# MATEMATİK EĞİTİMİNDE ARGÜMANTASYON VE KANIT SÜREÇLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

# ANALYSIS AND COMPARISON OF ARGUMENTATION AND PROOF IN MATHEMATICS EDUCATION

**SELİN GÜNEŞ**

**Prof. Dr. ALİ BÜLBÜL**

**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2013

**SELİN GÜNEŞ**'in hazırladığı **"Matematik Eğitiminde Argümantasyon ve Kanıt Süreçlerinin Analizi ve Karşılaştırılması"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr. Arif ALTUN)

Danışman

(Prof. Dr. Ali BÜLBÜL)

Üye

(Doç. Dr. Necla TURANLI)

Üye

(Doç. Dr. Şenol DOST)

Üye

(Yard. Doç. Dr. Canan YANIK)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nilgün SEÇKEN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü V.

# ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/07/2013

Selin GÜNEŞ

# ÖZET

## MATEMATİK EĞİTİMİNDE ARGÜMANTASYON VE KANIT SÜREÇLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI


**SELİN GÜNEŞ**

**Yüksek Lisans, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. ALİ BÜLBÜL**



**Temmuz 2013, 202 sayfa**



Argümantasyon, öğrencilerin verilen bir ifadenin ya da teoremin kanıtını yapmaya başlamadan önce, bireysel olarak ya da bir grup içinde arkadaşları ile birlikte yapılacak kanıt ile ilgili olarak hipotez oluşturdukları, fikir yürüttükleri, sezgilerini paylaştıkları bir süreçtir. Yapılan çalışmalarda argümantasyon sürecinin kanıt sürecini etkilediği yönünde sonuçlar elde edilmiştir. Bunun üzerine iki süreç arasındaki olası ilişki ya da ilişkiler araştırılmaya başlanmıştır. Yapılan analizler sonucunda argümantasyon ve kanıt süreci arasındaki ilişkiler belirlenmiş ve Toulmin Modeli'ne göre analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçların, öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları zorlukları belirlemek ve bunlara çözüm bulmak açısından oldukça önemli ve yararlı olduğu görülmüştür. Bu araştırmanın amacı, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini karşılaştıran ve bu iki süreç arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin Modeli'ne göre analiz eden çalışmaları derlemektir. Bu amaca yönelik olarak söz konusu çalışmalar tarihsel sıralamasına göre incelenmiş ve kavramlar olabildiğince ilk kaynaklara ulaşılarak tanımlanmaya çalışılmıştır. Ülkemizde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkileri analiz eden bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle bu tez çalışmasının bu alandaki muhtemel araştırmalara öncü olması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.



**Anahtar Kelimeler:** Argümantasyon, kanıt, kanıtlama süreci, matematik eğitimi

# ABSTRACT

## ANALYSIS AND COMPARISON OF ARGUMENTATION AND PROOF IN MATHEMATICS EDUCATION

**SELİN GÜNEŞ**

**Master of Science, Secondary Science and Mathematics Education**

**Supervisor: Prof. Dr. ALİ BÜLBÜL**

**July 2013, 202 pages**

Argumentation is a process in which students progressively work on a given statement or theorem individually or share their opinions, hypothesis and intuitions in a group with their friends before they prove the given theorem or statement. In the studies carried out, the results which show that argumentation process affects proving process have been obtained, after which possible relationsip(s) between these processes have been investigated into. The researchers have found that there are strong relationships between them and these relationships can be analysed by using Toulmin's model. The results of analyses are really important and useful to determine the problems students face in the proving process and to find a way to solve them. The purpose of this study is to compile the studies that compare the argumentation and proving processes through analysing them by using Toulmin's model and determine the relationship(s) between them. In this respect, the studies are investigated in the chronological order and the terms about the topic are identified as they appear in the first resources. In our country, no study on the relationship between argumentation and proving processes has been carried out yet. Because of that this study is thought as important and necessary to be pioneer for the studies which will be done in our country.

**Keywords:** Argumentation, proof, proving process, mathematic education.

TEŞEKKÜR

Lisans öğrenimim boyunca matematik alan derslerinde gelişimime en büyük katkıyı sağlayan; yüksek lisans öğrenimimde ise deneyimleri ve fikirleri ile yolumu aydınlatan, bana her zaman destek olan, araştırmamın her aşamasında ve çalışmamın her satırında emeği olan, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali Bülbül'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında bana maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürlerimi sunarım.

Bu zorlu süreçte fikirleri ile her zaman bana yardımcı olan çok sevgili hocalarım Dr. Nazan Sezen Yüksel'e, Dr. Meltem Sarı Uzun'a, Dr. Yasemin Sağlam'a; deneyimlerini benimle paylaşarak doğru adımlar atmamı sağlayan çok değerli hocam Doç. Dr. Şenol Dost'a; çalışmamı oluşturma aşamasında fikirlerini aldığım Saygın Dinçer'e ve beni her zaman motive eden ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli dostum Pelin Erdoğan'a teşekkür ederim.

Hayatıma girdikleri ilk günden bu yana beni her alanda destekleyen, bana güvenen, her zaman yanımda olan ve varlıkları ile bana güç veren, Zeki Onur Urhan'a ve çok değerli ailem Semra Urhan ve Ramazan Urhan'a teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman kendime örnek aldığım, zor anımda yanımda olup beni motive eden sevgili ablam Belgin Güneş'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımdaki her başarımın asıl sebebi ve asıl sahibi olan, her saniye desteklerini hissettiğim çok değerli aileme; babam Ergin Güneş'e ve annem Hacer Güneş'e yaptıkları fedakârlıklar ve verdikleri emekler ile bugünlere gelmemi sağladıkları ve bitmek bilmeyen enerjileri ve sabırları ile hayatımı aydınlattıkları için en büyük teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak değerli jüri üyelerine eleştirileri, görüş ve önerileri için teşekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa


ÖZET ..... i
ABSTRACT ..... ii
TEŞEKKÜR ..... iii
İÇİNDEKİLER ..... iv
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... viii
ÇİZELGELER DİZİNİ ..... xi
1. GİRİŞ ..... 1
1.1. Temel Kavramlar ..... 7
    1.1.1. Argüman ..... 7
    1.1.2. Argümantasyon ..... 8
    1.1.3. Hipotez ..... 10
    1.1.4. Geçerli İfade ..... 11
    1.1.5. Matematiksel Teori ve Teorem ..... 11
    1.1.6. Mantıksal Düşünme ..... 12
    1.1.7. Matematiksel Düşünme ..... 13
    1.1.8. İndüktif- Dedüktif Ayırımı ..... 15
    1.1.9. Argümantasyon Temelli Muhakeme - Dedüktif Temelli Muhakeme ..... 15
    1.1.10. Formel Kanıt ..... 16
    1.1.11. Matematiksel Kanıt ..... 17
1.2. Toulmin Modeli ..... 18
    1.2.1. Toulmin Modeli'nin Temel Yapısı (İddia-Veri-Gerekçe) ..... 19
    1.2.2. Toulmin Modelindeki Yardımcı Bileşenler ..... 21
        1.2.2.1. Niteleyen Bileşeni ..... 21
        1.2.2.2. Çürüten Bileşeni ..... 22
        1.2.2.3. Destek Bileşeni ..... 23
    1.2.3. Matematik Eğitimi Araştırmalarında Toulmin Modeli'nin Kullanımı ..... 25
1.3. Araştırmanın Amacı ..... 27
1.4. Araştırmanın Önemi ..... 27
2. YÖNTEM ..... 28
3. ARGÜMANTASYON VE KANIT SÜREÇLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER ..... 32

Sayfa

3.1. Teoremlere Okuldaki Geleneksel Yaklaşımın Sorgulanması: Teoremlerin Bilişsel Bütünlüğü Hakkında Bir Hipotez ..... 33
3.2. Hipotezleri (Konjektürleri) Üretmede ve Kanıtlamada Temel Olan Bazı Dinamik Zihinsel Süreçler ..... 37
3.3. Geometri Teoremlerine Epistemolojik ve Bilişsel Bir Yaklaşım ..... 41
3.4. Teoremlerin Bilişsel Bütünlüğü ve Kanıt Yapmanın Zorluğu ..... 43
3.5. Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri ve Bu Süreçlerin Eğitimdeki Sonuçları Hakkında Bazı Düşünceler ..... 53
3.6. Matematik Eğitiminde Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçlerini Karşılaştırma ..... 55
3.7. Matematikte Argümantasyon ve Kanıt Arasındaki İlişkinin Bazı Bilişsel Yönleri ..... 57
3.7.1. Yapısal Süreklilik ..... 57
3.7.1.1. Dedüktif Argümantasyon ..... 58
3.7.1.2. Abdüktif Argümantasyon ..... 58
3.7.1.3. İndüktif Argümantasyon ..... 59
3.7.2. Deney süreci ..... 59
3.7.2.1. Tipik Bir Dedüktif Argümantasyon ..... 60
3.7.2.2. Tipik Bir Abdüktif Argümantasyon ..... 61
3.7.2.3. Tipik Bir İndüktif Argümantasyon ..... 61
3.7.3. Sonuçlar ( Abdüktif Argümantasyondan Dedüktif Kanıta Geçiş Durumu) ..... 66
3.8. Kültürel Açıdan Sınıfta İletişim, Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt ..... 66
3.8.1. Japon Kültüründe İletişim ve Argümantasyon Süreci ..... 67
3.8.2. Japon ve Batı Kültüründeki Argümantasyon Süreçlerinin Karşılaştırılması ..... 68
3.8.3. Japon Sınıflarında Argümantasyon ..... 69
3.8.4. Japon Sınıflarında Kanıt ..... 70
3.8.5. Batı ve Japon Kültürüne Göre Kanıt Yazma ..... 71
3.8.6. Sonuçlar ..... 72
3.9. Abdüktif Bir Argümantasyonun Ardından Ne Tip Bir Kanıt Yapılabilir? ..... 73
3.9.1. Analiz Süreci ..... 73

Sayfa

3.9.2. Sonuçlar (Abdüktif Argümantasyondan Abdüktif Kanıta Geçiş Durumu)………………............................................................................... 78
3.10. Sınıfta Kanıtlama Yapılırken Karşılaşılan Argümantasyon Yapıları.............. 78
3.10.1. Argümantasyonun Kaynak Yapısı ...................................................... 79
3.10.2. Argümantasyonun Depo Yapısı .......................................................... 80
3.11. Fransız ve Alman Ders Kitaplarından Alınan Örneklerde Argümantasyon ve Kanıt……………………................................................................................... 84
3.11.1. Olasılık Argümanları…………... ............................................................ 84
3.11.2. Gereklilik Argümanları ........................................................................... 84
3.12. Argümantasyon ve Kanıt Arasındaki İlişki Nasıl Analiz Edilebilir? ................ 85
3.12.1. Argümantasyon ve Kanıtın İşlevsel ve Yapısal Karakteristikleri.......... 86
3.12.2. Yapılandırıcı ve Yapısal Argümantasyon ............................................ 87
3.12.3. İndüktif Süreçte Rol Oynayan Genellemeler ....................................... 88
3.12.3.1. Sonuç Genelleme (Result Pattern Generalisation)..................... 88
3.12.3.2. Süreç Genelleme (Process Pattern Generalisation)................... 88
3.12.4. Deney Süreci ........................................................................................ 89
3.12.5. Sonuçlar (İndüktif Argümantasyon Durumu) ....................................... 91
3.12.5.1. Örnek 1 *(Sonuç Genelleme Temelli İndüksiyon ve Kanıt Arasındaki Yapısal Mesafe Örneği)* ................................................................ 92
3.12.5.2. Örnek 2 *(Süreç Genelleme Temelli İndüksiyon ve Matematiksel Kanıt Arasındaki Yapısal Süreklilik Örneği)* ...................................................... 95
3.13. Matematiksel Argümantasyonu Modellemede “Niteleyen”İn Önemi ............. 98
3.13.1. Deney Süreci ........................................................................................ 99
3.13.2. Gerekçe Tipleri ..................................................................................... 103
3.13.2.1. İndüktif Gerekçe Tipleri ............................................................ 103
3.13.2.2. Yapısal-Sezgisel Gerekçe Tipi ................................................. 105
3.13.2.3. Dedüktif (Çıkarımsal) Gerekçe Tipi .......................................... 108
3.13.3. Sonuçlar............................................................................................. 110
3.14. Cebirde Açık Uçlu Problemleri Çözerken Oluşan Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri Arasındaki Yapısal İlişkiler.................................... 112
3.14.1. Örnek 1 (*Yapılandırıcı Argümantasyon* ile Kanıt Arasındaki Boşluğu Azaltan *Yapısal Argümantasyon* Örneği)...................................................... 114

Sayfa

3.14.2. Örnek 2 (*Yapılandırıcı Argümantasyon* ile Kanıt Arasındaki Boşluğu Azaltmayan *Yapısal Argümantasyon* Örneği)........................................ 120
3.14.3. Sonuçlar........................................................................ 123
3.15. Argümantasyon ve Cebirsel Kanıt................................................ 124
3.15.1. Argümantasyon ve Kanıtı İçerik Sistemleri Açısından Karşılaştırma............................................................ 125
3.15.2. Toulmin Modeli İçinde Ck¢ Modeli ............................................. 126
3.15.3. Argümantasyon ve Kanıtın Yapısal Açıdan Karşılaştırılması........... 129
3.15.4. Cebirsel Kanıt.............................................................. 130
3.15.5. Argümantasyon ve Cebirsel Kanıt Arasındaki İlişkilere Yönelik Hipotezler ..................................................................... 131
3.15.6. Analizler...................................................................... 132
3.15.7. Sonuçlar ...................................................................... 154
3.16. Okulda Kanıta Yaklaşım: Yol Gösterici Hipotez Üretimi ve Kanıt Yapma Sürecinin Anlatımı ................................................................ 155
3.16.1. İlk Bölüm: Keşif, Hipotezi İfade Etme ve Ondan Anlam Çıkarma .... 158
3.16.2. İkinci Bölüm: Muhakeme Adımlarını Argümantasyon Sürecinde Organize Etmeyi Öğrenme/Öğretme ............................................... 159
3.16.3. Üçüncü Bölüm: Kanıt Yapma Sürecini Anlatma ............................ 159
3.17. Argümantasyon ve Kanıt: Toulmin ve Duval Modelleri Hakkında Bir Tartışma……………… ............................................................... 161
3.18. Argümantasyon ve Kanıt: Kuramsal Yaklaşımlara ve Sınıf Uygulamalarına Bir Katkı…………………........................................................... 163
3.18.1. Analiz 1........................................................................ 166
3.18.2. Analiz 2........................................................................ 166
3.18.3. Analiz 3........................................................................ 171
3.18.4. Analiz 4........................................................................ 173
3.18.5. Analiz 5........................................................................ 173
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER............................................................ 176
KAYNAKLAR ................................................................................ 186
ÖZGEÇMİŞ.................................................................................. 191

# ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Toulmin Modeli'nin temel yapısı ........ 20
Şekil 1.2. Toulmin Modeli'nin temel yapısı örneği ........ 20
Şekil 1.3. Toulmin Modeli'nde niteleyen bileşeni ........ 21
Şekil 1.4. Toulmin Modeli'nde niteleyen bileşeni örneği ........ 22
Şekil 1.5. Toulmin Modeli'nde çürüten bileşeni ........ 22
Şekil 1.6. Toulmin Modeli'nde çürüten bileşeni örneği ........ 23
Şekil 1.7. Toulmin Modeli'nde destek bileşeni ........ 23
Şekil 1.8. Toulmin Modeli'nin tüm bileşenleri örneği ........ 24
Şekil 3.1. Dedüktif argümantasyonun Toulmin Modeli'ne göre analizi ........ 58
Şekil 3.2. Abdüktif argümantasyonun Toulmin Modeli'ne göre analizi ........ 59
Şekil 3.3. Öğrencilerin argümantasyon süreci ........ 62
Şekil 3.4. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi ........ 63
Şekil 3.5. Öğrencilerin kanıt süreci ........ 64
Şekil 3.6. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi ........ 65
Şekil 3.7. İki sütunlu kanıt yazımı ........ 71
Şekil 3.8. Paragraf formunda kanıt yazımı ........ 72
Şekil 3.9. Öğrencilerin argümantasyon süreci ........ 74
Şekil 3.10. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi ........ 75
Şekil 3.11. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi ........ 76
Şekil 3.12. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi ........ 76
Şekil 3.13. Öğrencilerin kanıt süreci ........ 77
Şekil 3.14. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi ........ 77
Şekil 3.15. Öğretmenin tahtaya çizdiği şekil ........ 79
Şekil 3.16. Argümantasyonun kaynak yapısı ........ 80
Şekil 3.17. Argümantasyonun depo yapısı ........ 81
Şekil 3.18. Depo yapısındaki argümantasyon ........ 83
Şekil 3.19. Sonuç genelleme (result pattern generalisation) ........ 88
Şekil 3.20. Süreç genelleme (process pattern generalisation) ........ 88
Şekil 3.21. Öğrencilerin argümantasyon süreci ........ 92
Şekil 3.22. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi ........ 93

Sayfa

Şekil 3.23. Öğrencilerin Kanıt Süreci ........................................................................ 93
Şekil 3.24. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi .................................................... 94
Şekil 3.25.Öğrencilerin argümantasyon süreci .................................................... 95
Şekil 3.26. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi .................................... 95
Şekil 3.27. Öğrencilerin argümantasyon süreci .................................................... 96
Şekil 3.28. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi .................................... 96
Şekil 3.29. Öğrencilerin kanıt süreci ...................................................................... 97
Şekil 3.30. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi .................................................... 97
Şekil 3.31. Chris'in hipotez 3 için üretmiş olduğu argümanın Toulmin Modeli'ne göre analizi………………… ........................................................................ 102
Şekil 3.32. Andrew'un hipotez 4'e verdiği cevabın bir kısmı ................................ 104
Şekil 3.33. Ben ve Fred'in zengin sayılar ile ilgili argümanlarının Toulmin Modeli'ne göre analizi……….... ....................................................................................... 108
Şekil 3.34. Öğrencinin yapılandırıcı argümantasyon süreci ................................. 115
Şekil 3.35. Öğrencinin yapılandırıcı argümantasyon sürecinin analizi ................. 115
Şekil 3.36. Öğrencinin yapısal argümantasyon süreci .......................................... 115
Şekil 3.37. Yapısal argümantasyon sürecinin analizi ........................................... 116
Şekil 3.38. Yapısal argümantasyonda abdüktif adım ........................................... 116
Şekil 3.39. Yapısal argümantasyonda abdüktif adımın analizi ............................ 117
Şekil 3.40. Yapısal argümantasyon ...................................................................... 117
Şekil 3.41. Yapısal argümantasyonun analizi ...................................................... 118
Şekil 3.42. Öğrencinin kanıt süreci ...................................................................... 119
Şekil 3.43. Öğrencinin kanıt sürecinin analizi ...................................................... 119
Şekil 3.44. Elio'nun yapılandırıcı argümantasyon süreci ..................................... 120
Şekil 3.45. Elio'nun yapılandırıcı argümantasyon sürecinin analizi ..................... 120
Şekil 3.46. Elio'nun yapısal argümantasyon süreci .............................................. 121
Şekil 3.47. Elio'nun yapısal argümantasyon sürecinin analizi .............................. 121
Şekil 3.48. Elio'nun kanıt süreci ........................................................................... 122
Şekil 3.49. Öğrencinin kanıt sürecinin analizi ...................................................... 123
Şekil 3.50. Ck¢ modelinin Toulmin Modeli içine entegre edilmesi ....................... 126
Şekil 3.51. Doğru olmayan bir düşünce üzerinde temellenen argüman örneği ... 128
Şekil 3.52. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ...................................... 135

Sayfa


Şekil 3.53. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi ..... 135
Şekil 3.54. Hipotezin cebirsel dile çevrilmesi ..... 136
Şekil 3.55. Cebirsel dil analizi ..... 136
Şekil 3.56. Yanlış kanıt ..... 137
Şekil 3.57. Kanıtın analizi ..... 137
Şekil 3.58. Yapılandırıcı argümantasyon ..... 138
Şekil 3.59. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi ..... 138
Şekil 3.60. Yapısal argümantasyon ..... 139
Şekil 3.61. Yapısal argümantasyonun analizi ..... 140
Şekil 3.62. Kanıt yapımı ..... 141
Şekil 3.63. Kanıt yapımının analizi ..... 142
Şekil 3.64. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ..... 143
Şekil 3.65. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi ..... 144
Şekil 3.66. Yapısal argümantasyon 1 ..... 144
Şekil 3.67. Yapısal argümantasyon 1’in analizi ..... 145
Şekil 3.68. Yapısal argümantasyon 1’in analizinin son kısmı ..... 145
Şekil 3.69. Yapısal argümantasyon 2 ..... 146
Şekil 3.70. Yapısal argümantasyon 2’nin analizi ..... 146
Şekil 3.71. Yapısal argümantasyon 3 ..... 147
Şekil 3.72. Yapısal argümantasyon 3’ün analizi ..... 147
Şekil 3.73. Kanıt yapımı ..... 148
Şekil 3.74. Kanıtın analizi ..... 148
Şekil 3.75. Kanıtın analizinin son kısmı ..... 149
Şekil 3.76. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ..... 150
Şekil 3.77. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi ..... 150
Şekil 3.78. Yapısal argümantasyon ..... 151
Şekil 3.79. Yapısal argümantasyonun analizi ..... 151
Şekil 3.80. Yapısal argümantasyon analizinin son kısmı ..... 151
Şekil 3.81. Kanıta teşebbüs ..... 152
Şekil 3.82. Kanıtın analizi ..... 153
Şekil 3.83. Öğrencilere verilen şekil ..... 159
Şekil 3.84. Toulmin Modeli’ne göre analiz edilen argüman örneği ..... 164
Şekil 4.1. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler ..... 181

# ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

**Çizelge 2.1:** YÖK dokümanlarında yapılan tarama sonuçları 1990-2013 ............ 28
**Çizelge 2.2:** ULAKBİM'de yapılan tarama sonuçları 1990-2013 .......................... 29
**Çizelge 2.3:** TOKAT taramasında bulunan sonuçlar 1990-2013……………. ...... 30
**Çizelge 3.1.:** Matematiksel Kanıt, Argümantasyon, İletişim ve Kültür ................... 67
**Çizelge 3.2.:** Japonlar ve Amerikalılar arasındaki farklı iletişim stilleri .................. 69
**Çizelge 3.3.:** Kanıt yapma ve grup modeli arasındaki tutarlılık ............................ 70

# 1. GİRİŞ

Kanıt, matematiğin en temel aktivitelerinden biridir. Matematikçilerin matematikte kesinliği sağlamak, bir ifadenin doğruluğunu göstermek ve teoremlerin geçerliliğini sağlamak amacıyla başvurdukları en vazgeçilmez yol olan kanıt yapma, öğrenciler için öğrenilmesi zor bir süreç olarak kabul edilmektedir [1; 2]. Son yirmi yıldır matematikte kanıtın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte, çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin kanıt yaparken geçirdikleri düşünsel süreçler ve gelişimler matematik eğitimi alanında yapılan araştırmalara konu olmuştur [2; 3; 4].

Kanıtlama, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli delil göstererek kabul ettirme çabasıdır (Garnier & Taylor, 1997, akt. [5]). Araştırmaların sonucunda ilköğretimden yükseköğretime eğitimin her aşamasında, kanıtlamanın öğrencilerin zihninde sıkıntı çektikleri, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları, genellikle sevmedikleri bir süreç olarak yapılandığı ortaya çıkmıştır (Özer ve Arıkan, 2002; Almeida, 2003; Jones, 2000; de Villiers, 1990; Raman, 2003, akt. [3]). Bu sonucun akabinde yapılan çalışmalarda kanıt yapma konusunda öğrencilerin yaşadıkları bu korku ve sıkıntılar, kanıt yapmanın gerekliliğini kavramada çektikleri güçlük, çözümü aranan temel sorun haline gelmiştir. De Villiers [6]'a göre "neden bunu kanıtlamak zorundayız?" sorusu, öğrencilerin en sık sorduğu sorudur. Öğrenciler kanıt yapmanın anlamlılığını, öğretmenin beklentisini yerine getirmek ve sınavları geçmenin ötesinde görememektedirler (Almeida, 2000, akt. [3]).

Matematiksel kanıt, ilköğretim seviyesinden itibaren matematik etkinliklerinin merkezine alınmaktadır (Jones, 2000; Schoenfeld, 1994; Hanna, 2000, akt. [5]). Bunun nedenleri Güler, Özdemir ve Dikici [5] tarafından şöyle toparlanmıştır:

1. Kanıt, matematiğin derinlemesine öğrenilmesi için gereklidir.
2. Öğrencilerin kanıt yeterlilikleri, matematik yeterliliklerini de geniş ölçüde ilerletir.
3. Üniversite ve yüksekokul öğrencilerinin kanıt yapma ile ilgili karşılaştıkları zorlukların çoğu, üniversitede öğrencilerin aniden kanıtla karşılaşmalarından kaynaklanmaktadır.

İlkokul seviyesinde akıl yürütme, ortaokul seviyesinde muhakeme yapma şeklinde görülen kanıt, lise seviyesinde daha sistematik olarak verilmektedir. Üniversite öğrencilerinin birçoğu formel kanıt ile üniversitede tanışmakta, bu da onları hiç bilmedikleri, tamamıyla yabancı oldukları bir sürecin içine birden bire sokmaktadır. İlk ve ortaöğretimde matematiğin daha çok işlemsel boyutuyla uğraşan öğrenciler, üniversite düzeyinde matematiğin soyut ve aksiyomatik yapısıyla karşılaştıklarında kavramları, kavramlar arası ilişkileri, tanım ve teoremleri anlayıp yorumlayarak kanıtlar oluşturmada güçlük çekmektedirler [7].

Bu anlamda her seviyede güçlüklerin yaşandığı ve korku duyulan bir süreç olarak bilinen, ancak matematiğin can damarlarından biri olan kanıt ile ilgili yapılan araştırmalar büyük önem taşımaktadır. Kanıtlama sürecinin incelenmesi ve bu süreci etkileyen faktörlerin saptanması, kanıtlama sürecinin öğrencilerin daha zevk aldığı, anlamlı bulduğu ve başarı ile tamamladığı bir süreç haline gelmesi açısından son derece önemlidir.

Heinze ve Reiss [8]'e göre, kanıt uluslararası alanda yapılan matematik eğitimi araştırmalarında sıkça yer verilen bir konudur. Ancak ülkemizde bu konuda yapılmış sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar ise genellikle ilköğretim ve ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerle gerçekleştirilmiş, öğrencilerin kanıta ilişkin görüşleri ve kanıtlama becerileri nicel ve nitel yöntemlerle belirlenmeye çalışılmıştır [7].

Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003, akt. [7]) altı, yedi ve sekizinci sınıflar üzerinde yaptıkları çalışmalarında, Harel ve Sowder'ın sınıflamasına göre hangi kanıt şemalarını kullandıklarını araştırmışlar ve öğrencilerin dışsal, deneysel ve analitik şemalardan üçünü de kullandıklarını gözlemişlerdir. Güven, Çelik ve Karataş [9] ortaöğretim öğrencileri üzerinde yaptıkları analizler sonucunda ortaöğretimde öğrenim görmekte olan öğrencilerin geometri konularında kanıtlama becerilerinin istenen düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmışlardır. Ören [10], 10. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin geometri sorularında kullandıkları kanıt şemalarını belirlemiştir. Öğrencilerin dışsal dayanaklı ve deneysel kanıt şemalarını, analitik kanıt şemalarına göre önemli ölçüde daha fazla kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin kanıt şemalarını kullanımlarındaki farklılıkları cinsiyetlerine, alan bağımlı ya da bağımsız olmalarına ve bilişsel stillerine göre belirlenmiştir. Uğurel [11] ise ortaöğretim öğrencilerinin kanıt kavramına yönelik bilgilerini nasıl düzenlediklerini araştırmıştır. Öğrenci ve öğretmen söylemlerinin analizleri aracılığıyla elde edilen bulgular öğrencilerde kanıtın ne olduğuna, kanıta yönelik temel kavramların terimsel ve kavramsal olarak anlamlandırılmasına, kanıt yapma yöntemlerine, kanıt yapma mekanizmasının neyi içerdiğine ve nasıl uygulandığının algılanmasına ilişkin bazı bilgi eksikliklerinin ve yanılgılarının bulunduğunu ve kanıt yapma yaklaşımlarının da sınırlılıklar içerdiğini ortaya çıkarmıştır.

Ülkemizde üniversite öğrencileri üzerinde yapılan çalışmalar öğrencilerin daha ziyade kanıta yönelik tutumlarını, kanıtlama sürecinde yaşadıkları güçlükleri ve kanıt şemalarını belirlemeye yönelik yapılmaktadır. Moralı vd., [3]'nin öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının kanıtlamaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, kanıtlamanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri görülmüştür. Sarı, Altun ve Aşkar [12], üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçlerini incelemişler ve farklı başarı seviyesindeki öğrencilerin kanıt şemaları ve kanıt yapma yaklaşımlarının arasında nasıl bir bilişsel örüntü olduğunu araştırmışlardır. Moralı, Köroğlu ve Çelik [13], matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumlarını ve yaşadıkları kavram yanılgılarını tespit etmişlerdir. Sarı [7]'nın matematik öğretmen adaylarının kanıtlama sürecindeki güçlüklerini ve kanıtlama biçimlerini belirlemeyi amaçladığı doktora tezi çalışmasında ise grup tartışması ve sosyal etkileşime dayalı sınıf çalışmalarının, öğretmen adaylarının kanıtla ilgili güçlüklerini gidermede etkili olduğu ve kanıtlama süreçlerini olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Aydoğdu, İskenderoğlu ve Baki [14], çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerini nicel yöntemlerle analiz etmişlerdir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının kanıta yönelik olumlu bakış açılarının olduğu bulunmuştur. Gökkurt ve Soylu [15], üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerini belirlemişler, fen bilgisi ve matematik öğretmen adaylarının kanıta yönelik düşüncelerinin yetersiz düzeyde olduğunu sonucuna ulaşmışlardır. Güler, Özdemir ve Dikici [5], ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile kanıt yapabilme becerilerini ve matematiksel kanıt hakkındaki düşüncelerini incelemişlerdir. Öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile kanıt yapabilme becerilerinin düşük olduğu ve kanıta yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı saptanmış, kanıt hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemi ile kanıt yapabilme becerileri arasında istatiksel olarak anlamlı bir ilişki bulunmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Güler ve Dikici [16]'nin ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının çoğunun matematiksel kanıta yönelik olumlu görüşlere sahip olduğu görülmüştür. Doruk ve Kaplan [17]'ın ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel kanıt hakkındaki görüşlerini inceledikleri çalışmalarında, öğretmen adaylarının çoğunun matematiksel kanıtla ilgili olumlu düşüncelere sahip olmalarına rağmen kanıtı faydasız olarak gördükleri, problem çözme ile kanıt arasındaki ilişkiye yönelik kaygı içinde oldukları, kendilerine göre bir kanıtlama yöntemlerinin olmadığı ve kanıta karşı öz güven eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir. İncikabı [18], ilköğretim matematik öğretmen adaylarının mantıksal argümanları kanıtlama yöntemlerini incelemişlerdir.

Üniversite öğrencileri üzerinde yapılan yabancı kaynaklı çalışmalar incelendiğinde, daha çok başlangıç düzeyindeki üniversite öğrencilerinin kanıt kavramları ve kanıtlama süreçlerinin incelendiği görülmektedir. Söz konusu çalışmalarda üniversite öğrencilerinin ilk yıllarında kanıtla ilgili çeşitli güçlüklerinin olduğu saptanmıştır (Selden & Selden, 2003; Baker & Campbell, 2004; Edwards & Ward, 2004; Knapp, 2005; Weber, 2006, akt. [12]). Öğrencilerin ilerleyen sınıflarda kanıt kavramlarının nasıl olduğunu belirlemeye ve kanıtlama süreçlerini incelemeye yönelik az sayıda çalışma bulunduğu ifade edilmektedir (Harel & Sowder, 2007; Ko & Knuth, 2009, akt. [7]). Harel, Selden ve Selden (2006, akt. [7]) üniversite öğrencilerinin formel tanımlarla nasıl uğraştıkları, iddiaları kanıtlarken tanımları nasıl açtıkları, nasıl anladıkları ve kullandıkları üzerine daha çok araştırma yapılması gerektiğini vurgulamışlardır. Moore (1994, akt. [7]), matematik veya matematik eğitimi okuyan üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışmasında, öğrencilerin kanıtlamada karşılaştıkları güçlüklerin kaynağını belirlemeye çalışmış ve bunların en önemlilerinin kavramı anlama, matematiksel dil ve notasyon ve kanıta başlama olduğunu görmüştür.

Bu konuya ilişkin çalışmalarda adı sıkça geçen Weber (2001, akt. [12]), öğrencilerin ileri matematik konularında kanıt yapma ile ilgili yaşadıkları güçlükleri, yapılan çalışmalar doğrultusunda, iki açıdan değerlendirmektedir. Bunlardan ilki, öğrencilerin matematiksel kanıtın nelerden oluştuğu hakkında doğru bir fikre sahip olmamasıdır. Örneğin, bazı öğrencilere göre teoremin bir veya birkaç örnek için doğruluğunu göstermek yeterli bir kanıttır. İkinci olarak, öğrenciler bir kavramı veya teoremi anlamada ve sistematik olarak bunu uygulamada eksik kalabilmektedirler. Öğrencilerin bir gerçeği veya teoremi hatırlaması, bunu uygun şekilde uygulamaları için yeterli olmamaktadır.

Öğrencilerin kanıta yönelik tutumlarını, kanıt şemalarını, doğru ve geçerli kanıt oluşturmadaki güçlüklerini belirleyen çalışmaların sayısı gittikçe artmasına karşın; öğrencilerin kanıtlama sürecine nasıl başladıklarını, kanıtlamaya ve kanıta yönelik algılarını etkileyen faktörleri, kanıtın başarı ile tamamlanması sürecinde rol oynayan etkenleri analiz eden çalışmaların sayısının az olduğu dikkat çekmektedir (Smith, 2006, akt. [7]).

Son yıllarda uluslararası alanda yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin kanıtı yapmaya başlamadan önce kanıtı yaparken izlenecek yolu belirlemeye yönelik bireysel olarak ya da arkadaşları ile birlikte geçirdikleri sürecin bazı yönleri ile kanıtı etkilediği ortaya çıkmıştır [19]. Garuti ve diğerleri [19], argümantasyon adı verilen bu süreçte öğrencinin kendi içinde ya da arkadaşları ile birlikte kanıta başlamadan önce fikirlerini, sezgilerini, hipotezlerini ortaya koyduğunu saptamışlardır. Bu sürecin kanıt süreci üzerinde etkili olduğu görüşü, araştırmacıları argümantasyon ve kanıt süreçlerini analiz etmeye ve bu iki süreci karşılaştırmaya yöneltmiştir. Bu karşılaştırma, matematikte kanıtın özel bir argümantasyon olduğu hipotezine dayanmaktadır [20]. Buna paralel olarak araştırmacılar (Plantin, 1990; Toulmin,1993; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958; Anscombre & Ducrot, 1983; akt. [20]), argümantasyon sürecinin de özünde çıkarımlar olarak ifade edilen bir takım mantıksal savunmalardan oluşması sebebiyle kanıta benzediğini savunmaktadırlar. Kanıtın argümantasyona, argümantasyonun da kanıta belli yönlerden benzemesi sebebiyle bu iki kavramın ve sürecin karşılaştırılması ve aralarındaki ilişki ya da ilişkilerin analiz edilmesi mümkün olmaktadır.

Argümantasyon bazı çalışmalarda öğrencilerin kanıta başlamadan önce bireysel olarak ya da arkadaşları ile birlikte fikirlerini paylaştıkları ve hipotez geliştirdikleri süreç anlamında kullanılırken, bazılarında tartışma ile eş anlamlı olarak kullanılmıştır [2]. Tartışma, birbirine benzer ya da farklı pozisyonlara ve bakış açılarına sahip grup ve bireylerin bir problemi çözmek, bir fenomeni anlamak veya bir konuda karar vermek amacıyla alternatif bakış açılarını değerlendirmeye aldıkları süreç, bu süreç içerisindeki işlemler bütünü ve bu değerlendirme sonucu ortaya çıkan bilişsel ürünlerdir [21]. Sınıf ortamında tartışma ise öğrencilere; fikirlerini test etmesi, başkalarının (sınıf arkadaşlarının ya da öğretmenin) fikrini dinleyip bunları kendi fikri ile birleştirmesi, fikirlerini kelimelere dökerek düşüncelerini güçlendirmelerine ve dolayısıyla anahtar kavramlar için daha derin bir anlayış oluşturmalarına izin vermek anlamında kullanılmaktadır (McCrone 2005; akt. [2]).

Dinçer [2] doktora tezi çalışmasında, matematik eğitiminde tartışma anlamında argümantasyon üzerine yapılan çalışmaların çoğunun öğrencilerin kendi geliştirdikleri argümanları nasıl oluşturdukları ve savundukları, bu argümanlardan kanıta nasıl geçiş yaptıkları ve çok az bir kısmının da sınıf ortamındaki tartışmaların yapısı ile ilgilendiklerini belirtmektedir. Bu çalışmaların argümantasyonu tartışma anlamında kullanmalarının yanı sıra yalnızca kanıt sürecine yoğunlaşmaları ve argümantasyon sürecini yalnızca kanıt ile ilişkilendirmeleri dikkat çekici bir diğer ortak özellikleridir. Dinçer [2] ise çalışmasında lisans düzeyindeki matematik derslerinde tartışmaların sadece kanıt sürecinde değil, tanım koyma ve bir tanım veya bir teorem verildikten sonra uygulama amaçlı soru çözme sürecinde de ortaya çıktığını gözlemiştir.

Ülkemizde yapılan çalışmalar incelendiğinde, argümantasyon sürecinin öğrencilerin verilen bir ifadeyi kanıtlamaları ve genelleştirmeleri üzerinde nasıl bir etkisi olduğunu saptamaya yönelik bir çalışmanın henüz yapılmadığı görülmüştür. Argümantasyon süreci ile kanıtlama arasındaki ilişki ya da ilişkileri incelemeye ve analiz etmeye yönelik ülkemiz kaynaklı herhangi bir araştırma da henüz ortaya konmamıştır. Argümantasyon konusu ile ilgili yapılan az sayıda çalışmada bu sürecin tartışma anlamında kullanıldığı ve yalnızca kendi içinde Toulmin Modeli'ne göre analiz edildiği görülmektedir.

Buradan yola çıkarak, bu tez çalışmasında argümantasyon ve matematiksel kanıtı karşılaştırmak ve analiz etmek amacıyla uluslararası alanda yapılmış olan araştırmaların derlenmesi ve bu araştırmalar ışığında argümantasyon ve kanıt arasındaki ilişkilerin ortaya konulması amaçlanmıştır. Konuya ilişkin yapılmış olan araştırmaların ve analiz sonuçlarının bir araya getirilmesi ile argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri hakkında bilgi verilmiş ve bu süreçler çeşitli yönleri ile tanıtılmıştır. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin Toulmin Modeli'ne göre nasıl analiz edileceği ve nasıl karşılaştırılacağı örnek durumlar ile açıklanmıştır. İki sürecin karşılaştırılması ile argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasında önemli ilişkilerin olduğu ve argümantasyon sürecinin matematiksel kanıt sürecini önemli ölçüde etkilediği saptanmıştır. Çeşitli öğretim kademelerinde yapılan deneysel çalışmalar ile elde edilen sonuçlar doğrultusunda kanıt öğretimi konusunda oldukça yönlendirici önerilerde bulunulmuştur.

Söz konusu çalışmalarda yer verilen analizlerin ve analiz sonuçlarının doğru ve yeterli biçimde anlaşılması için öncelikli olarak bazı kavramların net bir biçimde bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle çalışmalarda yer verilen analizlere ve analiz sonuçlarına geçmeden önce bu bölümde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri ile ilgili kavramlara yer verilecektir.

## 1.1. Temel Kavramlar

### 1.1.1. Argüman

*Argüman* kavramı için Büyük Türkçe Sözlük'te *kanıt, tez, iddia, sav* karşılıkları verilmektedir [2]. Webster'ın sözlüğünde ise *"bir cümlenin ya da bir ifadenin lehine ya da aleyhine sunulan sebep ya da sebepler"* olarak yer almaktadır [22]. Bunlar sözel ifadeler, sayısal veriler ya da çizimler şeklinde olabilir. Kuhn (1992, akt. [2])'a göre argüman, bir öneri için ya da bir öneriye karşı veya bir olayın gidişatı için ya da bu gidişata karşı geliştirilen bir nedendir.

Matematik eğitimi alanında çalışan araştırmacıların çoğu argüman kavramını, *"bir iddianın ortaya atılması ve bu iddianın savunulması ya da çürütülmesi için geliştirilen neden ya da nedenler"* anlamında kullanmıştır [20; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33]. Bu tez çalışması kapsamında incelenen çalışmalarda argüman kavramı bu anlamı ile kullanılmaktadır.

Kanıt yapmanın merkezinde öğrencilerin bireysel olarak ya da kendi aralarında veya öğretmenleriyle yaptıkları tartışmalarda geliştirdikleri argümanlar yatmaktadır.

Örneğin;

*"ΔABC bir üçgendir. Üçgenlerin kenarları üzerine dıştan 3 adet kare çizilmiştir. Karelerin boşta kalan köşeleri birleştirilerek 3 üçgen daha oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin alanlarını ΔABC'nin alanı ile karşılaştırın"* [26] problem durumuna ilişkin olarak üretilebilecek bir argüman örneği şöyle verilebilir:

*"Bu üçgenlerin alanları eşittir. Çünkü bu üçgenlerin taban ve yükseklikleri eşittir. O halde alan formülüne göre, bu üçgenlerin alanları eşittir"* [26].

Bu örnekte üretilen argümanın *"üçgenlerin alanları eşittir"* şeklinde ortaya atılan iddiayı desteklemeye yönelik üretildiği görülmektedir.

### 1.1.2. Argümantasyon

Webster'ın sözlüğüne göre, *argümantasyon, verilen bir ifade ile ilgili mantıksal açıdan birbirine bağlantılı ama dedüktif olması zorunlu olmayan söylevler* olarak ifade edilmektedir [23]. Argümantasyon bir ya da daha fazla mantıken bağlantılı argümanlar içeren bir süreçtir [22].

Argümantasyon;

1. Sebepler oluşturma, indüksiyon (tümevarım) yapma, sonuçlar çıkarma, tartışma durumunda bu sonuçlara başvurma,
2. Tartışmak, bir şeyi savunmak ya da kanıt yapmak amaçlı yazma ya da konuşma işlevi,

olarak da tanımlanmaktadır [23]. Douek [23]'e göre, herhangi bir konuşma ya da söylev argümantasyon olarak kabul edilemez; ancak yukarıdaki özelliklere sahip özel bir konuşma ya da söylev argümantasyon özelliği taşımaktadır.

Dinçer de argümantasyon ile ilgili olarak Eemeren (1996, akt. [2])'den şunları aktarmaktadır:

> "Argümantasyon, muhatabımız için anlaşmazlığa neden olan bir bakış açısının kabul edilebilirliğini artırmak veya azaltmak amacıyla yapılan sözel ve sosyal bir muhakeme aktivitesidir. Bu aktivite, rasyonel bir karara varmadan önce söz konusu bakış açısını savunmak veya reddetmek amacıyla bir takım önermeler sunarak gerçekleştirilir."

Argümantasyon, Dinçer [2]'e göre birini bir ifadenin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için kullanılan retorik araçlardan ibarettir ve argümantasyonun amacı, birinin bakış açısını savunmak veya reddetmektir. Buna göre bu süreçte, birinin bir ifadeye verdiği epistemik değeri değiştirmesine yönelik çaba harcanır.

Bu tez çalışması kapsamında incelenen çalışmalarda argümantasyonun öğrencilerin bireysel olarak ya da arkadaşları ile birlikte grup içinde bir ifade üzerinde fikir yürüttükleri, hipotez oluşturdukları, sezgilerini paylaştıkları ve bu amaçlara yönelik olarak ifade üzerinde argüman ya da argümanlar oluşturdukları bir süreç olarak kullanıldığı görülmektedir. Argümantasyon süreci, öğrencilerin sözlü ifadelerinden ya da yazılı metinlerinden tespit edilerek Toulmin Modeli'ne göre analiz edilmektedir.

Örneğin;

*"ΔABC bir üçgendir. Üçgenin kenarları üzerine üç adet dıştan kare çiziniz. Karelerin boşta kalan noktalarını 3 adet başka üçgen oluşturacak şekilde birleştiriniz. Bu üçgenlerin alanlarını ΔABC'nin alanı ile karşılaştırınız"* [26].

problem durumuna ilişkin öğrenciler arasında geçen bir argümantasyon örneği şu şekilde verilebilir:

*"… Öğrenciler ABC ve ICD üçgenlerinin yüksekliklerini çizerler.*

*31. L: |BC|'yi uzatıyorum, yani daha doğrusu doğru parçası üzerinde doğruyu uzatıyorum… Ne yaptım ben?*

*32. G: B ve C noktalarından geçen doğruyu uzattın…*

*33. L: Ah evet!*

*34. G: Şimdi, bu doğruya dik olan doğruyu çizmeye ihtiyacımız var…*

*35. L: Ah işte orada, fakat biliyor musun onlar eşit gibi görünüyorlar…*

*36. G: Kesinlikle eşitler!*

*37. L: Hayır, daha fazlası, öyle görünüyor ki onlar dikler, bunu gözlemledim…*

*…*

*44. Öğrenciler birlikte: Hey, bunlar iki üçgen!*

*45. L: Doğru, ALC ve ICM, bunlar iki üçgen… peki neleri var?*

*46. G: Aynı karenin kenarları olduklarından, |AC| |IC|'ye eşittir…*

*47. L: Bekle!*

*48. G: |AC| |IC|' ye eşittir, çünkü onlar aynı karenin kenarlarıdır, sonra?*

*49. L: |LC|…*

*50. G: |LC| |CM|' ye eşittir, neden?*

*51. L: |CM|' ye eşittir çünkü… Benim düşünceme göre, şunu kanıtlamak daha iyi olur… Hayır, bekle bu açı dik ve bu açı da dik"* [26].

Bu örnekte bir grup halinde öğrencilerin geçirmiş olduğu argümantasyon sürecini görmekteyiz. Aşağıda bir başka problem durumuna ilişkin bir öğrencinin bireysel olarak geçirdiği argümantasyon sürecine yer verilmektedir. Kanıtı istenen ifade cebir alanından seçilmiştir:

*"Eğer p ve q tek sayılar ise (p-1)($q^2$-1)/8 ifadesi hakkında ne söyleyebilirsiniz?"* [27].

Öğrencinin bireysel olarak geçirdiği argümantasyon süreci:

*"Eğer p=11 ve q=13 ise o zaman… (öğrenci hesaplama yapar) sonuç 210 olur.*

*Eğer p=7 ve q=9 ise o zaman sonuç 60…*

*Sonuçlar çift sayı çıkıyor…*

*O zaman muhtemelen (p-1)* $(q^2 - 1)/8$ *bir çift sayıdır"* [27].

Argümantasyon sürecinde yer alan birey kendi ürettiği argümanının muhtemelen doğru olduğuna inanır. Bu inancı doğrultusunda argümanını destekleyici kurallara, ilkelere ve günlük yaşamdan örneklere başvurabilir. Ancak birey ürettiği argümanının bazı istisnai durumlar ortaya çıkarıldığında çürütülebileceğini de genellikle kabul eder [2]. Böyle bir istisnai durum ortaya çıktığında ya argümanından vazgeçer ya da argümanını bu duruma karşı savunmaya çalışır.

Bunlar ve bunlara benzer daha pek çok örnek durumu, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin Toulmin Modeli'ne göre analizlerini ve karşılaştırmalı sonuçlarını, derlenen çalışmalara yer verdiğimiz bir sonraki bölüm olan "Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri Arasındaki İlişkiler" bölümünde görebilirsiniz.

### 1.1.3. Hipotez

Argümantasyon sürecinde üretilen bazı fikirler, anlayışlar ve kavrayışlar *hipotez (ya da varsayım)* olarak tanımlanmaktadır (Balacheff, 1994; akt. [24]). Hipotez Özer ve Arıkan [34]'a göre, mantıklı görünen ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış bir durumdur. Bir teoreme ait çözüm süreci boyunca bir argümantasyon aktivitesinin bir hipotez üretmek için geliştirildiği düşünülmektedir [24]. Balacheff ve Margolinas (2005, akt. [24]), hipotezi *"ifade", "argümantasyon"* ve *"fikirler sistemi"* olarak ifade etmektedirler.

Pedemonte [24]'ye göre, hipotez her zaman bir argümantasyonun sonucu değildir; bazen de bir projeden, bir sezgiden vb. şeylerden çıkan bir *"gerçek"* olabilmektedir. Bu durumda bu gerçeği doğrulayan açık bir iddia yoktur [24].

Balacheff (1994, akt. [24])'e göre, bazı hipotezler bir ifadeyi doğrular nitelikte bir argümantasyon kurulmasını sağlar ise o zaman söz konusu ifade potansiyel olarak *"doğru"* bir ifade olmaktadır. Hipotez, kendisini doğrulayan nitelikte bir kanıt yapılması durumunda ise *"geçerli ifade"* ye dönüşmektedir [24].

Argüman ve argümantasyon kavramlarının açıklaması esnasında yer verdiğimiz örneği düşünelim:

*"ΔABC bir üçgendir. Üçgenlerin kenarları üzerine dıştan 3 adet kare çizilmiştir. Karelerin boşta kalan köşeleri birleştirilerek 3 üçgen daha oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin alanlarını ΔABC'nin alanı ile karşılaştırın"* [26].

Öğrencilerin problem durumu üzerinde çeşitli argümanlar üreterek geçirdikleri argümantasyon sürecinin sonunda sezgisel olarak ortaya koydukları *"bu üçgenlerin alanları eşittir"* sonucu söz konusu argümantasyon süreci sonunda üretilen hipotezdir [26]. Geçerli ifadeye dönüşebilmesi için kanıtlanmaya ihtiyaç duyar. Bu hali ile bir sezgi, bir varsayım, bir iddiadan öteye gidememektedir.

### 1.1.4. Geçerli İfade

*Geçerli ifade*, matematiksel bir teoriye atıfta bulunan nitelikte bir kanıt ile doğrulanan ifade olarak tanımlanmaktadır [24]. Bu türden bir ifade geçerlidir; çünkü matematiksel bir teori söz konusu ifadeyi doğrulayan bir kanıtın yapılmasına imkan vermektedir [24]. Argümantasyon süreci sonunda üretilen hipotez kanıtlandığı durumda geçerli ifadeye dönüşmektedir.

### 1.1.5. Matematiksel Teori ve Teorem

Matematiksel teorinin başlıca özelliği aksiyomatik bir sistem olmasıdır. Aksiyomatik bir sistem bir takım terimler ve bu terimlerin birleşmesinden meydana gelen önerme veya önerme biçimlerinden kurulur [35].

Terimler;

1. İlkel (tanımlanmayan) terimler
2. Tanımlanan terimler

olmak üzere iki gruba ayrılır. Bir sistemde sonsuz geriye gidişe ya da çıkmaz döngüye düşmeksizin her terimi tanımlayamayacağımız için bazı terimlerin tanımlanmaksızın, sezgisel anlamları ile kabul edilmesi zorunludur. Örneğin geometride nokta, doğru gibi terimler bu tür ilkel terimlerdir [35].

Yıldırım [35]'a göre, önerme veya önerme biçimlerine gelince onlar da ikiye ayrılmaktadır:

1. İlkel (kanıtlanmaksızın kabul edilen) önermeler: Bunlara *aksiyom* ya da *postulat* denir.
2. Kanıtlanan önermeler: Bunlara *teorem* denir.

Mariotti, Bussi, Boero, Ferri, Garuti [25], teoremi *"ifade", "kanıt" ve "matematiksel teori"* olarak tanımlamaktadırlar. Bir ifadeyi geçerli kılan bir kanıtın yapımını sağlayan bir takım dedüktif kuralların ve ilkelerin sistemi olan matematiksel teori ile teorem ortaya çıkar.

Sisteme giren önermelerin doğru kurulması ve teoremlerin kanıtı için bazı kurallara da ihtiyaç vardır. Bunlardan birinci gruba *"kurma kuralları",* ikinci gruba ise *"çıkarım kuralları"* denir. Kurma kuralları tıpkı gramer kuralları gibi, cümlelerin düzgün biçimde kurulmasını sağlamaya yarar. Çıkarım kuralları ise teoremlerin üretilmesinde ya da kanıtında mantıksal geçerliliğin denetimini sağlar [35].

Aksiyomatik bir sistem, aslında kapsamı geniş dedüktif bir çıkarımdan başka bir şey değildir. Aksiyomlar öncülleri, teoremler de onların mantıksal sonuçlarını oluşturur. Aksiyomlar daha önce de belirtildiği gibi kanıtlanmaksızın kabul edilen temel önermelerdir. Bunlar doğru değilse teoremlerin doğru olduğu söylenemez. Ancak bunlar doğru ise, teoremlerin doğruluğu kesinlik kazanır. Bu demektir ki, bir teoremin kanıtı teoremin doğru olduğu anlamına gelmez. Kanıt sadece teoremin dayandığı aksiyom veya aksiyomları doğru sayarsak, teoremi de doğru saymak gerektiğini bizim için zorunlu kılar. Yoksa teoremin kendi başına doğru olduğunu ortaya koymaz [35].

### 1.1.6. Mantıksal Düşünme

Mantık, rasyonel veya mistik her türlü düşünme biçimleri arasında en soyut ve genel olanıdır ve hepsinin temelinde yer alır. Mantığın genel ilkeleri bütün konularda geçerlidir, yere ve zamana bağlı değildir. *"Düşünme Yasaları"* diye bilinen şu üç ilkede bu özellik açıkça görülür [35]:

(P bir önerme değişkenidir, herhangi bir önerme yerine kullanılmıştır.)

1. P doğru ise P doğrudur (Bu ilke kimi kez <bir şey A ise A'dır> diye ifade edilir).
2. P hem yanlış hem de doğru olamaz ( <Bir şey hem A hem de A değil olamaz>).
3. P ya doğru ya da yanlıştır (Bir şey <ya A'dır ya da A değildir>).

Mantık olayların açıklanması ile değil, doğru düşünme kuralları ile uğraşır. Mantık bazı önermeleri doğru saydığımızda başka hangi önermeleri doğru saymamız gerektiğini araştırır. Mantık hangi çıkarım kurallarının geçerli, hangilerinin geçersiz olduğunu ayırt etmemize yarayan çıkarım kuralları denilen birtakım ölçütleri bulmaya ve saptamaya çalışan ve bu kuralları uygulama teknikleri geliştiren biçimsel (formel) bir bilimdir [35].

Mantıksal düşünmenin bir sonucu olarak bir bilgi alanını birkaç temel kavram ve ilke çerçevesinde toplamak, mantıksal yönden düzenlemek, düşünce ve işlemde ekonomi, açıklık ve kesinlik sağlamak *"aksiyomatikleştirme"* olarak tanımlanmıştır. Aksiyomatik yöntemin kiminle, ne zaman başladığı kesin olarak belirlenmiş değildir [36]. Yıldırım [36]'e göre, kanıt kavramının matematiğe Thales'in geometride birçok teoremi kanıtlaması ile girdiği tahmin edilse de, ne onun ne de onu izleyen Pisagorcular'ın aksiyomatik sistem anlayışına ulaştıkları kolayca söylenemez. Öklid (Euclides İ.Ö. 330 - 275), günümüz matematiğinde halen kullanılan aksiyomatik kanıt yöntemini ortaya koyan isim olup; yazmış olduğu 13 ciltlik *"Elements"* adlı kitabı matematik derslerinde geçen birçok teorem ve önermenin matematiksel kanıtlarını içermektedir [37].

Aksiyomatikleştirmenin aritmetik ve cebirde değil, ilk olarak geometride kendisini göstermesi ilginçtir. Yıldırım [36], sayısal alanda ortaya çıkan bunalımların buna sebep olduğunu belirtmektedir. Yıldırım [36]'a göre bir diğer sebep, geometrik ilişkilerin şekiller aracılığıyla dile getirilme olanağıdır. Dönüşümlerin ve çıkarımların şekiller üzerinde gösterilmesi büyük kolaylık sağlamaktaydı.

### 1.1.7. Matematiksel Düşünme

En genel anlamda matematiksel düşünme, *"matematiksel teknik, kavram ve yöntemleri problem çözme sürecinde dolaylı ya da doğrudan kullanmak"* şeklinde tanımlanabilir (Henderson vd., 2004, akt. [38]). Birey yaşamı boyunca okulda, işte, günlük hayatta problem çözmeye çalışır (Blitzer, 2003, akt. [38]). Bunun için de matematiksel düşünmeye gereksinim duyar. Bu nedenle bireyler, yaşamlarının her aşamasında karşılaştıkları olay ve olguları çözümlemede, farkında olarak ya da olmayarak, matematiksel düşünmeyi kullanırlar.

Matematiksel düşünmeyi tümüyle dedüktif ya da tümüyle indüktif diye nitelendirmek yanlıştır. Matematiksel kanıt dedüktif çıkarsamaya dayandığından pek çok kimse matematiği salt dedüktif yapıda bir bilim sayar. Oysa günlük düşünmede olduğu gibi matematikte de indüktif diyebileceğimiz düşünme biçimleri vardır [36].

Matematiksel düşünmenin tanımı dikkate alındığında, oldukça soyut olduğu fark edilmektedir. Matematiksel düşünmeyi *"somutlaştırmak"* amacıyla araştırmacılar matematiksel düşünmenin özelliklerini, bileşenlerini ve matematiksel düşünmeyi diğer düşünmelerden ayıran hususları inceleme yoluna gitmişlerdir. Bu bağlamda, matematiksel düşünme *tahmin etme, genelleme, hipotezde bulunup test etme, soyutlama, muhakeme etme, kanıtlama* ile yeni bir bilgi ya da kavrama ulaşma özellikleriyle diğer düşünmelerden ayrılır (Alkan ve Bukova Güzel, 2005, akt. [38]).

Arslan ve Yıldız [38]'a göre alan yazın incelendiğinde, farklı araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini ortaya koymaya çalıştıkları görülmektedir. Örneğin Tall (2002, akt. [38]) matematiksel düşünmenin *soyutlama (abstraction), sentezleme (synthesizing), genelleme (generalizing), modelleme (modelling), problem çözme (problem solving) ve kanıt (proof)* gibi bileşenleri kapsadığını ifade etmektedir. Stacey, Burton ve Mason (1985, akt. [38]) da matematiksel düşünmenin *özelleştirme (specializing), genelleme (generalizing), hipotezde bulunma (conjecturing), doğrulama ve ikna etme (justifying and convincing)* bileşenlerini incelemişlerdir. Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar (2003, akt. [38]) ise Stacey, Burton ve Mason'un çalışmalarına dayanarak matematiksel düşünme sürecinin *ayrıntılamak (özelleştirme), genelleştirmek, tahmin etmek ve ikna etmek* bileşenlerinden oluştuğunu ifade etmişlerdir. Liu (2003, akt. [38]) ise matematiksel düşünmeyi *"tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formel ve informel olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi"* olarak tanımlamıştır.

### 1.1.8. İndüktif- Dedüktif Ayırımı

Yıldırım [36], vermiş olduğu örnekte indüktif ve dedüktif düşünme ayırımını şöyle yapmaktadır:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Bu denklem başlangıçta emprik yollardan (belki de salt rastlantı sonucu) bulunan bir ilişkiyi, 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların küplerinin toplamı ile o sayıların toplamının karesi arasındaki eşitliği dile getiren bir genellemedir.

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Bu şekilde algılanan bu ilişkinin daha sonra gelen sayılar için de geçerli olup olmadığı bir merak konusudur. Matematikçi ister istemez örneklerini genişletecek, ilk dört sayıyı izleyen sayıları da yoklayarak sonunda ilk genellemeye ulaşmaktan geri kalmayacaktır. İndüktif bir düşünme sürecine değinen matematikçi Polya düşüncelerini şöyle ifade etmektedir:

> "Böyle bir genellemeye giderken biz, doğa bilimcileri gibi davranmaktayız. Merak çekici bir bitki ya da garip görünen jeolojik bir oluşumla karşılaşan bilim adamı nasıl incelemesini genişletmekten kendini alamazsa, matematikçi de spesifik bir gözlemde sezinlediği ilişkiyi başka gözlemlerde yoklamaktan, ilerde ispatlanabilecek bir genellemeye ulaşma çabasından kendini alamaz.
>
> …"

Bir ilişkiyi gözlemleme, sezinleme ya da rastlantıyla bulma psikolojik bir olaydır; kuralı belli mantıksal bir çıkarsamaya indirgenemez. Oysa hem genellemeye gitmek, hem de ulaşılan genellemeyi kanıtlamak mantığın ilgi alanına giren işlemlerdir. Biri indüktif, diğeri dedüktif düşünme sürecini içerir.

Yıldırım [36], görünüme bakıp matematiği salt dedüktif mantıkla bir tutmanın yanlışlığının altını çizmektedir.

### 1.1.9. Argümantasyon Temelli Muhakeme - Dedüktif Temelli Muhakeme

Argümantasyon temelli bir muhakeme yerine dedüktif temelli bilişsel bir analizin olması gerektiğini savunan Duval (1991, akt. [23]) argümantasyon temelli ve dedüktif yapı temelli muhakemeler arasında karşılaştırma yaparak bazı çıkarımlar ortaya koymuştur:

- Argümantasyon temelli muhakemede ifadelerin sezgisel kapsamları önemli iken; dedüktif temelli muhakemede ifadeler çıkarım kurallarında etkili oldukları ölçüde önem taşımaktadır.
- Argümantasyon temelli muhakeme argümanların desteklenmesi ya da argümanlara karşı çıkılması ile yürür. Argümantasyon temelli muhakemede, önceki aşamanın sonuçları ya da paylaşılan ifadeler sürekli olarak tekrar tekrar yorumlanır. Bu durumda bir argümandan diğerine geçiş geçici bir bağ ile birbirine bağlıdır. Bunun tersine dedüktif temelli muhakemede, bir adımın sonucu diğer bir adımın çıkarım kuralıdır. Verilen bir adımın sonucu bir sonraki adım için *"giriş ifadesi"* niteliğindedir. Bu durum bir çember döngüsü oluştururken, dedüktif temelli muhakemeyi bir hesaplamalar zinciri haline getirmektedir.
- Bir ifadenin kesinlik veya sahip olduğu inandırıcılık değeri olarak tanımlanan *"epistemik değer"* kavramı da bu iki tip muhakemede farklılık göstermektedir. Argümantasyon temelli muhakemede doğru olan ifadeler aynı epistemik değere sahip değildir. Oysa matematikte kanıtlanan ifadelerin kanıtla birlikte epistemik değerleri değişir; onlar matematikte doğru ve gerekli bir nitelik kazanırlar.

### 1.1.10. Formel Kanıt

*Formel kanıt*, önermelerin ya da önerme kalıplarının ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır [36]. Douek [23]'e göre formel kanıt mantıksal tahminlere, hesaplamalara indirgenebilen kanıt olarak düşünülmektedir. Formel kanıt Duval (1991, akt. [23])'e göre dedüktif bir yapı gerektirir. Hersh (1993, akt. [7])'e göre formel aksiyomlar üzerine kurulu ve formel çıkarım kurallarına dayanan formel kelime dağarcığı ile ifade edilmelidir. Eldeki genelleme, doğruluğu önceden varsayılan ya da bilinen bir veya daha fazla önermenin zorunlu sonucu olarak gösterilebildiğinde, formel kanıt yapılmış olur [36]. Başka bir deyişle A gibi bir önermeyi doğru saydığımızda, B gibi başka bir önermeyi de doğru saymak zorunda olduğumuz ortaya konduğunda, B kanıtlanmış demektir [36].

Bir teoremin formel kanıtı daha önce de belirtildiği gibi, o teoremin doğru olduğu anlamına gelmez. Sadece teoremin dayandığı aksiyom veya aksiyomları doğru sayarsak, teoremi de doğru saymak gerektiği anlamını taşır. Yoksa formel anlamda kanıt, o teoremin kendi başına doğru olduğunu ortaya koymaz [35].

Buna paralel olarak formel anlamda kanıtlama, önerme veya formüller arasındaki mantıksal ilişkileri belirtik hale getirmek, aksiyomları doğru kabul ettiğimizde daha hangi önerme veya formülleri doğru kabul etmemiz gerektiğini göstermek için başvurulan işlemdir (çıkarımdır) [36].

Yıldırım [36]'a göre, kanıtın formel görünümü biraz aldatıcıdır. Her şey mantıksal adımlarla, öncüllerden sonuca gitmekten ibaret değildir. Çoğu kez kanıtın daha ilk adımında konuya ilişkin bilgilerden, benzer durumlardan, bilinen örneklerden ve deneyimlerden yararlanılma yoluna gidilir. Bu tür etkinlikler doğrudan mantığa indirgenemeyen arayışlardır [36]. Bu nedenle matematiği salt dedüktif mantıkla bir tutmak yanlıştır.

### 1.1.11. Matematiksel Kanıt

*Matematiksel kanıt*; bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümden gelimsel bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003, akt. [12]).

Matematikte kanıtlama bir ifadenin doğruluğunu, bilinen gerçeklerden, tanımlardan ve önceki teoremlerden ya da sonuçlardan, doğru çıkarımları yaparak ve mantık kuralları uygulayarak gösterme olarak tanımlanırken; sonuçta ortaya çıkan geçerli argüman ise matematiksel kanıt olarak ifade edilmektedir [7].

Pedemonte [24]'ye göre; hipotezi açıklayan ifade, bir matematiksel teori kullanılarak geçerli hale getirildiğinde kanıt üretilmiş demektir ve bu kanıt matematiksel teori üzerine kurulmuş özel bir argümantasyondur.

İncelenen araştırmalarda kanıt yapmak, üniversite seviyesindeki öğrenciler *için "bir ifadeyi belirli aksiyomlardan ve kabullerden yola çıkarak genelleştirmek, sistematik bir düzen içerisinde bir ifadenin doğruluğunu göstermek"* olarak ele alınırken; ilkokul seviyesindeki öğrenciler için *"bir ifadenin doğruluğunu basit, daha çok sezgisel yollarla göstermek ve bunu doğru ve eksiksiz bir üslupla adım adım anlatabilme becerisi"* olarak kabul edilmiştir.

Douek, matematiksel kanıt hakkında Thurston (1994; akt. [23])'ın şu düşüncesini paylaşmaktadır:

> "İnsani becerilerimiz ile anlayabildiğimiz ve kontrol edebildiğimiz kanıtlar aslında bizim için en önemli kanıtlardır. Onlar formel kanıtlardan oldukça farklıdır. Gelecekte formel kanıtlar artık etkisini tamamen yitirecek ve göz ardı

edilecektir. Matematiksel geçerlilik kontrolünü insani yeteneklerimiz ölçüsünde yapabildiğimiz kanıtlar değer kazanacaktır."

### 1.2. Toulmin Modeli

İnformel mantığın kurucularından Toulmin [39], bir alana ve konuya ilişkin yapılan tartışmanın yapısını analiz edebilmek için altı bileşenli bir model ortaya koymuş ve bu model zaman içinde "Toulmin Modeli" adını almıştır. Toulmin [39], bu modeli hukuki davaların temele alındığı durumlar için geliştirmiştir. Daha sonra bu model farklı araştırmacılar tarafından farklı alanlarda kullanılmıştır.

Toulmin Modeli'nin ortaya çıkışı, Toulmin'in *"Argümanın Kullanımları (The Uses of Argument)"* [39] kitabında da belirttiği gibi, formel mantığın tartışma analizlerinde yetersiz kalmasına dayanır. Dinçer [2], formel mantığın tartışma analizlerindeki yetersizliğinin sebeplerini şöyle açıklamaktadır:

1. Formel mantığın dayandığı üç ilke vardır (Hançerlioğlu, 1989, akt. [40]): *Özdeşlik ilkesi* (bir şey kendisinin aynısıdır), *çelişmezlik ilkesi* (bir şey hem doğru hem yanlış olamaz) ve *üçüncü durumun olanaksızlığı ilkesi* (bir şey ya doğrudur ya yanlıştır, üçüncü bir olasılık yoktur). Matematik gibi, formel mantığın kullanıldığı alanlarda bir tartışma ya geçerlidir ya da geçersizdir.
2. Öğrencilerin düşünce gelişimleri için önemli olan, fakat formel mantığın *"mantıksız"* olarak tanımlayacağı düşünceleri olabilir (Knipping, 2008, akt. [2]). Ancak formel mantık bir düşünceyi mantıksız olarak tanımladıktan sonra analize devam edemez. Böylece öğrencilerin bu tipteki düşüncelerini analiz etmede formel mantık yetersiz kalır.
3. Formel mantıkta tartışma yalnızca nedenlerden sonuca gitmek olarak algılanır. Formel mantık varsayımsal, nedensel, koşullu, geçici tartışma biçimlerine veya tanımlama, sınıflandırma, açıklama, değerlendirme, karar verme, öneride bulunma gibi farklı tartışma amaçlarını karşılamakta yetersiz kalmaktadır (Brockriede, 1980, akt. [40]).
4. Formel mantığın kuralları alandan bağımsızdır. Hâlbuki bir tartışma analiz edilirken tartışmanın ait olduğu alan dikkate alınmalıdır. Örneğin, matematik alanında yapılan bir tartışmadaki argümanların değerlendirilmesinde kullanılacak kurallar ile hukuk alanında yapılan bir tartışmada öne sürülen argümanların değerlendirilmesinde kullanılacak kurallar birbirinden farklıdır.

5. Formel mantıkta tartışma yalnızca nedenlerden sonuca gitmek olarak algılandığı için tartışmanın bir sonu vardır. Oysaki her tartışmanın bir sonu olmak zorunda değildir.

İnformel mantık ise kurallarla, ilkelerle sınırlı değildir. Öncüllerle sonuçlar arasındaki ilişkiler zayıf veya kuvvetli olabilir; öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğuna tam bir güvence sağlamamakla birlikte ona, değişen derecelerde olasılık kazandırır. Bu nedenle bu tür tartışmalarda sonuçlar değiştirilemeyecek, kesin ifadelerle değil, olasılıklarla belirtilir (Fisher ve Sayles, 1966, akt. [40]). Bu sebeplerden dolayı Toulmin, tartışma analizlerinin informel mantık çerçevesinde yapılmasının daha uygun olduğunu düşünmüş ve bu amaca yönelik olarak Toulmin Modeli'ni geliştirmiştir.

Toulmin Modeli'nin hukuk alanındaki tartışma analizlerinde kullanılmasının ardından genel tartışmalar için de kullanılıp kullanılamayacağı araştırılmıştır [2]. Toulmin'e göre mahkeme salonlarında, soruların ortaya çıktığı hukuki süreçler ile başlangıçtaki iddiayı desteklemek için tartışmaların kurulduğu rasyonel süreçler arasındaki benzerliğin incelenmesiyle bir takım ipuçları yakalamak mümkündür [2].

Toulmin'in bu düşüncesine paralel olarak, matematiksel kanıt ile hemen öncesinde gerçekleşen ya da gerçekleşmesi beklenen argümantasyon süreci arasındaki benzerliklerin incelenmesi ile bu süreçler hakkında birtakım ipuçları yakalamak mümkün olacaktır. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin benzerlikleri açısından incelenmesi, öğrencilerin geçirdikleri kanıt süreci hakkında fikir edinmek ve bu süreci daha sağlıklı analiz etmek açısından faydalı olacaktır.

### 1.2.1. Toulmin Modeli'nin Temel Yapısı (İddia-Veri-Gerekçe)

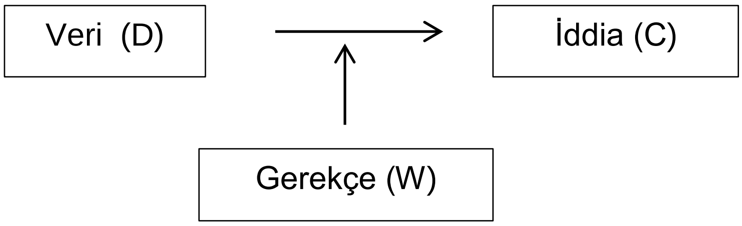
Toulmin kendi modelinin sahip olduğu bileşenlerin birbirinden nasıl ayırt edileceğine *"Argümanın Kullanımları"* kitabında değinmiştir. Herhangi bir argümantasyonda ilk adım bir başlangıç noktası olarak ifade edilmektedir. Toulmin terminolojisinde başlangıç noktası *iddia (claim)* olarak adlandırılmaktadır. İkinci adım, iddiayı destekleyen *veri (data)* üretimi aşamasıdır. Veri-iddia ilişkileri için veriye destek niteliğinde doğrulama ya da *gerekçe (warrant)* sağlamak önemlidir. Bu gerekçe veri ve iddia arasındaki ilişki için garanti sağlayıcı niteliktedir. Garanti bir prensip, bir kural ya da benzeri olarak ifade edilebilir; veri ve iddia arasında köprü rolü oynar.

Pedemonte [20; 24] çalışmalarında Toulmin Modelindeki temel bileşenleri kısaca şöyle ifade etmektedir:

Sonuç / İddia (Claim: C) : Konuşmacının ifadesi,

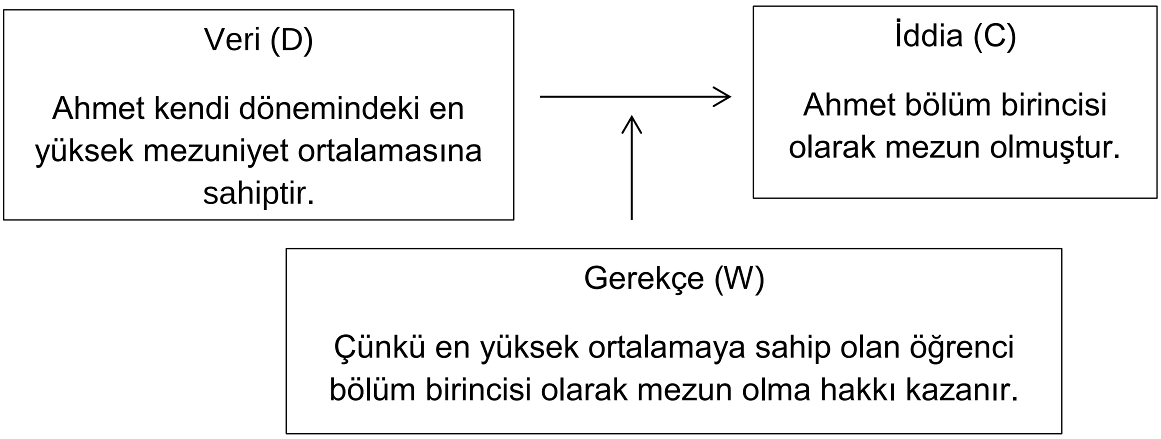
Veri (Data: D) : İddiayı doğrulayan ifadeler,

Gerekçe (Warrant: W) : Veriyi iddiaya bağlayan çıkarım kuralı.




Şekil 1.1. Toulmin Modeli’nin temel yapısı

*“Ahmet kendi dönemindeki en yüksek mezuniyet ortalamasına sahiptir. En yüksek ortalamaya sahip olan öğrenci bölüm birincisi olarak mezun olma hakkı kazandığından, Ahmet bölüm birincisi olarak mezun olmuştur.”* Argümanını yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.




Şekil 1.2. Toulmin Modeli’nin temel yapısı örneği

Bu örüntüden açıkça belli olduğu üzere iddia, veriden direk olarak çıkmaktadır. Burada gerekçe bir anlamda açıklayıcı ve isteğe bağlıdır. Toulmin [39] gerekçeyi ilk olarak, veri ile iddia arasında köprü görevi görecek olan hipotezsel ifadeler şeklinde tanımlamasına rağmen, gerekçenin açıklayıcı bir ifade olabileceğini de ifade etmiştir.

### 1.2.2. Toulmin Modelindeki Yardımcı Bileşenler

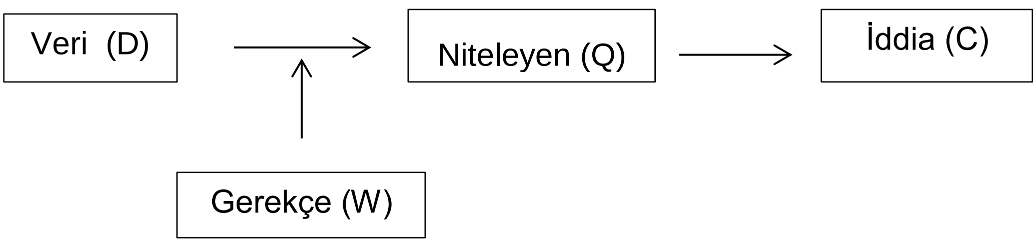
Bir argümantasyonu tanımlamak için yedek/yardımcı bileşenler gerekebilmektedir. Toulmin [39] bu yardımcı bileşenlerden üçünü şöyle tanımlamaktadır: *Niteleyen (qualifier), çürüten (rebuttal) ve destek (backing).* Gerekçenin gücü, kuralla ilgili istisnalar olduğu durumlarda zayıflayabilir. Bu istisna durumlarında çürüten bileşeni ortaya çıkmalıdır. O zaman iddia, niteleyen yardımıyla zayıflatılmak zorundadır. Destek, böyle bir durumda ortaya çıkarak gerekçenin gücünü arttırmaya çalışır. Toulmin Modelindeki yardımcı bileşenlere ilişkin daha fazla bilgi aşağıdaki bölümlerde verilmektedir.

#### 1.2.2.1. Niteleyen Bileşeni

Bir argümantasyon sürecinde argümanları üreten bireyler iddiaları ve verileri arasındaki ilişkiyi desteklemek amacıyla farklı türde gerekçeler üretebilmektedirler. Bu gerekçelerin savunulan iddialar üzerinde farklı derecede etkileri vardır. Bazı gerekçeler veriyi kuşkuya yer bırakmayacak şekilde iddiaya bağlar. Bu tür gerekçelerin kullanımı durumunda iddia *"kesinlikle, mutlaka"* gibi zarflarla nitelendirilebilir. Bazı gerekçeler ise kesin olmayan bir şekilde veya koşullara, istisnalara, sınırlamalara bağlı olarak veriyi iddiaya bağlar. Bu gibi durumlarda iddia ifadesi *"muhtemelen, büyük ihtimalle, galiba"* gibi zarflarla nitelendirilir. Bu durumda verinin, gerekçe ile elde edilen iddia üzerindeki etkisinin derecesini gösteren bir ifadeye ihtiyaç vardır. Bu ifade Toulmin tarafından *"niteleyen"* olarak adlandırılmıştır [2].

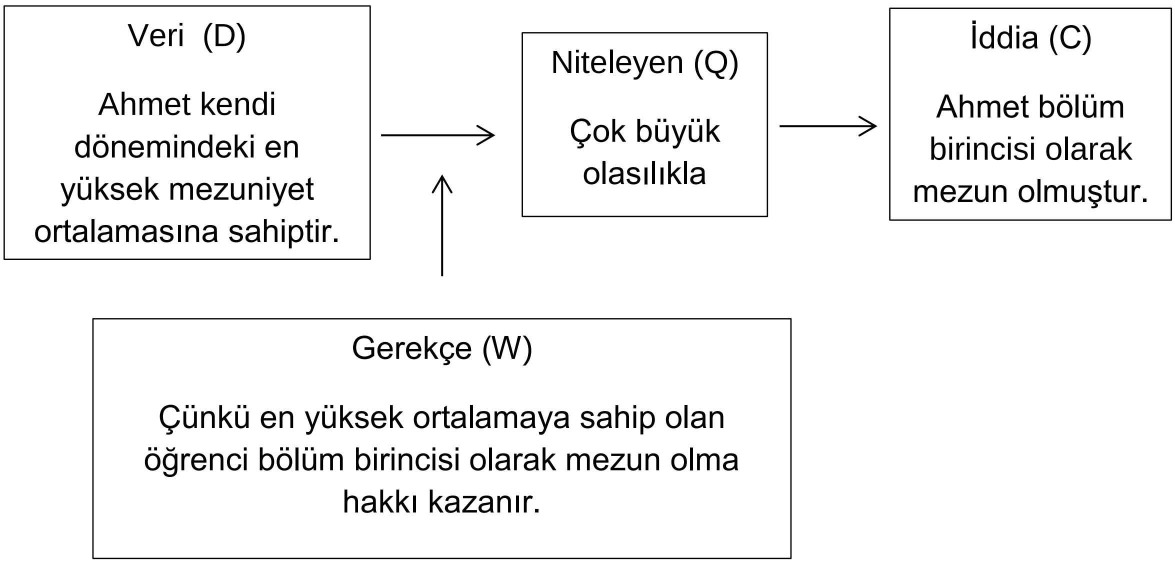
İddia gücünü verinin gücünden alır. Niteleyen ise gücünü, verinin ve gerekçenin gücünden alır. Gerekçenin gücü önemlidir, çünkü gerekçe argümantasyonda temel bir rol oynar [20].

Niteleyen bileşeninin de eklenmesiyle örüntünün yeni şekli şöyle olur:




Şekil 1.3. Toulmin Modeli'nde niteleyen bileşeni

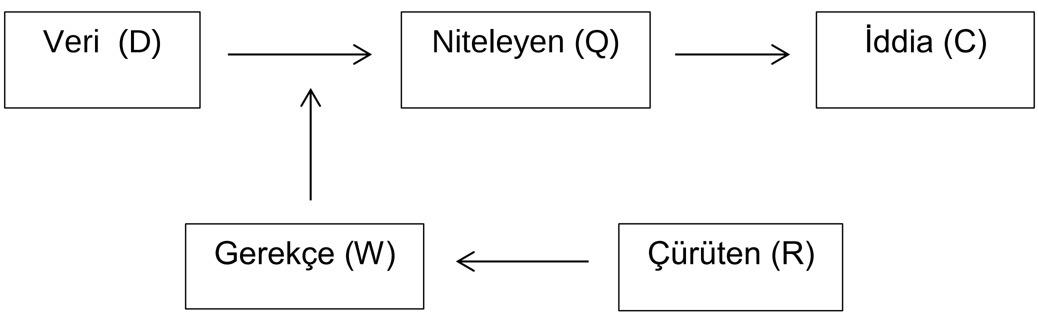
Örneğin, *“Ahmet kendi dönemindeki en yüksek mezuniyet ortalamasına sahiptir. En yüksek ortalamaya sahip olan öğrenci bölüm birincisi olarak mezun olma hakkı kazandığından, Ahmet çok büyük olasılıkla bölüm birincisi olarak mezun olmuştur.”* argümanını yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.




Şekil 1.4. Toulmin Modeli’nde niteleyen bileşeni örneği

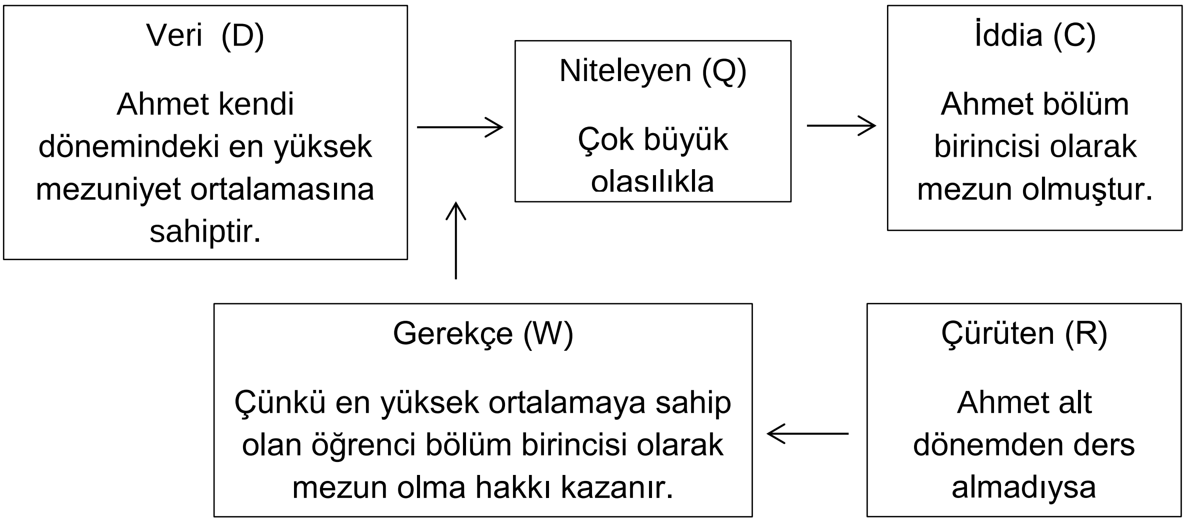
### 1.2.2.2. Çürüten Bileşeni

Gerekçenin genel gücünü, etkisini zayıflatan ya da geçersiz kılan istisnai koşullar Toulmin tarafından *“çürüten”* olarak adlandırılmıştır. Bu istisnai koşulların gerekçe vasıtasıyla ulaşılan sonucu, yani iddiayı çürütme kapasitesi vardır [2]. Böyle bir durumda istisnai koşullar çürüten bileşeni olarak modele eklenir. İddia niteleyen yardımıyla zayıflatılır. Çürüten bileşeninin de eklenmesiyle örüntünün yeni şekli aşağıdaki gibi olur:




Şekil 1.5. Toulmin Modeli’nde çürüten bileşeni

Örneğin, *“Ahmet kendi dönemindeki en yüksek mezuniyet ortalamasına sahiptir. Ahmet alt dönemden ders almadıysa, en yüksek ortalamaya sahip olan öğrenci bölüm birincisi olarak mezun olma hakkı kazandığından, çok büyük olasılıkla Ahmet bölüm birincisi olarak mezun olmuştur.”* ifadesini yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.

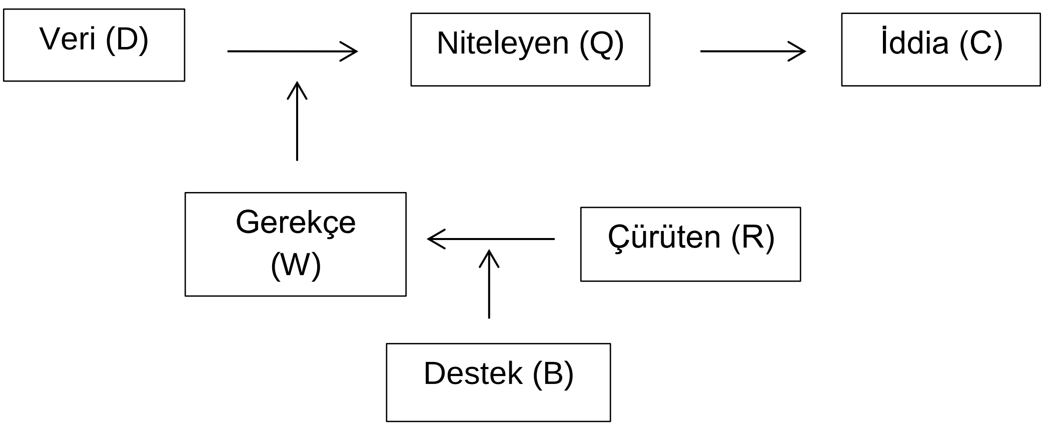



Şekil 1.6. Toulmin Modeli’nde çürüten bileşeni örneği

### 1.2.2.3. Destek Bileşeni

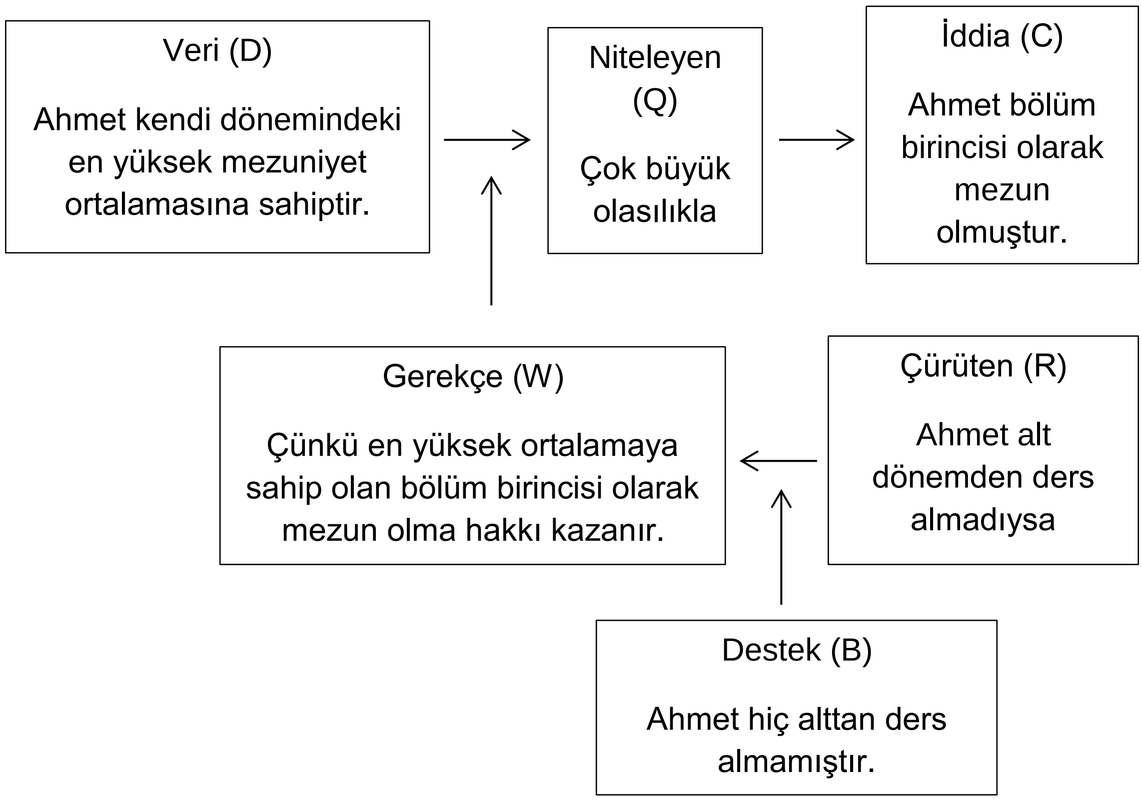
Eğer garantinin otoritesi doğrudan doğruya kabul edilmezse, desteklemeye ihtiyaç duyulur. Gerekçelerin arkasında duran başka güvenceler de vardır ve bunlar olmaksızın gerekçelerin tek başına geçerliliği yoktur. Bu güvencelere Toulmin *“gerekçenin desteği”* adını vermiştir.

Destek bileşenin de eklenmesiyle örüntü son şeklini alır:




Şekil 1.7. Toulmin Modeli’nde destek bileşeni

*“Ahmet kendi dönemindeki en yüksek mezuniyet ortalamasına sahiptir. Ahmet alt dönemden ders almadıysa, en yüksek ortalamaya sahip olan öğrenci bölüm birincisi olarak mezun olma hakkı kazandığından, çok büyük olasılıkla Ahmet bölüm birincisi olarak mezun olmuştur. Evet, çok büyük olasılıkla Ahmet bölüm birincisi olarak mezun olmuştur. Çünkü transkriptine göre Ahmet hiç alttan ders almamıştır.”* ifadesini yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım:




Şekil 1.8. Toulmin Modeli’nin tüm bileşenleri örneği

Toulmin’in (2006, akt. [2]) kendisinin de belirttiği gibi *“Argümanın Kullanımları”* kitabını yayınladığında ilk olarak meslektaşları kitaptaki fikirleri benimsememiş ve muhalif olmuşlardır. Sonrasında Toulmin’in fikirleri hukuk ve psikoloji gibi alanlardaki uzmanlar tarafından ele alınmış ve Toulmin Modeli’nin tartışmalara tam olarak uyduğunu görmüşlerdir. Bunun üzerine Toulmin Modeli Amerika Birleşik Devletleri’nde konuşma iletişimi (speech communication) alanında kabul görmüş ve argümantasyon üzerine olan ders kitaplarında Toulmin Modeli zorunlu bir bölüm olarak yer almıştır.

Loui (2006, akt. [2]) sosyal bilimler, beşeri bilimler, bilim ve teknoloji alanındaki başlıca dergilerde yapılan atıfların Toulmin ve çalışmalarını yirminci yüzyılın felsefi mantıkçıları ve bilim filozofları arasında ilk ona yerleştirdiğini bildirmiştir. Toulmin [39] kendi fikirlerinin bir sonu olmadığını bir başka deyişle modelinin çeşitli alanlarda yorumlanması gerektiğinde ısrarcı olmuştur. Gerçekten de Felsefe alanında Toulmin Modeli, modelin sahip olduğu bileşenlere çeşitli anlamlar yüklenerek farklı şekillerde yeniden oluşturulmuştur. Toulmin'in iddialarına bazı filozoflar itiraz etmiş ve bu itirazlara cevap başka filozoflar tarafından verilmiştir [2].

### 1.2.3. Matematik Eğitimi Araştırmalarında Toulmin Modeli'nin Kullanımı

Dinçer [2], doktora tezi çalışması kapsamında Toulmin Modeli'nin matematik eğitiminde kullanılması üzerine yapmış olduğu alan yazın taramasında incelediği çalışmalara dayanarak, Toulmin Modeli'nin kullanım alanlarını 3 kategoride toplamıştır:

1. Kanıt Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar
2. Tanım Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar
3. Problem Çözme Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar

Matematik eğitiminde Toulmin Modeli'ni ilk olarak Krummheuer [41] kullanmış; sınıf ortamındaki matematiksel tartışmaları Toulmin Modeli ile analiz etmiştir. Krummheuer bu analizinde modelin çürüten ve niteleyen bileşenlerini kullanmamış ve modele yeni bir bileşen ekleme ihtiyacı da hissetmemiştir. Krummheuer [41]'in çalışmasından sonraki çalışmalarda da çürüten ve niteleyen bileşenleri pek dikkate alınmamıştır.

Inglis vd., [42], Toulmin Modeli'ni kullanan önceki çalışmalarda dikkate alınmayan niteleyen bileşeninin, matematiksel tartışmalarda önemli bir rol oynadığını belirtmiş ve analizlerini niteleyen bileşenini de göz önüne alarak yapmıştır.

Krummheuer [43] matematik öğreniminin, öğrencinin argümantasyon sürecine katılımına bağlı olduğunu varsaymaktadır. Toulmin Modeli'ni kullanarak yapmış olduğu analizlerinde Krummheuer [43], grup olarak gerçekleştirilen argümantasyon sürecinde gerekçe üretilmesine katkıda bulunan öğrencilerin, bulunmayanlara göre konuyu daha çok bildiğini ve daha çok anladığını söylemiştir.

Knipping [44], kanıt yapma sürecindeki argümanları lokal ve global argüman olmak üzere ikiye ayırarak tanımlamış ve bu argümanları yeniden yapılandırmak için Toulmin Modeli'ni kullanmıştır.

Pedemonte [20], bir hipotezi destekleyen argümantasyon ile onun matematiksel kanıtı arasındaki bilişsel sürekliliği ya da mesafeyi, Toulmin Modeli içerisine entegre edilmiş Ck¢ modeli ile analiz etmiştir. Pedemonte [20; 24; 26; 27; 28]'nin sonrasında yaptığı çalışmalara bakıldığında hem geometri hem de cebir alanında incelemelerini genişlettiği ve argümantasyon süreci ile matematiksel kanıt süreci arasındaki ilişkiyi yapıları açısından da incelediği, bilişsel sürekliliğin yanı sıra yapısal sürekliliği ya da mesafeyi de Toulmin Modeli'ni kullanarak analiz ettiği görülmektedir.

Dinçer [2] tanım oluşturma sürecinde ortaya çıkan argümantasyon sürecinin Toulmin Modeli ile analizini yapan çalışmalara çok az rastlandığını belirtmektedir. Dinçer [2] doktora tezi çalışmasında üniversite öğrencilerinin analiz dersinde tanım oluşturma sürecinde argümantasyon süreci geliştirdiklerini gözlemlemiş ve bu süreçleri Toulmin Modeli'ni kullanarak analiz etmiştir.

Dinçer [2], *Educational Studies in Mathematics, The Journal of Mathematical Behavior, ZDM The International Journal on Mathematics Education, Research in Mathematics Education, For The Learning of Mathematics* adlı dergilerde yaptığı taramalarda problem çözme sürecindeki tartışmaların incelendiği bir çalışmaya rastlamadığını ve problem çözme sürecinin bir argümantasyon olarak ele alınmadığını belirtmektedir. Dinçer [2] kendi çalışmasında üniversite seviyesindeki öğrencilerin problem çözme sürecini incelemiş ve geçirdikleri argümantasyon sürecini Toulmin Modeli'ne göre analiz etmiştir.

Ülkemizde yapılan çalışmalarda argümantasyon sürecinin tartışma ile eş anlamlı olarak kullanıldığı ve sınıf içi tartışmaların Toulmin Modeli kullanılarak analiz edildiği görülmektedir. Oysa yurt dışında argümantasyon kavramını *"tartışma"* anlamının yanı sıra *"öğrencilerin kanıt yapmaya başlamadan önce verilen ifadeden yola çıkarak hipotez oluşturmak amacıyla bireysel olarak geçirdikleri süreç"* olarak da ele alan ve bu süreç ile kanıt süreci arasındaki ilişki ya da ilişkileri saptamaya yönelik analizler yapan çalışmalar da yapılmaktadır. Bu çalışmalarda argümantasyon sürecinin kanıt sürecini önemli ölçüde etkilediği görülmüştür.

Bunun üzerine bu iki süreç karşılaştırmalı olarak Toulmin Modeli'ne göre analiz edilmiş ve iki süreç arasındaki bağlantı çözümlenmeye çalışılmıştır. Bu sayede argümantasyon sürecinin kanıtı ne yönde ve nasıl etkilediği saptanmaya çalışılmıştır. Araştırmacılar bunu yaparak öğrencilerin kanıt yaparken yaşadıkları zorlukların temeline inmeyi ve yaşadıkları sıkıntıların asıl nedenlerini bulmayı amaçlamışlardır.

Bu tez çalışmasının konusu yapılmış olan bu çeşit çalışmaları derlemek ve elde edilen analiz sonuçlarını olabildiğince doğru ve objektif biçimde yansıtmaktır.

### 1.3. Araştırmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı argümantasyon ve kanıt arasında karşılaştırma yaparak, bu iki süreç arasındaki benzerlik ve farklılıkları ortaya koyan ve bu yolla argümantasyon ve kanıt arasındaki ilişki ya da ilişkileri analiz eden çalışmaları inceleyerek, bu konuya ilişkin bir derleme çalışması yapmaktır. Söz konusu çalışmalar bu bağlamda tarihsel sıralamaları dikkate alınarak incelenmiş ve yapılan analizler bire bir olarak yansıtılmıştır. Bu sayede konu ile ilgili günümüze kadar elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak verilmeye çalışılmıştır. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri ile ilgili kavramlar olabildiğince ilk kaynaklara ulaşılarak açıklanmıştır.

### 1.4. Araştırmanın Önemi

Ülkemizde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkileri karşılaştırmalı olarak analiz etmeye yönelik bir çalışmaya henüz rastlanmamıştır. Bu nedenle bu konuda yapılmış uluslararası alanda öne çıkan araştırmaların derlenmesi ile oluşan bu çalışmanın, hem bu alanı genç araştırmacılara tanıtması hem de gelecek yıllarda ülkemizde yapılacak bu alandaki muhtemel çalışmalara öncü bir basamak oluşturarak yeni gelişmelere ışık tutması hedeflenmektedir.

# 2. YÖNTEM

Bu çalışma argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin Modeli'ne göre analiz eden çalışmaların derlenmesi ile oluşturulmuş nitel bir çalışmadır.

Derlenecek çalışmaların toparlanması için 2012 yılının Temmuz-Aralık ayları boyunca tarama yapılmıştır. Çalışmalara ulaşmak için ilk olarak yurt içi kaynaklı çalışmalar taranmıştır.

Bu amaçla 1990-2013 yılları arasında konuya ilişkin yapılmış yüksek lisans ya da doktora tezi olup olmadığını belirlemek için YÖK Dokümantasyon Dairesi Başkanlığı'nın Web Sitesi'nde tarama yapılmıştır. Tarama yapılırken anahtar sözcük olarak sırasıyla argümantasyon, matematiksel kanıt ve Toulmin sözcükleri girilmiştir. Bulunan çalışmalardan matematik eğitimi alanında yapılmış olanlar inceleme altına alınmıştır. Sonuçlar aşağıdaki tabloda verildiği şekilde elde edilmiştir.

**Çizelge 2.1:** YÖK dokümanlarında yapılan tarama sonuçları 1990-2013

| | Bulunan Çalışmalar | | İncelemeye Alınan Çalışmalar | |
|---|---|---|---|---|
| | Doktora | Yüksek Lisans | Doktora | Yüksek Lisans |
| Argümantasyon | 11 | 29 | 1 | - |
| Mat.sel Kanıt | 2 | - | 2 | - |
| Toulmin | 3 | 6 | 1 | - |
| Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt ve Toulmin | - | - | - | - |
| Toplam | 15 | 35 | 3 | - |

*"Argümantasyon"* sözcüğü ile yapılan tarama sonucunda bulunan ve matematik eğitimi alanında konumuzla ilgili yapılmış bir çalışma olması dolayısıyla inceleme altına alınan çalışma, *"Toulmin"* sözcüğü ile yapılan tarama sonucunda bulunan ve inceleme altına alınan çalışma ile aynı olduğundan toplamda 3 farklı çalışma

incelenmiştir. Bu çalışmalardan biri tez konusu ile beklenildiği kadar ilgili olmaması sebebiyle inceleme dışı bırakılmıştır.

Bunun ardından ULAKBİM'de yine aynı anahtar sözcüklerle 1990-2013 yılları arasında tarama yapılarak konuya ilişkin araştırma makaleleri, derleme makaleler ya da mezuniyet çalışmaları olup olmadığı belirlenmiştir. Bulunan çalışmalardan matematik eğitimi alanında yapılmış olanlar inceleme altına alınmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmektedir.

**Çizelge 2.2:** ULAKBİM'de yapılan tarama sonuçları 1990-2013

| | Bulunan Çalışmalar | İncelemeye Alınan Çalışmalar |
|---|---|---|
| Argümantasyon | 6 | 1 |
| Matematiksel Kanıt | 7 | 3 |
| Toulmin | 3 | 1 |
| Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt ve Toulmin | - | - |
| Toplam | 15 | 4 |

*"Toulmin"* anahtar sözcüğü ile bulunan üç çalışmadan biri konumuzla doğrudan ilgili olması sebebiyle inceleme altına alınmıştır. Bu çalışma *"argümantasyon"* sözcüğü ile yapılan taramada elde edilen çalışmanın aynısıdır. Sonuç olarak toplam dört çalışma incelenmiştir. Anahtar sözcüklerinin hepsinin birlikte kullanılması ile yapılan taramada ise hiçbir sonuca ulaşılamamıştır.

TOKAT (Ulusal Toplu Katalog) veri tabanında 1990-2013 yılları arasında argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri ya da bu süreçler arasındaki ilişkiler konusunda yapılmış bir çalışma olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan taramada elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmektedir. Üç anahtar sözcüğün de birlikte aratılması sonucunda hiçbir çalışmaya ulaşılamamıştır.

**Çizelge 2.3:** TOKAT taramasında bulunan sonuçlar 1990-2013

| | Bulunan Çalışmalar | İncelemeye Alınan Çalışmalar |
|---|---|---|
| Argümantasyon | 20 | - |
| Matematiksel Kanıt | 1 | 1 |
| Toulmin | 3 | 3 |
| Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt ve Toulmin | - | - |
| Toplam | 24 | 4 |

Yurt içi veri tabanlarında yapılan taramalar sonucunda inceleme altına alınan çalışmalar bilgisayar ortamına kaydedilmiş ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Aynı olan çalışmalar saptanmış; konu ile yeteri kadar ilgili olmayan çalışmalar elenmiştir.

Yurt dışında konuya ilişkin yapılmış çalışmaları belirlemek için ERIC ve SPRINGER veri tabanlarında aynı anahtar sözcüklerle 1990-2013 yılları arasındaki belgelerde tarama yapılmıştır. Böylece *Educational Studies in Mathematics, The Journal of Mathematical Behaviour, International Journal of Science and Mathematics Education, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Journal für Mathematik-Didaktik, International Journal of Computers for Mathematical Learning, Afrika Matematika, International Group for the Physchology of Mathematics Education, Mathematics Teaching in the Middle School, International Journal of Science and Mathematics Education, The Educational Review, Teaching Mathematics and its Applications* dergilerinde matematik eğitimi alanında yapılmış makaleler taranmıştır.

ERIC veri tabanında 1990-2013 yılları arasında yapılan taramada anahtar kelime *"argumentation"* olarak girildiğinde matematik eğitimi alanında yapılmış 44 çalışma bulunmuştur. Anahtar kelimelere *"mathematical proof"*u da ekleyince çalışma sayısı 15'e düşmüştür. Son olarak anahtar kelimelere *"Toulmin"*i de ekleyince çalışma sayısı 5'e inmiştir.

SPRINGER veri tabanında yapılan taramada 1997-2013 yılları arasında *“argumentation”* anahtar sözcüğü ile 224 çalışma, *“argumentation, mathematical proof”* anahtar sözcükleri ile 136 çalışma, *“argumentation, mathematical proof, Toulmin”* anahtar sözcükleri ile 20 çalışma bulunmuştur.

Elde edilen bu çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş, konu ile ilgili en temel nitelikte olanları belirlenmiştir. Çalışmaların tarihsel sıralaması göz önüne alınmış, bu sayede konunun süreç içinde gelişimi belirlenmeye çalışılmıştır. İncelenen çalışmaların referans kısımlarında yer alan ve önemli olduğu düşünülen ancak taramalar esnasında bulunamamış çalışmalara erişilmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak 1990-2013 yılları arasında argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini karşılaştırarak bu iki süreç arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyan ve bu iki süreç arasındaki ilişkileri Toulmin Modeli’ne göre analiz eden çalışmalar bir araya getirilmiştir.

# 3. ARGÜMANTASYON VE KANIT SÜREÇLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini açıklayan ve bu iki süreç arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin Modeli'ne göre analiz eden çalışmalara tarihsel sıra gözetilerek yer verilmektedir. Yapılan taramalar sonucunda bulunan çalışmaların hepsine bu bölümde ayrıntılı olarak yer vermek yerine; konuyu en net biçimde yansıtan, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini karşılaştırarak bu süreçler arasındaki ilişkilerin analiz örneklerine açık ve anlaşılır biçimde yer veren çalışmalar seçilmiştir.

Bu çalışmaların bir kısmı argümantasyon ve kanıt süreçlerini ve bu iki sürece ilişkin kavramları açıklayıcı nitelikte çalışmalardır. Bu çalışmalarda argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerine ilişkin bilgi verildiği ve iki sürecin benzerliklerinin ve farklılıklarının ortaya konulduğu görülmektedir.

Çalışmaların bir diğer kısmı ise bu iki süreç arasındaki ilişkileri belirlemeye yönelik yapılmış deneysel süreçlere yer veren çalışmalardır. Bu çalışmalarda çeşitli yaş gruplarından ve başarı seviyelerinden öğrenciler ile çalışılmış; öğrencilere geometri ya da cebir alanından ifadeler verilerek öğrencilerin geçirdikleri argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri incelenmiştir. Bu çalışmalarda öğrencilerin verilen bir ifade üzerinde fikir yürüttükleri ve ifadenin kanıtına ilişkin bir hipotez ortaya koydukları argümantasyon süreçlerinin ve ardından ürettikleri hipotezlerini kanıtladıkları kanıtlama süreçlerinin Toulmin Modeli'ne göre analizlerinin yapıldığını ve bu yolla iki sürecin karşılaştırıldığını görmekteyiz.

Konuya ilişkin ilk çalışmalar geometri alanında yapılmıştır. Sonrasında 2000'li yıllarda Pedemonte'nin çalışmaları ile birlikte araştırmaların cebir alanında da yapılmaya başlandığı görülmektedir.  Bu durumun ardından geometri alanında yapılan analizlerde elde edilen sonuçlar, cebir alanında yapılan analizlerde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmaya başlanmıştır. Geometri ve cebir alanında yapılan analiz sonuçların farklılıkları ve bu farklılıkların nedenleri belirlenmeye çalışılmıştır.

Bu bölümde yer verilen çalışmaların tarihsel sıra gözetilerek sunulması, konunun tarihi gelişim sürecini yansıtması açısından büyük önem taşımaktadır.

### 3.1. Teoremlere Okuldaki Geleneksel Yaklaşımın Sorgulanması: Teoremlerin Bilişsel Bütünlüğü Hakkında Bir Hipotez

Boero, Garuti, Lemut ve Mariotti [45] bu çalışmalarında, 8. Sınıf öğrencilerinin ifade üretmelerinin ve ürettikleri ifadenin kanıtını yapmalarının altında yatan zihinsel süreçlerle ilgili bir hipotez ortaya konulmuş ve bu hipotez deneysel bir çalışmayla doğrulanmaya çalışılmıştır.

Araştırmacıların hipotezi 8. sınıf öğrencilerinin çoğunluğunun

1. Hipotez üretme sürecinde ifadesi üzerinde yoğun bir argümantasyonel aktivite ile çalışması,
2. İfadeyi kanıtlama aşamasında bir önceki aşamada ürettiği argümanları mantıksal bir zincire göre organize ederek iki süreci uyumlu biçimde bağlaması

durumunda ifade üretebildikleri ve ardından ürettikleri ifadenin kanıtını yapabildikleri şeklindedir.

Öğretme deneyinin yapımı aşamasında araştırmacılar, öğrencilerin hipotez üretebilmeleri ve argümantasyon ile matematiksel kanıt süreçleri arasındaki benzerliklerin ya da farklılıkların görülebilmesi için uygun şartlar yaratmaya çalışmışlardır.

Deneyde çalışılan öğrenciler daha önce matematiksel olan ya da olmayan farklı alanlarda düşüncelerini yazarak argüman üretme alışkanlığını benimsemiş öğrencilerdir. Aynı zamanda daha önce cebirsel alanda ve geometri alanında ifade üretme deneyimi yaşamışlar ve cebir alanında kanıt üretme girişimlerinde bulunmuşlardır [45; 46; 47].

Çalışmada tasarlanan görev, gölgeler ile ilgili bir yaşantı alanı [45; 46; 47] oluşturarak yapılandırılmıştır. Öğrenciler sınıfta toplam 80 saat boyunca bu yaşantı alanında performans göstermişlerdir. Yıl içindeki (farklı günlerde) ve bazı günlerin sabahında oluşan gölge olaylarını dikkatli biçimde gözlemlemişler ve kaydetmişlerdir.

Gölgelerin oluşumu konusunun seçilmesinin sebebi, bu alanın öğrencilere hipotez üretme imkânı vermesidir. Üretilen hipotezler uzay geometrisi açısından anlamlıdır ve durumu temsil eden çizimlerin kanıt içerisine yerleştirilmeden kanıtın yapılması kolay değildir.

Öğrencilerden üzerinde hipotez üretmeleri istenen durum şöyle verilmiştir:

> Gözlemlere göre yatay zemin üzerindeki iki dik çubuğun gölgeleri her zaman paraleldir. Peki dik bir çubuğun ve eğik bir çubuğun gölgeleri hakkında ne söylenebilir? Gölgeler paralel olur mu? Hangi zamanlarda? Ne zaman? Her zaman mı? Asla mı? Hipotezinizi genel bir ifade olarak formüle ediniz.

Çalışmaların bireysel ya da çiftler halinde yapılması konusunda seçim öğrencilere bırakılmıştır. Problem durumunun dinamik keşif (dynamic exploration) sürecini desteklemek için bazı ince, uzun çubuklar ve polistiren üç platform alınmıştır. Çoğu öğrenci ince çubuklarla ve kalemlerle çalışmaya başlamışlardır. Neler olduğunu görmek için çubukları hareket ettirmişler ya da kendileri düzenek etrafında dönmüşlerdir. Öğrenciler gözlerini kapatarak sınıfta spotların ya da güneş ışığının etkisini yok etmişlerdir. Böylece hayal güçlerini kullanarak hipotezlerini oluşturmaya çalışmışlardır. Araştırmacılar bu durumu şöyle tasvir etmektedirler: *“bakan” aklın gözleri idi.*

Sonrasında öğrenciler hipotezlerini bireysel olarak yazmışlardır. Öğrencilerin ürettikleri hipotezler öğretmen rehberliğinde sınıfta tartışılmış ve problem durumu ile ilgili olarak farklı yaklaşımları yansıtan doğru hipotez ifadeleri seçilmiştir.

Öğrencilerin problemi ortaya koyması ve hipotezleri üretmesi aşamaları için video kayıtlar yapılmış, tartışmalar ve öğrenci-öğretmen etkileşimleri teybe kaydedilmiş, bütün öğrencilerden bireysel olarak yaşanan sürece ilişkin metin yazmaları istenmiştir. Bazı öğrencilerin hipotez oluşturma ve kanıt yapma süreçlerine ilişkin elde edilen verilere çalışmada yer verilmiştir.

Biz de bu çalışmada Beatrice adlı öğrenciden elde edilen verileri konunun daha iyi anlaşılması adına aşağıda vermekteyiz:

**Beatrice:**

> *“Bir çubuğu düz koymayı denedim ve diğerini farklı pozisyonlarda tuttum (sağa, sola, geriye, öne hareket ettirerek) ve bir cetvelle paralel ışınlar oluşturmaya çalıştım. Gölgeleri bir parça kâğıda çizdim ve gördüm ki; eğer bir*

*çubuk sağa ya da sola hareket ederse gölgeler paralel olmuyor, öne ya da arkaya hareket ederse gölgeler paralel oluyor. Bir düzlem üzerinde bir çubuğu dik tutup diğer çubuğu öne ve arkaya hareket ettirirken, iki çubuk her zaman aynı yönde bulunuyorlar, yani onların ışınları aynı yol üzerinde karşıladıkları söylenebilir, bu nedenle gölgeler paraleldirler. Çubuğu sağa ve sola yatırırken ise, iki çubuk artık aynı yönde bulunmuyorlar, bu yüzden güneş ışınlarını aynı yol üzerinde karşılamıyorlar ve bu durumda gölgeler paralel olmuyor. Yani eğer bir çubuk dik dururken diğerini öne ya da arkaya hareket ettirirsek gölgeler paralel olur."*

**Kanıt:**

*"Gölgeler paraleldir, çünkü dik yüzeye gelen güneş ışınları eğik olan çubuğa dik gelmektedir. Fakat tüm bunlar bize durumun neden doğru olduğunu açıklamamaktadır. Her şeyden önce çubuklardan biri dik ve diğeri eğik durmasına rağmen aynı hizada duruyorlar ve eğer eğik çubuk dik yüzey boyunca hareket ettirilirse çubukların gölgelerinin paralel olduklarını görürüz. Sonuç olarak gölgeler doğal olarak paralel olmak zorundadırlar."*

Öğrencinin muhakeme süreci, ifadeyi geçerli hale getirmenin gerekliliği konusunda bilinçli olduğunu göstermektedir. *"Fakat bunların tümü bize ifadenin neden doğru olduğunu açıklamaz"* cümlesi bunun bir göstergesidir. İncelenen diğer pek çok metin de benzer durumları yansıtmaktadır. Güneşin hareketi ya da çubuğun hareketi ile ifadenin üretildiği dinamik sürece, kanıtlama sürecinde tekrar rastlanmaktadır. Ancak bu süreçler arasında dikkat çekici benzerlikler olmasına rağmen düşünme süreçlerinde işlevsel olarak derin farklılıklar olduğu da görülmektedir.

Öğrencilerden bazıları doğru hipotez kurabilseler de hipotezlerini destekleyen argümanları üretememişlerdir. Bu durum, sonrasında yapılan kanıtta argümanların eksik ve oldukça karmaşık olmasına sebebiyet vermiştir.

İçinde yüksek ve düşük seviyeli öğrencilerin olduğu bir grup öğrenci ise yanlış hipotez üretmişlerdir. Bu öğrenciler özel durumlara yoğunlaşmışlardır. Sınıfta yapılan tartışmalardan sonra, bu öğrencilerden bazılarının kanıtlama sürecinde bulamadıkları sebepleri kafadan attıkları/uydurdukları görülmüştür. Bu öğrencilerin hipotezlerini kanıtlamak için hipotezlerini yeniden kurmak zorunda kaldıkları ve argümanlarını yeniden yapılandırdıkları görülmüştür.

Sonuç olarak toplanan verilerin tutarlı olduğu ve araştırmacıların hipotezini makul kıldığı görülmüştür. Analizlere göre ifadenin üretimi ile ilgili olarak, argümantasyon sürecindeki düşünme önemli bir işlevi yerine getirmektedir: Argümantasyon sürecindeki muhakeme öğrencilere bilinçli olarak farklı alternatifleri keşfetme şansı vermekte, aşamalı olarak ifadeyi özelleştirmeye yardımcı olmakta, üretilen argümanların olasılığını doğrulama imkânı vermektedir. İfadenin üretimi sürecinde zayıf argümantasyonun her zaman kanıtın üretimi sürecinde argümanların eksikliğine yol açtığı görülmüştür. Diğer taraftan yanlış hipotez üreten öğrenciler sonradan kanıtı üretmek için geçerli hipotezi yeniden yapılandırma ihtiyacı duymaktadırlar.

Bu sonuçlar hipotezin üretimi ve üretilen hipotezin kanıtının yapımı arasında yakın bir ilişkinin varlığını göstermiştir. Dahası ifadelerin üretimi sürecinde sunulan bireysel argümanlar ve kanıt sürecinde geliştirilen muhakeme yolları arasındaki tutarlılık şunları ortaya çıkarmıştır:

1. Bir öğrencinin ifade üretme sürecindeki argümantasyonel düşünme tipini, kanıt yaparken ifadenin doğrulanması aşamasında devam ettirdiği,
2. Hipotez aşamasındaki dinamik sürecin (güneşin ya da çubuğun hareketi) neredeyse her zaman kanıt aşamasındaki ile aynı olduğu görülmüştür.

Söz konusu araştırmacıların üzerinde çalıştıkları hipotez, geleneksel okul yaklaşımını sorgulaması bakımından da önemli sonuçlara sahiptir. Geleneksel okul yaklaşımında öğretmen, öğrencilere kanıtları anlayıp anlamadıklarını sormakta ve kendisinin yaptıklarını tekrar etmelerini istemektedir. Sadece son aşamada öğretmen genellikle de en iyi seviyedeki öğrencilere ifadenin kanıtını sormakta, bu durumda bile kanıt çoğunlukla öğrenci tarafından üretilmemekte; öğretmenin önerdiği ya da yönlendirdiği şekilde olmaktadır. Çok nadiren öğrencilerden kendi kendilerine hipotez üretmeleri istenmektedir. Oysaki bu çalışmada elde edilen sonuçlara göre ifade üzerinde, ifadenin kanıtına yönelik hipotezler üretmek, öğrencilere kanıtlarını yapılandırmaları konusunda büyük ölçüde yardımcı olmaktadır. Öğretmenler kanıt öğretiminde öğrencilerine kanıtını yapacakları ifade üzerinde hipotez üretme şansı tanımalı, hipotez oluşturma aşamasında ürettikleri argümanları kanıtlarında yapılandırma konusunda yönlendirici olmalıdırlar. Çünkü öğrenciler argümantasyon sürecinde ürettikleri argümanlarını kanıt aşamasında da devam ettirebildikleri ölçüde geçerli kanıt yapma olasılıklarını arttırmaktadırlar.

### 3.2. Hipotezleri (Konjektürleri) Üretmede ve Kanıtlamada Temel Olan Bazı Dinamik Zihinsel Süreçler

Boero, Garuti ve Mariotti [48], 3.1.'de yer verilen çalışmalarındaki aynı deneyi ve analiz sonuçlarını temel alarak bu çalışmayı yapmışlardır. Bu çalışmanın matematikte hipotezlerin üretimi ve kanıtlanması süreçlerinin altında yatan zihinsel süreçleri analiz etmeye yönelik olarak yapıldığı belirtilmektedir. Bu tip analizlerin, hipotez ve kanıt üretimini gerektiren uygun problem durumlarını ve sınıf çalışmalarını öğrencilerin büyük çoğunluğunun başarılı olmasını sağlayacak şekilde düzenlemek açısından bizlere ipuçları vereceği düşünülmektedir.

Bu çalışmada, *"söz konusu öğretme deneyi ile matematiksel hipotezleri üretme ve kanıtlama arasında bir ilişki var mıdır?"* sorusuna cevap aranmıştır. Bu çalışmanın hipotezi, hem hipotez üretimi aşamasında hem de kanıt yapımı boyunca problem durumunun dinamik keşfinin göz önüne alınmasının önemli olduğuna yönelik olarak şöyle belirlenmiştir:

1. Hipotez üretimi ile ilgili olarak: İfadenin koşul kısmı problem durumunun dinamik keşfinin bir ürünü olabilir: "eğer… , o zaman…"
2. Kanıt yapımı ile ilgili olarak: Bir ifadenin yeter koşulu için kanıt, özel bir durumun dinamik keşfinin bir ürünü olabilir. Bir ifadenin gerek ve yeter koşulu için ("… ancak ve ancak ...") koşulun gerekli olduğunu kanıtlamak, problem durumunun dinamik keşfini sürdürerek yapılabilir.

Bu öğretme deneyinde, gölgeler ile ilgili dinamik öğrenme ortamı öğrencilerin problem durumunu dinamik olarak keşfedebilmeleri için seçilmiştir.

Aktiviteler aşağıdaki adımlara göre organize edilmiştir.

1. Problemi kurmak

Öğrenciler kendi tercihlerini yaparak bireysel ya da çiftler halinde çalışmışlardır. Problem durumunun dinamik keşif sürecini desteklemek için öğrencilere ince, uzun ve polistiren çubuklar dağıtılmıştır.

2. Hipotezler üretmek

Çoğu öğrenci ince çubuklarla ya da kalemlerle çalışmaya başlamışlardır. Çubukları hareket ettirmişler ya da neler olduğunu görmek için kendileri düzenek etrafında dönmüşlerdir. Öğrenciler gözlerini kapatmışlardır. Sınıfta güneş ışığının ya da spot ışıklarının olmaması, formüle ettikleri hipotezleri doğrulamalarını engellemiştir; araştırmacıların tasvir ettikleri şekilde söyleyecek olursak; *“akıl gözleri ile görmeye”* çalışmışlardır. Daha sonra öğrenciler hipotezlerini bireysel olarak yazmışlardır.

3. Hipotezleri tartışmak

Öğretmen yardımıyla doğru hipotez ifadeleri bulunana kadar hipotezler sınıfta tartışılmıştır.

4. İfadeleri düzenlemek

Hipotezlerin öğretmen rehberliğinde tartışılmasının ardından bazı ifadeler bulunmuştur.

> *“Eğer güneş ışınları eğik çubuğun yüzeyine dik geliyorsa, gölgeler paralel olur.”*
>
> *“Eğer eğik çubuk, üzerine güneş ışınları dik gelen bir yüzey boyunca hareket ettirilirse, o zaman gölgeler paralel olur.”*
>
> *“İki çubuğun gölgeleri yalnızca (ancak ve ancak) eğik çubuğun yüzeyine güneş ışınları dik geldiğinde paralel olur.”*

İlk iki ifade öğrencilerin probleme yaklaşım şekillerindeki güneşin hareketi ve çubukların hareketi ile ilgili iki farklı tarzı ortaya koymaktadır. Üçüncü ifade ise gölgelerin paralel olduğu durumun tekliğini açıklamaktadır.

Yapılan diğer tartışmalardan sonra iki ifadenin birleştirilmiş yapısı aşağıda verilmiştir:

> *“Eğer güneş ışınları eğik çubuğun dik yüzeyine geliyorsa, gölgeler paralel olur. Gölgeler paraleldir, yalnızca (ancak ve ancak) eğik çubuğun yüzeyine güneş ışınları dik geldiğinde.”*

*“Eğer eğik çubuk, üzerine güneş ışınları gelen dik bir yüzey üzerinde ise, gölgeler paralel olur. Gölgeler paraleldir, yalnızca (ancak ve ancak) eğik çubuk, güneş ışınlarının geldiği dik bir yüzey üzerinde olduğunda.”*

5. Kanıta Hazırlık

Kanıta hazırlık için şunlar yapılmıştır:

- Öğrencilerin ürettiği hipotezlerden seçilen hipotez ile *“ifadeleri düzenleme”* aşamasında belirlenmiş ifadeler arasındaki benzerlikler ve farklılıklar için bireysel araştırma,
- *“Deneyle hipotezimizi test etmenin olasılığı hakkında ne düşünüyorsunuz?”* şeklinde verilen bireysel görevin yapımı,
- *“Deneyle hipotezimizi test etmenin olasılığı hakkında ne düşünüyorsunuz?”* sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplar üzerine bir tartışma.

Tartışma boyunca, öğrenciler deneysel testin çok zor olduğunu anlamışlardır. Çünkü test sırasında güneşin ve çubukların sonsuz sayıda pozisyonunu düşünüp, bu durumlarda neler olduğunu kontrol etmek gerekmektedir. Bu aktivite boyunca öğrencilerin önyargısız ve eleştirel biçimde ifadeler üzerinde düşünmelerine fırsat verilmiştir. Bu süre içinde öğrenciler kanıt yapma konusunda motive edilmişlerdir. Son aşamada öğrencilerden tüm aktivite ile ilgili olarak evde bireysel bir rapor yazmaları istenmiştir.

Öğretme deneyinde elde edilen sonuçlar, araştırmacıların hipotezini doğrulamaktadır. Öğrencilerin büyük çoğunluğu ifade oluşturmada ve ardından kanıt yapımında üretici olarak yer almıştır. İlk aşama olan *“problemi kurma”* aşamasında, hipotez üretimi boyunca problem durumu üzerindeki dinamik keşifle ilgili olarak yapılan videoteyp analizleri göstermektedir ki, öğrencilerin yarısı kadarı farklı yollarla problem durumunun dinamik keşfini yapmışlardır. Güneşin, eğik çubuğun ve çubuğu destekleyen platformun hareketinin ve kendi hareketlerinin hayalini canlandırmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin bir kısmının bireysel metinlerinde problem durumunun dinamik keşfinden belirgin izler bulunmaktadır.

Çalışmada bazı öğrencilerden elde edilen verilere de yer verilmektedir. Biz de bu çalışmada Simone adlı öğrenciden elde edilen verileri konunun daha iyi anlaşılması adına aşağıda vermekteyiz.

**Simone:**

> *"Eğer dik duran iki çubuk düşünürsek, güneş iki çubuğu aynı doğrultuda görüyorsa gölgeler paralel olur. Eğer bir kişinin güneş konumunda çubukların etrafında dolaştığını düşünürsek, çubuklar paralel durduğunda gölgelerin de iki çubuğun pozisyonunda farklılık görülmediği sürece paralel oldukları gözlenebilir."*

Bazı yanlış hipotezlere de rastlanmıştır. İkinci aşamanın başında, bazı öğrenciler gölgelerin her zaman paralel oldukları hipotezini kurmuşlardır. Geçmiş okul deneyimlerine dayanarak bunu bir çeşit kural, ilke olarak düşünmüşlerdir:

> *"Güneş ışınları paraleldir, öyleyse paralel gölgeler oluştururlar."*

Güneşin ve çubukların farklı hareketleri ile yeni alternatifler keşfeden öğrenciler de olmuştur. Bunlardan Biri Lucia'dır.

**Lucia:**

> *"Gölgelerin paralel olduklarını düşünüyorum çünkü eğik çubuk, zeminde dik duran normal bir obje gibi işlev gösterir. Öyleyse ışınlar bütün objeler için aynı doğrultuda ise, gölgeler paralel olacaktır.*
>
> *…fikrimi değiştirdim…*
>
> *Küçük bir model yaparak gölgelerin paralelliğinin güneşin pozisyonuna dayandığını bulduk. Eğer güneşi çubukların arkasına ya da önüne alırsak, gölgeler paraleldir ancak eğer güneş, çubuklara yanlardan vuruyorsa gölgeler paralel olmaz ve aralarında bir açı oluştururlar."*

İkinci aşama olan "*hipotezler üretme"* aşaması incelendiğinde görülmektedir ki, durumun dinamik keşfi doğru olarak kabul edilen *(paralel çubuklar paralel gölgeler üretirler)* ve doğrulanan *(gölgeler paraleldir)* özellikler arasında mantıksal bağlantı oluşturmaktadır. Kanıtın yapımı sürecinde uygulanan dinamik keşif, hipotezin üretimi sürecinde uygulanan ile dikkate değer benzerlikler gösterir. Bu iki keşif süreci yalnızca düşünme sürecindeki işlevleri açısından farklılık göstermektedirler.

Üçüncü basamak olan *"hipotezleri tartışma"* aşaması ile ilgili olarak araştırmacılar, bazı öğrencilerin güneşi ya da onun ışınlarının geliş pozisyonunu değiştirdiklerini, bazı öğrencilerin ise çubuğu hareket ettirdiklerini görmüşlerdir.

Verilerin analizlerini özetleyecek olursak, öğrenciler deneyin başında gölge olayı üzerine hipotezlerini üretmişlerdir. Hipotezlerini doğruladıklarında muhakeme yoluyla ifadenin doğruluğunu elde etmek zorunda oldukları gerçeğinin farkına varmışlardır. Çoğu dedüktif muhakeme yoluyla geçerli bir kanıt yapmayı başarmıştır. Muhakemelerine doğru olduğunu düşündükleri özelliklerden başlamışlar (*“iki dik çubuk paralel gölgeler üretirler”*) ve kendi yazdıkları senaryo içinde ifadenin doğruluğunu elde etmişlerdir.

Bu yolla öğrenciler ne geometrik bir ifade üretmişler ne de formel bir kanıt yapmışlardır; ne nesneler geometrik birimlerdir, ne de dedüksiyon formel bir çıkarımdır. Fakat öğrencilerin yaptıkları dedüktif muhakeme matematiksel bir kanıtın yapımı ile pek çok benzer özellik taşımaktadır. Dahası öğrencilerin yaptıkları aktivitenin tamamı, matematikçilerin hipotez üretirken ve bazı matematiksel alanlarda (örneğin diferansiyel geometri) kanıt yaparken gerçekleştirdikleri çalışmaları ile pek çok benzer özellik taşımaktadır.

Aslında sanılanın aksine, matematikçiler kanıt yazmanın sadece son aşamasında formel kanıt fikrini yakalarlar. Kanıt yapımı boyunca argümanların araştırılması ve dedüktif bir yolla zincirlenmesi çoğunlukla deneysel yollarla yapılır, benzer modeller referans gösterilir ve düşünülen ifadelerin anlamları göz önüne alınır (Albert & Thomas, 1991, akt. [48]).

Boero vd., [48]’ne göre, hipotez oluşturma süreçlerini geliştirmek için gölge deneyindekine benzer olarak uygun (özellikle “dinamik geometri” alanında, Goldenberg & Cuoco, 1995, akt. [48]) pek çok öğrenme ortamı geliştirilebilir. Cabri, Geometer Supposer ya da Geometer Sketchpad (Bartolini Bussi, 1995, akt. [48]) gibi programlar yardımıyla gölge deneyindekine benzer yaşantı alanları oluşturulabilir. Bunun gibi öğrenme ortamlarındaki analiz sonuçlarının karşılaştırılması farklı potansiyelleri ve limitleri belirleme şansı verecektir.

### 3.3. Geometri Teoremlerine Epistemolojik ve Bilişsel Bir Yaklaşım

Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Franca Ferri, Garuti [25] bu çalışmalarında ifade üretme (hipotez oluşturma) süreci ve üretilen ifadenin kanıtının yapımı arasında ortaya çıkan bir çeşit sürekliliğin altı çizmekte ve bu sürekliliğe ilişkin örnekler vermektedirler.

İfade üretme (hipotez oluşturma) ve üretilen ifadenin kanıtını yapma arasındaki ilişkide neyin rol oynadığı uzun süredir merak konusudur (Alibert & Thomas, 1991; Lakatos, 1976; Thurston, 1994, akt. [25]). Bu iki süreç arasında ifadenin üretimine yönelik argümantasyon tabanlı düşünmenin önemli bir işlevi yerine getirdiği görülmüştür. Boero, Garuti, Lemut ve Mariotti [45]'nin de belirtmiş olduğu gibi, argümantasyonel düşünme öğrencilerin farklı alternatifleri bilinçli olarak keşfetmelerini, ifadeyi aşamalı biçimde özelleştirmelerini ve üretilen hipotezin olasılığını doğrulamalarını sağlamaktadır. Diğer taraftan yanlış hipotez üreten öğrenciler sonradan kanıtı yapmak için geçerli hipotezi yeniden yapılandırma ihtiyacı hissetmektedirler. Bu durum hipotez üretimi ve kanıt yapma arasındaki yakın ilişkiyi göstermektedir. Dahası, ifadelerin üretimi sürecinde ortaya konulan argümanlar ve kanıt sürecinde geliştirilen muhakeme yolları arasındaki tutarlılık şunların göstergesi olmuştur:

1. Bir öğrencinin ifadenin üretimi sürecinde yaptığı argümantasyonel düşünme biçimi, kanıtta ifadenin doğrulanması sırasında çoğunlukla benzer dilsel ifadeler ile devam ettirilir.
2. Hipotez aşamasında kullanılan dinamik süreç kanıt aşamasında kullanılan dinamik süreç çeşidi ile neredeyse her zaman aynıdır.

Bu çalışmada okullarda kanıtın geleneksel öğretim tarzındaki eksik tarafların da altı çizilmektedir. Okullarda kanıtın geleneksel öğretim tarzına göre, öğrenciler hipotezlerin üretilmesi aşamasında nadiren yer almaktadırlar. Öğretmen öğrencilere ifadeyi hazır olarak vererek öğrencinin kendisinin ifade üretmesine ilişkin süreci atlamasına sebep olmaktadır. İfadeyi kendisi üretmeyen ve dolayısıyla da ifadenin kanıtına yönelik hipotez oluşturma sürecini geçiremeyen öğrenci, ifadenin kanıtını yapmakta da zorlanmaktadır. Çünkü ifadenin kanıtında ifadeyi yeniden kendi zihninde yapılandırmaya çalışmaktadır, oysaki kanıt başlamışken bu bilişsel karmaşıklığın yaşanması her şey için çok geç kalındığı anlamına gelmektedir. Araştırmacılara göre, öğrenci adı geçen bilişsel karmaşıklığı kanıtı istenen ifade üzerinde hipotez oluşturma sürecinde yaşamalıdır. Hipotezini oluşturduğu argümantasyon sürecinde bilişsel karmaşıklığı atlatan öğrenci, ifadenin kanıtını yapmakta da zorlanmayacaktır.

### 3.4. Teoremlerin Bilişsel Bütünlüğü ve Kanıt Yapmanın Zorluğu

Garuti, Boero ve Lemut [19] bu çalışmalarında okulda geometri teoremlerini kanıtlarken öğrencilerin karşılaştıkları bazı zorlukları yorumlamak için özel teorik bir yapı tanımlamaktadırlar. *Bir teoremin bilişsel bütünlüğü (cognitive unity of a theorem)* olarak adlandırılan bu yapı, bir hipotezin üretimi ile onun kanıtının üretimi arasında ortaya çıkan sürekliliği temel almaktadır. Bilişsel bütünlük kavramının bazı çalışmalarda *"bilişsel süreklilik"* olarak da kullanıldığı görülmektedir. Bu süreklilik şöyle ifade edilmektedir:

> Hipotezin üretimi sürecinde, öğrenci seçimlerinin olasılığını doğrulaması ile işlevsel olarak iç içe geçen yoğun bir argümantasyon aktivitesi ile ifadesi üzerinde adım adım çalışır. Bir sonraki kanıtlama aşamasında, öğrenci üretmiş olduğu argümanların bazılarını mantıksal bir zincir halinde organize ederek kanıtlama sürecini, argümantasyon süreci ile tutarlı bir yolla birleştirir.

Bu yapı fikri ilk olarak geometricilerin yapmış oldukları çalışmalardaki analizler sonucunda ortaya çıkmıştır. Söz konusu çalışmalarda bir ifadenin üretilmesi ve onun kanıtının yapılması arasındaki sürekliliğe dair pek çok örneğe yer verilmiştir (Lakatos, 1976; Thurston, 1994, akt. [19]).

Hipotez üretme süreci ile kanıt yapımı süreci arasında bilişsel bütünlüğün deneysel kanıtlarına rastlanmasının ardından, araştırmacılar argümantasyon ile kanıt yapma süreci arasındaki belirgin farklara rağmen bu iki süreç arasındaki bağlantıyı araştırmaya yönelmişlerdir.

Bu araştırmada bu amaca yönelik olarak hipotezlerini şöyle belirlemişlerdir:

> İfadenin keşfi ile kanıtlama süreci arasındaki *bilişsel boşluk* ne kadar büyükse, kanıtlama süreci o kadar zor olmaktadır.

Bu hipotez doğrultusunda cevabı aranan araştırma soruları ise şöyledir:

1. Bilişsel bütünlük araştırmacıların ve öğretmenlerin, öğrencilerin verilen bir ifadeyi kanıtlamak zorunda kaldıklarında yaşadıkları zorlukları tahmin etmeleri ve yorumlamaları için bir araç olarak kullanılabilir mi?
2. Bilişsel bütünlük kavramı öğretmenlerin, öğrencilerinin ifadeyi oluşturma ve ifadenin kanıtı yapma süreçleri arasındaki sürekliliği kurmalarını sağlayacak tarzda görevler hazırlamalarını sağlayabilir mi?

Hipotezde adı geçen boşluk, öğrencilerin argümantasyon sürecinden kanıta geçerken atlatmaları gereken bir engel niteliğindedir. Bu boşluğu, yani bir anlamda argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki mesafeyi doldurabilen bir öğrenci kanıtı da büyük olasılıkla doğru yapmaktadır. Ancak öğrenciler bu boşluğun farkında olmayıp, bir ifadeyi destekleyen argümantasyon ürettiklerinde kendilerini ifadeyi kanıtlamış gibi hissedebilmektedirler. Bu durum argümantasyon ve kanıt süreçlerinin benzerliğinden etkilenerek, öğrencinin argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluğu dolduramamasından kaynaklanmaktadır.

Araştırmacılar bu çalışma kapsamında, dinamik keşif sürecinde büyük rol oynayan *"dönüşümsel düşünme"* kavramından da bahsetmektedirler. Kanıtın yapımına yardımcı olduğu düşünülen dinamik keşif sürecini [45], hayali olarak ya da somut olarak şekillerin dönüşümleri olarak tanımlamaktadırlar. Simon [49]'a göre, *dönüşümsel düşünme* matematiksel bir durumun dönüşümünü (transformation) ve bu dönüşümün sonuçlarını düşünmeyi sağlayan fikir yürütme tarzıdır. Teoremleri genellerken, matematiksel fikirler ile bu fikirlerin geçerliliği arasında bağlantı kurarken dönüşümsel düşünme kullanılabilir. Farklı nesnelerin farklı seviyelerde dönüşümlerini yapmak mümkündür: Tamamen sentaktik (söz dizimsel) fakat bir amaca yönelik yapılan dönüşüm (cebirsel dönüşüm temelli bazı kanıt süreçlerinde olduğu gibi; [25]); kanıtlaması daha kolay bir başka ifade elde etmek için yapılan dönüşüm ya da verilen bir ifadeyi bir başka dile çevirmek (örneğin sözel verilen bir ifadenin cebirsel dile dönüşümü gibi) şeklinde yapılan dönüşüm gibi. Garuti vd., [19], bu çalışmada kanıtın, bir ifadenin dönüşümlerinin mantıksal kurallara göre oluşturulan bir zinciri olarak düşünülebileceğini iddia etmektedirler.

Garuti vd., [19], araştırmanın başında belirledikleri hipotezlerinde adı geçen bilişsel boşluğun, ifade üzerinde hipotez üretilmesi ya da yapılacak uygun dönüşümler ile azaltılabileceğini düşünmektedirler (ifadenin formülasyonu ile ya da formülasyon ile temsil edilen durum, ve/ya da referans teori, vb. yoluyla). Bu nedenle hipotez üretme sürecinin ve ifade üzerinde yapılacak çeşitli türden dönüşümlerin, kanıt yapımı için oldukça gerekli ve önemli olduğunu düşünmektedirler.

Çalışmada cebir alanından (temel sayılar teorisi) bazı ifadeler seçilmiştir. Bütün görevler *"… olduğunu kanıtlayın"* şeklinde verilmiştir. Çalışmada veriler 7. sınıftan üniversite seviyesine kadar olan öğrencilerden elde edilmiştir. Çalışma kapsamında bazı öğrencilerin hipotez oluşturma ve kanıt yapma süreçlerine yer verilmiştir. Bu örnekler genel durumu yansıtmalarından dolayı temsili örnekler olarak seçilmiştir.

Öğrencilere sorulan ilk problem durumu aşağıda verildiği şekildedir:

| İki ardışık tek sayının toplamının 4'ün katı olduğunu kanıtlayın. |
|---|

Burada iki öğrencinin çözümlerine yer verilmiştir:

**10. sınıf öğrencisi:**

*"2k+1 ve 2k+3 olarak iki ardışık tek sayı yazabilirim, böylece (2k+1)+(2k+3)=4k+4=4(k+1) bulurum. Bu elde ettiğim sayı 4'ün katıdır."*

Bu öğrenci ifadeyi hemen içselleştirmiştir, iki ardışık tek sayının toplamını uygun bir yolla yazmıştır. Bunu yaparken sözel dili cebirsel dile dönüştürdüğü görülmüştür. Sonra da uygun standart cebirsel dönüşümler yapmıştır. Elde edilen son formülün yorumu, ifadeyi geçerli hale getirmiştir.

**7. sınıf öğrencisi:**

*"Bazı testler yapmalıyım: 3+5=8; 1+3=4; 5+7=12.*

*Şimdi bu toplamaları şöyle yazabilirim: 3+5=3+1+5-1=4+4=8.*

*Bu işlem, söz konusu tek sayıların arasındaki çift sayıyı kendisi ile toplamaktır ve çift bir sayının 2 katı her zaman 4'ün katı olur."*

Bu durumda, öğrenci cebirsel dili bilmemektedir, yani burada öğrencinin ifadeyi cebirsel dile dönüştürmesi için önce ifadeyi keşfetmesi gereklidir. Öğrencinin ifadeyi keşfettiği yer, ardışık iki tek sayıyı toplamanın bu ardışık iki tek sayı arasındaki çift sayıyı kendisi ile toplamak anlamına geldiğini gösterdiği yerdir. Yapılan dönüşümün yorumu (*"bir çift sayının 2 katı…"*), ifadenin geçerliliğini sağlamaktadır. Araştırmacılar, burada öğrencinin *"2 çift sayının toplamı çifttir"* özelliğini kullandığını, yani *"referans teori"* olarak sayıların çok temel bir teorisi çerçevesinde hareket ettiğini belirtmektedirler.

İlk örnekte cebirsel dil kullanılırken, ikincisinde günlük dilin kullanıldığı görülmektedir. İki kanıtlama süreci arasındaki farklılıklara rağmen her iki durumda da ifadenin içselleştirilmesi ile kanıtının yapılması arasında süreklilik vardır. Her iki örnekte de, öğrenciler ifadeyi dönüştürmekte zorlanmamışlardır.

İkinci problem durumu ise aşağıda verilen şekilde sorulmuştur:

> "$\mathrm{p}$ ve $\mathrm{q}$ tek sayı olduklarında, $(\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}^2-1)/8$ in çift sayı olduğunu kanıtlayınız" *(Arzarello, 1993, akt. [17]).*

Çalışmada yer verilmek üzere seçilen örnek, 4. sınıf bir üniversite öğrencisinden alınmıştır. Analizi kolaylaştırmak için, öğrencinin metni aşağıda görüldüğü gibi bölümlere ayrılmıştır.

**Bölüm 1:**

*"$p$ ve $q$ tek ise, o zaman $p = 2n + 1$ ve $q = 2m + 1$ olur."*

**Bölüm 2:**

*"Formülü analiz etmeliyim: $(p-1)$ çifttir, $q^2$ tektir, o zaman $q^2-1$ de çift olur. Öyleyse $(p-1)(q^2-1)$ çift olur, çünkü çift sayıların çarpımı da çifttir. Fakat bu yolla hiçbir sonuç elde edemem. Çünkü her zaman bir çift sayının bir başka çift sayı ile bölümünün çift olacağı kesin değildir."*

**Bölüm 3:**

*"Bir dönüşüm deneyeyim:*

$$(2n+1-1)\frac{[(2m+1)^2-1]}{8} = 2n\frac{4m^2+4m+1-1}{8} = 2n\,4\frac{m^2+m}{8}"$$

**Bölüm 4:**

*"Eğer $p = 1$ ve $q = 3$ ise, $0 \times 8/8$ ;*

*$p = 5$ ve $q = 7$ ise o zaman $4 \times 48/8$ ;*

*$p = 11$ ve $q = 13$ ise o zaman $10 \times 168/8 = 210$ olur.*

*Öyle görünüyor ki, q yerine bir tek sayı koyduğumuzda, $q^2 - 1$ her zaman 8 ile bölünebiliyor. Eğer bunu genel olarak kanıtlayabilirsem, her şey harika olur. Çünkü bu noktada bir tam sayı ile kesin olarak çift olduğunu bildiğimiz bir sayıyı çarpıyoruz. O halde, sonucun çift olacağı açıktır."*

**Bölüm 5:**

*"Şimdi şunu kanıtlamalıyım. Eğer q tek ise $q^2 - 1$ her zaman 8'in katıdır. q=2n+1 ise $q^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n+1)$ olur. Bu ifade en azından 4 ile bölünebilmektedir. Geriye kalan düşünülmesi gereken ifade n(n+1)'dir. Bu ifade kesinlikle 2 ile bölünebilmektedir. Çünkü n çiftse zaten bu ifade de otomatik olarak çift olur. n tek ise, bu kez (n+1) ifadesi çift olur. Buradan $q^2 - 1$ ifadesinin 8'in katı olduğunu anlayabiliriz."*

**Bölüm 6:**

*"p ve q tek ise, $(p-1)(q^2-1)/8$ çift olduğunu biliyorum. Sonuca $q^2 - 1$'in 8 ile bölünebildiğinin gösterilmesi ile ulaşılır."*

Bu öğrencinin performansını analiz eden araştırmacılar şu sonuçlara ulaşmışlardır:

1. İlk bölümler (bölüm 1, bölüm 2 ve bölüm 3) görünüşte hiçbir yere dayanmamaktadır, fakat ifadenin keşfine amaçsızca hizmet etmektedirler. Öğrenci bir şeyler bulmak için zemini test etmekte gibidir. Fakat bunu yaparken bilinçli ya da bir şeyleri bilerek veya planlayarak yapmamaktadır. Asıl anlamlı kısım Bölüm 4'te ortaya çıkmaktadır. Bu kısımda sayısal testlerin yapılması ve bir hipoteze dayanan düzenin gözlenmesi şeklinde ortaya çıkan tutum tipik bir hipotez oluşturmaya yönelik olarak yapılmaktadır. Bölüm 6'da altı çizili cümle şunu göstermektedir: Bir ifadenin keşfi boyunca *"Eğer B'yi kanıtlayabilirsem, o zaman A'yı da kanıtlamış olurum"* noktasına çok sık varılmaktadır. Bu noktadan itibaren, öğrencinin işlemleri bir amaca yöneliktir; bilerek ve ilerisini düşünerek hareket etmektedir.
2. İfadenin keşfi öğrenciyi yeni bir teorem üretmeye yönlendirmiştir: *"Eğer q tek ise, $(q^2 - 1)$ 8'in katıdır."*

3. Bölüm 4 ve Bölüm 5 incelendiğinde, cümlelerin statüsünde bir değişiklik göze çarpmaktadır: *“$(q^2 - 1)$ 8 ile bölünür”.* Aslında, başlangıçta bu bir hipotez olarak düşünülmüştür. Öğrenci bunun doğruluğu konusunda emin değildir ve şöyle yazar: *“Öyle görünüyor ki”.* Sonra bu hipotez kanıtlanması gereken bir ifadeye dönüşür ve öğrenci Bölüm 5’e *“kanıtlamam gereken şey”* diyerek başlar.

Araştırmacılar bu öğrencinin ifadeyi dönüştürme yoluyla içselleştirdiğini ve dönüştürülen ifadenin keşfi ile kanıtlama süreci arasında süreklilik kurduğunu söylemektedirler. Mecazi olarak ifadenin keşfi ile öğrenci bir düğümü çözmeye çalışmış, sonra ipliği takip ederek kanıt tomarını inşa etmiştir.

Metinleri benzer şekilde bölümlere ayırarak analiz edilen öğrencilerden bazıları Bölüm 3’te verilen ve standart cebirsel dönüşümler ile elde ettikleri aynı formülün yorumunda zorluklarla karşılaşmışlardır. Bazıları (Bölüm 2’de görüldüğü gibi) ifadeyi (p-1) ve $(q^2 - 1)$’in çarpımının çift sayı olduğunu yazarak kanıtladıklarını düşünmüşler ve bunu yeterli görerek kanıtlarını sonlandırmışlardır.

Araştırmacılara göre, bu problem durumunda kanıtlanacak ifadenin keşfi ve kanıtı arasındaki boşluk, bir önceki problem durumundakinden daha büyüktür. Çünkü ifadenin içselleştirilmesi daha karmaşık bir dönüşüm gerektirmektedir. Yani ifadenin keşfi ile kanıtı arasındaki sürekliliği sağlayan ipliği bulmak daha zordur.

Bir diğer problem durumu ise şöyle sorulmuştur:

> Eğer iki sayı aralarında asal ise, bu sayıların toplamlarının da bu sayıların her biri ile aralarında asal olduğunu kanıtlayın *(Euclid’in Elementleri, Kitap 7, Prop. 28; Heath, 1956, akt. [17]).*

Çalışmada analizine yer verilen örnek üniversite 4. sınıfta olan bir matematik öğrencisinden alınmıştır. Öğrencinin metninin analizi bir önceki problem durumunun analizinde olduğu gibi bölümlere ayrılarak yapılmıştır. Aşağıda bu bölümlere yer verilmektedir.

**Bölüm 1:**

*"EBOB (a, b) = 1 ise EBOB (a, a+b) = 1 ve EBOB (b, a+b) =1 olduğunu göstermek için çelişki ile akıl yürütmeyi deneyeceğim.*

*Eğer EBOB (a, a+b) = c ve c, 1'den farklı bir sayı ise o zaman (a+b)/c = n olur. Bu ise a/c + b/c = n demektir.*

*Buradan hiçbir şey söyleyemem, çünkü örneğin 1/2 + 1/2 = 1; fakat 1, 2 ile bölünmemektedir".*

**Bölüm 2:**

*"c = EBOB (a, a+b) olduğundan, buradan c'nin hem a'yı hem de a+b'yi böldüğü sonucu çıkar. O halde (a+b)/c = n ve a/c = m ise buradan b/c=n-m olur. Buradan c'nin hem a'yı hem de b'yi böldüğü sonucu çıkar. Bu ise kabulümüzle çelişir".*

**Bölüm 3:**

*"Bunun doğru olduğunu düşünüyorum, daha iyi şekilde formüle etmeye çalışacağım:*

*EBOB (a, a+b) = c ve c 1'den farklı olmak üzere; a+b = cn, a = cm [*],*

*(a+b)/c = n, a/c+b/c = n, m+b/c = n; b/c = n-m = m' o zaman b = cm' olur.*

*a ve b en azından c ortak bölenine sahiptir, fakat bu durum EBOB (a, b) = 1 ile çelişki yaratır. Çelişki ile sebep bulma fikri aklıma geldi, çünkü bu tipte şeyleri kanıtlamak zorunda olduğumda hemen bu yöntem aklıma geliyor."*

Araştırmacılar bu analiz sonucunda şu saptamalarda bulunmuşlardır:

1. Bölüm 1'de öğrenci ifadeyi sembolik dile çevirir ve *"aralarında asal olma"* ifadesini *EBOB(…) = 1* şekline dönüştürür. Daha sonra bir takım standart cebirsel dönüşümler yapar, ancak bu dönüşümleri hiçbir yere dayandıramaz. *"EBOB (a, a+b) = c; c 1'den farklı olmak üzere"* ifadesini *"a+b = cn"* şeklinde sadece kısmi olarak yorumlamıştır.
2. *"EBOB (a, a+b) = c; c 1'den farklı olmak üzere"* ifadesinin bütünüyle kullanımı Bölüm 2'de gerçekleşmektedir. Öğrenci *"c = EBOB(a, a+b)"* şeklinde ifade edilen formülü *"c hem a'yı hem de a+b'yi böler"* olarak yorumlar. Bu ifadeyi, kolay ve etkili cebirsel dönüşüm sağlayan formüllere

dönüştürür. Bu kısım öğrencinin oluşturduğu önceki ifadesi ile süreklilik kurarak ifadeyi kanıtlamasını sağlamaktadır.

3. [*] ile işaretli olan kısım Bölüm 1'deki eksik kısımdır. Bölüm 2'de yapılan keşiften sonra bu kısım açık hale gelmiştir.
4. Çelişki ile yapılan bir kanıt bu öğrenci için hiçbir zorluk oluşturmamaktadır.

Bir kez daha görülmüştür ki, eğer ifade açık olmayan mantıksal bir içeriğe sahipse, ifadenin keşfi daha zor olmaktadır. Bu durumda ifadenin keşfi ve kanıtlama süreci arasında daha büyük bir boşluk oluşmaktadır. Sonuç olarak keşif ifadenin içine tam olarak giremeyip, ifadenin formel dönüşümleri seviyesinde kalabilmektedir (örneğin "aralarında asal olmak" tan "EBOB(…) = 1''e dönüşüm gibi).

Yapılan incelemelerde bazı öğrencilerin çelişki bulmaya çalışarak muhakeme yaparken, *"a'nın b'nin bir katı" (ya da "b'nin a'nın bir katı")* olduğunu sandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin "iki sayının ortak bölenlere sahip olması (iki sayının ebob'u)" durumunu yanlış bildikleri ortaya çıkmıştır. Bu sonuç araştırmacıların hipotezini bir kez daha doğrular niteliktedir. Yani ifadenin keşfi ile kanıtlama süreci arasındaki bilişsel boşluk ne kadar büyükse, kanıtlama süreci o kadar zor olmaktadır.

Garuti, Boero, Lemut [19]'un bu problemden elde edilen verilerin analizi sonucunda şu sonuçlara ulaşmışlardır:

1. Öğretmenin öğrencilerine kanıtlanmak üzere bir ifadeyi sunuş şekli oldukça önemlidir. Özellikle kanıt yapma konusunda yeni olan, başlangıç seviyesindeki öğrenciler için ifadenin sunuluş biçimi ayrı bir önem taşımaktadır. Öğrencilere problem durumunun *" … olduğunu kanıtlayın"* şeklinde verilmesi durumunda öğrenci hipotez oluşturma süreci geçirmediğinden, argümantasyon ile kanıt arasında bütünlük kuramamaktadır. Bütünlük yalnızca ifadenin keşfi sürecinde tekrar kullanılması ile kurulabilmektedir. Bu ise bütün döngünün öğrenci tarafından yeniden yapılandırılması gerektiği anlamına gelmektedir. Bu döngü; *keşfetme, bir hipotez üretme, keşfe geri dönme, kanıt organize etme* adımlarını takip edecektir.
2. Kanıtı başarıyla üreten öğrencilerin ise problem durumunun dinamik bir keşfi ile hipotezlerini geçerli hale getirdikleri görülmüştür. Öğrenciler

dinamik keşif sürecinde kanıtı istenen ifadeyi dönüştürerek ifadenin kanıtını daha kolay yapabilmektedirler. Bu durum, kanıt yaparken dönüşümsel düşünmenin önemini göstermektedir [49].

3. Kanıt süreçlerine yer verilen öğrenciler hipotezlerini üretme sürecinde argümanlar üretmişler, bu argümanları kanıtlarında da kullanmışlardır [46]. Bunu yaparak argümantasyon ve kanıt arasında bilişsel bütünlük kurarak, araştırmacıların hipotezlerinde adı geçen boşluğu doldurmuşlardır.
4. Dinamik keşif aktivitesinin, dönüşümsel düşünmenin ve ifade üzerinde argümanların araştırılmasının kanıt yapımı için gerekli birer adım olduğu görülmüştür.
5. Verilen ifadenin kanıtına yönelik yanlış hipotez üreten öğrenciler ile ifadeyi kendisi üretememiş olan öğrencilerin aynı durumda oldukları görülmüştür.
6. İfadenin keşfi ile kanıtlama süreci arasındaki bilişsel boşluk ne kadar büyükse, kanıtlama süreci o kadar zor olmaktadır.

Bu çalışma kapsamında araştırmacılar, daha önce yaptıkları bir diğer deneysel çalışmadan ve sonuçlarından bahsetmektedirler. Alessandria Üniversitesi'nde öğrencilerden aşağıda verilen ifadeyi kanıtlamaları istenmiştir:

| |
|---|
| 2'den büyük her çift sayı 2 farklı tek sayının toplamı olarak yazılabilir. |

Görevin basit görünmesine rağmen, öğrencilerin yaklaşık %90'ı tam bir kanıt üretememişlerdir. Öğrencilerin yaptıkları kanıtlar incelendiğinde en çok rastlanan yaklaşımlar şöyle tanımlanmıştır:

1. Bazı rastgele sayısal denemelerden sonra, bazı öğrenciler *"iki farklı tek sayının toplamı çifttir"* ifadesini kanıtlamışlardır. Bu yaklaşım, öğrenci ifadeyi dönüştürmek için çabalarken ortaya çıkmıştır. Ama aslında asıl ifade kanıtlanması daha zor olan bir ifadedir. Öğrenci bu ifadeyi, kanıtlaması daha kolay fakat asıl ifadeye denk olmayan bir ifadeye dönüştürmüştür.
2. Bazı öğrenciler birçok sayısal deneme yapmışlardır, fakat geçerli bir düzen kuramamışlardır. Bu durumda, her ne kadar öğrenci argümanlar yoluyla

çoğu sayısal durumda ifadenin geçerliliğini sağlasa da keşif amaçsız kalmıştır.

3. Bazı öğrenciler şöyle yazmışlardır: 4=1+3; 6=1+5; 8= 1+7; 10=1+9; 12=1+11, ancak herhangi geçerli bir düzen kuramamış ve genel ilişkiyi (*"her çift sayı, biri 1 olmak üzere iki tek sayının toplamıdır")* ortaya çıkaramamışlardır. Bazıları sayısal örnekler arasında genel bir ilişki olduğunu fark etmişlerdir. Ancak şöyle yazdıkları görülmektedir: *"Bunu genel olarak yazamayacağım"*. Burada öğrencilerin yaşadığı zorluğun, cebirsel dile hâkim olamamaktan kaynaklandığı ifade edilmiştir. Bir grup öğrenci ise yukarıdaki toplama işlemindeki ikinci toplanan terimin her zaman tek olacağını görememiştir.

Bu sonuçlara göre, kanıtlama sürecinde keşif sürecinin ve ifadenin dönüşümünün ne kadar önemli ve gerekli olduğu bir kez daha görülmüştür.

Çalışmada son olarak bir teoremin bilişsel bütünlüğü ile ilgili olarak Garuti vd., [46]'nin daha önce yapmış olduğu bir öğretme deneyinde elde edilen sonuçlar tekrar yorumlanmıştır. Garuti vd., [46]'nin yapmış olduğu deneyde, bir grup 7.sınıf öğrencisinden aşağıdaki önermeyi kanıtlamaları istenmiştir:

| |
|---|
| Ardışık iki sayının ortak böleni yoktur. |

Öğrenciler kanıt yapmak için ifadenin 2 farklı formülasyonunu üretmişlerdir:

1. *"Bir sayı ve hemen ondan sonra gelen sayı 1 dışında ortak bölene sahip değildir."*

Araştırmacılar bu formülasyonu *"ilişkisel ifade (relational statement)"* olarak adlandırmışlardır.

2. *"Eğer bir sayıya 1 eklersek, onun 1 dışında bütün bölenleri değişir,"*

Araştırmacılar bu formülasyonu *"usule uygun ifade (procedural statement)"* olarak adlandırmışlardır.

Araştırmacılar, ifadenin farklı formülasyonlarının kanıtlama sürecini nasıl etkilediğini gözlemlemişlerdir. İlişkisel ifade kullanan öğrenciler hipotez keşfinin ötesine gidememişlerdir. Aslında onlar bir sayının ve o sayıdan bir sonraki sayının bölenlerinin 1 dışında ortak bölene sahip olmadığını bazı sayısal denemeler yaparak görmüşlerdir. Fakat genel bir kanıt yapamamışlardır.

Tersine usule uygun ifadeyi kullanan çoğu öğrenci kanıt yapabilmiştir. Bu öğrenciler verilen bir sayının bölenlerini düşünmüşlerdir. Sonra onu bir sonraki sayıya dönüştürmüşlerdir. İlk sayının bölenlerinin ikincininkileri de bölüp bölmediğini kontrol etmişlerdir. Eklenen birim, başlangıçtaki sayının 1 arttırılması ile elde edilen sayının bölenlerinin başlangıçtaki sayının bölenleri ile bölümünden kalanı vermektedir. Böylece bu öğrenciler kanıt için uygun ve genel bir argüman geliştirmişler, kanıtı da başarıyla tamamlamışlardır.

Araştırmacılara göre, dönüşümlerin doğası ve nasıl geliştirileceği; bazı durumlarda neden keşif sürecinin tamamen anlaşılmaz olduğu ve kanıta yardımcı olamadığı cevap bekleyen sorulardır. Dinamik keşif, dönüşümsel düşünme ve bilişsel bütünlüğün sınıfta kanıt öğretiminde nasıl kullanılacağı ve öğrenciler için nasıl avantaja dönüştürüleceği sorusuna da henüz yanıt bulunamamıştır. Araştırmacılar bu süreçlerin daha iyi anlaşılması için başka çalışmaların yapılması gerektiğini belirtmektedirler.

### 3.5. Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri ve Bu Süreçlerin Eğitimdeki Sonuçları Hakkında Bazı Düşünceler

Douek [23] bu çalışmasında argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinden ve bu süreçler arasındaki ilişkilerden bahsetmektedir. Bu çalışma deneysel bir çalışma değildir; konu ile ilgili kavramların tanımlarına ve argümantasyon ile matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkilere yönelik açıklamalara yer verilmektedir.

Bazı matematik eğitimcilerine göre öğrencilerin matematiksel kanıt yaparken karşı karşıya kaldıkları zorluklar içinde en önemli ve en karakteristik olanının, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki farklılıkları kavrayamamaları olduğu belirtilmektedir. Bu görüşle ilgili Duval (1991, akt. [23]) şu sözüyle referans gösterilmektedir:

> "Dedüktif düşünme argümantasyon gibi değildir. Fakat bu iki düşünme şekli çok benzer dilsel formlar ve bağlaçlar kullanırlar. Bu, neden pek çok öğrencinin matematiksel kanıtın gerekliliğini anlayamadıklarının asıl sebeplerinden biridir."

Duval (1991, akt. [23]), argümantasyonel muhakeme ile dedüktif muhakeme arasındaki temel farkları şöyle kategorize etmektedir:

1. **Çıkarım adımları:** Argümantasyonel muhakemede ifadelerin anlamsal kapsamı önemlidir; dedüktif muhakemede ise ifadeler içerikleri ile değil, işlevsel statüleri ile önem kazanır ve çıkarımların işlevinde oynadıkları rol ile tanımlanırlar.
2. **Adımları zincirleme:** Argümantasyonel düşünme, argümanların desteklenmesi ya da argümanlara karşı çıkılması ile işler. Daha önceki aşamaların sonuçları olarak elde edilen ifadeler yeniden yorumlanır. Tersine dedüktif düşünmede bir adımın sonucu bir sonraki adımın giriş ifadesi niteliğindedir. Bu durum böyle devam eder, tekrarlı bir süreç oluşturur.
3. **Epistemik değer *(bir ifadeye ilişkin kesinliğin ya da inancın derecesi)*:** Argümantasyonel düşünmede doğru ifadeler aynı epistemik değere sahip değildir. Kanıt yapma sürecinde ise doğru ifadeler yalnızca bir epistemik değere sahiptirler. Kanıt, kanıtlanmış ifadenin epistemik değerini ortaya çıkarır. İfade doğru ve gerekli hale gelir.

Douek [23], argümantasyon ve matematiksel kanıtı üretim süreci açısından karşılaştırmış ve bu iki süreç arasındaki önemli farklılıkları şöyle ortaya koymuştur:

1. **Muhakeme Tarzı:** Argümantasyon ve matematiksel kanıt arasında muhakeme tarzı ile ilgili olarak önemli farklılıklar vardır. Argümantasyon matematiksel kanıttan farklı olarak daha geniş imkanlar sunar. Sadece dedüktif yöntem değil, aynı zamanda analoji, metafor vb. de kullanılabilir.
2. **Referans Kaynakları:** Argümantasyonda farklı referans kaynaklarından alınan argümanlar kullanılabilir. Bu farklı argümanların tutarlılığı olmayabilir. Matematiksel kanıt ise aksiyomların tutarlı bir sistemi olan bir ya da daha fazla referans teoriye ihtiyaç duyar.

Çalışmada önceden yapılmış tanımlar ışığında formel kanıtın mantıksal hesaplama çerçevesinde yapılan kanıt olduğu, matematiksel kanıtın ise özel bir argümantasyon olduğu düşünülmektedir. Formel kanıt ve matematiksel kanıt arasındaki kıyaslama ile ilgili olarak Thurston [50] referans gösterilmiştir:

> “İnsanlar tarafından anlaşılabilir ve kontrol edilebilir kanıtların, yani aslında yaptığımız ve bizim için asıl önemli olan tarzdaki kanıtların, formel kanıttan oldukça farklı olduğunu anlıyoruz. Günümüzde formel kanıtlara artık rastlanmamaktadır ve çoğunlukla gereksiz/ilgisiz olarak görülmektedir. Matematiksel geçerliliği kontrol etmek için yeterli insani yeteneklere sahibiz.”

Matematiksel analizde önemli bazı teoremlerin (Rolle teoremi, Bolzano-Weierstrass teoremi, vb.) kanıtlarının üniversite kitaplarında formel olarak yapılmadığı belirtilmektedir. Douek [23]’e göre bunun sebebi formel kanıtın, öğrencilerin bu teoremleri anlamasını engelleyecek bir yapıda olmasıdır. Bu nedenle, anlamsal ve görsel argümanların formel seviyede ortaya çıkan boşlukları doldurmak için sıklıkla kullanıldığı ve kullanılmasının da gerekli olduğu ifade edilmektedir.

### 3.6. Matematik Eğitiminde Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçlerini Karşılaştırma

Douek [22]’in bu çalışması 3.5.’te verilen çalışmasının bir devamı niteliğindedir. Douek [22], bu çalışmasında da yine argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin bilişsel ve epistemolojik yönlerden bazı farklılıklara ve benzerliklere sahip olduğunu göstermeye çalışmıştır.

Douek [22], argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini üretim aşaması açısından karşılaştırırken, bu süreçlerde kullanılan referans kaynaklarını göz önüne almaktadır. Argümantasyonun referans kaynakları, argümantasyon sürecinde kullanılan referans ifadelerini, görsel ve deneysel verileri/çıktıları/sonuçları, tartışma götürmez şeyleri, fiziksel kısıtlamaları içerir. Eğer muhakeme adımlarını destekleyen referanslar olmazsa, günlük hayatta bireysel ya da grup olarak argümantasyon yapılamaz. Matematiksel kanıt da argümantasyona benzer olarak referans kaynaklarına ihtiyaç duyar. Argümantasyon için referans göstermek ne kadar önemli ise kanıt için de en az o kadar önemli ve gereklidir. Kanıtta kullanılan referans kaynakları kullanıcıya, dinleyiciye/okuyucuya ve kullanılış biçimine bağlı olarak değişir. İlkokul seviyesinde geometri alanında yapılan kanıtlarda açıların ya da doğru parçalarının eşitliğini göstermek için şekillerin kullanılması ve amaca yönelik olarak açıların ya da doğru parçalarının şekle yerleştirilmesi referans olarak kabul edilmektedir. Ancak bu referans ortaokul seviyesinde kanıt yaparken değersizdir; bu tip referansların yerini artık tanımlar ve teoremler almaktadır (Balacheff, 1988, akt. [22]). Benzer şekilde ortaokulda kanıtı desteklemek için kullanılan bazı detaylı referanslar, daha yüksek seviyedeki matematikçiler için kanıt yaparken kabul edilmeyebilir.

Çalışmada argümantasyon ve matematiksel kanıtın üretim süreçlerinde sezgisel adımların öneminden de bahsedilmektedir. Ayrıca kimi zaman kullanılan referansların sezgisel olabileceği belirtilmektedir. Douek [22]'e göre, çözülememiş bir problemle uğraşan bir matematikçi sezgisel yolla bir sonuca ulaşmak için denemeler yapabilir. Ancak bu sezgisel hareketlerin ya da referansların epistemik anlamda bir değeri yoktur. Ama buna rağmen bu yolla yapılan denemeler sırasında matematikçi gerçekten de önemli ve geçerli bir sonuca ulaşabilir. Hatta kullandığı yöntem diğer araştırmacılar tarafından da kullanılan, paylaşılan bir nitelik kazanabilir ve bir gün yeni bir teori ile bulduğu sonuç doğrulanabilir. Böylece ulaştığı ifade epistemik anlamda doğru ya da yanlış olarak nitelendirilebilir (Leibniz'in hesaplamalarında olduğu gibi).

Duval'in analizine göre, formel kanıt bir ifadenin doğruluk değerine bağlı olarak güvenirliğini üretir. Fakat Thurston'ın Fermat'ın son teoremi ile ilgili olarak Wiles'ın yapmış olduğu kanıtı düşünerek iddia ettiği gibi, güvenirlik matematikçilerin formel argümanları özellikle formel yollarla kontrol etmesinden gelmemektedir. Formel kanıtın gerektirdikleri bir kanıt yazmak için sadece rehberlik eder, öncelikli olarak sağlam temeli olan ve formel olmayan argümanlara göre kanıtın geçerliliği kontrol edilir.

Çalışmada bir ifadenin kanıtı için dönüşümsel düşünmenin öneminden ve etkisinden de bahsedilmektedir. Douek [22], çalışmasında kanıtta dönüşümsel düşünmenin önemini gösteren deneyler yapan bazı araştırmacıları referans göstermektedir [45; 49; 51; 52]. Dönüşümsel düşünmeyi Simon [49]'dan alıntı yaparak şöyle tanımlar:

> "Bir obje veya birtakım objeler üzerinde yapılan bir işlem ya da bir takım işlemlerin sonucunda, söz konusu objelerin geçirdiği dönüşümlerin ve bu dönüşümlerin sonuçlarının düşünülmesini sağlayacak fiziksel ve zihinsel aktivite uygulamasıdır. Dönüşümsel düşünmenin merkezinde

durağan bir durumu düşünmek değil; yeni bir durumla ya da durumların sürekliliği ile genelleştirilebilen dinamik bir süreci düşünebilme vardır.”

### 3.7. Matematikte Argümantasyon ve Kanıt Arasındaki İlişkinin Bazı Bilişsel Yönleri

Pedemonte [24], argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki farklılıkların ve benzerliklerin ortaya çıkarılması ve bu iki süreç arasında güçlü ve önemli ilişki ya da ilişkilerin varlığının sezilmesinin ardından, bu konuya bir açıklık getirmek amacıyla iki süreç arasındaki ilişkileri analiz etmeyi amaçlamıştır. Pedemonte bu çalışmasında, amacına yönelik olarak argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin iki yönden karşılaştırılabileceğini savunmaktadır: İçerik ve yapı.

Daha önce belirtildiği gibi hipotez oluşturmak için argümantasyon aktivitesi geliştirildiği durumlarda, kanıt öğrenciler için daha ulaşılır hale gelmektedir [19; 45; 48; 53]. Buna ek olarak *bilişsel bütünlük hipotezine* göre, argümantasyon ve kanıt arasında bilişsel süreklilik kurulduğunda, kanıtın yapımı daha da kolaylaşmaktadır. Bilişsel bütünlük, öğrencilerin kanıtın yapımında karşılaştıkları bazı zorlukları öngörmek ve analiz etmek için de kullanılabilmektedir. Buna yönelik olarak Pedemonte (2005, akt. [24]), argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki bilişsel bütünlüğü analiz etmek için bir araç bulmanın gerekli ve önemli olduğunu düşünmüştür. Pedemonte (2005, akt. [24]), bu ihtiyaca yönelik yapmış olduğu çalışmasında, (Balacheff ve Margolinas, 2005, akt. [24]) Toulmin Modeli içerisine Ck¢ modelini entegre ederek argümantasyonun ve kanıtın içerik açısından kıyaslanması ve bu yolla argümantasyon ile kanıt arasındaki bilişsel bütünlüğün analiz edilmesi için bir araç ortaya koymuştur.

Pedemonte (2002, akt. [24])’nin ilerleyen zaman içinde yapmış olduğu deneysel çalışmalarda bazı öğrencilerin kanıtı inşa etmek için gereken teoremi bilseler bile kanıtı yapamayabildiklerini görmüştür. Bu durum bilişsel bütünlük hipotezi ile örtüşmemektedir. Bu nedenle, Pedemonte daha detaylı analiz yapma ihtiyacı hissetmiş ve daha önce düşünülmemiş bir süreklilik çeşidini ortaya koymuştur: *“Yapısal süreklilik (structural continuity)”.*

#### 3.7.1. Yapısal Süreklilik

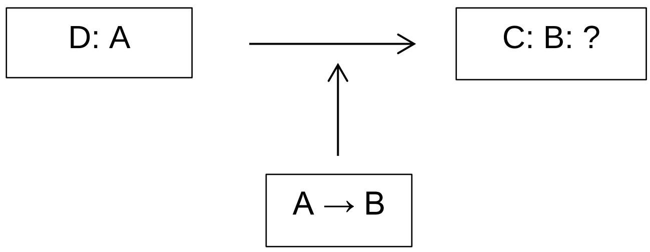
Yapı ile, ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantı kastedilmektedir. Argümantasyonu ve kanıtı yapıları açısından dedüktif, abdüktif ve indüktif olarak kategorilendirmek mümkündür. Muhakeme (ya da çıkarım) tarzı olarak bu yapılar tek başına dedüksiyon, abdüksiyon ve indüksiyon olarak da adlandırılmaktadır.

Argümantasyon sürecindeki muhakeme (ya da çıkarım yapma) tarzı, kanıt sürecinde de devam ettirilir ise bu durumda argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında *"yapısal süreklilik"* olduğu söylenmektedir. Bir başka deyişle, argümantasyon ve kanıt süreçlerinin yapısı aynı olduğu durumda iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır. Çalışmalarda yapısal süreklilik kavramının *"yapısal bütünlük"* olarak da kullanıldığı görülmektedir.

Aşağıda dedüktif, abdüktif ve indüktif yapıda argümantasyonların Toulmin Modeli'ne göre analizleri verilmektedir. Kanıtın yapısı (yani muhakeme tarzı) da benzer şekilde Toulmin Modeli'ne göre analiz edilebilmektedir.

#### 3.7.1.1. Dedüktif Argümantasyon

Dedüktif bir argümantasyonda, ifade verilerden bir ilke/kaynak aracılığıyla çıkartılır. Birkaç veri ve bir kuraldan yola çıkılarak bir iddianın inşasını sağlayan çıkarım olarak tanımlanmaktadır. Toulmin Modeli'nde bir adım, dedüktif bir adım olarak ortaya çıktığında veri ve garantiler iddiaya yol gösterir. Bu durum Şekil 3.1.'de aşağıdaki gibi şematize edilmiştir.




Şekil 3.1. Dedüktif argümantasyonun Toulmin Modeli'ne göre analizi

#### 3.7.1.2. Abdüktif Argümantasyon

Abdüksiyon Peirce (1960, akt. [28]) tarafından bir ifadenin keşfi sürecinde kullanılan bir çıkarım modeli olarak üretilmiştir. Peirce (1962, akt. [28])'ye göre, *"olasılıklı düşünme"* olarak tanımlanabilen abdüksiyon şöyle ifade edilebilir (Polya, 1962, akt. [28]):

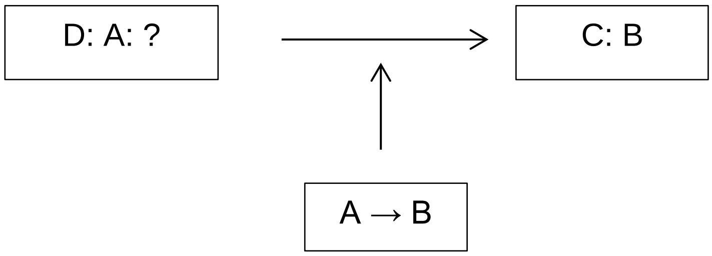
Eğer A ise B'dir.

B doğru.

---

O halde A da muhtemelen doğrudur.

Abdüktif argümantasyonda, ifade veri tanımlanmadan önce ortaya konulur [51]. Gözlenen bir gerçekten başlayarak, bir iddianın yapımını sağlayan bir çıkarım olarak tanımlanmaktadır (Magnani, 2001; Peirce 1960; Polya, 1962, akt. [24]). Bu durumda söz konusu gerçek, verilerin tümüne ulaşılamasa da bir ifadenin öne sürülmesini sağlar. Bir abdüktif argümantasyonun Toulmin Modeli'ne göre analizi Şekil 3.2.'de şematize edilmiştir.




Şekil 3.2. Abdüktif argümantasyonun Toulmin Modeli'ne göre analizi

#### 3.7.1.3. İndüktif Argümantasyon

İndüktif argümantasyonda ise, ifade özel durumların araştırılmasından sonra genel bir durum olarak ortaya çıkartılır. Bazı özel durumlardan genelleme yaparak iddianın yapımını sağlayan bir çıkarım olarak tanımlanmaktadır (Fann, 1970; Polya, 1954, akt. [24]).

Kanıtın dedüktif, abdüktif ya da indüktif olan muhakeme (ya da çıkarım) tarzı da benzer şekilde Toulmin Modeli'ne göre analiz edilerek iki sürecin de yapıları birbirleri ile kıyaslanabilmektedir. Argümantasyon ve kanıt süreçlerinin sahip oldukları yapılara göre, argümantasyondan kanıta geçişin kolay ya da zor olduğu görülmektedir. Örneğin abdüktif bir argümantasyondan dedüktif kanıta geçmek için yapının ters çevrilmesi gerekmektedir. İndüktif argümantasyon ise dedüktif kanıtın yapısından oldukça uzak bir yapıya sahiptir. Bu tip durumlarda iki süreç arasında yapısal mesafe oluşmakta ve öğrencilerin argümantasyon sürecinden kanıt sürecine geçmekte zorlandıkları görülmektedir.

### 3.7.2. Deney süreci

Çalışmada İtalya'da ve Fransa'da 12. sınıf öğrencilerinden geometri alanından açık uçlu bir problem durumunun kanıtını yapmaları istenmiştir. Cabri geometri yazılımı ile öğrenciler bilgisayar başında çiftler halinde çalışmışlardır. Böylece öğrenciler arasında argümantasyon sürecinin yaşanması ve öğrencilerin dinamik ortamlarla etkileşime girmeleri sağlanmıştır. Bu noktada Pedemonte'nin argümantasyonu “öğrencilerin grup halinde geçirdikleri tartışma süreci” olarak ele aldığı görülmektedir. Bilgisayar yazılımı olarak Cabri Geometri seçilmiştir, çünkü Pedemonte bu yazılımın öğrencilere şekil çizimlerinin temelinde olan ve kanıtı yapmaları için gerekli olan geometri özelliklerini kullanabilmeleri konusunda yardım ettiğini düşünmektedir.

Öğrencilerin problem durumunu çözüm süreçleri incelenmiştir. Hipotez oluşturma aşamasında geçirdikleri argümantasyon süreçleri ve sonrasında söz konusu ifadenin kanıtını yapma süreçleri karşılaştırılmıştır. Çalışmada argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel bütünlüğün olduğu durumlar saptanmıştır.

Öğrencilere yöneltilen problem durumu şöyledir:

> ΔABC bir üçgendir. Üçgenin kenarları üzerine üç adet dıştan kare çiziniz. Karelerin boşta kalan noktalarını 3 adet başka üçgen oluşturacak şekilde birleştiriniz. Bu üçgenlerin alanlarını ΔABC’nin alanı ile karşılaştırınız.

Argümantasyon ve kanıt süreçlerinin yapılarını belirlemeye yönelik analizlere göre, öğrencilerin çözümlerinde aşağıdaki argümantasyon tipleri bulunmuştur.

#### 3.7.2.1. Tipik Bir Dedüktif Argümantasyon

Öğrencinin iki alanı kıyaslamak için, ΔABC’nin ve dıştaki üçgenlerden birinin yükseklik ve taban uzunluklarını kıyasladığını düşünelim. Aynı karenin kenarları dıştaki üçgenlerden birinin ve ΔABC’nin tabanı olmaktadır. Söz konusu tabanlara ait yükseklikler indirildiğinde, bu yükseklikler üzerine kurulu küçük üçgenler düşünülürse yükseklikleri kıyaslamak mümkündür. Küçük üçgenlerin iki eşit açıya ve bir eşit kenara sahip olması KAA (kenar-açı-açı) eşlik kriteri altında iki üçgenin eş olduğu sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Buna göre büyük üçgenlerin yükseklikleri de eşittir. Hem tabanları hem de yükseklikleri aynı olan bu üçgenler eşit alanlara sahiptirler.

### 3.7.2.2. Tipik Bir Abdüktif Argümantasyon

İki alanı kıyaslamak isteyen öğrenci, iki üçgenin de tabanlarının aynı olduğunu görür. Alanların eşit olduğunu kanıtlamak için yüksekliklerin de aynı olduğunu kanıtlamak mümkündür. Yükseklikler üzerine kurulu küçük üçgenlerin eş görünmesi, öğrenciyi bunun gerçek olduğunu kanıtlaması için bir teorem araştırma konusunda cesaretlendirebilir. Eşlik kriterleri hatırlanır ve bu kriterlerden birine başvurmak için veri araştırılır.

### 3.7.2.3. Tipik Bir İndüktif Argümantasyon

Öğrenci, ΔABC'nin bazı özel tiplerini düşünebilir: üçgen, eşkenar üçgen ve benzeri. Bunun yanı sıra ΔABC'nin sınırlı durumları düşünülebilir: A, B ve C noktalarının aynı doğru üzerinde olması gibi. Bu tip bir argümantasyon süreci, özel bir durumdan genel kurallara hareketi temsil eden "indüktif araştırma"dır. Bu örneklerden biri, kanıta yön veren özel bir örnek olarak geliştirilebilir (Balacheff, 1988, akt. [24]).

Çalışmada öğrencilerden elde edilen verilerden biri seçilerek Toulmin Modeli'ne göre analizi adım adım yapılmıştır. Pedemonte'nin amacı, Toulmin Modeli'nin yararlılığını kanıtlamak için analizin nasıl çalıştığını göstermektir. Analiz sürecinde öğrencilerin argümantasyon ve kanıt adımları yeniden yapılandırılmıştır. Bileşenlerden iddia (claim) C, veri (data) D ve gerekçe (warrant) W ile gösterilmiştir. Bu harflerin sağ altında verilen indisler argümantasyon adımlarının sıra sayısını göstermektedir. İlk olarak öğrencilerin orijinal metnine, hemen altında ise analiz sonuçlarına ve yorumlarına yer verilmiştir. Öğrencilerin orijinal metnine yer verirken sunulan bazı karşılıklı konuşmalarda, öğrenciler isimlerinin baş harfleri ile temsil edilmektedir.

Metinler İtalyancadan İngilizceye çevrilmiştir. Bu çalışma için ise İngilizce metinler Türkçeye çevrilmiştir. Analize $C_7$ iddiasından başlanmıştır. Bu noktada öğrenciler ΔABC'i ve ΔICD'nin alanlarını kıyaslamaktadırlar. Buraya kadar öğrenciler iki üçgenin yüksekliklerinin çizimi hakkında konuşmuşlardır. ΔABC'i ve ΔICD'inin alanlarını kıyaslamak için yüksekliklerini çizmeye karar vermişlerdir.

*… Öğrenciler ABC ve ICD üçgenlerinin yüksekliklerini çizerler.*

31. L: |BC|'yi uzatıyorum, yani daha doğrusu doğru parçası üzerinde doğruyu uzatıyorum… Ne yaptım ben?

32. G: B ve C noktalarından geçen doğruyu uzattın…

33. L: Ah evet!

34. G: Şimdi, bu doğruya dik olan doğruyu çizmeye ihtiyacımız var…

35. L: Ah işte orada, fakat biliyor musun onlar eşit gibi görünüyorlar…

36. G: Kesinlikle eşitler!

37. L: Hayır, daha fazlası, öyle görünüyor ki onlar dikler, bunu gözlemledim…

…

44. Öğrenciler birlikte: Hey, bunlar iki üçgen!

45. L: Doğru, ALC ve ICM, bunlar iki üçgen… peki neleri var?

46. G: Aynı karenin kenarları olduklarından, |AC| |IC|'ye eşittir…

47. L: Bekle!

48. G: |AC| |IC|' ye eşittir, çünkü onlar aynı karenin kenarlarıdır, sonra?

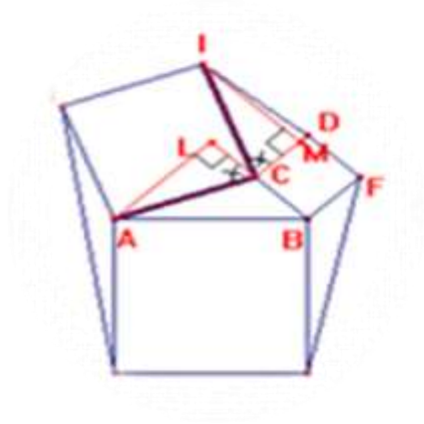
49. L: |LC|…

50. G: |LC| |CM|' ye eşittir, neden?

51. L: |CM|' ye eşittir çünkü… Benim düşünceme göre, şunu kanıtlamak daha iyi olur… Hayır, bekle bu açı dik ve bu açı da dik.

Şekil 3.3. Öğrencilerin argümantasyon süreci

*Öğrencilerin Cabri Geometri kullanarak çizdikleri şekil aşağıdaki gibidir:*




$C_7$: Yükseklikler eşit gibi görünüyor.

$C_8$: Yükseklikler dik gibi görünüyor.

*İfadenin doğruluk değerine Cabri Geometri yardımı ile karar verildiğinde, ifadeler "gerçekler" haline gelmektedir. Cabri Geometri' de sürükleme işlevi öğrencilerin küçük üçgenleri görmelerini sağlamaktadır. Öğrenciler yüksekliklerin iki eş üçgenin yükseklikleri olduğunu anlarlar. İfade şimdi bir gerçek haline gelmiştir.*

$C_9$: ΔALC ve ΔICM üçgenleri eştir.

*Öğrencilerin konuşma yapısı şöyledir:*

Üçgenler eştir → Eşit kenarlar ve eşit açılar bulunur

↑

Eşlik kriteri

*Argümantasyonel adımın yapısı bir abdüksiyondur:*

$D_9$: ? → $C_9$

↑

W: Eşlik kriteri

Şekil 3.4. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

Argümantasyon, abdüktif yapıdadır. Öğrenciler yükseklikler üzerine kurulu küçük üçgenlerin eş olduklarını görmüşlerdir ve bu gerçeği kanıtlamak için bir teorem araştırmaktadırlar. Pedemonte, kanıt boyunca öğrencilerin ΔALC'inin ve ΔICM'inin eşit olduğunu doğrulamak için verileri açık hale getirdiklerini gözlemlemiştir.

Argümantasyonun abdüktif yapısı, kanıtta dedüktif yapıya dönüştürülmüştür. İddia $C_9$, ΔABC ve ΔICD'nin yüksekliklerinin eşit olduğunu çıkarmak için kullanılmıştır ve sonuç olarak ΔABC ve ΔICD'lerinin alanları eşit olarak bulunmuştur.

*Öğrenciler kanıtı şöyle yazarlar:*

ΔABC ve ΔICD'ni düşünüyorum.

ΔALC ve ΔICM'ni düşünüyorum ve bunların KAA eşlik kriterine göre eş üçgenler olduklarını kanıtlarım çünkü şunlara sahibiz:

- |AC|=|IC| çünkü onlar aynı karenin iki kenarı,
- $\widehat{ALC} = \widehat{IMC}$ Çünkü onlar dik açılar (kenarlar ve yüksekliklerin kesişimleri olarak ortaya çıkan açılar)
- $\widehat{ACL} = \widehat{ICM}$ Çünkü onlar aynı dik açının 90 dereceye tamamlayıcılarıdır (90 - $\widehat{LCI}$).

O halde, ΔABC ve ΔICD'leri aynı taban uzunluğuna sahiptirler (aynı karenin kenarları olarak) ve aynı yüksekliklere sahiptirler, o halde aynı alana sahiptirler.

Şekil 3.5. Öğrencilerin kanıt süreci

*Kanıt yapısı dedüktiftir:*

$D_9$ : $|AC| = |IC|$

$\widehat{ALC} = \widehat{IMC}$

$\widehat{ACL} = \widehat{ICM}$

$C_9$ : ALC ve ICM üçgenleri eştir.

W: KAA eşlik kriteri

*Eğer üçgenler eşse, o halde yüksekliklerin eşit olduğunu anlamak mümkündür ve sonuç olarak alanlar da eşittir, çünkü tabanlar eşittir.*

*Bir önceki adımın $C_9$ sonucu (iddiası), $D_{10}$ için ikinci adıma çıkarım sağlayan veridir.*

$D_{10}$ : $C_9$

$C_{10}$ : Yükseklikler eşittir.

W: Eşliğin kalıtsallığı

$D_{11}$ : $C_{10}$

$C_{11}$ : ΔABC ve ΔICD üçgenlerinin alanları eşittir.

W: Alan formülü

Şekil 3.6. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi

### 3.7.3. Sonuçlar ( Abdüktif Argümantasyondan Dedüktif Kanıta Geçiş Durumu)

Bu durum bir bilişsel bütünlük örneğidir. Öğrenciler KAA eşlik kriterini hem argümantasyonda hem de ifadeleri doğrulamak için kanıtta kullanmaktadırlar. İki süreçte de kullanılan kelimeler ve ifadeler genellikle aynıdır (*"ΔALC ve ΔICM'leri eştir", "yükseklikler eşittir", vb.*). Fakat argümantasyon sürecindeki abdüktif yapıdan kanıt sürecindeki dedüktif yapıya geçerken iki süreç arasında yapısal bir mesafe oluşmaktadır. Bu durumda iki süreç arasındaki yapısal mesafeyi doldurabilen ve abdüktif yapıdan dedüktif yapıya geçebilen öğrencilerin kanıt sürecini başarı ile tamamlayabildiği görülmüştür. Bu yapısal mesafeyi dolduramayan öğrencilerin abdüktif yapıdan dedüktif yapıya geçemediği, dolayısıyla da kanıt sürecini tamamlayamadığı görülmüştür. Bu öğrenciler argümantasyon sürecindeki abdüktif yapıyı devam ettirmişler ve bunun bir sonucu olarak kanıtın dedüktif yapısını kurmayı başaramamışlardır.

Görülmüştür ki, öğrencilerin verilerinde argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında içerik ile ilgili bilişsel bütünlüğü gözlemlemek kolaydır. Fakat iki sürecin yapıları ile ilgili olarak argümantasyondan kanıta geçerken genellikle bir değişiklik yapılması gerekmektedir. Özellikle öğrenciler argümantasyon sürecinde abdüksiyonu kullandıklarında (bir hipotezin üretiminde abdüksiyon yapısına daha sık rastlanmaktadır), kanıta geçildiğinde dedüksiyon kullanmaları durumunda daha başarılı oldukları görülmüştür. Argümantasyon sürecindeki muhakeme tarzını değiştiremeyen (abdüksiyon ile devam eden) öğrencilerin ise kanıt sürecinde zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

## 3.8. Kültürel Açıdan Sınıfta İletişim, Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt

Sekiguchi [54] bu çalışmasında argümantasyonu ve matematiksel kanıtı kültürel açıdan ele almaktadır. Bu çalışma, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler üzerine yapılan araştırmalardaki analiz sonuçlarına kültürel açıdan katkı sağlayacaktır. Sekiguchi [54], kültürün iletişim stilleri üzerinde önemli etkileri olduğunu düşünmektedir. Argümantasyonun bir çeşit sözel iletişim olduğunu ve matematiksel kanıtın matematik camiasında iletişimin önemli bir elemanı olduğunu belirtmektedir. Bu anlamda Sekiguchi [54]'ye göre, kültürün iletişim stilleri üzerindeki etkileri dolaylı olarak argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerine de yansımaktadır.

**Çizelge 3.1.:** Matematiksel Kanıt, Argümantasyon, İletişim ve Kültür

KÜLTÜR

İLETİŞİM

ARGÜMANTASYON

MATEMATİKSEL KANIT

Araştırmacı, çalışmasında önce Japon kültüründeki iletişim stillerini tanımlamakta ve bu stilleri batı kültürünün iletişim stilleri ile kıyaslamaktadır. Sonra Japon okullarındaki argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin nasıl olduğunu açıklamakta ve bu süreçlerin Japon kültüründeki genel iletişim stilleri ile arasındaki uyumu yansıtmaktadır.

### 3.8.1. Japon Kültüründe İletişim ve Argümantasyon Süreci

Bamlund (1975, akt. [54])'a göre Japon kültüründe iletişim aktivitelerinde sözel iletişime çok değer verilmemektedir. Halk arasındaki iletişimin amacı katılımcılar arasında bir uyum yakalamaktır. Katılımcıların fikirleri arasındaki farklılık, aralarında sağlanacak uyuma karşı bir tehdit olarak görülmektedir. Bu yüzden halk arasında anlaşmazlığa sebep olacak ifadeler kullanmaktan kaçınılmaktadır.

Japon kültüründe uyum çoğunlukla görünüşte, davranışta, ifadelerde benzerlik ve homojenlik ile kendisini göstermektedir. Aksini yapan kişiler toplumda suçlanma, dışlanma, uzaklaştırılma gibi duygusal tepkilerle karşılaşabilmektedir. Akademik konferanslarda bile Japonlar birbirleri ile açıktan açığa tartışamamaktadırlar. Farklı görüş ifade etmek, kabalık olarak görülmektedir. Karşıt görüş genellikle dolaylı olarak ya da üstü örtük biçimde ifade edilmektedir (Nakayama, 1989, akt. [54]). Japonların bu iletişim stili *"grup modeli"* olarak bilinmektedir (Befu, 1980, akt. [54]). Her kültürde bireylerin birbirleri ile anlaşamadıkları noktalar olmaktadır. Bu tip durumlarda bireyler kendi fikirlerini ifade etmek ve onları tartışmak için fırsat bulmak isterler. Grup modeli böyle fırsatlara şans vermemektedir.

Ancak Japon iletişiminin tamamlayıcı bir modeli vardır. Bu modelde bireyler fikirlerini ve duygularını tartışmaktadırlar (Befu,1980, akt. [54]). Buna *"sosyal değişim modeli"* adı verilmektedir. Bu modelde insanlar kendi fikirlerini sunmakta ve diğerlerinden bol geri dönüt beklemektedirler (Moeran, 1984, akt. [54]). Bireyler gruba bağlı kalmak yerine anlık fikirlerini, duygularını, ilgilerini ifade etmek ve paylaşmak yoluna gitmektedirler.

Bu iki modelin doğalarında yatan, sosyal zorunluluklar ile kişisel ilişkiler arasında karışıklıklara yol açan bir gerilim olduğu açıktır. İnformel ortamlarda, yakın arkadaşlarla özel konuşmalarda ya da arkadaş toplantılarında, insanlar fikirlerini ve duygularını açık açık ifade etmek konusunda kendi tercihlerini yapmakta ve bu iki modelden birine göre iletişim kurmaktadırlar.

### 3.8.2. Japon ve Batı Kültüründeki Argümantasyon Süreçlerinin Karşılaştırılması

Batı kültüründe biri tarafından ortaya atılan bir fikrin ya da iddianın diğerleri tarafından savunulması ya da çürütülmesi kültürel açıdan son derece normal karşılanmaktadır. Ortaya atılan iddiaların savunulması ya da bu iddialara karşı çıkılması, fikirlerin çürütülmesi ve farklı fikirlerin ortaya atılması gibi süreçler Batı kültüründeki iletişimin doğasında yatan süreçlerdir. Bu anlamda Batı kültüründeki iletişim süreçleri Toulmin Modeli'nin doğasına son derece uygundur. Batı kültüründe fikirlerin paylaşım süreci için Toulmin [39] argümanı tanımlamıştır:

> "Bütün aktivite iddiaları üretmek, onların doğruluğunu tartışmak, sebepler üreterek onları desteklemek, bu sebepleri eleştirmek, bu eleştirileri çürütmekten oluşmaktadır."

Lakoff ve Johnson (1980, akt. [54])'ın dediği gibi Batı kültüründe argümantasyonun altında yatan gerçek aslında bir savaştır:

> "Tartışmada yaptığımız şeylerin çoğu savaş ile aynı yapıdadır. Bu fiziksel bir savaş değildir; sözel bir savaştır. Argümanın yapısı saldırı, savunma, karşı atak, vb. yansıtır."

Batı kültürünün tersine Japonya'da halk arasında ya da özel sohbetlerde sözel anlamda savaş hali görülmez. Yani iletişimde ortak bir paylaşım ve dayanışma söz konusudur. Temelde mantık değil, insan ilişkileri vardır. Çünkü insanlar doğrudan karşı karşıya gelmekten kaçınırlar, fikirlerini belli belirsiz ortaya koyarlar. Böylece başkaları karşıt görüşler bildirdiklerinde hemen geri çekilebilirler ya da fikirlerini değiştirebilirler. Bunun bir sonucu olarak Japon kültüründe insanlar veri, gerekçe ve destek gibi mantıksal savunma araçlarını genellikle kullanmazlar. Günlük hayatta mantık gereksiz görülmektedir. Dolayısıyla argümanlar yüzeysel görülmekte ve dinleyicilerin dikkatini çekmemekte; onları etkilememektedirler.

Japon kültürü üzerine yapılan analizlere bakıldığında Moeran (1984, akt. [54])'a göre, mantıksal muhakemeden ziyade kalbe seslenişe/derinden etkileme gücüne daha büyük önem verilmektedir. Grup modelinin tamamlayıcısı olan sosyal değişim modelinde bile mantıksal argümantasyon tercih edilmemektedir (Kitade, 1993, akt. [54]).

**Çizelge 3.2.:** Japonlar ve Amerikalılar arasındaki farklı iletişim stilleri

| | **Japonlar** | **Amerikanlar** |
|---|---|---|
| **Amaç** | Sosyal uyum | Geçerli sonuçlar |
| **Konu/Ana Fikir** | Kişiler arası tavır/tutum (insan ilişkileri) | Bireysel fikirler |
| **Araç** | Geçmiş deneyimlere dayalı sezgiler | Sözel argüman |
| **Fikirlerdeki Farklılık** | Kaçınılır | Değer verilir |

### 3.8.3. Japon Sınıflarında Argümantasyon

Japon okullarında sınıflarda tartışma için hem formel hem de informel fırsatlar sunulmaktadır. Sınıflarda genellikle ya tüm sınıfın katıldığı ya da küçük gruplar halinde tartışma ortamları düzenlenmektedir. Bu tartışmaların bir kısmında grup modeline, bir kısmında ise sosyal değişim modeline rastlanmaktadır.

Yetişkinlere kıyasla okullarda öğrenciler bir konu hakkındaki farklı düşüncelerini rahatlıkla ifade eder ve birbirlerine muhalefet olurlar. Oluşan anlaşmazlıklar sınıfın konu hakkındaki uyumuna zarar verebilir. Sınıf öğretmeni burada önemli rol oynar. Öğretmen genellikle öğrencilerinin bireysel fikirlerine doğru da olsa yanlış da olsa saygı gösterir. Böylece öğrencilerin iddiaları arasında bir kargaşa yaratarak, konuyu daha iyi anlamalarını sağlamak için tartışma ortamı oluşturur. Bütün sınıf üyeleri problemin çözümüne yönelik olarak birlikte çalışır ve birlikte son kararı alır. Böylece ulaşılan çözüm sınıf içinde bir uyum yaratır.

Japon öğretmenler bazen açık uçlu problemler ile derse başlarlar (Bocker vd., 1990, akt. [54]). Öğrencileri problemi çözmek için kendi fikirlerini sunma konusunda cesaretlendirirler. Öğrenciler bazen yanlış hipotezler ve fikirler üretirler, bazense çok farklı çözümler ortaya koyarlar. Bu süreçte öğretmen öğrencilerinin düşünme süreçlerini yoğunlaştırmak adına ters örnek veya ters argüman ortaya atabilir. Ancak sonuçta öğrenciler arasında birliktelik ve aynı fikrin paylaşımı desteklenir. Öğrenciler arasında yarışma, hangi çözümün daha iyi olduğu ya da daha doğru ya da daha etkili olduğunun tartışılması genellikle desteklenmez. Buna göre Batı kültürünün tersine Japon kültüründe argümantasyon sürecinde ne kazanan ne de kaybeden vardır.

### 3.8.4. Japon Sınıflarında Kanıt

Kanıtın amacı oy birliği ile toplumda uyum yaratmayı sağlayan bir sonuca varmaktır. Kanıt, toplumda kabul edilen ve toplum üyelerinin uyumunu sağlayan öncülleri kabul etmeyi gerektirir. Toplumun ortak değerlerine dayanır. Kanıtlarda neyin geçerli olduğu kişisel bir düşünce değildir, bu yüzden de fikir farklılıklarına grup modelindeki kanıtlarda değer verilmez. Kanıt içinde yer verilen tanımlar, topluluk üyeleri arasında herhangi bir karışıklıktan kaçınmak ve matematiksel terimlerin anlamını açıklamak/netleştirmek için kullanılırlar.

**Çizelge 3.3.:** Kanıt yapma ve grup modeli arasındaki tutarlılık

| | **Kanıt** | **Kanıtın Yorumu** | **Grup Modeli** |
|---|---|---|---|
| **Amaç** | Geçerli bir sonuç | Oy birliği ile karara varılan sonuç | Sosyal uyum |
| **Konu** | Bir iddianın neden doğru olduğunun sebepleri | Toplumda ortak olan şeylere karşı bağlılık | Kişiler arası tutumlar/tavırlar |
| **Araç** | Verilen şartlar, doğru olarak kabul edilen şeyler | Paylaşılan bilgi ve ifadeler | Ortak deneyim temelli sezgi |
| **Fikir Farklılıkları** | Uygun değil | İhmal edilebilir/göz ardı edilebilir | kaçınılır |

Argümantasyonun ve matematiksel kanıtın yapısı Toulmin Modeli'nden ziyade Japonların geleneksel iletişim stili ile daha tutarlı görünmektedir. Matematiksel kanıt ve Japon iletişim stili arasındaki ilişki üzerine sistematik hiçbir çalışma yapılmamıştır. Çalışmada yer verilen argümanlar araştırmacının Japon sınıflarındaki kendi gözlemleri ve kitaplar üzerinde yaptığı analizler sonucunda ortaya çıkmıştır. Buna göre, araştırmacı gelecek çalışmalar için bu analiz sonuçlarının bir hipotez olarak alınması gerektiğini belirtmektedir.

### 3.8.5. Batı ve Japon Kültürüne Göre Kanıt Yazma

İletişim modellerinin, matematiksel kanıtı yazma stillerini etkilediği görülmektedir. Batı kültüründe lise geometri derslerinde ve cebirde kanıt yazmak için iki sütunlu form kullanılır. Bu formda yatay uzun bir çizgi ve onun ortasından geçen dikey bir çizgi çizilir. Böylece yatay çizginin altında 2 sütun oluşturulur. Sol sütuna kanıtlanacak ifadeye yön veren ifadelerin dedüktif bir dizisi yazılır. Dedüktif çıkarımın her bir adımı numaralandırılır. Her bir adım için sağ sütuna sebep yazılır. Bu format kanıtı iki sütun halinde düzenlediğinden *iki-sütun formu* olarak adlandırılır. Bu tarzda kanıt yazımı muhakemenin açık açık ifade edilmesini teşvik eder. Çünkü her ifade bir sebep ile sunulmaktadır. Dolayısıyla savunma adımlarını atlamak zordur. Buna ek olarak, savunma ve doğrulama için gerekli bütün postulatlar, tanımlar ve teoremler açık açık formüle edilirler. Bu tarzda kanıt yazma argümantasyonun oldukça değer gördüğü Batı kültürüne uygundur.

If two angles of a triangle are congruent, then the sides opposite those angles are congruent.

Given: $\angle B \cong \angle C$

Prove: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ [ a diagram of a triangle ABC]

**Proof:**

| Statements | Reasons |
|---|---|
| 1. Draw the bisector of $\angle A$, intersecting $\overline{BC}$ at $D$ | 1. By the Protractor Postulate, an angle has exactly one bisector. |
| 2. $\angle BAD \cong \angle CAD$ | 2. Def. of angle bisector |
| 3. $\angle B \cong \angle C$ | 3. Given |
| 4. $\angle BDA \cong \angle CDA$ | 4. If two $\angle$s of one $\triangle$ are $\cong$ to two $\angle$s of another then the third $\angle$s are $\cong$. |
| 5. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ | 5. Reflexive Property |
| 6. $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ | 6. ASA Postulate |
| 7. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | 7. Corresponding parts of $\cong$ $\triangle$s are $\cong$. |

Şekil 3.7. İki sütunlu kanıt yazımı

Diğer taraftan Japonya'da lise matematik derslerinde kanıtlar genellikle paragraf formunda yazılır. Bu stilde öğrenciler her ifade için bir sebep yazmak zorunda değillerdir. Kanıtla ilgili postulatların, tanımların ve teoremlerin hepsi formüle edilmez. Bir kanıtın, ana fikrini anlatması yeterli görülmektedir. Aşağıda bir Japon ders kitabından alınan paragraf formunda yazılmış bir kanıt örneğine yer verilmektedir:

[In $\triangle ABC$, if $\angle B = \angle C$, then $AB = AC$]
[Proof] Draw the bisector of $\angle A$. Let its intersection with BC be D.
In $\triangle ABD$ and $\triangle ACD$,

$$\angle B = \angle C$$
$$\angle BAD = \angle CAD \ldots\ldots (1)$$

Because the sum of the interior angles of a triangle is 180°, the rest of the angles are equal.

$$\angle ADB = \angle ADC \ldots\ldots (2)$$
$$AD \text{ is common} \ldots\ldots (3)$$

Because, from (1), (2), and (3), one side and the angles at its both ends in each triangle are equal to the corresponding parts of the other, respectively,

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

Therefore, $AB = AC$

Şekil 3.8. Paragraf formunda kanıt yazımı

### 3.8.6. Sonuçlar

Japon kültürünün etkisi ile ortaya çıkan bir argümantasyon sürecinin Toulmin Modeli'ne göre analizinin çok zor olduğu görülmüştür. Ayrıca matematiksel kanıtı, argümantasyon aktivitesi olarak öğretmek de kültürel açıdan Japonlar için çok zordur. Batı'ya kıyasla Japonların iletişim stili öğrencilerini mantıksal sebepler ifade etme konusunda teşvik edici nitelikte değildir. Onlara göre her adım için sebep yazmak oldukça zordur. Özellikle grup modeli öğrenciler için muhakemelerini nasıl ifade edeceklerini öğrenmeleri için çok az fırsat vermektedir. Ancak Japon öğrencilerinin değişen çağa ayak uydurmaları ve farklı kültürden dünya insanları ile sağlıklı iletişim kurabilmeleri için argümantasyon sürecini tanımaları ve kullanabilmeleri şarttır.

### 3.9. Abdüktif Bir Argümantasyonun Ardından Ne Tip Bir Kanıt Yapılabilir?

Pedemonte [26], bu çalışmasında bir hipotezi destekleyen abdüktif argümantasyon süreci ile söz konusu ifadenin kanıtlanması süreci arasında oluşabilen yapısal boşluk üzerine odaklanmaktadır. Pedemonte'ye göre bu yapısal boşluğun analizi ile öğrencilerin kanıt yapımında karşılaştıkları bazı zorlukları belirlemek mümkündür.

Pedemonte [26], 3.7.'de yer verilen çalışmasında elde ettiği verileri bu çalışmasında amacına yönelik olarak tekrar kullanmaktadır. Öğrencilere yöneltilen problem durumu hatırlatma olması açısından aşağıda tekrar verilmektedir:

> ΔABC bir üçgendir. Üçgenlerin kenarları üzerine dıştan 3 adet kare çizilmiştir. Karelerin boşta kalan köşeleri birleştirilerek 3 üçgen daha oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin alanlarını ΔABC'nin alanı ile karşılaştırın.

Çalışmada analizine yer verilen ilk örnek, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki yapısal boşluk (mesafe) durumunu temsil eden bir örnektir. Bu örnekte abdüktif argümantasyondan dedüktif kanıta geçiş durumu analiz edilmektedir. Bu örnek 3.7.'de bütünüyle anlatılmış olması sebebiyle bu bölümde tekrar verilmeyecektir.

Pedemonte'nin bu çalışmasında yer verdiği ikinci örnek, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki yapısal süreklilik durumunu temsil etmektedir. Bu örnekte abdüktif argümantasyondan abdüktif kanıta geçiş durumu analiz edilmektedir.

#### 3.9.1. Analiz Süreci

Analiz $C_6$'da başlamaktadır. Bu noktada öğrenciler ΔABC'nin alanı ve ΔECL'nin alanının eşit olduğunu kabul ederler. Bu alanları hesaplarlar. $C_6$ ifadesi öğrencilerin doğrulamak zorunda oldukları hipotez ifadesidir.

*Öğrenciler üçgenlerin alanlarını hesaplarlar:*

103. C: Hesap makinesine göre alanlar eşit…

104. N: Şimdi bunu kanıtlamak zorundayız!

105. C: Taban ve yüksekliğin nasıl değiştiğini bulmamız gerek… Eğer üçgenlerin tabanları ve yükseklikleri arasında alanları eşit yapan bir oran varsa…

106. N: İçteki üçgenle bir bağlantı bulmalıyız… Üçgenler değişse de alanlar sabit…

107. C: Alan sabit… Fakat anlamıyorum… Tabanın yüksekliğe oranının diğer üçgende tabanın yüksekliğe oranına eşit olduğunu bulmak zorundayız.

108. N: Eğer tabanları sabit alırsak ve yükseklikleri değiştirirsek…

…..

115. C: Fakat yükseklikler neden eşit?

116. N: Tabanımız aynı ve… Evet, aynı yüksekliğe sahip olduklarını kanıtlamak zorunda olduğumuz doğru… Fakat bu kenarın ΔABC’deki bu kenara eşit olduğu elimizde…

117. C: O zaman küçük üçgen diğer küçük üçgene eştir…

118. N: Bekle bekle… İki kenarın eşit olduğu doğrudur… o zaman…

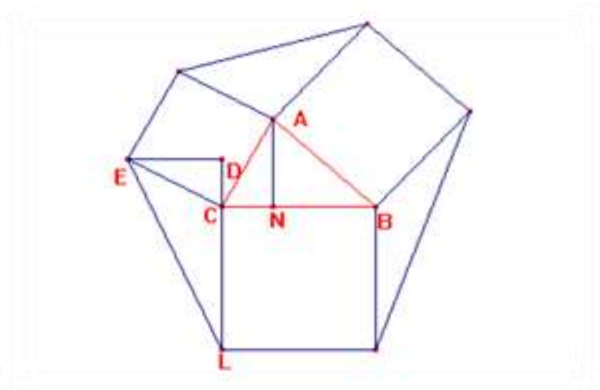
119. C: O zaman… Burada bir 90° var…

120. N: Bir başka kenara ya da bir başka açıya ihtiyacımız var… Örneğin bu açı, bu açıya eşittir çünkü…

…..

Şekil 3.9. Öğrencilerin argümantasyon süreci

*Öğrencilerin Cabri geometri kullanarak çizdikleri şekil*




$C_6$: ΔABC ve ΔECL üçgenlerinin alanları eşittir.

*Bu ifade bir gerçektir. Bu gerçeği doğrulamak için, öğrenciler ΔABC ve ΔECL üçgenlerinin tabanları ve yükseklikleri arasında bir oran ararlar, böylece sabit alan bulmaya çalışırlar.*

? $D_6$ : taban ve yükseklikler arasındaki oranın eşitliği → $C_6$: üçgenlerin alanları eşittir

↑

W: alan formülü

*(adım 6)*

*Eğer ΔABC ve ΔECL üçgenlerinden birinin tabanının diğerinin tabanına oranı, sırasıyla üçgenlerin yükseklikleri arasındaki orana eşit ise bu üçgenlerin yükseklikleri de eşit olmak zorundadır. Çünkü bu üçgenlerin tabanları eşittir. Buradan bu üçgenlerin alanlarının da eşit olduğunu söyleriz.*

*Burada argümantasyon adımı abdüktif yapıdadır.*

$D_7$ : eşit tabanlar<br>eşit yükseklikler (?) → $C_7$: $D_6$

↑

W: eşitliğin geçişliliği

*(adım 7)*

Şekil 3.10. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

*Öğrenciler yüksekliklerin neden eşit olduğunu doğrulamak zorundadırlar. Bu sebeple yükseklikler üzerine kurulu ΔANC ve ΔDEC küçük üçgenlerini düşünmektedirler. Eğer bu üçgenler eş iseler, yükseklikleri de eşittir.*

? $D_8$ : iki küçük üçgen eştir → $C_8$ : $D_7$

W: eşliğin kalıtsallığı

*(adım 8)*

Şekil 3.11. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

*İki küçük üçgen arasındaki eşlik, bir eşlik kriteri ile doğrulanabilir. Bu teoreme başvurmak için veri bulunmalıdır. Argümantasyon adımı yine abdüktif yapıdadır.*

$D_9$: ? → $C_9$ :$D_8$

W: KAA eşlik kriteri

*(adım 9)*

*Bir önceki örnekte olduğu gibi, öğrenciler eşlik kriterine başvurmak ve iki küçük üçgen arasındaki eşliği doğrulamak için veri ararlar.*

Şekil 3.12. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

Argümantasyonun yapısı abdüktiftir. Öğrenciler iki üçgenin alanlarının eşit olduğunun farkındadırlar. Bunu bu alanların eşitliğini hesaplayarak görmüşlerdir. Adım 6’da yükseklikler ve tabanlar arasında üçgenlerin alanlarını sabit yapacak bir oran ararlar. Adım 8 ve adım 9’da ise eşlik kriterine başvurmak için veri ararlar.

*Öğrenciler ΔABC ve ΔELC üçgenlerini düşünürler.*

Biliyoruz ki bu taban diğer üçgenin tabanına eşittir. Şimdi yüksekliklerin de eşit olduğunu kanıtlamalıyız. Bu gerçeği kâğıt üzerinde çizimle kanıtladığımız eşlik kriteri yoluyla doğrularız.

*Kâğıt üzerindeki çizim ile:*

Δ ANC ≅ Δ EDC

|EC|=|AC|

$\widehat{EDC}$ = $\widehat{ANC}$ = 90°

$\widehat{ACN}$ = $\widehat{ECD}$

Çünkü $\widehat{ACE}$= 90°, $\widehat{DCN}$= 90° ve eğer $\widehat{DCA}$ diğer iki açıdan çıkarılırsa aynı açıyı buluruz.

Şekil 3.13. Öğrencilerin kanıt süreci

*Kanıtın yapısı abdüktif bir adım içerir:*

$D_6$ : eşit tabanlar
eşit yükseklikler (?)

→ $C_6$ : üçgenlerin alanları eşittir.

W: alan formülü

$D_7$ : Δ ANC ≅ Δ EDC

→ $C_7$ : eşit yükseklikler

W: eşliğin kalıtsallığı

$D_8$ : |EC| = |AC|
$\widehat{EDC} = \widehat{ANC} = 90\,°$
$\widehat{ACN} = \widehat{ECD}$

→ $C_8$ : Δ ANC ≅ Δ EDC

W: KAA eşlik kriteri

Şekil 3.14. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi

### 3.9.2. Sonuçlar (Abdüktif Argümantasyondan Abdüktif Kanıta Geçiş Durumu)

Analizi yapılan örnekte kanıtın yapısının abdüktif olduğu görülmektedir. Öğrencilerin bu durumda kanıtı yapmakta zorlandıkları ve sonuçta başarısız oldukları görülmüştür. 3.7.'de analizi yapılan örnekte abdüktif yapıda argümantasyondan dedüktif yapıda kanıta geçiş durumunda, argümantasyon süreci ile kanıt süreci arasında yapısal bir mesafe olmasına rağmen öğrencilerin büyük çoğunluğu kanıtı başarı ile tamamlayabilmişlerdir. Bu örnekte olduğu gibi yapısal süreklilik olduğu durumda ise söz konusu sürekliliğin öğrencilerin kanıt yapmalarına engel teşkil ettiği görülmüştür.

Pedemonte [26] bu konuda şu yorumu yapmaktadır: Abdüktif yapıda argümantasyondan dedüktif yapıda kanıta geçen öğrenciler iki süreç arasındaki yapısal mesafeyi başarıyla doldurmuşlar ve kanıtı yapabilmişlerdir. Ancak bu bölümde analizine yer verilen örnekte olduğu gibi, öğrenciler argümantasyon ve kanıt arasındaki yapısal boşluğu (mesafeyi) dolduramadıklarında ve kanıtın yapısı argümantasyondaki gibi abdüktif yapıda kaldığında, öğrenciler kanıt yapmakta büyük oranda başarısız olmaktadırlar.

Buna göre öğrenciler argümantasyon ve kanıt arasındaki yapısal mesafeyi doldurabilirlerse ve kanıtın yapısını dedüktif yapıya geçirebilirlerse kanıt yapma konusunda başarılı olma olasılıklarını arttırmaktadırlar. Bu durumun sebeplerinin araştırılması ve bu konu üzerinde daha ayrıntılı analizlerin yapılması önerilmektedir.

Yapılan analizlerde dikkat çeken bir diğer nokta, Pedemonte'nin diğer çalışmalarında olduğu gibi bu çalışmasında da öğrencilerin argümantasyon ve kanıt sürecinin yapısal analizini Toulmin Modeli'ne göre yaparken yardımcı/yedek elemanlara yer vermemiş olmasıdır.

## 3.10. Sınıfta Kanıtlama Yapılırken Karşılaşılan Argümantasyon Yapıları

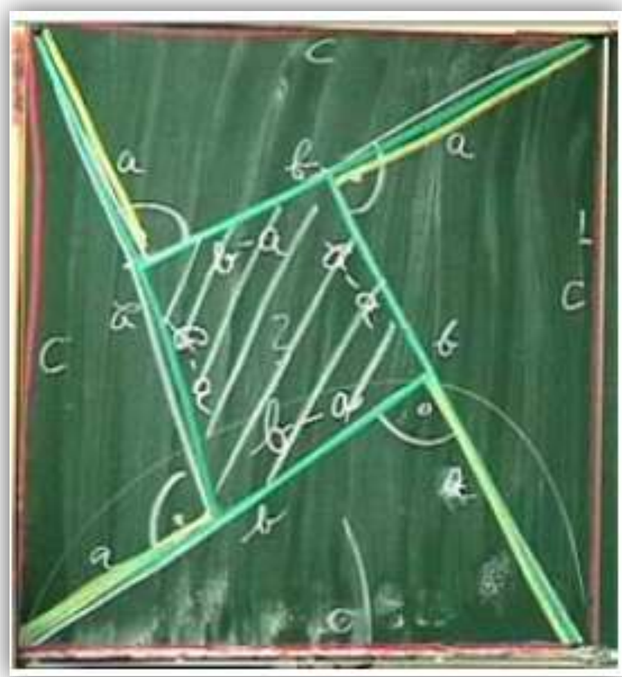
Knipping [55] bu çalışmasında, sınıfta kanıtlama yaparken rastlanan yöntemsel açıdan farklı argümantasyon yapıları üzerine odaklanmaktadır. Fransa ve Almanya'da yapılan karşılaştırmalı bir çalışmada gözlemlenen yöntemsel açıdan farklı iki tip argümantasyon yapısından bahsedilmekte ve bu yapılara ilişkin örnekler sunulmaktadır. Argümanların analizinin yine Toulmin Modeli'ne göre yapıldığı görülmektedir.

Ortaya çıkan yöntemsel açıdan farklı argümantasyonlardan ilki bir kaynak gibi tanımlanmakta; ikincisi ise bir depo olarak karakterize edilmektedir. Aşağıdaki bölümde bu argümantasyon yapıları örneklerle açıklanmaktadır.

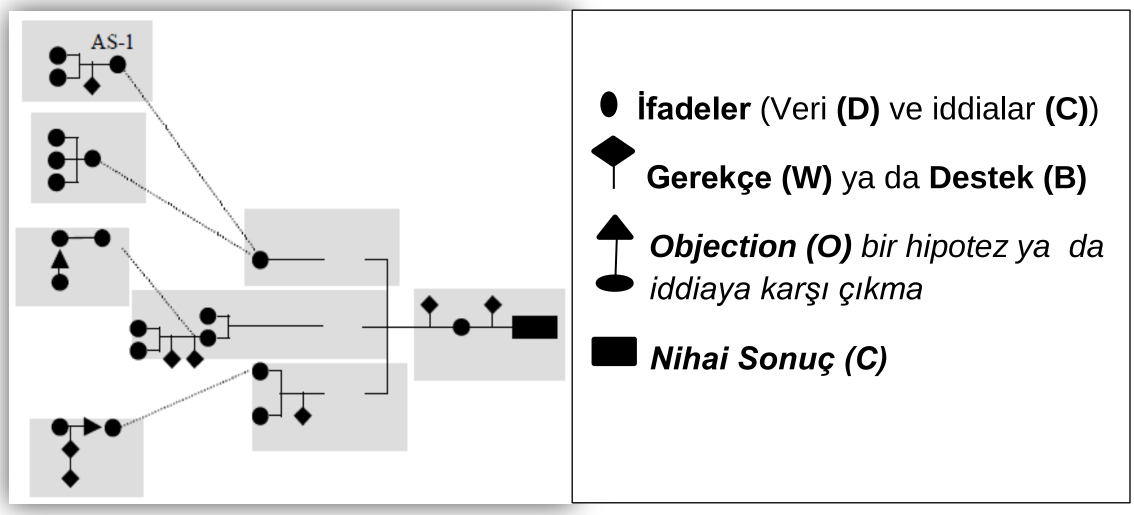
### 3.10.1. Argümantasyonun Kaynak Yapısı

Kaynak tipi argümantasyonlu kanıtlama tartışmalarında argümanlar ve fikirler kaynaklardan fışkıran su gibi çeşitli kaynaklardan çıkar. Burada kaynak ile kastedilen, bir sınıf tartışmasında yer alarak argüman üreten bireylerdir. Bu süreçte yalnızca hedef sonuç değil, aradaki ifadeler de çeşitli yollarla doğrulanmalıdır. Bir ifadenin doğrulanması, öğretmen tarafından açık ya da üstü kapalı biçimde takdir edilmeli ve desteklenmelidir. Bir öğrencinin argümanı diğer öğrenciler tarafından reddedilse ya da söz konusu argümana itiraz edilse bile argümanı üreten öğrenci takdir edilmelidir.

Bu çalışmada deneyde sınıf içi tartışma, Pisagor teoremi formülünün üretim sürecine ilişkindir. 8 farklı argümantasyon akımının söz konusu kanıtın global argümantasyon yapısını beslediği görülmüştür. Bu akımlar ifadeleri ve sonuçları bir argüman zincirine bağlamamakta, fakat pek çok kaynağın bir akarsuyu beslemesi gibi global argümantasyonunu beslemektedirler. Öğretmen tahtaya çizdiği şekil üzerinde öğrencilerin özdeş 4 adet dik açılı üçgenin alanı ile ilgili bir formül üretmelerini istemiştir.



Şekil 3.15. Öğretmenin tahtaya çizdiği şekil




Şekil 3.16. Argümantasyonun kaynak yapısı

Burada AS-1 gösterimi, argüman 1'i ifade etmektedir. Benzer şekilde diğer argümanlar da sırası ile aynı gösterim şekli kullanılarak temsil edilmişlerdir.

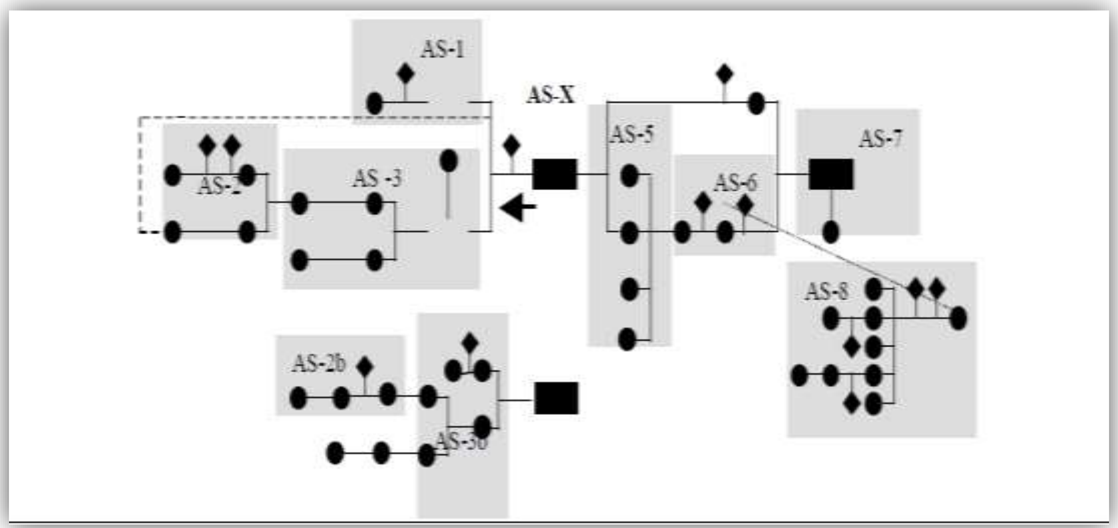
Argüman 1'de içerideki dörtgenin kare olduğu; argüman 2'de dışarıdaki şeklin kare olduğu, argüman 3'te içerideki karenin alanının $b^2$ olduğu, argüman 4'te dışarıdaki karenin alanının $c^2$ olduğu ve argüman 5'te içerideki karenin bir kenarının b-a olduğu iddia edilmektedir. Argüman 6 Sascha'nın hipotezidir ve çalışmada daha detaylı olarak verilmektedir. Sonunda bütün argümantasyon akımları birleşerek tek bir akım oluşturmaktadırlar.

Bu süreçte argüman 3 ve 6 reddedilmiştir, fakat bu argümanlar kanıt için önemli olan matematiksel fikirlere katkıda bulunarak global argümantasyonu beslemektedirler. Kaynak tipi argümantasyon yapısında bir hipotezi reddetmek tartışma içinde büyük bir dikkat gerektirir. Tersine argümantasyonun ikinci yapısında, depo yapılı argümantasyonda odaklanma global argümanın dedüktif elemanları üzerindedir; böylece öğrencilerin yanlış hipotezleri tartışma esnasında göz ardı edilebilmektedir.

### 3.10.2. Argümantasyonun Depo Yapısı

Depo yapısındaki argümanlar, bütün argümantasyonu kesin ve kendine yeten parçalar halinde düzenleyen orta dereceli hedef sonuçlarına doğru akarlar. Argümantasyonu oluşturan parçalar, akan suyu diğer bölüme geçmeden kendi içinde temizleyen depolar gibidirler. Depo yapısını basit bir dedüktif argümantasyondan ayıran şey mantıksal bir yapı içinde geri dönmeyi ve sonra tekrar dedüksiyonlar halinde ileri gitmeyi sağlayan abdüksiyon adımlarıdır. Bu yapıda argümantasyon süreci, akarken aynı zamanda arıtılan su gibidir.

Depo yapısındaki argümantasyonlarda üretilen dedüksiyonlar, verilerle daha fazla desteklenmeyi gerektiren sonuçlar ortaya çıkarırlar. Abdüksiyonlar doğru olduğu düşünülen bir sonuçtan geriye doğru giderek veriyi kurmak için muhakeme yapmayı sağlar. Bu veriler kabul edildikten sonra başka dedüksiyonlar, doğru olduğu düşünülen sonuca güvenilir biçimde yön verir. Bu durum, kendine yeten ve bir hedef sonucundan ileriye ve geriye doğru akan bir argümantasyon deposunu karakterize etmektedir.




Şekil 3.17. Argümantasyonun depo yapısı

Burada Şekil 3.15.'te verilen öğretmenin tahtaya çizdiği şekil üzerinden Pisagor teoremini üretme amaçlı yapılan sınıf argümantasyonunda rastlanan depo yapısına ilişkin bir örnek verilmektedir. Şekil 3.18.'deki AS-1 gösterimi, argüman 1'i ifade etmektedir. Benzer şekilde diğer argümanlar da sırası ile aynı gösterim şekli kullanılarak temsil edilmişlerdir.

Argüman 1 (AS-1), argüman 2 (AS-2), argüman 3 ve 4 (AS-3 ve AS-4)'ün oluşturduğu ilk kısmın tersine, argüman 5 (AS-5), argüman 6 (AS-6) ve argüman 7 (AS-7)'nin oluşturduğu ikinci kısımda kapalı bir yapı görülmektedir. Yani ikinci kısımda yalnızca ileriye doğru bir akım vardır; geriye dönüş görülmemektedir. Argüman 5 (AS-5) ve argüman 6 (AS-6) cebirsel argümanlar olup, sonuç argümanı niteliğinde olan argüman 7 (AS-7)'ye doğru akarlar.

İlk argümanda (AS-1) kanıta konu olan Şekil 3.15.’te verilen öğretmenin tahtaya çizdiği şeklin bir eşkenar dörtgen olduğu iddia edilmektedir. Argümantasyonun devamında dörtgenin bir kare olduğuna dair bir başka iddia ortaya konulmuştur. Bu hedef ifade, bir sonraki adımdaki geriye doğru akan abdüksiyonun başlangıç noktasıdır:

*“Dışarıdaki şeklin kare olması için, iç açıları ölçüleri 90° olmak zorundadır”* (AS-X).

Tahtada çizimle desteklenen *“Dışarıdaki şeklin açıları birer dik açıdır”* hipotezi ilerideki dedüksiyonlar için bir hedef sonucuna dönüşmüştür. Verilen bir dik açılı üçgende dar açıların toplamı 90°dir. Farklı üçgenlerde aynı açıları 90°ye tamamlayan açılar da aynıdır. Böylece şekil üzerinde tümler açılar bulunmuş ve buradan söz konusu şeklin kare olduğu sonucuna varılmıştır.

Buna ilişkin öğretmen ve öğrenciler arasında geçen depo tipi argümantasyonun bir kısmı aşağıda verilmektedir. Kişilerin önündeki sayılar, analizde ifadelerin yer aldığı sıra numaralarını göstermektedir.

**58 Öğretmen:** Kare. Öyleyse hangi koşullar altında bu bir karedir, eşkenar dörtgen mi kare mi?

**59 Öğrenciler:** Eğer dik açısı varsa.

**60 Öğretmen:** Eğer neyi varsa?

**61 Öğrenciler:** Bir dik açısı.

**62 Öğretmen:** Bir dik açı, bu yeterli. Peki, hangi açıyı seçiyorsunuz? Bir açıyı hesaplayın.

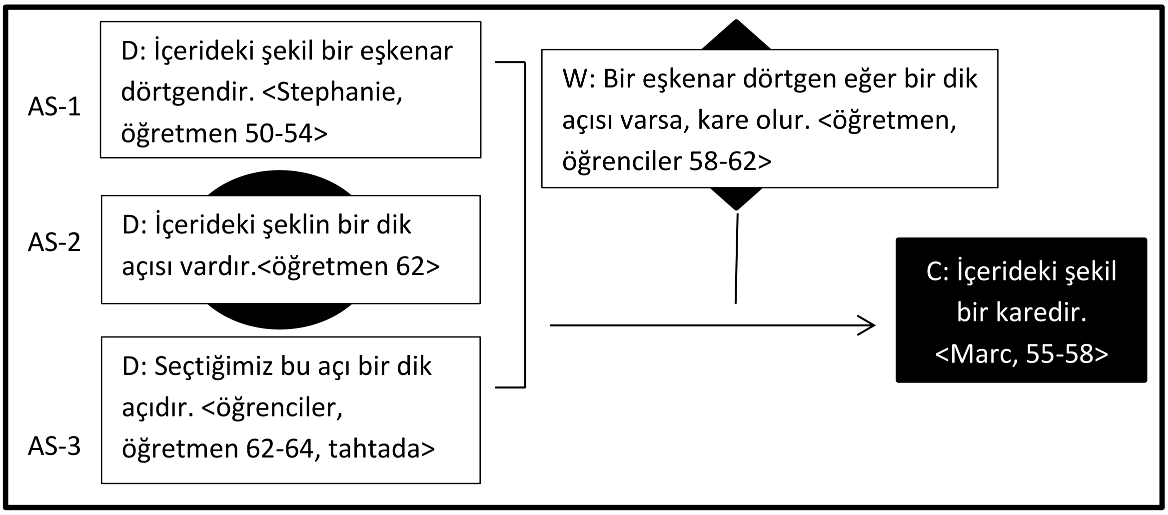
**63 Öğretmen:** Fakat kanıtlamak zorundasınız. İstediğinizi seçin. Hangi açı hesaplanması kolay duruyor? Şuradaki olabilir mi?

**64 Öğretmen:** Hayır, onu hemen dik açı olarak işaretlemeyin. Bir soru işareti koyun.

**65 Öğretmen:** Peki, ne öneriyorsunuz? Onu nasıl hesaplarsınız? Yaptığınızı söylemiştiniz.

Bu argümantasyon sürecinde abdüktif adım görülmektedir ve bu abdüktif adımın desteği karenin tanımıdır. Bu destek bir öncülün/aksiyomun ortaya konulmasına yön verir: *"Dışarıdaki şekil bir karedir"* hedef sonucuna yönelik *"Dışarıdaki şeklin açıları dik açıdır"* öncülünün/aksiyomunun oluşmasını sağlar.

Öğrenciler ve öğretmen bu öncülü özelleştirmiş ve içerideki şeklin bir açısını seçerek bu açının dik açı olduğunu gösterme yoluna gitmişlerdir. Burada abdüktif adımların, hedef sonucun öncüllerini açık hale getirdiği görülmüştür. Aşağıdaki şekilde söz konusu abdüktif argümantasyon sürecinin şematik hali verilmektedir.




Şekil 3.18. Depo yapısındaki argümantasyon

Kaynak tipi kanıt tartışmalarında kanıt yapmanın işlevi teoremin neden doğru olduğunu anlamaktır. Pek çok kaynak keşfedilir. Bunun tersine depo tipi tartışmalarda kanıt yapmanın işlevi teoremin doğru olduğunu doğrulamaktır, kavramsal ilişkiler daha kapalı bir yöntemle kurulur.

Verilen örneklerde kanıtlama sürecindeki argümantasyon sadece argümanların tipi bakımından farklılık göstermez, aynı zamanda tartışmanın global yapısında ve bir argümandan diğerine geçerken kullanılan metinlerde de farklılık gösterir. Bu durum, argümanların yapıları üzerine daha fazla araştırma yapılması gerektiğini göstermektedir. Kanıt yapma ve argümantasyon yapılarının işlevleri arasındaki ilişkiler, gelecekte yapılacak başka araştırmalar için ilginç bir konu olacaktır. Bu araştırmalarda cevabı bulunması önerilen soru, argümantasyon yapılarındaki abdüksiyonların rolü ile ilgilidir. Bu çalışmada abdüksiyon, sadece depo tipi argümantasyonlarda bulunmuştur. Abdüksiyonun kaynak tipi argümantasyonlarda bulunup bulunmadığı hala ucu açık bir sorudur. Bu nedenle argümantasyon yapılarındaki abdüksiyonun rolünün dikkatle ve özenle araştırılması önerilmektedir.

### 3.11. Fransız ve Alman Ders Kitaplarından Alınan Örneklerde Argümantasyon ve Kanıt

Cabassut [56] bu çalışmasında, Alman ve Fransız ortaokul müfredatında matematik eğitiminde argümanların kullanımına ilişkin yapmış olduğu araştırma sonuçlarını paylaşmaktadır. Cabassut [56], olasılık ve gereklilik argümanları olmak üzere iki çeşit argüman tanımlamaktadır. Çalışma kapsamında ilk olarak bu argüman çeşitleri hakkında bilgi verilmiş, ardından argümantasyon ve kanıt süreçlerinde bu argümanların kullanımına ilişkin örneklere yer verilmiştir.

#### 3.11.1. Olasılık Argümanları

Bu tip argümanlarda "garanti" bize sonuca ulaşmamız için yalnızca deneysel anlamda izin verir [39]. Olası bir istisna ya da koşul durumunu ifade etmek için iddia (sonuç), *"büyük ihtimalle, şu şartla…"* gibi bir takım özel sözcüklerle nitelendirilir [39].

Bu argümantasyonlar aslında bizim de daha önceki çalışmalarda bahsettiğimiz "abdüksiyon" olarak isimlendirilen Polya'nın (1954, akt. [56]) tanımladığı olasılıklı düşünmedir (Peirce, 1960, akt. [56]): "C'nin doğru olduğu görülüyor. Ancak C, A doğru olduğu durumda doğrudur. C'nin doğru olduğu açıksa, o zaman A da *büyük ihtimalle* doğrudur."

#### 3.11.2. Gereklilik Argümanları

Bu tip argümanlarda "garanti" bileşeni bize sonuca ulaşmamız için açık şekilde izin verir [56]. *"Modus ponens"* bu tip argümanlara bir örnektir: "A gözlenen bir durum ve eğer A doğru ise C de doğrudur. O halde C'nin doğru olması gerekir". Modus ponens, bir çıkarım kuralıdır ve bu kurala göre hem A hem de A → B'nin doğru olduğu bilindiğinde B'nin de doğru olması gerektiği sonucuna ulaşılır (Velleman, 2006, akt. [7]).

Balacheff (1991, akt. [56])'e göre, argümantasyon ve kanıt süreçleri aynı doğaya sahip değildir. Argümantasyonun amacı etkileşim sonucunda bir anlaşma/uzlaşma elde etmektir. Ama birincil amaç bir ifadenin doğruluğunu ortaya koymak değildir. Argümantasyon açık bir süreçtir; diğer bir deyişle argümantasyon aracıların her çeşidini kullanmaya fırsat verir. Matematiksel kanıtlarda ise, matematikçilerin üzerinde hem fikir oldukları bir bilgiyi temel alarak elde edilmiş bir bilgiyi kullanma gereksinimi (zorunluluğu) vardır.

Cabassut [56], argümantasyon ve kanıt süreçlerinin doğalarındaki bu farklılıktan dolayı olasılık ve gereklilik argümanlarının bu süreçlerdeki kullanım farklılıklarına değinmiştir. Bunu yaparken ilk olarak hem argümantasyon hem de kanıt özünde birer doğrulama türü olduğundan *“doğrulama nedir?”* sorusuna cevap aranmıştır.

Cabassut [56]’a göre, “doğrulama” (validation*) “bir gereklilik ya da olası bir durum olarak ifadenin doğruluğunu iddia etmek niyetiyle ifade üzerinde düşünme”* olarak tanımlanmaktadır. Doğrulamanın iki ana işlevini birbirinden ayırmak gerekmektedir:

1. Olasılık işlevi: Olasılık argümanları yoluyla bir iddianın doğruluğunun olasılığını denetler.
2. Kanıt işlevi: Gereklilik argümanları aracılığıyla bir iddianın doğruluğunun gerekliliğini denetler.

“Argümantasyon” olasılık argümanlarının ve bazen de gereklilik argümanlarının kullanıldığı doğrulama türüdür. Argümantasyon sürecinde doğrulama, olasılık işlevini yerine getirmektedir. Olasılık argümanlarının kullanımı bir hipotezi sürdürmek ya da sezgisel (deneyimsel) olarak bir iddianın, ifadenin kanıtını aramak için kullanılır. Deneysel metotları ya da matematiksel teoriler dışında kalan çıkarımları kullanan günlük matematiksel uygulamaları temel alır. Fakat bu kullanım ifadeyi, iddiayı matematiksel teori açısından daha doğru ya da daha olanaklı yapmaz. Söz konusu matematikçi hipotezinin olasılığı konusunda diğer matematikçilerin onayını alabilir, ancak bu onay sezgiseldir.

“Kanıt” ise sadece gereklilik argümanlarının kullanıldığı bir doğrulamadır. Matematiksel kanıtta gereklilik argümanları ifadenin doğruluğunun gerekliliğini kanıtlarlar. Olasılıklı düşünme matematiksel bir teoride kabul görmez.

### 3.12. Argümantasyon ve Kanıt Arasındaki İlişki Nasıl Analiz Edilebilir?

Pedemonte [20]’nin bu çalışmasındaki amacı, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında çoğunlukla yapısal bir mesafe olduğunu göstermektir. Çalışmasına argümantasyon ve kanıtın işlevsel ve yapısal özelliklerini vererek başlamıştır. Pedemonte’ye göre, matematikte argümantasyon ve kanıt süreçlerinin dört işlevsel özelliği bulunmaktadır.

### 3.12.1. Argümantasyon ve Kanıtın İşlevsel ve Yapısal Karakteristikleri

Argümantasyon ve kanıtın işlevsel özellikleri şöyle belirlenmiştir:

1. Argümantasyon ve kanıt matematikte mantıklı savunmalar olarak düşünülebilir.

Araştırmalar, matematiksel kanıtın yapımında etkili olan savunma aktivitelerinin öneminin altını çizmektedirler (Hanna 1991, 1995; Healy ve Hoyles, 2000, akt. [20]). Bu savunma, bir ya da daha fazla yargıdan tek bir yargı üretmeyi sağlayan argümantasyon şeklinde ortaya çıkar. Bu çıkarımlar yargı dilinde kullanılan çıkarımlar gibi mantığa dayalıdır (Plantin, 1990, akt. [20]).

2. Argümantasyon ve kanıt matematikte inandırmayı sağlar.

Epistemolojik açıdan, matematikte argümantasyon ve kanıt, birinin kendisini ya da başkalarını bir ifadenin doğruluğuna inandırmak istediğinde geliştirilir (Chazan 1993; De Villiers, 1990; Hanna 1989; Healy ve Hoyles, 2000; Lakatos, 1976, akt. [20]). Burada önemli noktalardan biri de, farklı anlamlardaki ikna etmek (convince) ve razı etmek (persuade) terimlerini ayırt etmektir. Dil teorilerine göre, ikna etmenin amacı, mantığın yardımıyla fikirleri ve inançları değiştirmektir. Razı etmenin amacı ise, mantığa başvurma gerekliliği olmadan anlaşma sağlamaktır. İkna etmek razı etmek anlamına gelir, razı etmek ise her zaman ikna etmek anlamına gelmez. Bir diğer deyişle ikna olan kişi razı olmuştur, ancak razı olan bir kişi her zaman ikna olmuştur anlamına gelmez. Matematikte argümanlar birinin kendisini ya da başkalarını ikna etmesi için kullanılmaktadır.

3. Matematikte argümantasyon ve kanıt evrensel bir dinleyici kitlesine hitap eder.

Matematikte argümantasyonun amacı, birini ya da bir dinleyici kitlesini doğruluk değerine ihtiyaç duydukları bir ifadenin doğruluğu hakkında ikna etmektir. Plantin (1990, akt. [20])'e göre, bu dinleyici kitlesi evrensel dinleyiciler olarak adlandırılmaktadır. Özel dinleyicilerin tersine, evrensel bir dinleyici kitlesi, muhataplarının argümanına ya da argümanlarına saygı göstererek kendi fikirlerini savunur. Bu çalışmanın konusu kapsamında dinleyiciler ile kastedilen matematik camiasıdır. Bir okulda eğitim öğretim verilen bir "sınıf" matematik camiasına verilebilecek ilk akla gelen örnektir.

4. Matematikte argümantasyon ve kanıt bir alana aittir.

Argümantasyonda kullanılan kelimeler herkes için kesin ve tek bir algı oluşturmayı garanti etmez. Yanlış anlamaları en aza indirmek için ifadenin argümantasyonda hangi kapsamda kullanıldığına dikkat etmek gerekir. Burada “kapsam” ile kastedilen argümantasyonun *“alan”*ıdır. Toulmin [39], kelimelerin farklı anlamlarından dolayı argümantasyonun çoklu bir karaktere sahip olduğunun altını çizmektedir. Bu nedenle argümantasyonda *“alan”* kavramını ortaya koymuştur. Örneğin cebirle ilgili bir argümantasyonda kullanılan aksiyomlar ile geometri ile ilgili bir argümantasyonda kullanılan aksiyomlar birbirlerinden farklıdırlar. Kanıt için ise “alan” ile kastedilen matematikteki teorik alanlardır: Cebir, kalkülüs, geometri, vb.

Argümantasyon ve kanıtın işlevsel karakterizasyonu bu süreçler arasındaki işlevsel bağlantıyı gösterir. Pedemonte [20], argümantasyon ve kanıt arasındaki yapısal karakterizasyonu ise Toulmin Modeli’ne göre analiz etmektedir.

Pedemonte [20] bu çalışmasında argümantasyon sürecinde hipotezin ortaya konma şekline göre ortaya çıkan *yapısal ve yapılandırıcı argümantasyon* çeşitlerinden söz etmektedir.

### 3.12.2. Yapılandırıcı ve Yapısal Argümantasyon

*Yapılandırıcı argümantasyon (constructive argumentation)* bir hipotez oluşturmaya karşılık gelmektedir [27]. Verilen bir kurala göre her bir adım kendisinden önce gelen adımın dönüşümü şeklindedir. *Yapısal (structurant) argümantasyon* ise hipotezin bir gerçek olarak verilmiş olduğu durumlarda hipotezi doğrulamak adına üretilmektedir [27].

Hipotezin argümantasyon sürecinin başında bir gerçek olarak ortaya konması ya da bir takım ifadelerin oluşturulmasından ya da sayısal denemelerin yapılmasının ardından argümantasyon sürecinin sonunda ortaya konmasına bağlı olarak belirlenen yapısal ve yapılandırıcı argümantasyon çeşitleri farklı yapıda argümantasyon süreçlerinde yer alabilirler. Doğası gereği yapısal argümantasyon abdüktif ya da indüktif; yapılandırıcı argümantayson ise dedüktif ya da indüktif argümantasyon sürecinin içine girebilmektedir.

Bu çalışmada yapısal ve yapılandırıcı argümantasyonların indüktif yapıda argümantasyon süreci içerisinde yer aldığını görmekteyiz. Hem bu argümantasyon çeşitlerinin örnek durumlarını, hem de indüktif argümantasyon süreci içine nasıl girdiklerini görmek için bölüm 3.12.5. incelenmelidir.

Pedemonte [20] çalışmasında indüktif argümantasyonda genellemenin rolüne de değinmektedir. Harel [58]'in indüktif bir süreçte rol oynayan iki farklı genelleme tanımladığı aktarılmaktadır: *Sonuç genelleme* (*result pattern generalisation)* ve *süreç genelleme (process pattern generalisation).*

### 3.12.3. İndüktif Süreçte Rol Oynayan Genellemeler

#### 3.12.3.1. Sonuç Genelleme (Result Pattern Generalisation)

Sonuç genellemede sonuçlardaki düzene odaklanılmaktadır. Toulmin Modeli'ne göre sonuç genelleme şu şekilde şematize edilebilmektedir:

E; 1,2,3,… durumları üzerinde genellenen bir özellik olmak üzere $E_1$, $E_2$, $E_3$,…

D: $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ ⟶ C: ifade

↑

W: sonuç genelleme

Şekil 3.19. Sonuç genelleme (result pattern generalisation)

Burada $E_1$, $E_2$, $E_3$,…, $E_n$ bir önceki adımın iddialarıdır. Veriler arasında bir gerektirme (çıkarım) bağıntısı yoktur; birlikte ifadeyi oluştururlar.

#### 3.12.3.2. Süreç Genelleme (Process Pattern Generalisation)

Süreç genellemede ise süreçteki düzene odaklanılır ve genelleme bir durumu bir sonraki duruma bağlayan çıkarım ile yapılır. Toulmin Modeli'ne göre süreç genelleme şöyle şematize edilebilir:

D: $E_1$, $E_1 \rightarrow E_2$, $E_2 \rightarrow E_3$, … ⟶ C: İfade

↑

W: Süreç genelleme

Şekil 3.20. Süreç genelleme (process pattern generalisation)

$E_1$ , $E_1 \rightarrow E_2$ , $E_2 \rightarrow E_3, \ldots$ önceki argümanlardır. Veriler arasında zincirleme bir gerektirme (çıkarım) bağıntısı vardır.

Hangi tip argümantasyon olursa olsun, bir argümantasyonda ifadeler arasındaki mantıksal bağlantı kanıt içindeki mantıksal bağlantıdan farklılık gösterebilir. Kanıtın her bir adımı dedüktif bir adım olarak tanımlanabilir, fakat argümantasyonun yapısı dedüktif olmak zorunda değildir. Argümantasyon farklı yapıda adımlardan, örneğin abdüktif ya da indüktif adımlardan oluşabilmektedir (Peirce, 1960; Polya, 1962, akt. [20]). Bu durumda dedüktif bir kanıtın yapımı yapısal bir değişiklik gerektirmektedir. Örneğin abdüktif ya da indüktif adımlardan dedüktif adımlara bir değişim gibi. Bu değişim öğrenciler için her zaman anlaşılır ve kolay değildir, fakat genellikle gereklidir. Aksi halde kanıtın yapısı dedüktif olmayabilir.

### 3.12.4. Deney Süreci

Bu çalışmadaki deney, argümantasyon ve kanıt arasındaki içerik anlamında sürekliliğin bilişsel ilişkileri yorumlamak için yeterli olmadığı hipotezini doğrulamak ve argümantasyon ile kanıt arasındaki yapısal analizin önemini göstermek için yapılmıştır. Deneyde Fransa ve İtalya'da bazı 12. ve 13. sınıf öğrencileri ile çalışılmıştır. Bu sınıflarda öğrenciler kanıtı yeni yeni öğrenmeye başlamışlardır. Öğrenciler söz konusu problemleri çözmek için gerekli teoremleri bilmektedirler.

Hipotez oluşturmayı ve sonunda kanıt oluşturmayı gerektiren üç adet açık uçlu geometri problemi kullanılmıştır. Müfredatta yer alan ancak standart olmayan problemler seçilmiştir, çünkü bu problemler araştırmacının hipotezine ışık tutar niteliktedir. Bu çalışmada bu problemlerden sadece ikisi incelenmiştir. İlk problem abdüktif argümantasyon örneği, ikinci problem ise indüktif argümantasyon örneği sunmaktadır.

Söz konusu iki problem aşağıda verilmektedir. İlk problem Pedemonte'nin bölüm 3.7.'de ve 3.9.'da verilen çalışmalarında kullandığı problemdir.

**Problem 1.** ΔABC bir üçgendir. Dıştan üç kare üçgenin kenarları üzerine çizilmiştir. Karelerin boşta kalan noktaları birleştirilmiştir. Böylece üç üçgen daha oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin alanlarını, ΔABC'nin alanı ile kıyaslayınız.

**Çözüm.** Bu üçgenlerin alanları ile ΔABC'nin alanı eşittir. Bu problemin çözümü öğrenciler için açık değildir. Bir çözüm stratejisi bulmak için abdüktif argümantasyon yapmışlardır. Cabri Geometri'nin sürükleme fonksiyonu, ΔABC'nin ve dıştaki üçgenlerden birinin tabanı ve yükseklikleri arasındaki eşliği görmelerini sağlamıştır. Böylece hipotez bir gerçek olarak ortaya çıkmıştır. Öğrenciler bu gerçeği doğrulamak için veri ve gerekçe arayışına girmişlerdir. Argümantasyondaki bu abdüktif yapı, dedüktif bir kanıt üretmek için dedüktif yapıya dönüştürülmelidir.

Bu problem çözümüne ilişkin analiz süreçleri bölüm 3.7.'de ve 3.9.'da verildiğinden bu bölümde tekrar edilmeyecektir.

İkinci problem şu şekilde verilmektedir:

**Problem 2.** n kenarlı konveks çokgenin iç açılarının toplamını veren bir kural bulun.

**Çözüm.** Farklı konveks poligonları düşünmek mümkündür (bir üçgen, bir 5 kenarlı çokgen, bir 7 kenarlı çokgen vb.). Kural, açıların toplamını düşünerek bulunabilir. Her bir durumda açıların toplamını hesaplamak ve farklı sonuçları karşılaştırmak, genel durumdaki kuralı belirlemeyi mümkün kılar. Bu durumda argümantasyonun adımları arasında bağlantı yoktur. İndüktif yapıdaki argümantasyon *sonuç genelleme* ile yapılandırılmaktadır. Farklı durumlarda bulunan kurallar karşılaştırılır ve n duruma genellenir.

Bu problem durumuna uygun farklı bir argümantasyon süreci şöyle olabilir:

İlk çokgen olarak bir üçgeni düşünelim. Üçgenin açılarının toplamı 180°dir. Sonra iki üçgeni yan yana koyarak 4 kenarlı bir çokgeni düşünelim. İç açıların toplamı

180°'nin 2 katına çıkmaktadır. Benzer olarak; 5 kenarlı bir poligonu üç üçgene parçalarsak, iç açılar toplamını 180° ×3 olarak elde ederiz. Öyle görünüyor ki, bir çokgenin kenar sayısını bir arttırmak ona bir üçgen eklemek anlamına gelmektedir. Sonuç olarak iç açılarının toplamına 180° eklemek gerekmektedir. Genel olarak, n kenarlı bir çokgen düşündüğümüzde iç açıları ölçüleri toplamı (n-2)×180° olarak elde edilmektedir. Bu durumda, indüksiyon *süreç genelleme* ile yapılandırılmaktadır, çünkü genel kuralı bulmak için durumlar birbirine bağlanmıştır.

102 öğrenci çiftler halinde bilgisayar başında Cabri Geometri ile çalışmışlardır. Bu yazılımın seçilmesinin sebebi, yazılımın sürükleme fonksiyonunun öğrencilerin kalem ve kâğıt kullanırken gözden kaçıracakları bazı özellikleri gözlemlemelerine yardımcı olacak nitelikte olmasıdır. Dahası bir ekran önünde birlikte çalışan iki öğrenci uygun bir çözüm bulmak için birlikte konuşmak zorunda kalmaktadırlar. Bu durum, grup argümantasyonunun ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Öğrencilerin argümantasyonları ve kanıtları Toulmin Modeli'ne göre analiz edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Çözüm protokolleri öğrencilerin yazılı ürünleri ve video kayıtlardan elde edilmiştir. Analiz sürecinde öğrencilerin argümantasyon ve kanıt adımları yeniden yapılandırılmıştır. İddia (claim) C, veri (data) D ve gerekçe (warrant) W ile gösterilmiştir. Bu harflerin sağ altında verilen indisler argümantasyon adımlarının sıra sayısını göstermektedir. İlk olarak öğrencilerin orijinal metnine, hemen altında ise araştırmacının analiz sonuçlarına ve yorumlarına yer verilmiştir. Öğrencilerin orijinal metnine yer verirken sunulan bazı karşılıklı konuşmalarda, öğrenciler isimlerinin baş harfleri ile temsil edilmektedir. Metinler İtalyancadan İngilizceye, bu çalışma için de Türkçeye çevrilmiştir.

### 3.12.5. Sonuçlar (İndüktif Argümantasyon Durumu)

Bu bölümde Pedemonte'nin sunduğu indüktif argümantasyon durumlarının analizlerine yer verilmiştir. Çalışmanın başında bahsedilen Problem 2 üzerinde aşağıdaki örnek durumlar incelenmiştir:

**Örnek 1.** Sonuç genelleme temelli indüksiyon ve kanıt arasındaki yapısal mesafe örneği

**Örnek 2.** Süreç genelleme temelli indüksiyon ve kanıt arasındaki yapısal süreklilik örneği

### 3.12.5.1. Örnek 1 *(Sonuç Genelleme Temelli İndüksiyon Ve Kanıt Arasındaki Yapısal Mesafe Örneği)*

Öğrenciler birbirleri ile ilgisi olmayan çokgenler düşünmüşler ve her bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını hesaplayarak bir tablo yapmışlardır. Bu tabloyu göz önüne alarak, sonuç genelleme yoluyla hipotez oluşturdukları söylenebilmektedir. Bu süreçte öğrencilerin sonuç genelleme temelli argümantasyonlarında yapılandırıcı argümantasyon sürecinin yaşandığı görülmektedir. Anlamışlardır ki, bir çokgene bir kenar eklemek iç açılarının toplamına $180°$ eklemek demektir. Fakat bunun sebebini anlayamamışlardır. Bir çokgenin kenar sayısını bir arttırmanın bu çokgene bir üçgen eklemek ile eş değer olduğunu görememişlerdir.

*Alice aşağıdaki tabloyu yapmıştır:*

| Kenarlar | Toplam (açılar) |
|---|---|
| 3 | 180° |
| 4 | 360° = 180 × 2 |
| 5 | 540° = 180 × 3 |
| 6 | 720° = 180 × 4 |

29. A: Buna göre, n kenarlı bir çokgen için kural 180×(n-2) dir.

30. L: Evet. n kenarların sayısıdır.

Şekil 3.21. Öğrencilerin argümantasyon süreci

$D_4 : C_1$ , $C_2$ , $C_3$ $\longrightarrow$ $C_4$: n kenarlı çokgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180° ×(n-2) dir.

W: Sonuç genelleme

$C_1$ , $C_2$ , $C_3$ *önceden yapılandırlmış iddialardır:*

$C_1$ : 4 kenarlı bir bir çokgen için iç açıları ölçüleri toplamı 360°dir.

$C_2$ : 5 kenarlı bir çokgen için iç açıları ölçüleri toplamı 540°dir.

$C_3$ : 6 kenarlı bir çokgen için iç açıları ölçüleri toplamı 720°dir.

Şekil 3.22. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

Öğrenciler hipotezi kanıtlamak zorunda olduklarının farkındadırlar. Hipotezlerini matematiksel indüksiyon ile kanıtlamak istemişler, ancak yapamamışlardır. Bu argümantasyon ile matematiksel indüksiyon arasındaki *yapısal mesafe* çok büyüktür. Pedemonte [20] bu yapısal mesafenin kapatılamamasının sebebinin öğrencilerin süreç içinde kullandıkları yapılandırıcı argümantasyon olduğunu düşünmektedir. Öğrencilerin yaptıkları kanıt aşağıda verilmektedir.

Başlangıç n=3 için

180×(3-2)=180°

Hipotez: 180× (n-2)

Tez: 180× (n-1)

S(n)= 180× (n-2)=180 × n-360

S(n+1)=180× (n+1)-360=180 × n+180-360= 180 × (n+1-2)=180× (n-1)

Tezimizi matematiksel indüksiyon yöntemi ile kanıtlamış olduk.

Şekil 3.23. Öğrencilerin kanıt süreci

*Öğrenciler matematiksel indüksiyonun zeminini oluştururlar (n=3).*

$D_5$ : Çokgen bir üçgendir → $C_5$ : S(3)=180°

W: Üçgenlerin iç açıları toplamı için teorem

*n adımını n+1 adımı ile bağlamak zorunda kaldılar.*

$D_6$ : S(n) = 180×(n-2) → $C_6$ : S(n+1)= 180×(n-1)

W: ?

*Öğrenciler S(n) formülünde n'yi n+1'e dönüştürmüşlerdir. Ancak öğrenciler S(n+1)'in S(n)+180° olduğunu görememişlerdir. Bu bölüm için n ve n+1'i bağlamak önemlidir (bir üçgen eklemenin önceki iç açılar toplamına 180° eklemek anlamına geldiğini görmek önemlidir).*

Şekil 3.24. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi

Bu protokol bir *bilişsel bütünlük* örneği olarak görünmektedir. Öğrenciler argümantasyon ve kanıtta aynı özellikleri ve teoremleri kullanmaktadırlar (*üçgenlerin açıları toplamı; çokgene eklenen bir kenar, açıları toplamına eklenen 180° ye denk gelmektedir*). Fakat sonuç genelleme temelli indüktif argümantasyon ve matematiksel indüktif kanıt süreçleri arasında öğrencilerin tamamlayamadığı yapısal bir mesafe belirlenmiştir. Argümantasyon boyunca öğrenciler kuralı süreç genellemeden ziyade sonuç genelleme yoluyla genelleştirmişler ve sadece yapılandırıcı argümantasyon kullanmışlardır. Pedemonte [20]'ye göre, muhtemelen bu sebeple argümantasyon ve kanıt arasındaki yapısal mesafeyi dolduramamışlar ve matematiksel indüktif kanıt yapamamışlardır.

### 3.12.5.2. Örnek 2 *(Süreç Genelleme Temelli İndüksiyon ve Matematiksel Kanıt Arasındaki Yapısal Süreklilik Örneği)*

Öğrenciler bazı çokgenler düşünmüşler ve bu çokgenlerin iç açılarının toplamını ölçmüşlerdir. Süreç genelleme yardımıyla bir hipotez bulmuşlardır. Sonra da hipotezi haklı çıkaran bir gerekçe aramışlardır. Temeli süreç genelleme olan bu ikinci indüksiyon yapısal argümantasyondur. Burada yapısal argümantasyon öğrencilerin matematiksel bir indüksiyon yapmasını sağlamıştır.

İki öğrenci arasında geçen konuşmalar şöyledir:

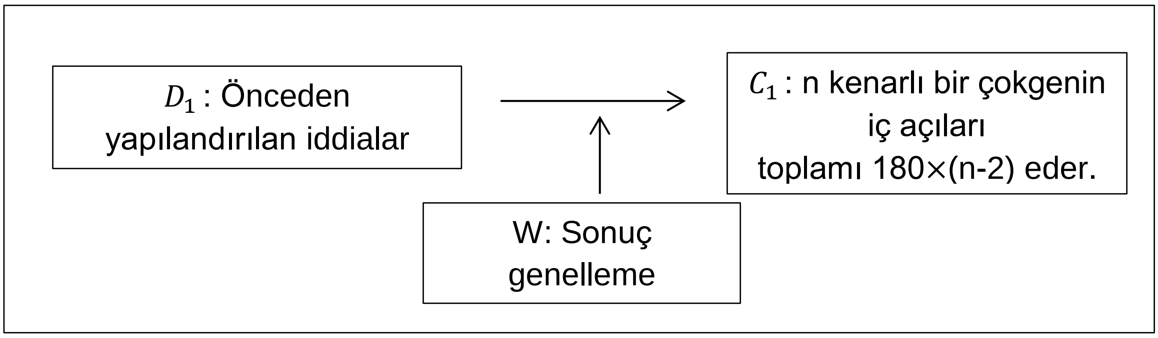
66. M: Eğer n 3'e eşitse, f(n) 180° ×1' e eşittir… Eğer n 4'e eşitse, f(n) 360°'ye eşittir, yani 180° ×2 eder.

67. L: n 5'e eşitse, f(n) 540°'ye eşit olur, yani 180° ×3'e…

68. M: O halde f(n) 180° ×(n-2) olur…

Şekil 3.25.Öğrencilerin argümantasyon süreci

Araştırmacının değerlendirmesi ve yorumları ise şöyledir:




Şekil 3.26. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

Öğrenciler sonuç genelleme ile hipotezlerini kurmuşlardır. Şimdi hipotezlerini kanıtlamak zorundadırlar. Süreç genelleme temelli indüktif bir argümantasyon olan yapısal argümantasyon üretmişlerdir.

Öğrencilerin kendi aralarında konuşmalarının devamı şöyle verilmektedir:

70. M: Tamam… Bekle!

71. L: f(4), 180°+f(3)'e eşittir, çünkü bir üçgen daha vardır… Yani 180°+180°…

72. M: Tamam, o zaman f(5), f(4)+180° olur… Bu f(n)'nin, f(n-1)+180° olması demektir.

73. L: Her zaman bir öncekine 180° ekliyorsun.

Şekil 3.27. Öğrencilerin argümantasyon süreci

Araştırmacıların analizlerinin devamı:

*Öğrenciler çokgene bir üçgen eklemenin, açıların toplamına 180° eklemek anlamına geldiğini anlamışlardır.*

$D_2$ : Bir üçgen için f(3)=180° → $C_2$ : 4 kenarlı çokgen için f(4)=180°+f(3)

W: Önceki çokgene bir üçgen eklemek açıların toplamına 180° eklemek anlamına gelir.

$D_3$ : $C_2$ → $C_3$ : 5 kenarlı bir çokgen için f(5)= 180°+f(4)

W: Önceki çokgene bir üçgen eklemek açıların toplamına 180° eklemek anlamına gelir.

$D_4$ : $D_2 \rightarrow C_2$; $D_3 \rightarrow C_3$ → $C_4$: (n+1) kenarlı bir çokgen için f(n+1)=180°+f(n)

W: Süreç genelleme

Şekil 3.28. Öğrencilerin argümantasyon sürecinin analizi

Bu durumda öğrenciler matematiksel indüksiyon yapmak için bütün elemanlara sahiptirler. Süreç genelleme öğrencilere bir çokgeni kenar sayısının ardışığı kadar kenar sayısı olan çokgene bağlamalarını sağlamaktadır. Bu bağlantıdan başlayarak, öğrenciler genel bir n kenarlı çokgen düşünüp, iç açıların ölçüleri toplamı için elde ettikleri sonucu (n+1) kenarlı bir çokgen için uyarlayabilmişlerdir.

**Kanıt.** Öğrencilerin yaptıkları kanıt aşağıdaki gibidir:

Başlangıç f(3)=180°

f(n+1)=180° ×(n-1)

f(n+1)=f(n)+180°

f(n)'ye 180° derece eklemeliyiz, çünkü eğer çokgene bir kenar eklersek, çokgene bir üçgen eklemiş oluruz. Üçgenin açıları toplamı 180°dir.

Öyleyse:

f(n+1)=180° ×(n-2)+180°

f(n+1)=180° ×(n-2+1)

f(n+1)=180° ×(n-1)

Şekil 3.29. Öğrencilerin kanıt süreci

$D_5$ : Çokgen bir üçgen → $C_5$: S(3)=180°

W: Üçgenlerin açılarının toplamı için teorem

*Sonra n+1 için formül yazarlar ve onu kanıtlarlar.*

$D_6$ : f(n)=180°×(n-2) → $C_6$ : f(n+1) =180° ×(n-1)

W: Süreç genelleme

Şekil 3.30. Öğrencilerin kanıt sürecinin analizi

Önceki gibi, bu örnek de bir *bilişsel bütünlük* örneği olarak karşımıza çıkmaktadır. Hipotezi doğrulamak için yapılan süreç genelleme öğrencilerin n kenarlı bir çokgen ile (n+1) kenarlı bir çokgen arasında bağlantı kurmalarını sağlamıştır. Buna göre şu sonuca ulaşılmıştır: Sonuç genelleme temelli indüktif bir argümantasyon, matematiksel bir indüksiyon kurmakta başarısız olmaktadır. Matematiksel indüksiyon yapmak için, süreç genelleme gerekli görülmektedir. Bu sonuç matematiksel indüktif bir kanıt kurmak için oldukça önemlidir.

Argümantasyon süreci ve ardından kanıt süreci geçirdiği belirlenen 33 öğrenci çiftinde 18'inin 2. problemi doğru kanıtladığı görülmüştür. Bu öğrencilerin hepsinin de süreç genellemesi yardımıyla matematiksel indüksiyon yaptığı görülmüştür. Sonuç genelleme temelli indüktif argümantasyon durumunda öğrencilerin kapatması gereken mesafe onlar için bir engel teşkil etmiş ve matematiksel indüksiyon yaparken sonuç genelleme kullanan öğrencilerin hiçbiri kanıtını başarı ile sonuçlandıramamıştır.

Pedemonte [20] bunun sebebini öğrencilerin sonuç temelli indüktif argümantasyon yaparken yalnızca yapılandırıcı argümantasyon süreci geçirmesine dayandırmaktadır. Süreç genelleme temelli indüktif argümantasyon yapan öğrenciler ise yapısal argümantasyon süreci geçirmeleri sebebiyle argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki yapısal mesafeyi doldurabilmektedirler.

### 3.13. Matematiksel Argümantasyonu Modellemede "Niteleyen"İn Önemi

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42] bu çalışmalarında, öğrenciler ve matematikçiler tarafından üretilen matematiksel argümanların analizi üzerinde durmaktadırlar. Genel olarak bu tip analizlerin iki kategoride toplandığı belirtilmektedir: *Argümanın içeriğine yoğunlaşan analizler ya da argümanın yapısına yoğunlaşan analizler.* Bu çalışma argümantasyonun yapısına odaklanan bir çalışmadır.

Matematik eğitimi alanında, Krummheuer [41] sınıf temelli matematiksel argümanları analiz ederek Toulmin şemasını kullanma trendini başlatmıştır. Fakat Krummheuer Toulmin'in orijinal şemasının indirgenmiş/azaltılmış versiyonunu kullanmıştır. Çünkü Krummheuer "çürüten" ve "niteleyen" kullanımına gerek duyulmadığını düşünmektedir. Bu elemanları matematiksel argümanlarla ilgisiz görmektedir.

Sonradan yapılan çoğu çalışmada matematik eğitimi araştırmacıları indirgenen şemayı kullanarak Krummheuer'i takip etmiştir. Bu yaklaşımı özellikle temel sayı becerileri üzerine (Evens ve Houssart, 2004, akt. [42]), mantıksal dedüksiyon üzerine (Hoyles ve Küchemann, 2002, akt. [42]), geometri (Pedemonte, 2005, akt. [42]) ve genel kanıt (Yackel, 2001, akt. [42]) üzerine çalışan araştırmacılar benimsemişlerdir.

Diğer bazı araştırmacılar, Toulmin şemasını informel mantıktan formel mantığa adapte eden farklı bir yaklaşımı benimsemişlerdir. Aberdein (2005; 2006, akt. [42]) ve Alcolea Banegas (1998, akt. [42]), Toulmin şemasını kullanarak formel matematiksel kanıtları analiz ederken, şemanın "çürüten" ve "niteleyen" de dahil olmak üzere tüm bileşenlerini kullanmışlardır.

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42]'a göre, argümanların analizinde Toulmin Modeli'ndeki diğer elemanların önemsenmemesi büyük ve önemli bir eksikliğe yol açmaktadır. Matematiksel argüman modellerinde niteleyenlerin rolünün ihmal edilmesinin, bizi yalnızca kesin (absolute) sonuçlu argümanları düşünmek durumunda bıraktığını savunmaktadırlar. Bunun yanı sıra Toulmin'in tam şemasının bize belirsizliği azaltmada daha çok şans verirken, kısıtlı versiyonunun kesinliği korumaya odaklandığını düşünmektedirler.

Bu düşüncelere paralel olarak Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42]'ın bu çalışmalarındaki amacı, matematiksel argümantasyonunun tamamını analiz etmek için Toulmin şemasını tam olarak kullanmanın önemini göstermektir. Profesyonel matematikçiler fikirlerini geliştirirken formel olmayan argümanlara güvenmektedirler (Burton, 2004; Hadamard, 1945; Poincare, 1905; Thurston, 1994, akt. [42]). Bu nedenle argümanların yapısının tam ve doğru olarak analiz edilmesi oldukça önemlidir.

### 3.13.1. Deney Süreci

Bu çalışmadaki veriler, lisansüstü öğrenim yapmakta olan üstün başarılı 6 matematik öğrencisinden toplanan verilerdir. Bu öğrencilerden 5 tanesi doktora yapmakta, 1 tanesi ise Fred, yüksek lisans yapmaktadır.

Söz konusu görev, daha önceden başka bir çalışmanın parçası olarak, matematikçilerin koşul (şart) ifadelerini nasıl değerlendirdiklerini araştırmak amacıyla Markowitz ve Tweney (1982, akt. [42]) tarafından tasarlanmıştır.

Katılımcılar ile röportajlar yapılmış; röportajlarda yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Araştırmacı, katılımcıların cevapları yeteri kadar açık olmadığında daha açık ve anlaşılır olmaları konusunda onları yönlendirmiştir. Kaydedilen röportajların analizlerinin yapılması için birer kopyaları çıkarılmıştır. Analizler çoklu durum çalışması yaklaşımına göre yapılmıştır.

İlk bakışta hipotezler yetenekli matematikçiler için oldukça kolay ve sayılar teorisi ile ilgili basit problemler gibi görünmektedirler. Ancak röportajlardan anlaşıldığı kadarıyla katılımcılar problemleri oldukça zor bulmuşlardır. Yoğun bir çalışma sürecinin ardından katılımcılardan yalnızca David bütün problemleri çözebilmiştir.

Aşağıda söz konusu problem durumlarını içeren hipotez ifadeleri, bu hipotezlerin içinde geçen bazı kavramların tanımları ve bu tanımlara ilişkin örnekler verilmektedir. Katılımcılara verilen yönergeler, hipotezler ve örnekler şöyledir:

*“Aşağıdaki bütün sayılar pozitif tam sayı olarak düşünülmelidir.*

**Tanım.** Bölenleri toplandığında 2 katından fazla bir sonuç elde edilen $n$ tam sayısına *“zengin” (abundant) sayı* denir.

**Tanım.** Bölenleri toplandığında tam 2 katı eden $n$ tam sayısına *“mükemmel” (perfect) sayı* denir.

**Tanım.** Bölenleri toplandığında 2 katından az bir sonuç elde edilen $n$ tam sayısına *“kıt” (deficient) sayı* denir.

**Örnek.** 12 zengin sayıdır, çünkü 1+2+3+4+6+12 = 28 ve $28 > 2 \times 12$ olur. Fakat 14 kıt sayıdır, çünkü 1+2+7+14 = 24 ve $24 < 2 \times 14$ olur.

Sizin göreviniz aşağıdaki hipotezleri (konjektürleri) düşünmek ve bu hipotezlerin doğru olup olmadığını kanıtlarını yaparak belirlemektir.

**Hipotez 1.** Bir $n$ sayısı zengin sayıdır ancak ve ancak bu sayı 6’nın bir katıdır.

**Hipotez 2.** Bir $n$ sayısı mükemmel sayı ise; o zaman her $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$ için $kn$ sayısı zengin sayı olur.

**Hipotez 3.** Eğer $\mathrm{p}_1$ ve $\mathrm{p}_2$ asal sayılar ise; o zaman $\mathrm{p}_1\,\mathrm{p}_2$ zengin sayı olur.

**Hipotez 4.** Eğer $n$ sayısı kıt sayı ise; o zaman $n$’nin her böleni kıt sayı olur.

**Hipotez 5.** Eğer $n$ ve $m$ zengin sayılar ise; o zaman $n + m$ zengin sayı olur.

**Hipotez 6.** Eğer $n$ ve $m$ zengin sayılar ise; o zaman $nm$ zengin sayı olur.

**Hipotez 7.** Eğer $n$ zengin sayı ise; o zaman $n$ sayısı bir $m$ doğal sayısı ve $p$ asal sayısı için $\mathrm{p}^{\mathrm{m}}$ formunda yazılamaz.

**Örnekler.**

İlk birkaç zengin sayı: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40…

İlk birkaç mükemmel sayı: 6, 28, 496, 8128…"

Katılımcıların argümanlarında açıkça belirtmedikleri durumlarda ve "niteleyen", "çürüten" ve "destek" bileşenleri bulunmaya çalışılmıştır.

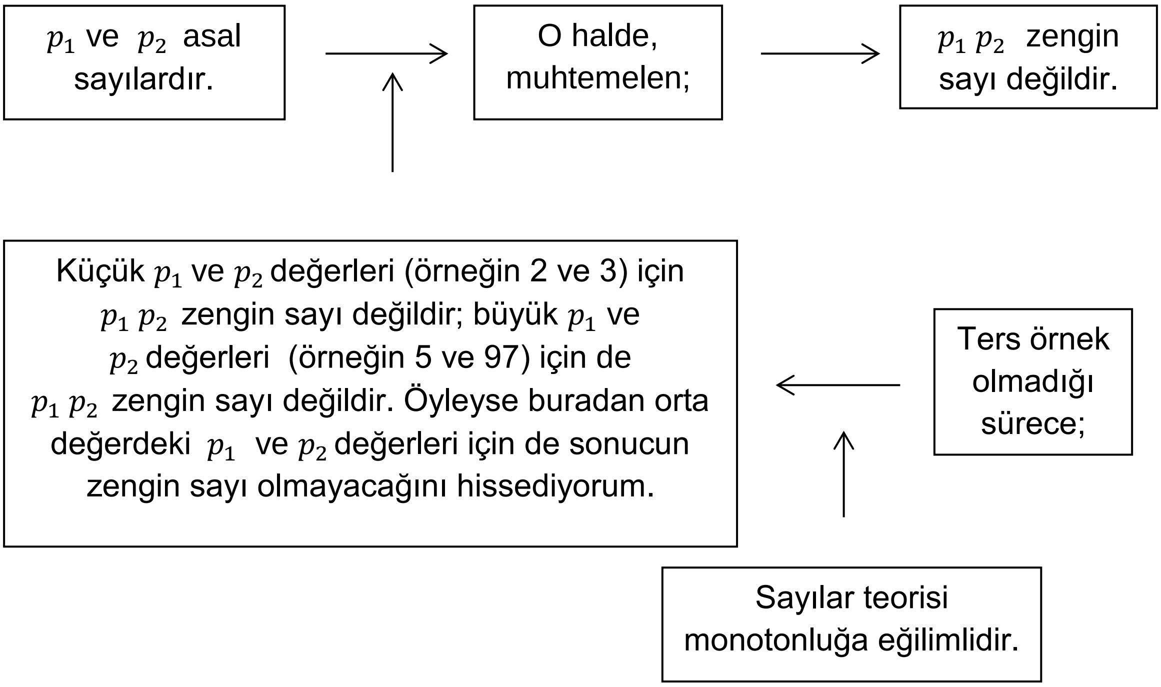
"Niteleyen" kullanımının açık bir örneği 3. hipotez olan "$p_1$ ve $p_2$ asal sayılar ise, o zaman $p_1p_2$ zengin sayıdır." hipotezine ilişkin olarak Chris'ten gelmiştir. Chris bu hipotezin yanlış olduğunu doğru bir biçimde göstermiştir. Chris ile yapılan röportajdan elde edilen veriler şöyledir:

**Chris:** Bu denklemde yerine yerleştirdiğim en küçük sayılar sonucun mükemmel sayı olduğunu; daha büyük sayılar ise sonucun kıt sayı olduğunu göstermiştir. O halde tüm $p_1$ ve $p_2$ ler için durum böyledir; yani hiçbirinde çarpım sonucu zengin sayı olmaz.

**Araştırmacı:** Böyle olduğunu mu düşünüyorsun?

**Chris:** Evet böyle olduğunu düşünüyorum, ama emin değilim. Bunun böyle monoton olarak gideceğini düşünüyorum. Yani küçük, orta ve büyük değerdeki $p_1$ ve $p_2$'ler için durum böyle, çarpım sonucu zengin sayı olmuyor; ya mükemmel ya da kıt sayı oluyor. Hımmm, ama sanırım bunu göstermek için bir şeyler yapmak zorundayım.

Chris, ifadenin muhtemelen yanlış olduğunu düşünmekte ve sonuca ulaşabileceği konusunda oldukça emin görünmektedir. Bu düşüncesini iki örneğe ve monotonlukla ilgili bir gerekçeye dayandırmaktadır. Sonucu formel olarak gösteremediğini kabul etmektedir. Fakat informel olarak ifadenin muhtemelen doğru olduğuna ikna olmuştur. Toulmin şemasına göre, Chris'in argümanı kesinlik taşımayan, onun yerine sadece belirsizliği azaltan bir niteleyen etrafında dönmektedir.




Şekil 3.31. Chris'in hipotez 3 için üretmiş olduğu argümanın Toulmin Modeli'ne göre analizi

Daha belirsiz niteleyenlerin kullanıldığı örneklerle de karşılaşılmıştır. Örneğin David'e aynı sorunun değiştirilmiş şu hali sorulmuştur.

**Araştırmacı:** Eğer 3. hipotezi *"zengin sayı olmaz"* şeklinde değiştirirsek, sence ne olur?

**David:** Bence daha mantıklı olur; çünkü asal sayılar daha çok kıt sayı gibi görünüyor.

David'in, argümanını kurarken Chris kadar emin olmadığı görülmektedir. David düşünme tarzında informelliği formel kanıta dönüştürmeye daha çok ihtiyaç duymakta ve bu yolda ilerlemektedir. Diğer taraftan Chris argümanı konusunda yeteri kadar emindir; sonucu kanıtlamak için bir takım şeylerin yapılması gerektiğini kabul etmiştir, ancak devam etmeye ihtiyaç duymamıştır.

Buradaki asıl önemli nokta aslında şudur: Chris ve David argümanlarında farklı gerekçe tipleri kullanmışlardır. Bu farklı gerekçelere argümanın sonucuna ilişkin inancın derecesini belirten farklı niteleyenler eşlik etmişlerdir. Gerekçe argümanın bir bölümüdür; "gerekçe tipi" ise benzer özellikteki gerekçelerin bir kategorisidir. "Gerekçe tipi" kategorileri Harel ve Sowder tarafından belirlenen [52] kanıt şemalarına benzer geniş bir çeşitliliğe sahiptir.

Gerekçe tipleri ve kanıt şemaları arasındaki önemli farkı Harel ve Sowder [52] şöyle açıklamışlardır:

> "Kanıt şeması kişinin ifadenin doğruluğu üzerindeki şüphelerini kaldırmasını sağlar. Yani kanıt şeması belirsizliği kaldırmayı amaçlar. Gerekçe tipleri ise sadece belirsizliği azaltmayı sağlar."

Daha önce yapılan çalışmalarda araştırmacıların niteleyenleri göz ardı edip, sınırlandırılmış şema kullanarak yaptıkları çalışmalarında atladıkları nokta bu olmuştur: Gerekçe tipleri. Onlar Chris ve David'in argümanları arasındaki bu farklılığı belirleme konusunda yetersiz kalmaktadırlar.

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42]'a göre, Toulmin şemasını bir bütün olarak düşündüğümüzde matematiksel argümanlar içindeki farklılıklar daha geniş anlamda tespit edilebilmektedir. Analizlerde niteleyen bileşeninin de saptanması halinde argümanda kullanılan gerekçe tipi de belirlenmektedir. Böylece argümanların karşılaştırılması ve argümanın kendi içinde analizinin yapılması daha sağlıklı olmaktadır. Bu noktada araştırmacılar gerekçe tiplerinden daha detaylı bahsetmeyi gerekli görmüşlerdir.

### 3.13.2. Gerekçe Tipleri

#### 3.13.2.1. İndüktif Gerekçe Tipleri

Harel ve Sowder [52], indüktif (tümevarımsal) kanıt şemalarını şöyle tanımlamışlardır:

> "Öğrencilerin bir hipotezin doğruluğu konusunda kendi kendilerini ya da başkalarını ikna etmek için hipotezlerini bir ya da daha fazla özel durumda kullanarak sayısal hesaplamalar yaptıkları kanıt tipi."

İndüktif gerekçe ise bir argümanın sonucu hakkındaki belirsizliği azaltmak için benzer bir stratejiyi kullanır. Bu çalışmada pek çok indüktif gerekçe örneğine rastlanmıştır. Chris'in üretmiş olduğu yukarıda yer verdiğimiz argüman bu örneklerden biridir; Chris küçük ve büyük sayılar için hesaplama yapmış ve böylece iddiasının bütün sayılar için doğru olduğunu hissetmiştir. Andrew'un 4. hipotez ile ilgili olarak ürettiği argümanda da indüktif gerekçe kullanımı görmekteyiz.

***Hipotez 4.*** *Eğer $n$ sayısı kıt sayı ise; o zaman $n$'nin her böleni kıt sayı olur.*

***Tanım.*** *Bölenleri toplandığında $2n$'den az bir sonuç elde edilen $n$ tam sayısına "kıt sayı" (deficient) sayı denir.*

**Andrew:** Bazı denemeler yapalım (gülüyor). Kıt sayılar, örneğin 9… Evet 9 bir kıt sayı. Bu olmadı sanki çünkü… Neyse 10 diyelim; çarpanları 2 ve 5. 2 ve 5 asal sayılar… Asal sayılar kıt sayı sanırım…

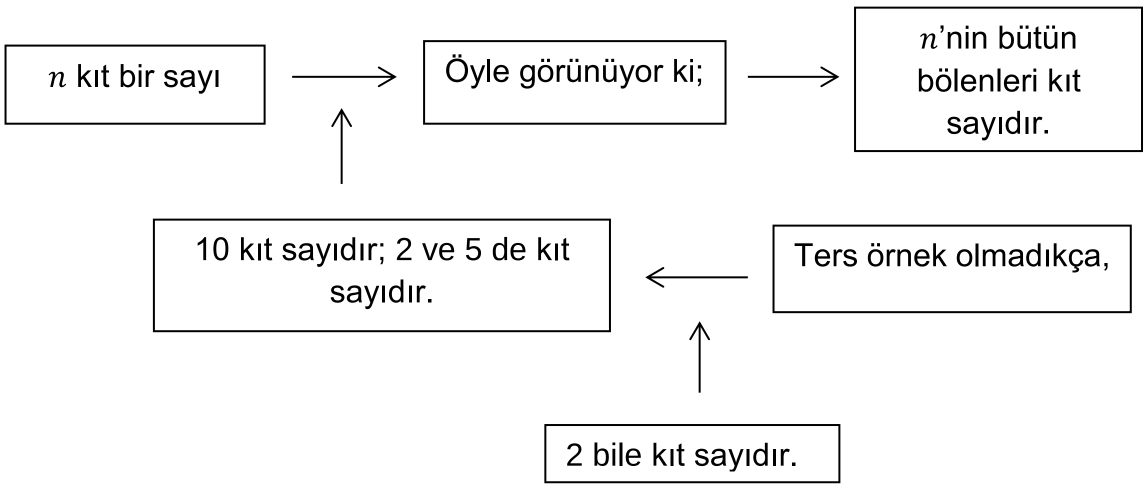
**Araştırmacı:** Asal sayılar kıt sayı mı?

**Andrew:** Evet, asal sayılar her zaman kıt sayı. Evet, çünkü toplam; sayının kendisi ile 1'in toplamına eşit. Şey, her zaman (gülüyor), yani sanırım. Bakalım, evet 2 de kıt sayı. O zaman tamam, kural işliyor. Evet, öyle görünüyor ki sağlanıyor. Evet, tamam görünüşe göre söylediğim şey doğru.

**Araştırmacı:** Neden böyle söylüyorsun peki? Söylediğin şey 10 için sağlanıyor diye mi?

**Andrew:** Çünkü (sessizlik) Çünkü, şey… (uzun sessizlik)

Andrew'un hipotezine ilişkin şüphesi, gözlemleri ve denemeleri sonucunda azalmıştır. Andrew ifadenin olası doğruluğu ile ilgili olarak kendisini ikna etmek için önemli bir deney yapmıştır ve sonuçta ifadeyi doğru şekilde kanıtlayabilmiştir. Andrew'un argümanının Toulmin Modeli'ne göre analizi aşağıda verilmektedir.




Şekil 3.32. Andrew'un hipotez 4'e verdiği cevabın bir kısmı

Pek çok sonuca göre, katılımcıların sonuçlara ilişkin inançlarının derecesi, kullanılan örneklerden etkilenmektedir. İncelenen örneklerde öğrencilerin iki ayrı strateji kullandıkları ortaya çıkmıştır: Örneklerin kullanımı ve ters örneklerin kullanımı. Örneklerin kullanıldığı ilk strateji hipotezin o durumda sağlanıp sağlanmadığını test etmek için yapılan önemli bir deneydir (Balacheff, 1988, akt. [42]). Eğer sağlanıyorsa, veri ile sonucu bağlayan “uygun” bir niteleyen kullanılır. İkinci strateji biraz daha farklıdır; bu durumda katılımcılar bir seri örnek içinden ters örnek bulup bulamayacaklarını araştırırlar. Eğer bulamazlarsa bu durumda “olası” bir niteleyen kullanırlar.

#### 3.13.2.2. Yapısal-Sezgisel Gerekçe Tipi

*“Yapısal-sezgisel”* terimi gözlemler ya da denemeler yapan ve bazı zihinsel yapıları kullanan, söz konusu sonuç hakkında diğerlerini görsel yollarla ikna etmeye çalışan birinin kullandığı gerekçe tipini betimlemek için kullanılır. Sık rastlanan bu cinsten muhakeme sezgisel tipte bir muhakeme olarak görülmektedir (Fischbein, 1987, akt. [42]).

Hipotez 5 ve 6’da katılımcılara m ve n’nin abundant olduğu bir durumda sırasıyla m+n ve mn’nin abundant olup olmadığına karar vermeleri istenmiştir. Bu hipotezlerde üretilen gerekçeler çoğunlukla yapısal-sezgisel tipte olmuştur.

Hipotez 5 için elde edilen veriler özel olarak düşünüldüğünde, çoğu katılımcının bu hipotezin muhtemelen yanlış olduğunu düşündükleri görülmüştür. Buna örnek olarak Fred ile yapılan röportajdan elde edilen veriler aşağıda verilmektedir.

***Hipotez 5.*** *Eğer $n$ ve $m$ zengin sayılar ise; o zaman $n + m$ zengin sayı olur.*

**Fred:** Şöyle düşünüyorum, içgüdüsel olarak, hipotezin yanlış olduğunu düşünüyorum.

**Araştırmacı:** Neden?

**Fred:** Çünkü, ımm, ben şunu düşünüyorum… Bir diğer tipik örnek, şunun gibi, bir şeyin zengin sayı olup olmadığını söylemek için bölenleri ile yani onu bölenlerle ilgili düşünmek lazım. İki sayıyı topladığımızda elde ettiğimiz sayının bölenlerinin bu iki sayının bölenlerinin özelliklerine sahip olacağını söyleyemeyiz. Yani şunu demek istiyorum 3 ve 5’i topladığında 3 ve 5’in bölenleri, 8’in bölenlerinden tamamıyla farklıdır. Immm, ama asla bilemeyiz. Yani zengin sayı olma bir sayı için geniş bir kavram; yani şunu demek istiyorum, sezgisel olarak bu sonuca ulaşmayı bekliyorum, ımm, yani deneyeceğim.

Fred ifadenin aslında yanlış olduğunu göstermeye yönelik çabalamaya devam etmiş ve bir ters örnek aramaya başlamıştır.

Yapısal-sezgisel gerekçe tipi bir diğer katılımcı tarafından aşağıda verildiği şekilde kullanılmıştır.

**Chris:** $m$ ve $n$ zengin sayı ise, $n+m$ de zengin sayı olur. Bu doğru görünmüyor.

**Araştırmacı:** Neden olmasın?

**Chris:** Çünkü $n+m$'nin bölenleri $n$ ya da $m$'nin bölenleri ile alakasızdır. Öyleyse ters örnek bulmak oldukça kolaydır. Öyle düşünüyorum (gülüyor). O halde, iki tane güzel zengin sayı alırsam, ımmm…

Chris'in Hipotez 6 için şöyle bir cevap vermiştir:

***Hipotez 6.*** *Eğer $n$ ve $m$ zengin sayılar ise; o zaman $nm$ zengin sayı olur.*

**Chris:** (kartı okur) Doğru, eğer $n$ ve $m$ zengin sayı ise $nm$ zengin sayı olur. Bu daha mümkün görünüyor, çünkü $n$ ve $m$ sayıları $nm$ 'nin bölenlerini paylaşmaktadırlar.

Chris'in argümanlarında kullandığı yapısal-sezgisel gerekçeler belirsizliği yeterli düzeyde azaltmaktadır.

Hipotez 5 için verilen cevaplara genel olarak bakıldığında, bu cevapların birbirlerine çok benzediği görülmüştür. Katılımcıların başlangıçtaki sezgileri, yapısal-sezgisel gerekçeler oluşturmalarını sağlamıştır. Bu yapısal-sezgisel gerekçeler onların hipotezin doğru olmadığına karar vermelerini ve hipotezi reddetmelerini sağlamıştır. Ters örnek bulmanın en uygun strateji olduğunu düşünmüşler ve hipotezin doğru olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Hipotez 6'da durum bunun tam tersidir. Katılımcılar yapısal sezgisel gerekçeleri, hipotezin doğru olduğunu belirlemek için kullanmışlar ve bu kararlarını temel alan kanıt yapma yoluna gitmişlerdir.

Matematikte sezginin güvenirliği, matematikçiler ve felsefeciler tarafından sürekli tartışılan bir konu olmuştur. Hahn, 1933'te yazılmış ünlü bir makalede (1960'ta Hahn tarafından tekrar yazılmıştır, akt. [42]), matematikte sezginin güvenilir olmadığını ve matematiksel muhakemede sezgiye yer verilmemesi gerektiğini vurgulamaktadır. Hahn bu düşüncesini desteklemek için birçok örnek vermiştir

(Moore, 1900; Whyburn, 1942, akt. [42]). Hahn bu örneklerle matematikte sezgi ile kavramların bağdaştırılamayacağını, bu sebeple de matematiksel muhakemeden sezginin çıkartılması gerektiğini anlatmaktadır. Diğer yazarlar bu düşünceye karşı çıkmışlardır. Bazen sezgi yanıltıcı olsa da, sezginin matematiksel araştırmaya yön vermesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir (Feferman, 2000; Poincare, 1905, akt. [42]).

Bu çalışmanın verileri bu düşünceyi desteklemektedir. Katılımcılar sonucun verilerden çıkıp çıkmadığı konusunda bir inanç oluşturmak için sezgisel yapıları kullanmışlardır. Bu anlamda yapısal-sezgisel gerekçeler, belirsizliği azaltmak için oldukça fazla kullanılmıştır.

Ancak yapısal sezgisel gerekçeler, belirsizliği azaltarak bazen doğru olmayan sonuçların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Fred hipotez 5 üzerinde çalışırken, hangi çeşit sayıların zengin sayı olmaya daha yakın olduğunu düşünmüştür.

**Fred:** Immm, şey benim düşüncem, tek sayılar genellikle zengin sayı değildir, çünkü…

**Araştırmacı:** “Genellikle” derken ne demek istiyorsunuz?

**Fred:** Çünkü benim genel düşüncem şöyle, eğer bir sayı çift sayı ise o zaman onun bölenlerinden biri sayının yarısı kadardır. Bu da büyük bir sayıdır ve söz konusu sayının bölenlerinin toplamını büyütür. Ama sayı tekse bölenlerin toplamında büyük bir kısım eksik olmaktadır.

**Araştırmacı:** O halde tek sayıların zengin sayı olmadığını tahmin ediyorsun.

**Fred:** Muhtemelen olmayacağını düşünüyorum.

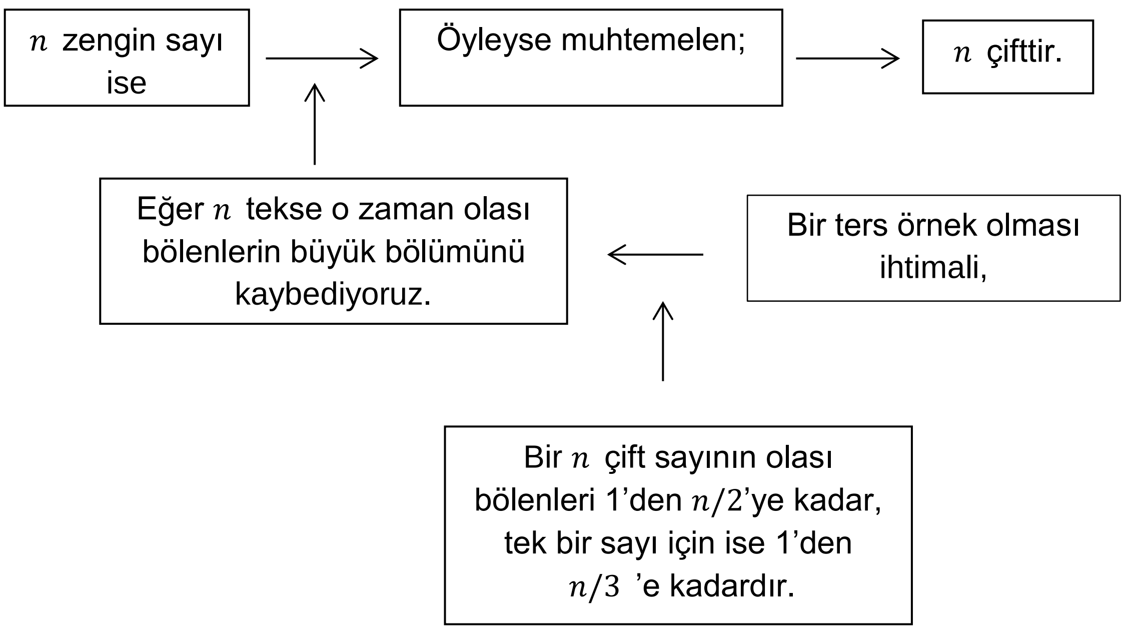
Bu noktada örnek verilebilecek bir diğer isim Ben’dir. Röportajı boyunca Ben’e bütün zengin sayıların çift olup olmadığı sorulmuştur. Ben’in kurduğu argüman Fred’inkine benzerdir.

**Ben:** Imm, (uzun bir sessizlik) doğru olması gerektiğini düşünüyorum.

**Araştırmacı:** Neden?

**Ben:** (Uzun bir sessizlik) Eğer sayı tek olursa, sayının bölenlerinde sayının yarısı kadar büyük bir kısmı kaybediyorsunuz. Sayı tek sayı olduğunda, ilk böleni muhtemelen 3’tür. Çift sayılarda ise ilk bölen 2’dir ve sayının yarısını elde edersiniz. Otomatik olarak sayının yarısı olan bu büyük kısım da sayının bölenleri arasında yer alır ve bölenlerin toplamına büyük katkı sağlar. Bu nedenle bence sezgisel olarak çift sayılar tek sayılara kıyasla zengin sayı olmaya daha yakın görünüyorlar.

Fred ve Ben'in her ikisi de zengin sayıların özellikleri hakkında argüman üretirken yapısal sezgisel gerekçeler kullanmışlardır. Fred'in ve Ben'in yapısal sezgisel gerekçelerine rağmen aslında tek ve zengin olan sonsuz sayıda sayı (ilki 945) vardır. Yapısal sezgisel gerekçe burada her zengin sayının çift sayı olduğu hipotezi hakkındaki belirsizliği azaltmakta ve katılımcıların yanlış bir sonuca ulaşmasına neden olmaktadır. Ben ve Fred'in zengin sayılar ile ilgili üretmiş oldukları argümantasyon sürecinin Toulmin Modeli'ne göre analizi aşağıda verilmektedir.




Şekil 3.33. Ben ve Fred'in zengin sayılar için üretmiş oldukları argümanlarının Toulmin Modeli'ne göre analizi

### 3.13.2.3. Dedüktif (Çıkarımsal) Gerekçe Tipi

Harel [58], en gelişmiş kanıt şeması olarak "dedüktif (çıkarımsal) modern aksiyomatik" şemayı tanımlamaktadır. Bu şemayı kullanan kişiler aksiyomlardan doğruya ulaşmak için (gerçeği kurmak için) dedüksiyonları kullanırlar. Dedüktif (çıkarımsal) gerekçe tiplerinin temeli de benzerdir. Aksiyomlardan üretilen dedüksiyonlar, cebirsel hesaplamalar, ters örneklerin kullanımı dedüktif gerekçe olarak sınıflandırılmaktadır.

Profesyonel matematikçiler için dedüktif bir gerekçe, formel matematiksel gereklilik taşımaktadır. Yani dedüktif gerekçe kullanılan argümanlarda etkili çürütenler olmadığı düşünülmektedir. Karmaşık kanıtlarda matematikçiler bazen “benim argümanımda bir hata olmadığı sürece” gibi açık olmayan niteleyenler ve çürütenler kullanırlar. Fakat dedüktif gerekçe kullanılan argümanlarda amaç, bunu en aza indirebilmektir. Yani profesyonel matematikçiler için indüktif ve yapısal-sezgisel gerekçe tipleri belirsizliği azaltmayı amaçlarken; dedüktif gerekçe, belirsizliği kaldırmayı amaçlar. Ancak her ne kadar bu durum profesyonel matematikçiler için böyle olsa da, bütün öğrenciler için böyle olmayabilir.

Dedüktif gerekçe kullanımı örneklerinden biri Andrew’un hipotez 2 üzerinde ürettiği argümanlarda görülmektedir. Andrew’un ürettiği argümantasyon sürecine aşağıda yer verilmektedir.

***Hipotez 2.*** *Bir $n$ sayısı mükemmel sayı ise; o zaman her $k \in N$ için $kn$ sayısı zengin sayı olur.*

**Andrew:** Peki, öyleyse $n$ mükemmel sayı ise her $k \in N$ için $kn$ zengin sayı olur. Ok, o zaman bu nedir? Yani ne demek oluyor bu? Evet öyle görünüyor ki, $n$ mükemmel sayı ise ve $n$ ’yi bölen herhangi bir $p_i$’yi alırsak, o zaman $p_i$’lerin toplamı $2n$ olur. Tanım budur. Evet, ok, öyleyse aslında $kn$ ’yi almalıyız, o zaman açıkça bütün $kp_i$’ler $kn$ ’yi bölüyor. Sonra bunları topluyoruz ve $2kn$ elde ediyoruz. Ayrıca şu da var, örneğin $kn$’yi bölen $k$’ye de sahibiz. Yani bunu da eklemeliyiz. Endişelenmeye gerek yok. Evet, bu nasıl olur? (uzun bir sessizlik).

**Araştırmacı:** O halde hipotez 1’deki aynı problemle karşı karşıyayız. Şeyle…

**Andrew:** Evet, ımmm, bir tane bulabilir miyiz? Doğru, öyleyse bilmiyorum. Bazı örnekler bulsam…

**Araştırmacı:** Senin için bazı örneklerim var.

**Andrew:** Mükemmel sayı örneklerin mi var? Tamam, o zaman mesela 6 diyelim. Evet, 1+2+3+6 ve toplam 12 ediyor. O da 2x6 zaten, yani 6’nın tam 2 katı. Tamam, mükemmel sayı işte! Tamam, öyleyse 12 için, 1+2+3+4+6, o zaman, tamam +12 (mırıldanmalar). Tamam, zengin sayı işte! O zaman, evet, 2, 4, 6, 12 bölenlerimiz var. Ayrıca başka bölenlerimiz de var. Evet! Yani bu basit, çünkü ayrıca 1 bölenine de sahibiz…

Her ne kadar Andrew hiçbir çürütenin olmadığına inansa da, aslında olası bir çürüten vardır, $k = 1$ olduğu durumda. Araştırmacının da harekete geçirmesi ile Andrew bu durumu fark etmekte ve argümanını uygun şekilde değiştirmektedir. Formel olarak Andrew'un sonucu, bu modifikasyonu yapana kadar yanlış olsa da, onun dedüktif gerekçesi etkili bir biçimde belirsizliği ortadan kaldırmaktadır.

Dedüktif gerekçelerin hepsi bu formda değildir. Bazen katılımcılar sonuçlarını desteklemek için ters örnekler kullanırlar. Buna ilişkin bir örnek olarak hipotez 1 için Edward'ın ürettiği argümanının bir bölümü burada verilmektedir. 6'nın bütün tam katlarının zengin sayı olduğunu başarıyla gösterdikten sonra dikkatini 6'ya yönlendirmiştir.

***Hipotez 1.*** *Bir n sayısı zengin sayıdır ancak ve ancak bu sayı 6'nın bir katıdır.*

**Edward:** Evet (…) öyleyse $n = 6$ durumunu düşünelim, mükemmel sayı olan, yani öyle olduğunu biliyorum sadece. Ya da öyle mi? Hmm, 1+2+3+6 =12, evet, öyleyse, bu bir mükemmel sayı. Zengin sayı büyük ya da eşit mi olacaktı, yoksa sadece büyük mü olacaktı? Öyleyse, bu, bu bir ters örnek, yani $n = 6$ olduğunda, bu bir zengin sayı değildir. Öyleyse… "eğer" den kurtulduk.

Araştırmacılar dedüktif gerekçe tipi ile ilgili daha önce yapılmış olan araştırma sonuçlarından farklı olarak şu sonuca ulaşmışlardır: Önceki araştırma sonuçlarına göre, dedüktif gerekçeler mutlak niteleyenler ile eşleştirilmekte ve hiçbir çürüten kabul etmemektedirler. Ama bu araştırmanın analiz sonuçlarına göre, dedüktif gerekçe ile mutlak niteleyenler arasındaki söz konusu eşleştirme her zaman gerçekleşmeyebilmektedir. Bu oldukça önemli ve diğer araştırma sonuçlarından farklı bir sonuçtur.

### 3.13.3. Sonuçlar

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42], ileri matematikte dedüktif olmayan gerekçeleri temel alarak, bir sonucu kesin olarak kabul eden hiçbir öğrencinin başarılı olamayacağı konusunda Harel [58] ve Tall [59] ile hem fikirdirler. Ancak bu çalışmada görülmüştür ki, matematiksel argümantasyonda dedüktif olmayan gerekçe tipleri uygun niteleyenler ile uygun olarak eşleştikleri sürece önemli bir rol oynamaktadırlar. Analiz sonuçları, matematikçilerin indüktif ve sezgisel argümanlardan ve gerekçelerden vazgeçemeyeceğini göstermiştir. Bunun yerine gerekçelerini uygun niteleyenler ve çürütenler ile eşleştirmeyi öğrenmelidirler. Bu, başarılı bir matematikçi olma yolunda çok önemli bir rol oynamaktadır. Bazı katılımcıların gerekçelerinde hem indüktif özellikleri hem de yapısal-sezgisel özellikleri birlikte kullandıkları görülmüştür.

Daha önce yapılan çalışmalarda gerekçe ile niteleyenlerin her zaman uygun şekilde eşleştirilemediği görülmüştür. Weber (2003, akt. [42]), bir öğrencisinin *"her n tek tam sayısı için,* $(n^2 - 1)$ *ifadesi 8 ile bölünebilir"* ifadesinin kanıtını şöyle yaptığını belirtmektedir:

> "$1^2 - 1 = 0$ *8 ile bölünebilmektedir.* $3^2 - 1 = 8$ *8 ile bölünebilmektedir.*
>
> $5^2 - 1 = 24$ *8 ile bölünebilmektedir. Bu böyle devam eder. Buradan n tek ise,* $n^2 - 1$*'in 8 ile kesin bölünür."*

İndüktif gerekçe kullanmanın bir sonucu olarak, Harel ve Sowder [52] bu öğrencinin indüktif kanıt şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. Matematiksel argümanları modelleme çerçevesinde düşünürsek, bu argüman gerekçesine uygunsuz biçimde eşleştirilen mutlak bir niteleyene sahiptir.

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson [42] ile Harel ve Sowder [52] ve Tall [59]'un bakış açıları arasındaki asıl fark, Inglis ve diğerlerinin dedüktif olmayan gerekçelerin matematikte uygun biçimde kullanılabildiğini düşünmeleridir. Onlara göre, aslında indüktif gerekçe kullanımı uygunsuz değildir. Sadece mutlak bir niteleyen ile uygunsuz şekilde eşleştiğinde argüman problemli hale gelmektedir.

Yukarıda verilen örnekte Weber (2003, akt. [42])'in öğrencisi dedüktif olmayan bir gerekçeyi uygunsuz bir niteleyen ile eşleştirirken, dedüktif gerekçeler ile uygunsuz bir niteleyen eşleştirmesi yapılan örnekler ile de karşılaşılmıştır. Buna ilişkin bir durum Simpson (1995, akt. [42])'dan alıntı yapılarak şu şekilde ifade edilmektedir:

> "Öğrenme stilleri üzerinde yapılan çalışmaların bir bölümü olarak, Simpson "Arithmagons" olarak adlandırılan probleme verilen cevapları değerlendirirken bir öğrencisinin yazdıkları üzerine şunları ifade etmiştir (Mason vd., 1982, akt. [42]):
>
> "Bir süre üzerinde çalıştıktan sonra oldukça güzel küçük bir kanıt yazdı. O oldukça genel bir çözüm ortaya koydu. Bir sonraki sayfada ise şöyle yazmış: *'Büyük sayılar için de bunun işleyip işlemediğini merak ediyorum'."* (Simpson, 1995; Duffin & Simpson, 1993, akt. [42])."

Bu öğrenci oldukça mükemmel dedüktif bir kanıt sunmasına rağmen kanıtını uygun bir niteleyen ile eşleştirememiştir. Onun için, yazmış olduğu dedüktif gerekçe onun sadece küçük sayılar için ifadenin doğru olduğunu anlamasını sağlamıştır. Büyük sayıların durumu onun için bir çürüten niteliğindedir. Kısacası bu öğrenci başarılı biçimde bir dedüktif gerekçe kullanmış, fakat onu uygun şekilde nitelendirememiştir. Benzer örnekler Fischbein (1982, akt. [42]) tarafından da rapor edilmiştir. Böyle örnekler dedüktif gerekçelerin kullanımının ileri matematikte tek başına yeterli olmadığını göstermektedir; dedüktif gerekçeler mutlaka uygun niteleyenler ile eşleştirilmek zorundadırlar.

Sonuç olarak bu çalışmanın araştırmacıları, dedüktif olmayan gerekçe tiplerinin aslında matematiksel argümantasyonda önemli bir rol oynadığını ortaya koymuşlardır. Bu nedenle dedüktif olmayan gerekçelerin ileri matematikte hafife alınmaması gerektiğini belirtmektedirler. Buna paralel olarak onlara göre öğretimin amacı, öğrencilerin argümanlarından indüktif ya da sezgisel muhakemenin izlerini yok etmek olmamalıdır. Bunun yerine öğrencilere bu çeşit gerekçeleri uygun şekilde nitelendirmek öğretilmelidir.

### 3.14. Cebirde Açık Uçlu Problemleri Çözerken Oluşan Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri Arasındaki Yapısal İlişkiler

Daha önceden yapılan araştırma sonuçlarının geometri alanı ile kısıtlı tutulduğu Pedemonte'nin dikkatini çekmiştir. Sonuçları diğer matematiksel alanlara genişletmenin mümkün olup olmadığını düşünmüş ve bu amaca yönelik olarak bu çalışmayı cebir alanında yapmıştır. Bir proje kapsamında geliştirilen bu çalışma; geometride açık uçlu problemlerin çözümünde bir hipotezi destekleyen argümantasyon ve hipotezin kanıtı arasındaki ilişkiler üzerine yapılmış olan önceki bir çalışmanın geliştirilmiş halidir (Pedemonte, 2002, akt. [27]).

Geometri alanında açık uçlu bir problemin çözüm sürecinde geliştirilen ve bir hipotezi destekleyen argümantasyon genellikle abdüktif yapıdadır. Sonrasında yapılan kanıtın yapısı da abdüktif olduğunda bu iki süreç arasında yapısal süreklilik kurulmaktadır (Pedemonte, 2002, akt. [27]). Deneyler geometride öğrencilerin bazen farkında olmadan, abdüktif argümantasyonun ardından abdüktif kanıt yaptıklarını ve bu iki süreç arasında bilinçsizce yapısal süreklilik kurduklarını göstermektedir. Bu doğal, kendiliğinden oluşan süreklilik öğrencilere avantaj sağlamamakta; aksine kanıtlarını başarı ile tamamlamalarını engelleyen bir unsur teşkil etmektedir.

Pedemonte, argümantasyon ve kanıt arasındaki bu kendiliğinden gelişen süreklilişin, cebirsel bir ifadenin kanıtının yapımında öğrencilerin karşılaştığı olası problemlerden biri olup olmadığını merak etmiştir. Bu nedenle çalışmalarını geometri alanından cebir alanına kaydırmıştır.

Pedemonte [27] bu çalışmasında da *yapılandırıcı ve yapısal* argümantasyonlardan bahsetmektedir. *Yapılandırıcı argümantasyon (constructive argumentation)* bir hipotez oluşturmaya karşılık gelmektedir (Pedemonte, 2002, akt. [27]). Verilen bir kurala göre her bir adım kendisinden önce gelen adımın dönüşümü şeklindedir. Cebirde yapılandırıcı argümantasyon sayısal örnekler üzerine yapılan bir genellemedir. Diğer argümantasyon tipi ise *yapısal (structurant) argümantasyondur.* Özellikle hipotezin bir gerçek olarak verilmiş olduğu durumlarda hipotezi doğrulamak adına üretilmektedir (Pedemonte, 2002, akt. [27]). Pedemonte, bu tip argümantasyonların cebirde açık uçlu problemlerin çözüm sürecinde önemli rol oynayabileceğini düşünmüştür.

Cebirsel problemlerin çözümü ile ilgili bazı bilişsel araştırmalar (Duval, 2002, akt. [27]), problemin cebirsel karakterlere dönüşümünün yapıldığı yapılandırıcı argümantasyon aşaması ile cebirsel bir ifadenin bilinmeyen değerlerinin dedüksiyonunun yapıldığı işlem aşaması (treatment phase) arasındaki bilişsel boşluğun altını çizmektedirler. Duval'e göre cebirsel problemlerin çözümünde öğrencilerin bu boşluğu kapatması gerekir. Dahası bazen cebirde açık uçlu problemlerde argümantasyon, sayısal aritmetik örnekler üzerine temellendirilmiş ise yapılandırıcı argümantasyon ile cebirsel kanıt arasındaki boşluk yöntemsel açıdan da oluşur (Chevallard, 1989, akt. [27]). Çünkü cebir ve aritmetik şu yönleri ile birbirlerinden oldukça farklıdırlar:

- Aritmetik bilinenden bilinmeyene hareket eder; cebir ise genellikle bilinmeyenden bilinene hareket eder. Cebirde amaç bilinmeyenleri tanımlamayı mümkün kılmaktır.
- Aritmetik ve cebir iki ayrı dile sahiptir: İlki sayısal dille genişletilen sıradan dil temellidir; ikincisi ise mekanik bir kontrolün olduğu genellikle hesaplamaya yönelik dildir.

- Cebirsel ifadelerin anlam açısından değişmezliğini yakalamak zordur (Arzarello vd., 1994; Drohuard, 1992, akt. [27]). Aritmetikte bu değişmezlik otomatiktir; çünkü ifadeler aritmetikte özel bir sayıdır; cebirde ise söz dizimsel (sentaktik) durumlara bağlıdır.

Pedemonte yapılandırıcı argümantasyon ile kanıt arasındaki bilişsel boşluğu azaltmak adına yapısal argümantasyonun yararlı olabileceği hipotezini ortaya atmıştır. Bu hipotezi test etmek amacıyla yapılan bu çalışmada cebirde bir adet açık uçlu problemin iki ayrı çözüm süreci sunulmuştur. Söz konusu iki çözüm süreci şöyledir:

**Örnek 1.** “yapılandırıcı argümantasyon” ile kanıt arasındaki boşluğu azaltan “yapısal argümantasyon” örneği

**Örnek 2.** “yapılandırıcı argümantasyon” ile kanıt arasındaki boşluğu azaltmayan “yapısal argümantasyon” örneği

Bu veriler Genoa’da, Formation Science Üniversitesi’nde bir matematik dersine katılan ilkokul öğretmeni adaylarından toplanmıştır. Öğretmen adayları deney boyunca bireysel çalışmışlardır. Problemleri sesli olarak çözmeleri istenmiştir. Araştırmacı katılımcılara gözetmenlik yapmış, ancak herhangi bir yardım ya da yönlendirmede bulunmamıştır. Öğrencilere şu problem sorulmuştur:

*“Eğer p ve q tek sayılar ise* $(p-1)(q^2-1)/8$ *ifadesi hakkında ne söyleyebilirsiniz?”*

Bu problem daha önce de farklı araştırmalarda kullanılmış olan klasik bir problemdir (Arzarello vd., 1994, akt. [27]). Öğretmen adaylarının yazılı metinlerinden ve video kayıtlarından elde edilen iki çözüm sürecinin ana kısımlarına ait analizler aşağıdaki bölümde verilmektedir.

### 3.14.1. Örnek 1 (*Yapılandırıcı Argümantasyon* ile Kanıt Arasındaki Boşluğu Azaltan *Yapısal Argümantasyon* Örneği)

Manuela, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandırmıştır. Bu argümantasyon indüktif yapıdadır ve içerik sistemi aritmetik üzerinde temellidir.

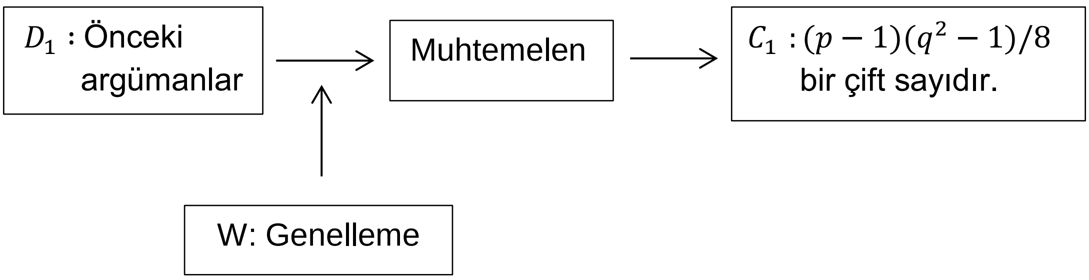
Eğer p=11 ve q=13 ise o zaman… *(hesaplama yapar)* sonuç 210 olur.

Eğer p=7 ve q=9 ise o zaman sonuç… 60

Sonuçlar çift sayı çıkıyor.

O zaman muhtemelen (p-1) $(q^2-1)/8$ bir çift sayıdır.

Şekil 3.34. Öğrencinin yapılandırıcı argümantasyon süreci




Hipotez sayısal örnekler üzerinde bir genelleme olarak yapılandırılmış bir ifadedir. Şimdi öğrenci bunu doğrulamak zorundadır.

Şekil 3.35. Öğrencinin yapılandırıcı argümantasyon sürecinin analizi

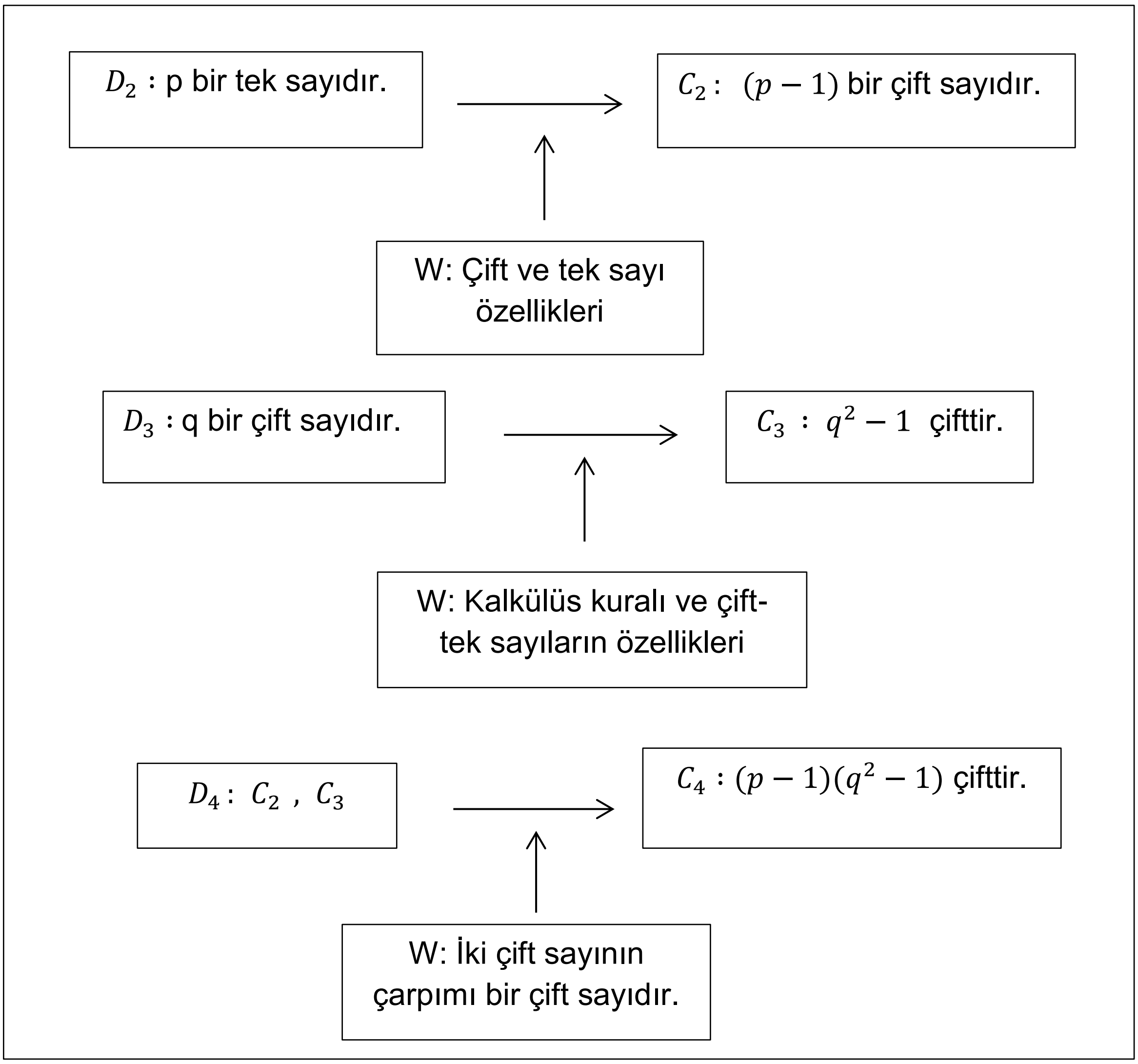
Manuela hipotezini doğrulamak için yapısal (structurant) argümantasyon üretmiştir. Manuela $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesini çift sayıların ve tek sayıların özelliklerini düşünerek analiz etmiştir; fakat analizini sonuçlandıramamıştır.

Eğer p bir tek sayı ise $p-1$ çifttir;

Eğer q bir tek sayı ise $q^2-1$ de çifttir;

O zaman bir çift sayı ile bir çift sayının çarpımı çift sayı olur, o halde ifade bir çift sayıdır…

Şekil 3.36. Öğrencinin yapısal argümantasyon süreci




Şekil 3.37. Yapısal argümantasyon sürecinin analizi

Manuela $C_4$ iddiasının, hipotezini doğrulamak için yeterli olmadığını anlar. Bunun üzerine hipotezini kurmasını sağlayan bir başka eleman arar.

… Fakat orada 8 ile bölme var.

İfadenin çift olduğunu söylemem için başka bir şey bulmak zorundayım.

Şekil 3.38. Yapısal argümantasyonda abdüktif adım

$D_5 : C_4$ ve ? $\longrightarrow$ $C_5 = C_1 : (p-1)(q^2-1)/8$ çift sayıdır.

W: Kalkülüs kuralı ve çift-tek sayı özellikleri

*(adım 5)*

*Bu abdüktif bir yapıdır.*

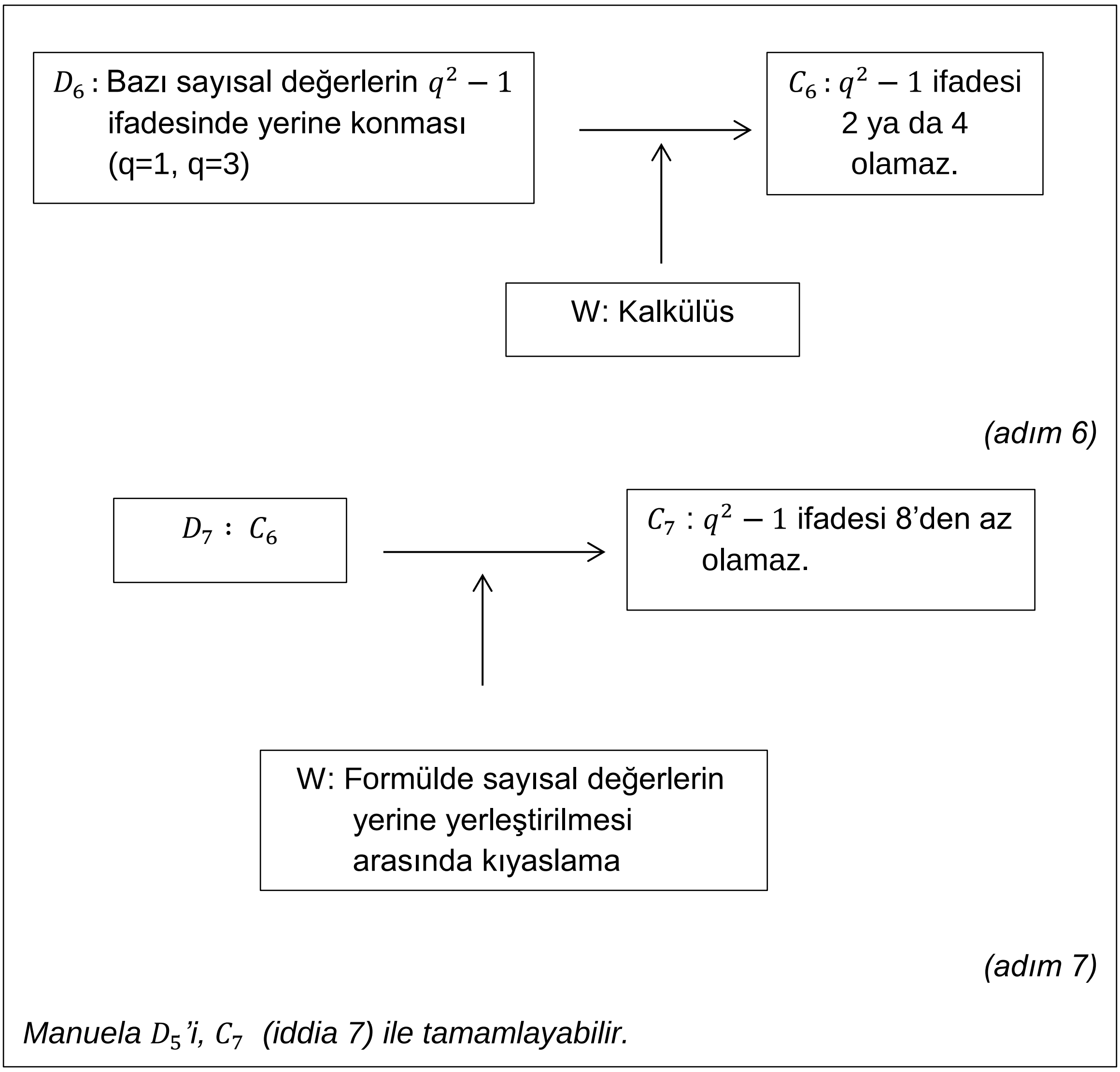
Şekil 3.39. Yapısal argümantasyonda abdüktif adımın analizi

Son argüman yapısal argümantasyonda çok önemli bir adımı temsil etmektedir. Çünkü son argüman, Manuela'yı hipotezini doğrulamak üzere başka bir şeyler ($D_5$'teki soru işareti ile gösterilmektedir) aramaya yöneltmiştir.

Manuela $(q^2-1)$ ifadesini analiz etmiştir. Bazı sayısal örnekler ile Manuela $(q^2-1)$'in 8'den az olamayacağını anlamıştır. Kesin olarak $(q^2-1)$'in 8 ile bölünebildiğini söyleyememektedir. Fakat Pedemonte, Manuela'nın $(q^2-1)$'in 8 ile bölünebildiğini düşündüğünü savunmaktadır. Bunu Manuela'nın q için farklı değerler denemesinden anlamıştır.

Fakat $q^2 - 1$, 2 ya da 4'e eşit olamaz. Çünkü 1 için $q^2 - 1$, 0 eder; 3 için ise 8 eder. Buna göre en küçük (minimal) değeri 8 olur; 8/8 = 1, o zaman $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi bir çift sayıdır.

Şekil 3.40. Yapısal argümantasyon




Şekil 3.41. Yapısal argümantasyonun analizi

Pedemonte burada yapısal (structurant) argümantasyonun hem aritmetik hem de cebirsel muhakeme ile karakterize edildiğini gözlemlemiştir. Manuela kanıtı kurmak için işe yarar elemanlar aramaktadır.

q=2n+1 buradan $q^2-1=4\,n^2+4n+1-1=4n(n+1)$

Bu ifade en azından 4 ile bölünebilmektedir. Bölüm olarak n(n+1) elde edilir. Bu ifade ise kesinlikle 2 ile bölünebilmektedir. Çünkü eğer n çift ise ifade 2 ile bölünebilir; eğer n tek ise (n+1) çift olur ve o zaman 4n(n+1) en azından 8 ile bölünebilir. Buradan $q^2-1$ ifadesinin 8'in katı olduğunu anlarız. O halde eğer p ve q tek ise $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi çifttir.

Şekil 3.42. Öğrencinin kanıt süreci

$D_8$: q =2n+1 → $C_8$ : $q^2-1=4n\,(n+1)$

↑ W: Yerine koyma

(adım 8)

Manuela $q^2-1$ ifadesinin en azından 8 olduğunu kanıtlamak için 4n(n+1) formülünü analiz eder.

$D_9$: n bir çift sayıdır. → $C_9$ : $4n(n+1)$, 8 ile bölünebilmektedir.

↑ W: Kalkülüs hesabı ($n=2t$ $olmak$ $üzere$, 4× $2t=8t$ )

$D_{10}$: n bir tek sayıdır. → $C_{10}$ : $4n(n+1)$, 8 ile bölünebilmektedir.

↑ W: $(n+1)'$in çift sayı olması ve kalkülüs hesabı

(adım 9)

Şekil 3.43. Öğrencinin kanıt sürecinin analizi

Abdüktif yapıda olan adım 5'in kanıtta dedüktif bir adıma dönüştürülmesi ile sonuca hemen ulaşılmıştır. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ile dedüktif kanıt arasında bağlantı kurmayı sağlayan yapısal argümantasyondaki bu abdüktif adımdır.

Yapılandırıcı (constructive) argümantasyonda içerik sisteminin aritmetik; kanıtta ise cebir üzerinde temellendiği gözlemlenmektedir. Yapısal (structurant) argümantasyon hem aritmetik hem de cebir alanından elemanlar içermektedir. Bu elemanlar argümantasyon ve kanıt arasında içerik anlamında sürekliliği kurmaktadırlar.

### 3.14.2. Örnek 2 (*Yapılandırıcı Argümantasyon* ile Kanıt Arasındaki Boşluğu Azaltmayan *Yapısal Argümantasyon* Örneği)

Bu bölümde bir başka öğrencinin, Elio'nun, ürettiği cevaba yer verilmektedir. Elio farklı stratejiler denemiştir: Başlangıçta bir önceki örnekte Manuel'inkine benzer bir muhakeme üretir. Buradan $(p-1)(q^2$ -1) ifadesinin bir çift sayı olduğunu anlar. Fakat bu gerçeğin yeterli olmadığını söyler, çünkü genel olarak bir çift sayının bir başka çift sayıya bölündüğünde sonucun çift çıkacağı doğru değildir. Sonra Elio, p ve q için bazı sayılar seçer ve genelleme yoluyla hipotezini oluşturur.

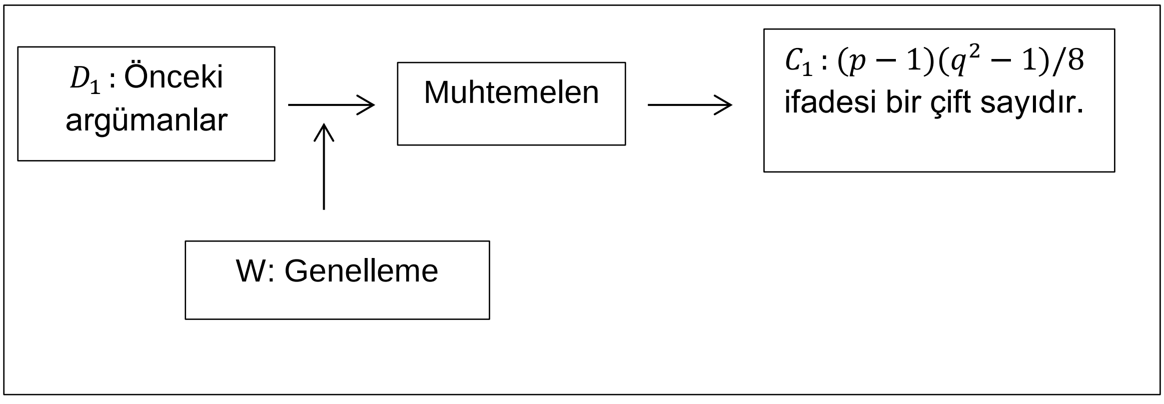
Eğer p=1 ve q=3 ise o zaman 0 × 8/8=0 olur.

p=5 ve q=7 ise o zaman 4 × 48/8 =24 olur.

p=11 ve q=13 ise o zaman 10 × 168/8=210

Öyle görünüyor ki $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi çift sayıdır.

Şekil 3.44. Elio'nun yapılandırıcı argümantasyon süreci

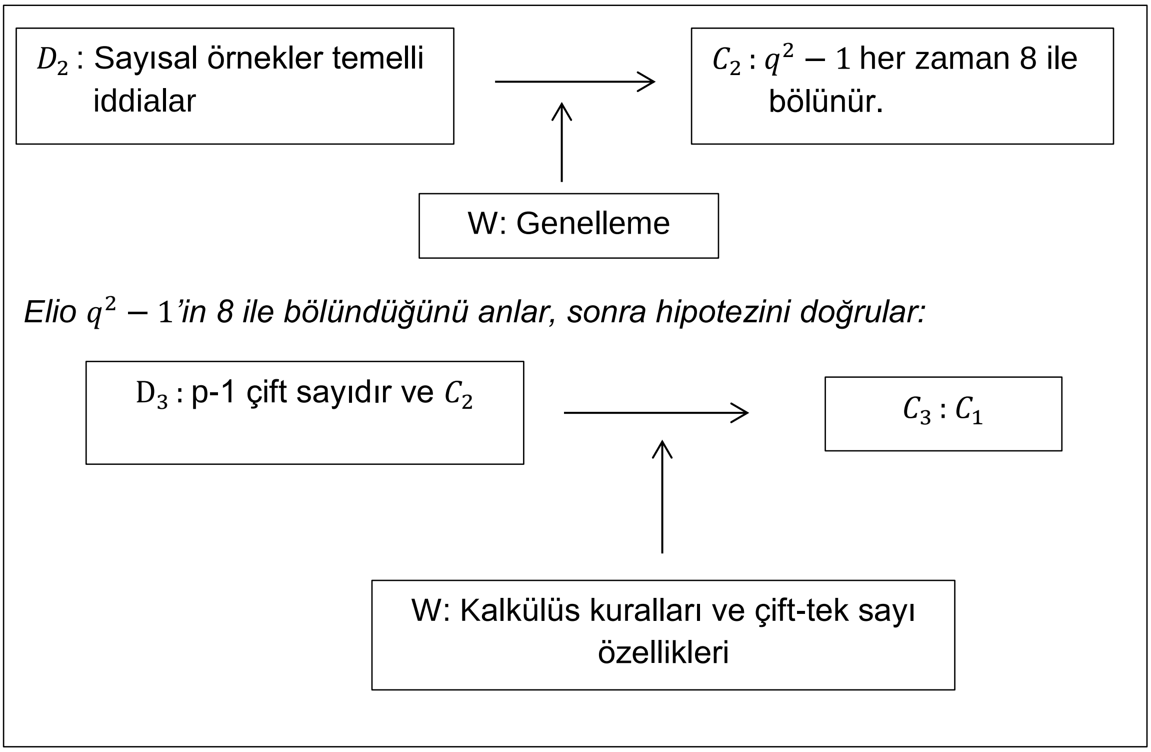



Şekil 3.45. Elio'nun yapılandırıcı argümantasyon sürecinin analizi

Önceki örnekte olduğu gibi hipotez aritmetik örnekler üzerinde temellendirilmiştir. Bu örnekler $q^2 - 1$'in 8 ile bölünebildiğinin anlaşılmasını sağlamaktadır.

Öyle görünüyor ki q yerine bir tek sayı koyduğumuzda $q^2 - 1$ ifadesi 8 ile bölünmektedir. O zaman $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi çifttir çünkü p-1 çifttir ve $q^2 - 1$ ifadesi 8 ile bölünmektedir.

Şekil 3.46. Elio'nun yapısal argümantasyon süreci




Şekil 3.47. Elio'nun yapısal argümantasyon sürecinin analizi

Elio hipotezini doğrulamasını sağlayan yapısal (structurant) bir argümantasyon üretmiştir. Fakat bu doğrulama hala aritmetik örnekler üzerinde temellidir. Dahası yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ile kanıt arasında bağlantı kurmayı sağlayacak abdüktif adım da yoktur. Bunun bir sonucu olarak, Elio bir kanıt yapmayı dener, ama bir sonuç alamaz. Kanıt sürecinde argümantasyon aşaması ile bağlantıyı kaybeder; cebirsel kanıtın dedüktif yapısı ile hareket eder.

p ve q tek iken ifadeyi kanıtlamayı deneyeyim, o zaman p=2k+1 ve q=2h+1 olur. O zaman şunu bulabilirim:

(2k+1-1) $[(2h+1)^2-1]/8$

2k [$(4h^2+1+4h)-1]/8$

2k $(4h^2+4h)/8$ ifadesi 2'nin herhangi bir katı değildir… anlayamıyorum

Sadeleştirebilirim: k$(4h^2+4h)/4$

Eğer 2 parantezine alırsam… $2k\ (2h^2+2h)/4$ hayır…

Eğer h parantezine alırsam: 2kh (4h+4)/8 hayır…

Eğer 4h parantezine alırsam: 2k × 4h (h+1)/8 hayır…

Şekil 3.48. Elio'nun kanıt süreci

Elio problemi çözmüştür fakat kanıtı yapamamıştır. Dedüktif zincirin sertliği çok güçlü görünmektedir, öyle ki Elio argümantasyon ile kanıtın içerik sisteminde süreklilik kuramamıştır. Formülünü söz konusu ifadeyi *"2'nin herhangi bir katı"* formunda olacak şekilde dönüştürmüştür. Ancak içerik sitemindeki bağlantıyı kaybetmiştir. Bu durumda yapısal (structurant) argümantasyon aritmetik ve cebir arasında bağlantı kuramamıştır. Çünkü yapısal (structurant) argümantasyon sadece sayısal örnekler üzerinde temellidir; cebirsel elemanlar içermemektedir.

Dahası yapısal argümantasyonda belirgin bir abdüktif adım da yoktur. Eğer yapısal argümantasyonda abdüktif adım kullanılmış olsaydı, abdüktif adım Elio'ya hipotezini doğrulamada ve kanıtı yapmada eksik olan elemanlara odaklanma konusunda yardımcı olabilirdi.

$D_4$: $\frac{(p-1)(q^2-1)}{8}$ → $C_4$ : $(p-1)(q^2-1)/8$ = $(2k+1-1)[(2h+1)^2-1]/8$

W: p=2k+1 ve q=2h+1 ‘i yerine koyarak ifadeyi dönüştürme aşaması

$D_5$ : $C_4$ → $C_5$ : $(p-1)(q^2-1)/8 = 2k \times (4h^2+4h)/8$

W: Kalkülüs kuralları

$D_6$ : $C_5$ 2’nin herhangi bir katı değildir. → $C_6$ : $(p-1)(q^2-1)/8$’in çift olduğunu anlayamıyorum.

W: Çift sayı özelliği

*Kanıtta Elio formülün başka dönüşümlerini de yapar, ancak bir sonuç alamaz. Diğer argümanlar bir önceki örnektekilere benzerdir ve bu argümanlardan aynı sonuç çıkmıştır: Elio kanıtı yapamamıştır.*

Şekil 3.49. Öğrencinin kanıt sürecinin analizi

### 3.14.3. Sonuçlar

Argümantasyon ve kanıt arasında içerik sisteminde süreklilik olsa bile, iki süreç arasında (abdüktif argümantasyondan dedüktif kanıta) kapatılması gereken yapısal bir mesafe olabileceği bu çalışmada incelenen örneklerde bir kez daha görülmüştür. Bu yapısal mesafe her zaman öğrenciler tarafından kapatılamamakta; bazen öğrenciler argümantasyonun yapısını kanıtın dedüktif yapısına dönüştüremedikleri için yanlış kanıt yapmaktadırlar [27].

Analiz edilen her iki örnekte de yapısal argümantasyon kullanıldığı görülmüştür. İlk örnekte yapısal argümantasyon kanıtın yapımına yardımcı olurken; ikincisinde kanıtın yapımına zorluk çıkardığı görülmüştür. Buna göre şu sonuca varılmaktadır: Cebirde açık uçlu problemlerin çözümünde yapısal argümantasyon eğer yapılandırıcı argümantasyon ve kanıt arasında içerik sistemi yönünden bir süreklilik sağlıyorsa kanıtın yapımında yardımcı olabilmektedir. Yapısal argümantasyonun bu görevin yerine getirebilmesi, hem aritmetik hem de cebirsel elemanlar içermesi ile mümkündür.

Ayrıca görülmüştür ki, geometri ile ilgili problemlerin çözümünün tersine, yapısal argümantasyondaki abdüktif yapı öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları zorluklardan biri değildir. Aksine abdüktif adımlar sayesinde öğrenci argümantasyon süreci ve cebirsel kanıt süreci arasındaki bilişsel boşluğu doldurabilmektedir.

### 3.15. Argümantasyon ve Cebirsel Kanıt

Pedemonte [28], bu çalışmasında sayıların özellikleri ile ilgili problemleri çözerken, bir hipotez üretmek için kurulan argümantasyon ve üretilen hipotezin cebirsel kanıtı arasındaki bilişsel mesafe ya da sürekliliği incelemeyi amaçlamıştır. Analizler sonucunda geometri ile ilgili yapılan kanıtların tersine, abdüktif argümantasyondan dedüktif kanıta geçerken oluşan yapısal mesafenin öğrencilerin cebirsel problemleri çözerken karşılaştıkları zorluklardan biri olmadığı gösterilmiştir. Tersine cebirsel kanıt güçlü dedüktif bir yapı ile karakterize edildiğinden, argümantasyondaki abdüktif adımlar cebirsel kanıtta kullanılan simgelerin anlamı ile argümantasyonda kullanılan sayılar arasında bağ kurmada faydalı olabilmektedir.

Pedemonte [28]'ye göre, bir hipotezi destekleyen argümantasyon süreci ile ürün olarak kanıtı birbirinden ayırt etmek zor, fakat önemlidir. Bu ayrımın yapılması ile öğrencinin nerede kanıt sürecine başladığı anlaşılabilir. Bu noktada teorem ve hipotezi birbirinden ayırt etmek oldukça yararlı olacaktır. Çünkü hipotez ve teoremin ayırt edilmesi ile birlikte argümantasyon ve kanıt süreçlerini de ayırt etmek mümkün olacaktır.

Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti [25], "teorem" in 3 elemandan oluştuğunu belirtmektedirler: Bir ifade, bir kanıt ve matematiksel teori. Teorem kanıtın yapılmasını sağlayan matematiksel bir teori (bazı prensipler ve dedüksiyon kuralları) olduğunda ortaya çıkmaktadır. Bu sayede ifade doğrulanır. Teorem tanımına paralel olarak, hipotez (Pedemonte, 2005, akt. [28]) 3'lü bir yapı ile tanımlanabilmektedir: Bir ifade, bir argümantasyon ve düşünceler/kavramlar sistemi (Balacheff, 2000, akt. [28]).

Bir hipotezin oluşumunu destekleyen argümantasyon ve bu hipotezin kanıtı arasındaki karşılaştırma, matematikte kanıtın özel bir argümantasyon olarak düşünülebileceği hipotezine dayanmaktadır [20]. Bir hipotezi destekleyen argümantasyon ile onun kanıtını karşılaştıran ve analiz eden araştırma çalışmaları (Pedemonte, 2002, akt. [28]) göstermiştir ki; böyle bir karşılaştırma iki açıdan yapılabilmektedir: *İçerik ve yapı*.

### 3.15.1. Argümantasyon ve Kanıtı İçerik Sistemleri Açısından Karşılaştırma

Argümantasyonun ve kanıtın içerik sistemi; temsil (betimleme) ve bilgi sistemlerinden oluşmaktadır. Temsil sistemi dil, sezgi ve çizim ile ilgili iken; bilgi sistemi kavramlardan ve teoremlerden oluşmaktadır. Eğer argümantasyon sürecinde kullanılan argümanlar mantıksal bir zincir halinde organize edilerek kanıt yapılırsa, bu durumda argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bir süreklilik vardır. Bu süreklilik kavramı *“bilişsel süreklilik”* olarak adlandırılmıştır. Örneğin, kanıtta kullanılan kelimeler, çizimler argümantasyon sürecinde de kullanılıyorsa argümantasyon ve kanıt arasında bilişsel süreklilik vardır. Bilişsel süreklilik kavramının *“bilişsel bütünlük”* olarak kullanıldığı da görülmektedir. Bu kavram ile ilgili yapılan deneysel çalışmalar [19; 45; 53] hipotez oluşturmak için argümantasyon aktivitesi geliştirildiği ve iki süreç arasında bilişsel bütünlük kurulduğu durumlarda öğrencilerin kanıtı yapmakta daha başarılı olduklarını göstermiştir.

Pedemonte (2005, akt. [28]), argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki içerik sistemi açısından karşılaştırmayı Toulmin Modeli içerisine Ck¢ modelini entegre ederek (Balacheff, 2000; Balacheff & Margolinas, 2005, akt. [28]) yapmaktadır. Burada Ck¢ modeli argümantasyon sürecinde kullanılan bilgi ile kanıt sürecinde kullanılan teoremleri karşılaştırmayı sağlamaktadır.

Bir kanıt sürecinde gerekçe bir aksiyom, bir tanım ya da bir teoremdir. Destek gerekçeyi doğrulayan teorik sistemdir. Bir hipotezin oluşumunu destekleyen argümantasyon sürecinde ise bu elemanların teorik bir sisteme ait olması zorunluluğu yoktur. Bu sebeple analizlerde argümantasyon sürecinde kullanılan bilgi sistemini göz önüne almaya fırsat veren Ck¢ modeli kullanılmıştır.

### 3.15.2. Toulmin Modeli İçinde Ck¢ Modeli

Ck¢ modelinde bir düşünce/kavram dörtlü yapı ile temsil edilmektedir:

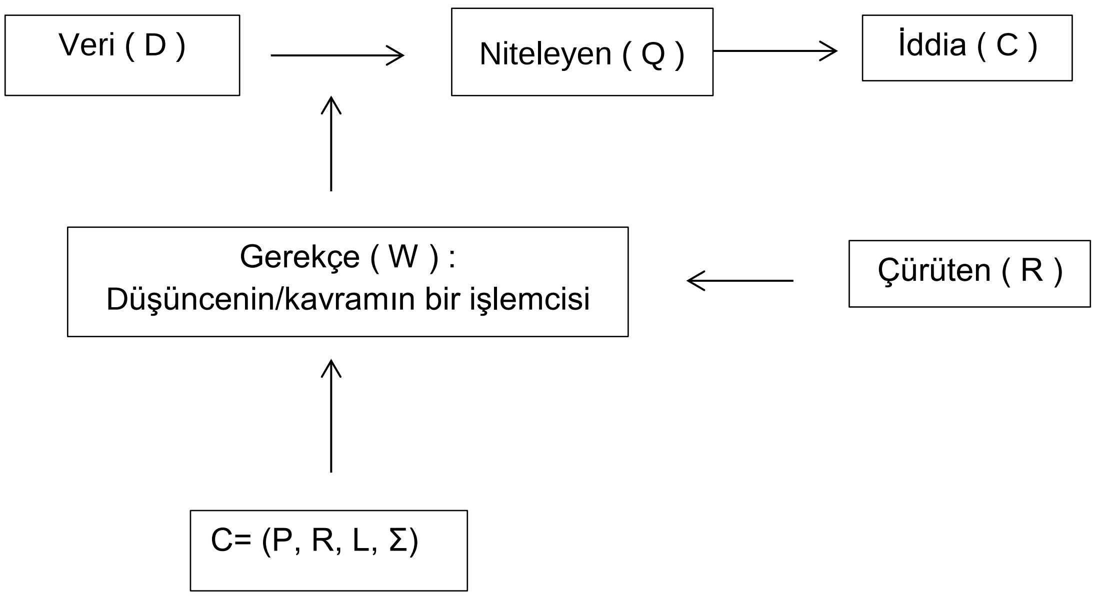
*P, problemler kümesini* temsil eder. Bu bölüm düşüncenin/kavramın oluştuğu taslak kısmıdır.

*R,* problemlerin çözümünde kullanılan *işlemler/işlemciler (operatör) kümesini* temsil eder.

*L, temsil sistemini* temsil eder. Temsil sistemi problemlerin ve işlemlerin temsilini sağlar.

*Σ, kontrol yapılarını* temsil eder. Bu bölüm kavramın/düşüncenin geçerlilik alanını tanımlar.

Bu dörtlü yapı çözüm sürecinde öğrencinin harekete geçirdiği düşüncelerinin tanımlanmasını sağlar (Balacheff & Gaudin, 2002; Miyakawa, 2002; Pedemonte, 2005, akt. [28]). Bu model Toulmin Modeli içerisine aşağıdaki gibi entegre edilebilmektedir:




Şekil 3.50. Ck¢ modelinin Toulmin Modeli içine entegre edilmesi

Bu model içerik sisteminin analizi için oldukça kullanışlıdır. Çünkü argümantasyon süreci, öğrencilerin düşünceleri üzerinde yapılanmaktadır. Ck¢ modeli de öğrencinin harekete geçirdiği bu düşüncelerinin dörtlü yapı şeklinde tanımlanmasını sağlamaktadır. Öğrencinin kanıt sürecindeki düşüncelerinin de benzer şekilde analizinin yapılması ile argümantasyon ve kanıt süreçleri içerikleri açısından karşılaştırılır. Düşüncelerin, kullanılan argümanların ve bunların kontrol alanlarının aynı olup olmamasına bakılarak, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında "bilişsel bütünlük" olup olmadığına karar verilir.

Argümanda kullanılan gerekçe, harekete geçirilen düşünceye sıkı sıkıya bağlıdır. Gerekçe öğrencilerin argümantasyonlarını yapılandırmak için kullandıkları olası işlemcilerden biridir. Eğer harekete geçirilen düşüncenin işlemcisi, matematiksel bir kuralın uygulamasına karşılık geliyorsa, muhtemelen argümantasyon ve kanıt arasında süreklilik olacaktır. Çünkü bu kural kanıtta yerini bir teoreme bırakabilecektir (Pedemonte, 2005, akt. [28]). Ama eğer bu işlemci doğru değilse kanıtta yerini bir teoreme bırakamaz. Bu durumda üç olası durum söz konusudur:

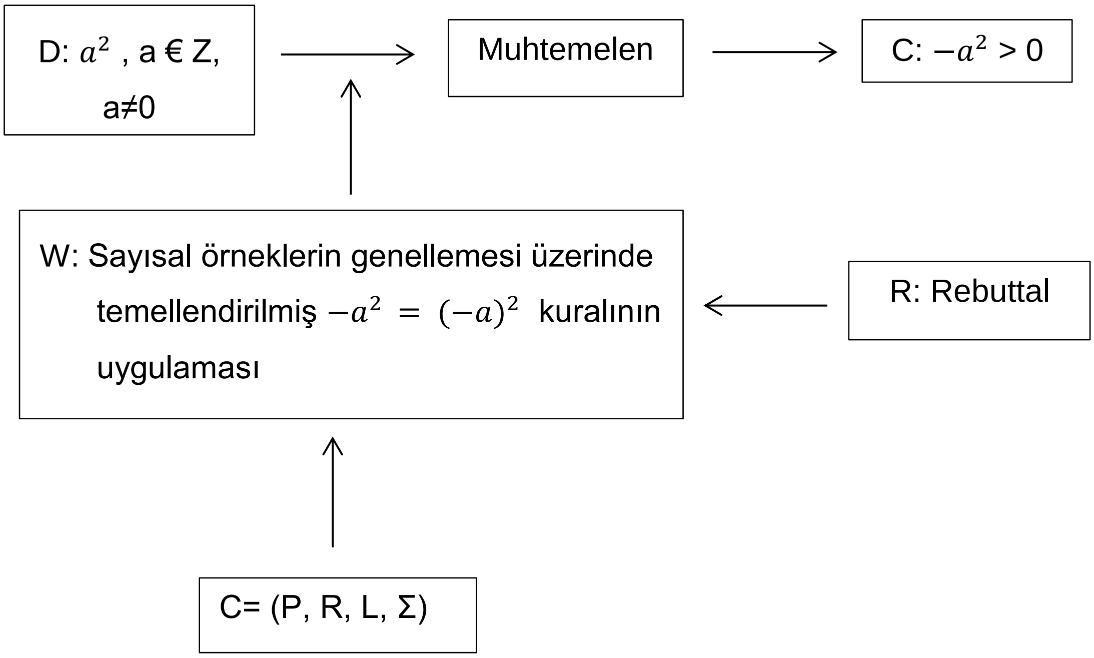
1. Öğrenci kanıtı yapamaz, çünkü işlemcinin yerini bir teoreme bırakmasını sağlayamamıştır.
2. Öğrenci doğru olmayan bir kanıt yapar ve bu kanıt argümantasyonda kullanılan düşünce/kavram üzerinde temellidir.
3. Öğrenci kurduğu argümantasyondan vazgeçer ve yeni bir argümantasyon kurar.

Bir argümandaki elemanların, kanıt adımları ile karşılaştırılması için Ck¢ modelinin nasıl kullanılanacağını göstermek amacıyla şu problem durumu örnek verilmektedir:

> "0'dan farklı bir a sayısı için $-\mathrm{a}^2$ hakkında ne söyleyebilirsiniz? Bu sayı pozitif mi, yoksa negatif midir?"

**Öğrenci Cevabı.**

"$-a^2$ muhtemelen pozitif bir sayıdır. Eğer a'yı 2 olarak alırsak; $-2^2$, 4 olur ve 4 pozitif bir sayıdır. Eğer a'yı 3 alırsak $-3^2$, 9 olur ve 9 pozitif bir sayıdır. Bu böyle devam eder. Öyleyse $-a^2$ muhtemelen pozitif bir sayıdır."




Şekil 3.51. Doğru olmayan bir düşünce üzerinde temellenen argüman örneği

Öğrencinin harekete geçirdiği düşünceleri $-a^2 = (-a)^2$ kuralının uygulaması üzerinde temellidir. Bu kural sayısal örnekler üzerinde genelleme olarak şöyle ortaya çıkar: $-2^2 = (-2)^2 = 4$ , $-3^2 = (-3)^2 = 9$. Düşünce cebirsel temsil sisteminde ifade edilmektedir. Öğrenci $-a^2$'nin pozitif bir sayı olduğunu söylemektedir. Fakat düşüncenin geçerlilik (kontrol) alanı Σ aritmetiktir. Hipotezi destekleyen argümantasyonun teorik bir alana ait olması gibi bir zorunluluğu yoktur, fakat kanıtın kontrol alanının mutlaka teorik bir alana ait olması gerekmektedir.

Bu argüman doğru bir kanıta dönüştürülemez. Çünkü öğrenci yanlış bir kurala başvurmuştur: $-2^2 = (-2)^2 = 4$ , $-3^2 = (-3)^2 = 9$ …. Öğrenci bu düşüncesini devam ettirerek sadece doğru olmayan bir kanıt yapabilir. Bu durumda argümantasyon ve doğru olmayan kanıt arasında içerik sistemi açısından süreklilik vardır. Bunun tersine eğer cebirsel kanıt argümantasyonda harekete geçirilen düşünce referans gösterilerek yapılmasaydı, argümantasyon ve kanıt arasında içerik anlamında süreklilik olmayacaktı, ancak kanıt doğru olacaktı. Bu, önemli bir sonuçtur.

Bilişsel bütünlük hipotezine göre öğrencilerin argümantasyon sürecinde ürettikleri fikirlerini, sezgilerini, hipotezlerini, çizimlerini kanıt sürecinde de devam ettirmeleri durumunda kanıtı başarı ile tamamlama şanslarının arttığını söylemiştik. Ancak bu örnekte görüldüğü gibi eğer öğrenci yanlış bir düşüncenin peşinde ise ve argümantasyonda ortaya çıkardığı bu düşüncesini kanıtta da devam ettirerek, kanıtı bu düşünce üzerine inşa ederse; argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel süreklilik kurulmakta, ancak kanıt yanlış olarak yapılmaktadır. Düşüncenin terk edilerek kanıtta düzeltilmesi durumunda bilişsel bütünlük bozulmakta, ancak kanıt doğru olarak yapılabilmektedir.

Bu sonuca göre argümantasyon ve kanıt arasında bilişsel bütünlüğün olduğu her durumda kanıtın da doğru olduğunu söylemek doğru değildir. Bilişsel bütünlüğün olması öğrencinin kanıtı doğru yapılandırdığı anlamına gelmemektedir; tıpkı yapısal bütünlüğün olmasının da öğrencinin kanıtı kesinlikle doğru yaptığı anlamına gelmemesi gibi.

### 3.15.3. Argümantasyon ve Kanıtın Yapısal Açıdan Karşılaştırılması

Duval'in çalışmaları göstermiştir ki, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında içerik anlamındaki mesafeye ek olarak yapısal anlamda da bir mesafe vardır. Çünkü argümantasyonda çıkarımlar içerik üzerinde temellidir, kanıtta ise çıkarımlar dedüktif bir şemayı takip etmektedir: Veri, iddia ve çıkarım kuralları. Duval'in ardından, Pedemonte [20] yapmış olduğu çalışmalarında bilişsel bütünlük analizinin, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki ilişkiyi bütün yönleri ile açıklamadığını görmüştür. Argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel süreklilik olsa bile, bu iki süreç arasında kapatılması gereken başka bir mesafe olduğunu fark etmiştir. Bu yeni mesafe argümantasyon ve kanıt süreçlerinin *yapıları* ile ilgilidir.

Pedemonte'ye göre argümantasyon ve kanıtta çıkarımlar aynı yapı (abdüksiyon, dedüksiyon, indüksiyon) ile birbirlerine bağlanmış ise bu iki süreç arasında "*yapısal süreklilik*" vardır. Örneğin argümantasyonda kullanılan abdüktif adımlar kanıtta da devam ettirilir ve çıkarımlar kanıtta da abdüktif yapı ile birbirine bağlanırsa o zaman argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında yapısal bir süreklilik olduğu söylenebilir. Pedemonte'nin çalışmaları geometride argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki yapısal sürekliliğin, öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları olası zorluklardan biri olabileceğini göstermiştir. Bazı durumlarda öğrencilerin kanıtı yapamadıkları çünkü argümantasyondaki çıkarım kurallarının yapısını dedüktif yapıya dönüştüremedikleri görülmüştür. Örneğin abdüktif yapıda argümantasyon kuran bazı öğrencilerin kanıtta da bu yapıyı devam ettirdiği ve dedüktif kanıt yapmak yerine abdüktif kanıt yaptığı görülmüştür.

Pedemonte [28], çalışmaların daha ziyade geometri alanında yapıldığını görmüş ve araştırmalarını cebir alanına kaydırmaya karar vermiştir. Bu amaçla yapmış olduğu ve çalışmamız kapsamında 3.14.'üncü bölümde yer verilen çalışmasının [27], bir devamı olarak bu çalışmayı yapmıştır. Amacı argümantasyon ve cebirsel kanıt süreçleri arasındaki yapısal sürekliliğin öğrenciler için kanıt yapma konusunda bir engel teşkil edip etmediğini belirlemektir. Analizlere geçmeden önce değindiği bir diğer nokta argümantasyon ve cebirsel kanıt arasındaki ilişkilere yönelik hipotezlerdir.

### 3.15.4. Cebirsel Kanıt

Matematikte 12. sınıf seviyesinde kanıt öğretimi ve kanıtlama yaklaşımının kazandırılması yeni yeni başlar. Ancak daha ziyade geometri alanında kanıtlara yer verildiği, cebirsel kanıta pek önem ve yer verilmediği görülmektedir. Buna paralel olarak cebir üzerine çok fazla çalışmanın yapılmadığı dikkat çekmektedir (Healy & Hoyles, 2000, akt. [28]).

Aslında ortaokul seviyesinde cebir, kanıtı öğretme amaçlı çok sık tercih edilen bir alan değildir. Pek çok ülkenin müfredatında kanıta yaklaşım, geometri alanı ile kısıtlıdır (Hanna & Jahnke, 1993, akt. [28]). Ayrıca okulda yapılan uygulamalarda ilişkilerin ifade edilmesi ve ortaya konulması yolu olarak cebir genellikle tercih edilmemektedir. Cebir daha ziyade sembolik ifadeler ve kurallar dizisi olarak görülmektedir. Öğrenciler genellikle yaptıkları hesaplamalar sırasında kullandıkları aksiyomların ve teoremlerin ne olduğu ve nereden geldiği konusunda bilinçli değillerdir. Bu sebeple, cebir bir dil olarak görülmekte ve cebire sentaktik (söz dizimsel, söz ile ilgili) açıdan önem verilmektedir. Bu bağlamda cebirsel kanıt hesap (analiz) kuralları ile bağlantılı kurallar dizisinden oluşan gramatik bir yapı olarak görülmektedir. Bu nedenle cebirsel kanıt, sayılar ve özellikleri ile ilgili bir problemi çözmek için üretilen, bir hipotezi oluşturmak ya da savunmak amacıyla geliştirilen argümantasyon sürecinden oldukça uzak görülmektedir.

Aritmetik ve cebir arasındaki farklılıkların da altı çizilmektedir. Cebir aritmetiğin izlerini taşır, ancak cebirde sayıları ve sembolleri matematiksel nesneler olarak düşünmek gereklidir. Pedemonte [27]'nin 3.14.'te yer verilen çalışmasında da belirttiği gibi aritmetik ve cebir birbirlerinden oldukça farklıdır ve bu iki alan arasında bilişsel bir boşluk vardır.

Bu nedenle Pedemonte bilişsel açıdan sayıların özellikleri ile ilgili açık uçlu problemlerin cebirsel kanıtının yapımının, geometri alanında öğrencilerin bilişsel bütünlük kurduğu ve bunun bir sonucu olarak kanıtı kolaylıkla yapabildikleri durumlardan oldukça farklı olabileceğini düşünmüştür. Bunun bir sonucu olarak, Pedemonte öğrencilerin kurduğu argümantasyon ve cebirsel kanıt süreçleri arasındaki ilişkileri merak ederek bu konuya ilişkin çalışmalar yapmıştır [27; 28]. Bu çalışmalarında öğrencilerin argümantasyon ve cebirsel kanıt süreçlerini Toulmin Modeli'ne göre yapısal açıdan analiz etmiş ve karşılaştırmıştır.

Pedemonte'ye göre cebirsel kanıt yapımında, iki süreç arasındaki yapısal süreklilik çoğunlukla yok olmaktadır. Öğrenciler argümantasyon aşamasında ürettikleri abdüktif adımları, büyük olasılıkla kanıtta kullanmamaktadırlar. Çünkü cebirsel kanıtın doğasında dedüktif yapı oldukça baskındır. Bu nedenle öğrencilerin argümantasyonda üretilen abdüktif adımlardan ziyade, cebirsel kanıtı karakterize eden dedüktif yapıyı kullanmaları daha sık rastlanan bir durumdur.

Bu nedenle geometri alanında elde edilen sonuçların tersine, argümantasyon ve cebirsel kanıt süreçleri arasındaki yapısal mesafe öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları olası zorluklardan biri olmamaktadır. Pedemonte [28] çalışmasında bu durumu ayrıntılı analiz edebilmek adına abdüktif argümantasyon yapısı üzerine odaklanmıştır.

### 3.15.5. Argümantasyon ve Cebirsel Kanıt Arasındaki İlişkilere Yönelik Hipotezler

Sayıların özellikleri ile ilgili açık uçlu problem durumlarında, yapılandırıcı argümantasyon sayısal örnekler üzerine bir genelleme ile karakterize edilmektedir. Yapısal argümantasyon ise hipotezi savunmak (doğrulamak) için kullanılmaktadır. Kanıt aşaması kuralların sistematik bir uygulamasıdır, verilen kurala göre her adım bir önceki adımın dönüşümüdür. Cebirsel kanıtlar güçlü dedüktif bir yapı ile karakterize edilmektedir.

Cebirsel problemlerin çözüm süreci üzerinde yapılan bazı bilişsel çalışmalar (Duval, 2002, akt. [28]), problemin cebirsel karakterlere çevirisinin yapıldığı dönüştürme aşaması (ya da yapılandırıcı argümantasyon aşaması) ile cebirsel bir ifadenin bilinmeyen değerinin dedüksiyonu olan kanıt aşaması arasındaki bilişsel boşluğun altını çizmektedirler. Duval (2002, akt. [28])'e göre öğrenciler argümantasyon aşamasından kanıt aşamasına geçerken içerik anlamında bir boşluk yaşayabilirler. Pedemonte [28]'ye göre yaşanan bu boşluğun asıl sebebi aritmetik ve cebir arasındaki farklılıklardır. Dönüştürme aşaması aritmetik temellidir ve harfler ifade edilmeye çalışılan matematiksel nesneyi göstermektedir. Kanıt aşaması ise cebir temellidir ve ifade edilmeye çalışılan nesneler için referans yoktur, bu aşamada nesneler başlı başına düşünülürler. Bu farklılıklar, öğrencilerin bu iki süreç arasında bilişsel bir boşluk yaşamasına sebep olurlar.

Cebirsel problemlerin çözüm sürecinde ya da cebirsel ifadelerin kanıtında yapısal argümantasyonda kullanılan abdüktif adımlar, yapılandırıcı argümantasyondaki içerik sistemi ile kanıttaki içerik sistemi arasındaki bağlantıyı korumak için yararlı olmaktadır. Çünkü bu adımlar hipotezi oluşturmak için kullanılan sayısal örneklerin ve kanıtta kullanılan cebirsel ifadelerin/sembollerin/harflerin anlamlarını korumak için öğrencilere yardımcı olmaktadır.

### 3.15.6. Analizler

Pedemonte çalışmasında iki hipotezi doğrulamaya çalışmaktadır:

1. Sayıların özellikleri ile ilgili açık uçlu problemleri çözerken yapısal argümantasyon, yapılandırıcı argümantasyon ve kanıt arasındaki bilişsel boşluğu azaltmayı sağlamak için kullanılabilir. Yani başarılı bir yapısal argümantasyon, yapılandırıcı argümantasyon ve kanıt arasındaki içerik sisteminde süreklilik kurmayı kolaylaştırır.
2. Yapısal argümantasyondaki abdüktif adımlar, yapılandırıcı argümatasyonun içeriği ile kanıtın içeriği arasında bağlantı kurmada yardımcı olmaktadır.

Aşağıda Pedemonte [28]'nin çalışmasında yapmış olduğu analizlere ve sonuçlarına yer verilmektedir.

Çalışmada iki açık uçlu probleme ilişkin çözüm süreçlerine yer verilmiştir. Veriler bir üniversitedeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarından toplanmıştır. İki problem için toplam 14 öğrencinin çözüm süreci analiz edilmiştir (7 öğrenci ilk problem için, 7 öğrenci ikinci problem için). Elde edilen verilerin bir kısmında argümantasyon süreci, bir kısmında ise kanıt süreci eksiktir. Bu sebeple bu veriler analize dahil edilmemiştir. Toplanan verilerin analizlerinin hepsi, Pedemonte

[28]'nin çalışmanın başında ürettiği hipotezleri doğrular nitelikte sonuçlar vermişlerdir.

Sonuçları açıklamak açısından çalışmada yer verilmek üzere 4 örnek anlamlı bulunmuştur. Bu veriler bir hipotezi destekleyen argümantasyon süreci ile ifadenin cebirsel kanıtı arasında karşılaştırma yapmayı sağladıkları ve sorulan iki probleme genel olarak öğrencilerin verdikleri cevapları özetler nitelikte oldukları için seçilmişlerdir. İlk problem ve ilgili analizler aşağıda verilmektedir.

**Problem 1.**

İki basamaklı bir sayı alın, rakamlarının yerlerini değiştirin. Şimdi elinizde iki sayı olmuş oldu. Bu sayılardan büyük olanından küçük olanını çıkarın. Sonuç hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Bu problemin çözümü öğrenciler için pek açık değildir. Hipotez, sayısal örneklerin genellemesi ile oluşturulabilmekte, ancak bu da hemen gerçekleşememektedir. Öğrencilerin çözüm süreci incelendiğinde düşünme aşamasında hipotezi cebirsel dile dönüştürürken bazı zorlukların yaşandığı görülmüştür. Yapısal analiz abdüktif adımların rolü üzerinde odaklanmıştır. Bu abdüktif adımların kanıt yapımında etkili olup olmadığı araştırılmıştır.

İkinci problem aşağıda verilmektedir.

**Problem 2.**

Eğer p ve q tek sayılar ise $(p-1)(q^2-1)/8$ için ne söylenebilir?

Bu problem başka araştırmalarda da kullanılmış klasik bir problemdir (Arzarello vd., 2001, akt. [28]). Öğrenciler formüldeki harflerin yerine sayılar koyarak bir hipotez oluşturmuşlardır. Sonra bu hipotezi kanıtlamak için p ve q harflerini tek ve çift sayıları temsil eden başka harflerle yer değiştirmişlerdir. Diğer problemde olduğu gibi bu problemde de dikkat abdüktif adımların kanıtı nasıl etkilediği üzerindedir.

Her iki problemde de öğrencilerden problemleri yüksek sesle çözmeleri istenmiştir. Öğrenciler, araştırmacının gözlemi altında yalnız çalışmışlardır. Araştırmacı öğrencilere yardım etmemiştir. Öğrencilerin matematiksel alt yapıları homojen değildir, fakat öğrencilerin hepsi problemleri teorik altyapıları ile çözebilmektedirler.

Öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçleri, Ck¢ modeli ile kombine edilmiş Toulmin Modeli ile analiz edilmiş ve karşılaştırılmışlardır. Çözüm metinleri öğrencilerin ses kayıtlarından ve yazılı ürünlerinden elde edilmiştir.

Çalışmada yer verilen dört çözüm sürecinden ikisi ilk problemin çözümü, diğer ikisi ise ikinci problemin çözümü ile ilgilidir. Problem 1'e ilişkin elde edilen iki çözüm sürecinin analizi genel hatları aşağıda verilmektedir.

**Örnek 1. Problem 1'e ilişkin birinci çözüm süreci:**

yapılandırıcı argümantasyon $\longrightarrow$ kanıt

Bu çözüm sürecinde yanlış kanıt yapıldığı görülmüştür. Çünkü yanlış düşünme süreci geliştirilmiştir ve bu süreçte yapısal argümantasyon gözlenmemiştir.

**Örnek 2. Problem 1'e ilişkin ikinci çözüm süreci:**

yapılandırıcı argümantasyon $\longrightarrow$ yapısal argümantasyon $\longrightarrow$ kanıt

Bu çözüm sürecinde doğru kanıt yapıldığı görülmüştür. Yapısal argümantasyon vardır ve yapısal argümantasyonda abdüktif adımlar gözlenmiştir.

İlk örneğin ayrıntılı analizi aşağıda verildiği şekli ile yapılmıştır.

**Problem 1'e ilişkin birinci çözüm sürecinin analizi**

Ilaria hipotezini sayısal örneklerin genellemesi ile yapılandırmıştır. Argümantasyonun yapısı indüktiftir ve içerik sistemi aritmetik üzerine kuruludur.

Eğer 15 ve 51'i alırsam… o zaman 51-15, 36 eder.

Eğer 16 ve 61'i alırsam… o zaman 45 eder.

Eğer 35 ve 53'ü alırsam… o zaman 53-35, 18 eder.

Sonuçlar hep 9'un katı oluyor.

Şekil 3.52. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon

*Ilaria bazı sayısal örnekler düşünmüştür. İlki aşağıdaki gibi modellenmektedir:*

$D_1$ : Problem metni → $C_1$ : 51-15=36, 15 ve 51 için

↑

Sayısal hesaplama kuralları

↑

Aritmetik alan

*Buna benzer başka argümanlar da yapılandırılmıştır. Sonunda Ilaria hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak şöyle yapılandırmıştır:*

$D_2$ : Önceki argümanlar → $C_2$ : Sonuçlar 9'un katı olur.

↑

Örnekler üzerine kurulu genelleme

*Şimdi Ilaria hipotezini doğrulamak zorundadır.*

Şekil 3.53. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi

Ilaria problem metnini cebirsel dile şöyle çevirmiştir:

> Bir sayıyı ab olarak yazabilirim ve rakamlarının yerlerini değiştirirsem ba olur. O zaman ab-ba, 9'un katı olur. Yani ab-ba=9k yazabilirim. Bu formülü hesaplamak zorundayım.

Şekil 3.54. Hipotezin cebirsel dile çevrilmesi

$D_3$ : Problem metni → $C_3$ : ab-ba=9k

↑

Cebirsel dönüşüm kuralları $R_1$, $R_2$, $R_3$

↑

C= (P, R, L, Σ)

Ilaria'nın kullandığı cebirsel dönüşümler şöyledir:

- $R_1$ $(Rule\ 1)$ : İki basamaklı bir sayı ab şeklinde yazılabilir.
- $R_2$ $(Rule\ 2)$ : Eğer ab iki basamaklı bir sayı ise rakamları yer değiştirdiğinde ba olur.
- $R_3$ $(Rule\ 3)$ : 9'un katı olan bir sayı 9k olarak yazılabilir.

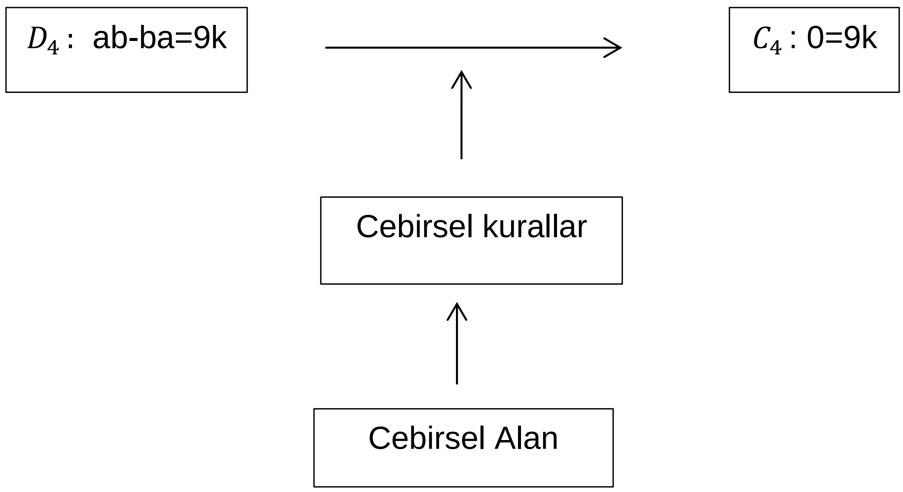
Şekil 3.55. Cebirsel dil analizi

Ilaria cebirsel içerik sistemini kullanarak problem metnini cebirsel dile çevirmiştir. $R_1$ $ve$ $R_2$ kuralları doğal dilde ifade edilmiştir ve aritmetik alan ile ilgilidir, fakat dönüştürme kuralı olan $R_3$ kuralı cebirsel alana aittir.

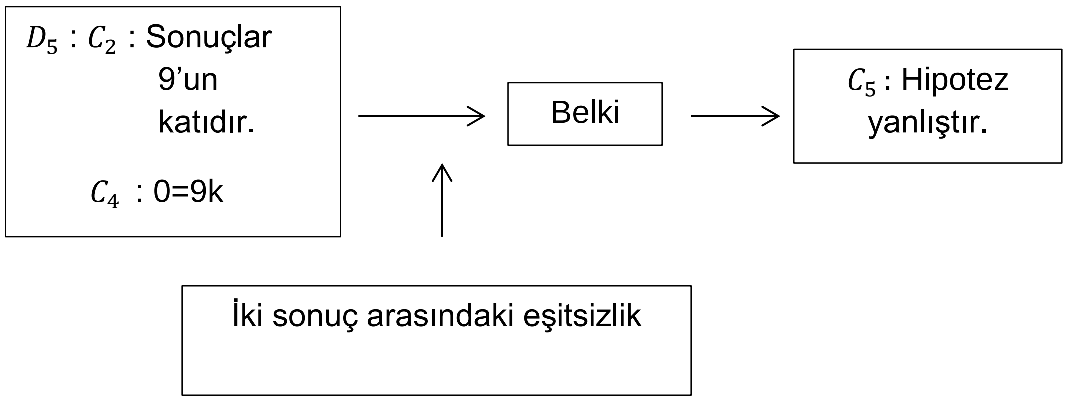
Ilaria oluşturduğu formülün kanıtını yapmayı denerken, düşüncelerini cebirsel alanda ifade eder. Burada içerik sistemi ve kontrol cebirsel alandadır. Fakat $ab - ba$'yı $a \times b - b \times a$ olarak düşünür. Bu sebeple Ilaria'nın çözüm sürecinde harflerin semantik (anlamsal) yönü tamamen kaybolmuştur. Bunun bir sonucu olarak Ilaria kanıtı yapamaz ve hipotezini reddeder. Çünkü sayısal örnekler seçerek ulaştığı sonucuna uyan bir kanıt yapmayı başaramaz.

> ab-ba=0 . O zaman 0=9k olur… Ama bu imkânsız… Fakat… Anlamıyorum… Belki de hipotezim yanlış.

Şekil 3.56. Yanlış kanıt




*Ilaria devam edememiştir. Cebirsel kuralları yanlış uyguladığını anlayamamıştır. Bunun sonucunda da hipotezinin yanlış olduğunu düşünmüştür.*




Şekil 3.57. Kanıtın analizi

Bu örnekte aritmetik dil ve cebirsel dil arasındaki boşluk öğrenci tarafından doldurulamamıştır. Kanıtlama sürecinde Ilaria sayısal örneklerini tekrar düşünmemiştir. Eğer düşünseydi ilk örneğindeki 51-15'in $5 \times 1 - 1 \times 5$'e eşit olmadığını görebilirdi. Aritmetikten cebire harflerin anlamı devam ettirilerek geçiş yapılamamıştır. Bu nedenle argümantasyon ve “yanlış kanıt” arasında içerik sistemi açısından bir süreklilik yoktur. Dahası eğer abdüktif argümantasyon yapılsaydı, abdüktif adımlar argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluğu kapatmak için Ilaria’ya kısmen de olsa yardımcı olabilirdi. Ancak Ilaria’nın indüktif argümantasyonunda hiç abdüktif adım kullanmadığı görülmektedir. Tüm bunların bir sonucu olarak Ilaria kanıt yapımında başarısız olmuştur.

**Problem 1’e ilişkin ikinci çözüm sürecinin analizi**

Bu bölümde verilerinin analizine yer verilen Francesca’nın ilk olarak yapılandırıcı argümantasyon yaptığı görülmektedir. Francesca’nın yapılandırıcı (constructive) argümantasyonu indüktif yapıdadır. Burada yapılandırıcı argümantasyon, Francesca’nın hipotezinin sayısal örnekler üzerinde genellenmesini sağlamaktadır.

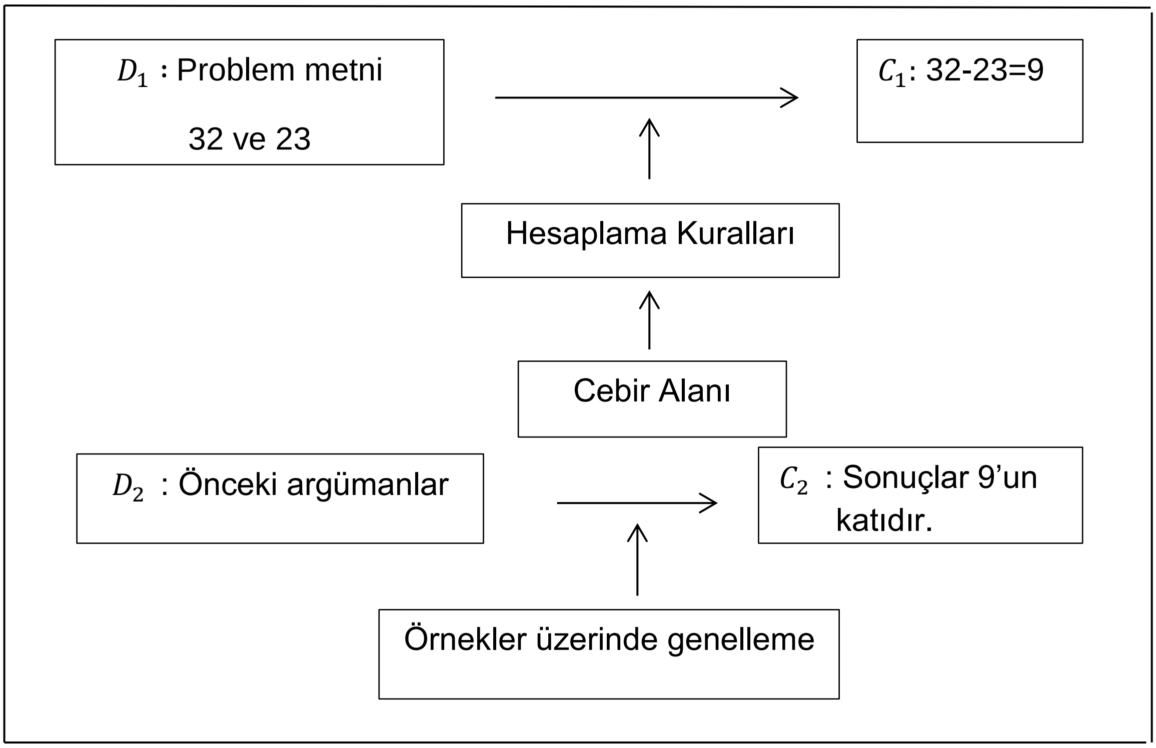
Eğer 32 ve 23’ü alırsam… o zaman 9 çıkıyor

63ve 36’yı alırsam… o zaman… 27

13 ve 31’i alırsam o zaman 31-13=18 oluyor.

Bunlar 9’un katları

Şekil 3.58. Yapılandırıcı argümantasyon




Şekil 3.59. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi

Francesca yapılandırıcı argümantasyonun ardından yapısal argümantasyon yapmıştır. Yapısal argümantasyonda ilk adım abdüktiftir ($D_3$'teki soru işareti). Francesca sayısal örnekler üzerinde düşünerek hipotezini doğrulamaya çalışır. Francesca'nın yapılandırıcı (constructive) argümantasyonu ile yapısal (structurant) argümantasyonu arasında süreklilik vardır.

Şimdi neden sonuçların 9'un katı çıktığını söylemeliyim… Bu biraz zor… 32-23 için sonuç 9, 9 kere bir şey… fakat neden?

$$32 - 23 = 3 \times 10 + 2 - 2 \times 10 - 3 = 3(10 - 1) - 2(10 - 1)$$

$$63 - 36 = 6 \times 10 + 3 - 3 \times 10 - 6 = 6 \times 9 - 3 \times 9$$

Tamam, sonuçlar 9'un katı çıkıyor.

Şekil 3.60. Yapısal argümantasyon

*İlk abdüktif adım şöyle ifade edilebilir:*

$D_3$ : ? $\longrightarrow$ $C_3 = C_2$ : sonuçlar 9'un katı

↑

?

*Francesca her bir örneği sonuçların neden 9'un katı olduğunu anlamaya çalışarak ele alır. İlk örnek için bir diğer abdüktif adım şöyledir:*

$D_4$ : ? $\longrightarrow$ $C_4$ : 32-23=9k

↑

?

*Francesca 32-23 ifadesini, sonucun 9'un katı olduğunu kanıtlamak için dönüştürür.*

$D_5$ : $C_4$ : 32-23=9k $\longrightarrow$ $C_5$ : $3 \times 9 - 2 \times 9$

↑

Dönüşüm kuralı $R_1$ ve hesaplama kuralları

↑

C = (P, R, L, Σ)

*Francesca düşüncesini $R_1$ dönüşüm kuralı ile şöyle dönüştürmüştür: "İki basamaklı bir sayı ilk basamağındaki rakamın 10 katı ve ikinci basamağındaki rakamın toplamı" şeklinde yazılabilir. Bu kural aritmetik alanda ifade edilebilir, fakat cebirsel alana da genellenebilir.*

Şekil 3.61. Yapısal argümantasyonun analizi

Yapısal (structurant) argümantasyonda iki abdüktif adım görülmektedir. Bu adımların yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ve cebirsel kanıt arasında bağlantı sağladığı görülmüştür. Yapısal (structurant) argümantasyon ve kanıt arasında içerik sistemi açısından süreklilik vardır. Çünkü yapısal argümantasyonda kullanılan düşünceler ve kurallar hem aritmetikte hem de cebirsel alanda doğrulanabilmektedir. Örneğin $R_1$ kuralı hem aritmetik hem de cebirsel alanda uygulanabilir bir kuraldır.

Yapısal anlamda ise argümantasyon ve kanıt arasında bir mesafe gözlenmektedir. Yapısal (structurant) argümantasyonda abdüktif adımlar olduğu görülmektedir. Kanıt ise dedüktif yapıdadır. Bir yapıdan diğerine geçerken zorluk yaşanmadığı görülmektedir. Tersine abdüktif adımlar argümantasyon sürecinde önemli bir rol oynamaktadır. Çünkü bu abdüktif adımlar sayesinde Francesca'nın muhakemesinde yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ve kanıt arasındaki bağlantı kopmamıştır.

Şimdi genel olarak kanıtlamalıyım

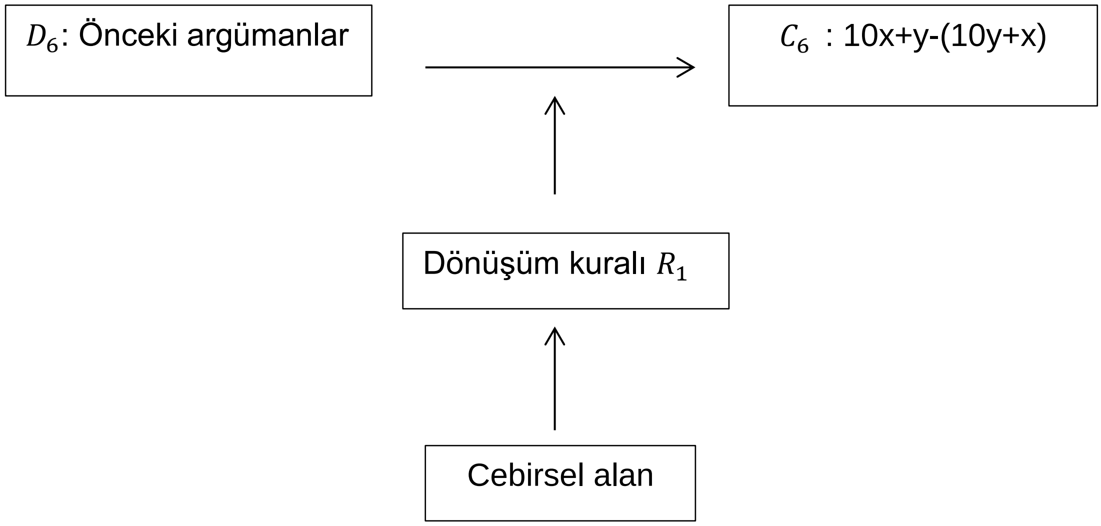
Örneklerle iki sayıyı şöyle yazabilirim: 10x+y ve 10y+x

Sonra…

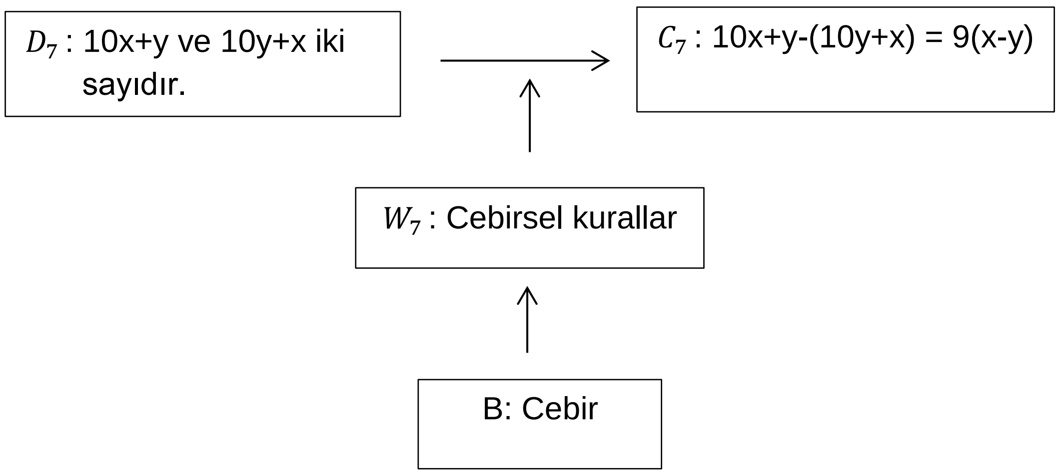
10x+y-(10y+x)= 10x+y-10y-x = 9x-9y = 9 (x-y)

Sonuçlar hep 9'un katıdır.

Şekil 3.62. Kanıt yapımı




Dönüşüm kuralının problem metnini düşünerek değil, önceki sayısal örneklerin düşünülmesi yoluyla uygulandığını görüyoruz.




Şekil 3.63. Kanıt yapımının analizi

Pedemonte [27], Problem 2'ye ilişkin iki çözüm sürecini daha önce yayınlamış olduğu, bizim de 3.14.'te yer vermiş olduğumuz çalışmasında analiz etmiş ve analiz sonuçlarını değerlendirmiştir. Söz konusu analizler aşağıda kısaca hatırlatılmakta ve ek olarak argümantasyon ve kanıt süreçlerinin Ck¢ Modeli'ne göre yapılmış içerik analizlerine yer verilmektedir.

**Örnek 1. Problem 2'ye ilişkin birinci çözüm süreci**

| |
|---|
| yapılandırıcı argümantasyon $\longrightarrow$ yapısal argümantasyon $\longrightarrow$ kanıt |

Bu çözüm sürecinde yapısal argümantasyonda abdüktif adımlar gözlenmiştir. Öğrenci doğru kanıt yapabilmiştir.

**Örnek 2. Problem 2'ye ilişkin ikinci çözüm süreci**

| |
|---|
| yapılandırıcı argümantasyon $\longrightarrow$ yapısal argümantasyon $\longrightarrow$ kanıt |

Bu çözüm sürecinde yapısal argümantasyonda abdüktif adımlar gözlenmemiştir. Öğrenci kanıtı yanlış yapmıştır.

Bu çözüm süreçlerinin ayrıntılı analizleri aşağıda verilmektedir.

**Problem 2'ye ilişkin birinci çözüm sürecinin analizi**

Manuela sayısal örnekler üzerinde bir genelleme ile hipotezini yapılandırır. Argümantasyonun yapısı indüktiftir. İçerik sistemi ise aritmetik üzerine temellidir.

| |
|---|
| Eğer p=11 ve q=13 ise o zaman… Sonuç 210 oluyor. |
| Eğer p=7 ve q=9 ise o zaman sonuç… 60 olur. |
| Sonuçlar çift sayı çıkıyor. |
| O zaman muhtemelen $(p-1)(q^2$ -1)/8 ifadesi bir çift sayıdır. |

Şekil 3.64. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon

$D_1$ : Önceki argümanlar → Muhtemelen → $C_1$ : $(p-1)(q^2$-1)/8 ifadesi bir çift sayıdır.

Örnekler üzerine temelli genelleme

Hipotez sayısal örnekler üzerine bir genelleme olarak yapılandırılmış bir gerçektir; şimdi öğrenci bu hipotezini doğrulamak zorundadır.

Şekil 3.65. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi

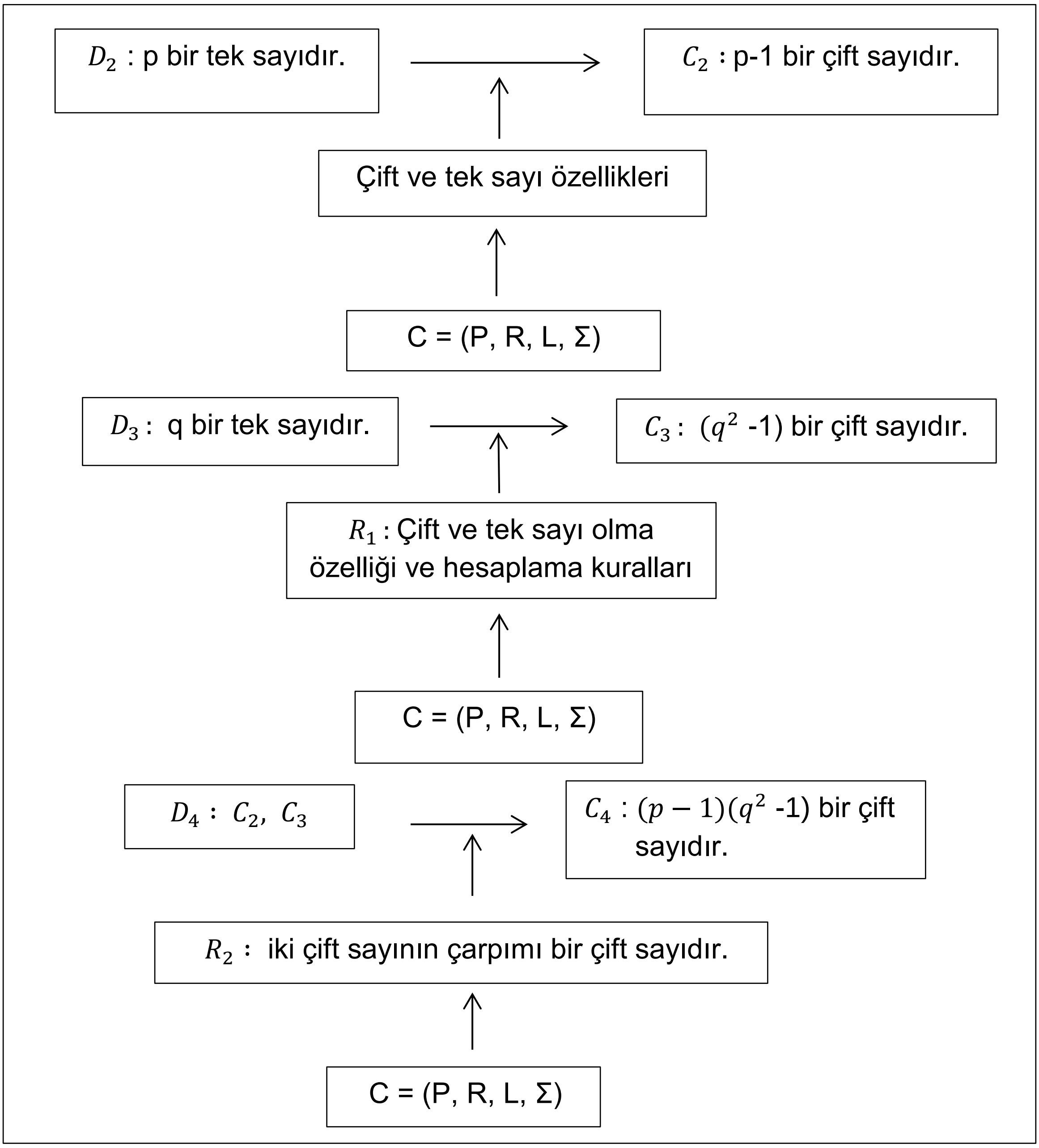
Manuela sonrasında hipotezini doğrulamak için yapısal argümantasyon üretmiştir. Çift ve tek sayıların özelliklerini düşünerek $(p-1)(q^2$ -1)/8 ifadesini analiz eder. Fakat durumu tam olarak anlamayı becerememiştir.

Eğer p bir tek sayı ise, p-1 çifttir.

Eğer q tek ise, $(q^2$ -1) de çift sayıdır.

O zaman bir çift sayı ile bir diğer çift sayının çarpımı yine bir çift sayıdır, öyleyse bu ifade bir çift sayıyı gösterir…

Şekil 3.66. Yapısal argümantasyon 1




Şekil 3.67. Yapısal argümantasyon 1'in analizi

Burada Manuela'nın düşüncesini hangi alanda harekete geçirdiğini söyleyemiyoruz, çünkü kontrol Σ açık biçimde belli değildir. Manuela belki de her iki alanda da (aritmetik ve cebir) kontrolü sağlayarak düşüncesini doğrulamaya çalışmaktadır. Manuela'nın harekete geçirdiği kavramın kontrolü Σ hem aritmetik hem de cebir alanında yapılabilmektedir.

İçerik sistemi doğal dil ve kısmen de sembolik dil ile oluşturulmuştur. Fakat bütün kuralların her iki alanda da (aritmetik ve cebir) doğrulanabiliyor olması önemlidir.

Şekil 3.68. Yapısal argümantasyon 1'in analizinin son kısmı

Manuela hipotezini doğrulamak için $C_4$ iddiasının yeterli olmadığını anlar. Hipotezini kurmak için bir başka eleman arar.

| |
|---|
| … Fakat burada 8 ile bölme var.<br><br>Bu ifadenin çift olduğunu söyleyebilmem için başka bir şeyler bulmam gerek. |

Şekil 3.69. Yapısal argümantasyon 2

$D_5 : C_4 \; ve \; ?$ ⟶ $C_5 : (p-1)(q^2$ -1)/8 bir çift sayıdır

↑

$R_1$ : Çift ve tek sayı özellikleri ve hesaplama kuralları

Bu abdüktif bir yapıdır.

*(argüman 5)*

Şekil 3.70. Yapısal argümantasyon 2'nin analizi

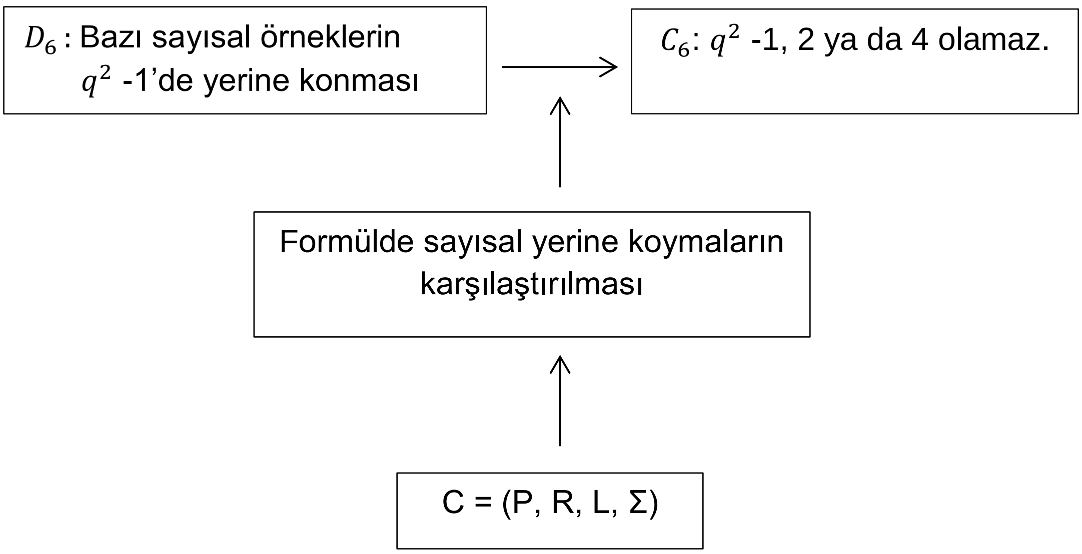
Yapısal argümantasyondaki son argüman *(argüman 5)* oldukça önemlidir. Çünkü bu son argüman Manuela'yı hipotezini doğrulamak için başka bir şeyler arama konusunda cesaretlendirir ($D_5$'teki soru işareti). Bunun üzerine Manuela $(q^2$ -1) ifadesini analiz eder. Bazı sayısal örnekler ile Manuela anlar ki, $(q^2$ -1) ifadesi 8'den az olamaz. $(q^2$ -1)'in 8 ile bölünebildiğini açık açık söylememektedir, ancak onun $(q^2$ -1)'in 8 ile bölünebildiğini düşündüğünü anlayabiliriz. Çünkü q için farklı değerler (1, 3, 5, 7, 9) vererek denemeler yapmıştır.

Yapısal (structurant) argümantasyonun hem aritmetik hem de cebirsel muhakeme ile karakterize edildiğini görmekteyiz. Manuela bu aşamada kanıtı yapabilmek için işine yarar elemanlar aramaktadır.

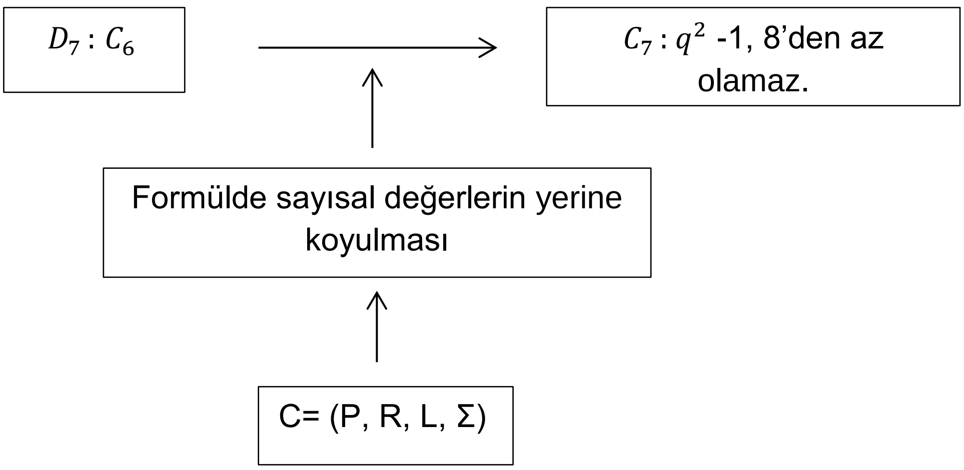
Fakat $q^2$ -1; 2'ye ya da 4'e eşit olamaz, çünkü q=1 için $q^2$ -1=0 ve q=3 için $q^2$ -1=8 olur.

Yani en küçük sayı 8; 8/8 = 1 eder; öyleyse ifade bir çift sayıdır.

Şekil 3.71. Yapısal argümantasyon 3




*Burada Manuela tarafından harekete geçirilen düşüncenin kontrolü Σ , muhtemelen aritmetik ve cebir alanında doğrulanmaktadır. Temsil sistemi L sayıların kullanımını sağlar, fakat daha ziyade cebirsel dile yöneliktir. Bu yapısal argümantasyon bir önceki yapılandırıcı argümantasyon ve kanıt arasında bağlantı kurar.*




Manuela $D_5$ 'i $C_7$ ile tamamlayabilir.

Şekil 3.72. Yapısal argümantasyon 3'ün analizi

$q = 2n + 1$ O halde $q^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n+1)$. Bu ifade en azından 4 ile bölünebilmektedir. Bölüm sonucu olarak $n(n+1)$ elde edilir. Bu bölüm ifadesi kesinlikle 2 ile bölünebilmektedir. Çünkü eğer n çift ise ifadenin 2 ile bölünebildiği açıktır. Eğer n tek ise bu durumda (n+1) çift olur ve bu durumda da ifadenin 2 ile bölünebildiği açıktır. O halde $4n(n+1)$ ifadesi en azından 8 ile bölünebilmektedir. Buradan $q^2 - 1$ ifadesinin 8'in katı olduğunu anlayabiliriz. O halde p ve q tek ise $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi çifttir.

Şekil 3.73. Kanıt yapımı

$D_8$ : q=2n+1 → $C_8$ : $(q^2 - 1) = 4n(n+1)$

↑

Yerine koyma kuralı

↑

Cebirsel alan

Manuela $(q^2 - 1)$'in en azından 8 olduğunu kanıtlamak için 4n(n+1) formülünü analiz etmiştir.

$D_9$ : n bir çift sayıdır. → $C_9$ : 4n(n+1) en azından 8 ile bölünebilmektedir.

↑

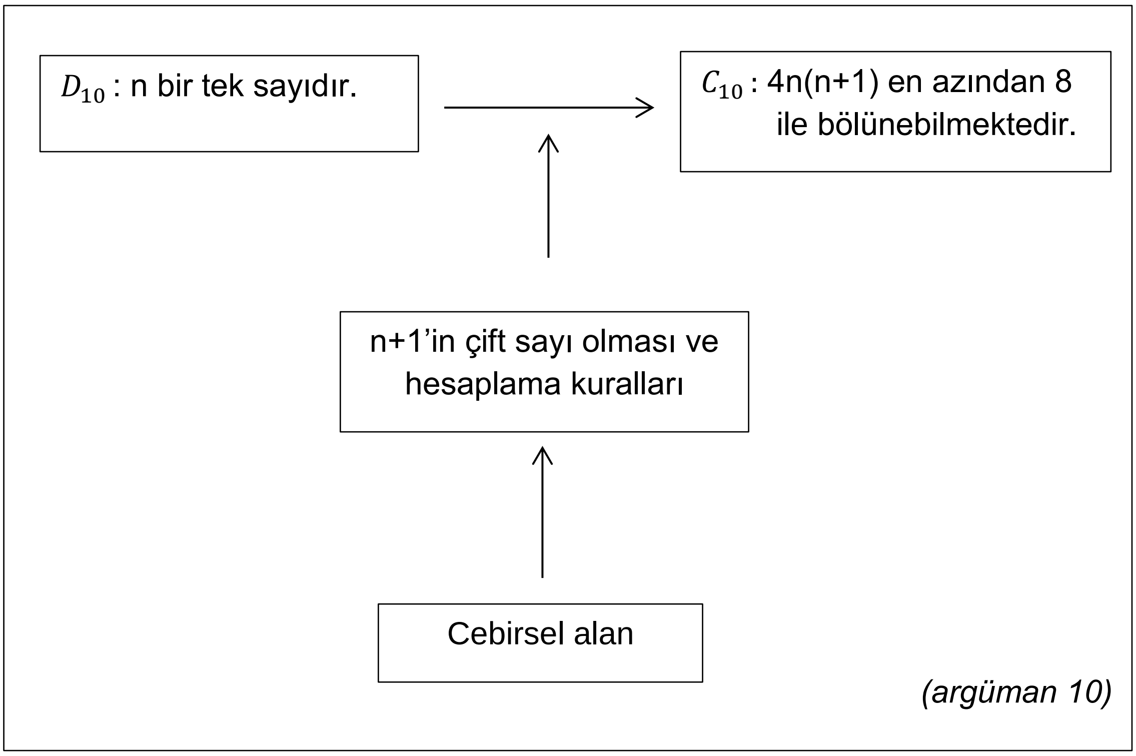
4n, 8 ile bölünebilmektedir ( $n = 2t$ $için$ $4 \times 2t = 8t$)

↑

Cebirsel alan

*(argüman 9)*

Şekil 3.74. Kanıtın analizi




Şekil 3.75. Kanıtın analizinin son kısmı

*Argüman 9* ve *argüman 10* 4n(n+1)'in her zaman en azından 8 ile bölünebildiğinin anlaşılmasını sağlar. Sonrasında *argüman 5* dedüktif bir adıma dönüştürülür ve sonuç buradan hemen çıkar. İçerik sisteminin yapılandırıcı (constructive) argümantasyon aşamasında aritmetik, kanıtta ise cebir üzerine kurulu olduğu görülmektedir. Yapısal (structurant) argümantasyonda düşüncenin kontrolü aritmetik alandadır, ancak yapılandırıcı argümantasyon ile kanıt arasında içerik sistemlerinde sürekliliği sağlayan cebirsel alandır. Dahası yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ile dedüktif kanıt arasında bağlantıyı sağlayanın büyük olasılıkla yapısal (structurant) argümantasyondaki abdüktif adımlar olduğu düşünülmektedir.

**Problem 2'ye ilişkin ikinci çözüm sürecinin analizi**

Bu bölümde Elio tarafından üretilen cevaba yer verilmektedir. Elio farklı stratejiler denemiştir. Başlangıçta bir önceki örnektekine benzer bir muhakeme üretmiştir. Böylece $(p-1)(q^2-1)$ ifadesinin bir çift sayı olduğunu anlamıştır. Fakat bu gerçeğin yeterli olmadığını söylemiştir. Çünkü bir çift sayının bir başka çift sayıya bölümünden elde edilen sonucun her zaman çift sayı olacağını söyleyemeyiz. Elio p ve q harflerine bazı sayı değerleri atamıştır ve bu genelleme yoluyla bir hipotez oluşturmuştur.

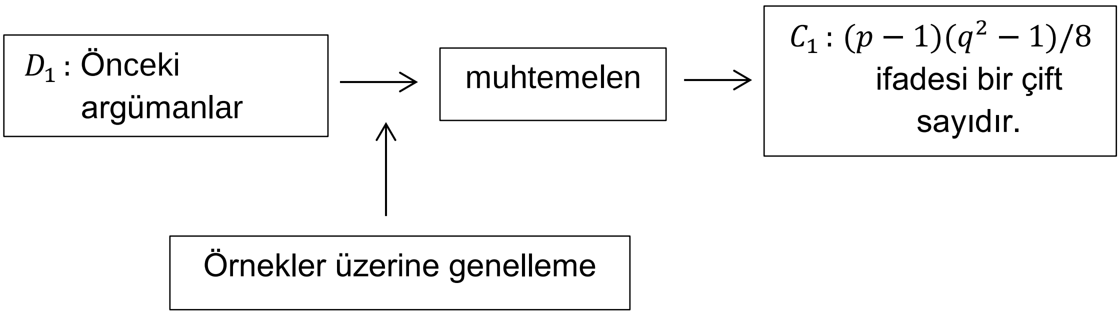
Eğer p=1 ve q=3 ise 0×8/8=0

p=5 ve q=7 ise 4×48/8=24

p=11 ve q=13 ise 10×168/8=210

Öyle görünüyor ki $(p-1)(q^2-1)/8$ ifadesi çifttir.

Şekil 3.76. Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon




Hipotez sayısal örnekler üzerine temellendirilmiş genelleme olarak yapılandırılmıştır.

Şekil 3.77. Yapılandırıcı argümantasyonun analizi

Bir önceki örnekte olduğu gibi bu örnekte de hipotez aritmetik örnekler üzerinde temellenmektedir. Bu örnekler Elio'nun $(q^2-1)$ ifadesinin 8 ile bölünebildiğini görmesini sağlamıştır.

Elio hipotezini doğrulamak için yapılandırıcı argümantasyonun ardından yapısal bir argümantasyon üretmiştir. Fakat bu doğrulama hala aritmetik örnekler üzerinde temellidir. Bu nedenle harekete geçirilen düşüncenin kontrolü aritmetik alandadır. Cebirsel alana doğru bir değişim, gelişim ya da yayılma görülmemektedir. Dahası argümantasyon ve kanıtı birbirine bağlayan abdüktif adımlar da görülmemektedir. Sonuç olarak Elio kanıtı yapmaya çalışır, ancak bir sonuç alamaz. Argümantasyon aşaması ile olan bağlantıyı kaybeder; cebirsel kanıtın dedüktif yapısı içinde bir sonuca ulaşmaksızın sürüklenir.

Ve… Bekle… Eğer $q$' nun yerine bir tek sayı koyarsak; $q^2 - 1$ ifadesinin 8 ile bölünebildiğini görürüz.

O halde $(p-1)(q^2-1)/8$ çifttir çünkü (p-1) çifttir ve $(q^2 - 1)$ ifadesi 8 ile bölünebilmektedir.

Şekil 3.78. Yapısal argümantasyon

$D_2$ : Sayısal örnekler temelli iddialar

$C_2$ : $q^2 - 1$ ifadesi her zaman 8 ile bölünmektedir.

Sayılar temelli genelleme

C= (P, R, L, Σ)

Düşünce kontrolü Σ, hipotezi kurmak için daha önceden kullanılan sayısal örnekler üzerinde temellidir.

Şekil 3.79. Yapısal argümantasyonun analizi

Elio $q^2 - 1$ ifadesinin 8 ile bölünebildiğini anlar, buradan hipotezini doğrular.

$D_3$ : p-1 çifttir ve $C_2$

$C_3$ : $C_1$

$R_1$ : Çift ve tek sayı özellikleri ve hesaplama kuralları

C= (P, R, L, Σ)

Düşünce kontrolü Σ bir kez daha sayısal örnekler üzerinde temellidir. Kontrol aritmetik alanda doğrulanmaktadır.

Şekil 3.80. Yapısal argümantasyon analizinin son kısmı p ve q tek ise p= 2k+1 ve q=2h+1 olarak yazabilirim. Bu durumda:

$(2k + 1 - 1)[(2h + 1)^2 - 1]/8 = 2k\ [(4h^2 + 1 + 4h) - 1]/8 = 2k\ (4h^2 + 4h)/8$

Elde ettiğim sonuç 2'nin herhangi bir katı gibi görünmüyor. Anlayamıyorum…

Sadeleştirebilirim:

$$k(4h^2 + 4h)/4$$

2 parantezine alırsam;

$$\frac{2k(2h^2 + 2h)}{4}$$

Hayır… eğer h parantezine alırsam;

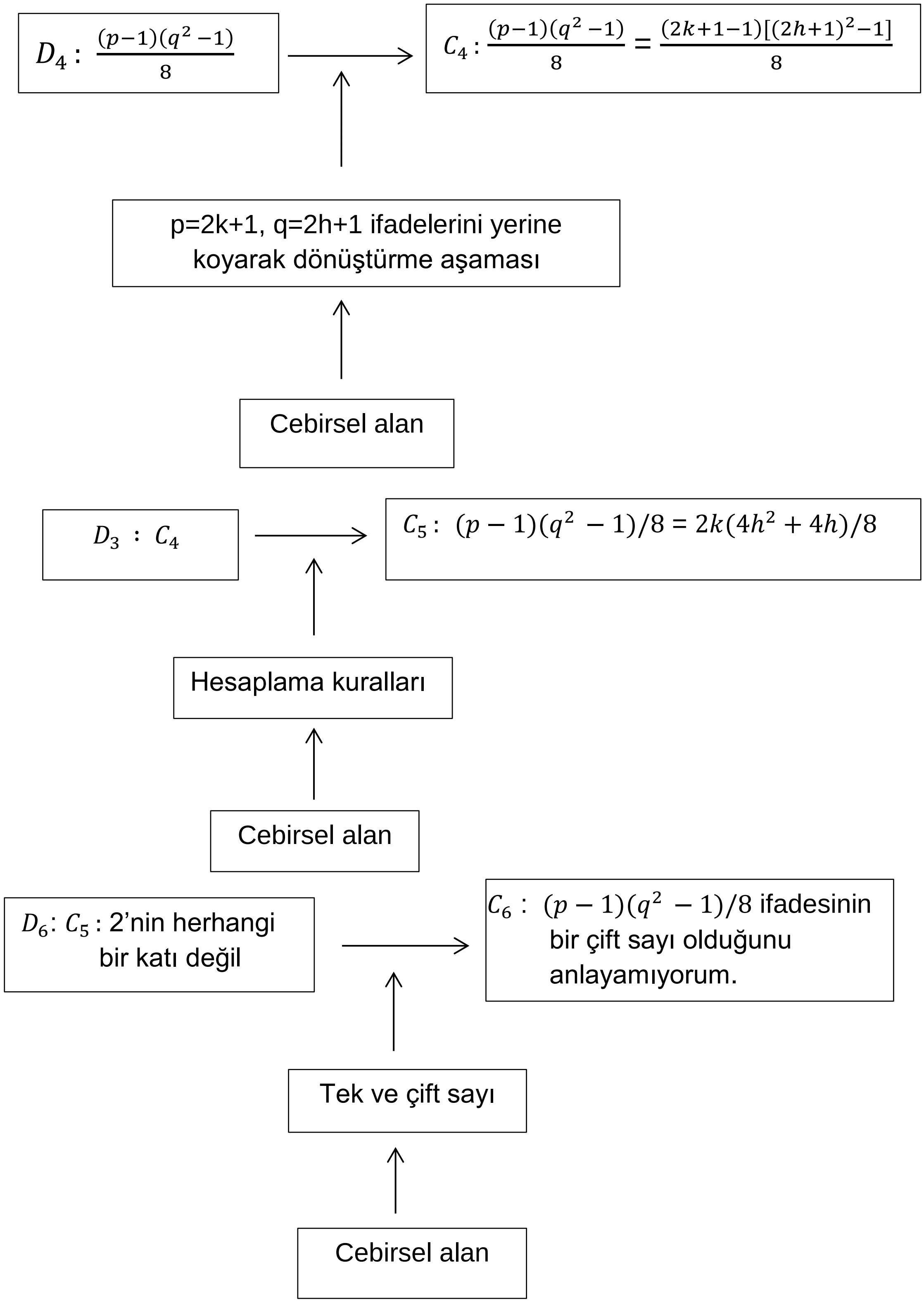
$$2kh\ (4h + 4)/8$$

Hayır… 4h parantezine alırsam;

$$2k4h\ (h + 1)/8$$

Hayır, ben bunu cebirle kanıtlayamıyorum. Fakat eminim ki ifade bir çift sayıyı temsil ediyor.

Şekil 3.81. Kanıta teşebbüs




Kanıtta Elio başka dönüşümler de yapar, fakat başarılı olamaz. Diğer argümanları da bu argümanına benzerdir. Her birinde de aynı sonuca ulaşmıştır. Elio kanıtı yapamamıştır.

Şekil 3.82. Kanıtın analizi

Elio problemi çözmüştür, fakat kanıtı yapamamıştır. Dedüktif zincirin sertliği Elio'nun argümantasyon ve kanıt arasında içerik sistemi açısından süreklilik kurabilmesine karşı engel oluşturmaktadır. Yapısal argümantasyonda Elio'nun düşünceleri aritmetik alanının kontrolü altındadır, kanıtta ise cebirsel kuralların kullanımına geçildiği görülmektedir.

Elio kanıtında "2'nin katı" formunda bir ifade bulabilmek için formülünü değiştirmiştir. Fakat bunu yaparken argümantasyonun içerik sistemi ile bağlantıyı kaybetmiştir. Yapısal argümantasyon aşaması aritmetik ve cebir alanları arasında bir bağlantı kuramamış; sayısal örnekler aşamasının ötesine geçememiştir. Dahası yapısal argümantasyon aşamasında, Elio'ya hipotezini doğrulama ve kanıtını yapma konusunda eksik elemanları bulmasında yardım edecek belirgin abdüktif adımlar bulunmamaktadır.

### 3.15.7. Sonuçlar

Problem 1'in ikinci örneğinde ve Problem 2'nin ilk örneğinde öğrenciler doğru bir kanıt üretmişlerdir. Her iki durumda da ortak olan iki noktanın önemle altı çizilmektedir:

1. Yapısal argümantasyonda kullanılan düşünceler hem aritmetikte hem de cebirsel alanda doğrulanabilmektedir.
2. Yapısal argümantasyon abdüktif adımlar içermektedir. Bu abdüktif adımlar büyük olasılıkla argümantasyondaki aritmetik alan ve kanıttaki cebirsel alan arasındaki boşluğu azaltmaktadır.

Problem 1'in ilk örneğinde ve problem 2'nin ikinci örneğinde öğrenciler bunları yapamamışlardır. Her iki durumda da argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluğu azaltacak olan abdüktif adımlara sahip yapısal argümantasyona rastlanmamıştır. Pedemonte [28], bu sebeple bu öğrencilerin argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluğu dolduramadıklarını ve kanıtı yapamadıklarını düşünmektedir. Buradan yapısal argümantasyonun, yapılandırıcı argümantasyon ve cebirsel kanıt arasındaki sürekliliği sağlayarak önemli bir rol oynadığı sonucuna ulaşmıştır.

Bu açıdan geometri alanındaki kanıt ile cebir alanındaki kanıt farklılık göstermektedir. Geometri alanında yapılan kanıtların tersine argümantasyon ve cebirsel kanıt arasındaki yapısal mesafe, öğrencilerin karşısına bir engel olarak çıkmamaktadır. Hatta yapısal argümantasyondaki abdüktif adımlar, öğrencilerin cebirsel kanıtın sert dedüktif yapısının üstesinden gelmelerini kolaylaştırmaktadır. Çünkü yapısal argümantasyondaki abdüktif adımlar, öğrencinin argümantasyon ve kanıt arasında içerik sistemi açısından süreklilik kurmasını sağlamaktadır. Bu süreklilik de öğrencilere cebirsel ifadelerdeki harflerin anlamlarını sürdürebilmeleri için yardımcı olmaktadır [19; 45; 48].

Kanıtı yapamayan bazı öğrenciler fikirlerini cebirsel alanda genelleştiremedikleri için zorlanmışlardır. Bazı öğrencilerin ise fikirlerini cebirsel alanda genelleştirdiği, ancak kurdukları yapısal argümantasyonda kontrol aritmetik alanda olduğu için kanıtı yapamadıkları görülmüştür. Bu nedenle Pedemonte [28], düşünceleri hem aritmetik hem de cebirsel alanda geçerli olan öğrencilerin kanıt yapmakta başarılı olduklarını belirtmektedir. Yani argümantasyondaki aritmetik alanın, kanıtta cebirsel alana genelleştirilmesi ile kanıt başarıyla yapılabilmektedir. Bu ise yapısal argümantasyonda kullanılan düşüncelerin hem aritmetikte hem de cebirsel alanda doğrulanabilir olmasına bağlıdır.

### 3.16. Okulda Kanıta Yaklaşım: Yol Gösterici Hipotez Üretimi ve Kanıt Yapma Sürecinin Anlatımı

Douek [32] bu çalışmasında, kanıt öğretiminin temelinin uygun hipotez üretme ve kanıt yapma sürecini anlatma aktivitelerine dayandığını savunmaktadır. Bu türden aktivitelerin okulun erken dönemlerinde başlaması gerektiğini belirtmektedir. Bu düşüncesine yönelik olarak çalışmasında bir ifade üzerinde hipotez oluşturmaya ve kanıt yapma sürecini anlatmaya imkan veren bir aktivite örneği vermekte ve bu aktiviteyi aşamalar halinde yapılandırmaktadır.

Çalışma kapsamında kanıtlama bilişsel bir aktivite olarak düşünülmüş ve bu süreçte muhakemenin dört şekilde yapılabileceği belirtilmiştir:

1. Deneye dayalı/sezgisel keşif: Bu tarzda bir muhakeme ile birisi bir ifadeyi yorumlamaya çalıştığında ya da bir ifade üretmeye çalıştığında karşılaşılır. Erken yaşlarda yapılabilen bir aktivitedir.

2. Muhakemenin düzenlenmesi: İfadeleri bir arada tutarak bir bütün halinde muhakeme yapma söz konusudur. Kasıtlı ve planlı hareketler bu tarzın en belirgin özelliğidir. Abdüksiyon bu tipte bir muhakemenin iyi bir örneğidir. Erken yaşlarda yapılabilen bir aktivitedir.

3. Matematikçilerin normlarına uygun dedüktif bir metin üretimi**:** Kanıt ile ilgili fikirler ortaya çıktıktan sonra, bunlar dedüktif bir muhakeme içinde organize edilmek zorundadırlar.
4. Metnin formel yapısı: Muhakemenin formel bir kökeninin olmasıdır.

Bu muhakeme tipleri, bir kanıt üretiminin ardışık aşamaları olarak da düşünülebilir. Bu aşamaların sırası değişebilir, iki ya da daha fazlası bir aşamanın içine birlikte girebilirler.

Muhakemenin farklı tipleri, yani kanıt üretiminin aşamaları farklı geçerlilik kurallarına sahiptirler. Bir tip için gereken ya da sağlanan bir şey, bir diğeri için geçerli olmayabilir. Örneğin, abdüktif muhakeme verilen muhakeme tiplerinden ikincisi için bir örnektir. Fakat üçüncü ve dördüncü tipe uymamaktadır. Üçüncü ve dördüncü tip için öğrenciler dedüktif muhakeme yapmak zorunda kalırlar, bu da pek kolay değildir.

Araştırmada öğrencilerin kanıtlama sürecinde bir ifade oluşturmaları ve bu ifadenin geçerliliğini ortaya koyan sebepleri bulmak için keşif yapmaları, ifadeler ya da argümanlar arasındaki bağlantıları kurmak için sebeplerin (ya da argümanların) organizasyonunu yapmaları, bunu yaparken de yukarıda verilen muhakeme adımlarını kullanmaları beklenmektedir.

Çalışmada geliştirilen aktivite 7. ve 8. sınıf seviyesindeki öğrencilere uygun olarak tasarlanmıştır. Bu seviyedeki öğrenciler aritmetik ve geometri konularına ilişkin ifadeler üzerinde hipotez üretebilmekte ve öğretmen rehberliğinde genel savunmalar ve gerekçeler oluşturabilmektedirler. Öğrencilerin hipotezlerini ve savunmalarını öğretmen rehberliğinde sınıf içi tartışmalarda birbirleri ile paylaşmaları onların, hipotez üretmenin ve kanıt yapmanın gerekliliğine inanmalarını sağlamaktadır [60]. Bu sayede öğrenciler hipotez oluşturmanın ve kanıt yapmanın faydası konusunda bilinçlenmektedirler.

Öğrencilerin aktivite boyunca geçirecekleri süreçler şöyle verilmektedir:

1. Tartışma

Sınıf tartışmaları eğer iyi yönlendirilirse, düşünceleri ifade etmeye ve açıklamaya yönelik çabayı canlandırır. Bu çabalar mantıksal kurallar konusunda bilinçli olmayı sağlar.

2. Kanıt Yapma Sürecini Anlatma

Öğrenciler bir ifadeyi geçerli kılan bir muhakeme içindeki fikirlerinden ve hesaplamalarından bireysel bir hikâye yazabilirler. Burada adımları, sebepleri ile birbirine bağlayan bir hikâyeden söz edilmektedir (Bonaffe, 1993, akt. [32]). Buradaki amaç öğrencilerin, argümantasyonun kanıt üretmedeki rolünün farkına varmalarını sağlamaktır. Kanıt öğretiminin en azından ilk aşamalarında, bu bireysel hikâye yapımları uygun görevler ile hazırlanmalıdırlar.

Bu iki süreç birlikte planlanmalı ve birbirlerini bütünleyen durumların dinamik bir sistemi olarak düzenlenmelidirler. Bireysel hikâye yapımı, öğrencilerin bir kanıtın mantığını bireysel olarak aktif bir şekilde yeniden yapılandırmalarını sağlar. Hem tartışma hem de hikâye oluşturma aşamasında diğer olası durumlara ve düzenlemelere açıklık vardır.

Öğrencilerin her iki aktivitede de adım adım çalışması sağlanmalıdır. Öğrencilerden yapmaları beklenen temel görevler şunlardır:

1. Keşif ve hipotez oluşturma süreçlerini muhakemenin 1. tipine (deneye dayalı/sezgisel keşif) göre birleştirmek öğrencilerden beklenen ilk görevdir.
2. Hipotezleri kanıtlamak ikinci görevdir. Bu aşamada iki durum oluşabilmektedir. Öğrenci ya argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel bütünlük kurar ve bu sayede kanıt üretebilir ya da argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel bütünlük kuramaz ve öğretmen bu öğrencilerin kanıt yapabilmesi için onları yönlendirir. Bilişsel bütünlüğün işlemediği durumlarda, öğrenciler kanıtı iyi anlayamayacaklardır. Ayrıca pek bir şey de öğrenemeyeceklerdir.
3. Toplu tartışmaya katılma öğrencilerden beklenen bir diğer görevdir. Bu adımda öğrencilerden problem durumuna ilişkin ürettikleri metinleri tartışarak, toplu tartışmanın dinamik sürecini oluşturmaları beklenir. Douek [32]'e göre, bahsi geçen dinamik süreç oldukça önemlidir.

Düzenlenen öğretme deneyinde öğrencilere Pisagor Teoremi'ne ilişkin bir problem durumu sorulmuştur. Pisagor Teoremi, iki nedenden dolayı seçilmiştir: Okul matematiğinde bu teorem önemli ve ilk karşılaşılan teoremlerden biridir ve bu teorem için hipotez oluşturma zor değilken, kanıt yapımı güçlü bir öğretmen desteği gerektirmektedir.

### 3.16.1. İlk Bölüm: Keşif, Hipotezi İfade Etme ve Ondan Anlam Çıkarma

Bu bölüm Görev 1, Görev 2 ve Görev 3'ten oluşmaktadır. Bu görevler aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

**Görev 1:** *"Bir üçgenin a, b ve c kenarları düşünüldüğünde, a+b her zaman c'den küçüktür"* ifadesini düşünün. Bu doğru mudur? Her zaman mı? Neden? Bunu nasıl kontrol ettiğinizi ve neden doğru olduğunu ya da olmadığını düşündüğünüzü ya da neden şüphelendiğinizi aktarın.

Bu bölümde öğretmen öğrencilere bir üçgen modeli vermemiştir. Öğrencilerin üçgen çizmeleri istenmiş, çizmedikleri durumda yaptıklarını kontrol etmeleri için üçgen çizmeye yönlendirilmişlerdir. Bu görev, öğrencinin yaptıklarını test ederek bir şeyler keşfedebilmelerini amaçlar ve (özellikle tartışmada) öğrencileri aktivitenin mantığını ifade etmeye yönlendirir.

**Görev 2 (bireysel):** Tek başına uzunlukları düşünmek yerine, uzunlukların karelerini düşünürsek, durum farklı olur. Bir üçgenin kenar uzunluklarının kareleri arasında bir ilişki olup olmadığına bakın. Geçerli bir ifade ("hipotez") ürettiğinizi düşündüğünüzde, onu diğer öğrencilere açıklamak için kelimelere dökün.

Çalışma kâğıdında dik açılı, dar açılı ve geniş açılı üçgenler sunulmuştur. Öğretmenin rehberliğinde yapılan toplu tartışmadan sonra üretilen hipotezler ve hipotezlerin üretilme yolları paylaşılmış ve tartışılmıştır. Bir hipotez tamamlanmamış ya da hatalı olsa da, teoremin önemli elemanlarını ortaya koymak açısından yararlı olabileceği için göz önünde bulundurulmuştur.

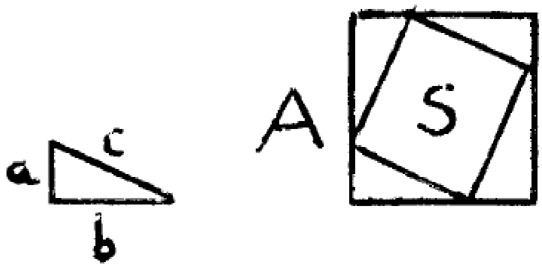
**Görev 3 (bireysel):** Sizin için uygun olan hipotezi yazın. Hipotezinizi açıklayın ve örneklerle gösterin.

İlk kısım 1. ve 2. muhakeme tipleri için uygundur. Tip 1 (deneye dayalı/sezgisel keşif)'e yönelik olarak daha ziyade keşfetme (çizim, ölçme, hesaplama, modelleme yaparken ve cebirsel ifadeler üretirken indüksiyon, prosedürleri tekrarlama ve veriyi modifiye etme); tip 2 (muhakemenin düzenlenmesi)'ye yönelik olarak da toplanan verilerin kullanılması, bazı kurallar bulmak için bu verilerin organize edilmesi, sonuçların genel olarak ifade edilmesi (günlük dil kabul edilebilir), ifadelerin tartışılması ve doğrulanması, bir amaca yönelik olarak keşfin adımlarının organize edilmesi planlanmaktadır.

### 3.16.2. İkinci Bölüm: Muhakeme Adımlarını Argümantasyon Sürecinde Organize Etmeyi Öğrenme/Öğretme

İkinci bölüm Görev 4'ten oluşmaktadır. Bu görevde öğrencilerin muhakeme adımlarını argümantasyon sürecinde organize etmesi planlanmaktadır.

**Görev 4 (bireysel):** Burada hipotezinizi oluşturduğunuz teoremin kanıtı üzerinde çalışalım. a, b ve c kenarlı bir dik üçgen düşünün. Bu dik üçgeni, A karesini yapmak için kullanacağız. Onun merkezindeki S karesinin alanı $c^2$ olur.




Şekil 3.83. Öğrencilere verilen şekil

1. Sadece dik açılı üçgeni kullanarak A'nın nasıl elde edileceğini tanımlayabilir misiniz? S'nin neden alanı $c^2$ olan bir kare olduğunu açıklayınız.
2. A'nın alanını iki şekilde yazmayı deneyiniz (4 özdeş dik açılı üçgeni farklı biçimlerde düzenlemeniz gerekebilir). İki yol bulun ve bu yolları açıklayın.
3. Bu bize hipotezimizi geçerli hale getirmek için nasıl yardımcı olabilir?

Görev 4 kanıtı hikâyeleştirmeye yönelik bir yaklaşım ile organize edilmiştir. Alanların eşitliğini bulmak için cebirsel muhakeme ile geometrik muhakemenin harmanlanması beklenmektedir.

Öğrencilerin bireysel çalışmasından sonra, öğretmen argümantasyon adımlarını kanıtlamayı ve hesaplamaları yapmayı sağlayan sınıf içi toplu bir tartışmayı başlatır ve yönetir. Öğretmen, bu aşamada faydalı etkileşimler kurulması için öğrencilerin ürünlerinden bazılarını seçer.

### 3.16.3. Üçüncü Bölüm: Kanıt Yapma Sürecini Anlatma

**Görev 5 (bireysel):** Hipotezinizi doğrulamak için muhakemenizin adımlarını nasıl organize ettiğinizi yazınız. Bu adımların neden önemli olduğunu belirtiniz.

Bu görev bir önceki bölümde üretici olamayan öğrenciler için oldukça önemlidir. Onların (hem de diğerlerinin) kanıtın mantığını kavramalarını ve yeniden yapılandırmalarını sağlar.

Öğrencilerden üretmeleri beklenen argüman şöyledir:

> *İlk olarak A'nın alanını hesapladık, sonra alanı farklı yollarla hesapladık (ya da üçgenleri farklı farklı yerleştirdik), böylece alanın farklı cebirsel ifadelerini bulduk. Düşündük ki, $a^2, b^2$ $ve$ $c^2$'nin aralarında her zaman bir ilişki olacak. Cebirsel eşitliği yazıp; eşitliğin dönüşümlerinden sonra ilişkiyi bulabiliriz.*

Öğrencilerin asıl amaçlarının cebirsel eşitliği kurmak olduğunu, fakat geometrik düşünceler ile işe başlamak zorunda olduklarını anlamaları önemlidir.

Douek [32]'e göre, öğretmenler sınıf içinde bu türden aktiviteleri uygulama konusunda sıkıntı yaşamakta ve bu aktiviteler asıl amacına ulaşamamaktadırlar. Bu durum *"hipotez üretme"* sürecinin okullarda verilen didaktik öğretim tarzına pek uygun olmamasından kaynaklanmaktadır. Okullarda ifadeler genellikle öğretmenler tarafından sunulmakta ve açıklanmakta, öğrenciler öğretmenlerinin anlattıklarını tekrar ederek ifadeleri ve açıklamalarını öğrenmektedirler.

Kanıt öğretimi ve öğrenimi için de süreç benzer şekilde işlemektedir. Geleneksel öğretme tarzında kanıt öğretimi öğrencilerin kanıt yapmayı öğrenmesi ve bireysel olarak öğretmeninden bağımsız biçimde kanıt üretebilmesi açısından başarısız görülmektedir. Bu tip bir öğretme sürecinde kanıtlar direk olarak öğrenciye sunulmakta, öğrenci kanıt yapmak durumunda bırakılmamakta; öğrenciye bu fırsat verilmemektedir.

Bir hipotez üretilmesini gerektiren açık uçlu problem çözümü ile kanıt yapmayı öğretmenin çok daha etkili olduğu düşünülmektedir. Çünkü bu yolla öğrenci kanıt yapmadan hemen önce argümantasyon süreci geçirmekte, argümantasyon süreci de kanıt oluşturma sürecine katkıda bulunmakta ve yardımcı olmaktadır (Arsac, Germain & Mante, 1991, akt. [32]). Douek [32] çalışmasında geçen, öğrencilerin hipotez oluşturmalarını destekleyen türden aktivitelerin öğretmenler tarafından sınıf içinde uygulanması gerektiğini savunmaktadır. Bu aktivitelerin sınıf içinde amacına uygun biçimde yapılandırılmasının, aktivitelerin amacına uygun biçimde işlemesi açısından önemli olduğunu vurgulamaktadır.

### 3.17. Argümantasyon ve Kanıt: Toulmin ve Duval Modelleri Hakkında Bir Tartışma

Barrier, Mathe ve Durand-Guerrier [57], bu çalışmalarında argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki "boşluk" fikrini tartışmaktadırlar. Argümantasyon ve kanıtın çok farklı bilişsel süreçler olduğu ve bunun bir sonucu olarak bu iki süreç arasında bilişsel bir boşluk olduğu Duval (1992, akt. [57])'in şu sözleri ile belirtilmektedir:

> "Argümantasyondan kanıta çok fazla çaba harcamadan ya da yanılgılara düşmeden geçmek mümkün müdür, evet ya da hayır?
>
> […]
>
> Eğer hayırsa, argümantasyon ile kanıt aşamasındaki dedüktif muhakeme arasında bilişsel anlamda boşluk olduğunu kabul etmeliyiz. Argümantasyon kullanımı, yanlış anlamaları beraberinde getirir ve kanıt yapımında engelleri arttırır. Çünkü günlük dille ifade etmek gerekirse argümantasyonun tutarsız süreci, geçerli bir muhakeme sürecinin oluşmasını engeller."

Duval'in bu sözlerinden argümantasyon ve kanıt süreçlerinin birbirlerinden oldukça farklı süreçler olduğunu anlamaktayız. Argümantasyon süreci öğrencilerin kanıtı yapılacak ifadeye ilişkin hipotez ürettikleri süreç olması dolayısıyla kanıt süreci için büyük önem taşır. Ancak doğaları birbirlerinden oldukça farklı olan bu iki süreç arasındaki bilişsel boşluk, öğrenciler için büyük bir engeldir. Argümantasyon sürecinin günlük, tutarsız ve sezgisel doğasından çıkıp, kanıtın kesin, tutarlı ve aksiyomatik doğasına girmeyi başarabilen öğrenciler, kanıtı başarı ile tamamlayabilmektedirler. Tersine argümantasyon sürecine kendisini kaptıran ve bu sürecin doğasından çıkamayan öğrenciler ise kanıt sürecine geçemeyecek ve argümantasyon süreci sonunda kendisini kanıt yapmış gibi hissedeceklerdir. Oysaki ortaya koydukları ürünler kanıttan oldukça uzak olup, yalnızca bir varsayım; bir hipotez niteliğindedirler.

Bu noktada araştırmacılar kanıt sürecine yardımcı olduğu düşünülen ancak bir taraftan da doğası gereği kanıt sürecine engel oluşturduğu belirtilen argümantasyon süreci ile kanıt süreci arasındaki bu bilişsel boşluğun doldurulması adına araştırmalar yapmışlardır. Bu çalışmada argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluk fikrine ilişkin şöyle bir örnek durum aktarılmaktadır.

**Örnek.**

Bu örnek Barrier (2008, akt. [57])'in bir çalışmasından alınmıştır. Bu çalışmada üç öğrenciden oluşan bir gruptan şu ifadeyi kanıtlamaları istenmiştir:

$$\forall\, a\, \forall\, b\ için\ (EBOB(a,b)=1)\ \rightarrow (EBOB\ (a^2\,, b^2\,)=1)$$

Öğrenci grubu, aralarında asal bazı doğal sayıları düşünerek argümantasyona başlamışlardır (3 ve 2, 2 ve 5, 9 ve 17, 4 ve 15) ve bu sayıların karelerinin EBOB'unu hesaplamışlardır. Öğrencilerin diyaloglarından şöyle bir alıntı yapılmıştır:

1. **A:** 125 ve 16. Bunlar kendi aralarında asal mı?
2. **B:** Bilmiyorum.

(Gülüşmeler)

3. **C:** 125'i 16'ya bölersek göreceksin… Hayır, bu doğru yol değil.
4. **A:** Hayır, bence 125 ve 16 aralarında asal.
5. **C:** Evet, bunların karesini aldığımızda…
6. **B:** Evet, ama bilmiyoruz, kitapta yazmıyor, bunu genel olarak kanıtlayamayız.
7. **A:** Ama bence bunu yapmak çok anlamlı olur…
8. **B:** Şey, ben gerçekten bilmiyorum, öğretmen sanki böyle bir şeyler söylemişti.

Burada öğrenci 3. adımda 125'i ve 16'yı asal çarpanlarına ayırmaktadır. Bu yöntem, analiz edilen ifadenin kanıtının ortaya çıkması için kullanılabilir bir yöntemdir. Ancak öğrenciler kanıt ile ilgili okulda yapılanlardan o kadar etkilenmişler ve kendilerini derste yapılanlara ve kitaba o kadar bağımlı hissetmektedirler ki, bir adım atmak için mutlaka ya kitapta bunla ilgili bir şeyler bulmak ya da öğretmenlerinin daha önce söylediği bir şeyi hatırlamaya çalışmaktadırlar. Bu sebeple 3. adımda ortaya atılan çözüm yöntemini önemsememişlerdir.

Çalışmada Duval (1991, akt. [57])'in argümantasyon ve kanıt arasındaki benzerlik ve farklılıklara ilişkin görüşlerine geniş yer verilmiştir. Duval (1991, akt.[57])'in şu sözleri argümantasyon ve kanıt arasındaki boşluk fikrini ilk kez ortaya çıkaran sözlerdir:

> "Dedüktif muhakeme, argümantasyon ile zıt olan iki özelliğe sahiptir. Birincisi, dedüktif muhakeme ifadelerin işlevsel (fonksiyonel) değerini temel alır, doğruluk değerini değil. İkincisi; dedüktif muhakeme, temel dedüktif adımları zincirlemeye dayanır. Argümantasyon ise farklı açılardan argümanların birikmesine ya da yeniden yorumlanmasına dayanır."

Duval (1991, akt. [57]) çoğunlukla argümantasyonun sadece ifadelerin içeriğine dayandığına, kanıtta ise önemli olanın ifadenin işlevini kullanmak olduğuna dikkat çekmektedir:

> "… bu durum dedüktif muhakeme ve argümantasyonel muhakeme arasındaki önemli ilk farklılığı beraberinde getirmektedir. Dedüktif bir adımda, ifadeler içeriklerine göre doğrudan etki göstermezler, fakat statülerinin kullanımına göre etki gösterirler."

Çalışmada incelenen örneklerden her argümantasyonun bir kanıt ile sonuçlanmadığı gerçeğine ulaşılmıştır. Çünkü oyunun kuralları bu iki aktivitede birbirinden farklıdır. Kanıt ile argümantasyon arasında geçilemez/aşılamaz bir boşluk olması durumunda, öğrencilerin kanıt yapma denemeleri başarısızlıkla sonuçlanmaktadır. Eğer kanıt hemen yapılamıyorsa (yani kanıtlanacak ifade içindeki kavramların tanımlarının manipülasyonundan direkt olarak çıkmıyorsa), ifadenin içeriği üzerinde çalışmak gereklidir.

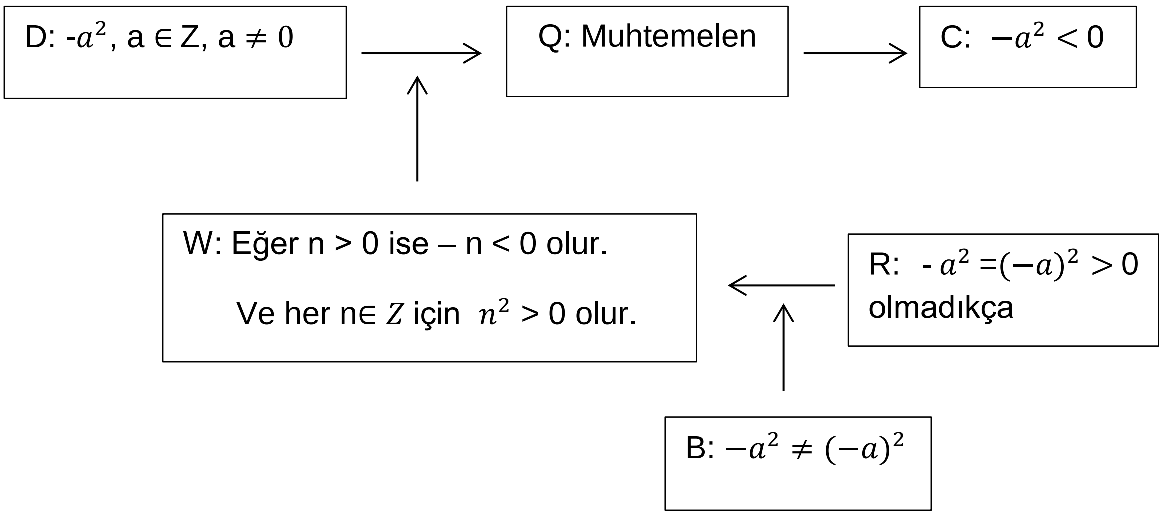
### 3.18. Argümantasyon ve Kanıt: Kuramsal Yaklaşımlara ve Sınıf Uygulamalarına Bir Katkı

Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte [33] bu çalışmalarında argümantasyon ve kanıt süreçlerini Toulmin Modeli'ne göre analiz etmişler ve karşılaştırmışlardır. Bir argümanın Toulmin Modeli'ne göre analizini göstermek amacıyla araştırmacılar şu örneği vermektedirler:

| |
|---|
| Eğer a 0'dan farklı bir tam sayı ise, $-a^2$ hakkında ne söyleyebiliriz? Bu sayı pozitif midir, yoksa negatif midir? |

"- $a^2$ negatif bir sayıdır *(iddia).* Çünkü her sayının karesi pozitif sayıdır, fakat önüne eksi gelince nagatif sayı olur *(gerekçe)*… Ancak kare ifade bir negatif sayının karesi olmadıkça… Çünkü bu durumda - $a^2$ pozitif bir sayı olur *(çürüten).* Hayır hayır olmaz, çünkü - $a^2$, $(-a)^2$ ile aynı şey değildir."

Bu argüman Toulmin Modeli'ne göre aşağıdaki şekilde analiz edilmiştir:




Şekil 3.84. Toulmin Modeli'ne göre analiz edilen argüman örneği

Problem çözme süreci boyunca argümantasyon aktivitesinin hipotez üretmek için gerekli olduğu vurgulanmaktadır. Öğrenci argümantasyonda ürettiği argümanları kanıtın yapımında mantıksal bir zincir halinde organize ederek kullanabildiğinde argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında bilişsel bütünlük kurabilmektedir. Yapılan bazı çalışmalar referans gösterilerek [45; 48] bir hipotezin yapımına yön veren argümantasyon aktivitesi geliştirildiğinde öğrenci için kanıtın daha ulaşılabilir olduğu belirtilmektedir. Çünkü öğrenci bu durumda kanıtını argümantasyon üzerine kurmaktadır.

Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte [33]'nin bu çalışmalarında, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler üzerine elde edilen sonuçları özetler nitelikte bir giriş yaptıklarını görmekteyiz. Biz de bu özet niteliğindeki bilgilere, konuyu toparlaması açısından bu bölümde yer vermekteyiz.

Pedemonte [20]'nin argümantasyon ve kanıt arasındaki ilişkilerin analizini iki yönden yaptığını belirtilmektedir: İçerik sistemi ve yapı. Pedemonte [20]'ye göre, içerik sistemi (referential system) ile kastedilen temsil-betimleme sistemi (dil, sezgi ve çizim) ve argümantasyon ile kanıtın bilgi sistemidir (kavramlar/fikirler ve teoremler). Eğer kanıtta kullanılan bazı ifadeler, çizimler ya da teoremler hipotezi destekleyen argümantasyonda da kullanılmış ise, argümantasyon ve kanıt arasında içerik sisteminde süreklilik vardır. Daha önce de belirtildiği gibi bu süreklilik *bilişsel bütünlük* olarak tanımlanmaktadır. Yapı ise; ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantıdır. Argümantasyon ve kanıtın yapıları abdüksiyon, dedüksiyon ve indüksiyon şeklinde olabilmektedir [20]. Argümantasyon ve kanıtta çıkarımlar aynı yapı (abdüksiyon, indüksiyon ya da dedüksiyon) ile birleştirilmiş ise, argümantasyon ve kanıt arasında *yapısal süreklilik* vardır.

Argümantasyon ve kanıt arasında oluşan içerik sistemindeki sürekliliğin kanıtın yapımını desteklemesi, bu iki süreç arasında yapısal süreklilik olduğu anlamına gelmemektedir. Örneğin dedüktif kanıt üretirken çoğu zaman argümantasyon ve kanıt arasında yapısal bir boşluk/mesafe oluşmaktadır. Çünkü argümantasyonun yapısı genellikle dedüktif olmamaktadır.

Bazen de öğrenciler farkında olmadan argümantasyon ve kanıt arasında yapısal süreklilik kurmaktadırlar. Örneğin argümantasyon sürecinde abdüktif yapı kullanan öğrencinin bu yapının doğasına kapılıp kanıtta da abdüktif yapı kullandığı durumda kanıtı büyük olasılıkla tamamlayamadığı gözlemlenmiştir. Bunun sebebinin öğrencinin bilinçsizce argümantasyondaki yapıyı kanıtta da devam ettirmesi olduğu düşünülmektedir.

Toulmin Modeli argümantasyon ve kanıtı analiz etmek için önemli ve etkili bir araçtır, çünkü iki çeşit analiz de - yapısal analiz ve içerik sistemi analizi - Toulmin Modeli kullanılarak yapılabilmektedir. Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte [33], bu konudaki görüşlerini şu cümle ile ifade etmektedirler:

> “Toulmin Modeli argümantasyon ve kanıt arasındaki içerik sistemi ve yapıyı analiz etmek ve karşılaştırmak için iyi bir araçtır.”

Argümantasyon ve kanıtta Toulmin Modeli'ne göre en önemli bileşenin “gerekçe bileşeni” olduğundan bahsedilmektedir. Çünkü bu iki süreç Toulmin Modeli’ne göre gerekçeleri karşılaştırılarak kıyaslanmakta ve analiz edilmektedir. Kanıtta sözü geçen gerekçe bileşeni bir aksiyom, bir tanım ya da bir teoremdir. Hipotezin oluşumu sağlayan argümantasyonda ise gerekçenin teorik bir sisteme ait olması gerekmez. Eğer argümantasyon sürecindeki gerekçe matematiksel bir kuralsa, argümantasyon ve kanıt arasında muhtemelen bir süreklilik olacaktır. Çünkü bu kural, kanıtta muhtemelen yerini bir teoreme bırakacaktır (Pedemonte, 2005, akt. [33]). Tersine argümantasyon sürecinde gerekçe bileşeni olan kural doğru değilse, kural kanıtta yerini bir teoreme bırakamaz.

Özet niteliğindeki bu bölümün ardından aşağıdaki bölümde Pedemonte'nin çalışmasında yer verdiği analizleri ve bu analizlerin sonuçlarını aktarmaktayız.

### 3.18.1. Analiz 1

İlk olarak Pedemonte [20; 24; 26]'nin daha önceki çalışmalarında da kullanmış olduğu üçgen problemine ilişkin analizlere yer verilmektedir. Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte [33] bu çalışmalarında elde ettiği verilerde abdüktif argümantasyondan abdüktif yapıda kanıta geçiş sürecini analiz etmektedirler. Bu analizlere 3.9.'da ayrıntılı olarak yer verildiğinden bu bölümde söz konusu analizlere tekrar değinilmeyecektir.

### 3.18.2. Analiz 2

Çalışmada yapılan bir diğer deney İtalya'da 12-13, Fransa'da 13-14 yaşlarında ortaokul seviyesindeki öğrenciler ile gerçekleştirilmiştir. Bu deneydeki amaç, öğrencilere matematiksel argümantasyon ve kanıtı tanıtmak ve onları kanıt yapma konusunda bilinçlendirmektir.

Araştırmacılar, kanıtı yapılacak ifade üzerinde fikir üretmek ve bu fikirlerin organizasyonunu bilinçli yapmak için metin yazmanın önemini savunmaktadırlar. Bireysel metin ürünlerinin (Bonaffe, 1993, akt. [33]) keşif aşamaları açısından kullanışlı olduğunu düşünmektedirler. Tartışma sonrasında öğrencinin ne öğrendiğini rapor etmesinin, öğrenmesine ilişkin farkındalığını arttırdığını belirtmektedirler (Assude & Paquelier, 2005, akt. [33]). Buna yönelik olarak kanıt öğrenimi için bireysel yazılı ürün ortaya koymayı sağlayacak "kanıt yapımının hikâyeleştirilmesi" şeklinde özel bir aktivite oluşturmuşlardır.

Son on yıldır hikâye yazma aktivitesi eğitimde gelişim göstermektedir. Bu gelişim aşamaları öykülerin potansiyel gücünü fark etmemizi sağlamaktadır (Bruner, 1990, akt. [33]). Hikâyeleştirmek, bağlantıların altını çizmek için gerçekleri organize etmek anlamına gelmektedir. Böylece hikâye, düşüncelerin organize edilmesini ve içeriğin anlaşılmasını sağlayan bir form haline gelmektedir (Dettori & Morselli, 2008, akt. [33]).

Araştırmacılara göre, öğrenciler adımlarını ve ifadelerini birbirlerine bağlayacak şekilde kanıt yapma sürecini anlatmak konusunda teşvik edilmelidirler. Hikâyeleştirme aktivitesi ile öğrenciler argümantasyon satırlarını, bu satırlar arasındaki olası hiyerarşik ilişkiyi ve bu satırların kanıtı üreten mantıksal bağlantı içindeki rollerini fark etmektedirler.

Hikâyeleştirme sürecinde öğrencilere verilen görevler bir çember döngüsü halinde sınıf tartışmaları ile birleştirilmiş olmalıdır. Topluca yapılan bir tartışmanın ardından bireysel metin yazımı, fikirlerin içselleştirilmesini ve bireysel olarak yeniden organize edilmesini sağlar. Sonuçta üretilen hikâyeler üzerinde yapılacak bir diğer tartışma ise kanıtın önemli elemanlarını ve kanıtı başarmak için yapılan stratejik seçimleri destekleyerek çemberi kapatır. Böylece sınıf tartışması-bireysel hikâye üretimi-üretilen hikâyeler üzerinde tartışma aktiviteleri ile çember tamamlanmış olur.

Bu deneyde öğretmen tarafından yönetilen matematiksel tartışmalar (Bartolini Bussi, 1996, akt. [33]) ifadeyi açıklama çabasını, mantıksal kuralları kullanmayı ve bu kuralların geçerliliği konusunda bilinçli olmayı destekler. Dahası tartışma boyunca bir öğrenci diğerlerinin fikirlerini ve kavrayışlarını keşfedebilir ve bunların arasında kendisine bir yer bulur. Böylece ifadeyi kanıtlamaya yönelik fikirlerini geliştirir.

Araştırmacılara göre, kanıt öğretiminin erken aşamalarında hikâyeleştirmeye uygun görevler hazırlanmalıdır. Öğrenciler bireysel hikâyelerini ürettikten sonra, sınıfta bu hikâyeler karşılaştırmalı ve tartışılmalıdır.

Bu çalışma kapsamında araştırmacılar kanıtın hikâyeleştirilmesine yönelik örnek bir aktivite hazırlamışlardır. Bu aktivite keşif, hipotez ve kanıt aşamalarını birbirine bağlar niteliktedir. Bireysel aktiviteler ya da grup aktiviteleri yapılmış ve matematiksel tartışmalar öğretmen tarafından yönetilmiştir. Araştırmacılar analizlerinde çoğunlukla bilişsel bütünlük durumları ile karşılaşmışlardır. Öğrenciler hipotez oluşturma aşamasında ortaya koydukları argümanları kanıtlama aşamasında da kullanmışlardır.

İlk aktivitede öğrencilere şu görev verilmiştir:

Öğretmen şöyle bir oyun önermiştir: Bir sayı seçin, bu sayının 2 katını alın, şimdi sonuca 5 ekleyin, sonuçtan başta seçilen sayıyı çıkarın, şimdi sonuca 8 ekleyin, elde ettiğiniz sonuçtan 2 çıkarın, sonuçtan başta seçilen sayıyı çıkarın. Şimdi elde ettiğiniz sonuçtan 1 çıkarın. Başlangıçta seçilen sayıyı bilmeden, öğretmenin oyunun sonucunu tahmin etmesi mümkün müdür? Eğer cevabınız evetse, nasıl?”

Öğrenciler bireysel olarak çalışmışlar ve sonra çözümlerini önce küçük gruplarda, sonra sınıf tartışmasında paylaşmışlar ve karşılaştırmışlardır. Bütün gruplar, öğretmenin sonucu tahmin edebileceğini düşünmüşlerdir. Çünkü sonuç seçilen sayıdan bağımsız olarak her zaman 10’dur. Bazı gruplar neden sonucun her zaman 10 olduğuna ilişkin sebepler bulmaya çalışmışlardır. Aşağıda verilen alıntı bunun için bir örnek teşkil etmektedir:

**Grup B:** Seçilen herhangi bir sayı için sonuç 10 olur. Çünkü 2 ile çarpmak, seçilen sayıyı kendisi ile toplamak ile aynıdır. Daha sonrasında sayı elde edilen sonuçtan iki kere çıkartılmaktadır. Böylece sayı ortadan kaybolur. Diğer hesaplamalar yapıldığında, sırası farklı da olsa, sonuç her zaman 10 olarak elde edilir.

Hemen sonra yapılan sınıf tartışmasında öğrenciler, öğretmenin sonucun neden her zaman 10 olduğunu anlayarak sonucu tahmin edebileceğini ifade etmektedirler. Tartışma sırasında öğrencilerin *“öğretmen seçilen sayıyı bilmeden sonucu tahmin edebilir”* şeklindeki düşüncelerini destekleyici nitelikte gerekçeler sundukları görülmüştür.

Bir sonraki görev şöyle verilmiştir:

Oyunu bir ifade formunda yazın, seçilen sayı için farklı bir harf kullanın. Seçtiğiniz herhangi bir sayı için işleyen bir ifade yazın.

Öğrenciler görevi bireysel olarak yerine getirmişlerdir. Sonra da sınıf tartışmasında çözümlerini paylaşmışlar ve karşılaştırmışlardır. Temsili olarak 2 durum seçilmiştir:

**Rick'in cevabı:**

*$N \times 2+5-N+8-2-N-1=10$*

**Tor'un cevabı:**

*$N \times 2=A$; $A+5=B$; $B-N=C$; $C+8=D$; $D-2=E$; $E-N=F$; $F-1=1$*

Tartışma öğretmenin şu sorusu ile sürmektedir:

| |
|---|
| Sizce bir matematikçi bu iki temsilden/cevaptan hangisini seçerdi? |

Burada öğretmen stratejik seçeneklerin öneminin altını çizmek ister. Bu argümantasyonda odaklanma görev üzerinde değildir, daha ziyade görevi çözmek ve bir yol seçmek üzerinedir. Tartışma boyunca öğrenciler iki temsilden birini seçmeye çalışmışlardır. Aşağıda bazı öğrencilerin seçim sürecinde akıllarından geçen düşüncelere yer verilmektedir.

**Mus:**

*Bana göre Ric'in temsili daha değerli/yararlı, çünkü onunki daha şematik ve daha matematiksel.*

**Alex:**

*Rick metni daha iyi takip etmiş, onunki daha doğru görünüyor.*

Bazı öğrenciler, Giam gibi, Tor'un görüşünü desteklemişlerdir:

> *"Tor'un temsili bence, çünkü herkes bunu yapabilir, bütün adımları takip etmiş. Rick'inki de öyle, evet yapılabilir, ama Rick'inkinde gerçekten ne yaptığınızı anlamıyorsunuz."*

Aslında her iki temsili durum da matematiksel açıdan doğrudur ve iletişimsel/aktarımsal açıdan da etkili bulunmaktadır. Ancak Rick'in ifadesi gereklilikleri daha iyi karşılamaktadır. Öğretmen için sadece Rick'in cevabının seçilmesi değil, aynı zamanda neden Rick'in cevabının daha uygun olduğunu anlamak da önemlidir, çünkü bu sayede neden cevabın her zaman 10 olduğu da anlaşılır.

**Gözlemci:** Hepiniz pek çok iyi şeyler söylediniz, aslında onu ya da diğerini yaparak aynı şeyi yapıyorsunuz, her iki durumda da sonuç elde ediliyor, tamam mı? Fakat asıl soruyu hatırlıyor musunuz? Soru “sonuç nedir?” değildi; “öğretmen sonucu tahmin edebilecek mi?” idi. […]

**Gözlemci:** Evet, çünkü her zaman 10 elde ediyorsunuz ve bazılarınız daha fazla açıklamalar da yaptınız. Neden her zaman 10 bulduğumuz üzerine konuştuk.

**Öğretmen:** Hatırlıyor musunuz? Brac, sen demiştin, N×2 yapmak şu anlama gelir…

**Brac:** Yani… Bu şunu yapmak gibi… Evet, bu N+N yapmak gibi.

**Öğretmen:** N+N, Ric’in yazdığı ifadede, sonra… orada N×2 var, Brac, lütfen tahtaya çık ve N×2’nin altına N+N yaz. Hepimiz bunların aynı şey oldukları konusunda aynı fikirde miyiz? Ve bütün ifadeyi yazdıktan sonra: +5-N+8… ve şunu farkettiniz: … N+N’den sonra, neyim var?

**Ash: -** N

**Sesler:** 2 kere

**Öğretmen:** Yani?

**Brac:** N tamamen gider/kaybolur.

**Öğretmen:** Bunu Tor’un temsilinde anlayabilir miyim?

**Sesler:** Hayır.

**Fag:** Fakat, sonda +8 var, öyleyse, iki temsil de eş değerdir, fakat Rick’in cevabı… daha kolay.

**Öğretmen:** Fakat neden o daha kolay?

**Giam:** Çünkü seçilen sayının yok olduğunu anlıyorsunuz.

**Öğretmen:** Bu yüzden cevap verebilirim.

**Gözlemci:** Rick’in cevabı bize sonucu elde etmek için seçilen sayıyı bilmemize neden gerek olmadığını anlamamızda daha çok yardımcı olmaktadır.

### 3.18.3. Analiz 3

Araştırmada yapılan bir diğer deneyde İtalya'da 12-13, Fransa'da 13-14 yaşlarında ortaokul seviyesindeki öğrenciler ile çalışılmıştır. Öğrencilerden çapı [AB] olan bir çemberin içine çizilen (köşeleri A, B, D olan) bir üçgenin ne çeşit bir üçgen olduğuna dair hipotez oluşturmaları istenmiştir. Öğrencilerin bilgisayar başında geçirdikleri keşif süreci biraz zayıftır, yine de bütün öğrenciler üçgenin dik açılı olduğu hipotezini üretmişlerdir. Sonra öğrencilerden hipotezlerini kanıtlamaları istenmiştir.

Öğrenciler hipotezlerini kanıtlamak için, üçgenin D noktasına çemberin merkezine göre simetrik olan noktayı işaretlemişler ve üçgeni dikdörtgene tamamlamışlardır. Aşağıda öğrencilerin yaşadığı argümantasyon süreci bölümler halinde verilmiştir.

**İlk Bölüm:** Öğrenciler şu düşünceyle yola çıkmışlardır:

*"Haydi D noktasını oluşturalım ve ADBD' dörtgenini düşünelim."*

**İkinci Bölüm:** Bir önceki bölümde oluşturdukları dörtgenin bir dikdörtgen olduğunu kanıtlamaya çalışmışlardır.

**Son bölüm:** Son bölümde öğrenciler şu düşünceyle hareket etmişlerdir:

*"Dörtgen dikdörtgen olduğundan, üçgen dik açılı üçgendir."*

Öğrenciler ifadeyi kanıtlamaya çalıştıklarında, öğretmen öğrencilerin çoğuna şunu önererek yardımcı olmaktadır:

*"Bir dik açılı üçgen bir dikdörtgenin yarısı değil midir?"*

Bu yolla öğretmen öğrencilerin üçgeni, dikdörtgenin bir parçası olarak gözlerinde canlandırmalarını sağlamak ister. Bireysel çalışmalar boyunca çoğu öğrenci yararlı argümanlar bulmuşlardır, fakat bunların hiçbiri bir kanıt oluşturmak için yeterli olmamıştır. Çoğu öğrenci üçgenin dik açılı üçgen olduğunu iddia etmiştir, çünkü üçgenin tepe açısını 90° olarak ölçmüşlerdir. Çok az sayıda öğrenci istenilen tarzda kanıt yapabilmiştir.

Matematiksel tartışma için bir başlangıç noktası olması için öğretmen öğrenciler tarafından sunulan bazı argümanları seçmiştir (hem doğru hem de doğru olmayanlar) ve bunları sınıfa sunmuştur. Her bir argüman için, sınıftaki öğrencilerden aşağıda verilen bir seri soruyu cevaplamaları istenmiştir:

Bu doğru mu?

Bunun doğru olduğunu nasıl kanıtlayabiliriz?

Bu argüman ne için yararlı olacak?

Bu açık olarak ifade edilmiş mi?

Eğer bunu daha farklı ifade etmek istersek, bunu nasıl yaparız?

Tartışmanın ardından öğrencilerden hipotezin kanıtındaki muhakemenin hikâyeleştirilmesi istenmiştir. Aşağıda bu sürece ait iki metin örneği verilmektedir:

**Metin 1:** Biz şu hipotezi ürettik: [AB] çemberin çapı ve D çember üzerinde bir nokta ise tepe açısı 90° olmak zorundadır. Biz ΔABD'nin her zaman bir dikdörtgenin yarısı olduğunu kanıtlarken, D noktasının çemberin merkezine göre simetriğini almalıyız. Oluşan dörtgenin bir dikdörtgen olduğunu kanıtlamak için dörtgenin [AB] ve [DD'] köşegenlerini kullanırız. Çünkü eğer köşegenler eşit uzunlukta ise o zaman bu dörtgen bir dikdörtgendir. Dikdörtgenin dört açısı olduğunu ve bunların dik açı olduğunu da biliyoruz. Öyleyse basitçe bütün açılar diktir. Aslında bu açı ADBD' dikdörtgeninin açılarından biridir. Bu nedenle bu açı otomatik olarak 90° olur.

**Metin 2:** Açının dik olduğunu kanıtlamak istiyoruz. ΔADB'nin bir dikdörtgenin yarısı olduğunu görebiliriz. Bunu kanıtlamak için açıyı alıp çember üzerinde hareket ettirmeyi deneriz, sonra çemberi genişletmeyi ya da daraltmayı deneriz. Açı her zaman 90° olarak kalır. Bunu kanıtlamak için O'ya göre D noktasının simetriğini alırız. [AB] ve [DD']'nin birbirlerini ortalayarak kesiştiklerini ve aynı uzunlukta olduklarını görebiliriz. Bu sebeple [AB] ve [DD'] köşegenler olurlar, çünkü bunlar çemberin çap uzunluklarıdır. Böylece AD'BD dörtgenini elde ederiz. Bu dörtgen dört dik açıya sahiptir. Biliyoruz ki bir dörtgende 4 adet dik açı varsa, o zaman bu dörtgen dikdörtgendir.

**Sonuç:** Hiçbir sonuç ifadesi yazılmamıştır.

İki metin de bütün öğrencilere dağıtılmıştır. Öğrencilerden bir sınıf tartışması kapsamında bu metinleri karşılaştırmaları istenmiştir. Bütün öğrenciler sınıf arkadaşlarının ürünlerini okuma ve anlama zorluklarına rağmen, metinlerdeki pek çok benzerliğin ve farklılığın farkına varmışlardır. Öğrenciler çoğunlukla metin 1'i tercih etmişlerdir *("bu iyi, o iyi açıklamış")*, ama kimse argümanların matematiksel geçerliliğini ele almamıştır. Çoğu öğrenci metin 2'de hiçbir sonucun olmadığını not etmiş ve bu yüzden metin 2'yi seçmediklerini belirtmişlerdir.

### 3.18.4. Analiz 4

Çalışmada yer verilen bir başka deneyde Pisagor teoremini tanıtmaya yönelik bir aktivite örneği sunulmaktadır. Aynı örnek Douek [32]'in 3.16.'da yer verilen çalışmasında da incelenmiştir. Bu sebeple bu bölümde bu analiz sonuçlarına tekrar yer verilmeyecektir.

### 3.18.5. Analiz 5

Araştırmada son olarak yer verilen deney, öğrencilerin bir ifade üzerinde hipotez oluşturdukları argümantasyon sürecini ortaya çıkarmaya yöneliktir. Üniversite 3. sınıfta geometri dersi almakta olan öğrenciler ile çalışılmıştır. Öğrencilere sorulan problem şöyledir:

> Cabri ile merkezi C olan ve içinde sabit bir P noktası olan bir çember çizin. P noktası üzerinde olan hangi AB kirişi için AP×PB değeri maximum olur?

Öğrenciler problemi çözmek için durumu modellemişlerdir. Şekil üzerindeki doğru parçalarını sürüklemişler ve söz konusu çarpım değerinin değişmediğini keşfetmişlerdir. Aşağıda öğrencilerin argümantasyon sürecinin bir bölümüne yer verilmektedir:

**162 Alejandro:** Kanıtta başka bir kiriş çizebiliriz, değil mi? [onaylayan mırıldanmalar] Benzer üçgenler bulmak için…

**168 Fabian:** Her durumda benzerlik elde ederiz? Ya da iki kirişle eşlik yakalayabilir miyiz?

**169 Nancy:** Çarpımın her zaman eşit olduğunu kanıtlamak için eşliği kullanmak daha iyi olacaktır.

**170 Alejandro:** Hayır, çünkü… Kanıtlamak için ihtiyacımız olan şey bir orandır.

**171 Fabian:** Evet, bir çarpım.

**172 Obs:** Ne?

**173 Alejandro:** AP ve PB doğru parçaları arasındaki oran [işaret parmağını kiriş üzerinde hareket ettirerek]

**174 Fabian:** O zaman daha ziyade benzerlik…

**176 Alejandro:** Çünkü onların eş olabileceği tek durum P noktasının merkez olması durumudur.

**177 Nancy:** Evet.

**178 Fabian:** Neden benim onların eş olabileceği bir nokta olup olmadığını sormamın sebebi bu, onlar eş olduklarında zaten benzer de olacaklar.

**179 Nancy:** Evet aynı şey.

**180 Fabian:** Her neyse … Ama sanki eşten çok benzer gibiler.

**181 Obs:** Bir şey sormak istiyorum. Alejandro sen başka bir kiriş çizmekle ilgili bir şeyler söylemiştin?... Neden öyle bir şey düşündün?

**186 Alejandro:** Çünkü görmek istediğimiz çarpımın her zaman eşit olduğu, değil mi? [işaret parmağı ile çizilen kirişi göstererek] O zaman başka bir kiriş bize benzerliği ya da oranı verebilir. [Henüz çizilmemiş bir kirişi göstererek] Çizdiğimiz bu doğru parçası ve bu [hayali kirişi gösterir…], şu… [diğer kirişi çizmeye başlar], bekle, yapalım…

**190 Alejandro:** [Bilgisayarda diğer kirişi çizer] Bu nokta… Çember üzerinde… O zaman burada benzer üçgenler oluştururuz (ekranda bir üçgen çizerek).

**191 Nancy:** Oranlardan her iki kiriş için de AP ve BP çarpımının aynı olacağı görülür.

**192 Fabian:** Her zaman aynı olacak.

**193 Nancy:** Kabul ettiğimiz yol herhangi bir kiriş için geçerlidir [sessizlik]…

**195 Nancy:** O halde sadece bizim kullandığımız kiriş için değil, diğer bir kiriş için de bu durum geçerlidir.

Kanıtta bir başka kirişin çizilip çizilemeyeceğini sormak, aslında bunun kanıt için yararlı olup olmayacağını sormaktır. Bu durumda eksik veri söz konusudur ve bu nedenle bu muhakeme bir abdüktif muhakemedir. Her ne kadar gerekçe açık açık verilmemiş olsa da iddia (170) oranların eşit olduğu şeklinde ortaya konmuştur. Bu argümanı, dedüktif bir muhakemeye dönüştürmek zordur, çünkü veri bir ifade değil; bir fikirdir. Benzerliğin olması (veri) oranları verir, böylece çarpımları (iddia) verir. Problem şudur ki bu argümantasyonda hiç gerekçe yoktur. Bu duruma daha dikkatle bakarsak, onların bir teoriyi akıllarına getirdiklerini; bir argüman yapılandırmadıklarını söyleyebiliriz.

Bir başka olası analiz şöyledir:

Başlangıçta öğrenciler, üzerinde P noktası olan iki kirişin benzer üçgenler oluşturduklarını (iddia) ileri sürmektedirler (162). Hiçbir gerekçe yoktur, bunun yerine ifadenin genelliği sorgulanmaktadır (çürütücü) (168). Buraya kadar bir matematiksel ifade formüle edilmiştir, fakat bir argümantasyon yoktur. Nancy'nin katkıları konuşmayı dolambaçlı bir yola sokmuştur, çünkü 169-180 arasındaki bölümde Nancy kanıt için benzer ve eş üçgenleri referans gösterir. Çarpımın değişmezliğini (veri) dikkate alarak benzer üçgenlerin kullanımının kanıtı tamamlayacağı (iddia) ileri sürülür. Çünkü buradan eşit oranlar çıkarılabilir, buradan da eşit çarpımlar (gerekçe) çıkarılabilir.

# 4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının amacı çeşitli yaş gruplarında ve çeşitli başarı seviyelerinde öğrencilerin matematikte bir ifadenin kanıtını yaparken hipotez oluşturdukları argümantasyon süreci ve hemen sonrasında geçirdikleri kanıtlama süreci arasındaki ilişki ya da ilişkileri analiz etmeye yönelik yapılmış olan çalışmalar ışığında bu konu hakkında bilgi vermektir. Bu amaca yönelik olarak uluslararası alanda yapılmış olan çalışmalar incelenmiş ve analiz sonuçları objektif olarak yansıtılmıştır. Ülkemizde matematik eğitiminde doğrudan bu konu ile ilgili yapılmış, argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki ilişki ya da ilişkileri analiz eden ve bu ilişkileri karşılaştıran bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Ancak argümantasyon sürecini tartışma süreci ile eşdeğer tutan ve bu anlamda tartışma sürecini Toulmin Modeli’ne göre analiz eden çalışmaların yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmalarda argümantasyon sürecini kanıt ile ilişkilendirme yoluna gidilmediği ve argümantasyon sürecinin kanıt süreci üzerindeki etkilerinin belirlenmesine yönelik analizlerin yapılmadığı dikkat çekmektedir. Ülkemizdeki matematik eğitimi araştırmacılarının, öğrencilerin geçirdikleri argümantasyon sürecine bakış açılarını yansıtmak ve bu konuya yönelik çalışmaların eğilimlerini belirlemek açısından bu tip çalışmalara ve analiz sonuçlarına da tez çalışmamız kapsamında yer verilmiştir. Ülkemizdeki duruma benzer olarak yurt dışında da, argümantasyonu tartışma süreci ile eşdeğer tutan ve deneylerini buna göre yapılandıran araştırmacıların çalışmaları da mercek altına alınmıştır.

Argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki ilişkilerin araştırılmaya başlandığı ilk yıllarda çalışmaların daha ziyade “dinamik keşif süreci” ve “dönüşümsel düşünme” üzerine yoğunlaştığını görmekteyiz. Dinamik keşif sürecinin ve dönüşümsel düşünmenin yaşandığı durumlarda öğrencilerin verilerin bir ifade ya da problem durum üzerine daha kolay ve sağlıklı fikir yürüttüğü ve sonrasında da ifadeyi daha kolay genelleyebildiği ya da kanıtlayabildiği görülmüştür. Daha sonra devam eden çalışmaların ise argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişki ya da ilişkileri analiz etmeye yönelik yapıldıklarını ve bu amaca yönelik olarak araştırmacıların Toulmin Modeli’ni kullandıklarını görmekteyiz.

İlk yapılan çalışmalarda öncelikli olarak matematiksel kanıt yapmadan önce, argümantasyon süreci geçiren öğrencilerin kanıtı yapmakta daha başarılı oldukları görülmüştür. Bunun üzerine çalışmalar biraz daha derinleştirilerek, bu kolaylığı sağlayan ilişki ya da ilişkiler belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçleri Toulmin Modeli'ne göre analiz edildiğinde, araştırmacıların ilk dikkatlerini çeken kanıtı başarı ile tamamlayan öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçlerinde benzer dilsel öğeler kullanıyor olmalarıdır. Buna göre araştırmacılar argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki içerik sisteminde *"bilişsel bütünlük"* adı altında bir süreklilik tanımlamışlar ve iki süreç arasındaki sürekliliği içerisine Ck¢ modeli entegre edilmiş Toulmin Modeli ile analiz etmişlerdir. Araştırmacılar elde edilen analiz sonuçlarına göre bilişsel bütünlük hipotezini şöyle ortaya koymuşlardır:

> "Eğer bir öğrenci hipotez oluşturma süreci olan argümantasyonda kullandığı argümanları mantıksal bir zincir halinde birleştirerek kanıtta da kullanıyorsa, bu öğrenci argümantasyon ve kanıt arasındaki bilişsel mesafeyi doldurmakta ve bilişsel sürekliliği kurmaktadır."

Analizlere göre, bilişsel sürekliliği kurabilen bir öğrencinin kanıtı yapma olasılığının, bilişsel sürekliliği kuramayan öğrencilere göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Bilişsel bütünlük hipotezine göre argümantasyon ve kanıt arasında içerik anlamında süreklilik kuran bir öğrenci büyük olasılıkla söz konusu ifadenin kanıtını da doğru yapacaktır.

Ancak yapılan çalışmalarda, öğrencilerin argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasında bilişsel süreklilik kurdukları, fakat yine de kanıtı başarı ile tamamlayamadıkları durumlarla karşılaşılmıştır. Bu durum, araştırmacıları argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki ilişkileri başka açılardan da analiz etmeye yöneltmiştir. Araştırmacılar bu iki süreç arasında başka bir tür ilişkinin olabileceğini düşünmeye başlamışlar ve bu ilişkiyi saptamaya yönelik analizler yapmışlardır. Bu anlamda en çok ön plana çıkan isimlerden biri olan Duval (1991, akt. [24]), sonrasında da Pedemonte [20; 24; 26; 27; 28; 33] argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin yapısal anlamda da karşılaştırılabileceğini ve bu iki süreç arasında yapısal bir ilişki olabileceğini savunmuşlardır.

İlk olarak Duval (1991, akt. [24]), argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini yapısal açıdan karşılaştırma yoluna gitmiş, ancak bunu yaparken bu iki sürecin gerekçelerini karşılaştırmakla yetinmiştir. Duval, iki sürecin yapısal analizini ve yapısal karşılaştırmasını yapamamıştır, çünkü her ne kadar argümantasyon ve kanıt süreçlerinin birbirlerine benzediklerini düşünse de argümantasyonun kanıt gibi üçlü bir yapıya sahip olmadığını ve üçlü diyagram (veri-iddia-gerekçe) ile analiz edilemeyeceğini savunmuştur.

Pedemonte [20; 24; 26; 27; 28; 33] ise Duval'den farklı olarak, hem argümantasyon hem de kanıtın üçlü bir yapıya sahip olduğunu düşünmekte ve üçlü diyagram ile her iki sürecin yapılarının analiz edilebileceğini savunmaktadır. Pedemonte'nin bu düşüncesinin altında yatan asıl gerçek, kanıtın özel bir argümantasyon olarak düşünülebileceğidir. Bu düşüncesine paralel olarak yapmış olduğu çalışmalarında, argümantasyon ve kanıtın yapılarını Toulmin Modeli'ne göre analiz etmiş ve karşılaştırmıştır. Pedemonte, argümantasyon ve kanıtın yapılarının abdüktif, indüktif ya da dedüktif tarzda olabileceğini belirtmiş ve argümantasyonda kurulan yapının kanıtta da devam ettirilmesi halinde bu iki süreç arasında "*yapısal süreklilik*" olduğunu ortaya koymuştur.

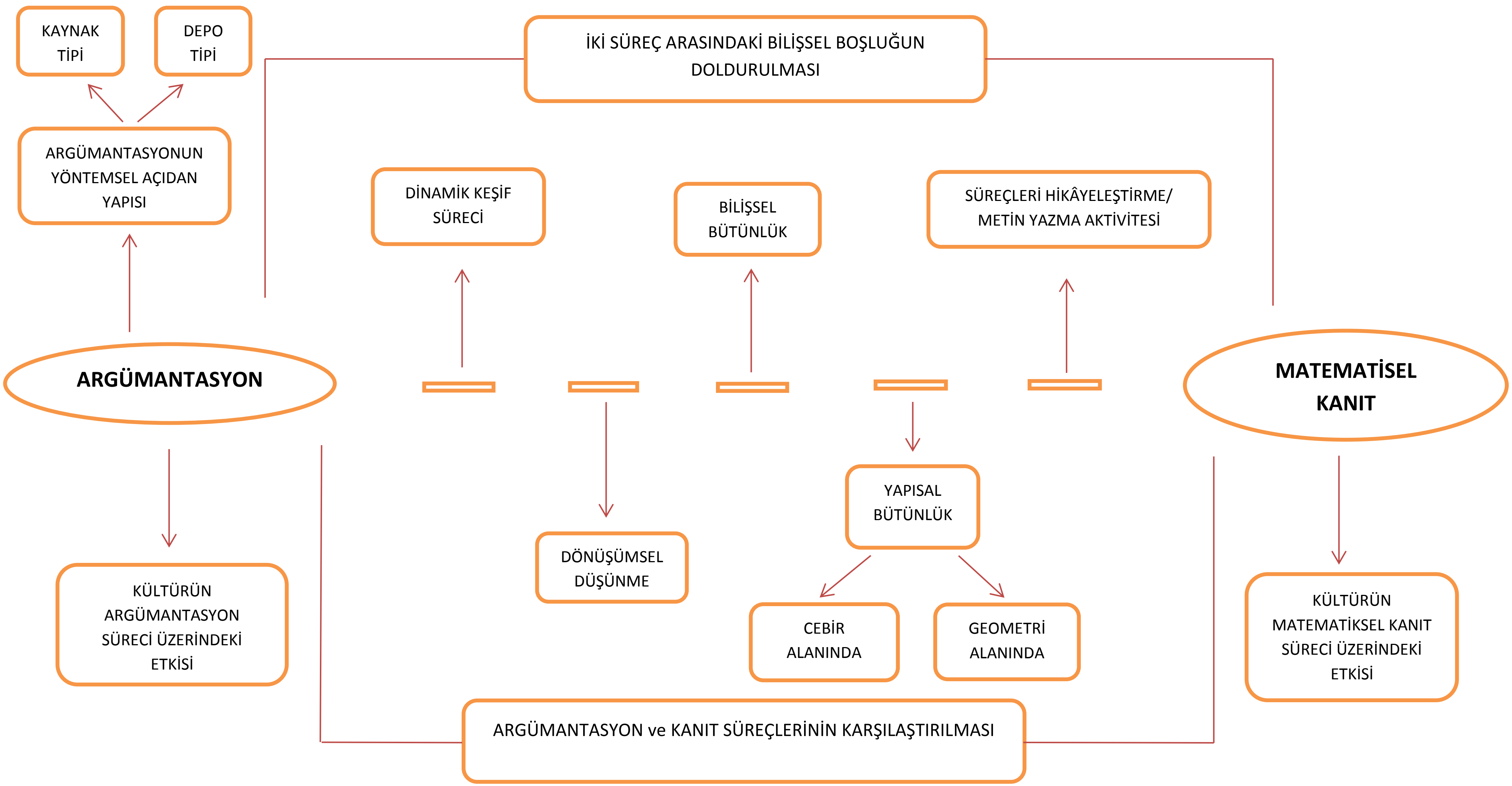
Geometri alanında yapılan çalışmalarda, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasında yapısal süreklilik kuran öğrencilerin kanıtı, tamamlamakta zorlandıkları görülmüştür. Örneğin abdüktif yapıda argümantasyon süreci geçiren öğrencilerden bu yapıyı kanıtta da devam ettirerek, abdüktif yapıda kanıt yapan öğrencilerin kanıtlarını büyük olasılıkla tamamlayamadıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin argümantasyon sürecindeki abdüktif muhakeme tarzlarının doğasından çıkamayıp kendilerini argümantasyon sürecine kaptırarak, bu yapıyı kanıt sürecinde de devam ettirdikleri ve dedüktif kanıt yapamadıkları görülmüştür. Aksine abdüktif yapıda argümantasyon sürecinin ardından, dedüktif yapıda kanıt yapabilen öğrencilerin kanıtlarını başarı ile tamamlayabildikleri görülmüştür. Bu öğrencilerin argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki yapısal mesafeyi başarıyla doldurdukları ve bu sayede abdüktif yapıdan dedüktif yapıya geçerek kanıtlarını tamamlayabildikleri dikkat çekmektedir. Diğer durumda abdüktif yapıyı kanıt sürecinde de devam ettiren öğrencilerin başarısız oldukları asıl nokta da budur. Bu öğrenciler iki süreç arasındaki yapısal mesafeyi dolduramamış, bilinçsizce yapısal süreklilik kurarak kanıtı tamamlama konusunda başarısız olmuşlardır. Araştırmacıların bu noktadaki görüşleri yapısal mesafeyi doldurabilen öğrencilerin (yani abdüktif yapıdan dedüktif yapıya geçebilen öğrencilerin) kanıt yapma sürecinde başarılı oldukları; iki süreç arasında spontane şekilde yapısal süreklilik kuran öğrencilerin ise büyük olasılıkla kanıt yapma sürecinde başarısız oldukları yönündedir.

Buna göre geometri alanında yapılan çalışmalar göstermektedir ki, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki yapısal mesafe öğrenciler için bir engel teşkil etmektedir. Bu mesafeyi/boşluğu doldurabilen öğrencilerin, yani argümantasyon sürecindeki abdüktif yapıyı kanıt sürecinde dedüktife dönüştürebilen öğrencilerin, argümantasyondaki abdüktif muhakeme tarzını kanıt sürecinde de aynen devam ettiren öğrencilere göre kanıtı başarı ile tamamlama konusunda daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu anlamda geometri alanında yapılan çalışmalarda, iki süreç arasındaki yapısal mesafenin öğrenciler için atlatmaları gereken bir engel teşkil ettiği görülmüştür. Ancak bunun tersine cebir alanında yapılan çalışmalarda, iki süreç arasındaki yapısal mesafenin öğrencilerin kanıtı yapmasında engel teşkil etmediği görülmüştür. Yani öğrenci cebirsel bir ifadenin kanıtını yaparken, argümantasyon sürecinde abdüktif yapıda muhakeme yapsa da kanıtta bu yapıyı kolaylıkla dedüktif yapıya dönüştürebilmektedir. Araştırmacılar bunun sebebinin cebirsel kanıtın oldukça katı bir dedüktif yapı gerektirmesinde yattığını düşünmektedirler. Bu nedenle öğrenci argümantasyonda abdüktif adımlar kullansa da, kanıtta dedüktif yapıya geçmekte zorlanmamakta, hatta bu abdüktif adımlar öğrenciye dedüktif kanıt yaparken yardımcı bile olabilmektedir.

Bunun üzerine cebirsel kanıt sürecinde öğrencilerin yaşadıkları zorlukların sebebini belirlemeye çalışan araştırmacılar, öğrencilerin hipotezlerini doğrulamak amacıyla sebep arayarak yapısal argümantasyon yapmaları, yapısal argümantasyonda kullandıkları ifadelerin ve kuralların kontrolünün hem aritmetik hem de cebirsel alanda olması ve yapısal argümantasyonda abdüktif adımlar kullanmaları durumunda cebirsel kanıtlarını tamamlama şanslarının arttığını görmüşlerdir. Yalnızca bir takım örnek durumlarla genelleme yaparak bir hipotez ortaya koyan, hemen ardından yapısal argümantasyon yapmadan direkt olarak kanıt sürecine geçen ya da yapısal argümantasyon yapsa bile bu süreçte abdüktif adım kullanmayan ve yapısal argümantasyonda kullandıkları ifadeleri ve kuralları tamamen aritmetik alanından seçen öğrencilerin ise kanıt yapmakta zorlandıkları ve kanıt sürecini büyük olasılıkla başarıyla tamamlayamadıkları görülmüştür.

Çalışmamız kapsamında geçmişten günümüze argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerini inceleyen, iki süreç arasındaki ilişkileri Toulmin Modeli'ne göre analiz eden ve bu yolla iki süreci karşılaştıran, bu süreçler arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyan, elde edilen sonuçlar doğrultusunda öğrencilerin matematiksel kanıt yapmalarını kolaylaştıracak yönde önerilerde bulunan ve bu önerileri güçlendirmek adına öğrencilerin matematiksel kanıt süreçlerini anlamlandıracak ve kolaylaştıracak tarzda aktivite örnekleri veren ve bu aktivitelerin uygulamalarını sunan çalışmaları bir araya getirmiş olduk.

Konuya ilişkin elde edilen sonuçları toparlamak amacıyla oluşturduğumuz aşağıdaki diyagramda, derlemiş olduğumuz çalışmaların araştırma konularını, bu çalışmalarda yapılan analizler sonucunda ortaya konan sonuçları, argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki bilişsel boşluğu ve bu boşluğun doldurulmasındaki gelişim sürecini adım adım görmek mümkündür. Tarihi süreç içerisinde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki bilişsel boşluğu analiz etmeye yönelik yapılan çalışmalarda, iki süreç arasında bir köprü kurulabildiği durumlarda argümantasyon sürecinden matematiksel kanıt sürecine geçmenin mümkün hale geldiğini görmekteyiz. Öğrencilerin iki süreç arasındaki mesafeyi kapatmak adına oluşturdukları bu bilişsel köprüyü kuvvetlendirmeleri ve daha kolay yoldan matematiksel kanıta ulaşabilmeleri adına argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkilerin analiz edildiği çalışmaların arttırılması gereklidir. Yapılacak başka çalışmalar ile öğrencilerin matematiksel kanıt yaparken yaşadıkları başka olası zorlukların saptanması mümkün olabilecektir. Yapılacak araştırma sonuçlarının vermiş olduğumuz diyagrama eklenmesi ile argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkilerin toplu halde yansıtılmasına katkı sağlanmış olacaktır. Konuya ilişkin elde edilen sonuçların bir arada görülebilmesi açısından bu, oldukça yararlı ve gereklidir.




Şekil 4.1. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler

İncelenen çalışmalarda ülkemizde de yoğun biçimde kullanılan geleneksel (reproductive) öğretme stilinin kanıt öğretiminde öğrencilerin başarısını arttırıcı yönde sağlıklı bir yöntem olmadığı görülmüştür. Öğretmenin ifadeyi ve ifadeye ilişkin hipotezleri kendisinin oluşturduğu ve öğrencilere hazır olarak sunduğu, hatta çoğu zaman ifadenin kanıtını da kendisi yaparak, öğrencilerinden sadece yaptığı adımları tekrarlamalarını istediği şekilde işleyen bu öğretme stili, başarısız bulunmuştur. Geleneksel (reproductive) öğretme tarzının öğrencileri düşünmekten uzaklaştırdığı ve onları ezberciliğe sürüklediği vurgulanmaktadır. Bu öğretim tarzı yerine öğretmenlere, öğrencilerine ifade üzerinde hipotez oluşturma süreci geçirmeleri için imkân sağlayacak tarzda aktiviteler düzenlemeleri önerilmektedir. Bu aktivitelerin iyi yapılandırılması, dersin amacı, konusu ve içeriğine göre zaman açısından ekonomik ve uygun tasarlanması gereklidir. Yoksa amacına ulaşmayan aktiviteler hem zaman kaybına yol açacak, hem de öğrenciler için matematikte kanıtın gereksiz, boş ve sıkıntılı bir süreç olduğu algısını güçlendirecektir.

Ayrıca üniversite düzeyindeki derslerde, sınavların daha ziyade derste yapılan kanıtların benzerlerinin ya da aynılarının sorulması şeklinde hazırlanması, her sene aynı ya da benzer soruların sorulması öğrencileri ister istemez ezberciliğe yöneltmektedir. Öğrenciler ya defterlerinde dersin işlenişi sırasında çoğunlukla öğretmenin kendisi tarafından adım adım yazılan kanıtları ezberleyerek, ya da ders kitaplarındaki kanıtları akıllarına kazıyarak sınavlara girmektedirler. Bu durumlarda öğrencilerin üst sınıflardaki arkadaşlarından soruları aldıkları ve çalışmalarını bu duyumlarına göre yönlendirdikleri de bilinen bir gerçektir. Öğrencilerin bu tip durumlarda tek derdi sınavı atlatmak ve dersten geçmektir. Öğrenciler kanıtı anlamlandırmaktan ve gerçekten kanıt yapmayı öğrenmekten çok ama çok uzak kalmaktadırlar.

Bunu önlemek için üniversitede görev yapan akademisyenlere büyük görev düşmektedir. Öncelikli olarak bu durumun farkına varmaları ve sınavlarını her sene orijinal biçimde yapılandırmaları ve sürpriz sorular hazırlamaları önerilmektedir. Her sene aynı dönemlerde yaptıkları sınavlarda aynı soruları sormaları en başarılı öğrencileri bile ister istemez geçmiş sınav sorularına çalışmaya ve bu sorularda çıkan kanıtları ezberlemeye yöneltecektir. Bunu önlemenin ilk ve en önemli yolu akademisyenlerin kendilerini değiştirmeleri, geliştirmeleri ve sınavlarını özenle hazırlamalarıdır. İkincil olarak yapılması gereken şey, öğrencilere sınav dışında da kanıt yapma şansı verilmesidir. Öğrenciler yalnızca sınav sırasında kanıt yapmak durumunda bırakılmakta, bunun dışında ders içinde ya da ders dışında kanıt yapmaları gereken bir durum olmadığında öğrenciler de kanıt yapma ihtiyacı hissetmemektedirler. Bu durum öğrencileri pratiklikten uzaklaştırmakta ve kanıt süreçleri geçirmelerini engellemektedir. Yalnızca sınav esnasında kanıt süreci ile baş başa kalan öğrenci ne yapacağını, nerden başlayacağını bilememekte; yabancı olduğu bu süreçte paniklemektedir. Alışık olmadığı için de ifade üzerinde hangi kanıtlama yönteminin daha uygun olacağını bilememektedir. Bu nedenle öğrencilere ders içinde ya da ders dışında verilen ödevler ya da düzenlenen ek ders aktiviteleri ile kanıt yapma deneyimleri ve alışkanlığı kazandırılmalıdır.

Üniversiteye gelen öğrenciler genellikle daha önceki öğrenim yaşantılarında kanıtla tanışmamış olan öğrencilerdir. Bu öğrenciler Soyut Matematik dersi kapsamında kanıt ile tanışır ve kanıt yapmak durumunda kalırlar [7]. İlk tecrübelerini de bu derste yaşarlar. Bu dersin, öğrencilerin kanıt yapmaya ilk adımlarını attıkları ders olması sebebiyle önemi son derece büyüktür [7]. Bu dersin iyi yapılandırılması ve öğrencilerin kanıt yaparken argümantasyon süreci geçirmelerinin sağlanması son derece önemlidir. Bu sayede öğrencilerin ileriki sınıflarda yaşamaları muhtemel sıkıntılar önceden önlenebilecektir.

Araştırmalara göre, öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçlerini hikâyeleştirmeleri, bu sürece ilişkin bireysel metinler yazmaları, sınıf içi tartışmalarda hipotezlerini paylaşmaları ve tartışmaları, öğrencilerin kanıt yapma sürecini tanımaları ve bu sürecin gerekliliğini ve önemini anlamaları açısından faydalı olmaktadır. Bu noktada öğretmenin tutumu son derece önemlidir. Öğretmen bu aşamalarda yalnızca rehber rolünde olmalı, tartışmayı yönetmeli, bu süreçte öğrencilerin doğru ya da yanlış her türlü hipotez üretme isteğini cesaretlendirmelidir.

Yapılan çalışmalarda öğretmenin kanıt sürecine yönelik görüşlerinin, öğrencileri üzerinde büyük etkisi olduğu görülmüştür. Bu nedenle kanıt öğretiminde öğretmenlerin derslerini özenle ve dikkatle yapılandırması, öğrencilerini hipotez oluşturma ve kanıt yapma konusunda cesaretlendirmeleri ve desteklemeleri önerilmektedir.

Öğretmenlerde bu konuya ilişkin farkındalık yaratmak da önemlidir. Argüman kuran bir öğrencinin geçtiği aşamaları bilen bir öğretmen ders notlarını, materyallerini hatta sınavlarını bile buna göre ayarlayabilir [2]. Ancak bu konuda bir bilgisi olmayan öğretmen, dersin işlenişini de bu yönde yapılandıramayacaktır. Bu nedenle öğretmenlerin argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler konusunda bilinçlenmesi açısından bu konuya ilişkin yayınlara eğitim dergilerinde sıkça yer verilmesi, hatta öğretmenlere bu konuya ilişkin seminerler yoluyla ulaşılması önerilmektedir. Bu tip yayınların ve seminerlerin öğretmenlerin bu konu hakkında bilgilenmelerini, bilinçlenmelerini ve öğretim tarzlarını değiştirmelerini sağlayacağı düşünülmektedir. Bu yayınlarda ya da seminerlerde öğretmenlere sınıf içi aktivitelerini ya da konuyu sunuş biçimlerini nasıl yapılandıracaklarına dair önerilerde bulunulması, hatta örnek uygulamalar sunulması oldukça faydalı olacaktır.

Öğretmenlerin yanı sıra ders kitaplarının da öğrencilerin zihninde kanıta ilişkin algıların yapılanmasında etkisi olduğu görülmüştür [2]. Öğrencilerden bir ifadenin kanıtını yapmaları istendiğinde bu ifadenin aynısını ya da benzerini kitaptan bulmaya çalıştıklarına çok sık rastlanmaktadır. Bu nedenle ders kitaplarının da özenle ve dikkatle hazırlanması gerekmektedir. Direk olarak ifadenin ve adım adım kanıtının verilmesi öğrencileri ezberciliğe yöneltecektir. Bunun yerine ders kitaplarında öğrencileri ifade üzerinde hipotezler oluşturmaya yönlendiren aktivitelere yer verilmelidir. Ancak bu noktada bu tip aktivitelerin seçimi oldukça önemlidir. Amacından uzak ve ilgisiz aktiviteler öğrencilerin zihninde karışık algılara sebep olabilecektir. Bu anlamda ders kitaplarının dikkatle ve özenle hazırlanması önerilmektedir. Dinçer [2], bu konuda yapmış olduğu incelemeler sonucunda ülkemizde ders kitaplarında bazı gereksiz ve kafa karıştırıcı aktivitelere ve argümantasyon örneklerine yer verildiğini belirtmektedir. Bu nedenle ders kitaplarının bu anlamda incelendiği bir çalışma yapılması oldukça faydalı olacaktır.

Matematiksel kanıt yapma süreci üzerine yapılan çalışmaların artırılması gerekmektedir. Matematiksel kanıtın gerekliliği ve matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine etkileri araştırılarak ortaya konmalıdır. Bu yolla öğrencilerin kanıttan ve kanıt yapmaktan korkmamaları, kanıtın gerekliliğine ve önemine inanmaları sağlanabilir. Bu anlamda araştırmacılara argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri hakkında çalışmalar yapmaları ve bu süreçler arasındaki ilişkileri analiz etmeleri önerilmektedir. Bu ilişkilerin öğrencileri nasıl etkilediği ve kanıt sürecinin başarı ile sonuçlanması üzerinde nasıl bir etkisi olduğu araştırılmalıdır. Buna yönelik olarak yapılacak çalışmalar öğrencilerin kanıt süreçlerinin daha iyi analiz edilmesini sağlayacaktır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda öğrencilerin daha sağlıklı yönlendirilmesi ve kanıt öğretiminin daha bilinçli yapılması mümkün olacaktır.

## KAYNAKLAR

[1] Mejia-Ramos, J. P., Inglis, M., What are the argumentative activities associated with proof?, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 28(2),67-72, June, **2008.**

[2] Dinçer, S., *Matematik Lisans Derslerindeki Tartışmaların Toulmin Modeline Göre Analizi*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2011.**

[3] Moralı, S., Uğurel I., Türnüklü E., Yeşildere S., Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(1), 147-160, **2006.**

[4] Hanna, G., Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23, **2000.**

[5] Güler, G., Özdemir, E., Dikici, R., Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi,* Cilt: 20, No: 1, 219-236, **2012.**

[6] de VILLIERS, M., The role and function of proof with sketchpad, **1999.** http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf (Ekim, 2012).

[7] Sarı, M., *Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel Kanıt ile İlgili Güçlükleri ve Kanıt Öğretimi*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2011.**

[8] Heinze, A. & Reiss, K., Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence, *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* Bellaria, Italy, **2003.**

[9] Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ., Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi, *Çağdaş Eğitim Dergisi,* 30, s.319, **2005.**

[10] Ören, D., *Onuncu Sınıf Öğrencilerinin Geometrideki İspat Şemalarının Bilişsel Stilleri ve Cinsiyetlerine Göre İncelenmesine Yönelik Bir Çalışma,* Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara, **2007.**

[11] Uğurel, I., *Ortaöğretim matematik programının temel ögeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi,* Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2010.**

[12] Sarı, M., Altun, A., Aşkar, P., Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi,* 40(2), 295-319, **2007.**

[13] Moralı, S., Köroğlu, H., Çelik, A., Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları, *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 24(1), 161-175, **2004.**

[14] Aydoğdu, İskenderoğlu, T., Baki, A., İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri,* 11(4), 2275-2284, **2011.**

[15] Gökkurt, B., Soylu, Y., Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Eğitim ve Öğretim Araştırma Dergisi,* 1(4), 56-64, **2012.**

[16] Güler, G., Dikici, R., Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 20(2,), 571-590, **2012.**

[17] Doruk, M., Kaplan, A., İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri, *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi,* 2(1), 241-252, **2013.**

[18] İncikabı, L., İlköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencillerinin mantıksal argümanları kanıtlama yöntemlerinin incelenmesi, *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi,* 6(12), 129-148, **2013.**

[19] Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., Cognitive unity of theorems and difficulty of proof, *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* University of Stellenbosch: Stellenbosch, Vol.2, 345-352, 12-17 July **1998.**

[20] Pedemonte, B., How can the relationship between argumentation and proof be analysed?, *Educational Studies in Mathematics,* 66, 23-41, **2007.**

[21] Aldağ, H., *Düşünme Aracı Olarak Metinsel Ve Metinsel-Grafiksel Tartışma Yazılımının Tartışma Becerilerinin Geliştirilmesine Etkisi,* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana, **2005.**

[22] Douek, N., Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective, *Ninth International Congress on Mathematical Education (ICME-9)*, Tokyo/Makuhari, Japan, July 31 - August 6, **2000.**

[23] Douek, N., Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications, *European Research in Mathematics Education I,* 125-139, **1998.**

[24] Pedemonte, B., Some cognitive aspects of the relationships between argumentation and proof in mathematics, *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Utrecht, ISSN 1292-8763, **2000.**

[25] Mariotti, M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero, P., Franca Ferri, F., Rossella G., Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Lahti, Finland, 180-195, **1997.**

[26] Pedemonte, B., What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation?, *European Research in Mathematics Education III,* 28 February-3 March, **2003.**

[27] Pedemonte, B., Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra, *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education/European Research in Mathematics Education (CERME 5),* 22-26 February, Larnaca/Cyprus, 643-653, **2007.**

[28] Pedemonte, B., Argumentation and algebraic proof, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 40, 385-400, **2008.**

[29] Douek, N., Scali E., About argumentation and conceptualisation, **2011**. http://www.seminariodidama.unito.it/2011/app/douek24.pdf (Eylül, 2012)

[30] Douek, N., Argumentative aspects of proving: analysis ofsome undergraduate mathematics students' performances, *Proceedings of PME-XXIII,* Haifa, vol. 2, 273-280, **1999.**

[31] Douek, N., Argumentation and conceptualisation in context: a case study on sunshadows in primary school, *Educational studies in mathematics,* **1999.**

[32] Douek, N., Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction, *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6),* Lyo, France, January 28th-February 1th**, 2009.**

[33] Boero, P., Douek, N., Morselli, F., Pedemonte, B., Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation, *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Belo Horizonte, Brazil, **2010.**

[34] Özer, Ö., Arıkan, A., Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri, *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi,* Ankara, 1083-1089, 16-18 Eylül, **2002.**

[35] Yıldırım, C., *Bilim Felsefesi*, 14. Basım, Remzi Kitabevi, **2011.**

[36] Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme,* 7. Basım, Remzi Kitabevi, **2011.**

[37] Atalan, F., Kanıt Peşinde Koşan Matematikçiler, **2012.** http://acikarsiv.atilim.edu.tr/browse/570/40.pdf (Mart, 2013)

[38] Arslan, S., Yıldız, C., 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar, *Eğitim ve Bilim,* 35(156), **2010.**

[39] Toulmin, S.,*The Uses of Argument,* Cambridge, UK: Cambridge University Press, **1958.**

[40] Aldağ, H., Toulmin Tartışma Modeli, *Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi,* 15(1),13-34, **2006.**

[41] Krummheuer, G., The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*, 229-269, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, **1995.**

[42] Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A., Modelling mathematical argumentation: The importance of qulification, *Educational Studies in Mathematics,* 66, 3-21, **2007.**

[43] Krummheuer, G., Argumentation and participation in the primary mathematics classroom : two episodes and related theoretical abductions, *Journal of Mathematical Behavior,* 60-82, **2007.**

[44] Knipping, C., A method for revealing structures of argumentations in classroomproving processes, *ZDM Mathematics Education,* 40, 427–441, **2008.**

[45] Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, M. A., Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems, *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Valencia, Spain, **1996.**

[46] Garuti, R., Boero, P., Chiappini, G. P., Sibilla, A., Towards statements and proofs in elementary aritmetic, *Proceedings of the 19th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* **1995.**

[47] Boero, P., Dapueto, C., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E., Aspects of the Mathematics-Culture Relationship, *Proceedings of the 19th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol.1, 151-166, **1995.**

[48] Boero, P., Rossella G., Mariotti, M. A., Some dynamic processes underlying producing and proving conjectures, *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Valencia, Spain, **1996.**

[49] Simon, M., Beyond inductive and deductive reasoning, *Education Studies in Math*, 30, 197-210, **1996.**

[50] Thurston, W.P., On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 30(2), 161-177, **1994.**

[51] Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Rebutti, O., A model for analyzing the transition to formel proof in geometry, *Proceedings of the 22th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Stellenbosch, vol. 2, 24-31, **1998.**

[52] Harel, G., Sowder, L., Students' proof schemes: results from exploratory studies, *Research in collegiate mathematics education,* vol. 3, 234-283, **1998.**

[53] Mariotti, M. A., Justifying and proving in the cabri environment, *International Journal of computer for mathematical learning,* Dardrecht, Kluwer, **2001.**

[54] Sekiguchi, Y., Mathematical proof, argumentation, and classroom communication: from a cultural perspective, *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics,* 21, **2002.**

[55] Knipping, C., Argumentation and structures in classroom proving situations, *European Research in Mathematics Education/Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* 23 February – 3 March, Bellaria, Italia, **2003.**

[56] Cabassut, R., Argumentation and proof in examples taken from french and german textbooks, *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* 17-21 February, Sant Feliu de Guíxols, Spain, 391-400, **2005.**

[57] Barrier, Th., Mathe, A.-C., Durand-Guerrier, V., Argumentation and proof: A discussion about Toulmin's and Duval's models, *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6),* January 28-February 1, Lyon, France, **2009.**

[58] Harel, G., The development of mathematical induction as a proofscheme: A model for DNR-based instructio, *Journal of Mathematical Behaviour,* New Jersey, 185-212, **2001.**

[59] Tall, D. O., Building theories: The three worlds of mathematics: A comment on Inglis, *For the Learning of Mathematics*, *23*(3), 29–32, **2004.**

[60] Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Approaching theorems in grade VIII, *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice,* 261-277, Rotterdam: Sense Publishers, **2007.**

[61] Alcock, L., Weber, K., Proof validation in real analysis: inferring and checking warrants, *Journal of Mathematical Behaviour,* 24, 125-134, **2005.**

[62] Weber, K., Alcock, L., Semantic and syntactic proof production, *Educational Studies in Mathematics,* 56, 209-234, **2004.**

# ÖZGEÇMİŞ

## Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Selin Güneş

Doğum Yeri : Diyarbakır

Medeni Hali : Bekâr

E-posta : selgun87@gmail.com

Adresi : Tunahan Mahallesi Gazi Caddesi Tunahan Sitesi 6K No:42 Eryaman/Ankara

## Eğitim

Lise : 2001-2005 Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans : 2005-2011 Hacettepe Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans : 2011-2013 Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı

Doktora : -

## Yabancı Dil ve Düzeyi

İnglizce : İyi düzeyde

Almanca : İyi düzeyde

## İş Deneyimi

-

## Deneyim Alanları

-

## Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

## Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

## Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

Güneş, S., Bülbül, A., Argümantasyon ve Kanıt Arasındaki İlişkiler, *12. Matematik Sempozyumu,* 23-25 Mayıs, Ankara, Türkiye, **2013.**