

**DÜZENLENMİŞ SÖZDE-KOPULA REGRESYON
MODELİ**

MODIFIED PSEUDO-COPULA REGRESSION MODEL

ÖVGÜCAN GÖNENÇ ERDEMİR

Prof. Dr. MERAL SUCU

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2020

Yakın zamanda kaybettiğim dedeme ve sevgili kızım Defne'ye

ÖZET

DÜZENLENMİŞ SÖZDE-KOPULA REGRESYON MODELİ

Övgücan Gönenç ERDEMİR

Doktora, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Meral SUCU

Eylül 2020, 124 sayfa

Hayat dışı sigorta hesaplamalarında, hasar tutarı ve sayısının bağımsız olduğu varsayımı sıklıkla kullanılmaktadır. Bağımsızlık varsayımı hesaplamaların çoğunu büyük ölçüde kolaylaştırsada, çok gerçekçi değildir ve genellikle değerlerin fazla veya az tahmin edilmesine yol açabilir. Bu nedenle, bağımsızlık varsayımı yerine, bağımlılığın modellenerek hesaplamalara dâhil edilmesi gerekir. Bu tez çalışmasında hayat dışı sigortada hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın analizi, modellenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla, hasar tutarı ve hasar sayısı sırasıyla marjinal gamma ve marjinal Poisson genelleştirilmiş doğrusal modeller ile modellenmiştir. Bu genelleştirilmiş doğrusal modeller, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonları ile birlikte ele alınarak, “düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli” önerilmiştir. Sözde-kopulalarla gerçek veriye daha yakın tahminler bulunmuş ve düzenlenmiş ilişki katsayıları ile hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık durumuna göre esnek bir bağımlılık modellemesi sunulmuştur. Önerilen model, hem benzetim hem de gerçek veri analizi ile test edilmiştir. Benzetim çalışması ile farklı senaryolar altında sözde-kopula fonksiyonu üzerinde yapılan düzenlemenin etkinliği test edilmiştir. Gerçek veri analizinde ise, farklı hasar tutarı ve sayısı ilişkisinin olduğu sigorta portföylerinde, hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile

modellenmiştir. Parametre tahmininde parçalı sözde-en çok olabilirlik yönteminden yararlanılmıştır. Bağımsızlık varsayımı altında ve bağımlılığın dikkate alındığı durumda farklı düzenlemelere göre parametre tahminlerinin hata kareler ortalamaları hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model ile tahmin edilen parametrelerin, sabit ilişki katsayısının kullanıldığı model ve bağımsızlık varsayımı altındaki model ile bulunan tahminlere göre daha düşük hata kareler ortalamalarına sahip olduğu görülmüştür. Son olarak, standart kopula regresyon modeli ile düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli karşılaştırılmış ve önerilen modelin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bağımlılık, Genelleştirilmiş doğrusal model, Düzenlenmiş sözde-Gauss kopula, Kopula regresyon modeli, Parçalı sözde-EÇÖ, Hasar tutarı, Hasar sayısı

ABSTRACT

MODIFIED PSEUDO-COPULA REGRESSION MODEL

Övgücan Gönenç ERDEMİR

Doctor of Philosophy, Department of Actuarial Science

Supervisor: Prof. Dr. Meral SUCU

September 2020, 124 pages

In non-life insurance calculations, the assumption that the claim severity and frequency are independent is frequently used. Although the independence assumption greatly simplifies many of the calculations, it is not very realistic, and it can often lead to over or under estimation of quantities of interest. For this reason, the dependency should be modeled and included in the calculations instead of the independence assumption. In this thesis, it is aimed to analyse and model the dependency between the claim severity and frequency in non-life insurance. For this purpose, the claim severity and the claim frequency are modeled with marginal gamma and marginal Poisson generalized linear models, respectively. By considering these generalized linear models together with the modified pseudo-Gauss copula functions, the modified pseudo-copula regression model is proposed. With the pseudo-copulas, close estimations to the real data are found, and with the modified correlation coefficients, a flexible dependency modeling is presented according to the dependency between the claim severity and frequency. The proposed model is tested with both simulation and real data analysis. The efficiency of the modification on the pseudo-copula function is analyzed under different scenarios with the simulation study. In the real data analysis, in insurance portfolios where there is different relationships between claim severity and frequency, the dependency between the claim

severity and frequency is modeled with the modified pseudo-copula regression model. The pseudo-maximization by parts method is used in the parameter estimation. Under the assumption of independence and when dependency is taken into account, the mean square errors of the parameter estimates according to different modifications are calculated and compared. It is observed that the parameters estimated by the modified pseudo-copula regression model have lower mean square error than the estimates found with the model using the constant correlation coefficient and the model under the independence assumption. Finally, the standard copula regression model and the modified pseudo-copula regression model are compared and it is observed that the proposed model give better results.

Keywords: Dependence, Generalized linear model, Modified pseudo-Gauss copula, Copula regression model, Pseudo-maximization by parts, Claim severity, Claim frequency.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda yol gösteren, bilgi ve deneyimiyle karşılaşılan güçlüklerin giderilmesine yardımcı olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya,

Değerli eleştirileri ve katkıları için tez izleme komitesi üyelerim Sayın Prof. Dr. Duru KARASOY'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK'e ve tez jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR'e, Sayın Doç. Dr. Ali Devir SEZER'e,

Tezin uygulama kısmında kullanılan verinin alındığı Sigorta Bilgi Merkezi'ne,

Akademisyenlik mesleğinde en başından beri en büyük yol göstericim ve destekçim babam Prof. Dr. Erdener KARADAĞ'a,

Hayatımın her döneminde desteğini hissettiğim ve özellikle yoğun tez yazım aşamasında kızım ile ilgilenerek eksikliğimi hissettirmeyen ve beni her açıdan rahatlatan annem Selma KARADAĞ'a,

Aynı süreçleri yaşadığından deneyimlerini benimle paylaşan, ümitsizliğe kapıldığımda beni rahatlatan, bilgi birikimiyle karşılaştığım sorunlara çözüm yolları sunan ve özellikle yoğun tez yazım aşamasında kızımın ikinci annesi olarak onunla ilgilenen ablam ve meslektaşım Arş. Gör. Dr. Özge KARADAĞ ATAŞ'a,

Gösterdiği destek için eşim Ömer ERDEMİR'e,

Sevgisinden güç aldığım ve varlığına her an şükrettiğim canım kızım Defne ERDEMİR'e,
Teşekkürlerimi sunarım.

Övgücan Gönenç ERDEMİR

Eylül 2020, Ankara

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER ve YÖNTEMLER	6
2.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Model	6
2.2. Kopula	11
2.2.1. Sözde-Kopula	16
2.2.2. Düzenlenmiş Sözde-Kopula	18
2.3. Kopula Regresyon Modeli	20
2.3.1. Karma Kopula Yaklaşımı	21
2.3.2. Parçalı Maksimizasyon Algoritması ile Parametre Tahmini.....	24
3. DÜZENLENMİŞ SÖZDE-KOPULA REGRESYON MODELİ	28
3.1. Sözde-Kopula Regresyon Modeli	28
3.2. Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli	29
3.2.1. Parçalı Sözde-En Çok Olabilirlik Tahmini ile Parametre Tahmini.....	40
3.3. Risk Gruplarına Göre Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli.....	46
4. UYGULAMA.....	49
4.1. Veri	50
4.2. Sözde-Kopula Fonksiyonları ve Yeniden Düzenlenmesi.....	61
4.3. Kopulanın Düzenlenmesinin Etkinlik Araştırması için Benzetim Çalışması	67

4.3.1. Hasar Tutarı ve Sayısı Bağımlı Sigorta Portföyü Benzetimi	67
4.3.2. Farklı Senaryolar Altında Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli	69
4.4. Gerçek Veri Analizi	88
4.4.1. Bireysel Veri için Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli	88
4.4.2. Sınıflanmış Veri için Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli	92
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	98
6. KAYNAKLAR	100
EKLER.....	106
EK 1 – Düzenlenmiş Sözde-Kopula Fonksiyonun Özellikleri	106
EK 2 – Skor Eşitlikleri.....	109
EK 3 – 2017 Yılı Türkiye Büyükşehir Belediyeleri ve Nüfus Yoğunlukları	121
EK 4 – Kategorik Açıklayıcı Değişkenlerin Gösterge Değişkenlerle Kodlamaları .	122
EK 5 – Tezden Türetilmiş Bildiriler	123
ÖZGEÇMİŞ	124

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1.	$l_{bağımsız}(\theta_1)$ için ana ve alt skor eşitlikleri	44
Çizelge 3.2.	$l_{bağımlı}(\theta_1, \theta_2)$ için ana ve alt skor eşitlikleri	45
Çizelge 4.1.	Risk faktörleri ve kategorileri	52
Çizelge 4.2.	Hasar değişkenlerinin betimleyici istatistikleri	53
Çizelge 4.3.	Hasar sayısı sıklık çizelgesi	54
Çizelge 4.4.	Gamma GDM için parametre tahmin sonuçları	59
Çizelge 4.5.	Poisson GDM için parametre tahmin sonuçları	60
Çizelge 4.6.	Gamma ve Poisson GDM'ler için parametre tahminleri	61
Çizelge 4.7.	Benzetim çalışması için yararlanılan senaryolar	71
Çizelge 4.8.	Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini....	73
Çizelge 4.9.	Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini.....	74
Çizelge 4.10.	Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini....	75
Çizelge 4.11.	Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini.....	76
Çizelge 4.12.	Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini.....	78
Çizelge 4.13.	Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini.....	79
Çizelge 4.14.	Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini.....	80
Çizelge 4.15.	Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini.....	81
Çizelge 4.16.	Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini...83	
Çizelge 4.17.	Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini...84	
Çizelge 4.18.	Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini...85	
Çizelge 4.19.	Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini....86	

Çizelge 4.20. Bireysel veri için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $HKO_{\hat{\alpha}}$ değerleri	90
Çizelge 4.21. Bireysel veri için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $HKO_{\hat{\beta}}$ değerleri	91
Çizelge 4.22. Sınıflanmış veri için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $HKO_{\hat{\alpha}}$ değerleri	94
Çizelge 4.23. Sınıflanmış veri için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $HKO_{\hat{\beta}}$ değerleri....	95
Çizelge 4.24. Kopula regresyon ve düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model sonuçları	97

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Kopula regresyon modeli.....	20
Şekil 3.1.	Sözde-kopula regresyon modeli.....	28
Şekil 3.2.	Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli.....	29
Şekil 4.1.	Bireysel veri için hasar tutarı ve sayısı grafikleri.....	53
Şekil 4.2.	Hasar değişkenlerinin cinsiyet, medeni hâl, sigortalının yaşı ve yaşanan bölge açıklayıcı değişkenlerine göre değişimi.....	56
Şekil 4.3.	Hasar değişkenlerinin hasarsızlık indirimi, araç yaşı, hasar nedeni ve motor gücü açıklayıcı değişkenlerine göre değişimi.....	57
Şekil 4.4.	Sabit ve düzenlenmiş ilişki katsayılı sözde-Gauss kopula fonksiyonlara göre ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının izoips eğrileri.....	62
Şekil 4.5.	Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (sözde-Gauss kopula)	64
Şekil 4.6.	Hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (sözde-Gauss kopula)	64
Şekil 4.7.	Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)	65
Şekil 4.8.	Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)	65
Şekil 4.9.	Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)	66
Şekil 4.10.	Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)	67
Şekil 4.11.	Bireysel veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki.....	88
Şekil 4.12.	Sınıflanmış veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki.....	93

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

θ	ÜDA için kanonik parametre
ϕ	ÜDA için yayılım parametresi
α	Gamma dağılımının şekil parametrelendirmesine göre şekil parametresi
β	Gamma dağılımının şekil parametrelendirmesine göre oran parametresi
μ	Gamma dağılımının ortalama parametrelendirmesine göre ortalama parametresi
ν	Gamma dağılımının ortalama parametrelendirmesine göre serbestlik derecesi
λ	Poisson dağılımının ortalama parametresi
η	Doğrusal bileşen
$g(.)$	Bağ fonksiyonu
α	Gamma GDM için parametre vektörü
β	Poisson GDM için parametre vektörü
x	Gamma GDM için açıklayıcı değişken matrisi
z	Poisson GDM için açıklayıcı değişken matrisi
ρ_{12}	İlişki katsayı
ρ_{12}^*	Düzenlenmiş ilişki katsayı
$\rho_{12(j)}^*$	j. risk grubu için düzenlenmiş ilişki katsayısı
Σ	Varyans-kovaryans matrisi
Γ	İlişki matrisi
Γ^*	Düzenlenmiş ilişki matrisi
Γ_j^*	j. risk grubu için düzenlenmiş ilişki matrisi
a_{12}	Kuyruğa yakınsama hızını kontrol eden parametre
b_{12}	Modelin kuyruk şeklini kontrol eden parametre
θ	Kopula regresyon modeli için parametre vektörü
γ	Düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu için parametre vektörü
N	Normalleştirme katsayısı

$\mathcal{C}(\cdot, \cdot \Gamma)$	Kopula fonksiyonu
$c(\cdot, \cdot \Gamma)$	Kopula fonksiyonunun türevi
$PC(\cdot, \cdot \Gamma)$	Sözde-kopula fonksiyonu
$pc(\cdot, \cdot \Gamma)$	Sözde-kopula fonksiyonunun türevi
$PC(\cdot, \cdot \Gamma^*)$	Düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu
$pc(\cdot, \cdot \Gamma^*)$	Düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonunun türevi
$D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2)$	Kısmi artık test istatistiği
$d_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2)$	Kısmi artık test istatistiğinin türevi
$\Phi(\cdot)$	Tek değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonu
$\Phi_n(\cdot \Gamma)$	Çok değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonu
$ED(\mu_j, \sigma_j^2)$	Tek değişkenli üstel yayılım modeli
$MED_n(\mu, \sigma^2, \Gamma)$	Çok değişkenli üstel yayılım modeli
∇	Gradyan
ϵ	Eşik değeri

Kısaltmalar

EÇÖ	En Çok Olabilirlik Tahmini
GDKM	Genelleştirilmiş Doğrusal Karma Model
GDM	Genelleştirilmiş Doğrusal Model
PMA	Parçalı Maksimizasyon Algoritması
SBM	Sigorta Bilgi Merkezi
ÜDA	Üstel Dağılım Ailesi
VGDM	Vektör GDM

1. GİRİŞ

İçinde birçok bileşen bulunan sigorta hesaplamalarında, çok değişkenli durumdan kaynaklanan karmaşık yapılar bazı varsayımlar kullanılarak göz ardı edilir. Hayat dışı sigorta hesaplamalarında kullanılan temel varsayımların başında rastlantı değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olması gelir [1]. Bileşik Poisson modeli ve kollektif risk modeli gibi modellerde kullanılan bağımsızlık varsayımı çok temel olmakla birlikte çok gerçekçi olmadığından, tahminlerin gerçek değerlerinden daha düşük ya da yüksek bulunmasına neden olabilmektedir [2]. Bu nedenle bağımsızlık varsayımının ortadan kaldırılması ve bağımlılığın modellenerek hesaplamalara dâhil edilmesi önemlidir. Bağımlılığın dikkate alındığı çalışmalarda öncelikle bağımlılığın hangi değişkenler arasında olduğuna ve yapısına karar vermek gerekir.

Bağımlılık ve ilişkili olma durumu farklı olmakla birlikte, birbiri ile bağlantılıdır. Bazı bağımlılık modelleme yöntemlerinde parametrenin direkt ilişki katsayısı olmasından dolayı bağımlılık ilişki katsayısı ile doğrudan ilişkilendirilebilir. Değişkenler arasındaki ilişki; kovaryans, varyans-kovaryans matrisi, ilişki katsayısı ve ilişki matrisi ile ölçülebilir. İlişki katsayısı ve ilişki matrisi; kovaryans ve varyans-kovaryans matrisinin standartlaştırılmış halidir. Rastlantı değişkenleri arasındaki ilişki; Pearson doğrusal ilişki katsayısı, sıra ilişki katsayılarından Spearman'ın ρ ile Kendall'ın τ katsayıları ve kuyruk bağımlılığı katsayısı olarak sınıflandırılan bağımlılık ölçümleri ile incelenebilir.

Bağımlılık modellemesi denince ilk akla gelen modeller kuşkusuz kopula fonksiyonlarıdır. Ortak olasılık dağılım fonksiyonlarının, marjinal olasılık dağılım fonksiyonları ile ifade edilmesini sağlayan “Sklar'ın Teoremi” birçok bağımlılık çalışmasının temelini oluşturur [3]. Bağımlılık çalışmalarında kopula, daha çok finansal ve istatistiksel veriler için kullanılmıştır. Aktüerya literatüründe ise, bağımlılığın kopula ile modellenmesi yakın geçmişte çalışılmıştır.

Aktüeryal çalışmalarda kopula ile bağımlılığın modellenmesinde, Frees ve Valdez'in [4] çalışması önemli olup, temel kaynak niteliğindedir. Hayat sigortalarında çoklu azalım modellerinde ve birleşik yaşam ürünlerinde [5, 6], sağlık sigortalarında hasar tutarı ile sayısı arasındaki [7, 8] bağımlılık kopula ile modellenmiştir. Hayat dışı sigortalarda ise, hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın [2, 9, 10], hasar sayıları arasındaki bağımlılığın [11, 12], hasar türleri arasındaki bağımlılığın [13-15], hasar nedenleri arasındaki bağımlılığın [16, 17], hasar süresi ve hasar tutarı arasındaki bağımlılığın [18] ve mekansal bağımlılığın [19, 20] modellenmesinde kopula fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Hayat dışı sigorta rezerv hesaplarında [21-24] ve finansal aktüeryal çalışmalarda da [25-27] bağımlılığın modellenmesinde kopula kullanılmıştır.

Bağımlılık çalışmalarında, var olan kopula fonksiyonları daha dinamik bağımlılık yapıları elde etmek ya da kuyruk bağımlılığı ve eliptik bağımlılığın modellenenebilmesi gibi çeşitli sebeplerle yeniden düzenlenmiştir. Patton [28, 29] zamana bağlı olarak değişen koşullu bağımlılığın ve çok değişkenli bağımlılığın modellenenebilmesi amacıyla koşullu kopula tanımını geliştirmiştir. Fermanian ve Wegkamp [30, 31], koşullu kopula fonksiyonlarını geliştirerek sözde-kopula fonksiyonlarını tanımlamıştır. Sözde-kopula fonksiyonu ile kopulanın durağan yapısından uzaklaşıp, dinamik yani zamana göre değişen bir yapı kazanması amaçlanmaktadır. Sözde-kopula fonksiyonu çeşitli fonksiyonlarla elde edilen düzenlenmiş ilişki katsayıları yardımıyla değiştirilerek, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula geliştirilmiştir [32, 33]. Kopula fonksiyonları üzerinde yapılan değişikliklerin etkisinin test edilmesi ve farklı kopula fonksiyonlarının karşılaştırılarak uygun kopulanın seçilmesi üzerine çalışmalar da yapılmıştır [34, 35].

Anastasiadis ve Chukuva [36] sigortada bağımlılığın çok değişkenli modellenmesi üzerine yaptıkları derlemede 1971 yılından 2008 yılına kadar 55 farklı araştırmacının çalışmasını incelemişlerdir. Modelleme yaklaşımlarını dört ana başlık altında toplamışlardır. Bu yaklaşımlardan en sık kullanılanlar; sürekli zamanlı süreç yaklaşımları [37], durum temelli yaklaşımlarda Markov modeller [38, 39], süreç temelli olmayan yaklaşımlarda kopula modelleri [3, 4, 40] ile hasar tutarı modelleri [13, 41] ve diğer yaklaşımlar altında ise çok değişkenli dağılımlardır [42-44].

Anastasiadias ve Chukuva'nın [36] çalışmasında bahsedilen yöntemler ile kopula fonksiyonları dışında özellikle hayat dışı sigortada bağımlılık modellemesinde son yıllarda yararlanılan modeller; Genelleştirilmiş Doğrusal Model (GDM) [39, 45-47], Genelleştirilmiş Doğrusal Karma Model (GDKM) [8, 48] ile GDM'lerin kopula ile kombinasyonu olan kopula regresyon modelleridir [2, 9, 10].

Hayat dışı sigortalara ilişkin matematiksel hesaplamaların iki temel bileşeni hasar tutarı ve hasar sayısıdır. Genellikle hasar tutarı ve sayısı bağımsız varsayılarak analizler yapılmaktadır. Ancak, hayat dışı sigortalara ilişkin gerçeğe daha yakın tahmin, fiyatlandırma ve rezerv hesaplamaları yapmak amacıyla hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık dikkate alınmalıdır.

Literatür incelendiğinde hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığı modelleyen iki tür yaklaşım olduğu görülmüştür. Birinci yaklaşımda toplam hasarın GDM veya GDKM ile modellemesinde hasar sayısı modele bir eş değişken olarak alınır [8, 45-49]. Hasar sayısının, hasar tutarı tahmininde bir eş değişken olarak alınması, bağımsızlık varsayımını ortadan kaldırır. İkinci yaklaşımda ise GDM hasar tutarı ve sayısı için ayrı ayrı uygulanır, daha sonra iki değişkenli kopula fonksiyonları kullanılarak bu iki bileşen arasındaki bağımlılık modellenir [2, 9, 10, 50]. Bu tez çalışmasında ikinci yaklaşımda olduğu gibi marjinal GDM'ler ve kopula fonksiyonları birlikte ele alınmaktadır.

GDM ve kopula kombinasyonundan oluşan modeller; çalışmalarda karma kopula model [2, 9], kopula-temelli regresyon modeli [10], vektör GDM (VGDM) [51] ve kopula regresyon modeli [52] gibi farklı isimlerle anılmaktadır. Model isimleri değişmekle birlikte, bu modellerin temelinde kopula fonksiyonları ile GDM'ler birlikte ele alınmakta ve hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılık modellenmektedir. Hayat dışı sigorta çalışmalarında, hasar tutarı gibi sürekli ve hasar sayısı gibi kesikli raslantı değişkenleri olduğundan bağımlılık çalışmalarında GDM ve kopulayı birlikte ele alan kopula regresyon modellerinin kullanımı uygundur.

GDM ve kopula fonksiyonlarını birlikte ele alan çalışmalar incelendiğinde, ilk olarak Gauss kopula fonksiyonu yardımıyla tek değişkenli yayılım modelleri birleştirilerek çok değişkenli yayılım modellerinin oluşturulduğu görülmüştür [53]. Yayılım modelleri, normal dağılım varsayımının sağlanmaması gibi konularda GDM'lere benzerliği ile kopula regresyon modellerinin temeli oluşturmuştur. Bağımlılığın dikkate alındığı kopula regresyon modellerinde parametre tahmininde kullanılacak parçalı maksimizasyon algoritması (PMA) Song ve arkadaşları [54] tarafından ilk kez önerilmiştir. Song [55] sürekli, kesikli ve karma değişkenlerdeki bağımlılık modellemesinde kullanılan karma kopula yaklaşımının teorik alt yapısını vermiştir. Kastenmeirer [9], Song [55] tarafından önerilen karma kopula yaklaşımından yararlanarak bileşik regresyon modelini geliştirmiştir. Song ve arkadaşları [51], karma kopula yaklaşımı yardımıyla oluşturduğu birleşik regresyon modellerini VGDM olarak tanımlamıştır. Song ve arkadaşlarının [51] çalışması hayat dışı sigortalarda bağımlılık modellemesinde kopulanın kullanıldığı öncü çalışmalardan biridir. Kolev ve Paiva [41], marjinal dağılımların kesikli veya sürekli olduğu durumda, özellikle sigorta verilerinin kullanıldığı kopula temelli modeller üzerine yapılmış çalışmaları derlemiştir. Parsa ve Klugman [52], GDM'lerdeki üstel dağılım ailesi koşulunu ortadan kaldırarak, GDM'leri kopula regresyon modellerine dönüştürmüştür. Czado ve arkadaşları [2] hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığı modellemek için, GDM ve Gauss kopuladan oluşan modele karma kopula model adını vermişlerdir. Krämer ve arkadaşları [10], Czado ve arkadaşlarının [2] önerdiği karma kopula modele benzer şekilde marginal GDM'ler ile kopulaları birleştirmiş, Gauss kopula dışında Clayton, Gumbel ve Frank kopulayı da modele dâhil ederek kopula-temelli regresyon modelini tanımlamışlardır. Baumgartner [37] GDM ile Gauss, Clayton, Gumbel ve Frank kopula kombinasyonuna GDKM'leri de dâhil edip, bayesci parametre tahmin yöntemlerinden yararlanmıştır. GDM'ler dışında GDM'lere benzer Tweedie modellerin ve kopula fonksiyonlarının bağımlılık modellemesinde kullanıldığı çalışmalar da vardır [50, 56, 57]. Hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılık çalışmaları, kuyruk bağımlılığını modellemek [58]; gözlenemeyen risk faktörlerinin etkisini incelemek [59], bütün sigortalıları hasar meydana getirmiş gibi varsaymak yerine modele bir gösterge değişken eklemek [60] vb. nedenlerle zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Bu çalışmada hayat dışı sigortalarda, hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın modellenmesi ve var olan yöntemlerin belirli düzenlemelerle geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiye göre düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli önerilmiştir. Düzenleme ile farklı risk gruplarına özel bağımlılık modeli geliştirilmiştir. Hasar tutarı ve sayısı için oluşturulan marjinal GDM'ler düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonları ile birlikte ele alınarak düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen yeni modelle, literatürde bulunan kopula regresyon modellerine iki yönden katkı sağlanmıştır. Sözde-gözlemlerin kullanıldığı sözde-kopulalarla gerçek veriye daha yakın tahminler bulunmuştur. Düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı kopulalarla ise çalışılan verideki hasar tutarı ve sayısının bağımlılığına uygun fonksiyon yardımıyla daha esnek bir bağımlılık modellemesi sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında, Birinci Bölüm'de hayat dışı sigortalarda bağımlılık modellemesine genel bir giriş yapılmış ve konu ile ilgili yapılmış çalışmalar incelenmiştir. İkinci Bölüm'de, kullanılan yöntemler ve mevcut modeller hakkında genel bilgi verilmiştir. Üçüncü Bölüm'de, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli önerilmiş ve parametre tahmini için parçalı sözde-EÇÖ tahmin yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca önerilen model, farklı risk grupları için risk grubundaki hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiye göre özelleştirilmiştir. Dördüncü Bölüm'de, önerilen model hem benzetim hem de gerçek veri analizi ile incelenmiştir. Çalışma sonucunda elde edilen sonuçlara ve önerilere ise Beşinci Bölüm'de yer verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER VE YÖNTEMLER

Kopula fonksiyonu ve marjinal GDM'lerin birlikte ele alındığı kopula regresyon modellerinde, öncelikle rastlantı değişkenleri için GDM'ler elde edilir, daha sonra ise karma kopula yaklaşımı yardımıyla değişkenler arasındaki bağımlılık modellenir. Karma kopula yaklaşımı, sürekli ve kesikli rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığın kopula fonksiyonları ile modellenmesinde kullanılır.

Bu tez kapsamında hayat dışı sigortanın iki önemli bileşeni olan hasar tutarı ve sayısı için oluşturulmuş marjinal GDM'ler standart Gauss kopula fonksiyonu yerine Fang ve Madsen [33] tarafından önerilen, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu ile birleştirilerek, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli önerilmiştir.

Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modellerinin oluşturulabilmesi için öncelikle düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu ve kopula regresyon modellerinin teorik alt yapısı anlaşılmalıdır. Bu amaçla GDM, kopula, sözde-kopula ve düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonları ile kopula regresyon modelinin oluşum aşamaları ve bu modellerde kullanılan parametre tahmin yöntemine ilişkin genel bilgiler aşağıda kısaca özetlenmiştir.

2.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Model

Klasik doğrusal modellerin genelleştirilmiş hali olan GDM'ler, bağ fonksiyonu yardımıyla dönüştürülmüş ortalamayı, açıklayıcı değişkenlerin doğrusal bileşeni olarak modeller. GDM'lerdeki genelleştirilmiş ibaresi yanıt değişkeninin dağılım koşulunun esnetilmesinden ve bağ fonksiyonunun kullanımından kaynaklanmaktadır. Yanıt değişkeninin dağılım koşulu normal dağılım yerine, Üstel Dağılım Ailesi'nden (ÜDA) herhangi bir dağılım olarak genişletilir. Klasik doğrusal modellerde yanıt değişkeninin ortalaması ile açıklayıcı değişkenler arasında ilişki kurulurken, GDM'lerde yanıt değişkeninin ortalamasının bir fonksiyonu ile açıklayıcı değişkenler

arasında ilişki kurulur. Bu durum GDM'lerin farklı alanlarda ve farklı veri türlerinin analizinde sıklıkla tercih edilmesine neden olur. Hayat dışı sigorta hesaplamalarında; hasar tutarı dağılımı genellikle sağa çarpıktır ve hasar sayısı dağılımı kesikli dağılıma uymaktadır. Hem hasar tutarı hem de hasar sayısının simetrik bir dağılım olan normal dağılıma uymaması, klasik doğrusal modellerdeki sabit varyanslılık ve ilişkisizlik gibi varsayımların hasar verileri için her zaman sağlanamaması gibi nedenlerden dolayı GDM'ler aktüeryal analizler için iyi bir alternatiftir.

GDM tanımını vermeden önce ÜDA ve özelliklerini hatırlamakta fayda vardır. θ kanonik parametre, ϕ yayılım parametresi, $a(\theta)$ ve $c(y, \phi)$ yanıt değişkeninin dağılımına göre değişen bilinen fonksiyonlar olmak üzere, ÜDA'dan bir rastlantı değişkeninin olasılık ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = c(x, \phi) \exp\left\{\frac{x\theta - a(\theta)}{\phi}\right\} \quad (2.1)$$

biçimindedir [61]. ÜDA'dan bir X rastlantı değişkeninin beklenen değeri ve varyansı $a(\theta)$ fonksiyonu yardımıyla sırasıyla,

$$E(X) = \mu = \frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta}$$

$$Var(X) = \phi \frac{\partial^2 a(\theta)}{\partial \theta^2}$$

biçiminde ifade edilir. Ortalama ile varyans arasındaki ilişkiyi gösteren $V(\mu)$ varyans fonksiyonu

$$V(\mu) = \frac{\partial^2 a(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

şeklindedir. Eş. (2.2)'den $Var(X) = \phi V(\mu)$ ilişkisinin kurulabileceği açıktır. Bu dağılım ailesinin üyeleri arasında normal, Poisson, gamma, binom, negatif binom, ters Gauss gibi bilinen birçok dağılım vardır. Bu tez çalışması kapsamında Poisson ve gamma dağılımlı rastlantı değişkenleri ile çalışıldığından bu iki dağılımın ÜDA'ya göre tanımları aşağıda verilmiştir. ÜDA'dan bir rastlantı değişkeninin olasılık ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\ln(f(x)) = \ln(c(x, \phi)) + \frac{x\theta - a(\theta)}{\phi}$$

elde edilir [61]. Eş. (2.1)'deki fonksiyonda, θ kanonik parametresi ve ϕ yayılım parametresi ile $c(x, \phi)$ ve $a(\theta)$ fonksiyonları ÜDA'ya üye olan her bir dağılım için özelleştirilir.

Gamma Dağılımı

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x \geq 0 \quad (2.3)$$

biçimindedir. Gamma dağılımının beklenen değeri $E(X) = \alpha\beta$ ve varyansı $Var(X) = \alpha\beta^2$ 'dir.

Eş. (2.3)'teki gösterim, gamma dağılımının α şekil parametresi ve β oran parametresi ile sıklıkla kullanılan şekil parametrelendirmesidir [62]. Ancak gamma dağılımlı bir rastlantı değişkeninin GDM ile modellendiği çalışmalarda şekil parametrelendirmesinden ziyade, ortalama parametrelendirmesi tercih edilir [2, 9, 61, 63]. Ortalama parametrelendirmesi sayesinde gamma dağılımı ile ki-kare ve normal dağılım arasında ilişki kurulabilir. Bu nedenle ki-kare dağılımı da ÜDA'nın bir üyesidir [61]. Gamma dağılımının μ ortalama parametresi ve ν serbestlik derecesi parametreleri ile tanımı Eş. (2.4) ile aşağıda verilmiştir.

$x \sim \text{Gamma}(\mu, \nu)$ olmak üzere olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{x^{-1}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x\nu}{\mu}\right)^\nu e^{-\frac{x\nu}{\mu}} \quad x \geq 0 \quad (2.4)$$

biçimindedir. Beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \mu \quad \text{ve} \quad Var(X) = \frac{\mu^2}{\nu}$$

şeklindedir. Gamma dağılımının üstel dağılım ailesinden bir dağılım olduğunu göstermek amacıyla olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= (\nu - 1)\ln x - \ln\Gamma(\nu) - \frac{x\nu}{\mu} - \nu\ln\mu + \nu\ln\nu \\ &= (\nu - 1)\ln x - \ln\Gamma(\nu) + \frac{x(-\mu^{-1})}{\nu^{-1}} - \frac{\ln\mu}{\nu^{-1}} + \nu\ln\nu \end{aligned}$$

$$= \frac{x\theta - a(\theta)}{\phi} + (v - 1)\ln x - \ln\Gamma(v) + v\ln v$$

$\phi = v^{-1}$, $\theta = -\mu^{-1}$ ve $a(\theta) = -\ln(-\theta)$ iken gamma dağılımı ÜDA'nın bir üyesidir. Beklenen değer ve varyans sırasıyla aşağıdadır:

$$E(X) = \frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-1}{\theta} = \mu$$

$$Var(X) = \phi \frac{\partial^2 a(\theta)}{\partial \theta^2} = v^{-1} \frac{1}{\theta^2} = \frac{\mu^2}{v}$$

Poisson Dağılımı

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ olmak üzere olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

biçimindedir. Poisson dağılımının üstel dağılım ailesinden bir dağılım olduğunu göstermek amacıyla olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}\right) = -\lambda + x \ln \lambda - \ln x! = -\ln x! + \frac{x\theta - a(\theta)}{\phi}$$

eşitliği elde edilir. $\phi = 1$, $\theta = \ln(\lambda)$ ve $a(\theta) = e^\theta$ iken Poisson dağılımı ÜDA'nın bir üyesidir. Poisson dağılımının en önemli özelliklerinden biri olan beklenen değer ve varyansın eşitliği sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$E(X) = \frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial(e^\theta)}{\partial \theta} = e^\theta = \lambda$$

$$Var(X) = \phi \frac{\partial^2(e^\theta)}{\partial \theta^2} = e^\theta = \lambda$$

ÜDA'nın üyesi olan diğer dağılımlar ve özellikleri için De Jong ve Heller [61] ile McCullagh ve Nelder'in [64] çalışmaları incelenebilir.

μ üstel dağılım ailesinden herhangi bir dağılıma uyan Y yanıt değişkeninin beklenen değeri, \mathbf{x} açıklayıcı değişken vektörü ile $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü olmak üzere, monoton ve türevlenebilir $g(\cdot)$ bağ fonksiyonu yardımıyla doğrusal tahmin ediciye bağlı olarak kitle ortalamasının hesaplandığı modellere GDM denir.

$$g(\mu) = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} \quad (2.6)$$

Eş. (2.6) ile verilen GDM, model bileşenleri yardımıyla daha kolay tanımlanabilir. Model bileşenleri aşağıda verilmiştir.

- 1) ÜDA'dan Y yanıt değişkeninin olasılık ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu
- 2) Doğrusal bileşen
- 3) Bağ fonksiyonu

n gözlem sayısını göstermek üzere, i . gözlem ($i = 1, \dots, n$) için doğrusal bileşen, $\eta_i = \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_{ij} = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}_i = g(\mu_i)$, biçiminde açıklayıcı değişkenlerin bir doğrusal kombinasyonudur. i . gözlem için bağ fonksiyonu $g(\mu_i) = \eta_i$ biçiminde Y yanıt değişkeninin beklenen değeri ile doğrusal bileşen arasında bağ kuran bir fonksiyondur. Bağ fonksiyonları; birim, logaritmik, üstel, karekök ve logit olabilir ve yanıt değişkeninin dağılımına göre belirlenir. Poisson ve gamma dağılımlı yanıt değişkenlerinin GDM ile modellenmesinde genel olarak logaritmik bağ fonksiyonu kullanılır. Logaritmik bağ fonksiyonu dışında, Poisson dağılımlı rastlantı değişkenleri için birim, gamma dağılımlı rastlantı değişkenleri için ise üstel bağ fonksiyonu kullanılabilir. Logaritmik bağ fonksiyonu yardımıyla oluşturulmuş gamma ve Poisson dağılımlı yanıt değişkenlere ait GDM'ler aşağıda açıklanmıştır:

Gamma GDM

Gamma dağılımlı bir Y yanıt değişkeni için açıklayıcı değişken vektörü \mathbf{x} ve parametre vektörü $\boldsymbol{\alpha}$ iken gamma GDM, Eş. (2.7) ile aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$Y \sim \text{Gamma}(\mu, \nu)$$

$$g(y) = \ln(\mu) = \mathbf{x}'\boldsymbol{\alpha} \quad (2.7)$$

Poisson GDM

Poisson dağılımlı bir Y yanıt değişkeni için açıklayıcı değişken vektörü \mathbf{z} , parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}$ ve \mathbf{e} riske maruz değerini göstermek üzere, $\ln(e)$ düzeltme terimini içeren Poisson GDM, Eş. (2.8) ile aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$$
$$g(y) = \ln(\lambda) = \ln(e) + \mathbf{z}'\boldsymbol{\beta} \quad (2.8)$$

Kopula regresyon modelleri GDM'ler ile kopula fonksiyonlarının kombinasyonundan oluştuğundan kopulanın tanımı ve özellikleri aşağıda Kesim 2.2.'de verilmiştir.

2.2. Kopula

Latince kökenli kopula kelimesi “bağ, ilişki, birlikte hareket eden” anlamlarına gelmektedir. Bağımlılık modellemesi denince akla ilk gelen kopula fonksiyonu 1959 yılında Sklar tarafından ortaya atılmış ve hala birçok çalışmanın temelini oluşturmaktadır [3]. İstatistik, ekonomi, ekonometri ve finans gibi birçok bilim dalında değişkenler arasındaki bağımlılığın modellenmesinde kopula fonksiyonlarından yararlanılmaktadır. Aktüerya Bilimleri'nde kopulanın ilk kullanıldığı çalışmalar ağırlıklı olarak finansal çalışmalar olmakla birlikte, Song'un [55] Gauss kopula modellerini regresyon analizinde kullanması, hayat dışı sigortalarla ilgili kopula modellerinin temelini oluşturur. Song ve arkadaşlarının [51] çalışması, hasar verisi ile kopula çalışması yapanların [2, 10] temel kaynağı niteliğindedir.

Kopula çok değişkenli ve normal olmayan dağılımların tanımlanmasında ve bağımlılığın modellenmesinde kullanılır. Kopula fonksiyonu, marjinal dağılımları birleştiren çok değişkenli dağılım fonksiyonu olarak tanımlanabilir [40]. Dağılım fonksiyonlarının tanım aralığı $\mathbf{I}=[0,1]$ olduğu için kopula; marjinal uniform dağılımlı rastlantı değişkenlerini birleştiren çok değişkenli bir dağılım fonksiyonu olarak da tanımlanabilir.

Kopula fonksiyonlarının daha iyi anlaşılabilmesi için reel eksen, genişletilmiş reel eksen, artan ve azalan fonksiyonların özellikleri, bir fonksiyonun hacmi gibi temel matematiksel bilgilerin verilmesinde fayda vardır.

$(-\infty, \infty)$ açık aralığı \mathbf{R} reel eksenini, $[-\infty, \infty]$ kapalı aralığı ise $\bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel eksenini ifade eder. Benzer biçimde; $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ reel düzlem iken, $\bar{\mathbf{R}}^2 = \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel düzlemdir. Genişletilmiş reel düzlem üzerinde iki kapalı aralığın kartezyen çarpımı; köşeleri (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) ve (x_2, y_2) olan $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dikdörtgenidir. İki değişkenli $H(.,.)$ fonksiyonunun tanım kümesi $DomH$, $\bar{\mathbf{R}}^2$ genişletilmiş reel düzlemin alt kümesidir ve aynı fonksiyonun görüntü kümesi $RanH$ fonksiyonu, \mathbf{R} reel eksenin alt kümesidir [40].

Tanım 2.1

S_1 ve S_2 , $\bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel ekseninin boş olmayan alt kümeleri ve $H(.,.)$ tanım kümesi $DomH = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon olsun. $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $H(.,.)$ 'nin tanım bölgesindeki tüm noktaları içeren bir bölge olsun. B bölgesinin H -hacmi,

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)$$

biçimindedir.

Tanım 2.2

Köşe noktaları, $H(.,.)$ fonksiyonunun tanım kümesi $DomH$ üzerinde olan tüm B dikdörtgenleri için $V_H(B) \geq 0$ ise, iki değişkenli $H(.,.)$ fonksiyonu 2-artan bir fonksiyondur.

Nelsen [40], kopula fonksiyonlarını ve özelliklerini tanıtmadan önce alt kopula fonksiyonlarını tanıtmış ve kopulaları bu fonksiyonlarla bağlantılı olarak vermiştir. Ancak bu tez çalışmasında alt kopula fonksiyonları ve diğer gerekli matematiksel tanımlar, önsavlar ve teoremler verilmemiştir.

$\mathbf{I}^2 = [0,1] \times [0,1]$ 'den $\mathbf{I} = [0,1]$ 'e tanımlanan ve $C(.,.)$ ile gösterilen iki-değişkenli kopula fonksiyonu çalışmalarda kısaca C kopula fonksiyonu olarak kullanılmaktadır.

Tanım 2.3

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ olmak üzere $C: I^2 \rightarrow I$ 2-değişkenli kopula fonksiyonunun sağlaması gereken özellikler aşağıda belirtilmiştir [40]:

1. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ için, \mathbf{u} 'nun üyelerinden biri 0 iken kopula fonksiyonu 0 değerini alır.

$$C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$$

2. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır.

$$C(u_1, 1) = u_1 \text{ ve } C(1, u_2) = u_2$$

3. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ ve $\mathbf{v} \in [0,1]$ için $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ ise kopula hacmi $V_C = V_{[u_1, v_1] \times [u_2, v_2]}$ pozitiftir.

$$V_C = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Tanım 2.4

Frechet-Hoeffding sınırları bir kopula fonksiyonunun üst ve alt sınırlarını ifade eder ve sırasıyla $M(u, v)$ ve $W(u, v)$ ile gösterilir.

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq M(u, v) = \min(u, v)$$

Kopula fonksiyonu, u ve v değişkenleri kullanılarak tanımlanabildiği gibi, Sklar'ın Teoremi yardımıyla dağılım fonksiyonları kullanılarak da tanımlanabilir [3].

Teorem 2.1 (Sklar'ın Teoremi)

Dağılım fonksiyonları $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$ olan n rastlantı değişkeni olsun. Sklar'ın Teoremi'ne göre,

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)] \quad (2.9)$$

eşitliğini sağlayan bir C kopula fonksiyonu mevcuttur.

$F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ marjinal dağılım fonksiyonları sürekli ise C kopula fonksiyonu tektir ve değer kümeleri üzerinde tek olarak tanımlanır. Diğer taraftan, C bir kopula fonksiyonu ve $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ marjinal dağılım fonksiyonları ise $C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)]$ fonksiyonu n rastlantı değişkeninin ortak olasılık dağılım fonksiyonudur. Sklar'ın Teoremi, kopula fonksiyonlarının varlığını gösteren bir teoremdir. Kopula fonksiyonunun elemanları kesikli veya karma ise C fonksiyonu tek değildir ancak bir kopula fonksiyonudur.

Kopulalar parametrik ve parametrik olmayan kopulalar olarak ayrılabilir. Parametrik kopulalar genel olarak eliptik kopula (t-kopula (Student) ve Gauss kopula) ve Arşimet kopula (Clayton kopula, Gumbel kopula, Frank kopula) olarak ayrılır [52]. Parametrik olmayan kopulalar Bernstein, grid-tip ve kernel kopulalar olarak sınıflandırılabilir. Bu kopula fonksiyonlarının dışında birçok kopula fonksiyonu mevcut olup, farklı bağımlılık yapılarının modellenmesinde kullanılırlar. Eliptik kopula türlerinden biri olan Gauss kopula fonksiyonu oldukça yaygın kullanılan bir kopula türüdür.

Tanım 2.5

$\Phi(\cdot)$ tek değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu, $\Phi_n(\cdot | \mathbf{\Gamma})$ $\mathbf{\Gamma}$ ilişki matrisine sahip n değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu gösterebilir. $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{I}^n$ olmak üzere $C: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ n -değişkenli Gauss kopula fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$C(u_1, \dots, u_n | \mathbf{\Gamma}) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) | \mathbf{\Gamma}) \quad (2.10)$$

$n = 2$ durumunda elde edilecek 2-değişkenli Gauss kopula fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C(u_1, u_2 | \mathbf{\Gamma}) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \mathbf{\Gamma}) \quad (2.11)$$

$$C(u_1, u_2 | \mathbf{\Gamma}) = \frac{\partial}{\partial u_1} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(\rho_{12})^2}} \exp\left\{-\frac{s^2-2\rho_{12}st+t^2}{2(1-(\rho_{12})^2)}\right\} ds dt \quad (2.12)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Bağımlılık modellemesi çalışmalarında Gauss kopula diğer kopula türlerine göre daha çok tercih edilir. Gauss Kopula fonksiyonunun avantajları Song [55] ile Brigo ve arkadaşları [65] tarafından aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

- Kopula fonksiyonundaki değişken sayısı çok olduğunda Gauss kopula fonksiyonu ile çalışmak diğer parametrik kopula fonksiyonlarına göre daha kolaydır.
- Çok değişkenli normal dağılıma bağlı olarak tanımlanan Gauss kopula fonksiyonundaki ilişki ve bağımlılık ölçümleri kolay tanımlanır.
- Gauss kopula fonksiyonunun tüm bileşenleri klasik doğrusal regresyon modeli olduğunda, VGDM klasik çok değişkenli doğrusal modele dönüşür. Ancak diğer parametrik kopula türleri ile oluşturulan VGDM'ler için aynı durum söz konusu değildir.

Gauss kopula fonksiyonunun avantajlarının yanında yetersiz kaldığı noktalar da vardır. Gauss kopula fonksiyonunun dezavantajları,

- Asimetrik bağımlılığın,
- Eliptik bağımlılığın,
- Dairesel simetriye göre bağımlılığın,
- Kuyruk bağımlılığının,

modellenmesinde yetersiz kalmasıdır [32, 33, 65, 66].

Tanım 2.6

Dağılım fonksiyonları $F_{X_1}(x_1)$ ve $F_{X_2}(x_2)$ olan iki rastlantı değişkeni olsun. Eğer,

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P\left(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)\right) \quad (2.13)$$

ise X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri üst kuyruk bağımlılığına sahiptir ve $\lambda_U \in (0,1]$ 'dir. Eğer,

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P\left(X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u)\right) \quad (2.14)$$

ise X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri alt kuyruk bağımlılığına sahiptir ve $\lambda_L \in (0,1]$ 'dir. Eğer X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri bağımsız ise $\lambda_U = \lambda_L = 0$ 'dir [65].

Gauss kopula fonksiyonunda üst ve alt kuyruk bağımlılığı olmadığı için $\lambda_U = \lambda_L = 0$ 'dir.

Finansal ve aktüeryal verilerde asimetrik bağımlılık ve kuyruk bağımlılığı ile karşılaşma olasılığı yüksektir. Bu nedenle özellikle gerçek veri kullanılarak yapılan uygulamalarda, bağımlılığın modellenmesinde kopula fonksiyonları üzerinde belirli düzenlemeler yapılabilmektedir [32, 33].

Literatürde, bir parametrik eliptik kopula türü olan Gauss kopula dışında parametrik olmayan eliptik kopula türleri de vardır. Bu tez kapsamında Gauss kopula fonksiyonu ile çalışılacağından diğer kopula fonksiyonlarının tanım ve özellikleri verilmemiştir. Konuyla ilgili ayrıntılı bilgi için Nelsen'in [40] çalışması incelenebilir.

2.2.1. Sözde-Kopula

Kopula fonksiyonları ile bağımlılık durağan olarak modellenmektedir, ancak finansal ve aktüeryal verilerdeki bağımlılık dinamik bir yapıya sahiptir. Fermanian ve Wegkamp [30, 31] çalışmalarında daha dinamik bir bağımlılık yapısı elde etmek amacıyla Patton [28, 29] tarafından öne sürülen koşullu kopulayı geliştirerek sözde-kopula fonksiyonunu tanımlamışlardır. Patton'un [29] koşullu kopula tanımı, Fermanian ve Wegkamp [31] tarafından ölçüm kuramı ve Sklar'ın Teoremi'ne ait özellikleri sağlayacak şekilde geliştirilmiştir. Koşullu ve sözde-kopulalar, Cherubini ve arkadaşları [67] tarafından parametreleri ve şekli zamana göre değişen dinamik kopulalar olarak adlandırılmıştır. Sözde-kopulanın tanımı ve sağlaması gereken özellikler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.7

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ olmak üzere $C: I^n \rightarrow I$ n-değişkenli sözde-kopula fonksiyonunun sağlaması gereken özellikler aşağıda belirtilmiştir:

1. Her $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ için, \mathbf{u} 'nun üyelerinden en az biri 0 iken $i = 1, \dots, n$ için $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$ 'dır.
2. $C(1, \dots, 1) = 1$ 'dir.
3. Her $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ ve $\mathbf{v} \in [0,1]^n$ için, $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ ($u_1 \leq v_1, \dots, u_n \leq v_n$) iken, $[u, v]$ 'nin kopula hacmi olan $V_{[u_1, v_1] \times \dots \times [u_n, v_n]}$ pozitifdir [30, 67].

Sözde-kopulalar, bir özellik dışında Kesim 2.2’de verilen kopula fonksiyonu özelliklerini sağlar. Sözde-kopulalara has olan bu özellik, $C(u_1, \dots, u_n)$ çok değişkenli kopula fonksiyonunda $1 \leq k \leq n$ için u_k dışında tüm elemanların 1’e eşit olma koşulunun aranmamasıdır.

Fermanian ve Wegkamp [30] ile Cherubini ve arkadaşları [67] sözde-kopulanın diğer özelliklerini tanımlamak amacıyla bazı teoremlerden yararlanmışlardır.

Teorem 2.2

$H(\cdot)$ R^n ’de tanımlı n-değişkenli bir dağılım fonksiyonu ve $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ R ’de tanımlı tek değişkenli n adet dağılım fonksiyonu olsun. Her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ için $1 \leq j \leq n$ iken $F_j(x_j) = F_j(\tilde{x}_j)$ ise $H(\mathbf{x}) = H(\tilde{\mathbf{x}})$ olur. Her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ için $H(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ eşitliğinin sağlandığı bir $C(\cdot)$ sözde-kopula fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca $C(\cdot)$ eğer bir sözde-kopula fonksiyonu ve $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ fonksiyonları tek değişkenli dağılım fonksiyonları ise $H(\cdot)$ fonksiyonu n-değişkenli bir dağılım fonksiyonudur [30]. $C(\cdot)$ sözde-kopulası her $j = 1, \dots, n$ ve $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ için ancak ve ancak $H(\infty, \dots, x_j, \dots, \infty) = F_j(x_j)$ eşitliğini sağlıyorsa doğru bir kopula fonksiyonudur [67].

Cherubini ve arkadaşları [67] ayrıca koşullu kopula tanımı ile sözde-kopula tanımı arasındaki ilişkiyi başka teoremler yardımıyla vermektedir ancak o teoremlere burada yer verilmemiştir.

Sözde-Gauss kopula, en yaygın kullanılan sözde-kopula fonksiyonudur ve bir tür eliptik kopuladır [68]. Eliptik kopulalar, eliptik dağılımlar için önerilmiş kopulalardır. Gauss dağılımı dışında finansal çalışmalara uygunluk sağlayan t-dağılımının kullanıldığı kopula fonksiyonları da vardır. Eliptik sözde-kopulalar ile daha dinamik bir yapı elde edilmektedir. Ancak dairesel simetriden dolayı alt ve üst kuyruğu aynı algılandığından, alt ve üst kuyruk bağımlılığını modelleme de yetersiz kalırlar. Zaman içinde bu sorunları gidermek için Arşimet ve sözde-Arşimet kopula fonksiyonları tanımlanmıştır [40]. Arşimet kopulalarla çok değişkenli çalışmalar yapmak zor olduğundan ve gerçek veriye uyum sağlamada sorun yaşandığından bağımsızlığın modellenmesinde yetersiz kalmıştır. Kopula fonksiyonları belirli düzenlemelerle değiştirilerek

[32, 33] veya farklı kopula fonksiyonları ağırlıklı ortalama veya doğrusal kombinasyon gibi belirli fonksiyonlarla bir araya getirilerek [69] bu sorunlar giderilmeye çalışılmaktadır.

2.2.2. Düzenlenmiş Sözde-Kopula

Kuyruk bağımlılığının olmaması, özellikle gerçek veri uygulamalarında oldukça kullanışlı olan Gauss kopula fonksiyonunun eksik yönlerinden biridir. Standart Gauss kopula yerine sözde-Gauss kopula fonksiyonunu kullanan Fang [32] ile Fang ve Madsen [33] çalışmalarında eliptik ve kuyruk bağımlılığını daha iyi modellemek amacıyla bu kopula fonksiyonlarını yeniden düzenlemişlerdir. Gerçek sigorta verileri ile kullanılabilir dinamik yapıda, eliptik bağımlılığı ve kuyruk bağımlılığını modelleyebilen düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonları önerilmiştir. Sözde-kopula fonksiyonları yeniden tanımlanırken ilişki matrisi yeniden düzenlenmiştir. Γ ilişki matrisinin elemanları olan ilişki katsayılarını; modelin kuyruğa yakınsama hızını kontrol eden a_{ij} parametresi, modelin kuyruk şeklini kontrol eden b_{ij} parametresi ile kopulanın elemanlarının (u_1, \dots, u_n) bir fonksiyonu olarak düzenleyerek Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi elde edilmiştir. Yapılan düzenlemeler aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- $C(u_1, \dots, u_n)$ standart bir kopula fonksiyonudur. Kesim 2.2’de verilen tüm özellikleri sağladığı varsayılır.
- $C(u_1, \dots, u_n)$ bir sözde-kopula ise standart kopulanın sağlaması gereken özelliklerden, $C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, $1 \leq k \leq p$ eşitliğini sağlamak zorunda değildir.
- $C(u_1, \dots, u_n)$ bir düzenlenmiş sözde-kopula ise, standart kopulanın sağlaması gereken özelliklerinden biri olan; $C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, $1 \leq k \leq p$ eşitliğini sağlamak zorunda değildir. Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisinin elemanları olan ρ_{ij} ilişki katsayıları, modelin kuyruğa yakınsama hızını kontrol eden a_{ij} parametresi ve modelin kuyruk şeklini kontrol eden b_{ij} parametresi ile kopula fonksiyonunun elemanları olan $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ’nun bir fonksiyonu olarak $\rho_{ij}^* = f(u_i, u_j; a_{ij}, b_{ij})$ biçimindedir. Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; u_1, u_2) & \dots & \rho_{1n}^* = f(a_{1n}, b_{1n}; u_1, u_n) \\ \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; u_1, u_2) & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho_{1n}^* = f(a_{1n}, b_{1n}; u_1, u_n) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Fang ve Madsen [33] ilişki katsayısını tanımlamak için beş farklı fonksiyon ele almıştır. Bu fonksiyonların seçiminde eliptik yapıdan dolayı trigonometrik fonksiyonlar tercih edilmiştir. Fang ve Madsen [33], $\rho_{ij} = f(a_{ij}, b_{ij}, u_i, u_j)$ fonksiyonunu kısaca $\rho(u, v; a, b)$ olarak ele alıp, tanımlama yapmıştır. İlişki katsayısını tanımlamak için ele aldıkları fonksiyonlar $b(1 - auv)$, $b \cos\left(\frac{\pi}{2}a(1 - uv)\right)$, $b \sin\left(\frac{\pi}{2}a(1 - uv)\right)$, $b \tan\left(\frac{\pi}{4}a(1 - uv)\right)$ ve $b \exp\{-a(1 - uv)\}$ 'dir. İlk dört fonksiyon için $a \in [0, 1]$, son fonksiyon için $a \in [0, \infty)$ 'dir. Tüm fonksiyonlar için $b \in [-1, 1]$ alınmıştır.

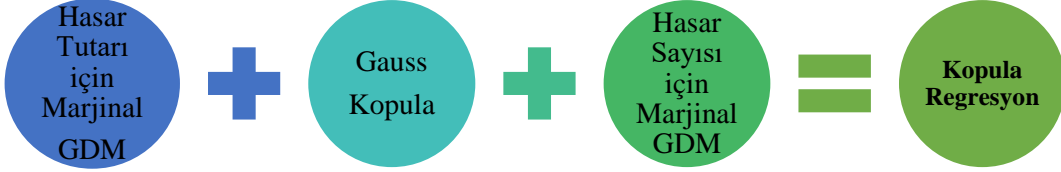
Bu fonksiyonlar 0 ve 1 aralığından değer alan fonksiyonlardır. Kopulanın genel tanımı ve Gauss kopulanın eliptik bir kopula olması nedeniyle 0 ve 1 aralığında değer alan fonksiyonların seçilmesi mantıklıdır. $a = 0$ ve $b = 0$ olduğunda, düzenlenen kopula fonksiyonları bilinen kopula fonksiyonlarına dönüşmektedir. Tanımlanan beş fonksiyonda, $b = 0$ ise $\rho = 0$ olacağından kopula modeli $C(u, v) = uv$ biçiminde bağımsız kopula modeline dönüşmektedir. $a = 0$ iken, Fonksiyon 3 ve Fonksiyon 4 için, $\rho = 0$ olacağından kopula modeli bağımsız kopula modeline dönüşmektedir. $a = 0$ iken; Fonksiyon 1, Fonksiyon 2 ve Fonksiyon 5 kopula modeli sözde-Gauss kopula modelidir [33].

Fang ve Madsen [33] tarafından önerilen yeniden düzenlenmiş kopula fonksiyonunun Gauss kopula fonksiyonuna göre daha kullanışlı olmasını sağlayan özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Kalın kuyruklu, alt/üst kuyruklu ve eliptik dağılımlar ile iyi sonuçlar verir.
- Simetriklik ve asimetriklik sorununa çözüm sunar.
- Pozitif ve negatif bağımlılık sorununa çözüm sunar.
- Sözde-kopula, olasılık yoğunluk fonksiyonu için kapalı form tanımlayabilir.

2.3. Kopula Regresyon Modeli

Bu tez çalışmasında, hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığı Gauss kopula fonksiyonu ile modelleyen kopula regresyon modelleri ele alınmaktadır. Standart bir kopula regresyon modelinin oluşum şeması aşağıda özetlenmiştir:



Şekil 2.1. Kopula regresyon modeli

Czado ve arkadaşlarının [2] çalışmasında, sigortalıya ait ortalama hasar tutarı gamma dağılımlı ve hasar sayısı sıfır kesilmiş-Poisson dağılımlı varsayılmıştır. Logaritmik bağ fonksiyonu yardımıyla oluşturulan gamma GDM ve Poisson GDM, Song [55] tarafından önerilen karma kopula yaklaşımı kullanılarak $C(\cdot, \cdot | \Gamma)$ iki değişkenli standart Gauss kopula ile birbirine bağlanmıştır. $u_1, u_2 \in [0,1]$ ve $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix}$ ilişki matrisini göstermek üzere kopula regresyon modeli,

$$C(\text{Poisson GDM}, \text{Gamma GDM} | \Gamma)$$

$$C(u_1, u_2 | \Gamma) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \Gamma) \quad (2.15)$$

biçiminde ifade edilebilir. Y_1 rastlantı değişkeni gamma dağılımlı hasar tutarı, Y_2 rastlantı değişkeni ise Poisson dağılımlı hasar sayısı rastlantı değişkenini göstermek üzere, $F_1(y_1)$ ve $F_2(y_2)$ bu rastlantı değişkenlerinin dağılım fonksiyonunu olup $u_1 = F_1(y_1)$ ve $u_2 = F_2(y_2)$ biçimindedir. Sürekli Y_1 ve kesikli Y_2 rastlantı değişkenleri için ortak olasılık dağılım fonksiyonu Sklar'ın teoremi yardımıyla,

$$F(y_1, y_2) = C(F_1(y_1), F_2(y_2)) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Sürekli Y_1 ve kesikli Y_2 rastlantı değişkenleri için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial y_1} P(Y_1 \leq y_1, Y_2 = y_2) \quad (2.17)$$

biçiminde bir kısmi türev ile tanımlanabilir. Bu kısmi türev, karma kopula yaklaşımı [51, 55] ile çözülebilir. Karma kopula yaklaşımı Kesim 2.3.1’de açıklanmıştır.

2.3.1. Karma Kopula Yaklaşımı

Karma kopula yaklaşımı, sadece sürekli rastlantı değişkenleri ile kullanılabilen kopula fonksiyonlarının kesikli rastlantı değişkenleri ile birlikte kullanılabilmesine olanak tanımıştır. Song [55] karma kopula yaklaşımını çok değişkenli yayılım modelleri yardımıyla tanımlamıştır. Yayılım modeli ilk kez Jørgensen [70] tarafından normal dağılımlı olmayan verilerin analizi için tanımlanmıştır. μ ve σ^2 parametrelili normal dağılım tanımlanırken, $(y - \mu)^2$ Öklid uzaklığından yararlanır. Öklid uzaklığı birçok regresyon modelinde kullanılır. Jørgensen [70], gözlenen y ile beklenen μ arasındaki farkın karesini ifade eden Öklid uzaklığını $d(y; \mu)$, fark fonksiyonu ile değiştirerek normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzeyen yayılım modelini tanımlamıştır. Yayılım modeli ile ilgili ayrıntılı bilgi için Jørgensen [70, 71] ile Song [55] incelenebilir. Song [55] üstel yayılım modelleri için karma kopula yaklaşımını tanımlamıştır. Karma kopula yaklaşımıyla tek değişkenli $ED(\mu_j, \sigma_j^2)$ üstel yayılım modelleri, $C(\cdot)$ Gauss kopula fonksiyonu ile birleştirilerek $MED_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\Gamma})$ n-değişkenli üstel yayılım modeli elde edilmektedir. $F_j(y_j), j = 1, \dots, n$ tek değişkenli olasılık dağılım fonksiyonunu göstermek üzere, karma kopula yaklaşımı altında Gauss kopula fonksiyonunun elemanları ile ilgili üç durum ele alınmıştır:

1. Durum: Tüm Bileşenlerin Sürekli Dağılıma Sahip Olduğu Durum

$F(\mathbf{y})$ ortak olasılık dağılım fonksiyonunun türevi alınarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\Gamma}) = c(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n) | \boldsymbol{\Gamma}) \prod_{j=1}^n f(y_j; \mu_j; \sigma_j^2) \quad (2.18)$$

2. Durum: Tüm Bileşenlerin Kesikli Dağılıma Sahip Olduğu Durum

$F(\mathbf{y})$ ortak olasılık dağılım fonksiyonundan doğrudan türev alınmaz. Kesikli ölçüme göre Radon-Nikodym türevi alınır. Ölçüm teorisinde P ve Q ölçüleri arasında dönüşümü sağlayan Radon-Nikodym türevinden yararlanılarak kesikli ölçü sürekli ölçüye dönüştürülür. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(\mathbf{y}) = P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = \sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_n} C(u_{1j_1}, \dots, u_{nj_n} | \Gamma) \quad (2.19)$$

$$u_{j_1} = F_j(y_j)$$

$$u_{j_2} = F_j(y_j^-) = F_j(y_j - 1)$$

$F_j(y_j^-) = F_j(y_j - 1)$ Radon-Nikodym türeve göre soldan limiti ifade etmektedir. $\sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_n}$ toplamı çok değişkenli dağılım fonksiyonunun sağlaması gereken özelliklerden gelmekte ve tüm olası iki değişkenli durumların toplamını gösteren bir seri toplamını ifade etmektedir [72]. Yukarıdaki eşitlik iki veya üç değişken için açılırsa seri toplamı açıkça görülür.

3. Durum: Bileşenlerin Sürekli-Kesikli (Karma) Dağılıma Sahip Olduğu Durum

n bileşenin n_1 sürekli ve $n_2 = n - n_1$ kesikli bileşenden oluştuğu varsayıldığında,

$$f(\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^{n_1} f(y_j) \sum_{j_{n_1+1}=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (-1)^{j_{n_1+1}+\dots+j_n} C_1^{n_1}(F_1(y_1), \dots, F_{n_1}(y_{n_1}), u_{n_1+1j_{n_1+1}}, \dots, u_{nj_n} | \Gamma) \quad (2.20)$$

olur. Burada;

$$C_1^{n_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \Gamma) = \frac{\partial^{n_1}}{\partial u_1 \dots \partial u_{n_1}} C(u_1, \dots, u_n | \Gamma)$$

$$\mathbf{u}_1 = (u_1, \dots, u_{n_1})^T \text{ ve}$$

$$\mathbf{u}_2 = (u_{n_1+1}, \dots, u_n)^T$$

olarak tanımlanmıştır. Karma kopula yaklaşımı altında Radon-Nikodym türevinden yararlanarak, kesikli ve sürekli rastlantı değişkenleri için oluşturulmuş GDM'ler, Gauss kopula fonksiyonu ile birlikte kullanılarak kopula regresyon modelleri oluşturulur.

$C(\cdot, \cdot | \Gamma): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, Γ ilişki matrisine sahip iki değişkenli Gauss kopula fonksiyonu ve $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}) \in [0,1]^2$ olmak üzere,

$$C(\mathbf{u}_i | \Gamma) = C(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma) = \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y_1), \Phi^{-1}(y_2) | \Gamma)}{\phi(\Phi^{-1}(y_1))\phi(\Phi^{-1}(y_2))} dy_1 dy_2 \quad (2.21)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. (2.21)'deki $C(\mathbf{u}_i | \Gamma)$ bir olasılık dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Olasılık dağılım fonksiyonundan türev işlemiyle olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$c(\mathbf{u}_i | \Gamma) = pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma) = \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(u_{i1}), \Phi^{-1}(u_{i2}) | \Gamma)}{\phi(\Phi^{-1}(u_{i1}))\phi(\Phi^{-1}(u_{i2}))} \quad (2.22)$$

elde edilir.

Hasar tutarı ve sayısı rastlantı değişkenlerini modellemek için oluşturulmuş GDM'ler sırasıyla $g(x_{i1}) = \ln(\mu_i) = \mathbf{z}'_{i1}\boldsymbol{\alpha}$ ve $g(x_{i2}) = \ln(\lambda_i) = \mathbf{z}'_{i2}\boldsymbol{\beta}$ 'dir. X_{i1} ve X_{i2} rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılık göz önünde bulundurularak, X_{i1} ve X_{i2} için ortak olasılık dağılım fonksiyonu Sklar'ın Teoremi yardımıyla kopula fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i, \Gamma) &= P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} \leq x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i) \\ &= C(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) = C(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_{i1}), \Phi^{-1}(u_{i2}) | \Gamma) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Eş. (2.23)'te, $u_{i1} := F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2)$ ve $u_{i2} := F_{X_2}(x_{i2} | \lambda_i)$ 'dir. Bu ortak dağılım fonksiyonundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2})$ 'ye geçmek için $P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2})$ elde edilmelidir.

Poisson ve binom gibi kesikli dağılımları sürekli biçimde ifade etmek için $F(x^-)$ soldan limiti, Radon-Nikodym türev yardımıyla $F(x - 1)$ şeklinde yazılabilir [55]. Bu durumda,

$$P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2}) = P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} \leq x_{i2}) - P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} \leq x_{i2} - 1) \quad (2.24)$$

$$P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2}) = C(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})|\Gamma) - C(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)|\Gamma) \quad (2.25)$$

olasılıkları elde edilir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) &= \frac{\partial}{\partial x_{i1}} P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2}) \\ &= f_{X_1}(x_{i1}) [C_1'(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})|\Gamma) - C_1'(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)|\Gamma)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

biçiminde elde edilir ve $C_1'(\cdot, \cdot) = \frac{\partial}{\partial x_{i1}} C(\cdot, \cdot)$ birinci elemana göre türevi ifade eder. Kopula fonksiyonu, ortak olasılık dağılım fonksiyonu ile kopula türevi de, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilişkidir. Hasar tutarı ve sayısına ait ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çıkarımı kısaca özetlenirse,

$$F_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = C(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma) \quad (2.27)$$

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = f_{X_1}(x_{i1}) [C_1'(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma) - C_1'(u_{i1}, u_{i2}^-|\Gamma)] \quad (2.28)$$

olarak elde edilir. Asimptotik uyum iyiliği testlerinden biri olan kısmi artık test istatistiği,

$$D_{\rho_{12}}(u_1, u_2) := C_1'(u_1, u_2|\Gamma) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12})^2)}}\right)$$

olmak üzere,

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = \begin{cases} f_{X_1}(x_{i1}) [D_{\rho_{12}}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))] & , x_{i2} = 0 \\ f_{X_1}(x_{i1}) [D_{\rho_{12}}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))] & , x_{i2} \geq 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

biçiminde yazılabilir [2, 9]. $d_{\rho_{12}}(u_1, u_2) := \phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12})^2)}}\right)$ kısmi artık test istatistiğinin türevini ifade eder ve skor eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılır.

2.3.2. Parçalı Maksimizasyon Algoritması ile Parametre Tahmini

Kopula regresyon modeli parametrik bir modeldir ve modelin tam olarak tanımlanabilmesi için parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. En çok olabilirlik (EÇO) yönteminde olabilirlik veya

log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonunu sağlayacak kökler bulunur. Diğer bir ifade ile bilinmeyen parametrelere göre kısmi türevleri alınarak elde edilen optimizasyon problemleri çözülür. Birinci türevleri ifade eden skor eşitliklerinin çözümü için Newton-Raphson, quasi-Newton-Raphson, Fisher skoru yöntemi, simpleks yöntem veya beklenti maksimizasyonu (EM) algoritması gibi iteratif yöntemlerden yararlanılır. Maksimizasyon problemlerinde, ikinci türev testinden dolayı ikinci türevlere ihtiyaç duyulur. Bu durum tüm olabilirlik fonksiyonunun bir ve iki kez türevlenebilir olmasını gerektirir. Bu sorunu çözmek için Song ve arkadaşları [54], PMA adını verdikleri yeni bir parçalı EÇO tahmin yöntemi önermişlerdir. PMA'nın en önemli amaçlarından biri, algoritmanın tutarlı tahmin ediciler elde edecek şekilde tasarlanmasıdır.

Parçalı Maksimizasyon Algoritması

Tüm olabilirlik fonksiyonunun ikinci türevinin hesaplanma zorunluluğunu ortadan kaldırmak amacıyla olabilirlik fonksiyonu iki parçaya ayrılır. Birinci parça türevi kolay alınabilen ve kolay maksimize edilebilen bir fonksiyon olarak belirlenir. İkinci parçada ise, birinci parçada bulunan tahminler güncellenir. PMA yönteminde, tahminlerin yansız ve oldukça küçük varyanslı olduğu diğer bir ifade ile tutarlı tahmin ediciler olduğu ileri sürülmektedir. Ayrıca bu yöntemle bulunan tahmin edicilerin asimptotik normallik varsayımını da sağladığı iddia edilmektedir [54]. θ bilinmeyen parametre vektörü, $L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonu ve $l(\theta)$ log-olabilirlik fonksiyonu olmak üzere PMA aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= L_w(\theta)L_e(\theta) \\
 \ln L(\theta) &= \ln L_w(\theta) + \ln L_e(\theta) \\
 l(\theta) &= l_w(\theta) + l_e(\theta)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$l_w(\theta)$ çalışılan koşullar altındaki log-olabilirlik fonksiyonunu gösterirken, $l_e(\theta)$ etkin bir tahmin edici elde edilmesi amacıyla ilk tahminlerin güncellendiği log-olabilirlik fonksiyonunu göstermektedir. Bu log-olabilirlik fonksiyonunun skor eşitlikleri,

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial l_e(\theta)}{\partial \theta} \tag{2.31}$$

biçimindedir. $\theta_n^1, \frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta}$ skor eşitliğinde elde edilmiş bir tahmin edicidir. θ_n^1 , tutarlı ve asimptotik olarak normal dağılımlıdır. θ_n^1 'in tutarlı ve asimptotik olarak normal olduğu Song ve arkadaşları [54] tarafından gösterilmiştir. $\frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial l_e(\theta)}{\partial \theta} = 0$ 'dan, $\frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial l_e(\theta_n^1)}{\partial \theta}$ eşitliği çözülerek θ_n^2 tahmin edicisi elde edilir. θ_n^2 'nin tutarlı ve asimptotik olarak normal olup olmadığı ile θ_n^1 'den daha etkin olup olmadığı test edilir. Bu bilgiler ışığında, PMA adımları aşağıdaki gibi yazılır:

Adım 1: $\frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden θ_n^1 bulunur.

Adım 2: $\frac{\partial l_w(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial l_e(\theta_n^1)}{\partial \theta}$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_n^k, k = 2, 3, \dots$ bulunur.

Song ve arkadaşları [54], PMA'nın uygulanabilirliğini iki değişkenli Gauss kopula fonksiyonu üzerinde göstermişlerdir. Kopula fonksiyonu gibi çok değişkenli fonksiyonlarda tek bir θ parametre vektörü ile çalışmak, bileşenlerin boyutlarının farklı olması durumunda sorun yaratabilir. Bu durumda θ parametre vektörünü de parçalı biçimde yazmak alternatif bir çözümdür. $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ biçiminde parçalı bir parametre vektörü olsun. θ_1 parametre vektörü p_1 ve θ_2 parametre vektörü p_2 boyutlu olmak üzere, θ parametre vektörü $p_1 + p_2 = p$ boyutludur. Bu durumda log-olabilirlik fonksiyonu $l(\theta) = l_w(\theta_1) + l_e(\theta_1, \theta_2)$ biçimindedir ve skor eşitlikleri,

$$\frac{\partial l_{w(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial l_{e(1)}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial l_{e(2)}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \quad (2.33)$$

olur. Parçalı parametre vektörü kullanıldığında alternatif PMA adımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

Adım 1.1: $\frac{\partial l_{w(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{1,n}^1$ bulunur.

Adım 1.2: $\frac{\partial l_{e(2)}(\theta_{1,n}^1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{2,n}^1$ bulunur.

Adım 2.1: $\frac{\partial l_{w(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial l_e(\theta_{1,n}^{k-1}, \theta_{2,n}^{k-1})}{\partial \theta}$ 0 skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{1,n}^k$ bulunur.

Adım 2.2: $\frac{\partial l_{e(2)}(\theta_{1,n}^{k-1}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{2,n}^k$, $k = 2, 3, \dots$ bulunur.

Bu algoritma ile bulunan $\hat{\theta}_n^k = (\hat{\theta}_{1,n}^k, \hat{\theta}_{2,n}^k)$ vektörü, parametre tahmin edicisidir. Bu tahmin edicinin de her k denemesi için tutarlı ve asimptotik olarak normal olduğu Song ve arkadaşları [54] tarafından gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık dikkate alındığı için iki farklı marjinal GDM ile çalışılacağından, Song ve arkadaşları [54] tarafından önerilen alternatif PMA'dan yararlanılmıştır. Sözde-kopula fonksiyonu kullanılacağı için sözde-log-olabilirlik fonksiyonu elde edilecek ve sözde-log-olabilirlik fonksiyonu iki parçalı şekilde yazılacaktır. İlk parçada parametre bağımsızlık varsayımı altında tahmin edilip ve ikinci parçada bağımlılık varsayımı altında güncellenecektir. Parçalı sözde-EÇO tahmini hakkında ayrıntılı bilgiye Kesim 3.3.3'te değinilecektir.

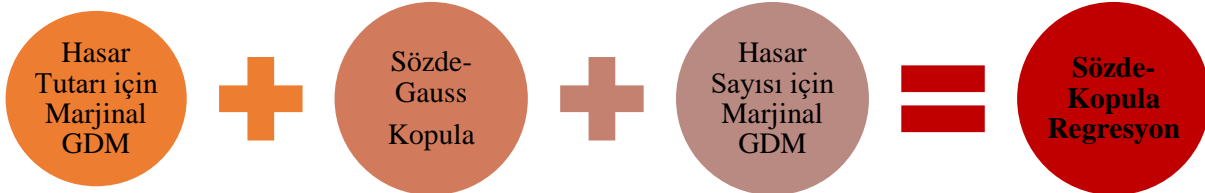
3. DÜZENLENMİŞ SÖZDE-KOPULA REGRESYON MODELİ

İkinci Bölüm’de alt yapısı verilen kopula regresyon modeli, bu bölümde öncelikle sözde-kopula regresyon modeli olarak geliştirilmiş ve literatürde yer almayan düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli tanımlanmıştır. Parametre tahmin yöntemi ise, önerilen modele göre yeniden düzenlenmiştir.

3.1. Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Hasar tutarı ve sayısı için oluşturulan GDM’leri, Gauss kopula fonksiyonu yardımıyla birbirine bağlayan kopula regresyon modelinin oluşum şeması, Kesim 2.3 altında Şekil 2.1 ile verilmiştir. Hasar tutarının gamma ve hasar sayısının Poisson dağılımlı olduğu varsayımı altında, Γ ilişki matrisi ve $C(.,.|\Gamma)$ Gauss kopula fonksiyonunu göstermek üzere, kopula regresyon modeli $C(\text{Gamma GDM}, \text{Poisson GDM}|\Gamma)$ biçiminde oluşturulmaktadır.

Marjinal GDM’lerin Fermanian ve Wegkamp [30] tarafından önerilen sözde-Gauss kopula fonksiyonu ile birbirine bağlandığı sözde-kopula regresyon modeli Şekil 3.1 yardımıyla oluşturulabilir.



Şekil 3.1. Sözde-kopula regresyon modeli

$PC(.,.|\Gamma)$, sözde-kopula fonksiyonunu göstermek üzere hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın dikkate alındığı sözde-kopula regresyon modeli,

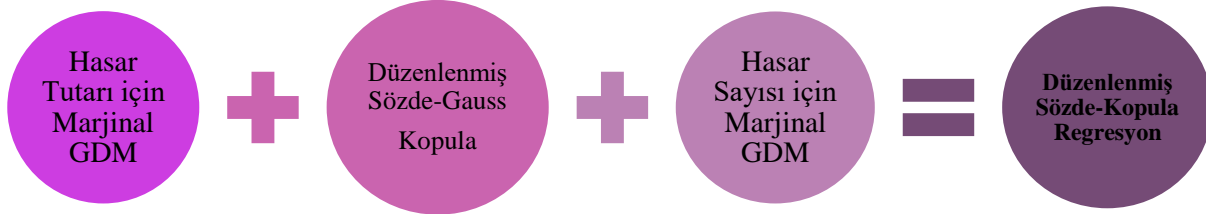
$$PC(\text{Gamma GDM}, \text{Poisson GDM}|\Gamma)$$

biçiminde oluşturulabilir. Kopula fonksiyonunun içindeki GDM'ler çalışılan verinin dağılımına göre değişebilir. Bu tez kapsamında, temel bir model kurmak amacıyla birçok çalışmada olduğu gibi gamma ve Poisson dağılım varsayımı kullanılmıştır.

Fang'in [32] sözde-kopula fonksiyonları için önerdiği düzenleme yaklaşımı kullanılarak, farklı risk grupları için hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığı modelleyecek düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modellerini önermek amaçlanmaktadır. Sözde-Gauss kopula fonksiyonlarının gerçek sigorta ve finans verisindeki bağımlılığı daha iyi modellediği bilindiğinden [33], bu fonksiyonlar kullanılarak elde edilen düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri ile hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın daha doğru modellenerek, gerçeğe yakın ve daha düşük hatalara sahip tahminler elde edilmesi beklenmektedir.

3.2. Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin elde edilmesi amacıyla Fang [32] tarafından önerilen düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu, Czado ve arkadaşları [2] tarafından önerilen karma regresyon modeli içine dâhil edilmiştir. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli Şekil 3.2 yardımıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli

Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi ve $PC(.,.|\Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu olmak üzere, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli,

$$PC(\text{Gamma GDM}, \text{Poisson GDM}|\Gamma^*)$$

biçiminde oluşturulabilir. Model tanımlanırken aşağıdaki varsayımlarda bulunulmuştur:

- Bir portföyde n sigortalının olduğu ve modelin i . sigortalı için tanımlandığı varsayılmaktadır ($i = 1, 2, \dots, n$).
- X_{i1} , bir hayat dışı sigorta branşında i . sigortalıya ait hasar tutarını gösteren sürekli rastlantı değişkenidir. X_{i1} rastlantı değişkeninin μ_i ve v_i^2 parametrelili gamma dağılımına uyduğu varsayılmaktadır. X_{i1} rastlantı değişkeni GDM ile modelleneceğinden, çoğu ÜDA ile ilgili çalışmada [2, 9, 61] olduğu gibi ortalama parametrelendirmesi kullanılmıştır. $X_{i1} \sim \text{Gamma}(\mu_i, v_i^2)$, $x_{i1} \in R^+$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_{i1}) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu_i v_i^2}\right) x_{i1}^{\frac{1}{v_i^2}-1} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i v_i^2} x_{i1}\right) \quad x_{i1} \geq 0 \quad (3.1)$$

biçimindedir.

- X_{i2} , bir hayat dışı sigorta branşında i . sigortalıya ait hasar sayısını gösteren kesikli rastlantı değişkenidir. X_{i2} rastlantı değişkeninin λ_i parametrelili Poisson dağılımına uyduğu varsayılmaktadır. $X_{i2} \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ olmak üzere olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_{i2}) = P(X_2 = x_{i2}) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{x_{i2}}}{x_{i2}!} \quad x_{i2} = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

biçimindedir.

- $\mathbf{z}'_{i1} \in R^p$, parametre sayısı p olan X_{i1} hasar tutarı rastlantı değişkenine ait açıklayıcı değişken vektörü ve $\boldsymbol{\alpha}$, X_{i1} rastlantı değişkenine ait parametre vektörüdür. $\mathbf{z}'_{i2} \in R^q$, parametre sayısı q olan X_{i2} hasar sayısını rastlantı değişkenine ait açıklayıcı değişken vektörü ve $\boldsymbol{\beta}$, X_{i2} rastlantı değişkenine ait parametre vektörüdür. e_i , i . sigortalı için riske maruz değeri göstermek üzere, Poisson GDM'ye i . sigortalı için $\ln(e_i)$ düzeltme faktörü eklenirse, logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak oluşturulan GDM'ler aşağıdaki gibi oluşturulur.

Gamma GDM

$$g(x_{i1}) = \ln(\mu_i) = \mathbf{z}'_{i1} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.3)$$

Poisson GDM

$$g(x_{i2}) = \ln(\lambda_i) = \ln(e_i) + \mathbf{z}'_{i2}\boldsymbol{\beta} \quad (3.4)$$

Bu çalışmada, e_i riske maruz kalınan süre olarak düşünülüp, tüm poliçelerin bir yıllık hayat dışı sigorta poliçesi olması varsayımı altında $\ln(1) = 0$ olduğundan, Poisson GDM $g(x_{i2}) = \ln(\lambda_i) = \mathbf{z}'_{i2}\boldsymbol{\beta}$ biçiminde düzeltme faktörsüz olarak ele alınmaktadır.

- $\boldsymbol{\mu}^{normal} = 0$ ve $\sigma = 1$ iken $N(\boldsymbol{\mu}^{normal}, \sigma^2)$ tek değişkenli standart normal dağılımdır. $\Phi(\cdot)$, tek değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu ve $\phi(\cdot)$, tek değişkenli standart normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.
- $\boldsymbol{\mu}^{normal} = (0,0, \dots, 0)'$ ve $\boldsymbol{\Sigma}$ varyans-kovaryans matrisi iken, $N_n(\boldsymbol{\mu}^{normal}, \boldsymbol{\Sigma})$ n-değişkenli standart normal dağılımdır. $\Phi_n(\cdot | \boldsymbol{\Sigma})$, n değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu ve $\phi_n(\cdot | \boldsymbol{\Sigma})$, n-değişkenli standart normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.
- $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $N_2(\boldsymbol{\mu}^{normal}, \boldsymbol{\Sigma})$, iki değişkenli normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu $\phi_2(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}\right\}$, $\mathbf{x} \in R^2$ biçimindedir.
- $C(\cdot, \cdot | \boldsymbol{\Gamma})$ standart Gauss kopula fonksiyonu yerine, ilişki matrisi ve kopula türü değiştirilerek oluşturulan düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu $PC(\cdot, \cdot | \boldsymbol{\Gamma}^*)$ kullanılmaktadır.
- a_{12} , kuyruğa yakınsama hızını ve b_{12} , kuyruğun şeklini kontrol eden parametreler, \hat{u}_1 ve \hat{u}_2 'de sözde-gözlemler olmak üzere, düzenlenmiş ilişki matrisi

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; \hat{u}_1, \hat{u}_2) \\ \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; \hat{u}_1, \hat{u}_2) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

biçimindedir.

- Düzenlenmiş ilişki katsayısı ρ_{12}^* için, Fang'ın [32] çalışmasında tanımlanan fonksiyonlardan üçü seçilmiştir ve bu fonksiyonlar aşağıda verilmiştir:

$$\rho_{12}^{*1} = b_{12} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (3.6)$$

$$\rho_{12}^{*2} = b_{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (3.7)$$

$$\rho_{12}^{*3} = b_{12} \tan\left(\frac{\pi}{4} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (3.8)$$

ρ_{12}^* düzenlenmiş ilişki katsayısının tanım aralığı $[-1, 1]$ olduğundan, bu üç fonksiyon sonucunda elde edilecek ilişki katsayısı yine $[-1, 1]$ aralığında değer alacaktır. Fonksiyon değıştikçe ilişkinin yönü veya büyüklüğü değışebilir. Model tanımı yapılırken genel bir gösterim olması açısından ρ_{12}^* kullanılmıştır.

Model gösterimlerinde sözde-kopula fonksiyonu $PC(.,.)$ olarak ifade edildiğinden, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}) \in [0, 1]^2$ değerleri sözde gözlemlere dönüştürülmeden $PC(.,.)$ fonksiyonu içinde verilmiştir. Sözde-kopula fonksiyonunun uygulamalarında sözde-gözlemlerden yararlanılır [32, 33]. R_{ij} , X_{ij} rastlantı değışkeninin rankı ve $\hat{u}_{ij} = \frac{R_{ij}}{(n+1)}$ olmak üzere, $\hat{\mathbf{u}}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{id})^T$ sözde-gözlemlerini göstermektedir. $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^T$ rastlantı değışkenlerinden rank yardımıyla hesaplanır ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, d$). $\hat{F}_j(.)$ dağılım fonksiyonu ve $\frac{n}{(n+1)}$ ölçekleme katsayısı olmak üzere, bir sözde-gözlem $\hat{u}_{ij} = \frac{n\hat{F}_j(X_{ij})}{(n+1)}$ biçiminde dağılım fonksiyonu yardımıyla da ifade edilir [73]. Dördüncü Bölüm'de, Gauss kopula fonksiyonu içinde $\hat{\mathbf{u}}_i = (\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2}) \in [0, 1]^2$ sözde-gözlemlerinden yararlanılmıştır. Sözde-gözlemler ile çalışmanın avantajı, kitleyi en iyi şekilde temsil edecek örnekleme çalışma imkânı sağlamasıdır [74].

Model varsayımları tanımlandıktan sonra Γ^* ilişki matrisi ile düzenlenmiş $PC(.,.|\Gamma^*)$ sözde-Gauss kopula fonksiyonunun düzenlemeden sonra da Kesim 2.2.1'de verilen özellikleri sağlayarak bir sözde-kopula fonksiyon olduğu gösterilmiştir.

$PC(.,.|\Gamma^*): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisine sahip iki değışkenli düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu ve $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}) \in [0, 1]^2$ olmak üzere bu kopula fonksiyonu,

$$PC(\mathbf{u}_i|\Gamma^*) = PC(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma^*) = \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y_1), \Phi^{-1}(y_2)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y_1))\phi(\Phi^{-1}(y_2))} dy_1 dy_2 \quad (3.9)$$

biçiminde yazılır. $PC(\mathbf{u}_i|\Gamma^*)$ bir olasılık dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Olasılık dağılım fonksiyonunun türevinden,

$$pc(\mathbf{u}_i|\Gamma^*) = pc(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma^*) = \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(u_{i1}), \Phi^{-1}(u_{i2})|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(u_{i1}))\phi(\Phi^{-1}(u_{i2}))} \quad (3.10)$$

elde edilir. X_{i1} ve X_{i2} rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılık göz önünde bulundurularak, X_{i1} ve X_{i2} için ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir. u_{i1} : =fonksiyonu, Sklar'ın Teoremi yardımıyla kopula fonksiyonları cinsinden,

$$\begin{aligned} P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} \leq x_{i2} | \mu_i, \nu_i^2, \lambda_i) &= F(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i^{gamma}, \nu_i^2, \lambda_i, \Gamma^*) \\ &= PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_{i1}), \Phi^{-1}(u_{i2}) | \Gamma^*) \end{aligned} \quad (3.11)$$

biçiminde yazılabilir. $pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonunun türevinden bulunabildiği gibi, Fang'in [32] çalışmasında verilen normalleştirme işlemi ile de elde edilebilir. Normalleştirme için $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}) \in [0,1]^2$ ve $\boldsymbol{\gamma} = (a_{12}, b_{12})$ parametre vektörü olmak üzere iki-değişkenli Gauss kopula fonksiyonuna benzeyen,

$$\begin{aligned} f(u_{i1}, u_{i2} | \boldsymbol{\gamma}) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \exp \left\{ \frac{[\Phi^{-1}(u_{i1})]^2 + [\Phi^{-1}(u_{i2})]^2}{2} \right\} \\ &* \exp \left\{ - \frac{[\Phi^{-1}(u_{i1})]^2 - 2\rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_{i1})\Phi^{-1}(u_{i2}) + [\Phi^{-1}(u_{i2})]^2}{2[1 - (\rho_{12}^*)^2]} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

fonksiyonu tanımlanmıştır. $\rho_{12}^* = f(u_{i1}, u_{i2}; \boldsymbol{\gamma})$ olarak yazılabilir. N normalleştirme katsayısını göstermek üzere, normalleştirme işlemi Eş. (3.13) ile yapılır[33].

$$pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{f(u_{i1}, u_{i2} | \boldsymbol{\gamma})}{N} \quad (3.13)$$

Eş. (3.13)'teki N aşağıda verilmiştir.

$$N = \int_0^1 \int_0^1 f(u_{i1}, u_{i2} | \boldsymbol{\gamma}) du_{i1} du_{i2} \quad (3.14)$$

Buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{f(u_{i1}, u_{i2} | \mathcal{Y})}{\int_0^1 \int_0^1 f(u_{i1}, u_{i2} | \mathcal{Y})} du_{i1} du_{i2}$$

olur. $f(u_{i1}, u_{i2} | \mathcal{Y})$ fonksiyonu açık olarak yazılırsa,

$$pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{f(u_{i1}, u_{i2} | \mathcal{Y})}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \exp \left\{ \frac{[\Phi^{-1}(u_{i1})]^2 + [\Phi^{-1}(u_{i2})]^2}{2} \right\} \exp \left\{ - \frac{[\Phi^{-1}(u_{i1})]^2 - 2\rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_{i1}) \Phi^{-1}(u_{i2}) + [\Phi^{-1}(u_{i2})]^2}{2[1 - (\rho_{12}^*)^2]} \right\}$$

elde edilir. Daha kısa bir gösterim elde etmek amacıyla normal skor tanımından $\Phi^{-1}(u_{i1}) = q_{i1}$ ve $\Phi^{-1}(u_{i2}) = q_{i2}$ olmak üzere,

$$pc(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \exp \left\{ \frac{q_{i1}^2 + q_{i2}^2}{2} \right\} \exp \left\{ - \frac{q_{i1}^2 - 2\rho_{12}^* q_{i1} q_{i2} + q_{i2}^2}{2[1 - (\rho_{12}^*)^2]} \right\}$$

olur. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonundan dağılım fonksiyonuna geçmek için integral alınırsa,

$$PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$$

$$= \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \exp \left\{ \frac{q_{i1}^2 + q_{i2}^2}{2} \right\} \exp \left\{ - \frac{q_{i1}^2 - 2\rho_{12}^* q_{i1} q_{i2} + q_{i2}^2}{2[1 - (\rho_{12}^*)^2]} \right\} dq_{i1} dq_{i2}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikle $\exp \left\{ \frac{q_{i1}^2 + q_{i2}^2}{2} \right\}$ terimi dışında iki-değişkenli Gauss kopula fonksiyonunun tanımına benzeyen integral elde edilir. $\frac{1}{N}$ sabit bir değer olduğundan integralin dışına alınırsa,

$$PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \exp \left\{ \frac{q_{i1}^2 + q_{i2}^2}{2} \right\} \exp \left\{ - \frac{q_{i1}^2 - 2\rho_{12}^* q_{i1} q_{i2} + q_{i2}^2}{2[1 - (\rho_{12}^*)^2]} \right\} dq_{i1} dq_{i2}$$

olur. Yukarıdaki eşitlik ile elde edilen dağılım fonksiyonu aynı zamanda bir kopula fonksiyonudur. Düzenlenmiş ilişki katsayısını içeren bu kopula fonksiyonunun, Fermanian ve Wegkamp [30, 31] tarafından tanımlanan ve Kesim 2.2.1'de verilen üç özelliği sağlayıp sağlamadığı test edilmiştir.

Düzenlenmiş kopula fonksiyonunun, bu üç özelliği de sağladığı ve bir sözde-kopula fonksiyonu olduğu EK 1’de gösterilmiştir.

Bu düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu kullanılarak, $PC(\text{GammaGDM}, \text{PoissonGDM}|\Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli oluşturulmuştur. Bu model yardımıyla hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın dikkate alındığı toplam hasar tutarının ortak olasılık dağılım fonksiyonu ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiştir.

X_{i1} sürekli hasar tutarı ve X_{i2} kesikli hasar sayısı rastlantı değişkenleri, diğer bir ifade ile karma değişkenler için karma kopula yaklaşımı [55] ve Sklar’ın Teoremi yardımıyla ortak olasılık dağılım fonksiyonu,

$$F_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} \leq x_{i2}) = PC(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})|\Gamma^*) \quad (3.15)$$

eşitliği ile elde edilir. Bu dağılım fonksiyonundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçmek için $P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2})$ elde edilmelidir. $F(x^-)$ soldan limiti, Radon-Nikodym türevi yardımıyla $F(x - 1)$ şeklinde yazılabildiğinden [55],

$$P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2}) = PC(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})|\Gamma^*) - PC(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)|\Gamma^*)$$

olur. Bu durumda ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = \frac{\partial}{\partial x_{i1}} P(X_{i1} \leq x_{i1}, X_{i2} = x_{i2}) = f_{X_1}(x_{i1}) [PC_1'(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})|\Gamma^*) - PC_1'(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)|\Gamma^*)] \quad (3.16)$$

biçiminde elde edilir. $F_{X_1}(x_{i1}) = u_{i1}$ ve $F_{X_2}(x_{i2}) = u_{i2}$ biçiminde tanımlanırsa Eş. (3.16),

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = f_{X_1}(x_{i1}) [PC_1'(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma^*) - PC_1'(u_{i1}, u_{i2}^-|\Gamma^*)] \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır. Eş. (3.17)’de, $PC_1'(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma^*) := \frac{\partial}{\partial u_1} PC(u_1, u_{i2}|\Gamma^*)_{u_1=u_{i1}}$, $PC_1'(u_{i1}, u_{i2}^-|\Gamma^*) := \frac{\partial}{\partial u_1} PC(u_1, u_{i2}^-|\Gamma^*)_{u_1=u_{i1}}$ ve $u_{i2}^- := F_{X_2}(x_{i2} - 1)$ ’dir.

$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2})$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun kapalı formunu elde etmek için yukarıda tanımlanan türevler, $PC(\cdot, \cdot | \Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonunun tanımından,

$$PC'_1(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) := \frac{\partial}{\partial u_1} PC(u_1, u_{i2} | \Gamma^*)_{u_1=u_{i1}} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Gamma^*|}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_{i2})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}\Gamma^{*-1}\mathbf{y}\right\} d\mathbf{y} \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Eş. (3.18)'de $\Phi^{-1}(u_1) = q_1$ ve $\Phi^{-1}(u_{i2}) = q_{i2}$ normal skorlar olmak üzere,

$$PC'_1(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) := \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Gamma^*|}} \int_{-\infty}^{q_1} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}\Gamma^{*-1}\mathbf{y}\right\} d\mathbf{y}$$

yazılabilir, integraller açılıp matematiksel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Gamma^*|}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \Gamma^{*-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\} dy_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} q_1 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Gamma^*|}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \Gamma^{*-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\} dy_2 \left\{ \sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{2}q_1^2\right\} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sqrt{|\Gamma^*|}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \Gamma^{*-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}q_1^2\right\} dy_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Γ^* ilişki matrisinin determinanı ve tersi sırasıyla,

$$\det(\Gamma^*) = |\Gamma^*| = (1 - (\rho_{12}^*)^2)$$

$$\Gamma^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{12}^* \\ -\rho_{12}^* & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan Eş. (3.19),

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - (\rho_{12}^*)^2)} \begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{12}^* \\ -\rho_{12}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}q_1^2\right\} dy_2$$

olur. $\begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{12}^* \\ -\rho_{12}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ matris ve vektör çarpımları yapılırsa,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - (\rho_{12}^*)^2)} \begin{pmatrix} q_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_1 - \rho_{12}^* y_2 \\ -\rho_{12}^* q_1 + y_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}q_1^2\right\} dy_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}(q_1^2 - q_1\rho_{12}^*y_2 - \rho_{12}^*q_1y_2 + y_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2\right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}(q_1^2 - 2q_1\rho_{12}^*y_2 + y_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2\right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}(q_1^2 - 2q_1\rho_{12}^*y_2 + y_2^2 \right. \\
&\quad \left. - (1-(\rho_{12}^*)^2)q_1^2)\right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}(q_1^2 - 2q_1\rho_{12}^*y_2 + y_2^2 - q_1^2 \right. \\
&\quad \left. + q_1^2(\rho_{12}^*)^2)\right\} dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}((q_1\rho_{12}^*)^2 - 2q_1\rho_{12}^*y_2 + y_2^2)\right\} dy_2
\end{aligned}$$

elde edilir. $((q_1\rho_{12}^*)^2 - 2q_1\rho_{12}^*y_2 + y_2^2)$ ifadesi, $(q_1\rho_{12}^* - y_2)^2$ karesel ifadeye eşit olduğundan,

$$\begin{aligned}
PC_1'(u_{i1}, u_{i2}|\Gamma^*) &:= \frac{\partial}{\partial u_1} PC(u_1, u_{i2}|\Gamma^*)_{u_1=u_{i1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \int_{-\infty}^{q_{i2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{12}^*)^2)}(q_1\rho_{12}^* - y_2)^2\right\} dy_2
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. İntegral çözümü için aşağıdaki değişken dönüşümü yapılırsa,

$$z = \frac{y_2 - q_1\rho_{12}^*}{\sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)}}$$

$$y_2 = z\sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)} + q_1\rho_{12}^*$$

$$dy_2 = \sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)}dz$$

elde edilir ve integral sınırları $\int_{-\infty}^a \dots$, $a = \frac{q_{i2} - \rho_{12}^* q_1}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^*)^2}}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2}} \\
&\quad * \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - (\rho_{12}^*)^2)} \left(q_1 \rho_{12}^* - z \sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2} - q_1 \rho_{12}^* \right)^2 \right\} \sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - (\rho_{12}^*)^2)} \left(-z \sqrt{1 - (\rho_{12}^*)^2} \right)^2 \right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - (\rho_{12}^*)^2)} z^2 (1 - (\rho_{12}^*)^2) \right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz
\end{aligned}$$

standart normal dağılım fonksiyonu elde edilir. Z rastlantı değişkeni 0 ortalama ve 1 standart sapma ile normal dağılıma sahiptir ve Eş. (3.20) ile aşağıda gösterilmiştir.

$$PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz \quad (3.20)$$

$$PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*) = P(Z \leq a) = F(a) = \Phi(a) = \Phi \left(\frac{q_{i2} - \rho_{12}^* q_1}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^*)^2}} \right) \quad (3.21)$$

olur ve Eş. (3.21)'de normal skor değerleri yerine $q_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ ve $q_{i2} = \Phi^{-1}(u_{i2})$ değerleri yazılırsa asimptotik uyum iyiliği testlerinden biri olan kısmi artık test istatistiği $D(\dots)$ elde edilir.

$$PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_{i2}) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^*)^2}} \right) := D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_{i2}) \quad (3.22)$$

Kastenmeirer [9] ile Czado ve arkadaşlarının [2] çalışmasına benzer şekilde kopula fonksiyonun türevi, kısmi artık test istatistiği yardımıyla ifade edilmiştir.

$PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*) := D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_{i2})$ olduğuna göre hasar sayısına ilişkin kesikli kısmın kopula türevi

için $PC'_1(u_1, u_{i2}^- | \Gamma^*) := \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_{i2}^-) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^*)^2}} \right) := D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_{i2}^-)$ ilişkisi kurulmuştur.

$PC'_1(u_1, u_{i2} | \Gamma^*)$ kopula türevi, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçmek amacıyla bulunmuştur. Kopula fonksiyonu ortak olasılık dağılım fonksiyonu ile kopula türevi de ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilişkilidir. Hasar tutarı ile sayısına ait ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çıkarımı kısaca özetlenirse,

$$F_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) \quad (3.23)$$

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = f_{X_1}(x_{i1}) [PC'_1(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) - PC'_1(u_{i1}, u_{i2}^- | \Gamma^*)] \quad (3.24)$$

ve $PC'_1(\dots, | \Gamma^*) := D_{\rho_{i2}^*}(\dots)$ eşitliğinden,

$$f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) = \begin{cases} f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{i2}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \right], & x_{i2} = 0 \\ f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{i2}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{i2}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right], & x_{i2} \geq 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

elde edilir. $x_{i2} = 0$ iken, $u_{i2}^- = F_{X_2}(x_{i2} - 1) = \sum_{k=0}^{-1} f_{X_2}(k) = 0$ olduğundan, $\Phi^{-1}(u_{i2}^-) = \Phi^{-1}(0) = -\infty$ olur. Bu durumda,

$$D_{\rho_{i2}^*}(u_1, u_{i2}^-) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_{i2}^-) - \rho_{i2}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{i2}^*)^2)}} \right) = \Phi \left(\frac{-\infty - \rho_{i2}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{i2}^*)^2)}} \right) = \Phi(-\infty) = 0$$

eşitliği yazılır. Eş. (3.25)'te verilen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımında $x_{i2} = 0$ için fonksiyonda sadece $f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{i2}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \right]$ ifadesi kalır.

Kastenmeirer [9] ile Czado ve arkadaşlarının [2] standart Gauss kopula fonksiyonunu kullanarak elde ettikleri ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu; Γ^* ilişki matrisli, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu kullanılarak tanımlanmıştır.

Hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın dikkate alındığı bu ortak olasılık dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının iki değişkenli ortak olasılık yoğunluk ve ortak olasılık dağılım fonksiyonlarının sağlaması gereken özellikleri sağlayıp sağlamadığı test edilmiştir. Elde edilen $f_{X_{i1} X_{i2}}(x_{i1}, x_{i2})$ fonksiyonunun sonlu toplamı Eş. (3.26)'daki gibi 1'e eşit olursa bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu söylenebilir.

$$\int_0^{\infty} \sum_{x_{i2}}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2}) dx_{i1} = 1 \quad (3.26)$$

Eş. (3.26), sonlu limit toplamı ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \sum_{x_{i2}}^n f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right] dx_{i1} \\ &= \int_0^{\infty} f_{X_1}(x_{i1}) \sum_{x_{i2}}^{\infty} \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right] dx_{i1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eş. (3.27)'de bulunan integral içindeki sonlu toplam limit yardımıyla çözümlerse,

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_{i2}}^n \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(n) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(-1) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. $F_{X_2}(-\infty) = \Phi(-\infty) = 0$ ve $\Phi(\infty) = 1$ olduğundan Eş. (3.29),

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(n) \right) \right] = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(1) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) = \Phi \left(\frac{\infty - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) = \Phi(\infty) = 1 \quad (3.30)$$

olur. Eş. (3.30)'a göre, Eş. (3.26)'daki sonlu toplam $\int_0^{\infty} f_{X_1}(x_{i1}) dx_{i1} = 1$ olduğundan, Eş. (3.25) ile verilen fonksiyonun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu gösterilmiştir.

3.2.1. Parçalı Sözde-En Çok Olabilirlik Tahmini ile Parametre Tahmini

Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin tam olarak tanımlanabilmesi için Gamma ve Poisson GDM'lere ait α ve β parametre vektörlerinin bağımlılık varsayımı altında tahmin edilmesi gerekir.

Fang [32] ile Fang ve Madsen'in [33] çalışmalarında sözde-kopula fonksiyonu kullanıldığından parametre tahmininde sözde-EÇO fonksiyonu kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında da sözde-kopula fonksiyonu kullanıldığından ve bağımlılık parçalı log-olabilirlik fonksiyonu yardımıyla hesaplamalara dâhil edileceğinden, parametre tahmininde kullanılacak yöntem "Parçalı Sözde-EÇO Tahmini" olarak adlandırılmıştır. Parçalı sözde-EÇO tahmini, Song'un [54] PMA yöntemine sözde-gözlemler ve düzenlenmiş ilişki katsayısı dâhil edilerek geliştirilmiştir. Kesim 2.3.2'de verilen PMA yönteminde olduğu gibi olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları parçalı olarak ifade edilmiş, (u_1, u_2) yerine (\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlemleri kullanılmıştır. Sabit ρ_{12} ilişki katsayısı yerine, $\rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; \hat{u}_1, \hat{u}_2)$ düzenlenmiş ilişki katsayısı algoritmaya dâhil edilmiştir. Marjinal kısmı ifade etmek için *bağımsız*, bağımlı kısmı ifade etmek için *bağımlı* alt indisleri kullanılmıştır. Marjinal kısımda bulunan parametreler, ikinci kısımda bağımlılık varsayımı altında güncellenmiştir. Bu bölümde parametre tahminleri için genel bir form oluşturulmuş ve skor eşitlikleri elde edilmiştir.

$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ biçiminde parçalı bir parametre vektörüdür. $\boldsymbol{\theta}_1$ parametre vektörü p ve $\boldsymbol{\theta}_2$ parametre vektörü q boyutlu olmak üzere, $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\alpha}$ ve $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\beta}$ olarak belirlenmiş, dolayısıyla $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^{p+q}$ 'dir. Bu durumda parçalı olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\theta}) := L_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot L_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \quad (3.31)$$

ve parçalı log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\boldsymbol{\theta}) := l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1) + l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \quad (3.32)$$

biçimindedir. $l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1)$ ve $l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1) := \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2) \quad (3.33)$$

$$l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) := \sum_{i=1}^n \ln \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2), F_{X_2}(x_{i2} | \lambda_i) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2), F_{X_2}(x_{i2} - 1 | \lambda_i) \right) \right] \quad (3.34)$$

Eş. (3.33) ile verilen $l_{bağımsız}(\theta_1)$ fonksiyonunun kolay optimize edilebilen, diğer bir ifade ile kolay türev alınarak maksimum değeri bulunabilen bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. Eş. (3.34) ile ifade edilen $l_{bağımlı}(\theta_1, \theta_2)$ fonksiyonu ise, bağımlılığın dikkate alındığı ve kopula fonksiyonu içeren parçadır. Bağımsız bölümde bulunan değerler, bağımlılık varsayımı altında iteratif yöntemlerle güncellenmektedir. Parçalı log-olabilirlik fonksiyonu için skor eşitlikleri,

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial l_{bağımlı}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta} \quad (3.35)$$

eşitliği yardımıyla bulunur. Parametre tahminlerine ulaşmak için çözülmesi gereken skor eşitlikleri,

$$\frac{\partial l_{bağımsız(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial l_{bağımlı(1)}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial l_{bağımlı(2)}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \quad (3.37)$$

biçimindedir. Skor eşitliklerinin çözümünde parçalı sözde-EÇO algoritmasından yararlanır. Bu koşullar altında parçalı sözde-EÇO algoritması aşağıdaki gibi yazılabilir:

Adım 0 (Başlangıç koşullarının belirlenmesi)

Adım 0.1: Hasar tutarı ile sayısı arasındaki ilişkiye uygun $\rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; \hat{u}_1, \hat{u}_2)$ fonksiyonu belirlenir.

Adım 0.2: a_{12} ve b_{12} katsayıları belirlenir.

Adım 0.3: (\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlemleri üretilir.

Adım 0.4: Gamma dağılımının parametrelerinden v_i^2 için sabit bir değer belirlenir.

Adım 1 (İteratif yöntemde kullanılacak başlangıç değerlerin bulunması)

Adım 1.1: $\frac{\partial l_{bağımsız(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{1,n}^1$ bulunur.

Adım 1.2: $\frac{\partial l_{bağımlı(2)}(\theta_{1,n}^1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{2,n}^1$ bulunur.

Adım 2 (Adım 1’de bulunan değerlerin bağımlılık varsayımı altında güncellenmesi)

Adım 2.1: $\frac{\partial l_{bağımsız(1)}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = - \frac{\partial l_{bağımlı}(\theta_{1,n}^{k-1}, \theta_{2,n}^{k-1})}{\partial \theta} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{1,n}^k$ bulunur.

Adım 2.2: $\frac{\partial l_{bağımlı(2)}(\theta_{1,n}^{k-1}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$ skor eşitliğinin çözümünden $\theta_{2,n}^k$, $k = 2, 3, \dots$ bulunur.

Algoritma $\| \theta_{1,n}^k - \theta_{2,n}^{k-1} \| < \epsilon$ koşulunda durdurulur ve ϵ eşik değeri kullanıcı tarafından belirlenir. Vektörlerle çalışıldığı için Öklid uzaklığı yerine normu kullanılır.

$\theta_1 = \alpha$ olarak belirlendiğinden, bağımsız parçayı ifade eden $l_{bağımsız}(\theta_1)$ parçalı-log olabilirlik fonksiyonun çözümü için ihtiyaç duyulan ana skor eşitliği, $\frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \alpha}$, dır. Bu skor eşitliğinin

çözümü için ise $\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2)}{\partial \mu_i}$ ve $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$ alt skor eşitliklerine ihtiyaç duyulur.

$\theta_1 = \alpha$ ve $\theta_2 = \beta$ olarak belirlendiğinden, bağımlı parçayı ifade eden $l_{bağımlı}(\theta_1, \theta_2)$ parçalı-log olabilirlik fonksiyonun çözümü için ihtiyaç duyulan ana skor eşitlikleri $\frac{\partial l_{bağımlı}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \alpha}$

ve $\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$, dır. Bu skor eşitliklerinin çözümü için ise $\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))$, $\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))$, $\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$, $\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i}$, $\frac{\partial \mu_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$, $\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})}$, $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$, $\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})}$ ve $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ alt skor eşitliklerine ihtiyaç duyulur.

Skor eşitlikleri, $l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1)$ ve $l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ fonksiyonları yardımıyla $\boldsymbol{\theta}_1$ ve $\boldsymbol{\theta}_2$ parametre vektörlerine göre ayrı ayrı açılmış ve en sade şekliyle ifade edilmiştir. Bağımsız parça için nihai skor eşitliği ve bu skor eşitliğini hesaplamak için ihtiyaç duyulan alt eşitlikler Çizelge 3.1’de özetlenmiştir.

Çizelge 3.1. $l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1)$ için ana ve alt skor eşitlikleri

<u>Ana Skor Eşitliği</u>
$\frac{\partial l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{v_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1} - \mu_i}{\mu_i} \mathbf{z}'_{i1}$
<u>Alt Skor Eşitlikleri</u>
$\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} \mu_i, v_i^2)}{\partial \mu_i} = f_{X_1}(x_{i1} \mu_i, v_i^2) \frac{x_{i1} - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2}$
$\frac{\partial \mu_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial e^{\mathbf{z}'_{i1} \boldsymbol{\alpha}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = e^{\mathbf{z}'_{i1} \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{z}'_{i1} = \mu_i \mathbf{z}'_{i1}$

Bağımlı parça için nihai skor eşitlikleri ile bu skor eşitliklerini hesaplamak için ihtiyaç duyulan alt eşitlikleri ise Çizelge 3.2’de özetlenmiştir.

Çizelge 3.2. $l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ için ana ve alt skor eşitlikleri

Ana Skor Eşitlikleri	
$\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ $= \sum_{i=1}^n \frac{\left(d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right) \left[(F_{X_1}^{\#}(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1})) \right]}{\left(D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right) \phi \left(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})) \right) v_i^2 \sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \mathbf{z}'_{i1}$	
$\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ $= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right)} \left[\frac{d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))}{\phi \left(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right)} - \frac{d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\phi \left(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) \right)} \right] \frac{\mathbf{z}'_{i2} \lambda_i}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}}$	
Alt Skor Eşitlikleri	
$\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))$ $= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi \left(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})) \right)} \right)$	
$\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))$ $= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2} - 1)) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi \left(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})) \right)} \right)$	
$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\left[(F_{X_1}^{\#}(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1})) \right] \mathbf{z}'_{i1}}{v_i^2}$	
$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\mu_i v_i^2} \left[(F_{X_1}^{\#}(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1})) \right]$	
$\frac{\partial \mu_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mu_i \mathbf{z}'_{i1}$	
$\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} = d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\left(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) \right)}$	
$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -f_{X_2}(x_{i2} \lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i$	
$\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} = d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}}$	
$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -f_{X_2}(x_{i2} - 1 \lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i$	

Çizelge 3.1 ve 3.2’de verilen skor eşitliklerinin elde edilme aşamaları EK 2’de ayrıntılı olarak verilmiştir.

3.3. Risk Gruplarına Göre Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Kesim 3.2’de önerilen model yardımıyla, tüm portföy için bağımlılığı modelleyen tek bir kopula regresyon modeli kullanmak yerine, risk gruplarındaki hasar tutarı ve sayısı ilişkisine göre özel olarak düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri elde edilebilir. İlişki matrisi yardımıyla belirlenen hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiye göre bağımlılığı modellemede kullanılacak düzenlenmiş sözde-regresyon modeli kurulur. Bu düzenleme ile farklı risk gruplarına özel, esnek bir bağımlılık modellemesi sağlanır.

Risk grupları farklı sınıflandırma yöntemleri ile elde edilebilir. Belirli özelliklere göre sınıflandırılmış bir portföyde hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkinin, bireysel verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiden daha yüksek düzeyde olması beklenen bir sonuçtur. Risk sınıflandırması birçok yönetime göre yapılabilir ve risk faktörlerine göre yapılan önsel sınıflandırma bu yöntemlerden biridir.

Önsel Risk Sınıflandırması

Aktüeryal çalışmalarda, benzer risklere sahip sigortalıların aynı grup içinde yer alması homojen gruplar elde edilmesini sağlayarak hesaplamaları kolaylaştırmakta, ayrıca iyi-kötü sigortalı ayrımı yapılarak, sigortalıların gereğinden az ya da fazla prim ödemelerini önleyen adil fiyatlandırma sağlanmaktadır.

Bu çalışmada risk faktörlerinin hasar tutarı ve sayısı üzerindeki etkileri incelenerek, risk faktörlerine göre bir sınıflandırma yapılmıştır. Risk faktörleri ile önsel bir sınıflandırma yapılabilir, sonsal bir sınıflandırma için geçmiş hasar deneyimi bilgisine ihtiyaç vardır [75]. Benzer risk faktörlerine sahip risk grupları, benzer hasar tutarı ve sayısı ilişkisine sahip olacağından ve gruplar

kendi içinde benzer özellikler göstereceğinden, hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık yapılarının da grup içinde benzer olacağı varsayılabilir.

Bağımlılığın modellendiği çalışmalarda verinin risk faktörlerine göre sınıflandırılmasının iki önemli avantajı vardır:

1. Risk faktörlerine göre homojen sınıflar elde edilerek, bağımlılığın dikkate alındığı adil risk primi için ön hazırlık yapılmaktadır.
2. Bir yıllık bireysel hasar verisindeki hasar sayısı değer aralığının dar olması, hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık çalışmalarının etkin bir şekilde yürütülmesini engelleyebilir. Risk faktörlerine göre sınıflanmış veride hasar sayısı değer aralığı, bireysel veriye göre genişlemektedir. Bireysel ve sınıflanmış verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiler, Dördüncü Bölüm'de gerçek veri yardımıyla somut bir şekilde gösterilmiş ve yorumlanmıştır.

Verinin risk faktörlerine göre sınıflandırılma aşamaları aşağıda verilmiştir:

1. Tüm risk faktörleri sınıflandırmanın yapılabilmesi için kategorik değişken olarak düzenlenir. Kategorik değişkenlerin yapısı belirlenir. Bu değişkenlerin yapısı nominal (kadın-erkek, evli-bekar-dul-boşanmış, vb.) veya ordinal (genç-orta-yaşlı, düşük-orta-yüksek motor gücü, vb.) olabilir.
2. Önemli risk faktörleri belirlenir. Bunun için grafikler ile risk faktörlerinin hasar tutarı ve sayısı üzerindeki etkileri incelenebilir ve Marjinal GDM'lerden yararlanılabilir. Risk faktörlerinin seçimi için kopula gibi farklı yöntemler de kullanılabilir [76].

Belirlenen risk faktörlerine göre çapraz ilişkilerle risk grupları belirlenir. r_i , i . risk faktörünü göstermek üzere, n adet risk faktörü ile çalışılacağı belirlenmiş olsun ($i = 1, 2, \dots, n$). Her bir risk faktörünün kategori sayısı k_{r_i} ile gösterilirse, bu sınıflandırmaya göre çalışılacak toplam risk sınıfı $k_{r_1} * k_{r_2} * \dots * k_{r_n}$ olur. $k_{r_1} * k_{r_2} * \dots * k_{r_n}$ adet risk sınıfını içeren sınıflanmış veri, risk grubu

olarak adlandırılabilir. Bu risk grubu, bireyler yerine, benzer risk özelliklerine sahip risk sınıflarından oluşmaktadır. Daha anlaşılır olması için iki risk faktörü ile çalışıldığı varsayıldığında, iki kategorili cinsiyet (kadın-erkek) risk faktörü (r_1) ve üç kategorili motor hacmi (düşük, orta, yüksek) risk faktörüne (r_2) göre bir sınıflandırmada, $k_{r_1} = 2$ ve $k_{r_2} = 3$ olduğundan toplam $k_{r_1} * k_{r_2} = 6$ risk sınıfı oluşur. Sonuç olarak 6 risk sınıfindan oluşan bir risk grubu elde edilir.

Kesim 3.2’de tanımlanan $PC(Poisson\ GDM, Gamma\ GDM|\Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli, j. risk grubu için özelleştirilirse;

$$PC(Gamma\ GDM, Poisson\ GDM|\Gamma_j^*)$$

elde edilir ve “j. risk grubu için düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli” olarak adlandırılabilir. Burada m risk grubu sayısını göstermek üzere, $1 \leq j \leq m$ ’dir. Kesim 3.2’de yer alan eşitliklerde genel bir gösterim elde etmek amacıyla ρ_{12}^* ve Γ^* kullanılmıştır. Tanımlanan model, j. risk grubu için özelleştirilirse tüm eşitliklerde ρ_{12}^* ve Γ^* yerine, j. risk grubuna özel $\rho_{12(j)}^* = f(a_{12(j)}, b_{12(j)}; \hat{u}_1, \hat{u}_2)$ ilişki katsayısı ve düzenlenmiş ilişki matrisi

$$\Gamma_j^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12(j)}^* \\ \rho_{12(j)}^* & 1 \end{bmatrix} \text{ olarak güncellenmelidir.}$$

4. UYGULAMA

Üçüncü Bölüm’de önerilen model hem benzetim çalışması hem de gerçek veri analizi ile incelenmiştir. İyi bir benzetim sistemi kurmak amacıyla öncelikle Sigorta Bilgi Merkezi’nden (SBM) alınan 2017 yılı Türkiye kasko sigorta verisi analiz edilmiştir. Kesim 4.1’de hasar tutarı ve sayısına ilişkin betimleyici istatistikler, GDM ile modellemede kullanılacak muhtemel açıklayıcı değişkenleri oluşturan risk faktörleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Benzetim çalışmasına geçmeden önce düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinde kullanılacak düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonları, hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri de incelenmiştir. Bu grafikler Kesim 4.2’de verilmiştir.

Kesim 4.3’te verilen benzetim çalışmasında öncelikle farklı senaryolar altında hasar tutarı ve sayısı bağımlı olan farklı sigorta portföyleri üretilmiş, daha sonra bu bağımlı portföyler kullanılarak sözde-kopula fonksiyonunun üzerinde yapılan düzenlemenin etkinliği test edilmiştir. Ayrıca hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkinin derecesine uygun ilişki katsayısı fonksiyonu bulunmaya çalışılmıştır. Bu amaçla Fang ve Madsen [33] tarafından önerilen üç farklı ilişki katsayısı fonksiyonu ele alınmış, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeline dâhil edilmiştir.

Kesim 4.4’te verilen gerçek veri analizinde ise öncelikle SBM’den alınan 2017 yılı kasko sigorta verisindeki hasar tutarı ile sayısı arasındaki ilişki analiz edilmiş, bireysel veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki düşük bulunmuştur. Bireysel veri düşük ilişkili veri olarak ele alınmıştır. Hasar tutarı ve sayısı arasında ilişkinin yüksek düzeyde olduğu veriler elde etmek amacıyla risk faktörlerine göre bir risk sınıflandırması yapılmıştır. Daha sonra düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile hasar tutarı ve sayısının bağımlılığı modellenmiş, parçalı sözde-EÇO yöntemi ile parametreleri tahmin edilmiştir.

Önerilen düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinde sabit bir ilişki katsayısı kullanmak yerine, ilişki katsayısı için özel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Ayrıca modelin parametre tahmininde, özel skor eşitliklerinden oluşan ve Kesim 3.2.1’de verilen parçalı sözde-EÇO algoritması kullanılmaktadır. Bu nedenle hazır R paketlerinin yanında, iç içe döngülerden ve iç içe fonksiyonlardan oluşan özel kodlamalardan yararlanılmıştır. Bu kodlamalarda, Kastenmeier’in [9] çalışmasında verilen kodların bir kısmı, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeline uyarlanmıştır. Kodlamada yer alan matematiksel işlemlerin ve istatistiksel analizlerin yapılabilmesi, sözde-gözlemlerin üretilebilmesi ve perspektif grafikleri ile izoips (eşyüksekti eğrisi) grafiklerinin çizdirilebilmesi için çeşitli çalışmalardan [77-82] ve R paket programlarından yararlanılmıştır. Kullanılan başlıca R paketleri; copula [73, 83, 84], CopulaRegression [10, 85], VineCopula [86], MASS [87], ggplot2 [88], lattice [89], lme4 [90], pscl [91], scatterplot3d [92, 93], dummies [94] ve PerformanceAnalytics [95] paketleridir.

Bu tez çalışmasında parametre tahmininde parçalı sözde-EÇO tahmin yöntemi kullanıldığından algortima içerisinde bir optimizasyon problemi çözülmektedir. R’da optimizasyon problemlerinin çözümü için *optim()* fonksiyonundan yararlanılmaktadır [96, 97]. Bir optimizasyon problemi olan EÇO tahmininde Newton-Raphson algoritması altında BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno), CG (Conjugate Gradient) ve L_BFGS_B (Limited Memory BFGS) gibi yöntemler vardır ve kullanılan yöntem hesaplamada gradyan (∇) kullanılıp kullanılmayacağını belirler. ∇ , çok değişkenli fonksiyonunun kısmi türev bilgisinin hepsini içerdiğinden, skor eşitlikleri ile ilgilidir [97]. Bu çalışmada parçalı sözde-log-olabilirlik fonksiyonunun optimizasyonu gradyan bilgisine dayandığından L_BFGS_B yöntemi kullanılmıştır.

4.1. Veri

SBM’den alınan veri Türkiye’de 2014 – 2017 yılları arasında oluşturulmuş ve kayda alınmış tüm kasko sigortası poliçelerine ait bilgileri içermektedir. Ham veri sigortalıya ve sigortalanan araca ait birçok bilgiyi kapsamaktadır. Ham veride, Kişisel Verilerin Korunması Kanunu’na göre poliçe sahibinin kodlanmış kimlik numarası ve sigortalanan aracın kodlanmış şasi numarası, poliçe başlangıç ve bitiş tarihleri, sigortalının yaşı, cinsiyeti, medeni hâli, uygulanan hasarsızlık kademe

numarası, yaşanan bölge (il plaka kodu), araç türü, araç yaşı, motor gücü, hasar türü, hasar tarihi, hasar sayısı ve toplam hasar tutarı bilgileri poliçe bazında verilmiştir.

SBM'den toplam 1.618.680 hasar verisi alınmıştır. Bu hasar verilerinin 225.554'ü 2014 yılına, 494.544'ü 2015 yılına, 437.438'i 2016 yılına ve geri kalan 461.144'ü 2017 yılına aittir. Poliçe başlangıç ve bitiş tarihlerinde boş gözeler bulunmaktadır. Tüm poliçeler bir yıllık olduğundan, bu eksiklik göz ardı edilmiş ve hasarın gerçekleştiği yıl baz alınmıştır.

Veriyi modellemeye uygun hale getirmek amacıyla belirli düzenlemeler yapılmıştır. Modellemede açıklayıcı değişken olarak alınacak risk faktörlerinden aktüeryal olarak anlamsız olan değerler örneğin 18'den küçük sigortalı yaşı veya negatif hasar tutarı değerleri ile açıklayıcı değişkenlere ait boş gözeler temizlenmiştir. Verideki en güncel yıl olan 2017 hasar verileri çalışmada kullanılmıştır. Verideki araç türleri çekici, diğer araçlar, dolmuş (5-8 koltuk), iş makinası, kamyon, kamyonet, minibüs (10-17 koltuk), minibüs dolmuş (10-17 koltuk), motosiklet ve yük motosikleti, otobüs (18-30 koltuk), otobüs (31 ve üstü koltuk), otobüs dolmuş (18-30 koltuk), otobüs dolmuş (31 ve üstü koltuk), otomobil, özel amaçlı taşıt, römork, taksi, tanker, tarım arabası ve traktör biçimindedir. Araç türü sadece otomobil olarak filtrelenmiştir.

GDM çalışmalarında sıklıkla tercih edildiğinden ve verinin sınıflandırmaya hazır olması amacıyla tüm risk faktörleri kategorikleştirilmiştir. Anlamlı sonuçlar elde etmek amacıyla risk faktörlerinin ya da diğer bir ifade ile olası açıklayıcı değişkenlerin hangi değerlere göre gruplandırılacağına literatür incelemesi ve uzman görüşü ile karar verilmiştir.

Hasar sayısı verilerinden sadece boş gözeler temizlenmiştir. Hasar tutarı verileri başta pozitif değerler olacak şekilde düzenlenmiş ancak mini onarım hasarlarının 1 TL ya da 2 TL gibi küçük tutarlar olmayacağı düşünüldüğünden en küçük mini onarım tutarının 50 TL olduğu varsayılmış, 50 TL ve üzeri hasar tutarı verisi alınmıştır. Neticede 30.557 gözlemden ve 8 açıklayıcı değişkenden oluşan bir veri elde edilmiştir.

Çizelge 4.1. Risk faktörleri ve kategorileri

Risk Faktörleri	Frekans	%
Sigortalının Yaşı		
Genç (18-35)	4.353	14,25
Orta (36-55)*	17.790	58,22
Yaşlı (56-80)	8.414	27,53
Sigortalının Cinsiyeti		
Erkek*	22.052	72,17
Kadın	8.505	27,83
Sigortalının Medeni Hâli		
Bekâr	2.441	7,99
Boşanmış	1.792	5,86
Dul	604	1,98
Evlî*	25.720	84,17
Hasarsızlık Kademesi		
0	3.175	10,39
1	3.304	10,81
2	4.618	15,11
3	4.811	15,74
4*	7.922	25,93
5 ve üstü	6.727	22,02
Yaşanan Bölge**		
Büyük Şehir*	27.428	89,76
Küçük Şehir	3.129	10,24
Aracın Yaşı		
Yeni (1-4)	7.689	25,16
Orta (5-9)*	17.381	56,88
Eski (10-15)	5.487	17,96
Aracın Motor Gücü		
Çok Düşük (24-50 hp)	791	2,59
Düşük (51-75 hp)	11.427	37,40
Orta (76-100 hp)*	13.803	45,17
Yüksek (101-175 hp)	4.271	13,98
Çok Yüksek (175 hp ve üstü)	265	0,86
Hasar Nedeni		
Cam Kırılması*	6.830	22,35
Çarpışma	5.972	19,54
Çarpma	5.685	18,60
Dolu	4.256	13,93
Park Halinde Çarpma	4.134	13,53
Diğer	3.680	12,05

* Gösterge değişkenlerle kodlamada kullanılacak referans grup her bir risk faktörü için * ile gösterilmiştir.

**“Türkiye İstatistik Kurumu” ve “Türkiye Belediyeler Birliği” nin internet sayfasında yayınlanan bilgiler göre 2017 yılında 30 büyükşehir belediyesi, 51 şehir belediyesi mevcuttur. Bu illerin listesi EK 3’te verilmiştir.

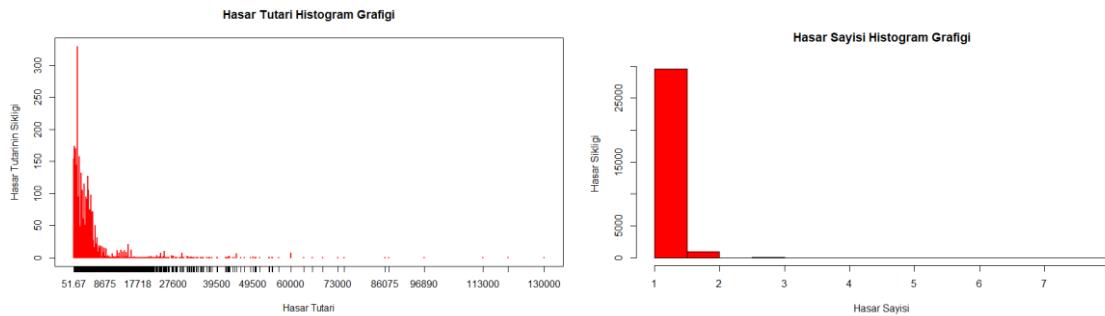
Kategorik değişkenler kodlanırken gösterge (0,1) değişkenlerden yararlanılır. “0” gösterge değişkeni, sayıca fazla olan referans gruba atanır. n kategoriye sahip bir değişken n-1 gösterge değişken ile kodlanır. Elde edilen verideki kategorik açıklayıcı değişkenlerin gösterge değişkenlerle kodlamaları EK 4’de verilmiştir.

Hasar sayısı ve toplam hasar tutarı bilgileri verildiğinden, bu iki değişken yardımıyla poliçe başına düşen ortalama hasar tutarı hesaplanmıştır. Bireysel veride poliçe başına düşen hasar sayısı, toplam hasar tutarı ve ortalama hasar tutarı rastlantı değişkenlerine ait betimleyici istatistikler Çizelge 4.2’de özetlenmiştir.

Çizelge 4.2. Hasar değişkenlerinin betimleyici istatistikleri

	Minimum	1.Çeyrek	Medyan	Ortalama	3.Çeyrek	Maximum
Toplam Hasar Tutarı	51,67	425	1.000	2.128,48	2.350	174.206
Ortalama Hasar Tutarı	51,67	429	966,43	2.068,57	2.249,37	130.000
Hasar Sayısı	1	1	1	1,035	1	8

Bireysel verideki ortalama hasar tutarı ve hasar sayısı grafikleri aşağıda Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.1. Bireysel veri için hasar tutarı ve sayısı grafikleri

Hasar tutarı dağılımının sağa çarpık olduğu Şekil 4.1’den görülmektedir ve sağa çarpık sürekli hasar tutarlarının dağılımı için genellikle Gamma, log-normal ve Pareto dağılım varsayımları kullanılır. Hasar tutarı verisi mini onarım bedeli düşünülerek, minimum 50 TL ile

sınırlandırıldığından grafik 50'den başlamaktadır. Kesikli hasar sayıları için ise sıklıkla Poisson, negatif binom, sıfır yığılmalı veya sıfır kesilmiş Poisson gibi dağılım varsayımlarından yararlanır. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli, hasar tutarı için Gamma ve hasar sayısı için Poisson dağıldığı varsayımı ile önerildiğinden, SBM'den alınan verideki toplam hasar tutarı ile ortalama hasar tutarının Gamma dağılıma ve hasar sayısının Poisson dağılımına uyumu tek örneklem Kolmogorov-Smirnov testi ile test edilmiştir. Toplam hasar tutarı ($p < 2,2e-16$; $D=0,7082$) ile ortalama hasar tutarının ($p < 2,2e-16$; $D=1$) Gamma dağılıma uyumu ve hasar sayısının ($p=0,00$; $D=0,7229$) Poisson dağılıma uyumu anlamlı bulunmuştur ($\alpha=0,05$). D, test istatistiği değerlerini ifade etmektedir. R'da Kolmogorov-Smirnov testi, test edilecek dağılımla birlikte parametre değerlerini de girdi olarak istemektedir. Parametre değerleri, ilgili rastlantı değişkenleri için gerçek veriden elde edilen ortalama ve varyans değerleri yardımıyla momentler yöntemiyle belirlenmiştir.

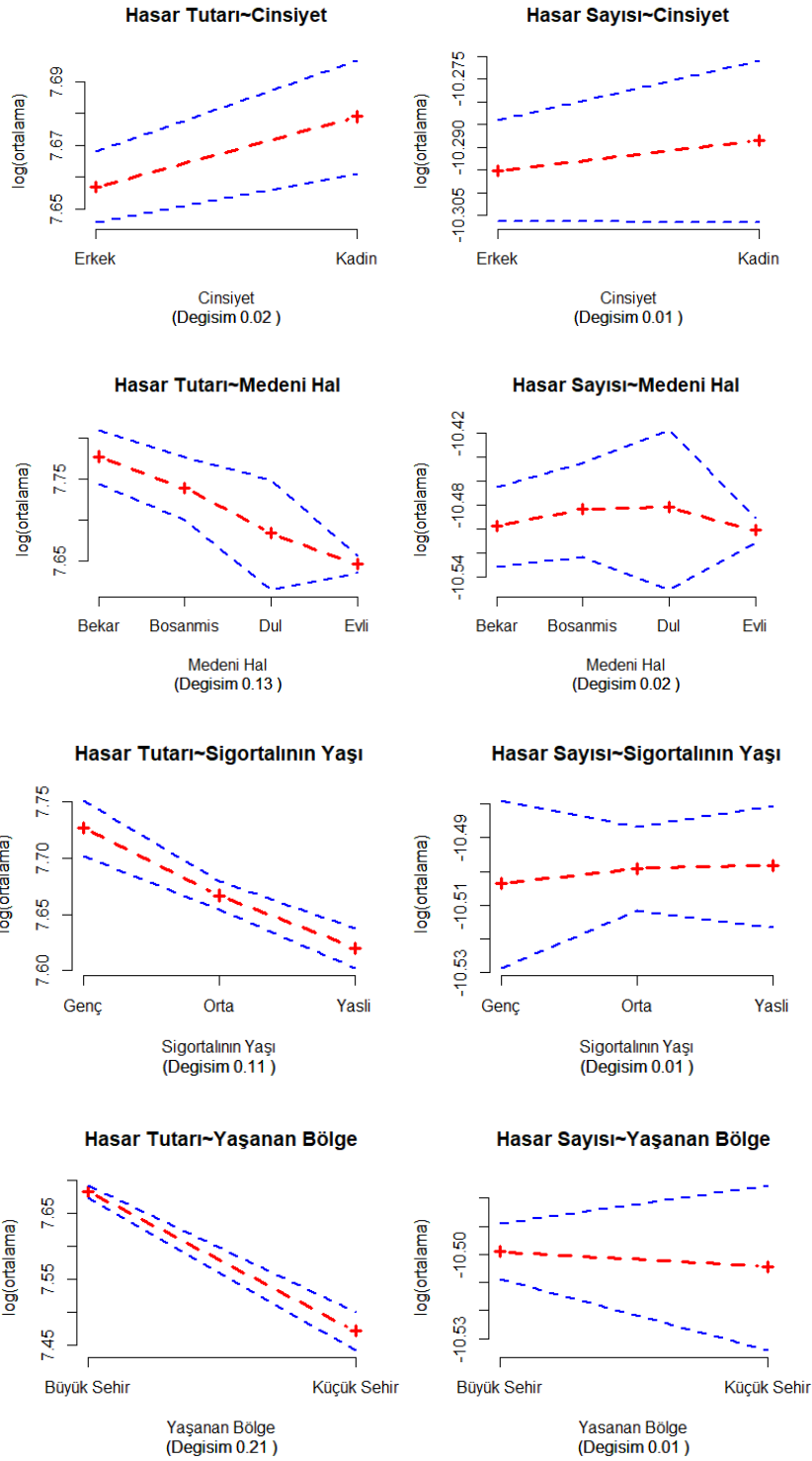
Hasar sayısı sıklık çizelgesi, Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3. Hasar sayısı sıklık çizelgesi

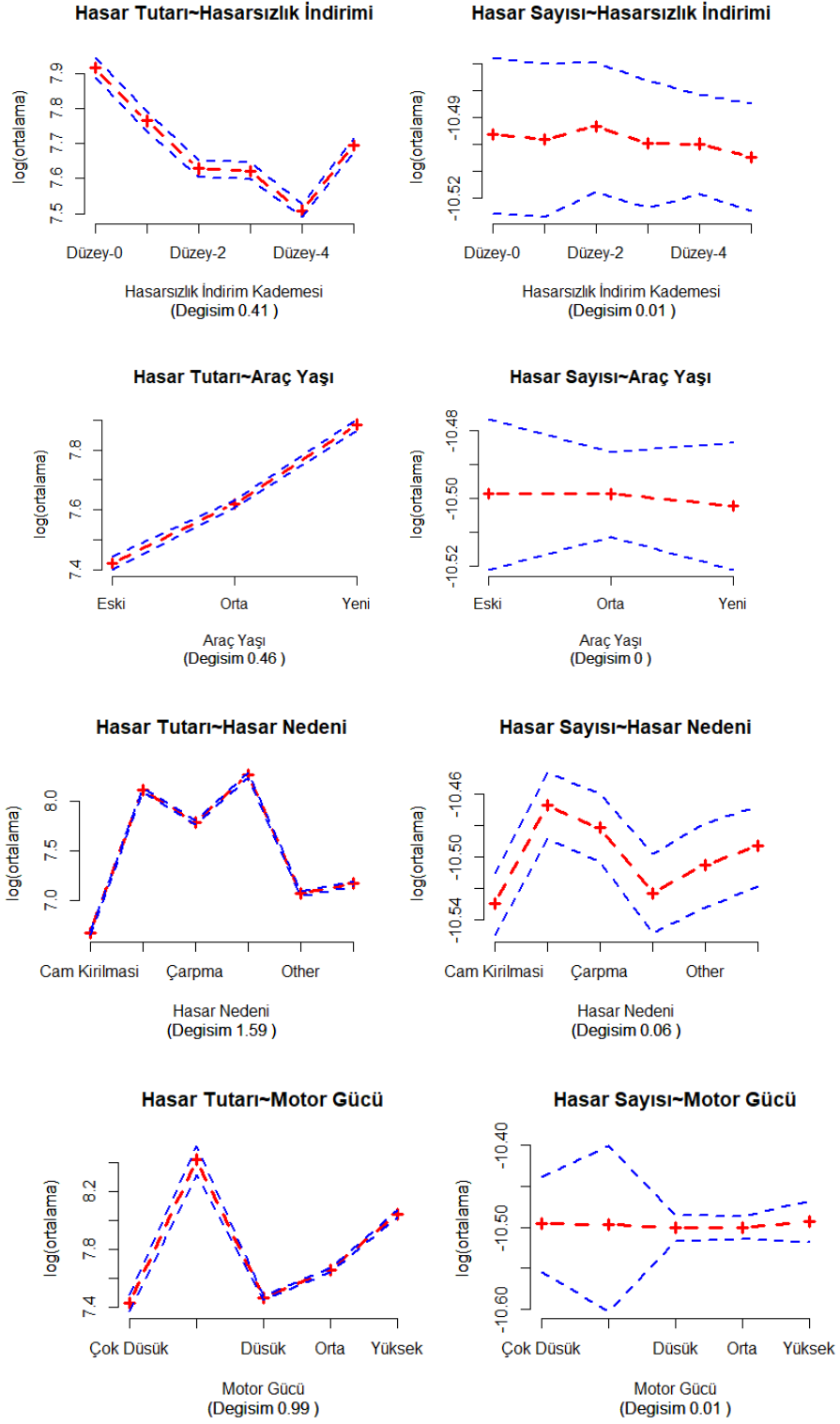
Sayısı	Sıklığı
1	29.545
2	970
3	40
4	1
8	1

Veride hasar sayısı 1, 2, 3, 4 ve 8 değerlerini almaktadır. 4 ve 8 hasar getiren birer poliçe bulunmaktadır. Bunları göz ardı edilecek olursa, hasar sayısının değer aralığı 1-3'tür. Bu aralık çok dar olup, 1 hasar gerçekleştirme sıklığı oldukça fazladır. Ayrıca tezde hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık ele alındığından, hasar sayısı değer aralığının daha yüksek olması değişkenler arasındaki bağımlılığın daha iyi gözlemlenmesini sağlayabilir. Bu nedenle, Kesim 4.4.2'de veri risk faktörlerine göre sınıflandırılmış ve hasar tutarı ile sayısı daha yüksek düzeyde ilişkili bir portföy elde edilmiştir.

Hasar tutarı ve hasar sayısı rastlantı değişkenlerinin modellenmesinde önemli olan açıklayıcı değişkenlerin belirlenmesi amacıyla, öncelikle her bir olası açıklayıcı değişkenin hasar tutarı ve hasar sayısının logaritmik ortalamasına göre değişim grafikleri incelenmiştir. Logaritmik ortalama alınmasının nedeni, Gamma GDM ve Poisson GDM'nin logaritmik bağ fonksiyonu ile kurulmasıdır. Grafiklerdeki değişim değeri, kategorik düzey bazında en yüksek ve en düşük logaritmik ortalama değerleri arasındaki farkı göstermektedir. Bu değerin yüksek olması, grafiklerdeki çizgilerin ani iniş-çıkışlar göstermesi ve kesikli çizgilerle gösterilen güven aralığının dar olması açıklayıcı değişkenin söz konusu hasar değişkeni için önemli olduğunu göstermektedir. Aksi durumda ise, grafiklerdeki değişim değerinin düşük olması, grafiklerdeki çizgilerin paralel olması ve güven aralığının geniş olması açıklayıcı değişkenin söz konusu hasar değişkeni için önemli bir değişken olmadığını göstergesidir.



Şekil 4.2. Hasar değişkenlerinin cinsiyet, medeni hâl, sigortalının yaşı ve yaşanan bölge açıklayıcı değişkenlerine göre değişimi



Şekil 4.3. Hasar değişkenlerinin hasarsızlık indirimi, araç yaşı, hasar nedeni ve motor gücü açıklayıcı değişkenlerine göre değişimi

Şekil 4.2'ye göre hasar tutarı ve sayısının cinsiyet değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,02 ve 0,01'dir. Hasar tutarı ve sayısının medeni hâl değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,13 ve 0,02'dir. Hasar tutarı ve sayısının sigortalının yaşı değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,11 ve 0,01'dir. Hasar tutarı ve sayısının yaşanan bölge değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,21 ve 0,01'dir.

Şekil 4.3'e göre hasar tutarı ve sayısının hasarsızlık indirimi değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,41 ve 0,01'dir. Hasar tutarı ve sayısının aracın yaşı değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,46 ve neredeyse 0'dır. Hasar tutarı ve sayısının hasar nedeni değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 1,59 ve 0,06'dır. Hasar tutarı ve sayısının motor gücü değişkeninin düzeylerine göre değişim genişliği sırasıyla 0,99 ve 0,01'dir. Ayrıca logaritmik hasar tutarının hasar nedenleri ve motor hacmine göre dağılımında mavi çizgilerle gösterilen güven aralığının dar olması, hasar nedeninin ve motor hacminin hasar tutarının sınıflandırılması ve modellenmesinde doğru değişkenler olacağının bir göstergesidir.

Olası açıklayıcı değişkenlerin kategorilerinin değişimi, hasar tutarını hasar sayısına göre daha fazla etkilemektedir. Hasar sayısı için tüm değişkenlerin aynı ve oldukça düşük düzeyde etki etmesi nedeniyle böyle bir genelleme yapılamamaktadır.

Marjinal GDM'ler hem modelleme ve önsel sınıflandırmada kullanılacak önemli açıklayıcı değişkenlerin belirlenmesi açısından hem de parametre tahmininde algoritmadaki parametrelerin başlangıç değerlerinin bulunması açısından önemlidir. Bu nedenle her bir açıklayıcı değişkene göre hasar tutarı ve sayısının grafiksel incelemesinin yanısıra marjinal GDM'ler ile değişkenlerin anlamlılığı test edilmiştir. Tüm olası açıklayıcı değişkenlerle kurulan Gamma GDM sonuçları Çizelge 4.4'te verilmiştir.

Çizelge 4.4. Gamma GDM için parametre tahmin sonuçları

Değişkenler	Tahmin	Std.Hata	t-değeri	p
X_{sabit}	8,563488	0,071601	119,601	< 2e-16
$X_{cinsiyet}$	0,061219	0,024004	2,550	0,0108
$X_{medeni\ hal1}$	-0,009204	0,044664	-0,206	0,8367
$X_{medeni\ hal2}$	0,058279	0,056946	1,023	0,3061
$X_{medeni\ hal3}$	0,049333	0,084735	0,582	0,5604
$X_{hasarsızlık1}$	-0,102105	0,044413	-2,299	0,0215
$X_{hasarsızlık2}$	-0,170501	0,041426	-4,116	3,87e-05
$X_{hasarsızlık3}$	-0,178349	0,041601	-4,287	1,82e-05
$X_{hasarsızlık4}$	-0,231159	0,038574	-5,993	2,09e-09
$X_{hasarsızlık5}$	-0,163171	0,039563	-4,124	3,73e-05
$X_{yaş1}$	-0,064809	0,024157	-2,683	0,0073
$X_{yaş2}$	0,030979	0,031405	0,986	0,3239
$X_{araçyaşı1}$	0,200042	0,025354	7,890	3,12e-15
$X_{araçyaşı2}$	-0,161063	0,028105	-5,731	1,01e-08
$X_{yaşananbölge}$	-0,015201	0,034107	-0,446	0,6558
$X_{hasarnedeni1}$	-0,309668	0,033128	-9,348	< 2e-16
$X_{hasarnedeni2}$	-0,865414	0,036191	-23,913	< 2e-16
$X_{hasarnedeni3}$	-1,451855	0,031830	-45,613	< 2e-16
$X_{hasarnedeni4}$	0,206148	0,036043	5,720	1,08e-08
$X_{hasarnedeni5}$	-1,044536	0,037700	-27,707	< 2e-16
$X_{motorgücü1}$	-0,584468	0,032203	-18,150	< 2e-16
$X_{motorgücü2}$	-0,414138	0,031360	-13,206	< 2e-16
$X_{motorgücü3}$	0,502134	0,113022	4,443	8,91e-06
$X_{motorgücü4}$	-0,471757	0,069418	-6,796	1,10e-11

Çizelge 4.4 ile verilen Gamma GDM sonuçlarına göre; cinsiyet, hasarsızlık indirimi, sigortalının yaşı, aracın yaşı, hasar nedeni ve motor hacmi açıklayıcı değişkenleri anlamlı bulunmuştur ($\alpha=0,05$). Tüm olası açıklayıcı değişkenlerle kurulan Poisson GDM sonuçları Çizelge 4.5'te verilmiştir.

Çizelge 4.5. Poisson GDM için parametre tahmin sonuçları

Değişkenler	Tahmin	Std.Hata	t-değeri	p
X_{sabit}	0,0927914	0,0392740	2,363	0,018144
$X_{cinsiyet}$	-0,0023605	0,0132172	-0,179	0,858259
$X_{medeni\ hal1}$	-0,0140596	0,0244453	-0,575	0,565192
$X_{medeni\ hal2}$	-0,0105016	0,0312418	-0,336	0,736765
$X_{medeni\ hal3}$	0,0034440	0,0463189	0,074	0,940729
$X_{hasarsızlık1}$	-0,0036278	0,0244555	-0,148	0,882073
$X_{hasarsızlık2}$	0,0024268	0,0227876	0,106	0,915189
$X_{hasarsızlık3}$	-0,0052367	0,0229120	-0,229	0,819212
$X_{hasarsızlık4}$	-0,0045209	0,0212412	-0,213	0,831456
$X_{hasarsızlık5}$	-0,0114015	0,0218013	-0,523	0,600993
$X_{yaş1}$	0,0001048	0,0133120	0,008	0,993718
$X_{yaş2}$	-0,0024292	0,0173379	-0,140	0,888575
$X_{arac\ yaşı1}$	-0,0041868	0,0139849	-0,299	0,764649
$X_{arac\ yaşı2}$	-0,0001357	0,0154844	-0,009	0,993010
$X_{yaşanan\ bölge}$	0,0025571	0,0188369	0,136	0,892017
$X_{hasar\ nedeni1}$	-0,0135683	0,0180359	-0,752	0,451872
$X_{hasar\ nedeni2}$	-0,0260447	0,0197823	-1,317	0,187984
$X_{hasar\ nedeni3}$	-0,0624685	0,0175238	-3,565	0,000364
$X_{hasar\ nedeni4}$	-0,0556759	0,0198763	-2,801	0,005093
$X_{hasar\ nedeni5}$	-0,0382734	0,0206929	-1,850	0,064373
$X_{motor\ gücü1}$	-0,0120231	0,0177101	-0,679	0,497210
$X_{motor\ gücü2}$	-0,0087631	0,0172440	-0,508	0,611324
$X_{motor\ gücü3}$	-0,0032020	0,0622042	-0,051	0,958946
$X_{motor\ gücü4}$	-0,0077322	0,0381743	-0,203	0,839488

Tüm olası açıklayıcı değişkenlerle kurulan Poisson GDM’de ise, hasar nedeni dışında tüm değişkenler anlamsız bulunmuştur ($\alpha=0,05$).

Kesim 4.4.2’de risk faktörlerine göre önsel sınıflandırma planlandığından hasar tutarı ve sayısı aynı açıklayıcı değişkenlerle modellenmelidir. Marjinal Gamma ve Poisson GDM sonuçları ile hasar değişkenlerinin açıklayıcı değişkenlere göre değişim grafikleri birlikte değerlendirilmiştir. Her iki GDM içinde anlamlı olan tek açıklayıcı değişkenle modelleme ve sınıflandırma yapmak yerine, Gamma GDM için anlamlı bulunan hasarsızlık indirimi, aracın yaşı, hasar nedeni ve motor hacmi açıklayıcı değişkenleri, Poisson GDM için de anlamlı varsayıp analizler yürütülmüştür. Anlamlı açıklayıcı değişkenlerle oluşturulan marjinal GDM’lere göre hesaplanan parametre tahmin değerleri Çizelge 4.6’da verilmiştir.

Çizelge 4.6. Gamma ve Poisson GDM’ler için parametre tahminleri

Değişkenler	Gamma GDM			Poisson GDM		
	Tahmin	Std. hata	p	Tahmin	Std. hata	p
X_{sabit}	8,58681	0,04736	< 2e-16	0,0803536	0,0255540	0,001664
$X_{hasarsızlık1}$	-0,10529	0,04507	0,0195	-0,0034361	0,0244436	0,888208
$X_{hasarsızlık2}$	-0,17123	0,04201	4,59e-05	0,0025068	0,0025068	0,912300
$X_{hasarsızlık3}$	-0,18223	0,04218	1,57e-05	-0,0050047	0,0228822	0,826871
$X_{hasarsızlık4}$	-0,24025	0,03910	8,10e-10	-0,0043362	0,0212044	0,837968
$X_{hasarsızlık5}$	-0,18085	0,03994	5,99e-06	-0,0109017	0,0216791	0,615059
$X_{araçyaşı1}$	0,20114	0,02573	5,61e-15	-0,0041786	0,0139802	0,765023
$X_{araçyaşı2}$	-0,16831	0,02845	3,35e-09	-0,0001768	0,0154397	0,990865
$X_{hasarnedeni1}$	-0,31002	-0,31002	< 2e-16	-0,0137530	0,0180216	0,445381
$X_{hasarnedeni2}$	-0,86901	0,03673	< 2e-16	-0,0258029	0,0197742	0,191934
$X_{hasarnedeni3}$	-1,44534	0,03212	< 2e-16	-0,0633970	0,0174175	0,000273
$X_{hasarnedeni4}$	0,20306	0,03650	2,67e-08	-0,0552300	0,0198247	0,005338
$X_{hasarnedeni5}$	-1,03221	0,03823	< 2e-16	-0,0388002	0,0206691	0,060490
$X_{motorgücü1}$	-0,58771	0,03265	< 2e-16	-0,0116923	0,0176833	0,508479
$X_{motorgücü2}$	-0,41358	0,03182	< 2e-16	-0,0088353	0,0172310	0,608122
$X_{motorgücü3}$	0,51301	0,11473	7,80e-06	-0,0032212	0,0621899	0,958691
$X_{motorgücü4}$	-0,47444	0,07045	1,67e-11	-0,0071182	0,0381553	0,852007

Çizelge 4.6’da verilen Gamma GDM ve Poisson GDM’lere ait parametre tahmin değerleri, parçalı sözde-EÇO algoritmasının başlangıç değerlerini oluşturacak parametre tahmin değerleridir.

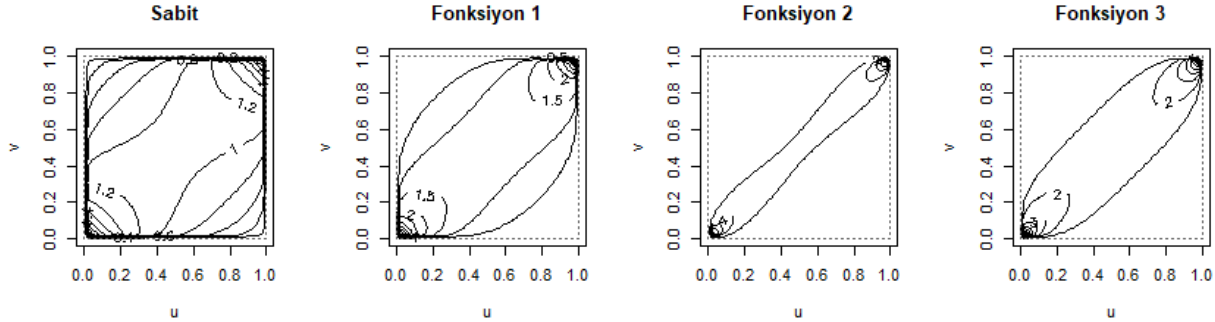
4.2. Sözde-Kopula Fonksiyonları ve Yeniden Düzenlenmesi

Bu kısımda öncelikle ilişki katsayısı üzerinde düzenleme yapmanın faydasını analiz etmek amacıyla sabit ilişki katsayılı sözde- Gauss kopula fonksiyonu ve çeşitli fonksiyonlarla yeniden düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonlarının perspektif ve izoips grafikleri elde edilmiştir. Sözde-kopula fonksiyonunun uygulamalarında sözde-gözlemlerden yararlanılır [32, 33, 98]. Sözde-gözlemler R’da copula paketi altındaki $pobs()$ fonksiyonundan yararlanarak, SBM’den elde edilen hasar tutarı ve sayılarından üretilmiştir.

Düzenlemede Fang ve Madsen’in [33] çalışmasındaki üç fonksiyon ele alınmıştır. a_{12} , modelin kuyruğa yakınsama hızını ve b_{12} , modelin kuyruk şeklini kontrol eden parametreler, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) de sözde-gözlemler olmak üzere bu fonksiyonlar $\rho_{12}^{*1} = b_{12} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right)$, $\rho_{12}^{*2} = b_{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right)$ ve $\rho_{12}^{*3} = b_{12} \tan\left(\frac{\pi}{4} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right)$ ’dır.

Düzenlenmiş Gauss kopula fonksiyonlarının perspektif ve izoips grafiklerini vermeden önce kısaca bu grafiklerin tanımını ve özelliklerini vermek faydalıdır. Perspektif grafikleri değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek amacıyla kullanılmaktadır. Üç boyutlu grafik yorumları zor olduğundan, perspektif grafikleri yerine genellikle iki boyutlu izoips eğrileri yorumlanır. Başka bir ifade ile izoips eğrileri üç boyutlu şekilleri iki boyutlu olarak ifade eder. Gauss kopula fonksiyonu ile çalışıldığından çok değişkenli normal dağılımdan yararlanır. İzoips eğrileri özdeğerler ve varyans-kovaryans matrisinin özvektörleri yardımıyla çizilir. İzoips eğrileri grafiğinde çizgiler eşit olasılıklı olayları gösterir ve olasılık izoipsleri eliptik bir şekle sahiptir. Elipslerin yönü özdeğerlerin yönüne, elipslerin uzunluğu ise özvektör çarpımlarına bağlıdır [99].

(\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlem çifti yardımıyla sabit ilişki katsayısı, fonksiyon 1, 2 ve 3'e göre düzenlenmiş ilişki katsayılarına göre izoips eğrileri verilmiştir. Çok sayıda farklı ρ , a_{12} ve b_{12} değerleri ile grafikler çizdirilmiştir. Kopula fonksiyonları üzerinde ilişki matrisi yardımıyla düzenleme yapmanın avantajını daha iyi anlamak için sabit ve düzenlenmiş ilişki katsayılı fonksiyonlar için $\rho=0,30$, $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ alındığında elde edilen grafik çizimleri Şekil 4.4'te verilmiştir.



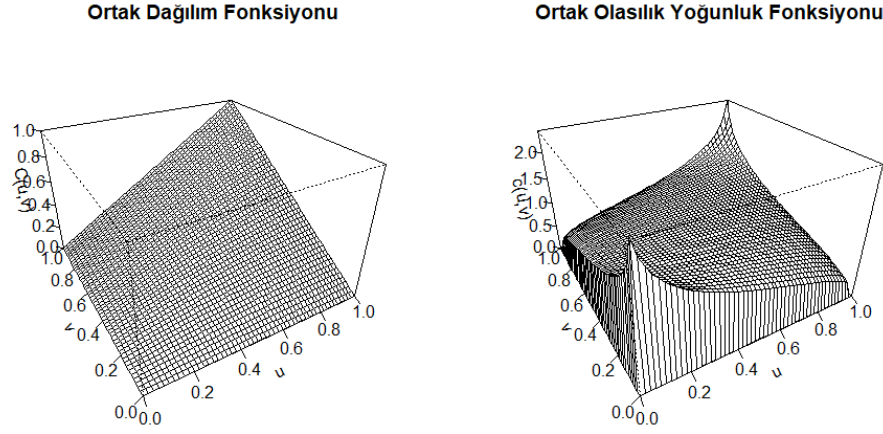
Şekil 4.4. Sabit ve düzenlenmiş ilişki katsayılı sözde-Gauss kopula fonksiyonlarına göre ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının izoips eğrileri

Sabit ve her bir düzenlenmiş ilişki katsayısı için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiklerine bakılırsa farklı kuyruk bölgesi olasılıkları görülmüştür. İlişki katsayısının sabit bir değer yerine, fonksiyon şeklinde düzenlenmesi daha esnek ve dinamik bir bağımlılık modellemesi

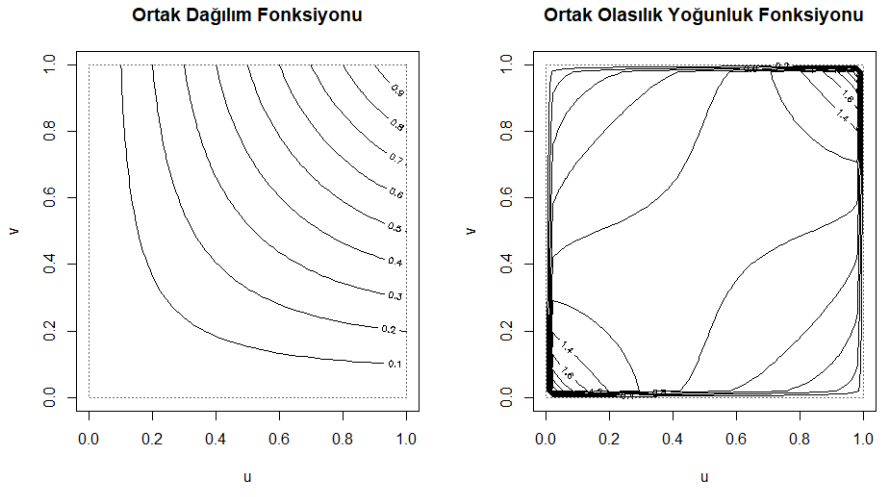
sağlamaktadır. Ayrıca kuyruğun şekli fonksiyondan fonksiyona değiştiği için farklı kuyruk bağımlılık yapıları elde edilebilmektedir. Bu düzenleme risk grubunun özelliğine göre farklı ilişki katsayıları ve dolayısıyla farklı ilişki matrisleri ile çalışılmasına olanak tanımaktadır.

Sözde-kopula fonksiyonlarının standart kopula fonksiyonlarına göre avantajına Üçüncü Bölüm’de değinilmiştir. Bu avantajı grafikler yardımıyla görmek için dağılım fonksiyonundan üretilen (u_1, u_2) gözlemleri ve (\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlemleri ile grafikler ayrı ayrı çizdirilmiştir. Ancak her iki gözlem çifti $(0,1)$ aralığında değer aldığından ve sözde-gözlemler kitleyi en iyi yansıtacak örneklem değerlerine yakın değerler olduğundan, grafiksel incelemede çok büyük farklılıklar olmamış ve sözde-kopulanın avantajı tam olarak gözlenememiştir. Yararlanılan üç düzenlenmiş fonksiyonla elde edilen düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonun, standart Gauss kopula fonksiyonuna göre avantajları uyum iyiliği testleri ile Fang ve Madsen [33] tarafından gösterilmiştir.

Düzenlemenin etkisi incelendikten sonra, Üçüncü Bölüm’de verilen düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile bulunan hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının üç boyutlu perspektif ve iki boyutu izoips eğrilerini sabit $\rho_{12}=0,25$ ilişkisi katsayısı sırasıyla Sekil 4.5’te ve Şekil 4.6’da verilmiştir.



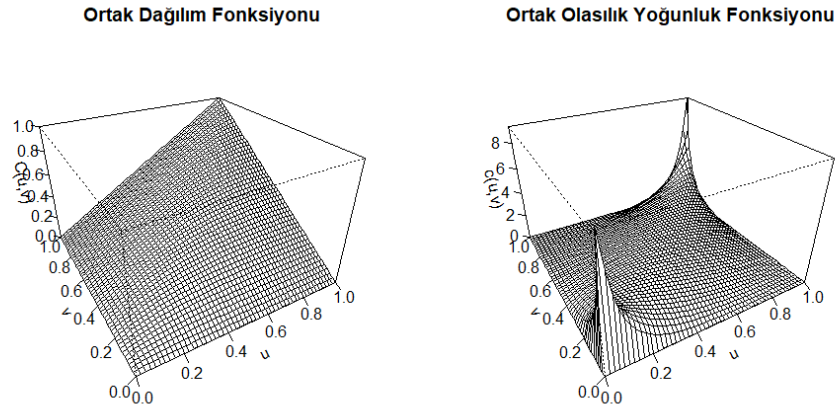
Şekil 4.5. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (sözde-Gauss kopula)



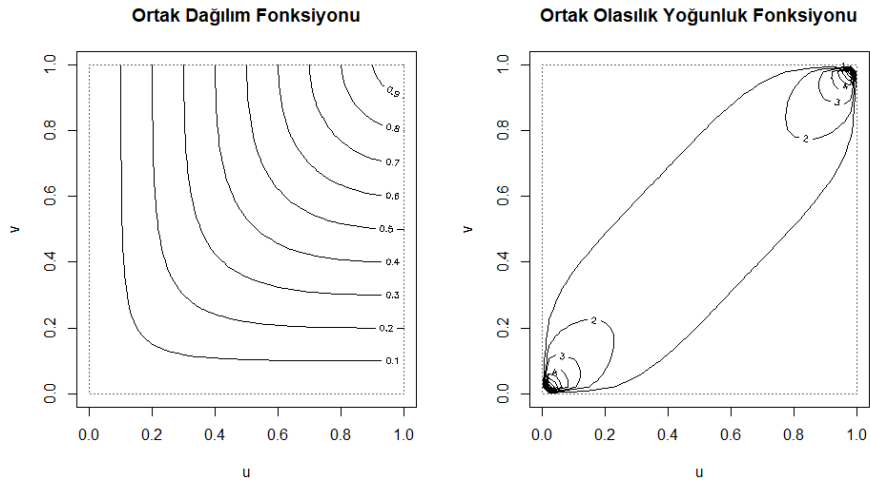
Şekil 4.6. Hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (sözde-Gauss kopula)

Sabit ilişki katsayılı sözde-Gauss kopulanın kullanıldığı durumda, Şekil 4.5'te üç boyutlu olarak verilen ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları, Şekil 4.6'da iki boyutlu ifade edilmiştir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait izoips eğrisinden, pozitif yönlü ve düşük düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir ve $\rho=0,25$ gibi pozitif küçük bir değer olduğundan bu

beklenen bir sonuçtur. Düzenlenmiş fonksiyonlardan ρ_{12}^{*3} için, $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ iken hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının üç boyutlu perspektif ve iki boyutu izoips eğrilerini sırasıyla Şekil 4.7’de ve Şekil 4.8’de verilmiştir.



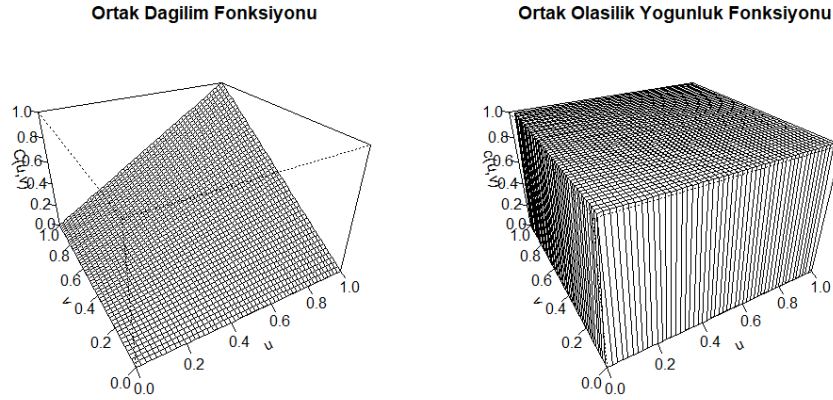
Şekil 4.7. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)



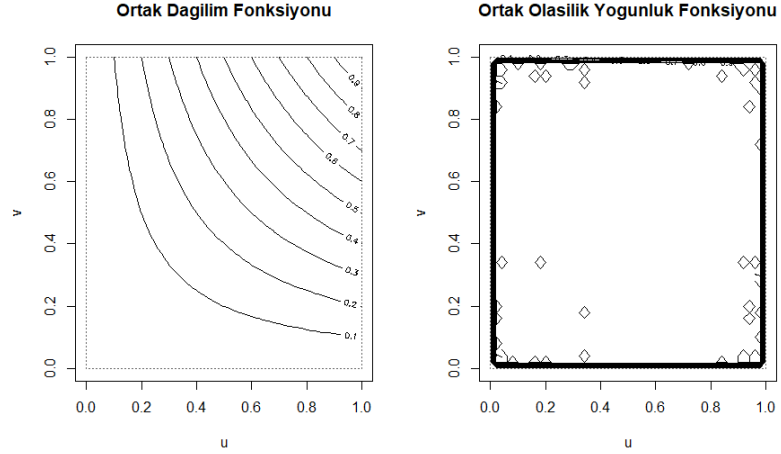
Şekil 4.8. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)

Üçüncü fonksiyona göre düzenlenmiş ilişki katsayılı sözde-Gauss kopulanın kullanıldığı durumda, Şekil 4.7’de üç boyutlu olarak verilen ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları, Şekil 4.8’de iki boyuta indirgenmiştir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait izoips eğrisinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir. $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ katsayıları pozitif ve bulunduğu değer aralığına göre yüksek değerler olduğundan, izoips eğrisinden gözlenen ilişki beklenen bir ilişkidir.

Yukarıda Şekil 4.4, Şekil 4.6 ve Şekil 4.8 ile incelenen tüm ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiklerine bakıldığında, farklı kuyruk bölgesi olasılıkları görülmüştür. Standart Gauss kopula fonksiyonunda kuyruk bağımlılığı yoktur. Düzenleme ile Gauss kopulanın bu eksikliği esnetilir ve farklı kuyruk bağımlılık yapıları elde edilebilir [32, 33]. Normal dağılım simetrik bir dağılım olduğundan, alt ve üst kuyruk bölgesindeki olasılık değerleri aynı ve simetriktir. $\rho = 0$ olduğunda, sözde-Gauss kopula fonksiyonu bağımsız sözde-Gauss kopula fonksiyonu $C(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \hat{u}_1 \hat{u}_2$ ’ye dönüşür. Gauss kopula fonksiyonunda ilişki durumu bağımlılık ile doğrudan ilişkilendirilebildiğinden, değişkenler arasında ilişki olmadığı durumda diğer bir ifade ile bağımsızlık durumunda ($\rho_{12}=0$) grafikler, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 ile verilmiştir.



Şekil 4.9. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)



Şekil 4.10. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)

Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği, ilişki olmaması diğer bir ifade ile bağımsızlık durumunda dikdörtgensel bir şekil almıştır. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izoips grafiğinden ise bağımsızlık durumu açıkça görülmektedir.

4.3. Kopulanın Düzenlenmesinin Etkinlik Araştırması için Benzetim Çalışması

Çalışmanın bu kısmında, kopula fonksiyonu üzerinde yapılan düzenlemenin etkinliği bir benzetim çalışması ile test edilmiştir. N örneklemden oluşan R adet deneme yapılmıştır. Öncelikle Kesim 4.3.1’de verilen algoritma yardımıyla Gamma dağılımlı hasar tutarları ve bu hasar tutarlarına bağımlı Poisson dağılımlı hasar sayıları üretilmiştir. Daha sonra Kesim 4.3.2’de belirli varsayımlar altında oluşturulan farklı senaryolara göre düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin parametreleri tahmin edilmiş ve her bir parametrenin hata kareler ortalama (HKO) değerleri hesaplanmıştır.

4.3.1. Hasar Tutarı ve Sayısı Bağımlı Sigorta Portföyü Benzetimi

Bağımlı hasar tutarı ve sayısının benzetim yoluyla üretilmesinde “CopulaRegression” R paketindeki ana yaklaşımda olduğu gibi koşullu dağılım kullanılmıştır. Koşullu dağılım yaklaşımında, hasar tutarı bilindiğinde hasar sayısının dağılımdan yola çıkılmaktadır. Hasar tutarı

ve sayısının ortak olasılık dağılım fonksiyonu $f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2})$ olmak üzere, hasar tutarı bilinirken hasar sayısının koşullu dağılımı,

$$f_{X_2|X_1}(x_{i2}|x_{i1}) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2})}{f_{X_1}(x_{i1})}$$

biçiminde ifade edilir. Bu koşullu dağılım Üçüncü Bölüm’de elde edilen bilgiler ışığında kopula fonksiyonu yardımıyla j. risk grubu için,

$$f_{X_2|X_1}(x_{i2}|x_{i1}) = \begin{cases} \frac{f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \right]}{f_{X_1}(x_{i1})}, & , x_{i2} = 0 \\ \frac{f_{X_1}(x_{i1}) \left[D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right]}{f_{X_1}(x_{i1})}, & , x_{i2} \geq 1 \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Sadeleştirme işleminden sonra,

$$f_{X_2|X_1}(x_{i2}|x_{i1}) = \begin{cases} D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) & , x_{i2} = 0 \\ D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12(j)}}^* (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) & , x_{i2} \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yeniden düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir [2]. Benzetim algoritması bu koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak oluşturulabilir. Risk gruplarına göre bağımlı hasar tutarı ve sayısı üretimi için benzetim algoritması aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Bağımlı Hasar Tutarı ve Sayısı Üretimi için Benzetim Algoritması

Adım 1: j. risk grubu için, hasar tutarı ile sayısı arasındaki ilişkiye göre $\rho_{12(j)}^*$ ilişki katsayısı belirlenir (j=1,2,3) ($\rho_{12(1)}^*=0,15$ (düşük düzey); $\rho_{12(2)}^*=0,50$ (orta düzey); $\rho_{12(3)}^*=0,85$ (yüksek düzey)).

Adım 2: $\text{Gamma}(\mu_{i1}, \nu)$ dağılımından N adet x_{i1} rastgele gözlemleri üretilir.

Adım 3: $f_{x_2|x_1}(x_{i2}|x_{i1})$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak koşullu p_{ij} olasılıkları hesaplanır.

Adım 4: p_{ij} olasılık değerlerini verecek x_{i2} hasar sayıları bulunur.

İlişki katsayısı dışında tüm varsayımlar aynı tutularak hasar tutarı ve sayısı bağımlı farklı sigorta portföyleri elde edilmiştir. Bağımlılığın düşük, orta ve yüksek düzeyde olduğu portföyler için sırasıyla 0,15; 0,50 ve 0,85 ilişki katsayıları kullanılmıştır.

4.3.2. Farklı Senaryolar Altında Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Benzetim çalışmasında hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın varlığı kabul edilerek; düşük, orta ve yüksek ilişkili gruplar oluşturulmuştur. Kesim 4.3.1'deki algoritma yardımıyla üretilen j. gruptaki 250 (N) adet bağımlı hasar tutarı ve sayısı verileri kullanılarak, farklı senaryolar altında düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri elde edilmiş ve bu modellerin parametre tahminleri Üçüncü Bölüm'de verilen parçalı sözde-EÇO algoritması ile tahmin edilmiştir. Bu işlem 500 (R) kez tekrarlanmış, Monte Carlo benzetim yöntemine göre her denemenin sonuçlarının ortalaması alınıp, nihai bir sonuç elde edilmiştir.

Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli için Üçüncü Bölüm'de tanımlanan skor eşitlikleri kullanılarak yeni bir benzetim sistemi kurulmuştur. Bu sistem sayesinde farklı risk gruplarındaki hasar tutarı ve sayısının bağımlılığını modellemek için fonksiyonlarla düzenlenmiş $\rho_{12(j)}^*$ ilişki katsayıları ve farklı Σ_j^* ilişki matrisleri kullanılmıştır. Benzetim çalışması her bir risk grubu için

ayrı ayrı yapılmıştır. İşlemleri kolaylaştırmak amacıyla benzetim için aşağıdaki varsayımlarda bulunulmuştur.

Benzetim Varsayımları

- Sabit terim ve iki düzeyli bir açıklayıcı değişkenden oluşan GDM'ler düşünülmüştür.
- Açıklayıcı değişkenler kategorik değişken olarak belirlenmiş ve dolayısıyla (0,1) gösterge değişkenle kodlanmıştır.
- Gamma GDM için başlangıç parametre değerleri α_0 marjinal Gamma GDM yardımıyla bulunmuştur.
- Poisson GDM için başlangıç parametre değerleri β_0 marjinal Poisson GDM yardımıyla bulunmuştur. Riske maruz değer riske maruz kalınan süre olarak varsayılmış ve tüm poliçelerin bir yıllık poliçe olması varsayımından ($\ln(1) = 0$) düzeltme terimi içermeyen GDM'ler ile çalışılmıştır.
- Gamma ve Poisson dağılım fonksiyonları yardımıyla $(u_1, u_2) \in [0,1]$ gözlemleri üretilmiştir.
- $(u_1, u_2) \in [0,1]$ gözlemlerinden yararlanarak $(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in [0,1]$ sözde-gözlemleri üretilmiştir.
- a_{12} ve b_{12} girdi olarak kullanıcı tarafından belirlenmiş ve $\rho_{12(j)}^*$ ilişki katsayısı j. gruba özel bir fonksiyon ile ifade edilmiştir.

GDM parametrelerinin belirlenmesi için SBM'den elde edilen verideki hasar tutarı ve sayısı tek düzeyli iki farklı gösterge açıklayıcı değişken ile modellenmiştir. Bu tek düzeyli açıklayıcı değişkenler cinsiyet ve yaşanan bölgedir. Gamma GDM için parametre değerleri (7,5; -0,5) ve (6,5; 3), Poisson GDM için parametre değerleri (0,03; 0,07) ve (6,25; -0,30) olarak belirlenmiştir. Portföydeki bağımlılığı modellemek için Fang ve Madsen'in [33] önerdiği üç farklı ρ_{12}^* fonksiyonu ile düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri oluşturulmuştur. ρ_{12}^{*1} , ρ_{12}^{*2} ve ρ_{12}^{*3} ile düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri ile hasar tutarı ve sayısı arasındaki

bağımlılık modellenmiştir. Farklı senaryolar altında düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin parametreleri Parçalı sözde-EÇO tahmin yöntemi ile elde edilmiştir.

$HKO_{\hat{\theta}}$, θ parametresine ait HKO değerini göstermek üzere, her bir parametre değeri için HKO değerleri hesaplanmıştır. Üç farklı portföy için, dağılım parametrelerinin ve kullanılan düzenlenmiş fonksiyonların oluşturduğu senaryo bilgileri Çizelge 4.7 ile verilmiştir.

Çizelge 4.7. Benzetim çalışması için yararlanılan senaryolar

Senaryo	α_0	α_1	β_0	β_1	a_{12}	b_{12}
1	7,5	-0,5	0,03	0,07	0,25	0,25
2	7,5	-0,5	0,03	0,07	0,25	0,75
3	7,5	-0,5	6,25	-0,30	0,25	0,25
4	7,5	-0,5	6,25	-0,30	0,25	0,75
5	6,5	3,0	0,03	0,07	0,25	0,25
6	6,5	3,0	0,03	0,07	0,25	0,75
7	6,5	3,0	6,25	-0,30	0,25	0,25
8	6,5	3,0	6,25	-0,30	0,25	0,75
9	7,5	-0,5	0,03	0,07	0,75	0,25
10	7,5	-0,5	0,03	0,07	0,75	0,75
11	7,5	-0,5	6,25	-0,30	0,75	0,25
12	7,5	-0,5	6,25	-0,30	0,75	0,75
13	6,5	3,0	0,03	0,07	0,75	0,25
14	6,5	3,0	0,03	0,07	0,75	0,75
15	6,5	3,0	6,25	-0,30	0,75	0,25
16	6,5	3,0	6,25	-0,30	0,75	0,75

Bu 16 senaryo; düşük düzey ($\rho=0,15$), orta düzey ($\rho=0,5$) ve yüksek düzey ($\rho=0,85$) bağımlı sigorta portföylerinin oluşturulmasında kullanılmıştır. Aynı başlangıç (α_0, α_1) ve (β_0, β_1) değerlerine sahip olan senaryolarda aynı bağımlı hasar tutarı ve sayısı kullanılmıştır. Örneğin 1., 2., 9. ve 10. senaryolarda; 3., 4., 11. ve 12. senaryolarda; 5., 6., 13. ve 14. senaryolar ile 7., 8., 15. ve 16. senaryolarda aynı bağımlı veri kullanılmıştır. Bağımlı veri benzetiminde, ρ ilişki katsayısı ile parametre başlangıç değerleri olan (α_0, α_1) ve (β_0, β_1)'lara ait bilgiler kullanılmıştır. Parçalı sözde-EÇO algoritması içinde ρ_{12} sabit ilişki katsayısı ρ 'ya eşit olarak belirlenmiştir. ρ_{12}^* düzenlenmiş ilişki katsayısı için daha önce bahsedilen üç farklı fonksiyon kullanılmış ve fonksiyon içindeki a_{12} ve b_{12} katsayıları senaryolara göre değiştirilmiştir. Tüm ilişki düzeylerine göre, her bir senaryo için parametre tahminleri bulunmuş, tahminlere ait HKO değerleri hesaplanmış ve

izelgelerle zetlenmiŒtir. Çizelgelerdeki ρ_{12} sabit iliŒki katsayısını; ρ_{12}^{*1} , ρ_{12}^{*2} ve ρ_{12}^{*3} ise sırasıyla 1., 2. ve 3. fonksiyonlarla yeniden dzenlenmiŒ iliŒki katsayılarını ifade etmektedir. Her bir senaryo için en dŒk HKO değerini veren iliŒki katsayısı koyu renkle belirtilmiŒtir. DŒk iliŒki düzeyine göre, her bir senaryo için $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametre tahminleri ve bu tahminlere ait HKO değerleri sırasıyla izelge 4.8, 4.9, 4.10 ve 4.11 ile verilmiŒtir.

Çizelge 4.8. Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini

Senaryo	α_0	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$
1	7,5	7,12673189	0,13932908	7,08833356	0,16946926	7,16303758	0,11354367	7,17955982	0,10268191
2	7,5	7,12673189	0,13932908	7,01450333	0,23570702	7,09867045	0,16106541	7,14526252	0,12583868
3	7,5	6,77319230	0,52824943	6,73117959	0,59108482	6,81503368	0,46917886	6,83578820	0,44117732
4	7,5	6,77319230	0,52824943	6,66565894	0,69612501	6,74273071	0,57345678	6,79413985	0,49823855
5	6,5	6,05189276	0,20080010	6,02169004	0,22878042	6,07983904	0,17653523	6,09261814	0,16595998
6	6,5	6,05189276	0,20080010	5,99609991	0,25391530	6,03019095	0,22072054	6,06609205	0,18827611
7	6,5	6,25810887	0,05851132	6,22417855	0,07607747	6,29098467	0,04368741	6,30680383	0,03732476
8	6,5	6,25810887	0,05851132	6,19228339	0,09468951	6,23343378	0,07105755	6,27480289	0,05071374
9	7,5	7,12673189	0,13932908	7,12177557	0,14305372	7,10856869	0,15321847	7,14214447	0,12806058
10	7,5	7,12673189	0,13932908	7,00525657	0,24477106	6,99082098	0,25926327	7,04626919	0,20587165
11	7,5	6,77319230	0,52824943	6,76755298	0,53647863	6,75341126	0,55739475	6,79067154	0,50314687
12	7,5	6,77319230	0,52824943	6,64294389	0,73454518	6,63118260	0,75484367	6,68701452	0,66094539
13	6,5	6,05189276	0,20080010	6,04785514	0,20443497	6,03802866	0,21341752	6,06372297	0,19033765
14	6,5	6,05189276	0,20080010	5,95494030	0,29709008	5,94413446	0,30898650	5,98830883	0,26182785
15	6,5	6,25810887	0,05851132	6,25351957	0,06075260	6,24209930	0,06651277	6,27205582	0,05195855
16	6,5	6,25810887	0,05851132	6,16001762	0,11558802	6,15543275	0,11872659	6,18966494	0,09630785

Çizelge 4.9. Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini

Senaryo	α_1	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$
1	-0,5	-0,51710672	0,00029264	-0,51220778	0,00014903	-0,51495493	0,00022365	-0,51086554	0,00011806
2	-0,5	-0,51710672	0,00029264	-0,62377722	0,01532080	-0,51390683	0,00019340	-0,51696084	0,00028767
3	-0,5	-0,86802095	0,13543942	-0,87829972	0,14311068	-0,85567737	0,12650639	-0,84855711	0,12149206
4	-0,5	-0,86802095	0,13543942	-0,88570246	0,14876639	-0,87556974	0,14105263	-0,86194645	0,13100523
5	3,0	2,96205227	0,00144003	2,97447981	0,00065128	2,94681504	0,00282864	2,93791039	0,00385512
6	3,0	2,96205227	0,00144003	2,94509308	0,00301477	2,97085244	0,00084958	2,95439309	0,00207999
7	3,0	2,86757247	0,01753705	2,85997307	0,01960754	2,87396485	0,01588486	2,87661876	0,01522293
8	3,0	2,86757247	0,01753705	2,86946644	0,01703901	2,86186536	0,01908118	2,87067715	0,01672440
9	-0,5	-0,51710672	0,00029264	-0,51699117	0,00028870	-0,51533851	0,00023527	-0,51704817	0,00029064
10	-0,5	-0,51710672	0,00029264	-0,53276751	0,00107371	-0,55750383	0,00330669	-0,50347563	0,00001208
11	-0,5	-0,86802095	0,13543942	-0,86957678	0,13658700	-0,87308157	0,13918986	-0,86292747	0,13171635
12	-0,5	-0,86802095	0,13543942	-0,89494781	0,15598377	-0,89605352	0,15685839	-0,88657809	0,14944262
13	3,0	2,96205227	0,00144003	2,96382155	0,00130888	2,96773392	0,00104110	2,95567946	0,00196431
14	3,0	2,96205227	0,00144003	2,98913262	0,00011810	2,97874088	0,00045195	2,98414062	0,00025152
15	3,0	2,75810887	0,05851132	2,75351957	0,06075260	2,74209930	0,06651277	2,77205582	0,05195855
16	3,0	2,75810887	0,05851132	2,66001762	0,11558802	2,65543275	0,11872659	2,68966494	0,09630785

Çizelge 4.10. Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini

Senaryo	β_0	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$
1	0,03	-1,70639861	3,01508012	-1,70672667	3,01621952	-1,70623594	3,01451524	-1,70612954	3,01414577
2	0,03	-1,70639861	3,01508012	-1,70927184	3,02506655	-1,70663865	3,01591381	-1,70630303	3,01474821
3	6,25	4,79897939	2,10546081	4,800246866	2,10178415	4,798047601	2,10816577	4,797713017	2,10913748
4	6,25	4,79897939	2,10546081	4,809809134	2,07414973	4,799904603	2,10277666	4,798456019	2,10697993
5	0,03	-1,71866074	3,05781440	-1,71882135	3,05837610	-1,71855224	3,05743492	-1,71851868	3,05731756
6	0,03	-1,71866074	3,05781440	-1,72050330	3,06426181	-1,71875494	3,05814385	-1,71859961	3,05760059
7	6,25	4,824111042	2,03315932	4,824828249	2,03111452	4,823891319	2,03378597	4,823863334	2,03386579
8	6,25	4,824111042	2,03315932	4,831460371	2,01225468	4,824574734	2,03183719	4,823978331	2,03353780
9	0,03	-1,70639861	3,01508012	-1,70643245	3,01519764	-1,70654795	3,01559879	-1,70631797	3,01480008
10	0,03	-1,70639861	3,01508012	-1,70783906	3,02008460	-1,70844015	3,02217417	-1,70715506	3,01770770
11	6,25	4,79897939	2,10546081	4,799130843	2,10502131	4,799575386	2,10373156	4,79857583	2,10663212
12	6,25	4,79897939	2,10546081	4,804739131	2,08877898	4,806989352	2,08227973	4,802151938	2,09626401
13	0,03	-1,71866074	3,05781440	-1,71867471	3,05786324	-1,71871365	3,05799944	-1,71861155	3,05764235
14	0,03	-1,71866074	3,05781440	-1,71963863	3,06123534	-1,72005175	3,06268114	-1,71909453	3,05933169
15	6,25	4,824111042	2,03315932	4,824169481	2,03299267	4,824381994	2,03238670	4,823993191	2,03349542
16	6,25	4,824111042	2,03315932	4,827539871	2,02339282	4,829023223	2,01917500	4,825834353	2,02824779

Çizelge 4.11. Düşük ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇO ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini

Senaryo	β_1	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$
1	0,07	0,00407504	0,00434610	0,00405760	0,00434840	0,0039724	0,00435964	0,00393382	0,00436474
2	0,07	0,00407504	0,00434610	0,00392875	0,00436541	0,0040512	0,00434924	0,00401409	0,00435414
3	-0,30	-0,60885391	0,09539074	-0,60869203	0,09529077	-0,6089373	0,09544225	-0,6089615	0,09545721
4	-0,30	-0,60885391	0,09539074	-0,60765653	0,09465254	-0,6087454	0,09532374	-0,60890656	0,09542326
5	0,07	-0,01421639	0,00709240	-0,01418224	0,00708665	-0,0144868	0,00713802	-0,01466753	0,00716859
6	0,07	-0,01421639	0,00709240	-0,0128259	0,00686013	-0,0141534	0,00708179	-0,01433422	0,00711226
7	-0,30	-0,59904092	0,08942547	-0,59913345	0,08948082	-0,5989106	0,08934756	-0,59883146	0,08930024
8	-0,30	-0,59904092	0,08942547	-0,59950174	0,08970129	-0,5991064	0,08946461	-0,59896988	0,08938299
9	0,07	0,00407504	0,00434610	0,00408490	0,00434480	0,0040621	0,00434781	0,00402235	0,00435305
10	0,07	0,00407504	0,00434610	0,00402410	0,00435282	0,0039805	0,00435857	0,00405586	0,00434863
11	-0,30	-0,60885391	0,09539074	-0,60883842	0,09538117	-0,6087859	0,09534876	-0,60888143	0,09540774
12	-0,30	-0,60885391	0,09539074	-0,60814602	0,09495397	-0,6078629	0,09477955	-0,60843528	0,09513232
13	0,07	-0,01421639	0,00709240	-0,01417993	0,00708626	-0,0141427	0,00708000	-0,01432301	0,00711037
14	0,07	-0,01421639	0,00709240	-0,01378019	0,00701912	-0,0135028	0,00697271	-0,01402922	0,00706091
15	-0,30	-0,59904092	0,08942547	-0,59904832	0,08942990	-0,5990827	0,08945044	-0,59898806	0,08939386
16	-0,30	-0,59904092	0,08942547	-0,59942353	0,08965445	-0,5994919	0,08969540	-0,59934076	0,08960489

Düşük düzeyli ilişki durumunda parametrelerin HKO değerleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.8’de verilen $HKO_{\hat{\alpha}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 12’sinde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmış ve bu 12 senaryonun hepsinde ρ_{12}^{*3} kullanılmıştır. Çizelge 4.9’da verilen $HKO_{\hat{\alpha}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 14’ünde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bu 14 senaryonun 8’inde ρ_{12}^{*3} , 4’ünde ρ_{12}^{*2} ve 2’sinde ise ρ_{12}^{*1} kullanılmıştır. Çizelge 4.10’da verilen $HKO_{\hat{\beta}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 14’ünde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bu 14 senaryonun 6’sında ρ_{12}^{*3} , 4’ünde ρ_{12}^{*2} ve kalan 4’ünde ρ_{12}^{*1} kullanılmıştır. Çizelge 4.11’de verilen $HKO_{\hat{\beta}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 11’inde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bu 11 senaryonun dördünde ρ_{12}^{*1} , dördünde ρ_{12}^{*2} ve kalan üçünde ρ_{12}^{*3} kullanılmıştır. Düşük ilişkili portföyde $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{\beta}_0$ parametre tahminlerinde, ρ_{12}^{*3} fonksiyonunun kullanıldığı durumda daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır.

Orta ilişki düzeyine göre, her bir senaryo için $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametre tahminleri ve bu tahminlere ait HKO değerleri sırasıyla Çizelge 4.12, 4.13, 4.14 ve 4.15 ile verilmiştir.

Çizelge 4.12. Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini

		Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
Senaryo	α_0	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$
1	7,5	6,90521645	0,35376747	6,99340409	0,25663942	7,07303139	0,18230219	7,09130579	0,16703096
2	7,5	6,90521645	0,35376747	6,93860322	0,31516635	7,00484353	0,24517993	7,05406129	0,19886133
3	7,5	6,92048053	0,33584282	7,00076902	0,24923157	7,07266803	0,18261261	7,08945489	0,16854729
4	7,5	6,92048053	0,33584282	6,94755417	0,30519639	7,01152391	0,23860889	7,05526147	0,19779236
5	6,5	5,83679159	0,43984539	5,94772644	0,30500608	6,03122692	0,21974820	6,04973273	0,20274061
6	6,5	5,83679159	0,43984539	5,90518112	0,35380950	5,96000084	0,29159909	6,01164482	0,23849078
7	6,5	5,99195246	0,25811230	6,04359324	0,20830713	6,11406769	0,14894375	6,13439013	0,13367058
8	6,5	5,99195246	0,25811230	6,04418377	0,20776844	6,05199144	0,20071167	6,09469600	0,16427133
9	7,5	6,90521645	0,35376747	7,02890922	0,22192652	7,01534109	0,23489426	7,05085689	0,20172953
10	7,5	6,90521645	0,35376747	6,90851041	0,34985993	6,89837349	0,36195446	6,95022581	0,30225166
11	7,5	6,92048053	0,33584282	7,03241282	0,21863777	7,02098979	0,22945078	7,05233655	0,20040256
12	7,5	6,92048053	0,33584282	6,92226670	0,33377577	6,91463112	0,34265672	6,96178332	0,28967719
13	6,5	5,83679159	0,43984539	5,98581618	0,26438500	5,97132459	0,27949769	6,00833124	0,24173817
14	6,5	5,83679159	0,43984539	5,84133014	0,43384598	5,82079204	0,46132345	5,89703012	0,36357268
15	6,5	5,99195246	0,25811230	6,07201742	0,18316909	6,06066309	0,19301692	6,09160770	0,16678427
16	6,5	5,99195246	0,25811230	5,99387723	0,25616026	5,99308103	0,25696684	6,01363980	0,23654624

Çizelge 4.13. Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini

Senaryo	α_1	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$
1	-0,5	-0,72322296	0,04982849	-0,68894121	0,03569878	-0,67355256	0,03012049	-0,67255399	0,02977488
2	-0,5	-0,72322296	0,04982849	-0,80304325	0,09183521	-0,68551838	0,03441707	-0,67572424	0,03087901
3	-0,5	-0,50927524	0,00008603	-0,53597541	0,00129423	-0,53202077	0,00102533	-0,52951711	0,00087126
4	-0,5	-0,50927524	0,00008603	-0,56457461	0,00416988	-0,5371225	0,00137808	-0,53410748	0,00116332
5	3,0	2,78025205	0,04828916	2,83201149	0,02822014	2,851738677	0,02198142	2,855053493	0,02100949
6	3,0	2,78025205	0,04828916	2,81614449	0,03380285	2,835600852	0,02702708	2,848028226	0,02309542
7	3,0	2,98846050	0,00013316	2,97842455	0,00046550	2,978152346	0,00047732	2,980281734	0,00038881
8	3,0	2,98846050	0,00013316	2,96565164	0,00117981	2,977688344	0,00049781	2,977130369	0,00052302
9	-0,5	-0,72322296	0,04982849	-0,68017797	0,03246410	-0,68296874	0,03347756	-0,67611258	0,03101564
10	-0,5	-0,72322296	0,04982849	-0,72122785	0,04894176	-0,72918283	0,05252477	-0,70374609	0,04151247
11	-0,5	-0,50927524	0,00008603	-0,53536156	0,00125044	-0,53700432	0,00136932	-0,53444967	0,00118678
12	-0,5	-0,50927524	0,00008603	-0,51101635	0,00012136	-0,50378153	0,00001430	-0,5305254	0,00093180
13	3,0	2,78025205	0,04828916	2,84276667	0,02472232	2,838739372	0,02600499	2,847367435	0,02329670
14	3,0	2,78025205	0,04828916	2,78260071	0,04726245	2,767305028	0,05414695	2,812836676	0,03503011
15	3,0	2,98846050	0,00013316	2,97689437	0,00053387	2,977381645	0,00051159	2,977117255	0,00052362
16	3,0	2,98846050	0,00013316	2,98913584	0,00011803	2,988970947	0,00012164	2,982443805	0,00030822

Çizelge 4.14. Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini

		Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
Senaryo	β_0	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$
1	0,03	-1,71004214	3,02774664	-1,70892639	3,02386498	-1,70824234	3,02148643	-1,70813776	3,02112288
2	0,03	-1,71004214	3,02774664	-1,71154117	3,03296563	-1,70879421	3,02340530	-1,70837242	3,02193868
3	6,25	4,80387708	2,09127150	4,80039285	2,10136088	4,79852000	2,10679419	4,79812035	2,10795451
4	6,25	4,80387708	2,09127150	4,80784939	2,07979839	4,80011761	2,10215895	4,79911217	2,10507550
5	0,03	-1,71094807	3,03090017	-1,70962102	3,02628130	-1,70901405	3,02416985	-1,70891784	3,02383526
6	0,03	-1,71094807	3,03090017	-1,71256499	3,03653275	-1,70952804	3,02595779	-1,70915143	3,02464768
7	6,25	4,82096041	2,04215415	4,81735021	2,05248541	4,81594619	2,05651033	4,81557198	2,05758374
8	6,25	4,82096041	2,04215415	4,82550372	2,02918966	4,81711851	2,05314937	4,81632073	2,05543624
9	0,03	-1,71004214	3,02774664	-1,70857290	3,02263573	-1,70868440	3,02302346	-1,70839737	3,02202542
10	0,03	-1,71004214	3,02774664	-1,70995457	3,02744189	-1,71054522	3,02949768	-1,70937280	3,02541774
11	6,25	4,80387708	2,09127150	4,79981523	2,10303587	4,79995328	2,10263550	4,79919532	2,10483423
12	6,25	4,80387708	2,09127150	4,80361583	2,09202718	4,80531143	2,08712505	4,80139436	2,09845831
13	0,03	-1,71094807	3,03090017	-1,70933347	3,02528091	-1,70944035	3,02565273	-1,70918415	3,02476151
14	0,03	-1,71094807	3,03090017	-1,71086574	3,03061354	-1,71147673	3,03274120	-1,71003902	3,02773579
15	6,25	4,82096041	2,04215415	4,81683125	2,05397268	4,81700422	2,05347690	4,81638311	2,05525739
16	6,25	4,82096041	2,04215415	4,82068281	2,04294764	4,82230631	2,03830927	4,81851741	2,04914240

Çizelge 4.15. Orta ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini

		Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
Senaryo	β_1	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$
1	0,07	0,00067288	0,00480625	0,00068528	0,00480453	0,00085443	0,00478111	0,00089855	0,00477501
2	0,07	0,00067288	0,00480625	-0,00016160	0,00492265	0,00070873	0,00480128	0,00080976	0,00478729
3	-0,30	-0,60723112	0,09439096	-0,60712701	0,09432700	-0,60697702	0,09423489	-0,60696988	0,09423051
4	-0,30	-0,60723112	0,09439096	-0,60720579	0,09437540	-0,60709189	0,09430543	-0,60694439	0,09421486
5	0,07	0,00331087	0,00444744	0,00367881	0,00439850	0,00385932	0,00437459	0,00389523	0,00436984
6	0,07	0,00331087	0,00444744	0,00278341	0,00451807	0,00368454	0,00439774	0,00377916	0,00438520
7	-0,30	-0,59729030	0,08838152	-0,59726027	0,08836367	-0,59702114	0,08822156	-0,59713063	0,08828661
8	-0,30	-0,59729030	0,08838152	-0,59721834	0,08833874	-0,59724042	0,08835187	-0,59705097	0,08823928
9	0,07	0,00067288	0,00480625	0,00074099	0,00479681	0,00073074	0,00479823	0,00079769	0,00478896
10	0,07	0,00067288	0,00480625	0,00068471	0,00480461	0,00051712	0,00482787	0,00068355	0,00480477
11	-0,30	-0,60723112	0,09439096	-0,60693866	0,09421134	-0,60702938	0,09426704	-0,60694514	0,09421532
12	-0,30	-0,60723112	0,09439096	-0,60720687	0,09437606	-0,60721717	0,09438239	-0,60729528	0,09443039
13	0,07	0,00331087	0,00444744	0,00372021	0,00439301	0,00370060	0,00439561	0,00376315	0,00438732
14	0,07	0,00331087	0,00444744	0,00333757	0,00444388	0,00311547	0,00447354	0,00369894	0,00439583
15	-0,30	-0,59729030	0,08838152	-0,59712990	0,08828618	-0,59719391	0,08832422	-0,59706503	0,08824763
16	-0,30	-0,59729030	0,08838152	-0,59728130	0,08837617	-0,59736790	0,08842767	-0,59734041	0,08841132

Orta düzeyli ilişki durumunda parametrelerin HKO değerleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.12’de verilen $HKO_{\hat{\alpha}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun hepsinde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır ve hepsinde ρ_{12}^{*3} kullanılmıştır. Çizelge 4.13’de verilen $HKO_{\hat{\alpha}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 11’inde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bunların 8’inde ρ_{12}^{*3} , ikisinde ρ_{12}^{*1} ve birinde ρ_{12}^{*2} fonksiyonu kullanılmıştır. Çizelge 4.14’te verilen $HKO_{\hat{\beta}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 12’sinde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bunların 8’inde ρ_{12}^{*3} , ikisinde ρ_{12}^{*2} ve kalan ikisinde ρ_{12}^{*1} kullanılmıştır. Çizelge 4.15’te verilen $HKO_{\hat{\beta}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun hepsinde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bunların 11’inde ρ_{12}^{*3} , dördünde ρ_{12}^{*1} ve birinde ρ_{12}^{*2} kullanılmıştır. Orta ilişkili portföyde $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametre tahminlerinde, ρ_{12}^{*3} fonksiyonunun kullanıldığı durumda daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır.

Yüksek ilişki düzeyine göre, her bir senaryo için $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametre tahminleri ve bu tahminlere ait HKO değerleri sırasıyla Çizelge 4.16, 4.17, 4.18 ve 4.19 ile verilmiştir.

Çizelge 4.16. Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_0$ tahmini

Senaryo	α_0	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$	$\hat{\alpha}_0$	$HKO_{\hat{\alpha}_0}$
1	7,5	7,00266709	0,24734002	7,08274608	0,17410083	7,16515814	0,11211907	7,18541092	0,09896629
2	7,5	7,00266709	0,24734002	7,03851421	0,21296913	7,09354602	0,16520484	7,14430353	0,12651998
3	7,5	7,31389436	0,03463531	7,22575655	0,07520947	7,29607504	0,04158539	7,31754140	0,03329114
4	7,5	7,31389436	0,03463531	7,20053147	0,08968140	7,23618417	0,06959879	7,27913620	0,04878082
5	6,5	6,43051662	0,00482794	6,28522051	0,04613023	6,34506472	0,02400494	6,35948911	0,01974331
6	6,5	6,43051662	0,00482794	6,25488095	0,06008335	6,29361216	0,04259594	6,33025042	0,02881492
7	6,5	6,35141336	0,02207799	5,99553852	0,25448138	6,08000200	0,17639832	6,09899905	0,16080176
8	6,5	6,35141336	0,02207799	5,89305724	0,36837951	6,00831225	0,24175684	6,06043107	0,19322084
9	7,5	7,00266709	0,24734002	7,11821206	0,14576203	7,10391072	0,15688672	7,14081854	0,12901132
10	7,5	7,00266709	0,24734002	7,00530033	0,24472776	6,99691366	0,25309587	7,04120236	0,21049527
11	7,5	7,31389436	0,03463531	7,25697963	0,05905890	7,24552981	0,06475508	7,35834563	0,02006596
12	7,5	7,31389436	0,03463531	7,14759540	0,12418900	7,13781022	0,13118144	7,33113203	0,02851639
13	6,5	6,43051662	0,00482794	6,31157551	0,03550379	6,30149000	0,03940622	6,32776362	0,02966537
14	6,5	6,43051662	0,00482794	6,22703480	0,07451000	6,22207425	0,07724272	6,25385992	0,06058494
15	6,5	6,35141336	0,02207799	6,03453171	0,21666073	6,01983708	0,23055643	6,35996915	0,01960864
16	6,5	6,35141336	0,02207799	5,88845393	0,37398860	5,86898372	0,39818154	6,35531959	0,02093242

Çizelge 4.17. Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\alpha}_1$ tahmini

Senaryo	α_1	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$	$\hat{\alpha}_1$	$HKO_{\hat{\alpha}_1}$
1	-0,5	-0,89978731	0,15982989	-0,61061614	0,01223593	-0,59136887	0,00834827	-0,58521144	0,00726099
2	-0,5	-0,89978731	0,15982989	-0,62011973	0,01442875	-0,60852866	0,01177847	-0,59710906	0,00943017
3	-0,5	-0,63636418	0,01859519	-0,60210010	0,01042443	-0,59628323	0,00927046	-0,59445967	0,00892263
4	-0,5	-0,63636418	0,01859519	-0,61603318	0,01346370	-0,60188621	0,01038080	-0,59769002	0,00954334
5	3,0	2,89670552	0,01066975	2,76664818	0,05445307	2,79027270	0,04398554	2,79662301	0,04136220
6	3,0	2,89670552	0,01066975	2,77577712	0,05027590	2,76936091	0,05319439	2,78482310	0,04630110
7	3,0	2,84888213	0,02283661	2,85444716	0,02118563	2,87658505	0,01523125	2,88151603	0,01403845
8	3,0	2,84888213	0,02283661	2,80785318	0,03692040	2,85791960	0,02018684	2,87149821	0,01651271
9	-0,5	-0,89978731	0,15982989	-0,60331104	0,01067317	-0,60649047	0,01134022	-0,59795795	0,00959576
10	-0,5	-0,89978731	0,15982989	-0,62045659	0,01450979	-0,62169470	0,01480960	-0,61719795	0,01373536
11	-0,5	-0,63636418	0,01859519	-0,59987838	0,00997569	-0,60139453	0,01028085	-0,59792334	0,00958898
12	-0,5	-0,63636418	0,01859519	-0,60062674	0,01012574	-0,59648093	0,00930857	-0,60375939	0,01076601
13	3,0	2,89670552	0,01066975	2,77719948	0,04964007	2,77254440	0,05173605	2,78388950	0,04670375
14	3,0	2,89670552	0,01066975	2,74138127	0,06688365	2,73727273	0,06902562	2,75334703	0,06083769
15	3,0	2,84888213	0,02283661	2,86563077	0,01805509	2,86122983	0,01925716	2,87079598	0,01669368
16	3,0	2,84888213	0,02283661	2,81773341	0,03322111	2,80672266	0,03735613	2,83716441	0,02651543

Çizelge 4.18. Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_0$ tahmini

Senaryo	β_0	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_0$	$HKO_{\hat{\beta}_0}$
1	0,03	-1,71246274	3,03617641	-1,71067042	3,02993352	-1,71009152	3,02791850	-1,70995039	3,02742737
2	0,03	-1,71246274	3,03617641	-1,71371463	3,04054072	-1,71058105	3,02962239	-1,71019295	3,02827151
3	6,25	4,81343066	2,06373148	4,80536836	2,08696058	4,80386632	2,09130263	4,80362168	2,09201025
4	6,25	4,81343066	2,06373148	4,81224135	2,06714993	4,80519895	2,08745008	4,80423046	2,09024956
5	0,03	-1,71946538	3,06062910	-1,71723364	3,05282540	-1,71683054	3,05141695	-1,71675730	3,05116106
6	0,03	-1,71946538	3,06062910	-1,71933300	3,06016596	-1,71717291	3,05261318	-1,71694285	3,05180933
7	6,25	4,81508069	2,05899342	4,80595694	2,08526036	4,80508896	2,08776792	4,80482100	2,08854233
8	6,25	4,81508069	2,05899342	4,81438014	2,06100438	4,80586665	2,08552114	4,80544188	2,08674816
9	0,03	-1,71246274	3,03617641	-1,71037533	3,02890630	-1,71049747	3,02933146	-1,71022037	3,02836693
10	0,03	-1,71246274	3,03617641	-1,71198092	3,03449753	-1,71262074	3,03672703	-1,71117618	3,03169450
11	6,25	4,81343066	2,06373148	4,80481516	2,08855921	4,80506019	2,08785105	4,80431711	2,08999902
12	6,25	4,81343066	2,06373148	4,80858934	2,07766470	4,81025732	2,07285899	4,80659032	2,08343151
13	0,03	-1,71946538	3,06062910	-1,71705885	3,05221462	-1,71712231	3,05243637	-1,71695837	3,05186354
14	0,03	-1,71946538	3,06062910	-1,71814609	3,05601474	-1,71856137	3,05746687	-1,71761545	3,05415977
15	6,25	4,81508069	2,05899342	4,80574566	2,08587061	4,80578814	2,08574791	4,80549621	2,08659121
16	6,25	4,81508069	2,05899342	4,80930265	2,07560886	4,81123809	2,07003583	4,80703742	2,08214100

Çizelge 4.19. Yüksek ilişkili portföy için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $\hat{\beta}_1$ tahmini

Senaryo	β_1	Sabit		Düzenlenmiş					
		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
		$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$	$\hat{\beta}_1$	$HKO_{\hat{\beta}_1}$
1	0,07	0,00868377	0,00375968	0,00809031	0,00383281	0,00814776	0,00382570	0,00985168	0,00361782
2	0,07	0,00868377	0,00375968	0,00670466	0,00400630	0,00808595	0,00383335	0,00977144	0,00362748
3	-0,30	-0,60185104	0,09111405	-0,60191842	0,09115473	-0,60175326	0,09105503	-0,60173735	0,09104543
4	-0,30	-0,60185104	0,09111405	-0,60210746	0,09126892	-0,60189256	0,09113912	-0,60178166	0,09107217
5	0,07	0,00761359	0,00602387	0,00860954	0,00617946	0,00871055	0,00619535	0,00877957	0,00620622
6	0,07	0,00761359	0,00602387	0,00791412	0,00607061	0,00865259	0,00618623	0,00871372	0,00619585
7	-0,30	-0,60654879	0,09397216	-0,60774184	0,09470504	-0,60753039	0,09457494	-0,60751447	0,09456515
8	-0,30	-0,60654879	0,09397216	-0,60716479	0,09435021	-0,60768134	0,09466781	-0,60752361	0,09457077
9	0,07	0,00868377	0,00375968	0,00809192	0,00383261	0,00808885	0,00383299	0,00976114	0,00362872
10	0,07	0,00868377	0,00375968	0,00763374	0,00388955	0,00740503	0,00391813	0,01041452	0,00355043
11	-0,30	-0,60185104	0,09111405	-0,60179346	0,09107929	-0,60184224	0,09110874	-0,60177308	0,09106699
12	-0,30	-0,60185104	0,09111405	-0,60194806	0,09117263	-0,60194644	0,09117165	-0,60169123	0,09101760
13	0,07	0,00761359	0,00602387	0,00871410	0,00619591	0,00747380	0,00600219	0,00871099	0,00619542
14	0,07	0,00761359	0,00602387	0,00816783	0,00611021	0,00751574	0,00600869	0,00845107	0,00615457
15	-0,30	-0,60654879	0,09397216	-0,60755612	0,09459077	-0,60763152	0,09463715	-0,60751951	0,09456825
16	-0,30	-0,60654879	0,09397216	-0,60766061	0,09465505	-0,60747641	0,09454174	-0,60778017	0,09472863

Yüksek düzeyli ilişki durumunda parametrelerin HKO değerleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.16’da verilen $HKO_{\hat{\alpha}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 9’unda düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır ve bu senaryoların hepsinde ρ_{12}^{*3} kullanılmıştır. Çizelge 4.17’de verilen $HKO_{\hat{\alpha}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 11’inde düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Bu senaryoların 10’unda ρ_{12}^{*3} ve birinde ρ_{12}^{*2} kullanılmıştır. Çizelge 4.18’te verilen $HKO_{\hat{\beta}_0}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 8’unda düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır ve bu senaryoların hepsinde ρ_{12}^{*3} kullanılmıştır. Çizelge 4.19’da verilen $HKO_{\hat{\beta}_1}$ değerlerine göre, 16 senaryonun 10’unda düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır ve bunların 8’inde ρ_{12}^{*3} ve ikisinde ρ_{12}^{*2} kullanılmıştır. Yüksek ilişkili portföyde $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametre tahminlerinde ρ_{12}^{*3} fonksiyonunun kullanıldığı durumda daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır.

Son olarak genel bir yorum yapmak gerekirse; düşük, orta ve yüksek düzey ilişkili portföyler için 16 senaryoya göre incelenen $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)$ ve $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ parametre tahminlerine ait HKO değerlerine göre, düzenlenmiş ilişki katsayısının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Düzenlemelerde kullanılan fonksiyonlardan üçüncüsü olan $\rho_{12}^{*3} = b_{12} \tan\left(\frac{\pi}{4} a_{12} (1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right)$ ’ün kullanıldığı senaryolarda diğer iki fonksiyona göre daha düşük HKO değeri hesaplanmıştır. Gamma GDM parametrelerine ait HKO değerleri düzenlemenin etkisini daha iyi açıklamıştır ve özellikle Gamma GDM’ye ait parametre tahminlerinin HKO değerlerine göre düzenlemenin etkisi düşük ve orta düzeyli ilişki gruplarında daha açık bir şekilde görülmektedir. Poisson GDM’ye ait HKO değerlerinde de düzenlemenin etkisi gözlenmekte ancak düzenlemede kullanılan ilişki katsayısı fonksiyonları çeşitlenmektedir. a_{12} ve b_{12} katsayılarının tahminlere etkisi, aynı veride a_{12} ve b_{12} ’ler değiştikçe incelenmiş ancak çok anlamlı bir ilişki bulunamamıştır. Fonksiyonların yapısı gereği, b_{12} katsayısı daha büyük

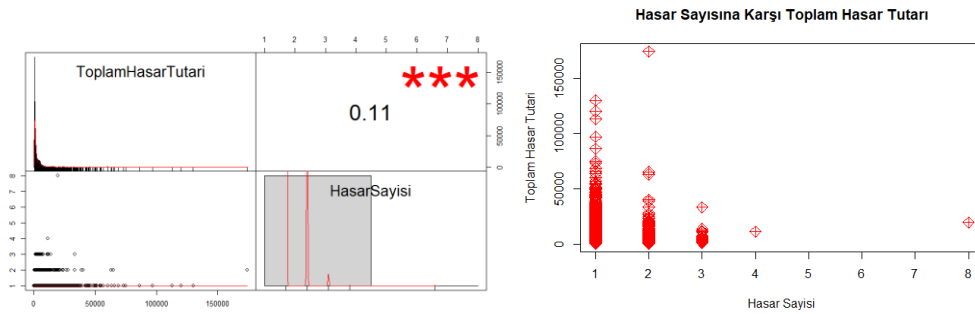
değerler aldığıında ilişki katsayısı da artmaktadır. Benzetim çalışmasında, kopulayı yeniden düzenlemede kullanılan fonksiyonun etkisi gözlenmiştir.

Benzetim çalışmasında elde edilen sonuçlar, gerçek veri analizinde karşılaşılabilecek hasar tutarı ve sayısı ilişki düzeyine göre bağımlılık modellenmesine ışık tutacaktır.

4.4. Gerçek Veri Analizi

4.4.1. Bireysel Veri için Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Gauss kopula fonksiyonunun kopula parametresi ilişki katsayısıdır, bu nedenle Gauss kopula ile bağımlılığın modellendiği çalışmalarda ilişki katsayısı bağımlılık için önemli bir göstergedir. Kastenmeier [9] ile Czado ve arkadaşları [2] çalışmalarında olduğu gibi Gauss kopula ile çalışılırken, bağımlılık direkt ilişki katsayısı ile ilişkilendirilebilir. Bireysel verideki hasar sayısı ile ortalama hasar tutarı ve toplam hasar tutarı arasındaki ilişkiler, Spearman ilişki katsayısı ile incelenmiş ve ilişki matrisleri elde edilmiştir. Ortalama hasar tutarı ile hasar sayısı arasında 0,077794 büyüklüğünde ters yönlü, düşük düzey ilişki vardır. Toplam hasar tutarı ile hasar sayısı arasında 0,106260 büyüklüğünde pozitif yönlü, düşük düzey ilişki vardır. 0,077794 büyüklüğünde bir ilişki nerdeyse ilişki yok şeklinde yorumlanabilir ve negatif ilişki katsayısı hayat dışı sigorta verilerindeki hasar tutarı ve sayısı ilişkisi için çok anlamlı değildir. Ayrıca 0,106260 ilişki düzeyi, benzetim çalışmasında kullanılan 0,15 düşük düzey ilişki katsayısına daha yakın olduğundan hasar tutarı değişkeni olarak toplam hasar tutarı alınmıştır. Bireysel veride hasar sayısına karşı hasar tutarı grafiği ile ilişki grafiği Şekil 4.11 ile verilmiştir.



Şekil 4.11. Bireysel veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki

Bireysel veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki oldukça düşük çıktığından, bireysel veri düşük ilişkili grup olarak alınmıştır. Bireysel verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile modellenmiş ve parçalı sözde-EÇO yöntemi ile parametre tahmini yapılmıştır. Parçalı sözde-EÇO algoritmasının başlangıç değerleri marjinal Gamma GDM ve marjinal Poisson GDM'nin parametre değerleri olarak alınmıştır. Gamma GDM ve Poisson GDM'nin parametre vektörleri sırasıyla,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_{1_1}, \alpha_{1_2}, \alpha_{1_3}, \alpha_{1_4}, \alpha_{1_5}, \alpha_{2_1}, \alpha_{2_2}, \alpha_{2_3}, \alpha_{2_4}, \alpha_{2_5}, \alpha_{3_1}, \alpha_{3_2}, \alpha_{3_3}, \alpha_{3_4}, \alpha_{4_1}, \alpha_{4_2}) \text{ ve}$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_{1_1}, \beta_{1_2}, \beta_{1_3}, \beta_{1_4}, \beta_{1_5}, \beta_{2_1}, \beta_{2_2}, \beta_{2_3}, \beta_{2_4}, \beta_{2_5}, \beta_{3_1}, \beta_{3_2}, \beta_{3_3}, \beta_{3_4}, \beta_{4_1}, \beta_{4_2})$$

biçimindedir. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ parametre vektörünün $(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ tahminlere ait HKO değerleri incelenmiştir. Marjinal GDM'ler yardımıyla Kesim 4.1'de bulunan parametrelerin başlangıç değerleri parantez içerisinde verilmiştir. $a_{12}=0,25$, $b_{12}=0,25$ ve $\rho=0,1063$ iken düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model ile bulunan parametre tahminlerine ilişkin HKO değerleri Çizelge 4.20 ve 4.21 ile aşağıdadır:

Çizelge 4.20. Bireysel veri için parçalı sözde-EÇO ile bulunan $HKO_{\hat{\alpha}}$ değerleri

α	Bağımsız		Sabit		Düzenlenmiş					
	$\rho_{12} = 0$		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$
α_0 (8,586)	8,49866	0,00777	8,49053	0,00927	8,47957	0,01150	8,49391	0,00863	8,49626	0,00820
α_{1_1} (-0,105)	-0,37787	0,07430	-0,39512	0,08400	-0,42778	0,10400	-0,38493	0,07820	-0,37062	0,07040
α_{1_2} (-0,171)	-0,39236	0,04890	-0,40639	0,05530	-0,43353	0,06880	-0,39817	0,05150	-0,38640	0,04630
α_{1_3} (-0,182)	-1,83752	2,74000	-1,94007	3,09000	-2,14437	3,85000	-1,87929	2,88000	-1,79158	2,59000
α_{1_4} (-0,240)	-0,30008	0,00358	-0,30389	0,00405	-0,31124	0,00504	-0,30165	0,00377	-0,29847	0,00339
α_{1_5} (-0,181)	-0,41918	0,05680	-0,44104	0,06770	-0,47119	0,08430	-0,43205	0,06310	-0,42559	0,05990
α_{2_1} (-0,310)	-2,23096	3,69000	-2,41002	4,41000	-2,65096	5,48000	-2,33487	4,10000	-2,28486	3,90000
α_{2_2} (-0,869)	-0,92088	0,00269	-0,92415	0,00304	-0,93049	0,00378	-0,92221	0,00283	-0,91941	0,00254
α_{2_3} (-1,445)	-1,51346	0,00464	-1,51773	0,00524	-1,52609	0,00652	-1,51520	0,00488	-1,51160	0,00439
α_{2_4} (0,203)	0,14801	0,00303	0,14449	0,00343	0,13779	0,00426	0,14658	0,00319	0,14949	0,00287
α_{2_5} (-1,032)	-1,07380	0,00173	-1,07648	0,00196	-1,08151	0,00243	-1,07487	0,00182	-1,07271	0,00164
α_{3_1} (-0,588)	-1,16042	0,32800	-1,19599	0,37000	-1,26668	0,46100	-1,17508	0,34500	-1,14449	0,31000
α_{3_2} (-0,414)	-1,03487	0,38600	-1,07388	0,43600	-1,14979	0,54200	-1,05076	0,40600	-1,01773	0,36500
α_{3_3} (0,513)	0,00705	0,25600	-0,02551	0,29000	-0,08699	0,36000	-0,00661	0,27000	0,02006	0,24300
α_{3_4} (-0,474)	-1,05323	0,33500	-1,08926	0,37800	-1,16073	0,47100	-1,06774	0,35200	-1,03747	0,31700
α_{4_1} (0,201)	-0,11980	0,10300	-0,14814	0,12200	-0,18873	0,15200	-0,13650	0,11400	-0,12749	0,10800
α_{4_2} (-0,168)	-0,66931	0,25100	-0,71603	0,30000	-0,77905	0,37300	-0,69651	0,27900	-0,68309	0,26500

Çizelge 4.21. Bireysel veri için parçalı sözde-EÇO ile bulunan $HKO_{\hat{\beta}}$ değerleri

β	Bağımsız		Sabit		Düzenlenmiş					
	$\rho_{12} = 0$		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$
β_0 (0,0806)	0.01408	0.00443	0.01227	0.00467	0.00368	0.00592	0.01357	0.00449	0.01424	0.00440
$\beta_{1.1}$ (-0,0034)	-0.20310	0.03988	-0.20904	0.04229	-0.23488	0.05358	-0.20512	0.04069	-0.20360	0.04008
$\beta_{1.2}$ (0,0025)	-0.15963	0.02629	-0.16445	0.02787	-0.18543	0.03532	-0.16127	0.02682	-0.16003	0.02642
$\beta_{1.3}$ (-0,0050)	-1.21344	1.46032	-1.24627	1.54074	-1.40225	1.95230	-1.22261	1.48258	-1.21047	1.45315
$\beta_{1.4}$ (-0,0043)	-0.05565	0.00264	-0.04992	0.00208	-0.04861	0.00196	-0.04905	0.00200	-0.04872	0.00197
$\beta_{1.5}$ (-0,0109)	-0.21948	0.04351	-0.19620	0.03434	-0.19085	0.03238	-0.19267	0.03304	-0.19130	0.03254
$\beta_{2.1}$ (-0,0138)	-1.47328	2.13009	-1.51663	2.25849	-1.70548	2.86177	-1.48799	2.17323	-1.47688	2.14061
$\beta_{2.2}$ (-0,0258)	-0.06397	0.00146	-0.06471	0.00151	-0.06961	0.00192	-0.06359	0.00143	-0.06368	0.00144
$\beta_{2.3}$ (-0,0634)	-0.11312	0.00247	-0.11461	0.00262	-0.12104	0.00332	-0.11363	0.00252	-0.11325	0.00249
$\beta_{2.4}$ (-0,0552)	-0.09530	0.00161	-0.09649	0.00171	-0.10168	0.00216	-0.09570	0.00164	-0.09540	0.00162
$\beta_{2.5}$ (-0,0388)	-0.06908	0.00092	-0.06998	0.00097	-0.07390	0.00123	-0.06939	0.00094	-0.06916	0.00092
$\beta_{3.1}$ (-0,0117)	-0.43900	0.18259	-0.44730	0.18975	-0.50204	0.24044	-0.43474	0.17896	-0.43578	0.17985
$\beta_{3.2}$ (-0,0088)	-0.46535	0.20844	-0.47776	0.21992	-0.53669	0.27866	-0.46882	0.21162	-0.46423	0.20742
$\beta_{3.3}$ (-0,0032)	-0.37677	0.13956	-0.38692	0.14724	-0.43514	0.18657	-0.37961	0.14168	-0.37585	0.13887
$\beta_{3.4}$ (-0,0072)	-0.43602	0.18389	-0.44436	0.19111	-0.49929	0.24215	-0.43175	0.18024	-0.43279	0.18113
$\beta_{4.1}$ (-0,0042)	-0.24567	0.05831	-0.25284	0.06182	-0.28408	0.07833	-0.24810	0.05949	-0.24626	0.05859
$\beta_{4.2}$ (-0,0002)	-0.37842	0.14305	-0.38870	0.15093	-0.43752	0.19125	-0.38129	0.14523	-0.37749	0.14235

Düşük ilişkili grubu temsil eden bireysel verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model ile modellenmiş ve parçalı sözde-EÇO ile model parametreleri tahmin edilmiştir.

Gamma GDM'nin parametre tahmin vektörü $\hat{\alpha}$ için HKO değerlerine göre ρ_{12}^{*3} düzenlenmiş ilişki katsayısı kullanıldığında daha düşük hatalar elde edilmektedir.

Poisson GDM'nin parametre tahmin vektörü $\hat{\beta}$ için HKO değerlerine göre düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı durumlarda, sabit ilişki katsayılı ve bağımsızlık durumlarına göre daha düşük hatalar elde edilmektedir. ρ_{12}^{*3} ilişki katsayısının kullanıldığı durumda, diğer iki fonksiyona göre daha düşük hatalar elde edilmiştir.

Düşük ilişkili grupla çalışıldığından, hem Gamma GDM hem de Poisson GDM parametrelerinin bazılarında bağımsızlık varsayımı altında en düşük HKO değeri gözlenmiştir.

Bireysel veri ile çalışıldığında hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki oldukça düşük çıkmıştır. Bu sorun sınıflanmış veri ile çalışma ihtiyacını güçlendirmektedir.

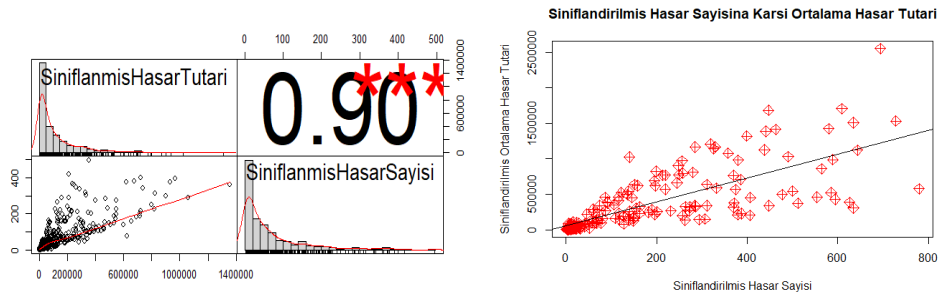
4.4.2. Sınıflanmış Veri için Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli

Bireysel veride hasar sayısının değer aralığının dar olduğuna Kesim 4.1'de değinilmiştir. Bu soruna çözüm getirmek amacıyla veri risk faktörlerine göre önsel sınıflandırma ile gruplandırılmış, ve R'da *aggregate*() fonksiyonu yardımıyla her bir risk sınıfındaki toplam hasar sayısı ve ortalama hasar tutarı hesaplanmıştır.

Kesim 4.1'de incelenen marginal GDM ve risk faktörlerine ait grafiklere göre sınıflandırmada da kullanılacak anlamlı değişken; hasarsızlık indirimi, aracın yaşı, hasar nedeni ve motor hacmi

olarak belirlenmiştir. Bu değişkenlere göre sınıflandırılmış sigorta portföyünde ortalama hasar tutarı ile hasar sayısı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Sınıflanmış hasar sayısı ile ortalama hasar tutarı arasındaki ilişki, Spearman ilişki katsayısı ile incelenmiş ve ilişki matrisi elde edilmiştir. İlişki matrislerine göre bulunan 0,8973219 değeri pozitif yönlü, yüksek düzey ilişkiyi göstermektedir ve bu ilişki benzetim çalışmasında kullanılan 0,85 yüksek düzey ilişki katsayısına yakındır. Sınıflanmış veride hasar sayısına karşı hasar tutarı grafiği ve ilişki grafiği Şekil 4.12 ile verilmiştir.



Şekil 4.12. Sınıflanmış veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki

Şekil 4.12'ye göre hasarsızlık indirimi, araç yaşı, hasar nedeni ve motor hacmine göre sınıflandırılmış bir sigorta portföyünde hasar tutarı ve hasar sayısı arasında pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki vardır.

Sınıflandırılmış veride hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişki yüksek çıktığından, sınıflanmış veri yüksek ilişkili grup olarak alınmıştır. Sınıflanmış verideki hasar sayısı ile hasar tutarı arasındaki ilişki düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile modellenmiş ve parçalı sözde-EÇO yöntemi ile parametre tahmini yapılmıştır. Parçalı sözde-EÇO algoritmasının başlangıç değerleri sınıflanmış veri için marjinal Gamma GDM ve marjinal Poisson GDM'nin parametre değerleri olarak alınmıştır. Benzetim çalışmasında ele alınan tüm (a_{12}, b_{12}) değerleri ile algoritma çalıştırılmıştır. Yüksek ilişkili grupla çalışıldığında en yüksek ilişki katsayısını verecek $(a_{12}=0,75; b_{12}=0,75)$ değerlerine ve $\rho=0,8791$ 'e göre hesaplanan parametre tahminlerine ilişkin HKO değerleri Çizelge 4.22 ve 4.23 ile verilmiştir.

Çizelge 4.22. Sınıflanmış veri için parçalı sözde-EÇO ile bulunan $HKO_{\hat{\alpha}}$ değerleri

α	Bağımsız		Sabit		Düzenlenmiş					
	$\rho_{12} = 0$		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$
α_0 (8,2789)	6,925837	1,830780	6,833520	2,089124	6,958137	1,744414	6,976716	1,695683	6,809488	2,159173
$\alpha_{1,1}$ (-0,6156)	-1,057039	0,194868	-1,087157	0,222366	-1,046500	0,185675	-1,094998	0,229822	-1,040439	0,180488
$\alpha_{1,2}$ (-0,7697)	-1,225199	0,207479	-1,256277	0,236757	-1,214326	0,197692	-1,264368	0,244696	-1,208071	0,192169
$\alpha_{1,3}$ (-0,5406)	-1,024848	0,234496	-1,057887	0,267586	-1,013288	0,223434	-1,066488	0,276558	-1,006639	0,217192
$\alpha_{1,4}$ (-0,4431)	-0,910814	0,218756	-0,942724	0,249624	-0,899648	0,208436	-0,951031	0,257994	-0,893226	0,202613
$\alpha_{1,5}$ (0,1751)	-0,295271	0,221249	-0,327364	0,252470	-0,284043	0,210812	-0,335719	0,260936	-0,277584	0,204923
$\alpha_{2,1}$ (1,4382)	0,962155	0,226619	0,929676	0,258597	0,973519	0,215928	0,980056	0,209896	0,921220	0,267268
$\alpha_{2,2}$ (1,1822)	0,712989	0,220159	0,680975	0,251227	0,724189	0,209774	0,730632	0,203914	0,672641	0,259650
$\alpha_{2,3}$ (0,2094)	-0,257988	0,218452	-0,289877	0,249278	-0,246830	0,208146	-0,240413	0,202332	-0,298179	0,257636
$\alpha_{2,4}$ (0,2402)	-0,233703	0,224584	-0,266036	0,256275	-0,222389	0,213989	-0,215882	0,208011	-0,274453	0,264868
$\alpha_{2,5}$ (1,2079)	0,744906	0,214363	0,713317	0,244612	0,755960	0,204250	0,762317	0,198544	0,705094	0,252814
$\alpha_{3,1}$ (2,0862)	1,644292	0,195283	1,614142	0,222839	1,654842	0,186070	1,606289	0,230315	1,660910	0,180872
$\alpha_{3,2}$ (2,4675)	2,049072	0,175082	2,017346	0,202639	2,059002	0,166871	2,009121	0,210111	2,066637	0,160691
$\alpha_{3,3}$ (2,8222)	2,428140	0,155283	2,360862	0,212833	2,440087	0,146010	2,374633	0,200316	2,447071	0,140722
$\alpha_{3,4}$ (0,0489)	-0,400118	0,201617	-0,430753	0,230067	-0,389398	0,192105	-0,438728	0,237781	-0,383233	0,186739
$\alpha_{4,1}$ (1,2665)	1,043792	0,049599	1,052166	0,045939	1,049109	0,047259	1,028599	0,056597	1,024643	0,058495
$\alpha_{4,2}$ (0,6907)	0,514348	0,031100	0,502315	0,035489	0,518558	0,029633	0,520980	0,028805	0,499182	0,036679

Çizelge 4.23. Sınıflanmış veri için parçalı sözde-EÇÖ ile bulunan $HKO_{\hat{\beta}}$ değerleri

β	Bağımsız		Sabit		Düzenlenmiş					
	$\rho_{12} = 0$		ρ_{12}		ρ_{12}^{*1}		ρ_{12}^{*2}		ρ_{12}^{*3}	
	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$
β_0 (1,5004)	1,383191	0,013738	0,780399	0,518402	1,477076	0,000544	1,375300	0,015650	1,272797	0,051803
β_{1_1} (-0,7440)	-0,754050	0,000101	-0,793990	0,002499	-0,764050	0,000402	-0,754149	0,000103	-0,750083	0,000037
β_{1_2} (-0,7061)	-0,716347	0,000105	-0,756923	0,002583	-0,726545	0,000418	-0,716444	0,000107	-0,715639	0,000091
β_{1_3} (-0,3702)	-0,380783	0,000112	-0,372200	0,000004	-0,422631	0,002749	-0,380830	0,000113	-0,391271	0,000444
β_{1_4} (-0,3294)	-0,339549	0,000103	-0,331132	0,000003	-0,379878	0,002548	-0,339647	0,000105	-0,349648	0,000410
β_{1_5} (0,1655)	0,155204	0,000106	0,114431	0,002608	0,159255	0,000039	0,155156	0,000107	0,145031	0,000419
β_{2_1} (0,5222)	0,503680	0,000343	0,427648	0,008940	0,485430	0,001352	0,503332	0,000356	0,518736	0,000012
β_{2_2} (0,4602)	0,441842	0,000337	0,366397	0,008799	0,423745	0,001329	0,441492	0,000350	0,455004	0,000027
β_{2_3} (0,1296)	0,111134	0,000341	0,035334	0,008886	0,092939	0,001344	0,110785	0,000354	0,120490	0,000083
β_{2_4} (0,5895)	0,570818	0,000349	0,494054	0,009110	0,585894	0,000013	0,570474	0,000362	0,552406	0,001376
β_{2_5} (0,1266)	0,108188	0,000339	0,032611	0,008834	0,090049	0,001336	0,107865	0,000351	0,117882	0,000076
β_{3_1} (1,5426)	1,459594	0,006890	0,996654	0,298057	1,525927	0,000278	1,452317	0,008151	1,381995	0,025794
β_{3_2} (2,5183)	2,435294	0,006890	1,972356	0,298055	2,501929	0,000268	2,426045	0,008511	2,361782	0,024498
β_{3_3} (2,7075)	2,631408	0,005790	2,266958	0,194077	2,691438	0,000258	2,616155	0,008344	2,544678	0,026511
β_{3_4} (-1,0368)	-1,119462	0,006833	-1,580835	0,295974	-1,053413	0,000276	-1,126728	0,008087	-1,195797	0,025280
β_{4_1} (1,1497)	1,137210	0,000156	1,086637	0,003977	1,124840	0,000618	1,137051	0,000160	1,140480	0,000085
β_{4_2} (0,3508)	0,339442	0,000129	0,293599	0,003272	0,328507	0,000497	0,339486	0,000128	0,343944	0,000047

Yüksek ilişkili grubu temsil eden sınıflanmış verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model ile modellenmiş ve parçalı sözde-EÇO ile model parametreleri tahmin edilmiştir. Gamma GDM'nin parametre tahmin vektörü $\hat{\alpha}$ 'ya ait HKO değerlerine göre ρ_{12}^{*2} ve ρ_{12}^{*3} düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı durumlarda daha düşük hatalar elde edilmiştir. Poisson GDM'nin parametre tahmin vektörü $\hat{\beta}$ 'ya ait HKO değerlerine göre düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı durumlarda sabit ilişki katsayılı ve bağımsızlık durumlarına göre daha düşük hatalar bulunmuştur. ρ_{12}^{*1} ve ρ_{12}^{*3} düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı durumlarda da hatalar daha düşüktür. ρ_{12}^{*3} düzenlenmiş ilişki katsayısı ile her iki parametre vektörünün tahmininde sayıca daha fazla düşük HKO değeri gözlenmiş ve gerçeğe daha yakın tahmin elde edilmiştir. Yüksek ilişkili grupla çalışıldığından, hem Gamma GDM hem de Poisson GDM için en düşük HKO değeri bağımsızlık varsayımı altında gözlenmemiştir.

Gerçek veri analizi ile elde edilen sonuçlar, benzetim çalışmasında düşük ve yüksek ilişkili grup için elde edilen sonuçları desteklemektedir. Gamma GDM parametreleri, Poisson GDM parametrelerine göre hangi fonksiyonun daha düşük hataya sahip olacağı konusunda daha belirleyicidir.

Önerilen yeni model yardımıyla, literatürde bulunan kopula regresyon modellerine iki açıdan katkı sağlanmıştır. Birinci katkı, sözde-gözlemlerin kullanıldığı sözde-kopulalarla, gerçek veriye daha yakın tahminlerin sağlanmasıdır. İkinci katkı ise, düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı düzenlenmiş sözde-kopulalarla verideki bağımlılık durumuna uygun fonksiyonun kullanılmasıyla, daha esnek bir bağımlılık modellenmesinin sunulmasıdır. Yapılan iki yönlü katkıyı görmek ve önerilen modelin, literatürde var olan kopula regresyon modele göre daha iyi bir model olduğunu göstermek için, yüksek ilişkili portföyde hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık, her iki model ile modellenmiştir. Kopula regresyon modeli için $\rho_{12}=0,8973$ alınmış ve düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinde $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ iken ρ_{12}^{*3} 'e göre düzenleme yapılmıştır. İki modele göre parametre tahminleri ve tahminlere ait HKO'ları Çizelge 4.24 ile verilmiştir.

Çizelge 4.24. Kopula regresyon ve düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model sonuçları

Kopula Regresyon Modeli			Düzenlenmiş Sözde-Kopula Regresyon Modeli	
α	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\alpha}$	$HKO_{\hat{\alpha}}$
α_0 (8,2789)	6,821797	2,123148	6,809488	2,159173
$\alpha_{1,1}$ (-0,6156)	-1,090982	0,225988	-1,040439	0,180488
$\alpha_{1,2}$ (-0,7697)	-1,260223	0,240613	-1,208071	0,192169
$\alpha_{1,3}$ (-0,5406)	-1,062083	0,271944	-1,006639	0,217192
$\alpha_{1,4}$ (-0,4431)	-0,946776	0,253690	-0,893226	0,202613
$\alpha_{1,5}$ (0,1751)	-0,331439	0,256582	-0,277584	0,204923
$\alpha_{2,1}$ (1,4382)	0,915889	0,272809	0,921220	0,267268
$\alpha_{2,2}$ (1,1822)	0,667110	0,265318	0,672641	0,259650
$\alpha_{2,3}$ (0,2094)	-0,303764	0,263337	-0,298179	0,257636
$\alpha_{2,4}$ (0,2402)	-0,279847	0,270449	-0,274453	0,264868
$\alpha_{2,5}$ (1,2079)	0,709307	0,248595	0,705094	0,252814
$\alpha_{3,1}$ (2,0862)	1,610312	0,226469	1,660910	0,180872
$\alpha_{3,2}$ (2,4675)	1,969032	0,248470	2,066637	0,160691
$\alpha_{3,3}$ (2,8222)	2,356839	0,216561	2,447071	0,140722
$\alpha_{3,4}$ (0,0489)	-0,434643	0,233814	-0,383233	0,186739
$\alpha_{4,1}$ (1,2665)	1,026669	0,057519	1,024643	0,058495
$\alpha_{4,2}$ (0,6907)	0,500787	0,036067	0,499182	0,036679
β	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$	$HKO_{\hat{\beta}}$
β_0 (1,5004)	1,283506	0,047043	1,272797	0,051803
$\beta_{1,1}$ (-0,7440)	-0,763079	0,000364	-0,750083	0,000037
$\beta_{1,2}$ (-0,7061)	-0,725516	0,000377	-0,715639	0,000091
$\beta_{1,3}$ (-0,3702)	-0,391437	0,000451	-0,391271	0,000444
$\beta_{1,4}$ (-0,3294)	-0,351103	0,000471	-0,349648	0,000410
$\beta_{1,5}$ (0,1655)	0,146032	0,000379	0,145031	0,000419
$\beta_{2,1}$ (0,5222)	0,487229	0,001223	0,518736	0,000012
$\beta_{2,2}$ (0,4602)	0,425530	0,001202	0,455004	0,000027
$\beta_{2,3}$ (0,1296)	0,094743	0,001215	0,120490	0,000083
$\beta_{2,4}$ (0,5895)	0,554215	0,001245	0,552406	0,001376
$\beta_{2,5}$ (0,1266)	0,091844	0,001208	0,117882	0,000076
$\beta_{3,1}$ (1,5426)	1,390308	0,023193	1,381995	0,025794
$\beta_{3,2}$ (2,5183)	2,349946	0,028343	2,361782	0,024498
$\beta_{3,3}$ (2,7075)	2,542597	0,027193	2,544678	0,026511
$\beta_{3,4}$ (-1,0368)	-1,188454	0,022999	-1,195797	0,025280
$\beta_{4,1}$ (1,1497)	1,126057	0,000559	1,140480	0,000085
$\beta_{4,2}$ (0,3508)	0,329634	0,000448	0,343944	0,000047

Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin kullanıldığı durumda $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ tahminlerinin daha düşük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Hayat dışı sigorta hesaplamalarında, gerçeğe daha yakın tahminler elde etmek için hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık modellenerek hesaplamalara dâhil edilmelidir. Bu amaçla kullanılan yaklaşımlardan biri, marjinal GDM'ler ile Gauss kopula fonksiyonunun kombinasyonundan oluşan kopula regresyon modelidir.

Bu tez çalışmasında hayat dışı sigortalarda hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık farklı risk grupları için analiz edilmiş ve bağımlılık modellenmesinde kullanılan yöntemler belirli düzenlemelerle geliştirilmiştir. Hasar tutarı ve sayısı için oluşturulmuş marjinal Gamma ve Poisson GDM'ler, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonları ile birlikte ele alınarak, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen yeni modelle, var olan kopula regresyon modeline iki açıdan katkı sağlanmıştır. Sözde-gözlemlerin kullanıldığı sözde-kopulalarla gerçek veriye daha yakın tahminler elde edilmiş ve düzenlenmiş ilişki katsayılarının kullanıldığı, düzenlenmiş sözde-kopulalarla ise hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık durumuna göre esnek bir bağımlılık modellenmesi sunulmuştur.

Önerilen model, hem benzetim hem de gerçek veri analizi ile test edilmiştir. Benzetim çalışmasında hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın düşük, orta ve yüksek düzeyde olduğu portföyler için farklı senaryolar altında, sözde-kopula fonksiyonu üzerinde yapılan düzenlemenin etkinliği test edilmiştir. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli için üç farklı fonksiyon ele alınmış ve hasar tutarı ile sayısı arasındaki ilişkiye göre hangi fonksiyonun daha iyi olduğu yorumlanmıştır.

SBM'den alınan veri yardımıyla yapılan gerçek veri analizi ile farklı hasar tutarı ve sayısı ilişkisine sahip sigorta portföylerinde, hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılık düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile modellenmiştir. Bireysel veri düşük ilişkili portföy, sınıflanmış veri ise yüksek ilişkili portföy olarak ele alınmıştır. Parametre tahmininde, PMA geliştirilerek elde edilen parçalı sözde-EÇO yönteminden yararlanılmıştır. Bağımsızlık varsayımı altında ve bağımlılığın dikkate alındığı durumda

farklı düzenlemelere göre parametre tahminlerinin HKO değerleri hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model ile tahmin edilen parametrelerin, sabit ilişki katsayısının kullanıldığı model ve bağımsızlık varsayımı altındaki model ile bulunan parametre tahminlerine göre daha düşük HKO değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Son olarak, var olan standart kopula regresyon modele yapılan iki yönlü katkıyı görmek için kopula regresyon modeli ile düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli karşılaştırılmış ve önerilen modelin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bu çalışma birçok yönden geliştirilmeye açıktır:

- Bu çalışmada kopula fonksiyonunun yeniden düzenlenmesi, hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiye göre gruplandırılarak yapılmıştır. Risk faktörleri arasındaki ilişkilere, mekânsal bağımlılığa, risk büyüklüğüne ya da hasar nedenleri arasındaki bağımlılığa göre sınıflandırmalar yapılarak, bağımlılık modellemesi yapılabilir.
- Model düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu ile kurulmuştur. Farklı kopula fonksiyonları ile yeni kopula regresyon modellerinin kurulup kurulamayacağı araştırılabilir.
- Temel bir model kurmak amacıyla hasar tutarı ve sayısı için sırasıyla Gamma ve Poisson dağılım varsayımı kullanılmış, Gamma GDM ve Poisson GDM ile çalışılmıştır. Farklı dağılım ve GDM'lerle modellemeler araştırılabilir.
- Song ve arkadaşlarının [54] çalışmasına istinaden, parçalı EÇO ile bulunan tahmin edicilerin yansız, tutarlı ve asimptotik olarak normal dağılımlı olduğu varsayılmıştır. Önerilen model ile bulunan parçalı sözde-EÇO tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenebilir.
- Bu çalışmada hasar tutarı ile sayısı arasında pozitif ilişkinin olduğu durumlar incelenmiştir. Doğal afet sigortaları kapsamında, düşük tutarlı çok sayıda (örneğin düşük ölçekli çok fazla deprem meydana gelmesi) ve yüksek tutarlı az sayıda (örneğin yüksek ölçekli az sayıda deprem meydana gelmesi) hasar getiren poliçelerde hasar tutarı ile sayısı arasında negatif ilişki bulunabilir. Hasar tutarı ile sayısı arasında negatif ilişkinin bulunduğu durumlar için yeni bir kopula regresyon model kurulup kurulamayacağı araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] F. Lundberg, Approximerad Framställning Afsannolikhetsfunktionen, II. Aterförsakrin Af Kollektivrisker, Doctoral Dissertation, Uppsala: Almqvist&Wiksell's Boktr., **1903**.
- [2] C. Czado, R. Kastenmeier, E.C. Brechmann and A. Min, A Mixed Copula Model for Insurance Claims and Claim Sizes, Scandinavian Actuarial Journal, 4 (**2012**) 278.
- [3] A. Sklar, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris, 8 (**1959**) 229.
- [4] E. Frees and E. Valdez, Understanding Relationships Using Copulas, North American Actuarial Journal, 2 (**1998**) 1.
- [5] E. S. Sarıdaş, Bağımlı Yaşam Sürelerinin Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2012**.
- [6] Ö. Bakar, Bağımlı Çoklu Hayat Anüitelerinde Uzun Ömürlülük Riskinin Stokastik Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2018**.
- [7] L. Hua, Tail Negative Dependence and Its Applications for Aggregate Loss Modeling. Insurance: Mathematics and Economics, 61 (**2015**) 135.
- [8] A. Şentürk Acar, Sağlık Sigortalarında Toplam Hasar Üzerinde Heterojenliğin Etkisi, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2016**.
- [9] R. Kastenmeier, Joint Regression Analysis of Insurance Claims and Claim Sizes, Diploma Thesis, Technische Universität München, Mathematical Sciences, **2008**.
- [10] N. Krämer, E. C. Brechmann, D. Silvestrini and C. Czado, Total Loss Estimation Using Copula-Based Regression Models, Insurance: Mathematics and Economics, 53 (**2013**) 829.
- [11] K. Wang, A. H. Lee, K. K. W. Yau and P. J. W. Carrivick, A Semisupervised Regression Model for Mixed Numerical and Categorical Variables, Accident Analysis and Prevention, 35 (4) (**2003**) 625.
- [12] L. Madsen and Y. Fang, Joint Regression Analysis for Discrete Longitudinal Data. Biometrics, 67(3) (**2011**) 1171.
- [13] E. W. Frees and E. A. Valdez, Hierarchical Insurance Claims Modelling, Journal of the American Actuarial Journal, 5 (**2008**) 41.
- [14] L. Bermúdez and D. Karlis, Bayesian multivariate Poisson models for insurance ratemaking. Insurance: Mathematics and Economics, 48(2) (**2011**) 226.

- [15] J. Ren, A Multivariate Aggregate Loss Model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 51, (2012) 402.
- [16] J. D. Cummins and L. J. Wiltbank, Estimating The Total Claims Distribution Using Multivariate Frequency and Severity Distributions, *Journal of Risk and Insurance*, 50(3) (1983) 377.
- [17] E. W. Frees, G. Myers and C. David, Dependent Multi-peril Ratemaking Models, *Astin Bulletin*, 40 (2010) 699.
- [18] M. Ayuso, L. Bermúdez and M. Santolino, Copula-Based Regression Modeling of Bivariate Severity of Temporary Disability And Permanent Motor Injuries, *Accident Analysis & Prevention*, 89 (2016) 142.
- [19] Y. Fang, A Bayesian Approach to Inference and Prediction for Spatially Correlated Count Data Based on Gaussian Copula Model, *International Journal of Applied Mathematics*, 44(3) (2014) 126.
- [20] P. Shi and K. Shi, Territorial Risk Classification Using Spatially Dependent Frequency-Severity Models, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 47(2) (2017) 437.
- [21] G. Pettere and T. Kollo, Modelling Claim Size in Time via Copulas, in *Transactions of 28th International Congress of Actuaries*, 2006.
- [22] P. Weke and C. Ratemo, Estimating IBNR Claims Reserves for General Insurance Using Archimedean Copulas, *Applied Mathematical Sciences*, 7(25) (2013) 1223.
- [23] E. Usta, Risk Premium Estimation in MTPL Insurance Using Copula: Turkey Case, Master of Science Thesis, The Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University, Ankara, 2016.
- [24] E. Usta, The Estimation of IBNR Reserve Using Copula, *Journal of Insurance Research*, 12(10) (2016) 3.
- [25] E. Kole, K. Koedijk and M. Verbeek, Selecting Copulas for Risk Management, *Journal of Banking & Finance*, 31(8) (2007) 2405.
- [26] B. Z. Karagül, Hayat Dışı Sigortalarda Doğrusal Olmayan Bağımlılığın Kopulalar ile Dinamik Finansal Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Yüksek Lisans Tezi, 2013.
- [27] U. Karabey, Importance of Modelling the Dependence for Risk Capital Allocation, *Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences*, 8(1), (2015) 1.
- [28] A. J. Patton, Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, UCSD Discussion Paper No. 01-09, SSRN, 2001.
- [29] A. J. Patton, Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, *International Economic Review*, 47(2) (2006) 527.
- [30] J. D. Fermanian and M. Wegkamp, Time Dependent Copulas. Preprint INSEE, Paris, France, 2004.

- [31] J. D. Fermanian and M. Wegkamp, Time-Dependent Copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 110 (2012) 19.
- [32] Y. Fang, Extensions to Gaussian Copula Models, Doctoral Dissertation, Oregon State University, 2012.
- [33] Y. Fang and L. Madsen, Modified Gaussian Pseudo-Copula: Application in Insurance and Finance, *Insurance: Mathematics and Economics*, 53 (2013) 292.
- [34] Y. Fang, L. Madsen, and L. Liu, Comparison of Two Methods to Check Copula Fitting, *International Journal of Applied Mathematics*, 44(1), (2014).
- [35] M. A. Boateng, A. Y. Omari-Sasu, R. K. Avuglah and N. K. Frempong, On Two Random Variables and Archimedean Copulas, *International Journal of Statistics and Applications*, 7(4) (2017) 228.
- [36] S. Anastasiadis and S. Chukova, Multivariate Insurance Models: An Overview, *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1) (2012) 222.
- [37] C. Baumgartner, L. F. Gruber and C. Czado, Bayesian Total Loss Estimation Using Shared Random Effects, *Insurance: Mathematics and Economics*, 62 (2015) 194.
- [38] H. Arvidsson and S. Francke, Dependence in Non Life Insurance, UUDM Project Report, 2007.
- [39] L. Berry, Hybrid Hidden Markov Model and Generalized Linear Model for Auto Insurance Premiums, Doctoral dissertation, Concordia University, 2016.
- [40] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer Science & Business Media, Portland, Oregon, USA, 2006.
- [41] N. Kolev and D. Paiva, Copula-Based Regression Models: A Survey, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11) (2009) 3847.
- [42] M. Goff, *Multivariate Discrete Phase-type Distributions with their Applications*, Academic Press, Department of Mathematics Washington State University, Pullman, 2001.
- [43] A. H. Zadeh and M. Bilodeau, Fitting Bivariate Losses with Phase-Type Distributions, *Scandinavian Actuarial Journal*, (4) (2013) 241.
- [44] S. Eryılmaz, On Compound Sums Under Dependency, *Insurance: Mathematics and economics*, 72 (2017) 228.
- [45] S. Gschlößl and C. Czado, Spatial Modeling of Claim Frequency and Claim Size in Non-life Insurance, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007 (3) (2007) 202.
- [46] J. Schulz, Generalized Linear Models for A Dependent Aggregate Claims Model, Master Thesis, Concordia University, Montreal, Canada, 2013.
- [47] J. Garrido, C. Genest and J. Schulz, Generalized Linear Models for Dependent Frequency and Severity of Insurance Claims, *Insurance: Mathematics and Economics*, 70 (2016) 205.

- [48] H. Jeong, E. A. Valdez, J. Y. Ahn and S. Park, Generalized Linear Mixed Models for Dependent Compound Risk Models, papers.ssrn.com, **2017**.
- [49] W. Lee, S. C. Park and J. Y. Ahn, Investigating Dependence Between Frequency and Severity Via Simple Generalized Linear Models, Journal of the Korean Statistical Society, 48(1) (**2018**) 13.
- [50] P. Shi, X. Feng and J. P. Boucher, Multilevel Modeling of Insurance Claims Using Copulas, The Annals of Applied Statistics, 10 (2) (**2016**) 834.
- [51] P. X.-K Song, M. Li and Y. Yuan, Joint Regression Analysis of Correlated Data Using Gaussian Copulas, Biometrics, 65(1) (**2009**) 60.
- [52] R. A. Parsa and S. A. Klugman, Copula Regression, Variance Advancing and Science of Risks, 5 (**2011**) 45.
- [53] P. Song, Multivariate Dispersion Models Generated From Gaussian Copula, Scandinavian Journal of Statistics, 27(2) (**2000**) 305.
- [54] P. X.-K. Song, Y. Fan and J. D. Kalbfleisch, Maximization By Parts in Likelihood Inference. Journal of the American Statistical Association, 100(472) (**2005**) 1145.
- [55] P. X.-K. Song, Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics, And Applications. Springer Science & Business Media, Ontario, Canada, **2007**.
- [56] O. A. Q. Xacur and J. Garrido, Generalised Linear Models for Aggregate Claims: To Tweedie or Not?, European Actuarial Journal, 5(1) (**2015**) 181.
- [57] E. W. Frees, G. Lee and L. Yang, Multivariate frequency-severity regression models in insurance, Risks, 4(1) (**2016**) 4.
- [58] L. Hua, Tail Negative Dependence and Its Applications for Aggregate Loss Modeling. Insurance: Mathematics and Economics, 61 (**2015**) 135.
- [59] A. Wolny-Dominiak, The Copula-Based Total Claim Amount Regression Model with an Unobserved Risk Factor, Przegląd Statystyczny, 63(3) (**2016**) 309.
- [60] O. Vermassen, Flexible Modeling of Frequency and Severity Data, Master of Statistical Data Analysis, Faculty of Science, Universiteit Gent, **2017**.
- [61] P. De Jong and G. Z. Heller, Generalized Linear Models for Insurance Data, Cambridge University Press, London, **2008**.
- [62] Y. K. Tse, Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation, Cambridge University Press, **2009**.
- [63] Czado, C., Lecture Slides on Gamma Regression, **2004**, <https://www.groups.ma.tum.de/fileadmin/w00ccg/statistics/czado/lec8.pdf> (Erişim Tarihi: **4 Ağustos 2020**).
- [64] P. McCullagh and J. A. Nelder, Generalized Linear Models (Vol. 37). CRC press, **1989**.

- [65] D. Brigo, A. Pallavicini and R. Torresetti, *Credit Models and The Crisis: A Journey Into Cdos, Copulas, Correlations And Dynamic Models*. John Wiley & Sons, **2010**.
- [66] G. Masarotto and C. Varin, *Gaussian Copula Regression in R*, *Journal of Statistical Software*, 77 (8), (**2017**).
- [67] U. Cherubini, S. Mulinacci, F. Gobbi and S. Romagnoli, *Dynamic Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, **2011**.
- [68] D. X. Li, *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, *Journal of Fixed Income*, 9 (4) (**2000**) 43.
- [69] Z. S. Ouyang, H. Liao and X. Q. Yang, *Modeling Dependence Based on Mixture Copulas and Its Application in Risk Management*. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 24(4) (**2009**) 393.
- [70] B. Jørgensen, *Exponential Dispersion Models*, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 49(2) (**1987**) 127.
- [71] B. Jørgensen, *The Theory of Dispersion Models*, CRC Press, **1997**.
- [72] D. D. Wackerly, W. Mendenhall and R. L. Scheaffer, *Mathematical Statistics with Applications*, 7th edition, Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA, **2008**.
- [73] I. Kojadinovic, I. and J. Yan, *Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using The Copula R Package*, *Journal of Statistical Software*, 34(9) (**2010**) 1.
- [74] R. N. Mortensen, *Pseudo-Observations in Survival Analysis*, Master of Science Thesis, Aalborg University, **2013**.
- [75] K. Antonio and J. Beirlant, *Risk Classification in Non-Life Insurance*, *Proceedings of the 4th Actuarial and Finance Mathematics Day*, Brussels, **2006**.
- [76] F. Pechon, J. Trufin and M. Denuit, *Preliminary Selection Of Risk Factors in P&C Ratemaking*, *Variance Journal*, (**2017**).
- [77] P. Murrell, *R graphics*. CRC Press, London, United Kingdom, **2006**.
- [78] W. N. Venables and D. M. Smith, *An introduction to R*, Core Team, **2008**.
- [79] Ö. İlk, *R Yazılımına Giriş*, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş. Yayınları, ODTÜ Yayıncılık, Ankara, **2011**.
- [80] N. Gürsakal, *R ile Betimsel İstatistik*, DORA Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti, Bursa, **2015**.
- [81] W. J. Braun and D. J. Murdoch, *A First Course in Statistical Programming with R*, Cambridge University Press, **2016**.
- [82] İ. Arslan, *R ile İstatistiksel Programlama*, Pusula 20 Teknoloji ve Yayıncılık A.Ş., İstanbul, **2017**.

- [83] J. Yan, Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula, Journal of Statistical Software, 21(4) (2007) 1.
- [84] M. Hofert, I. Kojadinovic, M. Maechler, J. Yan, M. M. Maechler and M. A. S. S. Suggests, Package ‘copula’. URL <http://ie.archive.ubuntu.com/disk1/disk1/cran.r-project.org/web/packages/copula/copula.Pdf>, 2014.
- [85] N. Krämer and D. Silvestrini, Package ‘CopulaRegression’, 2013.
- [86] U. Schepsmeier, J. Stoeber, E. C. Brechmann, B. Graeler, T. Nagler and T. Erhardt, VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas, R package version 1, 2012.
- [87] B. Ripley, B. Venables, D. M. Bates, K. Hornik, A. Gebhardt, D. Firth and M. B. Ripley, Package ‘mass’. Cran R, 2013.
- [88] H. Wickham, ggplot2, Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 3(2) (2011) 180.
- [89] D. Sarkar, Package ‘lattice’, 2018.
- [90] D. Bates, M. Maechler, B. Bolker and S. Walker, lme4: Linear Mixed-Effects Models Using Eigen and S4, R package version, 1(7) 2014 1.
- [91] S. Jackman, A. Tahk, A. Zeileis, C. Maimone, J. Fearon, Z. Meers ,... and M. A. S. S. Imports, Package ‘pscl’. See <http://github.com/atahk/pscl>, 2017.
- [92] U. Ligges and M. Mächler, Scatterplot3d-an R Package for Visualizing Multivariate Data, No. 2002 (22), Technical Report, SFB 475: Komplexitätsreduktion in Multivariaten Datenstrukturen, Universität Dortmund, 2002.
- [93] U. Ligges and M. Mächler, “scatterplot3d – An R Package for Visualizing Multivariate Data.” Journal of Statistical Software, 8(11) 2003 1.
- [94] C. Brown and M. C. Brown, Package ‘dummies’, 2012.
- [95] B. G. Peterson, P. Carl, K. Boudt, R. Bennett, J. Ulrich, E. Zivot, ... and D. Wuertz, Package ‘PerformanceAnalytics’. R Team Cooperation, 2018.
- [96] Anonim, optim function, General Purpose of Optimization, <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.1/topics/optim>, (Erişim tarihi: 11 Kasım 2019)
- [97] Anonim, General Purpose of Optimization, <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/optim.html>, (Erişim tarihi: 03 Ocak 2020)
- [98] I. Kojadinovic and J. Yan, A Goodness-Of-Fit Test for Multivariate Multiparameter Copulas Based on Multiplier Central Limit Theorems, Statistics and Computing, 21(1) (2011) 17.
- [99] Steorts, R. C., Visualizing the Multivariate Normal, Lecture 9, 2015, http://www2.stat.duke.edu/~rcs46/lectures_2015/02-multivar2/02-multivar2.pdf, (Erişim tarihi: 18 Şubat 2020).

EKLER

EK 1 – Düzenlenmiş Sözde-Kopula Fonksiyonun Özellikleri

$PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ eşitliğinde q_{i1} ve q_{i2} normal skorlarının $\Phi^{-1}(u_{i1})$ ve $\Phi^{-1}(u_{i2})$ değerlerine eşit olduğu bilgisiyle, değişkenler y ve z olarak değiştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}^* \\ \rho_{12}^* & 1 \end{bmatrix}$$

- Özellik:** u_{i1} veya u_{i2} değerlerinden herhangi biri 0 olduğunda $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ kopula fonksiyonu 0 değerini alır.

$$u_{i1} = 0$$

$$PC(0, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^0 \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz = \frac{1}{N} * 0 = 0$$

$$u_{i2} = 0$$

$$PC(u_{i1}, 0 | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} \int_0^0 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} 0 dz = \frac{1}{N} * 0 = 0$$

Birinci özellik sağlandı.

- Özellik:** u_{i1} ve u_{i2} değerlerinden ikisi de 1 olduğunda $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ kopula fonksiyonunu 1 değerini alır.

$$u_{i1} = 1 \text{ ve } u_{i2} = 1$$

$$PC(1,1|\Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$ biçiminde aslında bu özelliği sağlayacak biçimde tanımlandığından,

$$PC(1,1|\Gamma^*) = \frac{1}{N} * N = 1$$

İkinci özellik sağlandı.

3. Özellik: Kopula hacmi $V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]}$ 0'a eşit veya büyüktür.

N ve dolayısıyla $\frac{1}{N}$ pozitif değerlidir.

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]} = \frac{1}{N} \int_{u_{i1}}^{v_{i1}} \int_{u_{i2}}^{v_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} > 0$$

$$\frac{1}{N} > 0$$

İntegralin içindeki tüm değerler pozitif değerlidir.

$$0 \leq \phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*) \leq 1 \text{ (iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$0 \leq \phi(\Phi^{-1}(y)) \leq 1 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$0 \leq \phi(\Phi^{-1}(z)) \leq 1 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z)) > 0 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

İntegrali oluşturan tüm değerler 0 veya 0'dan büyük olduğundan kopula hacmi 0 veya 0'dan büyüktür.

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]} \geq 0$$

Üçüncü özellik sağlandı.

İki değişkenli durumla ilgili özel bir durum söz konusudur. İki değişkenli kopula fonksiyonunda kopula hacmi $0 \leq u_{i1} < u_{i2} \leq 1$ ve $0 \leq v_{i1} < v_{i2} \leq 1$ olmak üzere,

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}] \times [u_{i2}, v_{i2}]} = C(u_{i2}, v_{i2}) - C(u_{i1}, v_{i2}) - C(u_{i2}, v_{i1}) + C(u_{i1}, v_{i1})$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu fonksiyon, $[u_{i1}, v_{i1}] \times [u_{i2}, v_{i2}]$ bölgesinde,

$P(u_{i1} \leq u \leq u_{i2}, v_{i1} \leq v \leq v_{i2})$ bir dağılım fonksiyonudur. Bir dağılım fonksiyonu olduğu için $P(u_{i1} \leq u \leq u_{i2}, v_{i1} \leq v \leq v_{i2}) \geq 0$ 'dır. Diğer bir ifade ile, $V_{[u_{i1}, v_{i1}] \times [u_{i2}, v_{i2}]} \geq 0$ olur ve üçüncü özelliğin de sağlandığı görülür.

EK 2 – Skor Eşitlikleri

1. $l_{bağımsız}(\theta_1)$ için Skor Eşitlikleri

$$\frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)} \frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Toplamın içindeki ifade $\frac{\partial \mu_i}{\partial \mu_i}$ ile çarpılırsa, diğer bir ifade ile $\partial \mu_i$ ile çarpılıp bölünürse eşitlik bozulmaz.

$$\frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)} \frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha} \quad (1)$$

$\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)}{\partial \alpha}$ ve $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$ kısmi türevleri aşağıda ayrı ayrı açılmıştır.

$$\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, \nu_i^2)}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right) \right]$$

μ_i 'den bağımsız olan ifadeler türev dışına alınıp, $\left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}}$ ve $\exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)$ çarpımının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left[\frac{1}{\nu_i^2} \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}-1} \left(-\frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 \nu_i^2}\right) \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right) \left(\frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 \nu_i^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left[\left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right) \left(\frac{-1}{\mu_i \nu_i^2}\right) + \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right) \left(\frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 \nu_i^2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\left(\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i \nu_i^2}\right)$ ortak paranteze alınırsa,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left[\left(\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)^{\frac{1}{v_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right) \left(\frac{-1}{\mu_i v_i^2} + \frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 v_i^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left[\left(\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)^{\frac{1}{v_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right) \left(\frac{1}{v_i^2} \frac{\mu_i v_i^2}{x_{i1}} \frac{-x_{i1}}{(\mu_i)^2 v_i^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)^{\frac{1}{v_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right) \left(\frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 v_i^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{-1}{\mu_i v_i^2} + \frac{x_{i1}}{(\mu_i)^2 v_i^2}\right)$ ifadesinde paydalar eşitlenirse,

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)^{\frac{1}{v_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right) \left(\frac{x_{i1} - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2}\right)$$

eşitliği elde edilir. $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)} \frac{1}{x_{i1}} \left(\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)^{\frac{1}{v_i^2}} \exp\left(-\frac{x_{i1}}{\mu_i v_i^2}\right)$ ifadesi ortalama parametrelendirmesine

göre, parametreleri μ_i ve v_i^2 olan Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2)}{\partial \mu_i} = f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2) \frac{x_{i1} - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2} \quad (2)$$

elde edilir. Birinci kısmı türev Eş. (1) ile elde edilmiştir. Diğer kısmı türev $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$ 'in çözümü Gamma GDM tanımı kullanılarak Eş. (3) ile aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial e^{z'_{i1} \alpha}}{\partial \alpha} = e^{z'_{i1} \alpha} z'_{i1} = \mu_i z'_{i1} \quad (3)$$

$\frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \alpha}$ skor eşitliğini elde etmek için Eş. (2) ve Eş. (3) ile elde edilen kısmi türevler,

Eş. (1)'de yerine konulursa,

$$\frac{\partial l_{bağımsız}(\theta_1)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2)} f_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2) \frac{x_{i1} - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2} \mu_i z'_{i1}$$

elde edilir ve sadeleştirme işlemlerinden sonra, $l_{bağımsız}(\theta_1)$ ana skor eşitliği Eş. (4) ile elde edilir.

$$\frac{\partial l_{bağımsız}(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{v_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1} - \mu_i}{\mu_i} \mathbf{z}'_{i1} \quad (4)$$

Gamma dağılımı μ_i ve v_i^2 olmak üzere iki parametrelidir. v_i^2 parametresi model tanımlanırken sabit olarak varsayıldığından $\frac{\partial v_i}{\partial v_i}$ ile $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{x_1}(x_{i1}|\mu_i, v_i^2)}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ gibi bir ara işleme ihtiyaç duyulmamıştır. Eğer v_i^2 sabit varsayılmasaydı, kısmi türevlerin çözümünde v_i^2 parametresinin, $\Gamma\left(\frac{1}{v_i^2}\right)$ şeklinde gamma fonksiyonunun içinde bulunması hesaplamayı zorlaştıracak, hatta faktöriyel içeren ifadelerin türev tanımından dolayı çözüme ulaşamama sorunu ile karşılaşılabilirdi. Böylece v_i^2 parametresinin sabit varsayılmasının nedeni de açıklanmıştır.

2. $l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ için Skor Eşitlikleri

$$\left(\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1}, \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \right) = \left(\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)$$

Log-olabilirlik fonksiyonunun bu parçası bağımlılığın dikkate alındığı parça olduğundan, skor eşitlikleri,

$$D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2) := \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right)$$

kısmi artığı ve

$$d_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2) := \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right)$$

kısmi artığın türevi yardımıyla yazılmıştır. $D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2)$ kısmi artığı ortak olasılık dağılım fonksiyonu ile ilgili iken, $d_{\rho_{12}^*}(u_1, u_2)$ kısmi artığın türevi ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilgilidir. Bu kısmi artıklar düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu kullanılarak yazılmıştır. Öncelikle $\boldsymbol{\alpha}$ 'ya bağlı skor eşitlikleri, bağımsız parçadakine benzer biçimde aşağıda açılmıştır.

$$\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \sum_{i=1}^n \ln \{ f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i) \}$$

Kısmi türev toplam içine alınıp $f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu karma kopula yaklaşımı altında açılırsa,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \{f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left[D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2), F_{X_2}(x_{i2} | \lambda_i)) - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2), F_{X_2}(x_{i2} - 1 | \lambda_i)) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $F_{X_1}(x_{i1} | \mu_i, v_i^2)$ kısaca $F_{X_1}(x_{i1})$, $F_{X_2}(x_{i2} | \lambda_i)$ kısaca $F_{X_2}(x_{i2})$ ve $F_{X_2}(x_{i2} - 1 | \lambda_i)$, kısaca $F_{X_2}(x_{i2} - 1)$ olarak gösterilmiştir. Logaritmik ifadenin α 'ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right]} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \right. \\ &\quad \left. - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bağımsız parçada yapılan düzenlemeye benzer şekilde toplamın içindeki ifade $\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial F_{X_1}(x_{i1})}$ ile çarpılırsa, diğer bir ifade ile $\partial F_{X_1}(x_{i1})$ ile çarpılıp bölünürse eşitlik bozulmaz. $\partial F_{X_1}(x_{i1})$ ile düzenleme yapılmasının nedeni tüm fonksiyonun kısmi artıklar yardımıyla ifade edilmek istenmesidir ve kısmi artıklar $F_{X_1}(x_{i1})$ dağılım fonksiyonları yardımıyla tanınmıştır.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right]} \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} \\ &\quad * \left[\left\{ D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right\} \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right]} \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \right] \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})), \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \text{ ve } \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha}$$

kısmi türevleri aşağıda ayrı ayrı açılmıştır.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \\ &= \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \end{aligned}$$

Türev kurallarına göre bir $f(x)$ fonksiyonunun tersinin türevi $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 'dir.

Bu bilgi ile $f'(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))) = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})))}$ elde edilir. $\Phi(\cdot)$ dağılım

fonksiyonunu ifade ettiğinden türevi $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial} = f(\cdot) = \phi(\cdot)$ biçiminde bir olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Bu matematiksel bilgiler yardımıyla,

$$\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) = \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})))} \right) \quad (5)$$

elde edilir. $\phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) = d_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))$ bilgisiyle,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) = \\ & d_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})))} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1))$ skor eşitliği açılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \\ &= \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2} - 1)) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bir fonksiyonun tersinin türevi kuralına göre Eş. (5)'e benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} (F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1)) \\ &= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2} - 1)) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})))} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

elde edilmiş ve Eş. (6) ile verilmiştir.

$$d_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) = \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2}-1)) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \right) \text{ bilgisiyle,}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right)$$

$$= d_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \left(\frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \right) \left(\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1})))} \right)$$

elde edilmiştir. Gamma dağılım fonksiyonunun α 'ya göre kısmi türevini ifade eden $\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha}$ fonksiyonunu çözmek için eşitlik $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$ ile çarpılmış, diğer bir ifade ile $\partial \mu_i$ ile çarpılıp bölünmüş ve aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$$

$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i}$ ve $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$ skor eşitlikleri aşağıda ayrı ayrı açılmıştır.

$$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) dy = \int_0^{x_{i1}} \frac{\partial}{\partial \mu_i} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) dy$$

Bağımsız parça için skor eşitlikleri hesaplanırken, Eş. (2) ile verilen

$\frac{\partial f_{X_1}(x_{i1}|\mu_i, v_i^2)}{\partial \mu_i} = f_{X_1}(x_{i1}|\mu_i, v_i^2) \frac{x_{i1} - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2}$ eşitliği bulunmuştu. Bu bilgi yardımıyla,

$$\frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} = \int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) \frac{y - \mu_i}{(\mu_i)^2 v_i^2} dy$$

elde edilir ve y'ye bağlı olmayan ifadeler integral dışına alınırsa,

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 v_i^2} \int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) (y - \mu_i) dy$$

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 v_i^2} \left[\int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) y dy - \mu_i \int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) dy \right]$$

bulunur. $\int_0^{x_{i1}} f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2) dy = F_{X_1}(x_{i1})$ bilgisiyle, $f_{X_1}(y|\mu_i, v_i^2)$ dağılımı açılırsa,

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 \nu_i^2} \left[\int_0^{x_{i1}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} y^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y\right) dy - \mu_i F_{X_1}(x_{i1}) \right]$$

elde edilir. Köşeli parantezin içindeki integral ifadesi $\frac{\mu_i \nu_i^2}{\mu_i \nu_i^2}$ ile çarpılırsa, diğer bir ifade ile $\mu_i \nu_i^2$ ile çarpılıp bölünürse eşitlik bozulmaz.

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 \nu_i^2} \left[\int_0^{x_{i1}} \frac{\mu_i}{\frac{1}{\nu_i^2} \Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2}} \frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y\right) dy - \mu_i F_{X_1}(x_{i1}) \right]$$

$\frac{1}{\nu_i^2} \Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right) = \frac{1}{\nu_i^2} \left(\frac{1}{\nu_i^2} - 1\right) \left(\frac{1}{\nu_i^2} - 2\right) = \frac{1}{\nu_i^2}! = \Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2} + 1\right)$ olduğundan yukarıdaki eşitlik,

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 \nu_i^2} \left[\int_0^{x_{i1}} \frac{\mu_i}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2} + 1\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2} + 1} y^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y\right) dy - \mu_i F_{X_1}(x_{i1}) \right]$$

biçiminde yazılabilir. Köşeli parantezin içindeki ifadeler, μ_i ortak parantezinde yazılırsa,

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 \nu_i^2} \left[\mu_i \left(\int_0^{x_{i1}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2} + 1\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2} + 1} y^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y\right) dy - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right]$$

elde edilir. $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2} + 1\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2} + 1} y^{\frac{1}{\nu_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} y\right)$ ifadesi, parametreleri $\alpha = \frac{1}{\nu_i^2} + 1$ ve

$\beta = \frac{1}{\mu_i \nu_i^2}$ olan Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyodur.

(Hatırlatma: $f_{X_1}(x_{i1} | \alpha = \frac{1}{\nu_i^2}, \beta = \frac{1}{\mu_i \nu_i^2}) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu_i^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu_i \nu_i^2}\right)^{\frac{1}{\nu_i^2} - 1} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i \nu_i^2} x_{i1}\right) x_{i1} \geq 0$)

Parametresi değişen Gamma dağılımı $f_{X_1}^\#(x_{i1} | \alpha^\# = \frac{1}{\nu_i^2} + 1, \beta = \frac{1}{\mu_i \nu_i^2})$ ile gösterilirse skor eşitliği,

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 \nu_i^2} \left[\mu_i \left(\int_0^{x_{i1}} f_{X_1}^\#(y | \alpha^\# = \frac{1}{\nu_i^2} + 1, \beta = \frac{1}{\mu_i \nu_i^2}) dy - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{(\mu_i)^2 v_i^2} \left[\mu_i \left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right] = \frac{1}{\mu_i v_i^2} \left[\left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right]$$

biçiminde yazılır. $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha}$, GDM tanımı yardımıyla Eş. (2) ile verilmiştir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} &= \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{\mu_i v_i^2} \left[\left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right] \mu_i \mathbf{z}'_{i1} \\ \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} &= \frac{\left[\left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right] \mathbf{z}'_{i1}}{v_i^2} \end{aligned} \quad (7)$$

biçiminde Eş. (7) ile elde edilmiş olur. $\frac{\partial l_{\text{bağımlı}}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \alpha}$ skor eşitliğinin tam olarak yazılabilmesi için gerekli kısmi türevler Eş. (5), (6) ve (7) ile elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{\text{bağımlı}}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right)} \\ &* \left(\frac{D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right)}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} - \frac{D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right)}{\partial F_{X_1}(x_{i1})} \right) \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right)} \\ &* \left[\phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x_{i2}) \right) - \rho_{12}^* \Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\phi \left(\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right)} \right. \\ &\quad \left. - \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) - \rho_{12}^* \Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\phi \left(\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right)} \right] \\ &* \frac{\partial F_{X_1}(x_{i1})}{\partial \mu_i} \mu_i \mathbf{z}'_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right)} \\ &* \left[\frac{-\rho_j^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\phi \left(\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right)} \left(\phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x_{i2}) \right) - \rho_j^* \Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) - \rho_j^* \Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$* \frac{\left[\left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right]}{\mu_i v_i^2} \mu_i z'_{i1}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\left(d_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - d_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right) \left[\left(F_{X_1}^\#(x_{i1}) - F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right]}{\left(D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right) \phi \left(\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x_{i1}) \right) \right) v_i^2} \\ & * \frac{-\rho_{12}^*}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} z'_{i1} \end{aligned}$$

elde edilir. $\boldsymbol{\alpha}$ 'ya göre kısmi türevi ifade eden skor eşitliği elde edildi. Bağımlılık dikkate alındığı için, $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre kısmi türevi ifade eden skor eşitliği elde etmek için yine kısmi artık istatistiği kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \ln \prod_{i=1}^n \{ f_{X_1 X_2}(x_{i1}, x_{i2} | \mu_i, v_i^2, \lambda_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \ln \left\{ D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left\{ D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right\}} \left(\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right. \\ & \left. - \frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ ifadesi $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial F_{X_2}(x_{i2})}$ ile ve $\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ ifadesi

$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)}{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)}$ ile çarpılırsa eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left\{ D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right) \right\}} \left(\frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}) \right)}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right. \\ & \left. - \frac{\partial D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2} - 1) \right)}{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)} \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2} - 1)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})}$ ifadesi Eş. (8), $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \beta}$ ifadesi Eş. (9),

$\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})}$ ifadesi Eş. (10) ve $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \beta}$ ifadesi Eş. (11) olarak

adlandırılınsın. Eş. (8), (9), (10) ve (11) ile ifade edilen kısmi integraller aşağıda tek tek açılmıştır.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} \\ &= \frac{\partial}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})))} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \\ &= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) = d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} = d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})))} \quad (8)$$

elde edilir. $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \beta}$ eşitliği $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta}$ ile çarpılırsa eşitlik bozulmaz. Poisson GDM'de $\lambda_i =$

$e^{z'_{i2}\beta}$ olduğundan $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta} = z'_{i2} e^{z'_{i2}\beta} = z'_{i2} \lambda_i$ olur. Bu bilgi yardımıyla,

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \beta} = \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta} = \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \lambda_i} z'_{i2} \lambda_i$$

elde edilir. $\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \lambda_i}$ aşağıdaki gibi açılır:

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{k=0}^{x_{i2}} \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} = \sum_{k=0}^{x_{i2}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right)$$

$0 \leq k \leq x_{i2}$ olduğundan, $k = 0$ noktasında türev işlemi yapılırken $\sum_{k=0}^{x_{i2}} \frac{1}{(k-1)!} \dots$

geleceğinden ve faktöriyel işlemi negatif sayılarda tanımsız olduğundan toplam $k = 0$ ve

$1 \leq k \leq x_{i2}$ aralığı için parçalanırsa,

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{1}{0!} \lambda_i^0 e^{-\lambda_i} \right) + \sum_{k=1}^{x_{i2}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right)$$

elde edilir. Toplam ifadesinin içi birinci çarpanı λ_i^k ve ikinci çarpanı $e^{-\lambda_i}$ olan bir çarpan türevi olduğundan,

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (e^{-\lambda_i}) + \sum_{k=1}^{x_{i2}} \left(\frac{1}{k!} k \lambda_i^{k-1} e^{-\lambda_i} - \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) \\ &= -e^{-\lambda_i} + \sum_{k=1}^{x_{i2}} \left(\frac{1}{(k-1)!} \lambda_i^{k-1} e^{-\lambda_i} - \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) \\ &= -e^{-\lambda_i} + \left(\sum_{k=1}^{x_{i2}} \frac{1}{(k-1)!} \lambda_i^{k-1} e^{-\lambda_i} \right) - \left(\sum_{k=1}^{x_{i2}} \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\sum_{k=1}^{x_{i2}} \frac{1}{(k-1)!} \lambda_i^{k-1} e^{-\lambda_i} \right)$ toplamında sınırları $0 \leq k \leq x_{i2} - 1$ olarak düzenleyip $(k-1)$ değişkeni yerine k alınırsa,

$$\begin{aligned} &= -e^{-\lambda_i} + \left(\sum_{k=0}^{x_{i2}-1} \frac{1}{(k)!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) - \left(\sum_{k=1}^{x_{i2}} \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) \\ &= -e^{-\lambda_i} + e^{-\lambda_i} + \left(\sum_{k=1}^{x_{i2}-1} \frac{1}{(k)!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) - \left(\sum_{k=1}^{x_{i2}-1} \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{x_{i2}!} \lambda_i^{x_{i2}} e^{-\lambda_i} = -\frac{1}{x_{i2}!} \lambda_i^{x_{i2}} e^{-\lambda_i} = -f_{X_2}(x_{i2}|\lambda_i) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2})}{\partial \beta} = -f_{X_2}(x_{i2}|\lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i \quad (9)$$

bulunur. Eş. (10) ve (11) sırasıyla Eş. (8) ve (9)'un kesikli formları olduğundan, benzer biçimde aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\frac{\partial D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1))}{\partial F_{X_2}(x_{i2})} = d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1)) \frac{1}{\sqrt{(1-(\rho_{12}^*)^2)}} \quad (10)$$

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \beta} = \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta} = \frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \lambda_i} \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i$$

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{k=0}^{x_{i2}-1} \frac{1}{k!} \lambda_i^k e^{-\lambda_i} = -f_{X_2}(x_{i2}-1|\lambda_i)$$

$$\frac{\partial F_{X_2}(x_{i2}-1)}{\partial \beta} = -f_{X_2}(x_{i2}-1|\lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i \quad (11)$$

$\frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \beta}$ skor eşitliğinin çözümü için tüm gerekli parçalar bulunmuştur.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \beta} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1)) \right)} \\ & * \left[\phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) * \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})))} (-f_{X_2}(x_{i2}|\lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i) \right. \\ & \left. - \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2}-1)) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_{i1}))}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) \frac{1}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2}-1)))} (-f_{X_2}(x_{i2}-1|\lambda_i) \mathbf{z}'_{i2} \lambda_i) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $d_{\rho_{12}^*}(\cdot, \cdot)$ tanımıyla ve $\frac{\mathbf{z}'_{i2} \lambda_i}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}}$ ortak parantezinde,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l_{bağımlı}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \beta} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2})) - D_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1)) \right)} \\ & * \left[\frac{d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}-1))}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2}-1)))} - \frac{d_{\rho_{12}^*}(F_{X_1}(x_{i1}), F_{X_2}(x_{i2}))}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_{i2})))} \right] * \frac{\mathbf{z}'_{i2} \lambda_i}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \quad (12) \end{aligned}$$

bulunmuş ve Eş. (12) ile verilmiştir.

EK 3 – 2017 Yılı Türkiye Büyükşehir Belediyeleri Ve Nüfus Yoğunlukları^{1,2}

İl Plaka Kodu	İl	Nüfus Yoğunluğu
01	Adana	2.216.475
06	Ankara	5.445.026
07	Antalya	2.364.396
09	Aydın	1.080.839
10	Balıkesir	1.204.824
16	Bursa	2.936.803
20	Denizli	1.018.735
21	Diyarbakır	1.699.901
25	Erzurum	760.476
26	Eskişehir	860.620
27	Gaziantep	2.005.515
31	Hatay	1.575.226
33	Mersin	1.793.931
34	İstanbul	15.029.231
35	İzmir	4.279.677
38	Kayseri	1.376.722
41	Kocaeli	1.883.270
42	Konya	2.180.149
44	Malatya	786.676
45	Manisa	1.413.041
46	Kahramanmaraş	1.127.623
47	Mardin	809.719
48	Muğla	938.751
52	Ordu	742.341
54	Sakarya	990.214
55	Samsun	1.312.990
59	Tekirdağ	1.005.463
61	Trabzon	786.326
63	Şanlıurfa	1.985.753
65	Van	1.106.891

TBMM'nin çıkardığı bir yasa² ile nüfusu 750.000'i aşan iller Büyükşehir Belediyesi olmuştur. Bu ayırımda Ordu nüfus koşulunu tam olarak sağlamasa da Büyükşehir kabul edilmiştir. Belediyelerin büyükşehir belediyesi olmasına nüfus yoğunluğuna göre karar verilir. 2017 yılında Türkiye nüfusu 80.810.525'dir. Bu nüfusun 61.856.984'i büyükşehir belediyelerine geri kalan 18.953.541'i şehir belediyelerine aittir.

Kaynaklar:

¹ Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) 2013 Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi Sonuçları (ADNKS) (http://rapor.tuik.gov.tr/reports/rwservlet?adnksdb2&ENVID=adnksdb2Env&report=wa_buyukbelediye.RDF&p_kod=1&p_yil=2013&p_dil=1&desformat=html)

² TBMM

(<http://www.tbmm.gov.tr/kanunlar/k6360.html>)

EK 4 – Kategorik Açıklayıcı Değişkenlerin Gösterge Değişkenlerle Kodlamaları

Risk Faktörleri	Kodlama
Sigortalının Yaşı	$x_{yaş1} = \begin{cases} 1, yaş = genç \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{yaş2} = \begin{cases} 1, yaş = yaşlı \\ 0, diğer \end{cases}$
Sigortalının Cinsiyeti	$x_{cinsiyet} = \begin{cases} 1, cinsiyet = kadın \\ 0, diğer \end{cases}$
Sigortalının Medeni Hâli	$x_{medenihal1} = \begin{cases} 1, medenihal = dul \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{medenihal2} = \begin{cases} 1, medenihal = boşanmış \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{medenihal3} = \begin{cases} 1, medenihal = bekar \\ 0, diğer \end{cases}$
Hasarsızlık Kademesi	$x_{hasarsızlık1} = \begin{cases} 1, hasarsızlık = 0 \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarsızlık2} = \begin{cases} 1, hasarsızlık = 1 \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarsızlık3} = \begin{cases} 1, hasarsızlık = 2 \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarsızlık4} = \begin{cases} 1, hasarsızlık = 3 \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarsızlık5} = \begin{cases} 1, hasarsızlık = 5 + \\ 0, diğer \end{cases}$
Yaşanan Bölge	$x_{şehir} = \begin{cases} 1, şehir = küçük \\ 0, diğer \end{cases}$
Aracın Yaşı	$x_{aracıyaş1} = \begin{cases} 1, araç yaşı = eski \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{aracıyaş2} = \begin{cases} 1, araç yaşı = yeni \\ 0, diğer \end{cases}$
Aracın Motor Gücü	$x_{motorgücü1} = \begin{cases} 1, motor gücü = çok yüksek \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{motorgücü2} = \begin{cases} 1, motor gücü = çok düşük \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{motorgücü3} = \begin{cases} 1, motor gücü = yüksek \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{motorgücü4} = \begin{cases} 1, motor gücü = düşük \\ 0, diğer \end{cases}$
Hasar Nedeni	$x_{hasarnedeni1} = \begin{cases} 1, hasar nedeni = diğer \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarnedeni2} = \begin{cases} 1, hasar nedeni = çarpma(park) \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarnedeni3} = \begin{cases} 1, hasar nedeni = dolu \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarnedeni4} = \begin{cases} 1, hasar nedeni = çarpma \\ 0, diğer \end{cases}$ $x_{hasarnedeni5} = \begin{cases} 1, hasar nedeni = çarpışma \\ 0, diğer \end{cases}$

EK 5 – Tezden Türetilmiş Bildiriler

Erdemir, Ö. K., Sucu, M., *The Combination of Generalized Linear Model and Copula: An Application Study in R*, XX. International Symposium on Econometrics, Operational Research and Statistics 2020 (ISEOS 2020), 12-14 February 2020, Department of Econometrics, [Ankara Hacı Bayram Veli University \(AHBVU\)](#), Ankara, Turkey.