mathbb{N})$, $Q \in M_{s\times r}(\mathbb{N})$ matrisleri ve q asal sayısı verilen $I(T_{X,Q}) \subset \mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_r]$ idealinin binom üreteçlerini hesaplamak için aşağıdaki algoritmayı verir.

Algorithm 1 $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçlerini hesaplama

Girdi $Q \in M_{s\times r}(\mathbb{N})$, $\beta \in M_{d\times r}(\mathbb{N})$ matrisi ve q asal sayısı.

Çıktı $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçleri.

1: Teorem 5.1.5 kullanarak R polinom halkasının J idealini belirleyiniz.

2: J idealinin $w > z_1 > \cdots > z_d > y_1 > \cdots > y_s > x_1 > \cdots > x_r$ lex sıralamasına göre G Gröbner bazını bulunuz.

3: G Gröbner bazının S halkası ile arakesitini bulunuz ve $I(T_{X,Q}) = \langle G \cap S\rangle$.

`toBinomial(b,R)` fonksiyonu verilen $b = \{b_1,\ldots,b_r\}$ tam sayı listesini $x^{b^+} - x^{b^-} \in R$ binomuna dönüştürür [39]. Şimdi bu fonksiyonu kullanarak bu algoritmanın bir `Macaulay2` kodunu verelim.

Prosedür 5.1.6. *Aşağıdaki prosedür girilen q sayısı ve Q, β matrisleri için, $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçlerini bulur.*

```
i2 : toBinomial = (b,R) -> (top := 1_R; bottom := 1_R;
     scan(#b, i -> if b_i > 0 then top = top * R_i^(b_i)
     else if b_i < 0 then bottom = bottom * R_i^(-b_i)); top - bottom);
i3 : r=numColumns Q;s=numRows Q; d=numRows Beta; F=ZZ/q;
i4 : C=(id_(ZZ^r)| -transpose Q | -transpose Beta);
i5 : R=F[x_1..x_r,y_1..y_s,z_1..z_d];
i6 : J = ideal apply(entries C, b -> toBinomial(b,R))+
         ideal apply (s,i->R_(r+i) ^(q-1)-1)
i7 : ITQ=eliminate (J,for i from r to r+s+d-1 list R_i)
```

Örnek 5.1.7. $\mathbb{F}_{11}$ *cismi üzerinde $X = \mathscr{H}_2$ Hirzebruch yüzeyi ve $Q = [1\ 2\ 3\ 4]$ matrisi verilsin. Bu durumda $T_{X,Q} = \{[t : t^2 : t^3 : t^4] \mid t \in \mathbb{K}^*\}$ olur. $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin üreteçlerini* `Macaulay2` *programı ile hesaplamak için, q sayısını ve Q, β matrislerinin girilmesi yeterlidir.*

```
i1 : q=11; Beta=matrix {{1,0,1,2},{0,1,0,1}}; Q=matrix {{1,2,3,4}};
```

Bu girdi satırından sonra Prosedür 5.1.6 kullanılarak $I(T_{X,Q}) = \langle x_1^5 - x_3^5, x_1^2 x_2 - x_4\rangle$ *çıktısı elde edilir.*

5.2 Kafes Baz İdeallerinin Doygunlaştırılması ile Sıfırlayan İdeal Bulma

Bu kısımda, $I(T_{X,Q})$ idealinin kafes ideali olduğu gösterilecektir ve bu ideali tanımlayan kafesi belirleyen bir algoritma verilecektir. $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan ideal bu kafesin bir baz idealinin doygun hale getirilmesiyle elde edilir. Herhangi bir Q matrisi için, $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}Q$ kafesini L_Q ile gösterelim.

Lemma 5.2.1. *S polinom halkasında $f = \boldsymbol{x^a} - \boldsymbol{x^b}$ binomunun homojen olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in L_\beta$ şartının sağlanmasıdır.*

İspat 3. *S koordinat halkasında $\boldsymbol{x^a}$ monomunun derecesi β matrisi ile tanımlanır:*

$$\text{der}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x^a}) = a_1 \,\text{der}_{\mathscr{A}}(x_1) + \cdots + a_r \,\text{der}_{\mathscr{A}}(x_r) = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r = \beta(\boldsymbol{a})$$

Bu durumda, f homojen olması için gerek ve yeter koşul $\beta(\boldsymbol{a}) = \beta(\boldsymbol{b})$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitlik ise $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in L_\beta$ olması anlamına gelir ki ispat sonlanır.

Herhangi bir parametrik simitli kümenin sıfırlayan idealinin binom ideali olduğu Teorem 5.1.3'ün ispatında verilmişti. Şimdi bu sıfırlayan idealin kafes ideali olduğunu ifade eden bir sonuç verilecektir. Bu gerçek, [21] makalesinde ideali tanımlayan kafesi bulmaya yönelik bir yöntem vermeden ifade edilmiştir.

Lemma 5.2.2. *$L_1 = \{\mathbf{m} \in L_\beta \mid Q\mathbf{m} \equiv 0 \ (mod\ q-1)\}$ şeklinde tanımlanan kafes için $I(T_{X,Q}) = I_{L_1}$'dir.*

İspat 4. *Verilen $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s$ ve $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ elemanları için*

$$x^{\boldsymbol{a}}(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) = (\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1})^{a_1} \cdots (\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r})^{a_r} = \mathbf{t}^{Q\boldsymbol{a}}$$

eşitliği vardır. Bu takdirde herhangi bir $f = x^{\boldsymbol{a}} - x^{\boldsymbol{b}}$ binomunun bir $(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) \in T_{X,Q}$ noktasında sıfır değeri alması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{t}^{Q\boldsymbol{a}} = \mathbf{t}^{Q\boldsymbol{b}}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu ise $\mathbf{t}^{Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = 1$ eşitliğine denktir.

$I(T_{X,Q}) \subseteq I_{L_1}$ kapsamasını ispatlamak için $I(T_{X,Q})$ binom idealinin bir $f = x^{\boldsymbol{a}} - x^{\boldsymbol{b}}$ üretecini alalım. Her $(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) \in T_{X,Q}$ noktasında f binomu sıfırlanır, yani her $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s$ noktası için $\mathbf{t}^{Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = 1$ olur. η, $\mathbb{K}^*$ devirli grubunun bir üreteci olmak üzere bu eşitlikte $\mathbf{t} = (\eta, 1, \ldots, 1)$ yazılırsa $Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ satır matrisinin ilk elemanının $q-1$'in bir katı olduğu görülür. Benzer şekilde matrisin diğer elemanlarıda $q-1$'in bir katıdır, yani $Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \equiv 0 \ (mod\, q-1)$ elde edilir. Öte yandan f homojen olduğu için $\mathbf{a}-\mathbf{b} \in L_\beta$'dir, dolayısıyla $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in L_1$ olur ki istenendir.

Ters kapsamının ispatı için, $f = x^{\boldsymbol{a}} - x^{\boldsymbol{b}} \in I_{L_1}$ binomu verilsin. L_1 kafesinin tanımından $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \in L_\beta$ ve $Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \equiv 0 \ (mod\, q-1)$. Lemma 5.2.1 gereği f homojendir ve her $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s$ için $\mathbf{t}^{Q(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = 1$'dir. Son eşitlikten her $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s$ için $f(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) = 0$ ifadesi sağlanır. Böylece $f \in I(T_{X,Q})$ ve $I_{L_1} \subseteq I(T_{X,Q})$ olduğu elde edilir.

Lemma 3.2.8 gereği L_1 kafesinin bir $\mathbb{Z}$-bazına karşılık gelen kafes baz idealini doygunlaştırarak $I(T_{X,Q}) = I_{L_1}$ idealinin üreteçleri hesaplanabilir. Lemma 5.2.2 ile L_1 kafesinin elemanları belirlenebilmesine rağmen bazını bulmak kolay değildir. Şimdi verilecek sonuç, L_1 kafesini başka türlü tanımlayıp, bazının hesaplanması için bir algoritma sunacaktır.

Teorem 5.2.3. *$\pi_s : \mathbb{Z}^{n+s} \to \mathbb{Z}^n, (c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+s}) \to (c_1, \ldots, c_n)$ izdüşüm dönüşümü olsun. $L = \{\phi\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{c} \in \pi_s\,(Çek_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s])\}$ olmak üzere $I(T_{X,Q}) = I_L$'dir.*

İspat 5. *Lemma 5.2.2'ye göre $L_1 = \{\mathbf{m} \in L_\beta \mid Q\mathbf{m} \equiv 0 \ (mod\ q-1)\}$ kafesi için $I(T_{X,Q}) = I_{L_1}$ sağlanır. $\mathfrak{P}$ tam dizisinden $Gör\phi = L_\beta$ olduğundan $\mathbf{m} \in L_\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{m} = \phi\boldsymbol{c}$ olacak şekilde bir $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$ var olmasıdır. Böylece*

$$L_1 = \{\phi\boldsymbol{c} \mid Q\phi\boldsymbol{c} \equiv 0 \ (mod\, q-1) \text{ ve } \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n\}$$

elde edilir ve $L = L_1$ eşitlinin ispatlanması yeterlidir.

$\phi\boldsymbol{c} \in L$ olsun, dolayısıyla $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \pi_s\,(Çek_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s])$'dir. π izdüşüm dönüşümü tanımından $[Q\phi|(q-1)I_s](c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+s}) = 0$ eşitliğini sağlayan $c_{n+1}, \ldots, c_{n+s} \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitlik

$$Q\phi(c_1, \ldots, c_n) + (q-1)I_s(c_{n+1}, \ldots, c_{n+s}) = 0$$

$$Q\phi\boldsymbol{c} = -(q-1)(c_{n+1}, \ldots, c_{n+s})$$

ifadelerine denktir. Son ifadeden $Q\phi\boldsymbol{c} \equiv 0 \ (mod\ q-1)$ *denkliğini sağlanır, dolayısıyla* $\phi\boldsymbol{c} \in L_1$.

$L_1 \subset L$ *kapsamasını kanıtlayalım.* $\phi\boldsymbol{c} \in L_1$ *elemanı için* $Q\phi(\boldsymbol{c}) \equiv 0 \ (mod\ q-1)$ *denkliği mevcuttur, yani*

$$Q\phi\boldsymbol{c} = (q-1)(c_{n+1}, \ldots, c_{n+s})$$

eşitliğini sağlayan $c_{n+1}, \ldots, c_{n+s} \in \mathbb{Z}$ *elemanları vardır. Buradan*

$$[Q\phi|(q-1)I_s](c_1, \ldots, c_n, -c_{n+1}, \ldots, -c_{n+s}) = 0$$

ve

$$\boldsymbol{c} = \pi_s(c_1, \ldots, c_n, -c_{n+1}, \ldots, -c_{n+s}) \in \pi_s\left(Çek_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s]\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\phi\boldsymbol{c} \in L$.

Teorem 5.2.3'den $L = L_1$ kafesinin bir $\mathbb{Z}$-bazını hesaplamak için gerekli adımları veren aşağıdaki algoritma yazılır. M matrisinin sütunları $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s]$ kafesinin üreteçlerinin ilk n koordinatı olsun. Algoritmayı vermeden önce, ϕM matrisinin sütunlarının kümesinin L kafesi için bir baz olduğunu kanıtlayalım. $B = [Q\phi|(q-1)I_s]$ matrisinin rankı s olduğundan $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}B$ çekirdeğinin rankı n'dir. $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}B$ kafesinin bir bazı $\{A_1, \ldots, A_n\}$ olmak üzere $A = [A_1 \cdots A_n]$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $\text{Gör}(A) = \text{Çek}_{\mathbb{Z}}B$ ve $M = [I_n|0_{n\times s}]A$ olur. L kafesinden bir $\phi\mathbf{c} \in L$ elemanını alalım öyle ki $\mathbf{c} \in \pi_s\left(\text{Çek}_{\mathbb{Z}}B\right)$. O halde bazı $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ için $\mathbf{c} = A_1k_1 + \cdots + A_nk_n = A[k_1 \cdots k_n]$ eşitliği yazılabilir ve $\phi\mathbf{c} = \phi M[k_1 \cdots k_n]$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\phi M \in M_{r\times n}(\mathbb{Z})$ matrisinin sütunlarının kümesi L kafesini gerer. Diğer yandan $n = \text{rank } L$ olduğundan bu küme L kafesi için bir bazdır.

Algorithm 2 $I_L = I(T_{X,Q})$ kafes idealini tanımlayan L kafesini bulma.

Girdi $Q \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$, $\phi \in M_{r\times n}(\mathbb{Z})$ matrisleri ve q asal sayısı.

Çıktı L kafesinin bir bazı.

1: $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s]$ kafesinin üreteçlerini bul.

2: Sütunları, $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}[Q\phi|(q-1)I_s]$ kafesinin üreteçlerinin ilk s koordinatı olan M matrisini bul.

3: ϕM matrisini hesapla, bu matrisin sütunları L kafesinin bir $\mathbb{Z}$-bazıdır.

Bu algoritma aşağıdaki prosedür ile `Macaulay2` program diline dönüştürülür.

Prosedür 5.2.4. `ML` *kodunun çıktısı sütunları L kafesinin üreteçlerini olan matristir.*

```
i2: s=numRows Q;n=numColumns Phi;
i3: ML=Phi*(id_(ZZ^n)|(random(ZZ^n,ZZ^s))*0)*(syz (Q*Phi|(q-1)*(id_(ZZ^s))))
```

Prosedür 5.2.5. *Lemma 3.2.8 ile L kafesinin baz idealini doygun hale getirerek $I(T_{X,Q})$ ideali hesaplama.*

```
i4: r=numRows Phi; (D,P,K) = smithNormalForm Phi; Beta=P^{n..r-1};
i5: S=ZZ/q[x_1..x_r,Degrees=>transpose entries Beta];
i6: toBinomial = (b,S) -> (top := 1_S; bottom := 1_S;
    scan(#b, i -> if b_i > 0 then top = top * S_i^(b_i)
    else if b_i < 0 then bottom = bottom * S_i^(-b_i)); top - bottom);
i7: IdealTQ=(M,S)->(J = ideal apply(entries transpose M, b -> toBinomial(b,S));
    scan(gens S, f-> J=saturate(J,f));J)
i8:ITQ=IdealTQ(ML,S)
```

Örnek 5.2.6. *$\mathbb{F}_{11}$ cismi üzerinde $X = \mathscr{H}_2$ Hirzebruch yüzeyinin $Q = [1\ 2\ 3\ 4]$ matrisinin parametrelediği $T_{X,Q}$ kümesini ele alalım. Bu durumda*

```
i1 : q=11;Phi=matrix{{1,0},{0,1},{-1,2},{0,-1}}; Q=matrix {{1,2,3,4}};
```

girdileriyle Prosedür 5.2.4 sütunları L kafesinin üreteçleri olan

$$\mathtt{ML} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

matrisini verir. Son olarak, Prosedür 5.2.5 kullanarak $I(T_{X,Q}) = I_L$ ideali belirlenir: $I_L = \langle x_1^2x_2 - x_4, x_1^5 - x_3^5\rangle$.

I_L kafes idealinin üreteçlerinin minimal sayısı yüksekliğine eşit ise **tam kesişim** denir. [35] çalışmasında Teorem 2.1.'de I_L kafes idealinin yüksekliğinin L kafesinin rankına eşit olduğu verilmiştir. O halde I_L kafes idealinin tam kesişim olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{ht}(I_L) = \mathrm{rank}\, L$ sağlanmasıdır. Eğer I_L ile ideali tam kesişimse, I_L ideali ile kafes baz idealinin üreteç sayısı aynıdır. Sonuç olarak Lemma 3.2.8'den I_L ile ideali tam kesişimse I_L ideali ile kafes baz ideali eşittir.

Uyarı. `ML` matrisinin bulmanın diğer bir avantajı, bu matrisin karışık baskın olduğunu kontrol ederek I_L kafes idealinin tam kesişim olup olmadığını anlayabiliriz.

Tanım 5.2.7. *A girdileri tam sayı olan bir matris olsun. Eğer A matrisinin her sütununda en az bir negatif ve pozitif girdi varsa bu matrise* ***karışık*** *denir. A matrisinin her kare alt matrisi karışık değilse, bu matrise* ***baskın*** *denir.*

Teorem 5.2.8. *[40, Teorem 3.9]* $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k$ *kümesi* $L \subset \mathbb{Z}^r$ *kafesinin bir bazı olsun. Eğer* $L \cap \mathbb{N}^r = 0$ *ise* I_L *idealinin tam kesişim olması için gerek ve yeter koşul* $[\mathbf{m}_1 \cdots \mathbf{m}_k]$ *matrisinin karışık baskın olmasıdır. Böylece*

$$I_L = \langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_1^+} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_1^-}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_k^+} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_k^-} \rangle.$$

Theorem 5.2.8 yardımıyla, L kafesinin bazına bakılarak $I(T_{X,Q}) = I_L$ idealinin tam kesişim olup olmadığı kontrol edilebilir.

Örnek 5.2.9. $X = \mathscr{H}_\ell$, *q tek sayı olmak üzere* $\mathbb{F}_q$ *üzerinde Hirzebruch yüzeyi olsun. Herhangi* q_1 *and* q_2 *pozitif tam sayıları için,* $Q = [q_1\ q_2\ q_1 + 2\ \ell q_1 + q_2]$ *matrisinin parametrelediği kümenin idealini Lemma 5.2.2'yi kullanarak hesaplayalım. Her* $t \in \mathbb{K}^*$ *için, X kümesinde* $[t^{q_1} : t^{q_2} : t^{q_1+2} : t^{\ell q_1 + q_2}] = [1 : 1 : t^2 : 1]$ *elemanları eşittir, dolayısıyla* $Q' = [0\ 0\ 2\ 0]$ *ise* $T_{X,Q} = T_{X,Q'}$ *olur.* $\mathrm{I}(T_{X,Q'}) = \mathrm{I}_L$ *kafes idealinin kafesi*

$$L = \{\mathbf{m} \in L_\beta \mid Q'\mathbf{m} \equiv 0\ (mod\, q-1)\}$$

şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. Gör$(\phi) = L_\beta$ *olduğundan*

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ell & -1 \end{bmatrix}^T$$

matrisinin sütunları $\mathbf{u}_1$ *ve* $\mathbf{u}_2$*,* L_β *kafesi için bir baz oluşturur.* $\mathbf{m} \in L_\beta$ *olması için gerek ve yeter şart bazı* $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ *için* $\mathbf{m} = \mathbf{u}_1 a_1 + \mathbf{u}_2 a_2 = (a_1, a_2, -a_1 + \ell a_2, -a_2)$ *şartının sağlanmasıdır. Buradan,* $\mathbf{m} \in L_\beta$ *için* $Q'\mathbf{m} = -2a_1 + 2\ell a_2$ *olur ve*

$$\mathbf{m} \in L \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ için } -2a_1 + 2\ell a_2 = (q-1)k,$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $q-1$ *çift sayı olduğundan, son eşitlik* $a_1 = \ell a_2 - k\frac{q-1}{2}$ *ifadesine denktir. Bu durumda* $\mathbf{m}_1 = \ell \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ *ve* $\mathbf{m}_2 = \left(\frac{q-1}{2}\right)\mathbf{u}_1$ *ise* $\mathbf{m} = a_2\mathbf{m}_1 - k\mathbf{m}_2$ *olur. Sonuç olarak aşağıda verilen* ML *matrisinin sütunları* $\mathbf{m}_1$ *ve* $\mathbf{m}_2$*,* L *kafesi için bir baz oluşturur:*

$$\mathtt{ML} = \begin{bmatrix} (q-1)/2 & 0 & -(q-1)/2 & 0 \\ \ell & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

ML *matrisi karışık baskın olduğu için* $I(T_{X,Q'}) = I(T_{X,Q}) = I_L$ *ideali tam kesişimdir. Bu yüzden Prosedür 5.2.5'in doygunlaştırma adımına gerek yoktur, yani*

$$I(T_{X,Q}) = I_L = \langle x_1^{(q-1)/2} - x_3^{(q-1)/2}, x_1^\ell x_2 - x_4 \rangle.$$

Son olarak, eğer $q = 11$*,* $q_1 = 1$*,* $q_2 = 2$ *ve* $\ell = 2$*, alırsak bu örnek, Örnek 5.2.6 ile aynı olur.*

5.3 Sıfırlayan İdealin Kavramsal Tanımı

Aşağıdaki sonuçta, $\mathscr{L} = QL_\beta = \{Q\mathbf{m} | \mathbf{m} \in L_\beta\}$ kafesi üzerinde bir şart altında $I(T_{X,Q})$ idealinin kafesinin Q ve β matrislerine bağlı olarak kavramsal tanımını verilmiştir. Başlamadan önce, aşağıda verilen $\mathbb{Z}$-modüllerinin eşit olduğunu hatırlatalım:

$$\mathscr{L} : (q-1) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s \mid (q-1)\mathbf{m} \in \mathscr{L}\},\ \mathscr{L} : (q-1)\mathbb{Z}^s = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^s \mid \mathbf{m}(q-1)\mathbb{Z}^s \subset \mathscr{L}\}$$

Teorem 5.3.1. $L = (L_Q \cap L_\beta) + (q-1)L_\beta$ *olmak üzere* $I_L \subseteq I(T_{X,Q})$ *kapsaması sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul* $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ *olmalıdır.*

İspat 6. *Öncelikle* $I_L \subseteq I(T_{X,Q})$ *olduğunu gösterelim. Lemma 5.2.1'den* $I(T_{X,Q}) = I_{L_1}$ *olup* $L \subseteq L_1$ *kapsamasının ispatlanması yeterlidir. Verilen* $\mathbf{m} \in L$ *için* $\mathbf{m} \in L_\beta$ *aşikardır. Öte yandan,* L *kafesinin tanımından* $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + (q-1)\mathbf{m}''$ *olacak şekilde* $\mathbf{m}' \in L_Q \cap L_\beta$ *ve* $\mathbf{m}'' \in L_\beta$ *elemanları vardır.* $Q\mathbf{m} = (q-1)Q\mathbf{m}''$ *eşitliğinden* $\mathbf{m} \in L_1$

olur ki istenendir.

Şimdi $I(T_{X,Q}) \subseteq I_L$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ olduğunu ispatlayalım. $L_1 \subseteq L \iff \mathscr{L} : (q-1) \subseteq \mathscr{L}$ ifadesinin ispatlanması kafidir. Kabul edelim ki $L_1 \subseteq L$ olsun ve $\boldsymbol{z} \in \mathscr{L} : (q-1)$ alalım. Bu takdirde bir $\mathbf{m} \in L_\beta$ elemanı için $(q-1)\boldsymbol{z} = Q\mathbf{m}$ ifadesi sağlanır. Bu eşitlikten $\mathbf{m}$, L_1 kafesinin elemanıdır. $L_1 \subset L$ kapsamasından $\mathbf{m} \in L$, yani

$$\exists\, \mathbf{m}' \in L_Q \cap L_\beta,\ \exists\, \mathbf{m}'' \in L_\beta \ni \mathbf{m} = \mathbf{m}' + (q-1)\mathbf{m}''$$

ifadesi sağlanır. Sonuç olarak $(q-1)\boldsymbol{z} = Q\mathbf{m} = (q-1)Q\mathbf{m}''$ eşitliğinden $\boldsymbol{z} = Q\mathbf{m}'' \in \mathscr{L}$ elde edilir ve $\mathscr{L} : (q-1)$ modülü, $\mathscr{L}$ modülünün alt modülüdür.

Varsayalım ki $\mathscr{L} : (q-1) \subseteq \mathscr{L}$ ve $\mathbf{m} \in L_1$ olsun. Buradan $\mathbf{m}$, L_β kafesinin elemanı olduğundan $Q\mathbf{m} = (q-1)\boldsymbol{z}$ eşitliğini sağlayan bir $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^s$ vardır. O halde $\boldsymbol{z} \in \mathscr{L} : (q-1) \subseteq \mathscr{L}$, dolayısıyla bir $\mathbf{m}' \in L_\beta$ elemanı için $\boldsymbol{z} = Q\mathbf{m}'$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikten $Q(\mathbf{m} - (q-1)\mathbf{m}') = 0$ ve $\mathbf{m} - (q-1)\mathbf{m}' \in L_Q \cap L_\beta$ ifadeleri sağlanır. Buradan $\mathbf{m} = (\mathbf{m} - (q-1)\mathbf{m}') + (q-1)\mathbf{m}' \in L$ olup $L_1 \subseteq L$ kapsaması ispatlanır.

`Macaulay2` programı ile $I_L = I(T_{X,Q})$ sağlanması için gerekli olan yukardaki şartı kontrol edip L kafesinin üreteçleri bulunabilir.

Prosedür 5.3.2. *Aşağıda $\mathscr{L} : (q-1)$ kafesi* `LL:(q-1)*(ZZ^s)` *komutu ile hesaplanmıştır.*

```
i2: s=numRows Q;
i3: LL=image (Q*Phi);
i4: if LL:(q-1)*(ZZ^s)==LL then print yes else print no;
i5: ML=mingens ((q-1)*(image Phi)+intersect(ker Q,image Phi));
```

Örnek 5.3.3. *$X = \mathscr{H}_2$, $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde Hirzebruch yüzeyi ve $Q = [1\ 2\ 3\ 4]$ olsun.*

```
i1 : q=2;Phi=matrix{{1,0},{0,1},{-1,2},{0,-1}};Q=matrix {{1,2,3,4}};
```

girdileri ile Prosedür 5.3.2, $L = \langle(-1,0,1,0),(-2,-1,0,1)\rangle$ çıktısını verir. Buradan doygunlaştırma ile $I(T_{X,Q}) = \langle x_1^2x_2 + x_4, x_1 + x_3\rangle$ bulunur. $q = 11$ için $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ şartı sağlanmaz. Bu durum için ideali belirleyen kafes Örnek 5.2.6'da başka bir metot ile bulunmuştur.

Tanım 5.3.4. *Eğer $AQ = \beta$ şartını sağlayan $A \in M_{d\times s}(\mathbb{Q})$ matrisi varsa Q matrisine* ***homojen*** *denir.*

Lemma 5.3.5. *$Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_r] \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$ olmak üzere Q homojen matris olması için gerek ve yeter koşul $L_Q \subseteq L_\beta$ sağlanmasıdır.*

İspat 7. *Q homojen bir matris olsun. Tanım gereği, $AQ = \beta$ eşitliğini sağlayan bir $A \in M_{d\times s}(\mathbb{Q})$ matrisi mevcuttur. L_Q kafesinden herhangi bir $\boldsymbol{m}$ elemanı için $Q\boldsymbol{m} = 0$ olduğundan $\beta\boldsymbol{m} = AQ\boldsymbol{m} = 0$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $\boldsymbol{m} \in L_\beta$ olup $L_Q \subseteq L_\beta$ kapsaması elde edilir.*

Şimdi $L_Q \subseteq L_\beta$ kapsaması mevcut iken Q matrisinin homojen olduğunu kanıtlayalım. $(s+d)\times r$ boyutlu $[Q\ \ \beta]^T$ matrisini Q' ile gösterirsek $L'_Q = L_Q \cap L_\beta = L_Q$ eşitliğinden Q matrisinin satır uzayının β matrisinin satırlarını ihtiva ettiği görülür. O halde β matrisinin i. satırı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} a_{i1}[q_{11}\cdots q_{1r}] + \cdots + a_{is}[q_{s1}\cdots q_{sr}] &= [a_{i1}q_{11} + \cdots + a_{is}q_{s1} \cdots a_{i1}q_{1r} + \cdots + a_{is}q_{sr}] \\ &= [a_{i1}\cdots a_{is}]\mathbf{q}_1 + \cdots + [a_{i1}\cdots a_{is}]\mathbf{q}_r. \end{aligned}$$

Eğer $A = (a_{ij})$ alırsak $AQ = \beta$ elde edilir ki Q homojendir.

Aşağıdaki sonuç, [14] makalesinde sadece $X = \mathbb{P}^n$ için verilen Teorem 2.5'i herhangi bir simitli çeşitleme genellemiştir.

Sonuç 5.3.6. *$Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_r] \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$ bir homojen matris olsun. $L = L_Q + (q-1)L_\beta$ için $I_L \subset I(T_{X,Q})$'dir. $I_L = I(T_{X,Q})$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ sağlanmasıdır.*

İspat 8. *Q homojen olduğundan L_β, L_Q kafesini kapsar, dolayısıyla $L = L_Q \cap L_\beta + (q-1)L_\beta = L_Q + (q-1)L_\beta$ eşitliği mevcuttur. Buradan Teorem 5.3.1 $I(T_{X,Q}) = I_L$ eşitliğini verir.*

[21] çalışmasında ilk kez ispatlanan aşağıdaki gerçeklerin Teorem 5.3.1 yardımıyla başka ispatları verilecektir.

Sonuç 5.3.7. $I(T_X) = I_{(q-1)L_\beta}$.

İspat 9. *$T_X \subset X$ simiti $Q = I_r$ birim matrisinin parametrelediği simitli kümedir. $L_Q = Çek_{\mathbb{Z}} I_r = \{0\}$ eşitliği aşikardır. Diğer yandan, $\mathscr{L} = QL_\beta = \{I_r\mathbf{m} \,|\, \mathbf{m} \in L_\beta\} = L_\beta$*

olur. $\mathscr{L} = L_\beta$, *$\mathbb{Z}$-modülünün sıfırlayan elemanı olmadığından* $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ *şartı sağlanır.* $L = (q-1)L_\beta$ *olup Teorem 5.3.1'den* $I(T_X) = I_{(q-1)L_\beta}$ *elde edilir.*

Sonuç 5.3.8. $[1 : \cdots : 1] \in X$ *noktasının sıfırlayan ideali* I_{L_β} *idealidir.*

İspat 10. $Q = \beta$ *için* $T_{X,Q} = \{[1 : \cdots : 1]\}$ *olduğundan* $\mathscr{L} = QL_\beta = \{Q\mathbf{m} \mid \mathbf{m} \in L_Q\} = \{0\}$ *eşitliği elde edilir. Bu takdirde* $L = L_\beta + (q-1)L_\beta = L_\beta$ *eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik Teorem 5.3.1 aracılığıyla* $I([1 : \cdots : 1]) = I_{L_\beta}$ *ifadesini verir.*

Teorem 5.3.1'in diğer sonuçlarından bahsetmeden önce, bazı notasyonlar verelim. J bir homojen ideal olmak üzere, bu idealin X simitli çeşitleminde sıfırlayan kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$V_X(J) = \{[P] \in X \mid \text{her homojen } F \in J \text{ için } F(P) = 0\}.$$

Tanım 5.3.9. $L \subset L_\beta$ *şartı sağlanıyorsa* L *kafesine* ***homojen*** *denir.*

Önerme 5.3.10. *[21, Önerme 2.3]* L *kafesinin homojen olması için gerek ve yeter şart* I_L *idealinin homojen olmasıdır.*

Sonuç olarak Lemma 5.3.5 ve Önerme 5.3.10 gereği Q matrisinin homojen olması için gerek ve yeter koşul I_{L_Q} kafes idealinin homojen olmasıdır.

Sonuç 5.3.11. *[21, Önerme 2.3]* L *homojen ise* $V_X(I_L) \cap T_X \subset T_X$ *kümesi bir alt monoidtir.*

Lemma 5.3.12. *[21, Lemma 2.8]* $\{J_i\}$, S *homojen polinom halkasının herhangi homojen idealler ailesi ve* $Y_1, Y_2 \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) $V_X(1) = \emptyset$ *ve* $V_X(0) = X$.

(ii) $V_X(J_1) \cup V_X(J_2) = V_X(J_1 J_2)$.

(iii) $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(iv) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow V_X(J_1) \subseteq V_X(J_2)$.

(v) $\bar{Y}_1$, Y_1 *kümesinin Zariski kapanışı olmak üzere* $I(Y_1) = I(\bar{Y}_1)$

(vi) $\bar{Y}_1 = V_X(I(Y_1))$.

Varsayalım ki Q homojen olsun. $\mathbb{F}_q$ üzerinde çalıştığımız için ve Sonuç 5.3.11'den I_{L_Q} simitli idealin simitteki sıfırlayan kümesi $V_Q = V_X(I_{L_Q}) \cap T_X$ bir alt gruptur. Aşağıdaki sonuç $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ şartı sağlanırsa bu alt grubunun $T_{X,Q}$ alt kümesine eşit olduğunu temin ediyor.

Teorem 5.3.13 (Sonlu Nullstellensatz)**.** *Q homojen ve $L = L_Q + (q-1)L_\beta$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $V_Q = V_X(I_L)$.

(ii) Eğer $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ *eşitliği varsa* $V_Q = T_{X,Q}$ *olur.*

(iii) $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ *şartı sağlanıyorsa* $I(V_X(I_L)) = I_L$ *olur.*

İspat 11. *L kafesinin tanımı*

$$\mathbf{m} \in L \iff \exists, \mathbf{m}_1 \in L_Q \; ve \, \exists, \mathbf{m}_2 \in (q-1)L_\beta \ni \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$$

ifadesini verir. Buradan

$$\mathbf{m} \in L \iff \exists \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}^r \ni \mathbf{m}^+ = \mathbf{m}_1^+ + \mathbf{m}_2^+ + \boldsymbol{c} \;\; ve \;\; \mathbf{m}^- = \mathbf{m}_1^- + \mathbf{m}_2^- + \boldsymbol{c}$$

gerektirmesi doğrudur. Bu vektör eşitliğini monomlara uygularsak

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}^-} = \mathbf{x}^{\mathbf{c}}[\mathbf{x}^{\mathbf{m}_2^+}(\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1^-}) + \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1^-}(\mathbf{x}^{\mathbf{m}_2^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}_2^-})]$$

elde edilir, dolayısıyla $I_L = I_{L_Q} + I_{(q-1)L_\beta}$ olur. Sonuç 5.3.7 gereği $I_L = I_{L_Q} + I(T_X)$ sağlanır, buradan $V_Q = V_X(I_L)$ olup (i) ispatlanır.

$[P] = [\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1} : \cdots : \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}] \in T_{X,Q}$ noktası verilsin. Her $\mathbf{m} \in L_Q$ için $(\mathbf{x}^{\mathbf{m}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}^-})(P) = \mathbf{t}^{Q\mathbf{m}^+} - \mathbf{t}^{Q\mathbf{m}^-} = 0$ olduğu Lemma 5.2.2'nın ispatında açıklamıştı. Bu takdirde $T_{X,Q}$, $V_X(I_{L_Q})$ kümesinin alt kümesidir. Ayrıca $T_{X,Q}$, T_X simitinin bir alt grubu olduğundan $T_{X,Q} \subseteq V_Q$ sağlanır. Bu ifadenin iki tarafının idealini alırsak $I(V_Q) \subseteq I(T_{X,Q})$ olur. Ayrıca (i) aracılığıyla $I(V_Q) \supseteq (I_L)$ olduğundan $I_L \subseteq I(V_Q) \subseteq I(T_{X,Q})$ elde edilir. Teorem 5.3.1'de verilen $I(T_{X,Q}) = I_L$ eşitliğinden $I(V_Q) = I_L$ olur. Son eşitlik ve (i) ifadesinden $I_L = I(V_X(I_L))$ elde edilir, böyece (iii) ifadesi ispatlanır.

Lemma 5.3.12 gereği $\bar{T}_{X,Q} = V_X(I(T_{X,Q}))$ ve $\bar{V}_Q = V_X(I(V_Q))$ eşitlikleri sağlanır.

Sonlu cisim üzerinde çalıştığımız için, her küme Zariski topoplojiye göre kapalıdır. Bu takdirde $T_{X,Q} = V_Q$ sağlanır ve (ii) ifadesinin ispatı tamamlanır.

Aşağıda $\mathscr{L} = \mathscr{L} : (q-1)$ şartı sağlanmadığında $T_{X,Q} \neq V_Q$ olduğunu gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.3.14. *$X = \mathscr{H}_2$, $\mathbb{F}_{11}$ üzerinde Hirzebruch yüzey ve $Q = [1\ 2\ 3\ 4]$ olsun. Homojen olmayan Q matrisine β matrisini ekleyerek homojen $Q' = [Q\ \beta]^T$ matrisini elde edilir. $T_{X,Q} = T_{X,Q'}$ eşitliğinden Örnek 5.2.6 ile $I(T_{X,Q'}) = \langle x_1^2x_2 - x_4, x_1^5 - x_3^5\rangle$ olur.*

Teorem 5.3.13'ten, $L = L_{Q'} + (q-1)L_\beta$ olmak üzere $V_{Q'} = V_X(I_L)$'dir. $L_{Q'} = \langle(2,1,0,-1)\rangle$ ve $L_\beta = \langle(2,1,0,-1),(1,0,-1,0)\rangle$ olduğundan $L = \langle(2,1,0,-1),(10,0,-10,0)\rangle$, böylece $I_L = \langle x_1^2x_2 - x_4, x_1^{10} - x_3^{10}\rangle$. [21, Algorithm 1] uygulanarak $V_X(I_L) = T_{X,A}$ eşitliğini sağlayan A matrisi hesaplanır:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Önceki bölümlerde verilen algoritmalardan biri kullanılarak

$$I(V_{Q'}) = I(V_X(I_L)) = I(T_{X,A}) = I_L$$

sonucu elde edilir. $V_{Q'}, T_{X,Q'}$ kümelerinin sıfırlayan idealleri farklı olduğundan $V_{Q'} \neq T_{X,Q}$.

Q matrisinin köşegen olma özel durumu incelenerek tezin bu kısmı sonlanacaktır.

Tanım 5.3.15. *Herhangi köşegen matrisin parametrelediği simitli kümeye* ***dejenere simit*** *denir.*

$\mathbb{K}^*$ devirli grubunun bir üreteci η ve $0 \leq s_i \leq q-2$ olmak üzere her $t_i \in \mathbb{K}^*$ elemanını $t_i = \eta^{s_i}$ şeklinde ifade edilebilir. Aşağıda [41] makalesinde $X = \mathbb{P}^n$ projektif uzayında verilen bir sonucun genel formu verilecektir. Bu gerçek [21] çalışmasında başka bir yol ile ispatlanmıştır, burada Lemma 5.2.2 yardımıyla ispatlanmıştır.

Teorem 5.3.16. *Q = köşegen$[q_1, \ldots, q_r] \in M_{r\times r}(\mathbb{Z})$ matrisi verilsin. $d_i = |\eta^{q_i}|$ ve D = köşegen$[d_1 \ldots, d_r]$ olmak üzere $L = D(L_{\beta D})$ için $I(T_{X,Q}) = I_L$ olur.*

İspat 12. *Lemma 5.2.2'den, $L_1 = \{\mathbf{m} \in L_\beta \mid Q\mathbf{m} \equiv 0(mod\ q-1)\}$ olmak üzere $L = L_1$ eşitliğinin kanıtlanması yeterlidir. L kafesinden herhangi bir $\mathbf{m}$ elemanı bir $\boldsymbol{z} \in L_{\beta D}$ için $\mathbf{m} = D\boldsymbol{z}$ biçiminde yazılabilir, böylece $\mathbf{m} \in L_\beta$. $d_i = (q-1)/ebob(q-1, q_i)$ eşitliğinden her d_i için $q_i d_i \equiv 0 \pmod{q-1}$ denkliği sağlanır. Bu takdirde $Q\mathbf{m} = QD\boldsymbol{z} \equiv 0 \ (mod\, q-1)$ olup $\mathbf{m} \in L_1$.*

$l_1 \subset L$ kapsamasının ispatı için $\mathbf{m} \in L_1$ verilsin. Böylece $Q\mathbf{m} \equiv 0\ (mod\, q-1)$ olur, yani her $1 \in [r]$ için $q_i m_i = (q-1)z_i$ eşitliğini sağlayan $z_i \in \mathbb{Z}$ elemanı mevcuttur. Bu ifade

$$\frac{q_i}{gcd(q-1, q_i)} m_i = \frac{q-1}{gcd(q-1, q_i)} z_i = d_i z_i.$$

eşitliğini verir. $q_i/ebob(q-1, q_i)$ ve $q-1/ebob(q-1, q_i)$ aralarında asal olduğundan her i için d_i sayısı m_i sayısını böler. Buradan her i için $m_i = d_i z_i'$ eşitliğini sağlayan bir $z_i' \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Sonuç olarak $\boldsymbol{z'} = (z_1', \ldots, z_r')$ için $\mathbf{m} = D\boldsymbol{z'}$ elde edilir ki $\mathbf{m} \in L$ olur.

6 PARAMETRİK SİMİTLİ KODLAR

6.1 Lineer Kodlar

Bu kesimde tezin ana fikrinin kolay anlaşılması için lineer kodlar ile ilgili bazı kavramlar için bir özet verilecektir.

A sonlu bir küme olmak üzere A kümesine **alfabe** denir. A kümesinin elemanları **harf** ve A^N kümesinin elemanları da N uzunlukta **kelime** olarak tanımlanır.

Tanım 6.1.1. *Herhangi bir $\mathscr{C} \subset A^N$ alt kümesine **kod** denir. $\mathscr{C}$ kümesinin elemanlarına **kod kelimesi** denir.*

Şimdi A^N kümesinde uzaklık tanımını verelim:

Tanım 6.1.2. *Herhangi $\boldsymbol{c} = c_1 \cdots c_N, \boldsymbol{b} = b_1 \cdots b_N \in A^N$ kelimeleri arasındaki **uzaklık** veya **Hamming uzaklık** $d(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \#\{i \mid c_i \neq b_i\}$ şeklinde tanımlanır.*

$\mathscr{C} \subset A^N$ kodunun üç temel parametresi vardır: Uzunluk, boyut, minimum uzaklık. N sayısına kodun **uzunluğu**, $\log_{|A|} |\mathscr{C}|$ sayısına kodun **boyutu** denir ve $\mathbf{b}(\mathscr{C})$ ile gösterilir. $\mathscr{C}$ kodunun **minimum uzaklığı**

$$\delta(\mathscr{C}) = \min\{d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathscr{C},\ \mathbf{c} \neq \mathbf{b}\}$$

ifadesiyle tanımlanır. Minimum uzaklığı δ olan K boyutlu $\mathscr{C}$ kodu için $[N, K, \delta]$ parametreli ifadesi kullanılır.

Bundan sonra A alfabesi sonlu cisim olarak kabul edilip; lineer kodlar üzerinde çalışılacaktır. $\mathbb{F}_q$ sonlu bir cisim olmak üzere bir $\mathscr{C} \subset \mathbb{F}_q^N$ alt uzayına **lineer kod** denir.

Tanım 6.1.3. *$\boldsymbol{c} \in \mathbb{F}_q^N$ kod kelimesinin sıfırdan farklı harf sayısına $\mathbf{c}$ kelimesinin **Hamming ağırlığı** denir ve $w(\boldsymbol{c})$ ile gösterilir.*

Önerme 6.1.4. *[42] $\mathscr{C} \subset \mathbb{F}_q^N$, $[N, K, \delta]$ parametreli lineer kod olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $\delta(\mathscr{C}) = \min\limits_{\boldsymbol{c} \in \mathscr{C} \setminus \{0\}} w(\boldsymbol{c})$.

(ii) $K = \mathrm{boy}_{\mathbb{F}_q}(\mathscr{C})$.

Örnek 6.1.5. $\mathscr{C} = \{000, 111\} \subset \mathbb{F}_2^3$ *alt vektör uzayı* $[3,1,3]_2$ *parametreli bir lineer kodtur.* $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisi* $\mathscr{C}$ *kodunun bir üreteç matrisidir. Bu örnek üzerinden kodlamayı açıklayalım.* G *matrisinin satır sayısı kodlamada mesajın harf sayısını gösterir.* $\mathscr{C}$ *kodu ile* 1 *mesajı* $1G = (1,1,1)$ *eşitliğinden* 111 *olarak kodlanır. Yani* 1 *harfli mesajı kodlamak için* 3 *harfe ihtiyaç vardır. Bu yüzden* $\mathscr{C}$ *kodunun* ***bilgi oranı*** $1/3$ *tür denir. Şimdi bu kodlamada mesaj iletirken gönderilmiş kod kelimesi hatalı alınırsa kodun düzeltebilme kapasitesini inceleyelim:*

$$\textit{gönderilen mesaj} \to \textit{gönderilen kod kelimesi} \to \textit{alınan kod kelimesi} \to \textit{alınan mesaj}$$

1 *mesajının* 111 *kodlaması bir hata yapılarak* 101 *şeklinde alınsaydı, alıcı için mesajın gönderilen kod kelimesi* 111 *veya* 000 *olabilir. Kodlama teoride alınan kod kelimesi, kendisine en yakın kod olarak çözülür. Bu takdirde* $d(111,101) = 1 < d(000,101) = 2$ *olduğundan gönderilen kod kelimesi* 111 *kabul edilir ve mesaj dogru alınır.*

$$1 \longrightarrow 111 \longrightarrow 101 \longrightarrow 1$$

Sonuç olarak kodlamada yapılan 1 *harf hatası düzeltilmiştir. Eğer* 0 *mesajı* 2 *hata ile* 101 *olarak alınsaydı gönderilen kod yine* 111 *olarak çözülecek ve yanlış mesaj alınacaktır. Sonuç olarak* $\mathscr{C}$ *kodu* 2 *hatayı düzeltememiştir.*

$$0 \longrightarrow 000 \longrightarrow 101 \longrightarrow 1$$

Tanım 6.1.6. *Uzunluğu* N*, boyutu* K *olan lineer kodun* ***bilgi oranı*** K/N *sayısı ile tanımlanır.*

Tanım 6.1.7. $\mathscr{C}$ *lineer kodu ve* $a \in \mathbb{Z}^+$ *sayısı verilsin.* $\mathscr{C}$ *lineer kodu alınan kod kelimesi üzerinde* a *veya daha az sayıda hata düzeltilebiliyor ise* $\mathscr{C}$ *koduna* ***v hata düzeltici*** *kod denir.*

Teorem 6.1.8. *[42] Minimum uzaklığı* δ *olan bir lineer kod* $\lfloor(\delta-1)/2\rfloor$ *hata düzeltici kodtur.*

Teorem 6.1.8 gereğince, bir kodun minimum uzaklığı ne kadar büyükse hata düzeltme kapasitesi de o kadar büyüktür. Dolayısıyla, kodlama teorisinin temel amaçlarından biri minimum uzaklığı büyük olan kodlar bulmaktır. Bu durumda doğal olarak, boyutu ve uzunluğu belli olan bir kodun minimum uzalığının alabileceği en büyük değer ne olabilir sorusu düşünülür. Aşağıda bir lineer kodun minimum uzaklığı için diğer parametrelerine bağlı bir üst sınır olan Singleton Eşitsizliği verilecektir. Böylece boyutu ve uzunluğu belli olan bir kodun minimum uzaklığının alabileceği en büyük değer belirlenir.

Teorem 6.1.9. *[42][Singleton Eşitsizliği] $\mathscr{C}$, $[N, K, \delta]_q$ parametreli bir kod ise*

$$\delta \leqslant N - K + 1$$

eşitsizliği vardır.

Uzunluğu ve boyutu aynı olan kodun minimum uzaklığı Singleton sınırına göre 1'dir, bu kodlara **aşikar** kod denir. $[N, K, \delta]_q$ parametreli kodu

$$\delta = N - K + 1$$

eşitliğini sağlıyorsa **Maksimum Uzaklıkta Ayrılabilen Kod** denir veya kısaca **MDS** kod denir. Kodlama teorisindeki önemli kodlardan birisidir, çünkü aynı uzunluk ve boyuta sahip kodlar arasında en büyük minimum uzaklığa sahiptir, dolayısıyla hata düzeltilebilme kapasitesi en fazla olan kodlardır.

Tanım 6.1.10. *$\mathscr{C}$, $[N, K, \delta]_q$ parametreli bir lineer kod olsun. Satırlarının kümesi $\mathscr{C}$ kodu için baz teşkil eden $K \times N$ boyutlu G matrisine, $\mathscr{C}$ kodunun **üreteç matrisi** denir. G matrisi $G = [I_K \ P_{K\times N-K}]$ formunda ise G matrisi **standart** formda denir.*

Her lineer kodun üreteç matrisine elementer satır işlemleri uygulayarak, sütunlarını yer değiştirerek ve herhangi bir sütununu sıfır olmayan bir skalerle çarparak üreteç matris, standart forma dönüştürülebilir [42, Teorem 5.5].

Tanım 6.1.11. *[43, Tanım 3] $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ $\mathbb{F}_q$ üzerinde N boyutlu iki lineer kod olsun. Eğer $\mathscr{C}_2 = \psi_{\pi,\boldsymbol{a}}(\mathscr{C}_1)$ olacak şekilde $\pi \in S_N$ permüntasyonu ve $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in (\mathbb{F}_q^*)^N$ elemanı varsa $\mathscr{C}_1$ ve $\mathscr{C}_2$ kodlarına **denktir** denir, burada $\psi_{\pi,\boldsymbol{a}}$ dönüşümü*

$$\begin{aligned} \psi_{\pi,\boldsymbol{a}} : \mathbb{F}_q^N &\rightarrow \mathbb{F}_q^N \\ (c_1, \ldots, c_N) &\mapsto (a_1 c_{\pi(1)}, \ldots, a_N c_{\pi(N)}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Örnek 6.1.12. *$\mathscr{C}_1 = \{0000, 0101, 0010, 0111\} \subset \mathbb{F}_3^3$ lineer kodu verilsin. C kodu*

$$\mathscr{C}_2 = \{0000, 2100, 0001, 2120\}$$

koduna denktir, çünkü $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ ve $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1, 1)$ alırsak $\mathscr{C}_2 = \psi_{\pi,\boldsymbol{a}}(\mathscr{C}_1)$'dir.

Bir lineer kodun üreteç matrisine elementer satır işlemleri uygulayarak elde edilen matrisin ürettiği kod, bu lineer kod ile aynıdır. Fakat bir lineer kod, üreteç matrisinin sütunlarını yer değiştirerek veya herhangi bir sütununun sıfır olmayan bir skalerle çarparak elde edilen matrisin tanımladığı kod ile denktir. Bu yüzden bir lineer kod, üreteç matrisinin standart formunun tanımladığı kod ile denktir [42, Teorem 5.4].

Tanım 6.1.13. *[44] $\mathscr{C}$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde $[N, K, \delta]$ parametreli bir lineer kod olsun. $\mathscr{C}$ kodunun her kelimesinin herhangi bir koordinatındaki harfin silinerek elde edilen koda $\mathscr{C}$ kodunun **delmesi** denir ve bu kod $\mathscr{C}^*$ ile gösterilir.*

Teorem 6.1.14. *[44] $\mathscr{C}$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde $[N, K, \delta]_q$ parametreli bir lineer kod olsun. $\mathscr{C}^*$ kodu , $\mathscr{C}$ kodunun i. koordinatının silinmesiyle üretilmiş delmesi olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) $\mathscr{C}_i$ bir lineer kodtur ve üreteç matrisi $\mathscr{C}$ kodunun üreteç matrisinin i. sütununun silinmesiyle elde edilir.

(ii) $\delta > 1$ olmak üzere $\mathscr{C}$ kodunun minimum ağırlığa sahip kod kelimesinin i. koordinatı sıfırdan farklı ise $\mathscr{C}_i$ kodu $[N-1, K, \delta-1]$ parametrelidir, aksi durumda $\mathscr{C}_i$ kodu $[N-1, K, \delta]$ parametrelidir.

(iii) $\delta = 1$ iken eğer $\mathscr{C}$ kodunun i. koordinatı sıfır olmayan kelimelerinin minimum ağırlığı 1 değilse $\mathscr{C}_i$, $[N-1, K, 1]$ parametreli bir kodtur, aksi durumda $K > 1$ ise $\delta^* > 1$ olmak üzere $\mathscr{C}_i$, $[N-1, K-1, \delta^*]$ parametreli bir kodtur.

Bu alt bölüm MDS lineer kodların çok önemli bir sınıfı olan polinom fonksiyonları kullanılarak inşa edilen Reed Solomon kodlar ile sonlandırılacaktır.

$L(K) = \{f \in \mathbb{F}_q[x] \mid \mathrm{der}(f) < K\} \subset \mathbb{F}_q[x]$ kümesi $\mathbb{F}_q$ üzerinde vektör uzayıdır. $\{1, x, x^2, \ldots, x^{K-1}\}$ kümesi bu vektör uzayının bir bazıdır. $0 \le K \le N$ olmak üzere

$\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_N\} \subseteq \mathbb{F}_q$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{c}} : L(K) \to \mathbb{F}_q^N, \quad f \mapsto (f(\mathbf{c}_1), \ldots, f(\mathbf{c}_N))$$

dönüşümü lineerdir, dolayısıyla Gör$(\mathrm{ev}_{\mathbf{c}})$ kümesi vektör uzayıdır.

Tanım 6.1.15. *Gör$(ev_{\mathbf{c}}) = \{(f(\mathbf{c}_1), \ldots, f(\mathbf{c}_N)) \mid f \in L(K)\} \subset \mathbb{F}_q^N$ alt vektör uzayına* ***Reed Solomon(RS) Kod*** *denir ve $RS_K(\mathbf{c})$ ile gösterilir.*

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{F}_q^*$ elemanı verilsin. Aşağıda tanımlanan hesaplama fonksiyonu ile RS kodlarını içeren daha genel kodlar elde edilir.

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}} : L(K) \to \mathbb{F}_q^N, \quad f \mapsto (a_1 f(c_1), \ldots, a_N f(c_N))$$

dönüşümü lineerdir ve

$$\text{Gör}(\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}}) = \{(a_1 f(c_1), \ldots, a_N f(c_N)) \mid f \in L(K)\} \subset \mathbb{F}_q^N$$

vektör uzayına **Genelleştirilmiş Reed Solomon(GRS) Kod** denir ve $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ ile gösterilir. Eğer $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ kodunda $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ alınırsa $\mathrm{RS}_K(\mathbf{c})$ kodunu verir.

$\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}}$ lineer dönüşümünün çekirdeği

$$\text{Çek}(\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}}) = \{f \in L(K) \mid f(c_1) = \cdots = f(c_N) = 0\}$$

kümesidir, çünkü her a_i sıfırdan farklıdır. $f \in$ Çek$(\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}})$ olsun. f polinomunun $\mathbb{F}_q$ cisminde minimum N tane kökü vardır, ayrıca $\operatorname{der} f \leq K - 1 \leq N$ olduğundan $f = 0$. Buradan Çek$(\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}}) = \{0\}$ olup $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \simeq L(K)$. Sonuç olarak $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ kodunun boyutu $\operatorname{boy} L(K) = K$'dır. $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ kodunun minimum uzaklığını belirlemek için bir $\mathbf{c} = (a_1 f(c_1), \ldots, a_N f(c_N))$ kod kelimesini alalım. $\operatorname{der}(f) \leq K - 1$ olduğundan f polinomunun maksimum kök sayısı $K-1$'dir. Dolayısıyla her kod kelimesinin ağırlığı minimum $N-K+1$ olacağından $\delta(\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a}))$ en az $N-K+1$'dir. Diğer yandan Singleton sınırından $\delta(\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})) \leq N - K + 1$ olduğundan $\delta(\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})) = N - K + 1$. Sonuç olarak $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ kodu $[N, K, N - K + 1]$ parametreli MDS kodtur.

$\mathrm{ev}_{\mathbf{c},\mathbf{a}}$ lineer dönüşümü birebir olduğundan $L(K)$ vektör uzayının bir bazının bu dönüşüm altındaki görüntüsü $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c},\mathbf{a})$ vektör uzayı için bir bazdır. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_1c_1 & a_2c_2 & \dots & a_Nc_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1c_1^{K-1} & a_2c_2^{K-1} & \dots & a_Nc_N^{K-1} \end{bmatrix}$$

matrisi $\mathrm{GRS}_K(\mathbf{c},\mathbf{a})$ kodunun bir üreteç matrisidir.

6.2 Parametrik Kodlar ve Sıfırlayan İdealler

Son kesimde $\mathbb{F}_q[x]$ polinom halkasının derecesi K'dan az olan polinomlarının $\mathbb{F}_q$ cisminin bir alt kümesinde hesaplanarak $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir kod tanımlanmıştır. Şimdi benzer şekilde simitli çeşitlemler ve $S = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{A}} S_\alpha$ homojen koordinat halkasının S_α vektör uzayının polinomları kullanılarak tanımlanan bir lineer kod olan simitli kodlardan bahsedilecektir.

X, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ cismi üzerinde bir simitli çeşitlem ve $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{K}^r$ elemanları $Y = \{[P_1], \dots, [P_N]\} \subset X$ alt kümesinin elemanlarının sabit bir temsilcisi olsun. Bir $\alpha \in \mathbb{N}\beta$ değeri için Y üzerinde **hesaplama fonksiyonu** aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathrm{ev}_Y : S_\alpha \to \mathbb{K}^N, \quad F \mapsto (F(P_1), \dots, F(P_N)).$$

ev_Y hesaplama fonksiyonu $\mathbb{K}$ lineer fonksiyondur, bu yüzden $\mathrm{ev}_Y(S_\alpha) \subset \mathbb{F}_q^N$ görüntü kümesi de alt vektör uzayıdır. $\mathscr{C}_{\alpha,Y} = \mathrm{ev}_Y(S_\alpha) \subset \mathbb{F}_q^N$ alt uzayına da Y alt kümesinde hesaplanan α mertebeli **hesaplama kodu** veya **genelleştirilmiş simitli kod** denir. Özel olarak

- $Y = T_X$ ise $\mathscr{C}_{\alpha,Y} = \mathrm{ev}_Y(S_\alpha) \subset \mathbb{F}_q^N$ hesaplama koduna α mertebeli **simitli kod**
- Y kümesini bir $Q \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$ matrisinin tanımladığı parametrik simitli küme alırsak $\mathscr{C}_{\alpha,Q} = \mathrm{ev}_{T_{X,Q}}(S_\alpha) \subset \mathbb{F}_q^N$ alt uzayına **parametrik simitli kod**

denir.

Σ, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir simpleksel tam fan olmak üzere Σ fanının ışınları $\rho_1, \dots, \rho_r \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{Z}^n$ kafes ilkel vektörleriyle üretilsin. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ cismi üzerinde $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$

fanına karşılık gelen X simitli çeşitlemi $T_X \simeq (\mathbb{K}^*)^n$ split simiti içersin. $\mathrm{Cl}(X)$ grubunun sıfırlayan elemanı olmasın. Bölüm 5'ten X simitli çeşitleminin koordinat halkası S'nin $\mathrm{der}_{\mathbb{Z}^d}(x_i) = \beta_i$ olmak üzere $\mathscr{A} = \mathbb{Z}_d$-dereceli olduğunu hatırlayalım. Bölüm 5'te X simitli çeşitleminin $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin sıfırlayan idealinin üreteçlerini belirleyen metotlar verilmiştir. Bu kesim $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodların parametrelerinin hesaplanması üzerinedir. $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodunun **uzunluğunu** $T_{X,Q}$ çeşitleminin eleman sayısı belirler. $\mathscr{C}_{\alpha,Q} \subseteq \mathbb{F}_q^N$ alt uzayının boyutu kodun **boyutunu** verir, yani $K = \mathrm{boy}_{\mathbb{K}}(\mathscr{C}_{\alpha,Q})$. Ağırlığı en az olan $c \in \mathscr{C}_{\alpha,Q} \setminus \{0\}$ kod kelimesinin ağırlığı kodun **minimum uzaklığıdır.**

$\alpha \in \mathbb{N}\beta$ olmak üzere $\{\mathbf{x}_1^{\mathbf{m}} \ldots, \mathbf{x}_K^{\mathbf{m}}\}$ monomlar kümesi S_α vektör uzayının bir bazı ve $T_{X,Q} = \{P_1, \ldots, P_N\}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_N) \\ \mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(P_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(P_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_N) \end{bmatrix}$$

$\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun bir üreteç matrisidir.

Uyarı. X bir simitli çeşitlem olmak üzere $Y = \{[P_1], \ldots, [P_N]\}$ alt çeşitleminin elemanlarının farklı temsilcileri kullanıldığında elde edilen kodlar denktir. $G_1, \ldots, G_N \in G$ $(\mathbb{T}_X \simeq (\mathbb{K}^*)^r/G)$ olmak üzere her $[P_i]$ elemanının temsilcisini G_iP_i alabiliriz, çünkü her i için $[P_i] = [G_iP_i]$. S_α vektör uzayının bir bazı $\{\mathbf{x}_1^{\mathbf{m}} \ldots, \mathbf{x}_K^{\mathbf{m}}\}$ monomlar kümesi olsun. Y kümesinin temsilcilerini $P_1, \ldots, P_N$ kabul edersek yukarıda verilen üreteç matrisinden kod

$$\{a_1a_2\cdots a_N \mid a_i = c_1\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_i) + c_2\mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(P_i) + \cdots + c_K\mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_i),\ c_j \in \mathbb{F}_q\}$$

şeklinde olur. Eğer $Y = \{[G_1P_1], \ldots, [G_NP_N]\}$ alırsak kodun üreteç matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_1)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(G_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_N)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(G_N) \\ \mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(P_1)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(G_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(P_N)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_2}(G_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_1)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(G_1) & \ldots & \mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_N)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(G_N) \end{bmatrix}$$

olur ve dolayısıyla kodu

$$\{a_1a_2\cdots a_N \mid a_i = c_1\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(P_i)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(G_i) + \cdots + c_K\mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(P_i)\mathbf{x}^{\mathbf{m}_K}(G_i),\ c_j \in \mathbb{F}_q\}$$

kümesi verir. Herhangi $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_j}, \mathbf{x}^{\mathbf{m}_i} \in S_\alpha$ monomu ve her $k = 1, \ldots, N$ için $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i}(G_k) = \mathbf{x}^{\mathbf{m}_j}(G_k)$ eşitliği vardır, çünkü $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}_j}$ binomu homojendir ve $(\mathbf{x}^{\mathbf{m}_i} - \mathbf{x}^{\mathbf{m}_j})(1, 1, \ldots, 1) = 0$. Bu takdirde $P_1, \ldots, P_N$ temsilcileriyle tanımlanan kodunun her kelimesinin i. koordinatını $\mathbf{x}^{\mathbf{m}_1}(G_i)$ ile çarparak $G_1P_1, \ldots, G_NP_N$ temsilcilerinin verdiği kod elde edilir ve Tanım 6.1.11 gereği kodlar denktir.

Kodlama teorinin önemli amaçlarından biri kodun parametrelerini hızlı bir şekilde bulmak için yöntemler geliştirmektir. Bu bölümde bir çeşitlemin Hilbert fonksiyonu tanımlanıp, özellikleri incelenerek parametrik simitli kodların boyutu ile ilişkilendirilecektir.

Tanım 6.2.1. *I, $\mathscr{A}$-dereceli S polinom halkasının homojen ideali olmak üzere I idealinin* ***dereceli Hilbert fonksiyonu****,*

$$H_I(\alpha) = \operatorname{boy}_{\mathbb{K}} S_\alpha - \operatorname{boy}_{\mathbb{K}} I_\alpha$$

şeklide tanımlanır.

X bir simitli çeşitlem ve $Y \subset X$ bir alt kümesi olsun. $I(Y)$ sıfırlayan idealinin Hilbert fonksiyonu Y alt kümesinin Hilbert fonksiyonu olarak da isimlendirilir ve H_Y olarak gösterilir.

$$H_Y(\alpha) = \operatorname{boy}_{\mathbb{K}} S_\alpha - \operatorname{boy}_{\mathbb{K}} I_\alpha(Y)$$

Önerme 6.2.2. *[21, Önerme 6.1] $\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ kodunun boyutu $H_Y(\alpha)$'dır.*

İspat 13. *ev_Y hesaplama fonksiyonunun çekirdeği $I_\alpha(Y)$, görüntüsü $\mathscr{C}_{\alpha,Y} = ev_Y(S_\alpha)$ olduğundan $ev_Y(S_\alpha) \simeq S_\alpha/I_\alpha(Y)$'dir. Böylece $\mathbf{b}(\mathscr{C}_{\alpha,Y}) = \operatorname{boy}_{\mathbb{F}_q} \mathscr{C}_{\alpha,Y} = H_Y(\alpha)$ olur.*

$\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ kodunun boyutu yukarıdaki önermede açıklandığı gibi Y'nin derecelendirilmiş Hilbert fonksiyonu aracılığıyla hesaplanabilir. Hilbert fonksiyonun özelliklerini inceleyerek kod ile ilgili bilgi sahibi olabiliriz. Şimdi Hilbert fonksiyonun bazı özellikleri verilecektir. Aşağıda $\mathbb{N}\beta \subset \mathbb{Z}^d$ afin yarıgrubu üzerinde $\preceq$ kısmi sıralama bağıntısı $\alpha \preceq \alpha' \iff \alpha' - \alpha \in \mathbb{N}\beta$ şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 6.2.3. *[12, Teorem 3.7]*

(i) $I(Y)$ idealinin her minimal üretecinin α_i derecesi için, eğer $\alpha - \alpha_i \notin \mathbb{N}\beta$ ise $H_Y(\alpha) = boy_{\mathbb{F}_q} S_\alpha$ sağlanır.

(ii) Eğer her $j \in 1, \ldots, r$ için $S/I(Y)$ halkasının β_j dereceli sıfır bölen olmayan elemanı varsa, her $\alpha \preceq \alpha'$ için $H_Y(\alpha) \leq H_Y(\alpha')$ olur.

(iii) Her $\alpha \in \mathbb{N}\beta$ için $H_Y(\alpha) \leq |Y|$.

Lemma 6.2.4. *[12, Lemma 3.6] $Y \subset T_X$ olmak üzere her $\alpha \in \mathbb{N}\beta$ için $S/I(Y)$ bölüm halkasının α dereceli sıfır bölen olmayan elemanı vardır.*

Önerme 6.2.5. *[45, Önerme 1.9] $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ ve $e_j \in \mathbb{Z}^r$ standart baz vektörü olsun. Bu takdirde herhangi $j \in [r]$ ve herhangi bir α için $H_Y(\alpha) = H_Y(\alpha + e_j)$ ise her k pozitif tam sayısı için $H_Y(\alpha + e_j) = H_Y(\alpha + ke_j)$ olur, yani Hilbert fonksiyon e_j yönünde sabit hale gelir.*

Önerme 6.2.6. *[12, Önerme 4.3] $S/I(Y)$ halkasının $\alpha' \in \mathbb{N}\beta$ dereceli sıfır bölen olmayan elemanı varsa ve $H_Y(\alpha) = H_Y(\alpha+\alpha')$ eşitlği sağlanıyorsa $\mathscr{C}_{\alpha,Y}, \mathscr{C}_{\alpha+\alpha',Y}$ kodları denktir. Böylece Y üzerinde tanımlanan denk olmayan $\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ hesaplama kodları sonlu tanedir.*

Her α için $\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ kodunun boyutu $H_Y(\alpha)$, $|Y|$ ile üstten sınırlıdır. Buradan kodun uzunluğunun Hilbert fonksiyonu kullanılarak hesaplanabileceği çıkar. Diğer taraftan $H_Y(\alpha) = |Y|$ eşitliğini sağlayan α değerleri, boyutu ve uzunluğu aynı olan aşikar kodları verir ve hangi α değerleri için $\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ kodunun aşikar olmadığı belirlenir. Şimdi ise aşikar olmayan kodları belirleyen aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 6.2.7.

$$\mathrm{reg}(Y) = \{\alpha \in \mathbb{N}\beta \mid H_Y(\alpha) = |Y|\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye Y kümesinin ***düzenlilik kümesi*** *denir.*

$\mathscr{C}_{\alpha,Y}$ kodun uzunluğunu bulmak için $\operatorname{reg}(Y)$ kümesinin bir elemanını belirlemek yeterlidir. Genelde $\operatorname{reg}(Y)$ kümesi tam olarak belli değildir, bazı özel durumlarda ise bir alt kümesi verilmiştir. Fakat aşağıda vereceğimiz güzel durumda bu küme tam olarak belirlenmiştir.

Önerme 6.2.8. *[12, Önerme 3.12] $X = \mathbb{P}(w_1, \dots, w_r)$ ağırlıklı projektif uzay ve $Y \subset X$ olsun öyle ki $S/I(Y)$ halkasının 1 dereceli sıfır bölen olmayan elemanı olsun. Bu şartlar altında*

$$\operatorname{reg}(Y) = \{1 + a_Y + n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

eşitliğini veren bir a_Y tam sayısı vardır. Üstelik a_Y değeri $I(Y)$ idealinin Hilbert serisine paralel olan rasyonel fonksiyonun derecesidir. Özel olarak $Y \subset \mathbb{T}_X$ ve $w = 1$ durumunda da geçerlidir.

$X = \mathbb{P}(w_1, \dots, w_r)$ ağırlıklı projektif uzay ve Y simit iken a_Y değerinin formülü mevcuttur. Bu formül $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ kümesinin ürettiği $\mathbb{N}W$ yarıgrubunun Frobenius sayısını içermektedir. $\mathbb{N}W$ yarıgrubuna ait olmayan en büyük sayıya bu yarıgrubun **Frobenius sayısı** denir ve $g(W)$ ile gösterilir.

Sonuç 6.2.9. *[20, Sonuç 3.9] $X = \mathbb{P}(w_1, \dots, w_r)$ ağırlıklı projektif uzay ve $Y = \mathbb{T}_X$ ise*

$$a_Y = (q-2)[w_1 + \cdots + w_r + g(W)] + g(W)$$

olur.

X simitli çeşitleminin Y alt kümesinin sıfırlayan idealinin üreteç sayısı yüksekliği kadarsa bu alt kümeye **tam kesişim** denir. Y bir tam kesişim ise $\operatorname{reg}(Y)$ düzenlilik kümesi tam olarak bulabileceğimiz bir teori şimdilik olmasa bile bir alt kümesi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 6.2.10. *[12, Teorem 3.6] Y, X simitli çeşitleminin tam kesişim bir alt kümesi ve $I(Y)$ sıfırlayan idealinin üreteçlerinin dereceleri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ olsun. Eğer her $j \in [r]$ için $S/I(Y)$ halkasının β_j dereceli sıfır bölen olmayan elemanı mevcut ise*

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \mathbb{N}\beta \subset \operatorname{reg}(Y)$$

olur.

6.3 $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ Kodunun Uzunluğu

Tezin kalan kısmında [23] makalesinde elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

Bu bölümde direk $T_{X,Q}$ kümesinin parametrizasyonu aracılığıyla kodun uzunluğunu hesaplayan bir algoritma verilecektir. $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodunun uzunluğu $T_{X,Q}$ kümesinin sıfırlayan ideali yardımıyla, $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ kümesinin bir elemanı bulunarak hesaplanabilir. Fakat her durum için bunu bulmak kolay değildir. $I(T_{X,Q})$ idealinin üreteçleri $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ dereceli tam kesişim ise Teorem 6.2.10 gereğince $\alpha_1+\cdots+\alpha_n \in \operatorname{reg}(T_{X,Q})$ olur. Ama $T_{X,Q}$ tam kesişim değilse, $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ kümesine ait bir eleman belirli değildir. Hatta Örnek 6.3.4'te gösterildiği gibi $|T_{X,Q}|$ değeri ile $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ kümesi belirlenebilir.

T_X ve $T_{X,Q}$ kümelerinin

$$[p_1:\cdots:p_r][p'_1:\cdots:p'_r] = [p_1p'_1:\cdots:p_rp'_r]$$

şeklinde tanımlanan işleme göre grup olduğu aşikardır. Diğer yandan

$$\varphi_Q : (\mathbb{K}^*)^s \to T_{X,Q}, \quad \mathbf{t} \to [\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}:\cdots:\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}]$$

dönüşümü bir grup epimorfizmasıdır. Böylece $T_{X,Q} \simeq (\mathbb{K}^*)^s/\text{Çek}(\varphi_Q)$ olur ve

$$|T_{X,Q}| = |(\mathbb{K}^*)^s|/|\text{Çek}(\varphi_Q)| = (q-1)^s/|\text{Çek}(\varphi_Q)|$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodun uzunluğunun $|\text{Çek}(\varphi_Q)|$ sayısına bağlıdır.

$\square_q = [0,q-2]^s$, $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$ sonlu cismi tarafından belirlenen $\mathbb{R}^s$ de hiperküp ve η, $\mathbb{K}^*$ cisminin bir üreteci olsun. Aşağıda $\mathbf{H} = \{\mathbf{h} \in \square_q \cap \mathbb{Z}^s \mid \mathbf{h}Q\phi \equiv 0 \pmod{q-1}\}$ olmak üzere Çek(φ_Q) çekirdeği ile $\mathbf{H}$ kümesi arasında birebir eşleşme olduğu gösterilmiştir.

Önerme 6.3.1. *Çek$(\varphi_Q) = \{(\eta^{h_1},\ldots,\eta^{h_s}) | \mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_s) \in \boldsymbol{H}\}$, dolayısıyla $|$Çek$(\varphi_Q)| = |\boldsymbol{H}|$ olur.*

İspat 14. $\mathbf{t}$ *∈ Çek$(\varphi_Q) \subset (\mathbb{K}^*)^s$ olsun. Böylece $[\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}:\cdots:\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}] = [1:\cdots:1]$ olur, yani $(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1},\ldots,\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r})$ elemanı, $G(1,\ldots,1) = G = \{\mathbf{x} \in (\mathbb{K}^*)^r \mid \forall\ \mathbf{m} \in L_\beta$ için $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = 1\}$ yörüngesinin elemanıdır. $L_\beta = $ Gör(ϕ) eşitliğinden her $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$ elemanı için*

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}}(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1},\ldots,\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}) = \mathbf{t}^{Q\mathbf{m}} = \mathbf{t}^{Q\phi\boldsymbol{c}} = 1 \tag{6}$$

olur.

Her $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^s$ *için* $\mathbf{t} = (\eta^{h_1}, \ldots, \eta^{h_s})$ *eşitliği sağlanacak şekilde bir* $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_s) \in H$ *vardır. Bu durumda (6) eşitliğinden her* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$ *için* $\eta^{\boldsymbol{h}Q\phi\boldsymbol{c}} = 1$ *olur, böylece* $\boldsymbol{h}Q\phi\boldsymbol{c} \equiv 0 \ (mod\ q-1)$. $\boldsymbol{c}$ *vektörleri* $\mathbb{Z}^n$ *uzayının standart bazından seçilirse,* $\boldsymbol{h}Q\phi \equiv 0 \ (mod\ q-1)$ *denkliği elde edilir. Bu takdirde* $Çek(\varphi_Q) \subseteq \{(\eta^{h_1}, \ldots, \eta^{h_s}) \,|\, \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_s) \in \boldsymbol{H}\}$ *kapsaması sağlanır. Ters kapsama aşikardır. Öte yandan* η *elemanının mertebesi* $q-1$ *ve her* $h_i \in [0, q-2]$*, olduğundan* $Çek(\varphi_Q)$*,* $\boldsymbol{H}$ *kümeleri birebir örtüşmektedir. Böylece* $|Çek(\varphi_Q)| = |\boldsymbol{H}|$ *olur ki istenendir.*

Prosedür 6.3.2. *Aşağıdaki* `Macaulay2` *prosedürüyle* Q*,* ϕ *matrisi ve* q *değeri girilen* $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ *kodunun uzunluğunu hesaplayabiliriz. Beşinci adımdaki* `A` *listesi* $\square_q \cap \mathbb{Z}^s$ *kümesindeki elemanları verir. Bu kümedeki elemanların* $\boldsymbol{H}$ *kümesine ait olup olmadığı altıncı adımda belirlenir, böylece* $k = |\boldsymbol{H}|$ *sayısı hesaplanır.*

```
i2 : r=numRows Phi;s=numRows Q;n=numColumns Phi;k=0;
i3 : L=for i from 1 to q-1 list i;
i4 : L= set L;L=L^**(s);L=toList L;
i5 : A= apply(L,i->toList deepSplice i)
i6 : scan(A,i-> if ((matrix{i}*Q*Phi)%(map((ZZ)^1,n,(i,j)->(q-1))))
==(matrix mutableMatrix(ZZ,1,n)) then (print i,k=k+1));
i7: length=((q-1)^s)/k
```

Örnek 6.3.3. *Örnek 5.2.6'da verilen* $T_{X,Q}$ *parametrik kümesi tam kesişim olduğu için* $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ *kümesi ile* $\mathscr{C}_{\alpha,T_{X,Q}}$ *kodunun uzunluğu hesaplanabilir. İlk adım olarak Prosedür 5.2.5 ile* $I(T_{X,Q})$ *ideali hesaplanır:*

$$I(T_{X,Q}) = \langle x_1^2 x_2 - x_4, x_1^5 - x_3^5 \rangle.$$

S homojen koordinat halkasının değişkenlerin derecesi

$$\operatorname{der}(x_1) = \operatorname{der}(x_3) = \beta_1 = \beta_3 = (1,0), \quad \operatorname{der}(x_2) = \beta_2 = (0,1), \quad \operatorname{der}(x_4) = \beta_4 = (2,1),$$

olduğundan $I(T_{X,Q})$ *idealinin üreteçlerinin dereceleri* $\alpha_1 = \operatorname{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_1^2 x_2 - x_4) = (2,1)$ *ve* $\alpha_2 = \operatorname{der}_{\mathbb{Z}^2}(x_1^5 - x_3^5) = (5,0)$ *olur. Bu takdirde Teorem 6.2.10 ile* $\alpha_1 + \alpha_2 = (7,1)$*,* $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ *kümesinin elemanıdır. Prosedür 5.2.5 ile* $I(T_{X,Q})$ *idealini hesapladıktan sonra [12, Teorem 3.1] gereği aşağıdaki komutla kodun uzunluğu* 5 *olarak hesaplanır.*

```
i9 : hilbertFunction({7,1},IYQ)
```

Aşağıdaki girdilerle Prosedür 6.3.2 sonucunda aynı değeri bulunur:

```
i1 : q=11;Phi=matrix{{1,0},{0,1},{-1,2},{0,-1}}; Q=matrix {{1,2,3,4}};
```

Aşağıdaki örnek, kodun uzunluğunun $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ kümesini kullanmadan hesaplamanın avantajlarını gösteriyor. Kodun uzunluğu ile $\operatorname{reg}(T_{X,Q})$ kümesini belirlenip, aşikar olmayan kodların sonlu listesi bulunmuştur.

Örnek 6.3.4. *X, $\mathbb{F}_5$ üzerinde $\mathbb{P}(2,2,3,5)$ ağırlıklı projektif uzay ve Q, düğümler kümesi $V=\{1,2,3,4\}$ kenarlar kümesi $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\}$ olan grafın matrisi olsun. $T_{X,Q}\subseteq\mathbb{P}(2,2,3,5)$ alt grubunun eleman sayısını Hilbert fonksiyonu ile hesaplamak için öncelikle $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin minimal üreteçlerini Prosedür 5.1.6 ile bulalım:*

$$x_1^4-x_2^4,\quad x_1^2x_2^6-x_3^2x_4^2,\quad x_3^6-x_1^2x_2^2x_4^2,\quad x_2^4x_3^4-x_4^4.$$

$I(T_{X,Q})$ tam kesişim değildir. Bu sebeple son örnekteki yöntem ile $|T_{X,Q}|$ sayısı hesaplanamaz. Aşağıdaki girdilerle direk Prosedür 6.3.2 aracılığıyla hesaplanabilir:

```
i1 : q=5; Phi= syz matrix {{2,2,3,5}};
Q=matrix{{1,0,0,1},{1,1,0,0},{0,1,1,0},{0,0,1,1}};
```

Çıktı olarak $|T_{X,Q}|=32$ verir. Bu da, $T_{X,Q}$ kümesinin T_X simitinin elemanlarının yarısını içerdiğini gösterir.

$|T_{X,Q}|=32$ olduğundan,

$$\operatorname{reg}(T_{X,Q})=\{i\in\mathbb{N}\beta\mid H_{T_{X,Q}}(i)=32\}$$

şeklinde tanımlanır. Teorem 6.2.4 ve Lemma 6.2.3 ile $w\in\{2,3,5\}$ olmak üzere her $i>0$ için $H_{T_{X,Q}}(i)\leq H_{T_{X,Q}}(i+w)\leq 32$ sağlanır. Dolayısıyla bazı $i=i_0$ için $H_{T_{X,Q}}(i_0)=32$ olması $H_{T_{X,Q}}(i_0+2)=H_{T_{X,Q}}(i_0+3)=32$ eşitliğini gerektirir. Dolayısıyla her $j>3$ için $H_{T_{X,Q}}(i_0+j)=32$ olur. Bu yüzden amaç i_0 ve $H_{T_{X,Q}}(i_0+1)$ değerlerini bulmaktır. Aşağıdaki komutlar ile bu değerler hesap edilir:

```
for i from 0 to 100
do (
if hilbertFunction(i,ITQ)<32 then print hilbertFunction(i,ITQ)
```

```
else stop
and print [i,hilbertFunction(i,ITQ),hilbertFunction(i+1,ITQ)]
);
```

Sonuç olarak $1, 0, 2, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 14, 18, 19, 21, 24, 24, 28, 27, 31, 29, [23, 32, 31]$ *çıktısı elde edilir. Burada,* $[23, 32, 31]$ *çıktısı* $i_0 = 23$, $H_{T_{X,Q}}(i_0) = 32$ *ve* $H_{T_{X,Q}}(i_0+1) = 31$ *anlamına gelir, bu yüzden* $\mathrm{reg}(T_{X,Q}) = \{23\} \cup \{25 + \mathbb{N}\}$ *olur. Ayrıca*

$$\mathbb{N}\beta \setminus \mathrm{reg}(T_{X,Q}) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\} \cup \{24\}$$

olmak üzere, her $\alpha \in \mathbb{N}\beta \setminus \mathrm{reg}(T_{X,Q})$ *için uzunluğu* 32*, boyutu yukarıda* $H_{T_{X,Q}}(\alpha)$ *fonksiyonu ile verilmiş aşikar olmayan* $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ *kodları bulunur.*

Aşağıda $\text{Çek}(\varphi_Q)$ çekirdeği ve

$$\mathscr{P} = \{(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{h}Q\phi = (q-1)\mathbf{k} \text{ ve } \mathbf{h} \in \square_q\}$$

politopunun kafes noktalarının birebir örtüştüğü gösterilmiştir. Böylece bu politop ile $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun uzunluğu hesaplanabilir.

Önerme 6.3.5. $|\text{\textit{Çek}}(\varphi_Q)| = |\mathscr{P} \cap \mathbb{Z}^{s+n}|$.

İspat 15. *Önerme 6.3.1 den, Çek*(φ_Q) *çekirdeği* $\boldsymbol{H}$ *kümesi ile birebir eşleşmektedir. Dolayısıyla,* $\boldsymbol{H}$, $\mathscr{P} \cap \mathbb{Z}^{s+n}$ *kümelerinin birebir örtüştüğünü göstermek yeterlidir. Eğer* $\mathbf{h} \in \boldsymbol{H}$ *ise* $\mathbf{h}Q\phi \equiv 0 \ (mod\ q-1)$ *şeklinde yazılır, yani* $\mathbf{h}Q\phi = (q-1)\mathbf{k}$ *olacak şekilde* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ *vardır. Buradan* $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathscr{P} \cap \mathbb{Z}^{s+n}$ *olur. Aslında her* $\mathbf{h}$ *elemanı için, bu şartı sağlayan sadece bir tane* $\mathbf{k}$ *vardır, çünkü* $(q-1)\mathbf{k} = (q-1)\mathbf{k}'$ *ifadesi* $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ *eşitliğini gerektirir. Tersine,* $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathscr{P} \cap \mathbb{Z}^{s+n}$ *olsun. Bu durumda* $\mathbf{h}Q\phi = (q-1)\mathbf{k}$ *elde edilir ve kanıt tamamlanır.*

Uyarı. $X = \mathbb{P}^{r-1}$, $n = r-1$ boyutlu projektif uzay iken, [14, Önerme 3.3] gereği $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^r$ olmak üzere

$$\mathbf{P} = \{(\mathbf{h}, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \mid \mathbf{h}Q = (q-1)\lambda + \mu\mathbf{1},\ \mathbf{h} \in \square_q \quad \text{ve } 0 \leq \mu \leq q-2\}$$

politopunun kafes noktaları ile $\text{Çek}(\varphi_Q)$ çekirdeği birebir örtüşüp, $|\text{Çek}(\varphi_Q)| = |\mathbf{P} \cap \mathbb{Z}^{s+r+1}|$ sağlanır. $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^{s+r+1}$ politopu özel bir durum için, yani X projektif uzay için verilmiştir ve $\mathbb{R}^{s+r+1}$ uzayındadır. Diğer yandan yukarıda verilen $\mathscr{P}$ politopu $\mathbb{R}^{s+n} = \mathbb{R}^{s+r-1}$ uzayındadır. Bu nedenle, $\mathscr{P}$ politopu ile kafes noktalarını daha hızlı bulunabilir.

Örnek 6.3.6. *[14, Örnek 3.4] ele alalım. Bu takdirde X, $\mathbb{F}_5$ üzerinde $\mathbb{P}^3$ projektif uzay ve ϕ matrisinin sütunları $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ ve $(-1,0,0,1)$ olur. Q, düğümler kümesi $V = \{1,2,3,4\}$, kenarlar kümesi $E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\}$ olan grafın matrisidir, yani Q matrisinin sütunları $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ ve $(1,0,0,1)$ vektörleridir.*

Sage [46] programı ile $0,04$ saniyede 4 boyutlu $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^7$ politopun 16 tane

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, k_1, k_2, k_3)$$

kafes noktası bulunmuştur, ayrıca $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^7$ politopu 16 köşenin dışbükey bürümüdür.

```
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 2, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 3, 0, 0, 0),
(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 2, 1, 2, 0, 0, 0), (1, 3, 1, 3, 0, 0, 0),
(2, 0, 2, 0, 0, 0, 0), (2, 1, 2, 1, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0), (2, 3, 2, 3, 0, 0, 0),
(3, 0, 3, 0, 0, 0, 0), (3, 1, 3, 1, 0, 0, 0), (3, 2, 3, 2, 0, 0, 0), (3, 3, 3, 3, 0, 0, 0).
```

Böylece, yukarıda verilen her (h_1, h_2, h_3, h_4) değeri için $(\eta^{h_1}, \eta^{h_2}, \eta^{h_3}, \eta^{h_4})$ noktası hesaplanarak, $T_{X,Q}$ alt grubunun 16 noktası bulunur. Diğer yandan, 5 boyutlu 32 köşenin dışbükey bürümü $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{R}^9$ politopunun 16 kafes noktası 1 dakikada hesaplanmıştır.

6.4 $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ Kodunun Minimum Uzaklığı

Bu bölümde, parametrik kodların minimum uzaklığı için bir alt sınır verilecektir. Bu sınırı ve önceki bölümlerde verilen yöntemleri bazı parametrik kodlar üzerinde uygulayarak parametreleri hesaplanacaktır.

Bölüm 6.3'de

$$\varphi_Q : (\mathbb{K}^*)^s \to T_{X,Q}, \quad \mathbf{t} \to [\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1} : \cdots : \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}]$$

grup homomorfizmasını tanımlayarak $|\mathbf{H}| = |\text{Çek}(\varphi_Q)|$ olmak üzere $|T_{X,Q}| = (q-1)^s/|\mathbf{H}|$ eşitliği verilmiştir. Herhangi $F \in S_\alpha$ polinomu için $F \circ \varphi_Q : (\mathbb{K}^*)^s \to \mathbb{K}$ bileşke fonksiyonu $(t_1, \ldots, t_s) \in (\mathbb{K}^*)^s$ olmak üzere $(F \circ \varphi_Q)(t_1, \ldots, t_s) = F(\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1} : \cdots : \mathbf{t}^{\mathbf{q}_r})$ şeklinde tanımlanır. Bir $ev_{T_{X,Q}}(F)$ kod kelimesinin ağırlığı, kodun uzunluğundan F polinomunun $T_{X,Q}$ parametrik kümesindeki kök sayısının çıkarılması ile bulunur, bu yüzden öncelikle $F \circ \varphi_Q$ polinomunun $(\mathbb{K}^*)^s$ kümesindeki köklerinin sayısı hesaplanmalıdır. Aşağıdaki eşitsizlik bu amaç için kullanılacaktır.

Lemma 6.4.1. *[16, Lemma 3.2] $G(y_1, y_2, \ldots, y_s)$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde d toplam dereceli sıfır olmayan bir polinom olsun. G polinomunun $(\mathbb{K}^*)^s$ kümesindeki kök sayısı $|V(G) \cap (\mathbb{K}^*)^s| \leq d(q-1)^{s-1}$ eşitsizliğini sağlar.*

Herhangi bir $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \in S_\alpha$ monomunda her x_i değişkeni yerine $\mathbf{y}^{\mathbf{q}_i}$ monomu yazılırsa $\mathbf{y}^{Q\mathbf{a}} = y_1^{Q_1\mathbf{a}} \cdots y_s^{Q_s\mathbf{a}}$ elde edilir ve Q_i, Q matrisinin i. satırı olmak üzere $\mathrm{der}_{y_i}(\mathbf{y}^{Q\mathbf{a}}) = Q_i\mathbf{a}$ sağlanır. $Q_i\mathbf{a}$ monomunun $q-1$ ile bölümünden kalanı $\overline{Q_i\mathbf{a}}$ ile gösterelim. Aşağıdaki sayı S_α vektör uzayındaki monomların karşılık geldiği $\mathbf{y}^{Q\mathbf{a}}$ monomlarının $y_1^{q-1}, \ldots, y_n^{q-1}$ monomlarına bölümünden kalan monomların toplam derecesininin maksimum değerini belirler ve aşağıda verilen alt sınır için çok önemlidir:

$$d(\alpha, Q) = \max\{\overline{Q_1\mathbf{a}} + \cdots + \overline{Q_s\mathbf{a}} \quad | \quad \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in S_\alpha\}.$$

Teorem 6.4.2. *Yukarıda verilen gösterimler ile $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodun minimum uzaklığı*

$$\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_{X,Q}}) \geq \frac{(q-1)^{s-1}}{|\boldsymbol{H}|}[q-1-d(\alpha,Q)]$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat 16. *$F \in S_\alpha$ polinomuna karşılık gelen $ev_{T_{X,Q}}(F)$ kod kelimesini $\boldsymbol{c}$ ile gösterelim. $\boldsymbol{c}$ kelimesinin ağırlığı sıfır olmayan harflerinin sayısıdır veya toplam harf sayısı ile F polinomunun $T_{X,Q}$ üzerindeki köklerinin sayısının farkıdır: $|T_{X,Q}| - |V_X(F) \cap T_{X,Q}|$. Bu sebeple sıfır olmayan kod kelimelerinin ağırlıklarının minimumu*

$$\delta(\mathscr{C}_{\alpha,Q}) = |T_{X,Q}| - max\{|V_X(F) \cap T_{X,Q}| \mid F \in S_\alpha \setminus I_\alpha(T_{X,Q})\}$$

eşitliği ile verilir. Her $F \in S_\alpha$ homojen polinomu için,

$$F \in I(T_{X,Q}) \iff F \circ \varphi_Q \in I((\mathbb{K}^*)^s)$$

ifadesi doğrudur. Lemma 5.1.1, $I((\mathbb{K}^*)^s)$ idealinin $\mathscr{G} = \{y_1^{q-1} - 1, \ldots, y_s^{q-1} - 1\}$ binomları tarafından üretildiğini verir. Bu takdirde $F(\boldsymbol{y}^{\mathbf{q}_1}, \ldots, \boldsymbol{y}^{\mathbf{q}_r}) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ polinomunun $\mathscr{G}$ kümesinde bulunan binomlara bölümünden kalan G olmak üzere, $F \notin I(T_{X,Q})$ ise $G \neq 0$ olur. Aynı zamanda G polinomunun toplam derecesi yukarıda verdiğimiz $d(\alpha, Q)$ sayısı ile üstten sınırlıdır. Lemma 6.4.1 gereği G polinomunun $(\mathbb{K}^*)^s$ kümesinde en fazla *kök sayısı* $d(\alpha,Q)(q-1)^{s-1}$ *dır.*

$T_{X,Q}$ *kümesinde bir* $[P]=[\mathbf{t}^{\mathbf{q}_1}:\cdots:\mathbf{t}^{\mathbf{q}_r}]$ *noktası aşağıda verilen özelliği sağlar:*

$$[P]\in V_X(F) \iff \forall\,(t_1,\ldots,t_s)\in\varphi_Q^{-1}([P])\; için\, G(t_1,\ldots,t_s)=0.$$

Bu özellik ile $|V_X(F)\cap T_{X,Q}|=\frac{|V(G)\cap(\mathbb{K}^*)^s|}{|\boldsymbol{H}|}$ *eşitliği elde edilir, dolayısıyla*

$$|V_X(F)\cap T_{X,Q}|\leq \frac{d(\alpha,Q)(q-1)^{s-1}}{|\boldsymbol{H}|}$$

ifadesi sağlanır. Sonuç olarak max$\{|V_X(F)\cap T_{X,Q}|\mid F\in S_\alpha\setminus I_\alpha(T_{X,Q})\}$ *sayısı en fazla* $\frac{d(\alpha,Q)(q-1)^{s-1}}{|\boldsymbol{H}|}$ *değerini alabileceğinden,* $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,Q})$ *için iddia edilen alt sınır elde edilir.*

6.5 Hirzebruch Yüzeyinde Simitli Kodlar

Bu alt bölümde Hirzebruch yüzeyde tanımlı bazı parametrik kodların parametreleri hesaplanacaktır. $\alpha=(c,d)\in\mathbb{N}\beta$ olmak üzere $\mathscr{H}_\ell$ Hirzebruch yüzeyinden elde edilen $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ parametrik kodlar ile başlayalım.

Teorem 6.5.1. *T_X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde $\mathscr{H}_\ell$ Hirzebruch yüzeyinin simiti ve $\alpha=(c,d)\in\mathbb{N}\beta$ olsun. Bu durumda b, (sırasıyla b'), $c-b\ell\geq 0$ ve $d-b\geq 0$ (sırasıyla $c-b'\ell\geq q-2$ ve $d-b'\geq 0$) özelliğini sağlayan negatif olmayan en büyük tam sayı olmak üzere $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ parametrik kodun boyutu ve minimum uzaklığı aşağıdaki eşitlikler ile verilir:*

$$\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\,\mathscr{C}_{\alpha,T_X}=\begin{cases}(b+1)(c+1-\ell b/2), & c<q-1\\ (q-1)(b'+1)+(b-b')(c+1-\ell(b+b'+1)/2, & c\geq q-1 ve\ b\leq q-2\\ (q-1)(b'+1)+(q-2-b')(c+1-\ell(q-2+b'+1)/2, & c\geq q-1, b>q-2\ ve\ b'<q-2\\ (q-1)^2, & c\geq q-1\ ve\ b'\geq q-2\end{cases}$$

$$\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_X})=\begin{cases}(q-1)(q-1-c), & c<q-1\\ (q-1)-b', & c\geq q-1\ ve\ b\leq q-2\\ (q-1)-b', & c\geq q-1, b>q-2\ ve\ b'<q-2\\ 1, & c\geq q-1\ ve\ b'\geq q-2\end{cases}$$

İspat 17. *Birinci olarak* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin simiti parametrelediğini, yani* $T_{X,Q} = T_X$ *olduğunu kanıtlayalım.* $0 \leq h_1, h_2 \leq q-2$ *aralığında*

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ell & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1\ell - h_2 \end{bmatrix} \equiv 0 \ (mod\, q-1)$$

denkleminin çözümü $h_1 = 0 = h_2$*'dir. Bu takdirde*

$$\boldsymbol{H} = \{\mathbf{h} \in \square_q \cap \mathbb{Z}^s \mid \mathbf{h}Q\phi \equiv 0 \ (mod\, q-1)\} = \{(0,0)\}$$

olduğundan $|T_{X,Q}| = (q-1)^2/|\boldsymbol{H}| = (q-1)^2$ *elde edilir.* $T_{X,Q} = T_X$ *olduğu aşikardır, çünkü* $T_{X,Q}$ *simitin bir alt kümesi ve* $|T_X| = (q-1)^2$.

Bir $\alpha = (c,d) \in \mathbb{N}\beta$ *için* S_α *vektör uzayının bir* $\mathbb{K}$*-bazını bulalım, burada* $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $a' = c - b\ell \geq 0$ *ve* $a'' = d - b \geq 0$ *negatif olmayan tam sayılar olmak üzere* $\alpha = (c,d) = b(\ell,1) + (a', a'')$ *eşitliğini sağlayan en büyük negatif olmayan tam sayı* b *olduğundan,*

$$B_\alpha = \{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \mid \mathrm{der}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}) = \beta\boldsymbol{a} = (a_1 + a_3 + \ell a_4, a_2 + a_4) = \alpha, \ 0 \leq a_4 \leq b\}$$

kümesi S_α *uzayı için bir bazdır. Sabit bir* a_4 *değeri için,* $a_2 = d - a_4$ *değeri de sabit ve* $a_1 + a_3 = c - \ell a_4$ *eşitliğinden*

$$B_\alpha = \{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \mid 0 \leq a_4 \leq b, \ a_2 = d - a_4, \ a_1 + a_3 = c - \ell a_4\}$$

ifadesi elde edilir. Buradan sabit bir a_4 *değeri için* $c - \ell a_4 + 1$ *tane* (a_1, a_3) *ikilisi var olup aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$|B_\alpha| = \sum_{a_4=0}^{b} (c + 1 - \ell a_4) = (c+1)(b+1) - \ell\frac{b(b+1)}{2} = (b+1)(c+1-\ell b/2).$$

Örnek 4.5.8'den ϕ *matrisinin sütunları* L_β *kafesinin bir bazı olduğunu hatırlayalım. Sonuç 5.3.7 gereği* $I(T_X) = I_{(q-1)L_\beta}$ *olduğundan* `ML` *matrisinin sütunları* $(q-1)L_\beta$

kafesinin bir bazından oluşur:

$$\mathtt{ML} = (q-1)\phi = \begin{bmatrix} q-1 & 0 & -(q-1) & 0 \\ 0 & -(q-1) & -\ell(q-1) & (q-1) \end{bmatrix}^T.$$

$\mathtt{ML}$ *matrisi karışık baskın olduğundan Teorem 5.2.8 ile*

$$I(T_X) = \langle x_1^{q-1} - x_3^{q-1}, x_4^{q-1} - x_2^{q-1} x_3^{\ell(q-1)} \rangle$$

elde edilir. Bu takdirde $S/I(T_X)$ *bölüm halkasında* $x_1^{q-1} = x_3^{q-1}, x_4^{q-1} = x_2^{q-1} x_3^{\ell(q-1)}$ *eşitlikleri mevcut olup*

$$\bar{B}_\alpha = \{\boldsymbol{x^a} | a_1 = c - a_3 - \ell a_4, a_2 = d - a_4, 0 \leq a_3 \leq \min\{c - \ell a_4, q-2\} \text{ ve } 0 \leq a_4 \leq \min\{b, q-2\}\}$$

kümesi $S_\alpha/I_\alpha(T_X)$ *uzayı için bir bazdır.* b' *tanımı gereği, eğer* $b' < a_4$ *ise* $\min\{c - \ell a_4, q-2\} = c - \ell a_4$ *olur.* $0 \leq a_4 \leq b'$ *durumunda ise* $\min\{c - \ell a_4, q-2\} = q-2$ *sağlanır.* $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ *kodun uzunluğu* $N = |T_X| = (q-1)^2$*. Şimdi kodun boyutu ve minimum uzaklığını hesaplayalım.*

Durum I: $c < q-1$ *olsun.* $B_\alpha = \bar{B}_\alpha$ *eşitliği aşikardır, bu yüzden* $\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}(\mathscr{C}_{\alpha,T_X}) = |B_\alpha|$*. Minimum uzaklık için* $d(\alpha, Q)$ *sayısını hesaplayalım:*

$$d(\alpha, Q) = max\{\overline{Q_1 \boldsymbol{a}} + \overline{Q_2 \boldsymbol{a}} \,|\, \boldsymbol{x^a} \in B_\alpha\} = max\{a_3 + a_4 \,|\, 0 \leq a_4 \leq b,\, a_3 + a_1 = c - \ell a_4\} = c.$$

Sonuç olarak, Teorem 6.4.2, $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,Q}) \geq (q-1)^2 - (q-1)c$ *alt sınırını verir. Diğer yandan,* $\mathbb{K} = \langle \eta \rangle$ *olmak üzere*

$$F = {x_2}^d \prod_{i=1}^{c} (x_3 - \eta^i x_1) \in S_\alpha$$

polinomunun $c(q-1)$ *tane kökü vardır:*

$$\{P_{i,j} = [1 : 1 : \eta^i : \eta^j] \in T_X \mid 1 \leq i \leq c \, \text{ve} \, 1 \leq j \leq q-1\}.$$

Bu takdirde, ağırlığı $(q-1)^2 - (q-1)c$ *olan kod kelimesi mevcut olup*

$$\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_X}) = (q-1)^2 - (q-1)c = (q-1)(q-1-c)$$

eşitliği sağlanır.

Durum II: *$c \geq q-1$ ve $b \leq q-2$ olsun.* $\min\{b, q-2\} = b$, $\min\{c, q-2\} = q-2$ *olduğundan a_4, a_3 sırasıyla en fazla b, $q-2$ değerini alır. Aynı zamanda, $0 \leq a_4 \leq b'$ ise $0 \leq a_3 \leq \min\{c - \ell a_4, q-2\} = q-2$, fakat $a_4 > b'$ ise $0 \leq a_3 \leq \min\{c - \ell a_4, q-2\} = c - \ell a_4$ olur. Bu durum aşağıdaki formülü verir:*

$$\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\, \mathscr{C}_{\alpha,Q} = |\bar{B}_\alpha| = (q-1)(b'+1) + \sum_{a_4=b'+1}^{b} (c - \ell a_4 + 1).$$

$F \in \bar{S}_\alpha$ polinomu verilsin. F polinomu

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{a_4=0}^{b'} \left[\sum_{a_3=0}^{q-2} k_{a_3a_4} x_3^{a_3} x_1^{c-\ell a_4 - a_3} \right] x_4^{a_4} x_2^{d-a_4} + \sum_{a_4=b'+1}^{b} \left[\sum_{a_3=0}^{c-\ell a_4} k'_{a_3a_4} x_3^{a_3} x_1^{c-\ell a_4 - a_3} \right] x_4^{a_4} x_2^{d-a_4}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi $G = G(y_3, y_4) = F(1,1,y_3,y_4)$ polinomu için $V^*(G) = V(G) \cap (\mathbb{K}^*)^2$ olsun ve A kümesi

$$A = \{s_0 \in \mathbb{K}^* \mid y_4 - s_0 \mid G(y_3, y_4)\}$$

şeklinde tanımlansın. $V^*(G) \cap (\mathbb{K}^* \times A)$ ve $V^*(G) \cap (\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^* \setminus A))$ kümeleri $V^*(G)$ kümesinin bir ayrışımını oluşturur. Diğer yandan $V^*(G) \cap (\mathbb{K}^* \times A) = a(q-1)$ ve $V^*(G) \cap (\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^* \setminus A)) \leq d_3(q-1-a)$ olduğundan

$$|V^*(G)| \leq |A|(q-1) + d_3(q-1-|A|) \tag{7}$$

eşitsizliği vardır, burada $d_3 = \mathrm{der}_{y_3}(G)$ ve $a = |A|$.
İddia: *$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2) + b'$. a en fazla b değerini alır, çünkü*

$$max\{\mathrm{der}_{y_4} G \mid G = G(y_3,y_4) = F(1,1,y_3,y_4), F \in \bar{S}_\alpha\} = b.$$

Bu eşitsizliğin ispatı a değerine göre üç durum altında verilecektir: $a \leq b'$, $b' < a < b$, $a = b$.

Durum II.a: *$a \leq b'$ durumu ile başlayalım. Bu durumda $d_3 \leq q-2$ olur, çünkü*

$d_3 \leq min\{c - b'\ell, q-2\}$ ve $c - b'\ell \geq q-2$. $d_3 \leq q-2$ üst sınırı (7) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$|V^*(G)| \leq a(q-1)+d_3(q-1-a) = a(q-1)+(q-2)(q-1-a) = (q-2)(q-1)+a \leq (q-2)(q-1)+b'$$

istenilen ispatlanır.

Durum II.b: *$k \geq 1$ ve $b' \neq b$ olacak şekilde $a = b'+k < b$ olsun. $d_3 \leq min\{c - (b'+k)\ell, q-2\}$ ve $c-(b'+k)\ell < q-2$ olup $d_3 \leq c-(b'+k)\ell$ sağlanır. Bu eşitsizlik ve (7) eşitsizliği ile aşağıdaki sonuca ulaşılır:*

$$\begin{aligned}
|V^*(G)| &\leq a(q-1)+(q-1-a)(c-\ell(b'+k)) \\
&= a(q-1)+(q-1)(c-\ell(b'+k))-a(c-\ell(b'+k) \\
&= a(q-1)+(q-1)\left(c-\ell(b'+k)-(q-2)+(q-2)\right)-a(c-\ell(b'+k)) \\
&= (q-1)(q-2)+(q-1)\left(c-\ell(b'+k)-(q-2)\right)+a\left(q-2-(c-\ell(b'+k))+1\right) \\
&= (q-1)(q-2)+\left(q-2-(c-\ell(b'+k))\right)\left(a-(q-1)\right)+a \qquad (8)
\end{aligned}$$

Diğer yandan, $b' \neq b$ ise $c-(b'+1)\ell \leq q-3$ eşitsizliğini gösterelim. Varsayalım ki $c-(b'+1)\ell \geq q-2$ olsun. $b' \neq b$ olduğundan $d-(b'+1) \geq 0$ sağlanır. Bu bir çelişkidir, çünkü b', $c-b'\ell \geq q-2$ ve $d-b' \geq 0$ özelliklerini sağlayan en büyük negatif olmayan tam sayıdır.
Kanıtlanan bu son eşitsizlik $c-\ell(b'+k) = c-\ell(b'+1)-\ell(k-1) \leq q-3-\ell(k-1)$ eşitliğini sağlar. Buradan da kolayca $q-2-(c-\ell(b'+k)) \geq 1+\ell(k-1)$ elde edilir. $a < b \leq q-2$ ifadesinden $a-(q-1) \leq -2$ eşitsizliği sağlanır.

Son bulunan iki eşitsizlik, (8) eşitsizliğinde uygulanırsa

$$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2)-2\left(\ell(k-1)+1\right)+b'+k. \qquad (9)$$

olur. Aynı zamanda $\ell \geq 2$, $k-1 \geq 0$ ifadelerinden $-2\left((k-1)\ell+1\right) \leq -4k-2$ elde edilir. Bu takdirde Eşitsizlik (9) istenilen sonucu verir:

$$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2)-3k-2+b' < (q-1)(q-2)+b',$$

Durum II.c: *Son olarak $a = b \neq b'$ durumunu ele alalım. (8) eşitsizliğini elde ettiğimiz* *yönteme benzer şekilde,* $d_3 \leq c - b\ell$ *ve (7) eşitsizlikleri*

$$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2) + (q-2-(c-\ell(b)))\,(b-(q-1)) + b. \tag{10}$$

ifadesini verir. Durum II.b.'de kanıtlanan $c - (b'+1)\ell \leq q-3$ *eşitsizliğinden*

$$c - \ell b = c - \ell\,(b'+1+b-(b'+1)) \leq q-3-\ell(b-b'-1)$$

sağlanır. Üstelik $b-(q-1) \leq -1$ *olduğundan*

$$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2) + (\ell-1)(b'-b) + \ell - 1 + b'$$

eşitsizliği elde edilir. $(\ell-1)(b'-b) \leq (\ell-1)(-1) = 1-\ell$ *eşitsizliği aşikardır, çünkü* $b' < b$*. Bu takdirde son iki eşitsizlikten*

$$|V^*(G)| \leq (q-1)(q-2) + (\ell-1)(b'-b) + \ell - 1 + b' \leq (q-1)(q-2) + b'$$

olur ve iddia her durum için ispatlanmıştır.

Herhangi $F \in \bar{S}_\alpha$ *polinomu için*

$$|V_{\mathscr{H}_\ell}(F) \cap T_X| = |V(F(1,1,y_3,y_4)) \cap (\mathbb{K}^*)^4| = |V^*(G)|$$

sağlandığından minimum uzaklık en az $(q-1)^2 - (q-1)(q-2) - b' = (q-1) - b'$ *değerini alır.*

$$F_0(x_1,\ldots,x_4) = x_1^{c-\ell b'-(q-2)} x_2^{d-b'} \prod_{i=1}^{q-2}(x_3 - \eta^i x_1) \prod_{j=1}^{b'}(x_4 - \eta^j x_1^\ell x_2)$$

polinomunu ele alalım.

$$G_0(y_3,y_4) = F_0(1,1,y_3,y_4) = \prod_{i=1}^{q-2}(y_3 - \eta^i) \prod_{j=1}^{b'}(y_4 - \eta^j)$$

polinomu için $|V^*(G_0)| = (q-1)(q-2) + b'$*, dolayısıyla* $ev_{\alpha,T_X}(G_0)$ *kod kelimesinin ağırlığı* $(q-1)^2 - (q-1)(q-2) - b' = (q-1) - b'$ *dır. Bu durum gösterir ki* $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_X}) =$

$(q-1)-b'$.

Durum III: *$c \geq q-1$, $b \geq q-2$ ve $b' < q-2$ olsun. $0 \leq a_4 \leq \min\{b, q-2\} = q-2$ ve $b' < q-2$ olduğundan, $0 \leq a_4 \leq b'$ şartını sağlayan her a_4 için a_3, $0, 1, \ldots, q-2$ değerlerini alır. $b' \leq a_4 \leq q-2$ aralığında ise $0 \leq a_3 \leq c - \ell a_4$ olur ki*

$$\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\, \mathscr{C}_{\alpha,Q} = |\bar{B}_\alpha| = (q-1)(b'+1) + \sum_{a_4=b'+1}^{q-2} (c - \ell a_4 + 1).$$

elde edilir.

Verilen $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \bar{S}_\alpha$ homojen polinomunu, $\bar{B}_\alpha$ kümesinin monomlarının lineer birleşimi şeklinde yazalım:

$$F = \sum_{a_4=0}^{b'} \left[\sum_{a_3=0}^{q-2} k_{a_3 a_4} x_3^{a_3} x_1^{c-\ell a_4 - a_3} \right] x_4^{a_4} x_2^{d-a_4} + \sum_{a_4=b'+1}^{q-2} \left[\sum_{a_3=0}^{c-\ell a_4} k'_{a_3 a_4} x_3^{a_3} x_1^{c-\ell a_4 - a_3} \right] x_4^{a_4} x_2^{d-a_4}$$

Minimum uzaklık hesaplamak için kullanılan yöntem Durum II ile aynıdır. $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_X}) = (q-1) - b'$ eşitliğini göstermek için, $|V^*(G)|$ sayısının maksimum $(q-1)(q-2) + b'$ değerini alabileceği kanıtlanmalıdır. Bu durumda $a \leq q-2$ olduğundan, kanıt 3 parçada yapılır: $a \leq b'$, $b' < a < q-2$, $a = q-2$. Bu ispat Durum II'deki iddianın ispatına çok benzer olduğu için yapılmayacaktır.

Durum IV: *$c \geq q-1$ ve $b' \geq q-2$ olsun. Ayrıca tanım gereği $b' \leq b$ sağlandığından $0 \leq a_4 \leq \min\{b, q-2\} = q-2$ olur. Bu takdirde*

$$\bar{B}_\alpha = \{\boldsymbol{x^a} \mid a_1 = c - a_3 - \ell a_4, a_2 = d - a_4, 0 \leq a_3 \leq q-2 \;\text{ ve }\; 0 \leq a_4 \leq q-2\}$$

ifadesinden $\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\, \mathscr{C}_{\alpha,Q} = |\bar{B}_\alpha| = (q-1)^2$ olur. Sonuç olarak $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodu aşikardır, yani $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,T_X}) = 1$.

Örnek 6.5.2. *$X = \mathscr{H}_\ell$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ cismi üzerinde Hirzebruch yüzey ve $\alpha = (c, d) \in \mathbb{N}\beta$ olsun, burada q tek asal sayıdır. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^2$ olmak üzere $Q = [a_1 \quad a_2 \quad a_1 + 2 \quad a_1\ell + a_2]$ matrisi verilsin. Bu takdirde, $c < \frac{q-1}{2}$ durumunda $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ parametrik kodu $[\frac{q-1}{2}, c+1, \frac{q-1}{2} - c]$ parametreli aşikar olmayan MDS kodtur, aksi durumda aşikar kodtur.*

Birinci olarak Örnek 5.2.9'dan $Q' = [0\ 0\ 2\ 0]$ olmak üzere $T_{X,Q} = T_{X,Q'}$ eşitliğini hatırlayalım. Dolayısıyla $[1 : 1 : \eta^2 : 1]$ noktası $T_{X,Q}$ kümesini üretir, burada η, $\mathbb{K}^*$ grubunun bir üretecidir. Bu sebeple $T_{X,Q}$ kümesinin mertebesi $|\eta^2| = \frac{q-1}{(q-1,2)} = \frac{q-1}{2}$ olur. Bu eşitlik $|\boldsymbol{H}| = 2$ ifadesini ve $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun uzunluğunun $N = \frac{q-1}{2}$ olduğunu kanıtlar.

Örnek 5.2.9, $I(T_{X,Q}) = I_L$ idealinin $x_1^2x_2 - x_4$ ve $x_1^{(q-1)/2} - x_3^{(q-1)/2}$ binomları ile üretildiğini de verir. Böylece S/I_L uzayında $x_4 \equiv x_1^{\ell}x_2$ ve $x_3^{\frac{q-1}{2}} \equiv x_1^{\frac{q-1}{2}}$ eşitlikleri vardır. Bu takdirde $\bar{B}_\alpha$ kümesi $S_\alpha/I_\alpha(T_{X,Q})$ vektör uzayı için bir bazdır:

$$\bar{B}_\alpha = \begin{cases} \{x_1^{c-a_3}x_2^dx_3^{a_3} \mid 0 \leq a_3 \leq c\}, & c < \frac{q-1}{2} \\ \{x_1^{c-a_3}x_2^dx_3^{a_3} \mid 0 \leq a_3 < (q-1)/2\}, & c \geq \frac{q-1}{2} \end{cases}.$$

Sonuç olarak

$$\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\mathscr{C}_{\alpha,Q} = |\bar{B}_\alpha| = \begin{cases} c+1, & c < \frac{q-1}{2} \\ \frac{q-1}{2}, & c \geq \frac{q-1}{2}. \end{cases}$$

elde edilir. $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun minimum uzaklığını $c < \frac{q-1}{2}$ durumu için hesaplayalım, aksi durumda boyutu en büyük değerine, yani uzunluğuna ulaştığı için kod aşikardır. Minimum uzaklığı 2 farklı metot ile hesaplanabilir. ilk olarak Teorem 6.4.2 aracılığıyla hesaplayalım:

Teorem 6.4.2, $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodun minimum uzaklığının en az $N-c$ olduğunu belirtir, çünkü $|\boldsymbol{H}| = 2$ ve $d(\alpha, Q') = max\{2a_3|0 \leq a_3 \leq c\} = 2c$. Diğer yandan, $F = x_2^d \prod_{j=1}^{c}(x_3 - \eta^{2j}x_1)$ polinomunun tam c tane kökü olduğundan $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,Q}) = N - c$ eşitliği sağlanır. Böylece minimum uzaklık Singleton sınırına $\delta(\mathscr{C}_{\alpha,Q}) = N - c = N + 1 - K$ ulaşır ve dolayısıyla kod MDS kodtur.

İkinci yol olarak $\bar{B}_\alpha$ bazının monomları $T_{X,Q} = \{P_j = [1 : 1 : \eta^{2j} : 1] \mid j = 0, \ldots \frac{q-3}{2}\}$ parametrik kümesinin elemanlarında hesaplanırsa $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun RS kodu olduğu aşikardır. Dolayısıyla $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ MDS kodtur.

Örnek 6.5.3. *Örnek 4.5.6'de tanıtılan ağırlıklı projektif uzayın simitinin bazı devirli alt gruplarından MDS parametrik kodlar elde edilir. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ üzerinde $X = \mathbb{P}(1, w_1, \ldots, w_n)$ ağırlıklı projektif uzayın $\mathbb{Z}$-dereceli koordinat halkasının her $i \in [n]$ için $\mathrm{der}_{\mathscr{A}}(x_0) = 1$ ve $\mathrm{der}_{\mathscr{A}}(x_i) = w_i > 0$ şeklinde derecelendirildiğini hatırlayalım.*

Ayrıca Örnek 4.5.6'da verilen tam diziden $\beta = [1\ w_1\ \cdots\ w_n]$ olmak üzere L_β kafesinin bir $\mathbb{Z}$-bazı ϕ matrisinin sütun kümesidir: Her $i \in [n]$ için $\boldsymbol{u}_i = (-w_i, \boldsymbol{e}_i)$ ve $\boldsymbol{e}_i$, $\mathbb{Z}^n$ uzayının standart baz vektörü olmak üzere $L_\beta = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle \subset \mathbb{Z}^{n+1}$. $Q = [0 \mid a\boldsymbol{e}_i]$, Q_{1i} elemanı a diğer n elemanı 0 olan satır matrisi olsun.

$\mathbb{K}^* = \langle \eta \rangle$ olduğundan her $t \in \mathbb{K}^*$ bir $j \in [0, q-2] \cap \mathbb{Z}$ için $t = \eta^j$ olarak yazılabilir. Bu sebeple, i. bileşeni η^a olan $[1 : \cdots : \eta^a : \cdots : 1]$ nokta $T_{X,Q}$ kümesini üretir. η^a

ve $\eta^{(a,q-1)}$ elemanları aynı grubu ürettiğinden $T_{X,Q} = \langle [1 : \cdots : \eta^{(a,q-1)} : \cdots : 1] \rangle$ olur. a'nın $q-1$'i böldüğünü kabul ederek, a yerine $(a, q-1)$ sayısını alalım. Böylece, $|T_{X,Q}| = |\eta^a| = \frac{q-1}{a}$ ve $|\boldsymbol{H}| = a$.

$T_{X,Q} \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sıfırlayan idealinin üreteçlerini belirleyelim. Lemma 5.2.2'den $L = \{\mathbf{m} \in L_\beta : Q\mathbf{m} \equiv 0 \ (mod\ q-1)\}$ kafesi için $I(T_{X,Q}) = I_L$'dir. Örnek 4.5.6 ile L kafesi için bir baz bulalım. Her $\mathbf{m} \in L_\beta$ elemanı bir $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$ için $\mathbf{m} = \phi\boldsymbol{c}$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathbf{m} \in L$ olması için gerek ve yeter şart $Q\phi\boldsymbol{c} = a\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{c} = ac_i \equiv 0 \ (mod\ q-1)$ şartının sağlanmasıdır, yani $c_i = \frac{q-1}{a}k$ eşitliğini sağlayan $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu takdirde

$$\mathbf{m} \in L \Longleftrightarrow \mathbf{m} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_i\mathbf{u}_i + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + k\left(\frac{q-1}{a}\mathbf{u}_i\right) + \cdots + c_n\mathbf{u}_n.$$

Buradan L kafesinin bir $\mathbb{Z}$-bazı $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \frac{q-1}{a}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ kümesi ile verilir. $\mathtt{ML} = [\boldsymbol{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{i-1}\ \frac{q-1}{a}\mathbf{u}_i\ \mathbf{u}_{i+1} \cdots \mathbf{u}_n]$ matrisi karışık baskın olduğundan

$$I(T_{X,Q}) = \langle F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n \rangle$$

tam kesişimdir, burada

$$F_i = x_0^{(q-1)w_i/a} - x_i^{(q-1)/a} \quad \text{ve} \ \ \forall j \in [n] \setminus \{i\} \ \text{için} \ F_j = x_0^{w_j} - x_j.$$

Dolayısıyla $S/I(T_{X,Q})$ bölüm halkasında her $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ için $x_0^{(q-1)w_i/a} = x_i^{(q-1)/a}$ ve $x_0^{w_j} = x_j$ binomları eşittir. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{N}\beta = \mathbb{N}$ pozitif tam sayısı için,

$$\bar{B}_\alpha = \begin{cases} \{x_0^{\alpha - a_i w_i} x_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i \leq \alpha(i)\}, & \alpha(i) < \frac{q-1}{a} \\ \{x_0^{\alpha - a_i w_i} x_i^{a_i} \mid 0 \leq a_i < \frac{q-1}{a}\}, & \alpha(i) \geq \frac{q-1}{a}. \end{cases}$$

kümesi $S_\alpha / I_\alpha(T_{X,Q})$ vektör uzayı için bir bazdır, burada $\alpha(i)$, $\alpha = \alpha(i)w_i + \alpha'(i)$ şartını sağlayan en büyük negatif olmayan tam sayıdır. Bu eşitlikten, kodun boyutu hesaplanır:

$$\mathrm{boy}_{\mathbb{K}}\, \mathscr{C}_{\alpha,Q} = H_{T_{X,Q}}(\alpha) = |\bar{B}_\alpha| = \begin{cases} \alpha(i) + 1, & \alpha(i) < \frac{q-1}{a}\frac{q-1}{a}\frac{q-1}{a} \\ \frac{q-1}{a}, & \alpha(i) \geq \frac{q-1}{a}. \end{cases}$$

$S_\alpha / I_\alpha(T_{X,Q})$ vektör uzayının bir bazını bulmadan önce $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodunun RS kodu olduğu

belli değildir. Son örneğe benzer şekilde $\bar{B}_\alpha$ bazının monomlarını $P_j = [1 : \cdots : \eta^{aj} : \cdots : 1] \in T_{X,Q}$, $0 \leq i < \frac{q-1}{a}$ noktalarında hesaplanarak $\text{boy}_{\mathbb{K}} \mathscr{C}_{\alpha,Q}$ *kodun üreteç matrisi elde edilip RS kodu olduğu görünür:*

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & \eta^a & \cdots & \eta^{q-a-1} \\
\hline
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
x & 1 & \eta^a & \cdots & \eta^{q-1-a} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x^{\frac{q-1-a}{a}} & 1 & \eta^{q-1-a} & \cdots & \eta^a
\end{array}
$$

6.6 Örnekler

Bu bölümde, parametrik kodları $\mathbb{P}^n$ projektif uzay yerine daha genel simitli çeşitlemler ile çalışmanın avantajı ve T_X üzerinde hesaplanan kodlardan daha iyi kodların T_X simitinin bazı $T_{X,Q}$ alt gruplarında tanımlandığı gösterilecektir.

Daha iyi kod tanımını açıklayarak başlayalım. Klasik yaklaşımda kodu ve uzunluğu aynı iki kodu kıyaslarken kullanılan parametre minimum uzaklıktır. Minimum uzaklığı daha büyük olan kod, hata düzeltme kapasitesi daha büyük olduğu için daha iyi kod olarak dikkate alınır. Bir kod, bilinen aynı uzunluk ve boyuttaki kodların arasında olabilecek en büyük minimum uzaklığa sahip ise **BP** (en iyi kod) olarak isimlendirilir. Bu mukayese, [47] veritabanındaki en çok 9 elemanlı sonlu cisim üzerindeki kayıtlı kodların alt ve üst minimum uzaklık sınırlarına bakılarak yapılır. Bu veritabanında verilen bir uzaklık ve boyut için, minimum uzaklığın alt sınırını belirleyen koda **BK** (en iyi bilinen kod) denir. Üst sınır teorik olarak belirli olmasına rağmen, bütün kodlar için aynı durum gecerli değildir. Her $[N, K, \delta]_q$ parametreli bir kod için tek fakat çoğunlukla zayıf olan sınır Singleton sınırıdır:$\delta \leq N + 1 - K$. Minimum uzaklık bu sınıra göre maksimum değere sahipse, yani $\delta = N + 1 - K$, bu koda **MDS**(maksimum uzaklıkla ayrılabilen) kod denildiğini bahsetmiştik. Kodlama teorinin öncelikli amacı [47] veritabanındaki BK kodunun minimum uzaklığından büyük minimum uzaklığı olan kodu sergileyerek alt sınırı geliştirmek ve teorik olarak belirlenen üst sınıra erişmiş kodların varlığının ispatlamaktır. Simitli kodlar şampiyon kodları üretmek için kullanılmaktadır. Bu çalışmadaki yöntemler yeni şampiyon kodu elde etmek için yapılan araştırmalarda kullanılabilir.

Boyut ve uzaklıkları farklı iki kodu kıyaslamak için, aşağıdaki yaklaşım kullanılanacaktır. Singleton sınırı $[N, K, \delta]$ parametreli bir $\mathscr{C}$ kodu için $N + 1 - \delta - K \geq 0$ eşitsizliğini sağlar. Açıktır ki, bu eşitsizlik

$$S(\mathscr{C}) = (1 - K/N) - (\delta - 1)/N$$

olmak üzere $S(\mathscr{C}) \geq 0$ eşitsizliğine denktir. Bu nedenle, $\mathscr{C}'$ aşikar olmayan bir kod olmak üzere eğer $S(\mathscr{C}') < S(\mathscr{C})$ eşitsizliği mevcut ise $\mathscr{C}'$ kodu, $\mathscr{C}$ kodundan daha *iyi kod* olarak dikkate alınır. Aslında kodun MDS olması için gerek ve yeter şart $S(\mathscr{C}) = 0$ olmasıdır.

Önceki bölümlerde verilen teknikler kullanılarak aşağıdaki 2 örnekte sırasıyla aynı Q matrisi için $\mathbb{P}^3$ projektif uzayından ve $\mathscr{H}_2$ Hirzebruch yüzeyinden elde edilen, denk olmayan ve aşikar olmayan $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodların sonlu listesi verilmiştir. Sonra bu kodların parametreleri hesaplanarak iki farklı sımıtli çeşitlemden elde edilen kodlar Tablo 1'de mukayese edilmiştir.

Örnek 6.6.1 ($T_{X,Q} \subseteq \mathbb{P}^3$ üzerinde hesaplanan kodlar)**.** *$q = 5$ ve Q, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ düğümlü ve $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ kenarlı grafın matrisi olsun. Bu takdirde*

$$T_{X,Q} = \{[t_1t_2 : t_2t_3 : t_3t_4 : t_1t_4] \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{F}_5\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

olur. Öncelikle Prosedür 6.3.2 ile $N = |T_{X,Q}| = 16$ bulunur. İkinci adımda, algoritma 1 ve 2 kullanılarak, $I(T_{X,Q})$ idealinin minimal üreteçleri hesaplanır:

$$x_1x_3 - x_2x_4, \quad x_1^4 - x_4^4, \quad x_1^3x_2 - x_3x_4^3, \quad x_1^2x_2^2 - x_3^2x_4^2, \quad x_1x_2^3 - x_3^3x_4,$$

$$x_2^4 - x_4^4, \quad x_2^3x_3 - x_1^3x_4, \quad x_2^2x_3^2 - x_1^2x_4^2, \quad x_2x_3^3 - x_1x_4^3, \quad x_3^4 - x_4^4.$$

Örnek 6.3.4'de uygulanan metot ile, Hilbert fonksiyonunun ilk 3 *değeri* $1, 4, 9$ *ve kalan her $\alpha > 2$ için $H_{T_{X,Q}}(\alpha) = 16$ olduğu görülür. Bu Q matrisinin sadece aşikar olmayan iki kod ürettiği anlamına gelir. Tablo 1'in birinci kısmında bu kodların parametreleri verilmiştir.*

Örnek 6.6.2 ($T_{X,Q} \subseteq \mathscr{H}_2$ üzerinde hesaplanan kodlar)**.** *Son örnekteki q ve Q değerlerini $\mathscr{H}_2$ Hirzebruch yüzeyinde uygulayarak daha iyi kodlar elde edilmiştir. Bu durumda,* *uzunluk* $N = |T_{X,Q}| = 8$ *olur. Öncekibölümlerde verilen algoritmalar ile* $I(T_{X,Q})$ *sıfırlayan ideali bulunur:*

$$I(T_{X,Q}) = \langle x_1^4 - x_3^4,\ x_1^2x_2^2x_3^2 - x_4^2\rangle.$$

Bu nedenle, $T_{X,Q}$, $\mathscr{H}_2$ *üzerinde tam kesişimdir.* $x_1^4 - x_3^4, x_1^2x_2^2x_3^2 - x_4^2 \in I(T_{X,Q})$ *olduğundan* $S/I(T_{X,Q})$ *bölüm halkasında* $x_3^4 + I(T_{X,Q}) = x_1^4 + I(T_{X,Q})$ *ve* $x_4^2 + I(T_{X,Q}) = x_1^2x_2^2x_3^2 + I(T_{X,Q})$ *eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla , aşağıdaki* $\bar{B}_\alpha$ *kümeleri,* $S_\alpha/I_\alpha(T_{X,Q})$ *vektör uzayları için bir bazdır:*

$$\bar{B}_{(1,0)} = \{x_1, x_3\}, \bar{B}_{(2,0)} = \{x_1^2, x_1x_3, x_3^2\}, \forall c > 2 için \bar{B}_{(c,0)} = \{x_1^c, x_1^{c-1}x_3, x_1^{c-2}x_3^2, x_1^{c-3}x_3^3\},$$

$$\forall\ d > 0\ için\ \bar{B}_{(0,d)} = \{x_2^d\}\ ve\ \bar{B}_{(1,d)} = \{x_1x_2^d, x_3x_2^d\},$$

$$\forall\ d > 0\ için\ \bar{B}_{(2,d)} = \{x_1^2x_2^d, x_1x_3x_2^d, x_3^2x_2^d, x_2^{d-1}x_4\}$$

$$\forall\ d > 0\ için\ \bar{B}_{(3,d)} = \{x_1^3x_2^d, x_1^2x_3x_2^d, x_1x_3^2x_2^d, x_3^3x_2^d, x_1x_2^{d-1}x_4, x_3x_2^{d-1}x_4\},$$

$$\forall\ d > 0\ için\ \bar{B}_{(4,d)} = \{x_1^4x_2^d, x_1^3x_3x_2^d, x_1^2x_3^2x_2^d, x_1x_3^3x_2^d, x_1^2x_2^{d-1}x_4, x_1x_3x_2^{d-1}x_4, x_3^2x_2^{d-1}x_4\},$$

$$\forall\ d > 0\ için\ \bar{B}_{(5,d)} = \{x_1^5x_2^d, x_1^4x_3x_2^d, x_1^3x_3^2x_2^d, x_1^2x_3^3x_2^d, x_1^3x_2^{d-1}x_4, x_1^2x_3x_2^{d-1}x_4, x_1x_3^2x_2^{d-1}x_4, x_3^3x_2^{d-1}x_4\}.$$

Bu takdirde $c = 0$ *dan başlayarak* $H_{T_{X,Q}}(c,0)$, $1,2,3,4,4,4,4,\ldots$ *değerlerini alır. Öte yandan* $c = 0,1,2,3,4,5,6$ *için* $H_{T_{X,Q}}(c,1)$ *sırasıyla* $1,2,4,6,7,8,8$ *olur. Teorem 6.2.3 gereği* $\alpha' - \alpha \in \mathbb{N}\beta$ *ise* $H_{T_{X,Q}}(\alpha) \leq H_{T_{X,Q}}(\alpha')$ *eşitsizliği geçerlidir. Bu takdirde her* $c > 5$ *için* $(c-5,0) \in \mathbb{N}\beta$ *olduğundan* $8 = H_{T_{X,Q}}(5,1) \leq H_{T_{X,Q}}(c,1) \leq 8$ *sağlanır. Benzer şekilde her* $c > 5$ *ve* $d > 0$ *için* $(c-5, d-1) \in \mathbb{N}\beta$ *olduğundan* $H_{T_{X,Q}}(c,d) = 8$ *eşitliği elde edilir.*

Herhangi $d > 1$ *değeri için* $H_{T_{X,Q}}(c,d)$, $c = 0,1,2,3,5,5,6$ *için* $1,2,4,6,7,8,8$ *değerlerini alır. Bu takdirde her* $d > 1$ *için* $(0, d-1) \in \mathbb{N}\beta$ *olup* $H_{T_{X,Q}}(c,d)$ *dizileri* $H_{T_{X,Q}}(c,1)$ *dizisi ile aynı olur.*

$\alpha' - \alpha \in \mathbb{N}\beta$ *ve* $H_{T_{X,Q}}(\alpha) = H_{T_{X,Q}}(\alpha')$ *sağlanıyorsa Önerme 6.2.6,* $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$, $\mathscr{C}_{\alpha',Q}$ *kodlarının denk olduğunu verir. Dolayısıyla* $\{\mathscr{C}_{\alpha,Q} | \alpha \in \{(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(4,1)\}$ *kümesi aşikar olmayan bütün farklı kodların listesidir. Aslında* $H_{T_{X,Q}}(3,0) = H_{T_{X,Q}}(2,1) = 4$ *olmasına rağmen* $(3,0),(2,1)$ *elemanlarına paralel gelen kodlar denk değildir, çünkü* $\pm[(3,0)-(2,1)] \notin \mathbb{N}\beta$.

Yukarıdaki örneklerden elde edilen aşikar olmayan kodların parametreleri Sage [46] programı ile hesap edilerek Tablo 1'de verilmiştir. Örnek 6.6.1'de yani $T_{X,Q} \subset \mathbb{P}^3$ iken sadece 2 kod vardır. Aynı Q matrisi ile Örnek 6.6.2'de $T_{X,Q} \subset \mathscr{H}_2$ için 6 kod elde edilmiştir. Bu kodların arasında 3 tane BP 1 tane MDS kod vardır. Bu durum gösteriyor ki farklı X simitli çeşitlemlerin $\mathbb{P}^n$ projektif uzay için iyi bir alternatiftir, bakınız Tablo 1.

Tablo 1: Kod Kıyaslama.

α	$[N, K, \delta]$	$S(\mathscr{C}_{\alpha,Q})$	statü
$T_{X,Q} \subseteq \mathbb{P}^3$ üzerinde hesaplanan kodlar			
1	[16, 4, 9]	1/4	
2	[16, 9, 4]	1/4	
$T_{X,Q} \subseteq \mathscr{H}_2$ üzerinde hesaplanan kodlar			
(1, 0)	[8, 2, 6]	1/8	BP
(2, 0)	[8, 3, 4]	1/4	
(3, 0)	[8, 4, 2]	3/8	
(2, 1)	[8, 4, 4]	1/8	BP
(3, 1)	[8, 6, 2]	1/8	BP
(4, 1)	[8, 7, 2]	0	MDS

Aşağıda verilen tablonun birinci kısmı Teorem 6.5.1 kullanılarak oluşturulmuştur. Örnek 6.6.2'de verilen $T_{X,Q}$ kümesi T_X simitinin düzgün bir alt kümesidir. Bu takdirde $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodu $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ kodunun delmesidir, yani $T_X \setminus T_{X,Q}$ kümesinin noktalarına paralel gelen $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ kodundaki bir kelimenin 8 bileşeni silinerek elde edilir. Tablo 2, bütün

$$\alpha \in \{(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(4,1)\}$$

için, $S(\mathscr{C}_{\alpha,Q}) < S(\mathscr{C}_{\alpha,T_X})$ olduğunu gösterir. $\mathscr{C}_{\alpha,Q}$ kodu $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ kodundan daha iyidir. Sonuç olarak $\mathscr{C}_{\alpha,T_X}$ kodunu delerek daha iyi bir kod üretilebilir.

Tablo 2: $X = \mathscr{H}_2$ simitli çeşitleminde kod kıyaslama.

α	$[N, K, \delta]$	$S(\mathscr{C}_{\alpha,T_X})$	statü	$[N, K, \delta]$	$S(\mathscr{C}_{\alpha,Q})$	statü
(1, 0)	[16, 2, 12]	3/16		[8, 2, 6]	1/8	BP

(2, 0)	[16, 3, 8]	3/8		[8, 3, 4]	1/4	
(3, 0)	[16, 4, 4]	9/16		[8, 4, 2]	3/8	
(2, 1)	[16, 4, 8]	5/16		[8, 4, 4]	1/8	BP
(3, 1)	[16, 6, 4]	7/16		[8, 6, 2]	1/8	BP
(4, 1)	[16, 7, 4]	3/8		[8, 7, 2]	0	MDS

7 SONUÇ ve ÖNERİ

Bu tez, bir simitli çeşitlemin simitinin alt grupları olan parametrik simitli kümelerden elde edilen parametrik simitli kodlar üzerinedir. Simitli çeşitlemler ve fanlar arasındaki ilişki ile bir simitli çeşitlemin simitinin tıpkı projektif uzaydaki gibi homojen koordinatlarla nasıl ifade edildiği anlatılmıştır. Homojen koordinatlar ile bir $Q \in M_{s\times r}(\mathbb{Z})$ matrisi için bir X simitli çeşitleminin $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesi tanımlanmıştır. Homojen polinomların bir simitli çeşitlemin bir alt kümesinde hesaplanmasıyla hesaplama kodları elde edilir. Bu sebeple kodu tanımak için simitli çeşitlemin alt kümesinin yapısını, bu kümenin sıfırlayan idealinin üreteçlerini ve özelliklerini anlamak gerekmektedir.

Parametrik simitli küme üzerindeki hesaplama kodlarının, yani parametrik simitli kodların boyutu parametrik simitli kümenin derecelendirilmiş Hilbert fonksiyonu ile hesaplanır. Bu amaca yönelik, birinci adımda $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinde sıfır değerini alan homojen polinomların ürettiği $I(T_{X,Q})$ idealinin cebirsel yapısını belirleyerek bir üreteç kümesini bulmak gerekmektedir. Bölüm 5'te ilk olarak $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealinin üreteçlerini eliminasyon teorisi yardımıyla bulan bir yöntem verilmiştir [22, Teorem 2.2]. $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan idealine eşit olan kafes idealinin kafesi belirlenerek ikinci metot geliştirilmiştir [23, Lemma 3.2]. İki yöntem de, çıktısı $I(T_{X,Q})$ sıfırlayan ideali olan bir algoritma sunmuştur. Üstelik, bir Q matrisinin $\text{Çek}_{\mathbb{Z}}(Q)$ kafesini L_Q ile gösterirsek $L = (L_Q \cap L_\beta) + (q-1)L_\beta$ olmak üzere $I_L = I(T_{X,Q}) \iff QL_\beta = \mathscr{L} : (q-1)$ ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir [22, Teorem 3.2]. Ayrıca $QL_\beta = \mathscr{L} : (q-1)$ eşitliğinin geçerli olduğu durumda sonlu cisim üzerinde bir Sıfır Yeri (Nullstellensatz) teoremi kanıtlanmıştır: $I(V_X(I_L)) = I_L$ [22, Teorem 3.10].

Bölüm 6'da parametrik simitli kodun uzunluğunu, yani $|T_{X,Q}|$ sayısını parametrik simitli kümenin tanımı ile hesaplayan bir yöntem sunulmuştur [23, Önerme 4.1]. Böylece $\text{reg}(T_{X,Q})$ düzenlilik kümesi belirlenmeden kodun uzunluğu hesaplanabilir. Örnek 6.3.4'te bu yöntem ile verilen bir Q matrisinin $\mathbb{P}(2,2,3,5)$ ağırlıklı projektif uzayda tanımladığı parametrik simitli kodların uzunluğu hesaplandıktan sonra Hilbert fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak $\text{reg}(T_{X,Q})$ düzenlilik kümesi ve sonlu tane ilginç kod belirlenmiştir.

Homojen bir polinomun $T_{X,Q}$ kümesi üzerinde maksimum kök sayısı belirlenerek parametrik simitli kodların minimum uzaklığı için bir alt sınır verilmiştir [23, Teorem 5.2]. $\mathscr{H}_\ell$ Hirzebruch yüzeyinin simitinin tanımladığı simitli kodların parametreleri hesaplanmıştır [23, Teorem 5.3]. Son olarak geliştirilen yöntemler ve Sage [46] programı kullanılarak oluşturulan tablolar ile projektif uzay yerine genel bir simitli çeşitlemden ve simit yerine simitin bir parametrik simitli kümesinden kod elde etmenin avantajları gösterilmiştir.

Genel olarak parametrik simitli kodların minimum uzaklığını, parametrik kümeyi tanımlayan Q matrisi ve simitli çeşitlemin fanından elde edilen ϕ matrisi cinsinden hesaplayan bir algoritma bulunabilir. $\mathrm{reg}(T_{X,Q})$ düzenlilik kümesi belirlenerek $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin tanımladığı aşikar kodlar elenebilir.

Parametrik simitli kümelerin sıfırlayan idealleri Bölüm 5'te verilen metotlardan biri ile hesaplanarak, farklı simitli çeşitlemlerde tanımlı parametrik simitli kodların parametreleri Sage [46] programı ile hesaplanabilir. Böylece deneysel çalışmalar ile iyi parametrelere sahip kodlar veren özel durumlar tespit edilebilir. Parametrik simitli kodların parametrelerine yönelik sunulan sonuçlar yardımıyla, bu özel durumlarda elde edilen kodların parametreleri için bir eşitlik tanımlanıp kanıtlanabilir. Örneğin bu özel durum, bazı simitli çeşitlemlerde bazı grafların tanımladığı matrislerin tanımladığı parametrik simitli kodlar olabilir.

Bir simitli çeşitlemin rasyonel fonksiyonlar tarafından parametrize edilen alt kümelerinin sıfırlayan ideallerin üreteç kümesini bulan metotlar geliştirmek bu kümelerden elde edilen hesaplama kodlarının parametrelerini bulmak için çok önemlidir. $T_{X,Q}$ parametrik simitli kümesinin sıfırlayan idealini hesaplamak için verilen metotlar bu alt kümeler için genellenebilir.

Kaynaklar

[1] V.D. Goppa. Codes on algebraic curves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 259(6).

[2] Johan P Hansen. Toric surfaces and error-correcting codes. In *Coding theory, Cryptography and related areas*, pages 132–142. Springer, **2000**.

[3] Johan P. Hansen. Toric varieties hirzebruch surfaces and error-correcting codes. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput*, 13:289–300, **2002**.

[4] David Joyner. Toric codes over finite fields. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 15(1):63–79, **2004**.

[5] John Little and Hal Schenck. Toric surface codes and minkowski sums. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 20(4):999–1014, **2006**.

[6] Diego Ruano. On the parameters of r-dimensional toric codes. *Finite Fields and Their Applications*, 13(4):962–976, **2007**.

[7] Ivan Soprunov and Jenya Soprunova. Toric surface codes and minkowski length of polygons. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(1):384–400, **2009**.

[8] John Little and Ryan Schwarz. On toric codes and multivariate vandermonde matrices. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 18(4):349–367, **2007**.

[9] John B Little. Remarks on generalized toric codes. *Finite Fields and Their Applications*, 24:1–14, **2013**.

[10] Gavin Brown and Alexander M Kasprzyk. Seven new champion linear codes. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 16:109–117, **2013**.

[11] Ivan Soprunov. Toric complete intersection codes. *Journal of Symbolic Computation*, 50:374–385, **2013**.

[12] Mesut Şahin and Ivan Soprunov. Multigraded Hilbert functions and toric complete intersection codes. *J. Algebra*, 459:446–467, **2016**.

[13] Jose Martinez-Bernal, Yuriko Pitones, and Rafael H Villarreal. Minimum distance functions of graded ideals and reed–muller-type codes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(2):251–275, **2017**.

[14] Carlos Renterí a Márquez, Aron Simis, and Rafael H. Villarreal. Algebraic methods for parameterized codes and invariants of vanishing ideals over finite fields. *Finite Fields Appl.*, 17(1):81–104, **2011**.

[15] Hiram H. López, Rafael H. Villarreal, and Leticia Zárate. Complete intersection vanishing ideals on degenerate tori over finite fields. *Arab. J. Math. (Springer)*, 2(2):189–197, **2013**.

[16] Eliseo Sarmiento, Maria Vaz Pinto, and Rafael H. Villarreal. The minimum distance of parameterized codes on projective tori. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 22(4):249–264, **2011**.

[17] Hiram H. López, Eliseo Sarmiento, Maria Vaz Pinto, and R. H. Villarreal. Parameterized affine codes. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 49(3):406–418, **2012**.

[18] Eliseo Sarmiento, Maria Vaz Pinto, and Rafael H. Villarreal. On the vanishing ideal of an algebraic toric set and its parametrized linear codes. *J. Algebra Appl.*, 11(4):1250072, 16, **2012**.

[19] Manuel González Sarabia, Carlos Renterí a Márquez, and Antonio J. Sánchez Hernández. Minimum distance of some evaluation codes. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 24(2):95–106, **2013**.

[20] Eduardo Dias and Jorge Neves. Codes over a weighted torus. *Finite Fields and Their Applications*, 33:66–79, **2015**.

[21] Mesut Şahin. Toric codes and lattice ideals. *Finite Fields Appl.*, 52:243–260, **2018**.

[22] Esma Baran Özkan. Vanishing ideals of parameterized subgroups in a toric variety, **2021**.

[23] Esma Baran and Mesut Şahin. On parameterized toric codes. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, pages 1–25, **2021**.

[24] D.S. Malik, J.N. Mordeson, and M.K. Sen. *Fundamentals of Abstract Algebra*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, **1997**.

[25] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. **2007**.

[26] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Addison-Wesley, **2008**.

[27] N. Alon. Combinatorial nullstellensatz. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8(1-2):7–29, **1999**.

[28] S. Gao. Counting zeroes over finite fields with gröbner bases. Master's thesis, Carnegie Mellon University, **2009**.

[29] G. Kemper. *A Course in Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 256. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **2011**.

[30] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, **1977**.

[31] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics 133. Springer, **1992**.

[32] Andreas Gathmann. Algebraic geometry. Available at http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/main.pdf. Accessed on 2021-07-01.

[33] Andreas Gathmann. Algebraic geometry. Available at http://https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2014/alggeom-2014.pdf. Accessed on 2021-07-01.

[34] D. Cox, J. B. Little, and H.K. Schenck. *Toric Varieties*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., **2011**.

[35] David Eisenbud and Bernd Sturmfels. Binomial ideals. *Duke Math. J.*, 84(1):1–45, **1996**.

[36] Ezra Miller and Bernd Sturmfels. *Combinatorial commutative algebra*, volume 227 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag,, New York, NY.

[37] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, **2002**.

[38] Thomas W. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag,, New York, NY, **1974**.

[39] David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Mike Stillman, and Bernd Sturmfels. *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, **2002**.

[40] M. Morales and A. Thoma. Complete intersection lattice ideals. *Journal of Algebra*, 284(2):755–770, **2005**.

[41] H. H. López, R. H. Villarreal, and L. Zárate. Complete intersection vanishing ideals on degenerate tori over finite fields. *Arabian Journal of Mathematics*, 2(2):189–197, **2013**.

[42] R. Hill. *A First Course in Coding Theory*. Oxford Applied Linguistics. Clarendon Press, **1986**.

[43] Peter Beelen, Sven Puchinger, and Johan Rosenkilde né Nielsen. Twisted reed-solomon codes. In *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pages 336–340. IEEE, **2017**.

[44] W.C. Huffman and V. Pless. *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. Cambridge University Press, **2003**.

[45] Jessica Sidman and Adam Van Tuyl. Multigraded regularity: syzygies and fat points. *Contributions to Algebra and Geometry*, 47(1):1–22, **2006**.

[46] W. A. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version 8.4), **2010**. `http://www.sagemath.org`.

[47] Markus Grassl. Bounds on the minimum distance of linear codes and quantum codes. Online available at `http://www.codetables.de`, **2007**. Accessed on 2019-11-14.