ÖRNEKLEME KURAMINDA YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

QUANTILE ESTIMATORS IN SAMPLE SURVEYS

SİBEL AL

PROF. DR. HÜLYA ÇINGI
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

SİBEL AL'ın hazırladığı "**Örnekleme Kuramında Yüzdelik Tahmin Edicileri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**'ında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK
Başkan ....

Prof. Dr. Hülya ÇINGI
Danışman ....

Prof. Dr. Cem KADILAR
Üye ....

Prof. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR
Üye ....

Doç. Dr. Semra TÜRKAN
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin / raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **" Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)

- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren .... Ay ertelenmiştir. (2)

- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

19/10 /2018

Sibel AL

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir

(2) Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. Şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü ve fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

(3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.
Madde 7. 2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

* Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.

Desteğini esirgemeyen ***ANNEM DİLEK AL'A*** *ve* ***KIZIM EDA ALADAĞ'A***

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

19/10/2018

SİBEL AL

ÖZET

ÖRNEKLEME KURAMINDA YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

Sibel AL

Doktora, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hülya ÇINGI

Ekim 2018, 96 Sayfa

Ekonomik değişkenler aşırı değerlere sahip olabilir ve bu durumda aşırı değerler ortalama üzerinde güçlü bir etki yaratmaktadır. Bu gibi durumlarda ortalama yerine ortanca ve diğer yüzdelik değerlerin kullanılması daha uygundur.

Kitle ortalaması, toplamı ve varyansının tahminine ilişkin literatürde çok sayıda çalışma olmasına rağmen, ortanca ve yüzdeliklerin tahmini için literatürde fazla çalışma yoktur.

Bu çalışmada, basit rastgele örnekleme, ard arda örnekleme ve iki safhalı örnekleme yöntemlerinde kullanılan yüzdelik tahmin edicileri tanıtılmıştır. Bu tahmin edicilerin hata kareler ortalama eşitliklerinin elde edilmesi ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu tahmin ediciler birbirleri ile hata kareler ortalamaları bakımından teorik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca yüzdelik tahmininde kalibrasyon yöntemleri incelenmiştir.

Basit rastgele örnekleme ve tabakalı rastgele örnekleme yöntemlerinde yeni yüzdelik tahmin edicileri önerilmiş, hata kareler ortalama eşitlikleri elde edilerek, tahmin edicilerin etkinlikleri tartışılmıştır. Literatürde asimptotik varyansı, hata kareler ortalama eşitlikleri verilen klasik, oransal, fark yüzdelik tahmin edicileri ile ilk olarak önerilen $\hat{Q}^1_{\ddot{0}_i}$ tahmin edici ailesi hata kareler ortalaması bakımından teorik olarak karşılaştırılmıştır. $\hat{Q}^1_{\ddot{0}_i}$ tahmin edici ailesinin klasik, oransal ve fark yüzdelik tahmin edicilerinden her zaman daha etkin olduğu görülmüştür. Tabakalı rastgele örnekleme yönteminde ayrı ve birleşik tahminler olmak üzere oransal ve fark yüzdelik tahmin edicileri önerilmiştir. Ayrıca basit rastgele örnekleme yönteminde ilk olarak önerilen tahmin edici ailesi tabakalı rastgele örnekleme yönteminde ayrı ve birleşik tahminler için uyarlanmıştır. Tabakalı rastgele örnekleme yönteminde ayrı ve birleşik tahminler için önerilen tahmin ediciler içerisinde, önerilen tahmin edici ailesinin her zaman klasik, oransal ve fark tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir.

Basit rastgele örnekleme yönteminde tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için iki farklı veri seti ele alınmıştır. Tabakalı rastgele örnekleme yönteminde önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için de sayısal bir örnek verilmiştir. Literatürde yer alan ve önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini incelemek için, tahmin edicilere ilişkin hata kareler ortalama değerleri veri setleri üzerinden hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yüzdelik tahmini, basit rastgele örnekleme, tabakalı rastgele örnekleme, hata kareler ortalaması, oransal tahmin edici, yardımcı değişken.

ABSTRACT

QUANTILE ESTIMATORS IN SAMPLE SURVEYS

Sibel AL

Doctor of Philosophy, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Hülya ÇINGI

October 2018, 96 pages

Economic variables can have extreme values and in this case, these extreme values have a very strong impact on the mean. In such cases, using median and quantiles is more convenient instead of using mean.

In literature, there have been many studies for estimating the population mean, population total and population variance but relatively less effort has been devoted to the development of efficient methods for estimating the population median and quantiles.

In this study, quantile estimators, which are used in simple random sampling, successive sampling and two-phase sampling, are introduced. Mean squared error equations of these estimators are obtained and estimators are compared with each other in terms of mean squared errors. In addition, the calibration methods have been examined in the estimation of quantiles.

New quantile estimators are proposed in simple random sampling and in stratified random sampling, mean squared error equations are obtained and the efficiencies of estimators are discussed. Asymptotic variance and mean squared error equations of classical, ratio and difference estimators, which are given in literature are compared with first proposed family of estimator of $\hat{Q}^{1}_{\ddot{0}_i}$ in terms of mean squared errors. It is seen that the family of estimator of $\hat{Q}^{1}_{\ddot{0}_i}$ is always more efficient than the classical, ratio and difference quantile estimators. Ratio and difference quantile estimators, including separate and combined estimates, are proposed in stratified random sampling. In addition, the first proposed a family of estimator in simple random sampling is adapted to separate and combined estimates in the stratified random sampling. It is shown that, within the proposed estimators for separate and combined estimates in stratified random sampling, the proposed family of estimators are always more efficient than the classical, ratio and difference estimators.

In the simple random sampling method, two different data sets are taken into account to compare the efficiencies of estimators. A numerical example is also given to compare efficiencies of the proposed estimators in stratified random sampling. In order to examine the efficiencies of the estimators in the literature, the mean squared error values of the estimators are calculated. The obtained results are interpreted.

Keywords: Quantile estimation, simple random sampling, stratified random sampling, mean squared error, ratio estimator, auxiliary information.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince, değerli katkı ve eleştirileriyle her zaman yol gösteren ve ihtiyacım olduğu her zaman yanımda olan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGI'ya, değerli katkı ve eleştirilerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Cem KADILAR'a, Sayın Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK'a, Sayın Prof. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR'e ve Sayın Doç. Dr. Semra TÜRKAN'a, manevi desteklerini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma, her zaman yanımda olarak bana destek olan annem Dilek AL'a ve kızım Eda ALADAĞ'a, içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER

Sayfa

ÇİZELGELER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$Q_y(\beta)$	y değişkenine ilişkin β. kitle yüzdeliği
$\hat{Q}_y(\beta)$	y değişkenine ilişkin β. kitle yüzdeliğinin tahmini
$\hat{Q}_{RKM1}$	Rao , Kovar ve Mantel [12] oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RKM2}$	Rao , Kovar ve Mantel [12]] fark yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)$	Garcia, Cebrian ve Rodriguez [15] oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}^{M}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)$	Garcia, Cebrian ve Rodriguez [15] çok değişkenli oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}^{M}_{GCRE}\left(M_y\right)$	Garcia ve Cebrian [16] çok değişkenli regresyon yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}_{RARM}\left(Q_y(\beta)\right)$	Rueda ve Arcos [16] çok değişkenli oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}_{RAD}\left(Q_y(\beta)\right)$	Rueda ve Arcos [16] çok değişkenli fark yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right)$	Ahmed, Abu-Dayyeh ve Samawi [18] yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RD}(\beta)$	Rueda, Arcos ve Martinez-Miranda [19] tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RA}(\beta)$	Rueda ve Arcos [21] tahmin edicisi
$\hat{Q}_{AD}$	Arcos, Rueda ve Martinez-Miranda [22] tahmin edicisi
$\hat{Q}_y(\hat{p}_1)$	Kuk ve Mak [11] konum tahmin edicisi
$\tilde{F}_y(M_{YS})$	Kuk ve Mak [11] tabakalanma tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RDi}\quad i=1,\ldots,4$	Rueda, Arcos, Martinez-Miranda ve Roman [20] tahmin edicileri
$\hat{Q}_{AM1}(\beta)$	Arcos, Rueda ve Munoz [26] üstel tahmin edicisi
$\hat{Q}_{AM2}(\beta)$	Arcos, Rueda ve Munoz [26] fark tahmin edicisi
$\hat{Q}_{MD1}(\beta)$	Martinez-Miranda, Garcia, Cebrian, Montoya ve Aguilera [27] oransal tahmin edicisi
$\hat{Q}_{MD2}(\beta)$	Martinez-Miranda, Garcia, Cebrian, Montoya ve Aguilera [27] fark tahmin edicisi
$\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)$	Rueda, Munoz, Gonzalez ve Arcos [28] Horwitz –Thompson tahmin edicisi

$\hat{Q}_{STSK(O)}(\beta)$	Singh, Tailor, Singh ve Kim [29] oransal tahmin edicisi
$\hat{Q}_{STSK(Ç)}(\beta)$	Singh, Tailor, Singh ve Kim [29] çarpımsal tahmin edicisi
$\hat{Q}_{STSK(R)}(\beta)$	Singh, Tailor, Singh ve Kim [29] regresyon tahmin edicisi
$\hat{Q}_{Ym}^{MR}(\beta)$	Rueda, Munoz ve Arcos [30] tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RD}^{S1}$	Rueda, Arcos, Munoz ve Singh [24] oransal tahmin edicisi
$\hat{Q}_{RD}^{S2}$	Rueda, Arcos, Munoz ve Singh [24] zincirleme oransal tahmin edicisi
$\hat{Q}_{Ö_i}^{1}$	Basit rasgele örnekleme yönteminde önerilen tahmin edici ailesi-1
$\hat{Q}_{Ö_i}^{2}$	Basit rasgele örnekleme yönteminde önerilen tahmin edici ailesi-2
$\hat{Q}_{YOB}(\beta)$	Önerilen birleşik oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{YOA}(\beta)$	Önerilen ayrı oransal yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{YFB}(\beta)$	Önerilen birleşik fark yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{YFA}(\beta)$	Önerilen ayrı fark yüzdelik tahmin edicisi
$\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st}$	Önerilen birleşik tahmin edici ailesi
$\hat{Q}_{Ö_{ia}}^{1st}$	Önerilen ayrı tahmin edici ailesi

1. GİRİŞ

Örnekleme kuramı, kitleden kitlenin yapısına en uygun örnekleme yöntemiyle örneklem seçim sürecini ve seçilen örneklemden kitlenin özelliklerinin tahmin edilmesi sürecini ele almaktadır. Örneklem üzerinde çalışmak, araştırmacıya zaman, para ve insan gücü bakımından tasarruf sağlar. Bazı kitlelere büyüklüğü nedeniyle örneklemenin uygulanması zorunludur [1].

Araştırmalarda amaç, iyi bir örneklem ile yansız, tutarlı ve duyarlı tahminler yapabilmektir. İyi bir örneklem, kitleye en uygun örnekleme yönteminin belirlenmesinden sonra bu yönteme göre örneklem büyüklüğünün saptanmasıyla elde edilir. Uygun örnekleme yöntemi belirlenirken parametreye ilişkin örnekleme varyansının en küçük olduğu yöntem seçilir. Bu nedenle örnekleme yönteminin seçimi istatistikte önemli bir yer tutar [1].

Örnekleme çalışmalarında daha duyarlı tahmin edicilerin elde edilmesi için yardımcı değişken bilgisinden yararlanılabilir. İlgilenilen değişken ile yardımcı değişken arasında yüksek derecede ilişki olduğunda oransal tahmin yöntemi ile daha duyarlı tahmin ediciler elde edilebilir [2].

Yapılan çalışmalarda kitle ortalaması, toplamı ve varyansının tahmini için örnekleme yöntemlerinde kullanılan çeşitli tahmin edicilere oldukça sık rastlanmaktadır [3-4]. Ekonomik değişkenler çoğunlukla aşırı değerler içerirler. Bu durumda ortalama aşırı değerlerden oldukça etkilenir. Bu nedenle böyle durumlarda ortalama yerine ortanca ve diğer yüzdelik değerlerinin kullanılması daha uygundur. Gıda harcaması ile gelir arasındaki ilişkilerin analizinde, talep, ücret, maaş analizlerinde yüzdelik değerlerinin kullanıldığına rastlanılmıştır. Ayrıca yüzdelikler, ulusal kurumlar ve istatistik büroları tarafından düşük gelirlilerin oranının saptanmasında, Gini katsayısı ya da Lorenz eğrileri gibi önemli ölçümlerde kullanılmaktadır. Literatürde uygulamalarda yüzdeliklerin kullanımına ilişkin birçok örnek mevcuttur.

Kitle ortalaması, toplamı ve varyansının tahminine ilişkin literatürde çok sayıda çalışma olmasına rağmen, ortanca ve yüzdeliklerin tahmini için literatürde fazla çalışma yer almamaktadır. Bu çalışmada kitle yüzdeliklerinin tahminine ilişkin çalışmalar incelenerek, literatürde yer alan yüzdelik tahmin edicileri tanıtılacak ve yüzdelik tahmini için daha etkin tahmin ediciler önerilecektir.

Yüzdelik tahmininde iki önemli yöntem vardır:

1. Yardımcı değişkene ilişkin yüzdeliğin bilindiği varsayılarak dolaylı yüzdelik tahmin edicileri elde edilir.
2. Sonlu kitle dağılım fonksiyonunun monoton tahmin edicileri elde edilir ve tahmin edilmek istenilen yüzdeliğin uygun noktasında tersi alınır.

Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde, birçok çalışmada ikinci yaklaşım benimsenerek, süper kitle modeli varsayılmıştır ve model tabanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Ancak bu yaklaşımlar, hesaplamalarda zorluklarla karşılaşılmasından ve varsayılan süper kitle modelinin yetersizliğinden dolayı olası yana neden olmaktadır.

Woodruff [5], herhangi bir dağılım varsayımına dayanmaksızın ortanca ve diğer konum ölçüleri için güven aralığının elde edilmesini incelemiştir. Literatürde kitle yüzdeliğinin tahmini için farklı yaklaşımlar mevcuttur. Sen [6], belirli koşullar altında örneklem ortancasının örneklem yüzdelikleri arasında en küçük varyansa sahip olacağını belirtmiştir. Sedranks ve Meyer [7] basit rastgele örnekleme (BRÖ) ve tabakalı rastgele örnekleme (TRÖ) yöntemlerinde kitle yüzdeliklerinin güven aralığı için yeni yaklaşımlar önermişlerdir. Gross [8] klasik ortanca tahmin edicisini tanımlamış asimptotik varyansını elde etmiştir. Chambers ve Dunstan [9] kitle dağılım fonksiyonunun tahmini için yeni bir yöntem önermişler ve yüzdelik tahmini ile ilişkilendirmişlerdir. Francisco ve Fuller [10] büyük örneklemler için tabakalı küme örneklemesinde dağılım fonksiyonunun tahmini ile ilgilenmişlerdir. Kuk ve Mak [11] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak kitle ortancasının tahmini için oransal tahmin ediciyi önermişlerdir. Kuk ve Mak [11] ortanca tahmini için alternatif olarak konum tahmin edicisini ve dağılım fonksiyonunun sonradan tabakalandırılmasına dayanarak tabakalanma tahmin edicisini önermişlerdir. Rao ve diğerleri [12] yardımcı değişkene ilişkin bilginin bilindiği varsayımı altında oransal ve fark tahmin edicilerini önermişlerdir. Kuk [13], dağılım fonksiyonun tahmininde yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak Kernel yöntemini kullanmıştır. Mak ve Kuk [14] yardımcı değişken bilgisinin varlığında kitle yüzdeliğinin tahmini için bir algoritma önermişlerdir. Garcia ve diğerleri [15] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak kitle yüzdeliği için yeni bir güven aralığı önermişlerdir. Ayrıca Garcia ve diğerleri [15] çok değişkenli oransal tahmin ediciyi önermişlerdir. Garcia ve Cebrian [16] kitle ortancası için yeni bir güven aralığı önermişlerdir. Birden fazla yardımcı değişken bilgisi ve dağılım fonksiyonundan yararlanarak kitle ortancasının tahmini için çok değişkenli regresyon tahmin edicisini önermişlerdir. Rueda ve Arcos [17], dağılım fonksiyonu ve yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak yüzdelik tahmini için çok değişkenli oransal ve fark tahmin edicilerini önermişlerdir. Ahmed ve diğerleri [18] birden fazla yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak kitle yüzdeliğinin güven aralığının tahmin edilmesinde genel bir yöntem önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [19] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak yeni bir tahmin edici önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [20] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak çeşitli tahmin ediciler önermişler ve tahmin edicilerin asimptotik varyanslarını elde etmişlerdir. Rueda ve Arcos [21] kitle yüzdeliğinin tahmin edilmesinde oransal üstel tahmin ediciyi önemişlerdir. Önermiş oldukları üstel tahmin edici için hem Woodruff [5] güven aralığı yaklaşımını kullanmışlar, hem de asimptotik varyans eşitliğini elde etmişlerdir.

Arcos ve diğerleri [22] yardımcı değişkene ilişkin bilinen parametrelerden yararlanarak yeni bir fark tahmin edicisi önermişlerdir.

Zhu ve Wang [23] sıralı küme örneklemesinde yüzdelik tahmini ile ilgilenmişlerdir. Rueda ve diğerleri [24] iki safhalı örnekleme yönteminde Horvitz-Thompson tipi bir tahmin edici önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [25] iki safhalı örnekleme yönteminde tabakalama için yüzdelik tahmin edicisini önermişlerdir. Arcos ve diğerleri [26] yardımcı değişken bilgisini kullanarak genel bir tahmin edici sınıfı önermişlerdir.

Martinez-Miranda ve diğerleri [27] oransal ve fark tahmin edicilerini ard arda örnekleme yönteminde önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [28], isteğe bağlı örnekleme tasarımı ile birlikte ard arda yönteminde yüzdelik tahmin edici sınıfı önermişlerdir. Singh ve diğerleri [29] oransal, çarpımsal ve regresyon yüzdelik tahmin edicilerini ard arda örnekleme yönteminde önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [30], ard arda örnekleme yönteminde p yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak çok değişkenli oransal bir tahmin edici önermişler ve tahmin edicinin asimptotik varyansını çıkarsamışlardır.

Singh ve diğerleri [31] yardımcı değişken bilgisini kullanarak dağılım fonksiyonun tahmini için bir tahmin edici ailesi önermişlerdir. Roman-Montoya ve diğerleri [32] yüzdelik için güven aralığı tahmininde Jackknife tekniğini kullanmışlardır. Munoz ve diğerleri [33] dağılım fonksiyonun tahmininde yeni oransal ve fark yüzdelik tahmin edicilerini önermişlerdir.

Ren [34], dağılım fonksiyonu ve yüzdelikler için kalibrasyon tahmin edicilerini birlikte geliştirmede ilk çalışmayı yapmıştır. Harms ve Duchesne [35], Ren [34] tarafından başlatılan çalışmanın devamı niteliğinde yüzdelik tahmini için kalibrasyon tahmin edicileri önermişlerdir. Rueda ve diğerleri [36] alternatif bir kalibrasyon tahmin edicisi önermişlerdir. Martinez ve diğerleri [37] yardımcı değişkenin bilgisi varlığında yüzdeliklerin tahminini tartışmışlardır. Kalibrasyon ve sonradan tabakalama tekniklerini dağılım fonksiyonun tahminde kullanarak daha etkin tahminler elde etmişlerdir. Önerilen yöntemi alternatif yöntemlerle karşılaştırarak sonradan tabakalandırılmış kalibrasyon tahmin edicisinin daha iyi sonuçlar verdiğini görmüşlerdir.

Mahdizadeh ve Arghami [38] kitleye ilişkin ortalamanın bilindiği varsayımı altında sıralı küme örneklemesi yönteminde yüzdelik tahminini önererek tahmin edicinin asimptotik özelliklerini tartışmışlardır. Yaptıkları benzetim çalışması ile önerdikleri tahmin edicinin klasik tahminden daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, literatürde yer alan yüzdelik tahmin edicileri incelenecektir. BRÖ ve TRÖ yöntemleri için yeni yüzdelik tahmin edicilerinin önerilmesi amaçlanmıştır. Önerilen tahmin ediciler literatürde yer alan bazı tahmin edicilerle teorik olarak karşılaştırılacaktır. Sayısal örnekler ile de tahmin edicilerin etkinlikleri incelenecektir.

2. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

BRÖ yönteminde önerilen yüzdelik tahmin edicileri incelendiğinde varyans eşitliğinin elde edilmesinde iki yaklaşım ele alınmıştır. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde bazı çalışmalarda Woodruff [5] güven aralığı yaklaşımı kullanılırken, bazı çalışmalarda asimptotik varyans eşitliği kullanılmıştır. Bu bölümde BRÖ yönteminde önerilen tahmin ediciler, Woodruff [5] güven aralığı yaklaşımı kullanılarak yapılan tahminler ve asimptotik varyansı elde edilerek yapılan tahminler olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir.

2.1. Woodruff [5] Güven Aralığı Yaklaşımı Kullanılarak Yapılan Tahminler

2.1.1. Woodruff [5] Güven Aralığı Yaklaşımı

Woodruff [5], herhangi bir dağılım varsayımına dayanmaksızın ortanca ve diğer konum ölçüleri için güven aralığının elde edilmesini incelemiştir. $y_1, y_2, \dots, y_N$ ilgilenilen y değişkenine ilişkin kitle birimleri olsun. Herhangi bir y için $(-\infty < y < \infty)$, $F_y(y)$ birikimli dağılım fonksiyonunu göstersin. Kitlenin β. yüzdeliği,

$$Q_y(\beta) = F_y^{-1}(\beta) = inf\{y|F_y(y) \geq \beta\} \tag{1}$$

olarak tanımlanır.

BRÖ'de $Q_y(\beta)$ kitle yüzdeliğinin tahmin edilmesi bir problem olarak ortaya konulmuştur. Genel bir yöntem olarak kitle yüzdeliğinin tahmini, dağılım fonksiyonunun tahmini üzerine kurulmuştur. $\hat{F}_y(y)$ tahmin edilerek buradan $Q_y(\beta)$ tahmin edilebilir, buradan da $\hat{Q}_y(\beta) = \hat{F}_y^{-1}(\beta)$'dan kitle yüzdeliğinin tahmini elde edilir.

Woodruff [5], büyük örneklemlerde kitle ortancası için güven aralığının belirlenmesini tanımlamıştır. d_1 ve d_2 herhangi iki sabit olmak üzere, herhangi bir $Q_y(\beta)$ için,

$$P\left\{d_1 \leq \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) \leq \ d_2\right\} \cong P\{\hat{F}_y^{-1}(d_1) \leq Q_y(\beta) \leq \hat{F}_y^{-1}(d_2)\}$$

yazılabilir. Burada d_1 ve d_2 $P\left\{d_1 \leq \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) \leq \ d_2\right\} = 1 - \alpha$ olacak biçimde seçilen sabitlerdir ve $[\hat{F}_y^{-1}(d_1), \hat{F}_y^{-1}(d_2)]$, $Q_y(\beta)$ için $\%100(1-\alpha)$ güven düzeyinde yaklaşık güven aralığını vermektedir.

BRÖ yönteminde $n\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)$ hipergeometrik dağılıma sahip bir değişken olduğundan $E\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) = F_y\left(Q_y(\beta)\right) = \beta$ ve $V\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)$ olarak yazılabilir [39]. Örneklem büyüklüğü yeterince büyük olduğunda $\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)$ yaklaşık olarak normal dağılmaktadır ve en küçük güven aralığı $f = n/N$ örnekleme oranı ve $z_{\alpha/2}$ standart normal dağılımda $(1-\alpha/2)$ yüzdelik noktasında üst sınırı göstermek üzere aşağıdaki gibi elde edilmektedir [39].

$d_1 = \beta - z_{\alpha/2}\left\{\frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\right\}^{1/2}$ ve $d_2 = \beta + z_{\alpha/2}\left\{\frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\right\}^{1/2}$

2.1.2. Rao ve Diğerleri [12] Tahmin Edicileri

2.1.2.1. Rao ve Diğerleri [12] Oransal Tahmin Edicisi

Rao ve diğerleri [12], x yardımcı değişken olmak üzere x değişkenine ilişkin β'nıncı kitle yüzdeliği $Q_x(\beta)$'nın bilindiğini varsayarak iki yeni kitle yüzdelik tahmin edicisi önermişlerdir. İlk olarak oransal kitle yüzdelik tahmin edicisi Eşitlik (2)'de görüldüğü gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{Q}_{RKM1} = \hat{Q}_y(\beta)\frac{Q_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)} \qquad (2)$$

$\hat{Q}_x(\beta)$, yardımcı değişkene ilişkin β'nıncı örneklem yüzdeliğini ifade etmektedir.

Woodruff [5], tarafından $Q_y(\beta)$ için elde edilen güven aralığı yaklaşımından yararlanarak, Rao ve diğerleri [12] oransal kitle yüzdelik tahmin edicisinin varyansını elde etmişlerdir. Woodruff [5], tarafından $Q_y(\beta)$ için elde edilen güven aralığında alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibidir.

$$inf\left\{t; \hat{F}_y(t) \geq \beta - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right)}\right\}$$

$$= \hat{F}_y^{-1}\left(\beta - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right)}\right)$$

$$inf\left\{t; \hat{F}_y(t) \geq \beta + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right)}\right\}$$

$$= \hat{F}_y^{-1}\left(\beta + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right)}\right)$$

Kovar ve diğerleri [40], Woodruff'un güven aralığını kullanarak $\hat{Q}_y(\beta)$ için varyans eşitliğini Eşitlik (3)'te görüldüğü biçimde elde etmişlerdir.

$$V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) \cong \left(\frac{L_y^\alpha(\beta)}{2z_{\alpha/2}}\right)^2 \tag{3}$$

$L_y^\alpha(\beta)$, $\hat{Q}_y(\beta)$ için $1-\alpha$ güven düzeyinde Woodruff güven aralığı uzunluğunu ifade etmektedir. Kovar ve diğerleri [40] α'nın seçiminin kritik olmadığını ve genellikle $\alpha = 0{,}05$'in alınmasının uygun olduğunu göstermiştir.

Benzer biçimde $\hat{Q}_x(\beta)$ için varyans eşitliği Eşitlik (4)'teki gibi yazılabilir.

$$V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right) \cong \left(\frac{L_x^\alpha(\beta)}{2z_{\alpha/2}}\right)^2 \tag{4}$$

$cov\left(\hat{Q}_x(\beta), \hat{Q}_y(\beta)\right)$ eşitliği ise Eşitlik (5)'te verilmiştir.

$$cov\left(\hat{Q}_x(\beta), \hat{Q}_y(\beta)\right) \cong \frac{L_y^\alpha(\beta) L_x^\alpha(\beta) \widehat{cov}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right), \hat{F}_x\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)\right)}{4z_{\alpha/2}^2 \sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right) \hat{V}\left(\hat{F}_x\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)\right)}} \tag{5}$$

Rao ve diğerleri [12] tarafından Eşitlik (2)'de tanımlanan oransal tahmin ediciye ilişkin hata kareler ortalaması (HKO) eşitliğinin elde edilmesinde fark yönteminde kullanılan terimler, bu terimlerin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları aşağıda verilmiştir.

$$e_0 = \frac{\hat{Q}_y(\beta) - Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)} \qquad e_1 = \frac{\hat{Q}_x(\beta) - Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$$

$$E(e_0) = E(e_1) = 0$$

$$E(e_0^2) = \frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{L_y^\alpha(\beta)}{2z_{\alpha/2}}\right)^2 \qquad E(e_1^2) = \frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{L_x^\alpha(\beta)}{2z_{\alpha/2}}\right)^2$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{Q_y(\beta) Q_x(\beta)} \frac{L_y^\alpha(\beta) L_x^\alpha(\beta) \widehat{cov}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right), \hat{F}_x\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)\right)}{4z_{\alpha/2}^2 \sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)\right) \hat{V}\left(\hat{F}_x\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)\right)}}$$

Fark yönteminden yararlanarak tahmin edici, ikinci dereceden büyük terimlerin ihmal edilmesi ile

$$\hat{Q}_{RKM1} = Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1}$$

$$\hat{Q}_{RKM1} \cong Q_y(\beta)(1+e_0)(1-e_1+e_1^2)$$

$$\hat{Q}_{RKM1} \cong Q_y(\beta)(1+e_0-e_1-e_0e_1+e_1^2) \tag{6}$$

biçimde elde edilir. HKO eşitliği,

$$E\left(\hat{Q}_{RKM1} - Q_y(\beta)\right)^2 \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0 - e_1 - e_0 e_1 + e_1^2\ )^2$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RKM1}\right) \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^2 + e_1^2 - 2e_0 e_1) \tag{7}$$

olup, (7)'den yararlanarak oransal tahmin ediciye ilişkin HKO eşitliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$HKO\left(\hat{Q}_{RKM1}\right) \cong V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) + \frac{(Q_y(\beta))^2}{(Q_x(\beta))^2} V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right) - 2\frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)} cov\left(\hat{Q}_x(\beta), \hat{Q}_y(\beta)\right) \tag{8}$$

2.1.2.2. Rao ve Diğerleri [12] Fark Tahmin Edicisi

Rao ve diğerleri [12] fark yüzdelik tahmin edicisini $R = Y/X$ ve $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} y_i / \sum_{i=1}^{n} x_i$ kitle toplamlarının oranının tahmini olmak üzere Eşitlik (9)'daki gibi önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{RKM2} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{R}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{9}$$

Ortalama tahmininde fark yönteminde kullanılan terimler, bu terimlerin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları aşağıda özetlenmiştir. Bu terimlerden de yararlanarak fark yüzdelik tahmin edicisi Eşitlik (10)'da verildiği biçimde yazılabilir.

$$e_0{}^* = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \qquad e_1{}^* = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}} \qquad E(e_0{}^*) = E(e_1{}^*) = 0$$

$$E\left(e_0{}^{*2}\right) = \frac{1-f}{n}\frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} \qquad E\left(e_1{}^{*2}\right) = \frac{1-f}{n}\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \qquad E(e_0{}^* e_1{}^*) = \frac{1-f}{n}\frac{S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}}$$

$$\hat{Q}_{RKM2} \cong Q_y(\beta)(1 + e_0) + R(1 + e_0{}^*)(1 + e_1{}^*)^{-1}\left(Q_x(\beta) - Q_x(\beta)(1 + e_1)\right) \tag{10}$$

Eşitlik (10)'da $(1 + e_1{}^*)^{-1}$ terimi Taylor serisi ile açılıp ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edildiğinde

$$\hat{Q}_{RKM2} \cong Q_y(\beta)(1 + e_0) + R(1 + e_0{}^*)(1 + e_1{}^*)^{-1}\left(Q_x(\beta) - Q_x(\beta)(1 + e_1)\right)$$

$$\hat{Q}_{RKM2} \cong Q_y(\beta)(1 + e_0) - RQ_x(\beta)(e_1 + e_1 e_0{}^* - e_1 e_1{}^*)$$

$$E\left(\hat{Q}_{RKM2} - Q_y(\beta)\right)^2 \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^2) + R^2\left(Q_x(\beta)\right)^2 E(e_1^2) - 2RQ_x(\beta)Q_y(\beta)E(e_0 e_1)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RKM2}\right) \cong V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) + R^2 V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right) - 2Rcov\left(\hat{Q}_x(\beta), \hat{Q}_y(\beta)\right) \tag{11}$$

biçiminde elde edilir.

2.1.3. Garcia ve Diğerleri [15] Tahmin Edicileri

2.1.3.1. Garcia ve Diğerleri [15] Oransal Tahmin Edicisi

Garcia ve diğerleri [15] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak kitle yüzdeliği için yeni bir güven aralığı önermişlerdir. $Q_x(\beta)$'nin bilindiği varsayımı altında önermiş oldukları oransal tahmin edici Eşitlik (12)'de görülmektedir.

$$\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right) = \frac{\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)}{\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)} F_x\left(Q_x(\beta)\right) \quad (12)$$

$\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)$'nin yaklaşık normal dağıldığı varsayımı altında güven aralığına ilişkin alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$c_1 = \beta - z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right)\right\}^{1/2} \quad c_2 = \beta + z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right)\right\}^{1/2}$$

$$P\left(\hat{F}_y^{-1}\left(c_1\frac{\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)}{\beta}\right) \leq Q_y(\beta) \leq \hat{F}_y^{-1}\left(c_2\frac{\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)}{\beta}\right)\right) = 1-\alpha$$

$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right)$ 'yi elde etmek için, fark yönteminden yararlanarak aşağıda verilen eşitlikleri tanımlamışlardır.

$$e_0^{\circ} = \frac{\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) - F_y\left(Q_y(\beta)\right)}{F_y\left(Q_y(\beta)\right)} \qquad e_1^{\circ} = \frac{\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right) - F_x\left(Q_x(\beta)\right)}{F_x\left(Q_x(\beta)\right)}$$

Dönüşüm yapıldıktan sonra tahmin edici Eşitlik(13)'te olduğu gibi yazılır.

$$\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right) = F_y\left(Q_y(\beta)\right)\frac{1+e_0^{\circ}}{1+e_1^{\circ}} \quad (13)$$

Taylor serisi açılımından yararlanarak ve ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilerek HKO eşitliği

$$\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right) \cong F_y\left(Q_y(\beta)\right)(1+e_0^{\circ})(1-e_1^{\circ}+e_1^{\circ 2})$$

$$E\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right) - F_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)^2 \cong F_y\left(Q_y(\beta)\right)^2(e_0^{\circ} - e_1^{\circ} - e_0^{\circ}e_1^{\circ} + e_1^{\circ 2})^2$$

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong F_y\left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^{\circ 2} + e_1^{\circ 2} - 2e_0^{\circ}e_1^{\circ})$$

$$\cong \beta^2\left[\frac{1}{\beta^2}V\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) + \frac{1}{\beta^2}V\left(\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)\right) - \frac{2}{\beta^2}cov\left(\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right), \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)\right]$$

$$\cong 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\beta(1-\beta) - 2cov\left(\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right), \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) \qquad (14)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (14)'te yer alan $cov\left(\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right), \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)$ terimini hesaplamak için Çizelge 2.1'de verilen iki yönlü sınıflama tablosu kullanılmıştır.

Çizelge 2.1: İki Yönlü Sınıflama Tablosu

	$x \leq Q_x(\alpha)$	$x > Q_x(\alpha)$	
$y \leq Q_y(\beta)$	$n_{11}\backslash N_{11}$	$n_{12}\backslash N_{12}$	$n_{1.}\backslash N_{1.}$
$y > Q_y(\beta)$	$n_{21}\backslash N_{21}$	$n_{22}\backslash N_{22}$	$n_{2.}\backslash N_{2.}$
	$n_{.1}\backslash N_{.1}$	$n_{.2}\backslash N_{.2}$	

n_{11} örneklemde $y \leq Q_y(\beta)$ ve $x \leq Q_x(\beta)$ olanların sayısını, N_{11} kitlede $y \leq Q_y(\beta)$ ve $x \leq Q_x(\beta)$ olanların sayısını göstermektedir. $(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22})$ hipergeometrik dağılıma sahip rastlantı değişkeni olduğundan

$$(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}) \sim HG(N, n, N_{11}, N_{12}, N_{21})$$

$$n\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) = n_{11} + n_{12} \qquad n\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right) = n_{11} + n_{21}$$

$$cov\left(n\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right), n\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) = cov(n_{11} + n_{12}, n_{11} + n_{21})$$

$$= V(n_{11}) + cov(n_{11}, n_{12}) + cov(n_{11}, n_{21}) + cov(n_{12}, n_{21})$$

$$cov(n_i, n_j) = -\frac{N-n}{N-1} n \frac{N_i N_j}{N^2}, \qquad V(n_{ij}) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{N_{ij}}{N}\left(1 - \frac{N_{ij}}{N}\right)$$

$$cov\left(n\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right), n\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \frac{N-n}{N-1}\frac{n}{N^2}(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}) \qquad (15)$$

kovaryans eşitliği Eşitlik (15)'teki gibi elde edilir.

Eşitlik (14) yeniden düzenlenirse,

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\beta(1-\beta) - \frac{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}{N^2}\right) \qquad (16)$$

yazılabilir.

Cramer'in V katsayısını kullanarak

$$\phi(\beta) = \frac{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}{\sqrt{N_{1.}N_{2.}N_{.1}N_{.2}}}$$

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\beta(1-\beta)\left(1-\phi(\beta)\right) \tag{17}$$

eşitliği elde edilir.

2.1.3.2. Garcia ve Diğerleri [15] Çok Değişkenli Oransal Tahmin Edicisi

Garcia ve diğerleri [15] $\sum_{i=1}^{l} w_i = 1$ olmak üzere çok değişkenli oransal tahmin ediciyi önermişlerdir.

$$\hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{l} w_i \frac{\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\beta \qquad i = 1,2,\dots,l \tag{18}$$

$\mathrm{P}\left(c_1 \le \hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right) \le c_2\right) = 1-\alpha$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sabitler olsun.

$$P\left(\frac{c_1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{w_i}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\right)^{-1} \le \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) \le \frac{c_2}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{w_i}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\right)^{-1}\right) = 1-\alpha$$

$$\left[\hat{F}_y^{-1}\left(\frac{c_1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{w_i}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\right)^{-1}\right), \hat{F}_y^{-1}\left(\frac{c_2}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{w_i}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\right)^{-1}\right)\right] \tag{19}$$

Çok değişkenli yüzdelik tahmin edicisine ilişkin güven aralığı Eşitlik (19)'da verilmiştir. $\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right) = \frac{\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)}\beta$ olmak üzere tahmin ediciye ilişkin HKO

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong \sum_{i=1}^{l} w_i^2 HKO\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right)\right)$$

$$+2\sum_{i<j} w_i w_j cov\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right), \hat{F}_{RGCRj}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \tag{20}$$

biçiminde elde edilmektedir.

Eşitlik (16)'dan yararlanarak,

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\beta(1-\beta)\left(1-\phi_i(\beta)\right) \quad i = 1,2,\dots,l$$

$$cov\left(\hat{F}_{x_i}\left(Q_y(\beta)\right), \hat{F}_{x_j}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\phi_{ij}(\beta)$$

$$cov\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right), \hat{F}_{RGCR_j}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\left[1-\phi_i(\beta)-\phi_j(\beta)+\phi_{ij}(\beta)\right]$$

olmak üzere

$$HKO\left(\hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\beta(1-\beta)\left[\sum_{i=1}^{l} w_i^2\left(1-\phi_i(\beta)\right)+\sum_{i<j} w_i w_j\left(1-\phi_i(\beta)-\phi_j(\beta)+\phi_{ij}(\beta)\right)\right] \quad (21)$$

olarak elde edilir.

$\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_l)'$, $\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}=\left(\hat{F}_{R_1}\left(Q_y(\beta)\right),\dots,\hat{F}_{R_l}\left(Q_y(\beta)\right)\right)'$ ve $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$,

$a_{ij}=cov\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right),\hat{F}_{RGCR_j}\left(Q_y(\beta)\right)\right)$, $a_{ii}=V\left(\hat{F}_{RGCR_i}\left(Q_y(\beta)\right)\right)$ olmak üzere tahmin edici Eşitlik (22)'de, tahmin edicinin HKO eşitliği ise Eşitlik (23)'te görülmektedir.

$$\hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right) \cong \boldsymbol{w}'\hat{F}_{RGCR} \quad (22)$$

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\mathrm{F}}_{RGCR}^{\mathrm{M}}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong \boldsymbol{w}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} \quad (23)$$

Eşitlik (23)'ten optimal $\boldsymbol{w}$ değeri

$$\boldsymbol{w}_{opt}=\frac{\boldsymbol{A}^{-1}e}{e'\boldsymbol{A}^{-1}e}, e=(1,\dots,1)' \quad (24)$$

olarak elde edilir. Buradan da minimum HKO

$$HKO_{Min}\left(\hat{F}_{RGCR}^{M}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \cong \frac{1}{\boldsymbol{w}_{opt}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{w}_{opt}} \quad (25)$$

biçiminde elde edilir.

2.1.4. Garcia ve Cebrian [16] Tahmin Edicisi

Garcia ve Cebrian [16] kitle ortancası için yeni bir güven aralığı önermişlerdir. Birden fazla yardımcı değişken bilgisi ve dağılım fonksiyonundan yararlanarak kitle ortancasının tahmini için çok değişkenli regresyon tahmin edicisini önermişlerdir.

$$\hat{F}_{GCRE}^{M}\left(M_y\right)=\hat{F}_y\left(M_y\right)+\sum_{i=1}^{l} b_i\left(\beta-\hat{F}_{x_i}\left(M_{x_i}\right)\right) \quad (26)$$

$P\left\{c_1 \le \hat{F}_{GCRE}^{M}\left(M_y\right) \le c_2\right\}=1-\alpha$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sabitler olsun. Kitle ortancası M_y için güven aralığı aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$$\left[\hat{F}_y^{-1}\left(c_1-\sum_{i=1}^{l} b_i\left(\beta-\hat{F}_{x_i}\left(M_{x_i}\right)\right)\right),\hat{F}_y^{-1}\left(c_2-\sum_{i=1}^{l} b_i\left(\beta-\hat{F}_{x_i}\left(M_{x_i}\right)\right)\right)\right]$$

Çok değişkenli regresyon tahmin edicisi için c_1 ve c_2 değerleri $c_1 = \beta - z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right)\right\}^{1/2}$, $c_2 = \beta + z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right)\right\}^{1/2}$’dir. Bilinmeyen yaklaşık varyansı tahmin etmek pek kolay olmadığından Taylor’un doğrusallaştırma metodu kullanılarak tutarlı $\hat{V}\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right)$ tahmin edicisi elde edilebilir. $A = \sum_{i=1}^{l} b_i\left(\beta - \hat{F}_{x_i}(M_{x_i})\right)$ olmak üzere güven aralığı,

$$\left[\hat{F}_y^{-1}\left(\beta - Z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right)\right\}^{1/2} - A\right), \hat{F}_y^{-1}\left(\beta + Z_{\alpha/2}\left\{V\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right)\right\}^{1/2} - A\right)\right] \tag{27}$$

biçiminde yazılabilir.

$\boldsymbol{B} = (b_1, \dots, b_l)'$, $\boldsymbol{Q} = \beta(1, \dots, 1)'$ ve $\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}} = \left(\hat{F}_{x_1}(M_{x_1}), \dots, \hat{F}_{x_l}(M_{x_l})\right)'$ olmak üzere tahmin edici Eşitlik (28)’de görüldüğü biçimde yazılabilir.

$$\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y) = \hat{F}_y(M_y) + \left(\boldsymbol{Q} - \hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}\right)'\boldsymbol{B} \tag{28}$$

Optimal katsayıları bulmak için varyans $\boldsymbol{B} = (b_1, \dots, b_l)'$ katsayılarına göre minimize edilir.

$\boldsymbol{\Sigma} = (a_{ij})$, $a_{ij} = cov\left(\hat{F}_{x_i}(M_{x_i}), \hat{F}_{x_j}(M_{x_j})\right)$ $i \neq j = 1, \dots, l$, $a_{ii} = V\left(\hat{F}_{x_i}(M_{x_i})\right)$, $i = 1, \dots, l$ ve $\boldsymbol{\sigma} = \left(cov\hat{F}_y(M_y), \hat{F}_{x_1}(M_{x_1}), \dots, cov\hat{F}_y(M_y), \hat{F}_{x_l}(M_{x_l})\right)'$ olmak üzere optimal $\boldsymbol{B}$ değeri

$$\boldsymbol{B}_{opt} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{29}$$

olarak elde edilir. Tahmin ediciye ilişkin minimum varyans Eşitlik (30)’da verilmiştir.

$$V_{Min}\left(\hat{F}_{GCRE}^{M}(M_y)\right) = V\left(\hat{F}_y(M_y)\right) - \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{30}$$

2.1.5. Rueda ve Arcos [17] Tahmin Edicileri

2.1.5.1. Rueda ve Arcos [17] Çok Değişkenli Oransal Tahmin Edicisi

Rueda ve Arcos [17], yüzdeliklere ilişkin dağılım fonksiyonu ve yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak ortanca tahmini için çok değişkenli oransal tahmin edicisini önermişlerdir. $Q_{x_i}(\alpha_i)$’in bilindiği varsayımı altında $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i \neq 1/2$ ve $\beta = 1/2$, $\sum_{i=1}^{l} w_i = 1$ olmak üzere, önerilen tahmin edici

$$\hat{F}_{RARM}\left(Q_y(\beta)\right) = \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\sum_{i=1}^{l} w_i \frac{F_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right)}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right)} = \sum_{i=1}^{l} w_i \hat{F}_{RAR_i} \tag{31}$$

biçimindedir.

$\boldsymbol{W} = (w_1, \ldots, w_l)'$ *ve* $\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{RAR}} = \left(\hat{F}_{RAR_1}, \ldots, \hat{F}_{RAR_l}\right)'$ olmak üzere Eşitlik (31)'de verilen tahmin edici

$$\hat{F}_{RARM}\left(Q_y(\beta)\right) = \boldsymbol{W}'\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{RAR}} \tag{32}$$

biçiminde yazılabilir.

$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{l\times l}$, $a_{ij} = cov\left(\hat{F}_{RAR_i}, \hat{F}_{RAR_j}\right), i \neq j$ *ve* $a_{ii} = V\left(\hat{F}_{RAR_i}\right)$ olmak üzere Eşitlik (32)'de verilen tahmin edicinin HKO

$$HKO\left(\hat{F}_{RARM}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \tag{33}$$

olmaktadır. $e = (1, \ldots, 1)'$ olmak üzere optimal $\boldsymbol{W}$ değeri $\boldsymbol{W}_{opt} = \frac{\boldsymbol{A}^{-1}e}{e'\boldsymbol{A}^{-1}e}$ biçiminde elde edilir. Oransal tahmin ediciye ilişkin minimum HKO ise Eşitlik (34)'te verilmiştir.

$$HKO_{Min}\left(\hat{F}_{RARM}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \frac{1}{e'\boldsymbol{A}^{-1}e} \tag{34}$$

2.1.5.2. Rueda ve Arcos [17] Çok Değişkenli Fark Tahmin Edicisi

Rueda ve Arcos [17], yüzdeliklere ilişkin dağılım fonksiyonu ve yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak ortanca tahmini için çok değişkenli fark tahmin edicisini önermişlerdir. $Q_{x_i}(\alpha_i)$'in bilindiği varsayımı altında $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i \neq 1/2$ ve $\beta = 1/2$, $\sum_{i=1}^{l} w_i = 1$ olmak üzere, önerilen tahmin edici

$$\hat{F}_{RAD}\left(Q_y(\beta)\right) = \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i\left(F_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right) - \hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right)\right) \tag{35}$$

biçimindedir.

Eşitlik (35)'te verilen tahmin edici, $\boldsymbol{B} = (b_1, \ldots, b_l)'$, $\boldsymbol{\Lambda} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)'$ ve $\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}} = \left(\hat{F}_{x_1}\left(Q_{x_1}(\alpha_1)\right), \ldots, \hat{F}_{x_l}\left(Q_{x_l}(\alpha_l)\right)\right)'$ olmak üzere

$$\hat{F}_{RAD}\left(Q_y(\beta)\right) = \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) + \left(\boldsymbol{\Lambda} - \widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}\right)'\boldsymbol{B} \tag{36}$$

biçiminde yazılabilir.

$\boldsymbol{\sigma} = \left(cov\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right), \hat{F}_{x_1}\left(Q_{x_1}(\alpha_1)\right), \ldots, cov\hat{F}_y\left(M_y\right), \hat{F}_{x_l}\left(Q_{x_l}(\alpha_l)\right)\right)'$, $\boldsymbol{\Sigma} = \left(S_{ij}\right)$, $S_{ij} = cov\left(\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right), \hat{F}_{x_j}\left(Q_{x_j}(\alpha_j)\right)\right), i \neq j = 1, \ldots, l$ ve $S_{ii} = V\left(\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\alpha_i)\right)\right)$, $i =$

$1, \ldots, l$ olarak tanımlanmıştır. Optimal $\boldsymbol{B}$ değeri $\boldsymbol{B}_{opt} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ olarak elde edilir. Optimal $\boldsymbol{B}$ değeri yerine konulduğunda fark tahmin edicisine ilişkin minimum varyans,

$$V_{Min}\left(\hat{F}_{RAD}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = V\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right) - \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{37}$$

olarak elde edilir.

2.1.6. Ahmed ve Diğerleri [18] Tahmin Edicisi

Ahmed ve diğerleri [18], Rueda ve Arcos [17]'den yararlanarak Eşitlik (38)'de verilen tahmin ediciyi önermişlerdir.

$$\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i \frac{\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)}{\hat{F}_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right)} F_{x_i}\left(Q_{x_i}(\beta)\right) + \theta_0 \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)$$

$$\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i \hat{F}_{R_i}\left(Q_y(\beta)\right) + \theta_0 \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) \tag{38}$$

$\sum_{i=0}^{l} \theta_i = 1$ olmak üzere Eşitlik (38)'de önerilen tahmin edici,

$$\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right) = \hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) - \sum_{i=1}^{l} \theta_i \left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) - \hat{F}_{R_i}\left(Q_y(\beta)\right)\right) \tag{39}$$

biçiminde yazılabilir.

$\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) = t_0$, $\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right) - \hat{F}_{R_i}\left(Q_y(\beta)\right) = t_j$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_l)'$ ve $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l)$ olarak tanımlandığında önerilen tahmin ediciye ilişkin HKO eşitliği

$$HKO\left(\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \sigma_{t_0}^2 - 2\boldsymbol{m}'\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}'M\boldsymbol{\theta} \tag{40}$$

olur. Burada $E(t_0^2) = \sigma_{t_0}^2$, $i, i' = 1,2, \ldots, l$ olmak üzere $\boldsymbol{M} = (M_{ii'}) = Cov(t_i, t_{i'})$, $\boldsymbol{m} = (m_i) = Cov(t_i, t_0)$ olarak tanımlanmıştır. $\boldsymbol{\theta}$'ya göre HKO minimize edildiğinde optimal $\boldsymbol{\theta}_{opt} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{m}$ olarak elde edilir. Bu durumda minimum HKO eşitliği

$$HKO_{Min}\left(\hat{F}_{AAS}\left(Q_y(\beta)\right)\right) = \sigma_{t_0}^2 - \boldsymbol{m}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{m} \tag{41}$$

biçiminde bulunur.

2.1.7. Rueda ve Diğerleri [19] Tahmin Edicisi

Rueda ve diğerleri [19], b sabit bir değer olmak üzere yardımcı değişken bilgisini kullanarak Eşitlik (42)'de verilen tahmin ediciyi önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{RD}(\beta) = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{b}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{42}$$

Tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse,

$$\hat{Q}_{RD}(\beta) = Q_y(\beta)(1 + e_0) + \hat{b}\big(Q_x(\beta) - Q_x(\beta)(1 + e_1)\big)$$

$$\hat{Q}_{RD}(\beta) = Q_y(\beta) + Q_y(\beta)e_0 - \hat{b}Q_x(\beta)e_1 \tag{43}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (43)'te verilen tahmin edicide, eşitliğin her iki tarafından $Q_y(\beta)$ değeri çıkartılıp, karesinin beklenen değeri alınırsa,

$$V\left(\hat{Q}_{RD}(\beta)\right) = Q_y^2(\beta)E(Ee_0^2) + \hat{b}^2Q_x^2(\beta)E(e_1^2) - 2\hat{b}Q_x(\beta)Q_y(\beta)E(e_0e_1)$$

$$V\left(\hat{Q}_{RD}(\beta)\right) = V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) + \hat{b}^2V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right) - 2\hat{b}\widehat{cov}\left(\hat{Q}_y(\beta), \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{44}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (44)'te $\hat{b}$'ya göre birinci dereceden türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal $\hat{b}$ değeri

$$\hat{b}_{opt} = \frac{\widehat{cov}\left(\hat{Q}_y(\beta), \hat{Q}_x(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)} \cong \frac{L_y^{\alpha}(\beta)\widehat{cov}\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right), \hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)\right)}{L_x^{\alpha}(\beta)\sqrt{\hat{V}\left(\hat{F}_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)\hat{V}\left(\hat{F}_x\left(Q_x(\beta)\right)\right)}} = \frac{L_y^{\alpha}(\beta)}{L_x^{\alpha}(\beta)}\phi(\beta)$$

eşitlikteki gibi elde edilir. Woodruff'un güven aralığından yararlanarak $\phi(\beta)$ iki yönlü sınıflama tablosundan elde edilen Cramer'in V katsayısı olmak üzere, optimal $\hat{b}_{opt}$ değeri yerine konulursa minimum varyans,

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_d(\beta)\right) = \left(\frac{L_y^{\alpha}(\beta)}{2z_{\alpha/2}}\right)^2 [1 - \phi^2(\beta)] \tag{45}$$

biçiminde elde edilir.

2.1.8. Rueda ve Arcos [21] Tahmin Edicisi

Rueda ve Arcos [21] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak Eşitlik (46)'da verilen üstel tahmin ediciyi önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{RA}(\beta) = \hat{Q}_y(\beta)\left(\frac{Q_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)}\right)^{\alpha} \tag{46}$$

Eşitlik (46)'da verilen tahmin edici e'li terimler ile ifade edilir ve ikinci dereceden yüksek terimler ihmal edilirse,

$$\hat{Q}_{RA}(\beta) = Q_y(\beta)(1 + e_0)(1 + e_1)^{-\alpha}$$

$$\hat{Q}_{RA}(\beta) = Q_y(\beta)(1 + e_0)\left(1 - \alpha e_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2 - \ldots\right)$$

$$\hat{Q}_{RA}(\beta) \cong Q_y(\beta)\left(1 + e_0 - \alpha e_1 - \alpha e_0e_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2\right) \tag{47}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (47)'nin her iki tarafından $Q_y(\beta)$ çıkartılıp, her iki tarafın karesinin beklenen değeri alınırsa, (46) numaralı eşitlikte önerilen tahmin edicinin HKO,

$$HKO\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong Q_y^2(\beta)E(e_0^2 + \alpha^2 e_1^2 - 2\alpha e_0 e_1)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong Q_y^2(\beta)\left[\frac{V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)}{Q_y^2(\beta)} + \alpha^2 \frac{V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)}{Q_x^2(\beta)} - 2\alpha \frac{cov\left(\hat{Q}_y(\beta),\hat{Q}_x(\beta)\right)}{Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\right] \quad (48)$$

biçiminde elde edilir. (48) numaralı eşitlikte α'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal α değeri Eşitlik (49)'daki gibi elde edilir.

$$\alpha_{opt} = \frac{cov\left(\hat{Q}_y(\beta),\hat{Q}_x(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)} \frac{Q_x(\beta)}{Q_y(\beta)} \quad (49)$$

Eşitlik (49)'da verilen optimal α değeri Eşitlik (48)'de yerine konulursa minimum HKO,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) - \frac{cov^2\left(\hat{Q}_y(\beta),\hat{Q}_x(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_x(\beta)\right)} \quad (50)$$

biçiminde elde edilir.

2.1.9. Arcos ve Diğerleri [22] Tahmin Edicisi

Arcos ve diğerleri [22] yardımcı değişkene ilişkin bilinen parametrelerden yararlanarak yeni bir fark tahmin edicisi önermişlerdir. θ_{i1} ve θ_{i2} iki bilinen kitle parametresi olmak üzere önerilen tahmin edici

$$\hat{Q}_{AD} = \hat{\theta}_y + \sum_{i=1}^{k} c_i\left(\theta_{i1} - \hat{\theta}_{i1}\right) + \sum_{i=1}^{k} d_i\left(\theta_{i2} - \hat{\theta}_{i2}\right) \quad (51)$$

eşitlikte görülmektedir. $\boldsymbol{B} = (c_1, d_1, \dots, c_k d_k)'$, $\boldsymbol{P} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{k1}, \theta_{k2})'$ ve $\boldsymbol{p} = \left(\hat{\theta}_{11}, \hat{\theta}_{12}, \dots, \hat{\theta}_{k1}, \hat{\theta}_{k2}\right)'$ olmak üzere tahmin edici Eşitlik (52)'deki gibi yazılabilir.

$$\hat{Q}_D = \hat{Q}_y + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p})'\boldsymbol{B} \quad (52)$$

Eğer i tek ise $a_{ii} = V\left(\hat{\theta}_{i1}\right)$, eğer i çift ise $a_{ii} = V\left(\hat{\theta}_{i2}\right)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Sigma} = \left(a_{ij}\right)$ olarak tanımlansın. Eğer i ve j çift ise $a_{ij} = cov\left(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{\theta}_{\frac{j}{2}2}\right)$, eğer i çift j tek ise $a_{ij} = cov\left(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{\theta}_{\frac{j+1}{2}1}\right)$, eğer i tek j çift ise $a_{ij} = cov\left(\hat{\theta}_{\frac{i+1}{2}1}, \hat{\theta}_{\frac{j}{2}2}\right)$ ve son olarak eğer i ve j tek ise $a_{ij} = cov\left(\hat{\theta}_{\frac{i+1}{2}1}, \hat{\theta}_{\frac{j+1}{2}1}\right)$ biçiminde tanımlanmıştır. Benzer olarak

$\boldsymbol{\sigma} = \left(cov(\hat{\theta}, \hat{\theta}_{11}), cov(\hat{\theta}, \hat{\theta}_{12}), \dots, cov(\hat{\theta}, \hat{\theta}_{k1}), cov(\hat{\theta}, \hat{\theta}_{k2})\right)'$ olarak gösterilmiştir. Optimal $\boldsymbol{B}$ değeri $\boldsymbol{B}_{opt} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ olarak elde edilmiş ve Eşitlik (52)'de verilen tahmin edicinin minimum varyansı

$$V_{min}(\hat{Q}_{AD}) = \mathrm{V}(\hat{Q}_y) - \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{53}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (51)'de tanımlanan tahmin edici farklı parametreleri tahmin etmek için kullanılabilir. Arcos ve diğerleri [22], Eşitlik (51)'den yararlanarak kitle ortalaması ve ortancası için aşağıda verilen tahmin edicileri incelemişlerdir.

$$\bar{\bar{Y}}_{AD} = \bar{y} + c(\bar{X} - \bar{x}) + d\left(Q_x(\alpha) - \hat{Q}_x(\alpha)\right) \qquad \alpha = 1/2$$

$$\hat{Q}_{AD}(\beta) = \hat{Q}_Y(\beta) + c\left(Q_x(\alpha_1) - \hat{Q}_x(\alpha_1)\right) + d\left(Q_x(\alpha_2) - \hat{Q}_x(\alpha_2)\right)$$

$$\hat{M}_{AD1} = M_Y + c(M_x - \hat{M}_x) + d\left(Q_x(\alpha_2) - \hat{Q}_x(\alpha_2)\right)$$

$$\hat{M}_{AD2} = M_Y + c(M_x - \hat{M}_x) + d(\bar{X} - \bar{x})$$

Arcos ve diğerleri [22] aynı zamanda Srivastava ve Jhajj [41] 'den yararlanarak yeni bir tahmin edici sınıfı önermişlerdir.

$$G = \left\{\hat{Q}^q; \hat{Q}^q = G(\hat{Q}_y, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k)\right\} \tag{54}$$

$G(\cdot)$,$\hat{Q}_y$'nin bir fonksiyonudur ve $u_i = \frac{\hat{\theta}_{i1}}{\theta_{i1}}$, $v_i = \frac{\hat{\theta}_{i2}}{\theta_{i2}}$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

- $G(Q_y, 1)$=Q_y
- $G_1(Q_y, 1)$ $G(.)$ fonksiyonun $\hat{Q}$'ya göre birinci kısmi türevidir ve $G_1(Q_y, 1)$=1 olmalıdır.
- G'nin birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır.

2.2.Asimptotik Varyansı Elde Edilerek Yapılan Tahminler

2.2.1. Kuk ve Mak [11] Tahmin Edicileri

2.2.1.1. Kuk ve Mak [11] Konum Tahmin Edicisi

Kuk ve Mak [11] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak kitle ortancasının tahmini için oransal tahmin ediciyi önermişlerdir. Ortanca tahmini için alternatif olarak konum tahmin edicisini $\hat{p} = 0{,}5$ alındığında $\hat{Q}_y(\hat{p})$ biçiminde önermişlerdir. Kuk ve Mak [11] ortanca tahmini için iki yönlü sınıflama tablosunu Çizelge 2.2'de tanımlamışlardır.

Çizelge 2.2: Ortanca Tahmini İçin İki Yönlü Sınıflama Tablosu

	$X \leq M_x$	$X > M_x$	
$Y \leq M_y$	P_{11}	P_{12}	$P_{1.}$
$Y > M_y$	P_{21}	P_{22}	$P_{2.}$
	$P_{.1}$	$P_{.2}$	*1*

n_x $X \leq M_x$ kitle birimlerinin sayısını, P_{11} $Y \leq M_y$ ve $X \leq M_x$ olanların oranını ve P_{12} $Y \leq M_y$ ve $X > M_x$ olanların oranını göstermektedir. P_{ij} 'ler bilindiğinde p'nin tahmini $\hat{p}_0$, $j = 1{,}2$ için $P_{.j} = P_{1j} + P_{2j} \cong 1/2$ olmak üzere Eşitlik (55)'teki gibi tanımlanır.

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{n}\left(n_x \frac{P_{11}}{P_{.1}} + (n - n_x)\frac{P_{12}}{P_{.2}}\right) \tag{55}$$

$p_x = n_x/n$ olmak üzere

$$\hat{p}_0 = \frac{2}{n}(n_x P_{11} + (n - n_x)(0{,}5 - P_{11}))$$

$$= \frac{2}{n}(n_x P_{11} + 0{,}5n - 0{,}5n_x - nP_{11} + n_x P_{11})$$

$$= (4P_{11} - 1)(p_x - 0{,}5) + 0{,}5 \tag{56}$$

elde edilir. P_{ij} 'ler bilinmediğinde p_{ij} örneklem değerleri kullanılır. Bu durumda n_x $x \leq \widehat{M}_x$ örneklem birimlerinin sayısını, p_{11} $y \leq \widehat{M}_y$ ve $x \leq \widehat{M}_x$ olanların oranını ve p_{12} $y \leq \widehat{M}_y$ ve $x > \widehat{M}_x$ olanların oranını göstermektedir. $\hat{p}_0$'ın örneklem tahmini $\hat{p}_1$ Eşitlik (57)'de tanımlanmıştır.

$$\hat{p}_1 \cong \frac{1}{n}\left(n_x \frac{p_{11}}{2} + (n - n_x)\frac{(0{,}5 - p_{11})}{2}\right)$$

$$\cong \frac{2}{n}(n_x p_{11} + (n - n_x)(0{,}5 - p_{11})) \tag{57}$$

$\widehat{M}_{YP} = \hat{Q}_y(\hat{p}_1)$'in asimptotik varyansı Taylor serisi açılımından da yararlanarak Eşitlik (58)'den elde edilir.

$$\widehat{M}_{YP} - M_y \cong \{f_y(M_y)\}^{-1}\{\hat{F}_y(\widehat{M}_{YP}) - \hat{F}_y(\widehat{M}_y)\} + o_p(n^{-1/2})$$

$$\cong \{f_y(M_y)\}^{-1}\{\hat{p}_1 - p_y\} + o_p(n^{-1/2}) \tag{58}$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_0 \cong 2(p_{11} - P_{11})(2p_x - 1)$ olmak üzere $p_x \to 1/2$ olasılıkta yakınsamakta ve böylece Eşitlik (57)'de $\hat{p}_1$ yerine $\hat{p}_0$ konulursa

$$\widehat{M}_{YP} - M_y \cong \{\hat{p}_0 - p_y\} + o_p(n^{-1/2})$$

$$\cong \{f_y(M_y)\}^{-1}[(4P_{11} - 1)(p_x - 0{,}5) - (p_y - 0{,}5)] \tag{59}$$

biçiminde elde edilir.

$$E(\hat{p}_0 - p_y)^2 \cong \{f_y(M_y)\}^{-2}\big[(4P_{11}-1)^2 V(p_x) + V(p_y) - 2(4P_{11}-1)E(p_x - 0{,}5)(p_y - 0{,}5)\big]$$

$V(p_x) = V(p_y) = \frac{1-f}{n}0{,}25$ ve $E(p_x - 0{,}5)(p_Y - 0{,}5) = \frac{1-f}{n}(P_{11} - 0{,}25)$ olmak üzere konum tahmin edicisine ilişkin HKO,

$$HKO\left(\hat{Q}_y(\hat{p})\right) \cong \frac{1-f}{n}2P_{11}(1-2P_{11})\{f_y(M_y)\}^{-2}$$

$$HKO\left(\hat{Q}_y(\hat{p}_1)\right) \cong \frac{1-f}{n}2p_{11}(1-2p_{11})\{f_y(M_y)\}^{-2} \tag{60}$$

olarak elde edilir.

2.2.1.2. Kuk ve Mak [11] Tabakalanma Tahmin Edicisi

Kuk ve Mak [11] kitle ortancasının tahminde bir diğer yol olarak dağılım fonksiyonun sonradan tabakalandırılmasına dayanarak tabakalanma tahmin edicisini $\widehat{M}_{YS} = inf\left\{y; \tilde{F}_y(y) \geq \frac{1}{2}\right\}$ olarak tanımlamışlardır. $\tilde{F}_y(y)$ Eşitlik (61)'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{F}_y(y) = \frac{1}{N}\big[N_x\tilde{F}_{y1}(y) + (N-N_x)\tilde{F}_{y2}(y)\big]$$

$$\cong \frac{1}{2}\big[\tilde{F}_{y1}(y) + \tilde{F}_{y2}(y)\big] \tag{61}$$

$\tilde{F}_{y1}(y)$ $X \leq M_X$ ve y değerleri y'ye eşit ve küçük olanların oranını, $\tilde{F}_{y2}(y)$ $X > M_X$ ve y değerleri y'ye eşit ve küçük olanların oranını ve N_x $X \leq M_X$ kitle birimlerinin sayısını göstermektedir. $E\left(\tilde{F}(M_y)\right) = \frac{1}{2}(2P_{11} + 2P_{12})$ olmak üzere tabakalanma tahmin edicisine ilişkin asimptotik HKO eşitliğinin elde edilmesinde Eşitlik (62)'den yararlanılır.

$$\widehat{M}_{YS} - M_y \cong \{f_y(M_y)\}^{-1}\{0{,}5 - \tilde{F}(M_y)\} + o_p(n^{-1/2}) \tag{62}$$

$f_1 = 2n_X/N$ ve $f_2 = 2(n-n_X)/N$ olmak üzere,

$$HKO\left(\tilde{F}(M_{YS})\right) \cong \frac{1}{4}\left\{\frac{(1-f_1)}{n_X}2P_{11}(1-2P_{11}) + \frac{(1-f_2)}{n-n_X}2P_{12}(1-2P_{12})\right\}$$

$$HKO\left(\tilde{F}(M_{YS})\right) \cong \frac{1-f}{n}2P_{11}(1-2P_{11})\{f_y(M_y)\}^{-2}$$

$$HKO\left(\tilde{F}_y(M_{YS})\right) \cong \frac{1-f}{n}2P_{11}(1-2P_{11})\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 \tag{63}$$

tabakalanma tahmin edicisine ilişkin asimptotik HKO, Eşitlik (63)'te görüldüğü biçimde elde edilir.

2.2.2. Rueda ve Diğerleri [20] Tahmin Edicileri

Rueda ve diğerleri [20] yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak oransal ve fark tahmin edicileri önermişler ve asimptotik varyansını elde etmişlerdir. Önerilen tahmin ediciler (64)-(67) numaralı eşitliklerde görülmektedir.

$$\hat{Q}_{RD1} = \hat{Q}_y(\beta)\frac{Q_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)} \tag{64}$$

$$\hat{Q}_{RD2} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{R}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{65}$$

$$\hat{Q}_{RD3} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{c}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{66}$$

$$\hat{Q}_{RD4} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{b}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right) \tag{67}$$

$\hat{Q}_{RD1}, \hat{Q}_{RD2}, \hat{Q}_{RD3}$ ve $\hat{Q}_{RD4}$ asimptotik olarak $Q_y(\beta)$ ortalama ile normal dağılmaktadır ve HKO eşitlikleri aşağıdaki formüllerden elde edilebilir.

$$V_{asym}\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2$$

$$V_{asym}\left(\hat{Q}_x(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\right)^2$$

$$cov_{asym}\left(\hat{Q}_y(\beta), \hat{Q}_x(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)$$

P_{11} : $x \le Q_x(\beta)$ ve $y \le Q_y(\beta)$ olan birimlerin oranını ifade etmektedir. Cramer'in V katsayı $\phi(\beta) = \frac{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}{\sqrt{N_{1.}N_{2.}N_{.1}N_{.2}}}$ olmak üzere, $cov_{asym}\left(\hat{Q}_y(\beta), \hat{Q}_x(\beta)\right)$ ifadesi Cramer'in V katsayı ile ifade edilirse

$$cov_{asym}\left(\hat{Q}_y(\beta), \hat{Q}_x(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\phi(\beta)$$

biçiminde yazılabilmektedir.

(64)-(67) numaralı eşitliklerde tanımlanan tahmin edicilerin varyanslarının elde edilmesinde kullanılan fark yöntemindeki terimler aşağıda verilmiştir.

$e_0 = \frac{\hat{Q}_y(\beta) - Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)}$ $\qquad$ $e_1 = \frac{\hat{Q}_x(\beta) - Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$

$E(e_0) = E(e_1) = 0$

$E(e_0^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2$

$E(e_1^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2$

$E(e_0e_1) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)$

$E(e_0e_1)$ eşitliği Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse

$E(e_0e_1) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\phi(\beta)$

biçiminde yazılabilir.

Fark yöntemindeki terimler Eşitlik (64)'te yerine konulduğunda tahmin edici,

$\hat{Q}_{RD1} = Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1}$

$$\hat{Q}_{RD1} \cong Q_y(\beta)(1 + e_0 - e_1 - e_0e_1 + e_1^2) \tag{68}$$

biçiminde elde edilir. Tahmin ediciye ilişkin asimptotik HKO eşitliği, Eşitlik (69)'da görülmektedir.

$E(\hat{Q}_{RD1} - Q_y(\beta))^2 \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^2 + e_1^2 - 2e_0e_1)$

$$HKO_{asym}\left(\hat{Q}_{RD1}\right) \cong \frac{1-f}{n}\left[\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + \beta(1-\beta)\frac{\left(Q_y(\beta)\right)^2}{\left(Q_x(\beta)\right)^2}\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2 \right.$$
$$\left. -2\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)\right]$$

$$HKO_{asym}\left(\hat{Q}_{RD1}\right) \cong \frac{(1-f)\beta(1-\beta)}{n}\left[\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + \frac{\left(Q_y(\beta)\right)^2}{\left(Q_x(\beta)\right)^2}\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2 \right.$$
$$\left. -2\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right)\right] \tag{69}$$

Tahmin ediciye ilişkin asimptotik HKO eşitliği Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$HKO_{asym}(\hat{Q}_{RD1}) \cong \frac{(1-f)\beta(1-\beta)}{n}\left[\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + \frac{\left(Q_y(\beta)\right)^2}{\left(Q_x(\beta)\right)^2}\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2\right.$$

$$\left. -2\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)}\phi(\beta)\right] \qquad (70)$$

biçiminde yazılabilir.

Fark yöntemindeki terimler Eşitlik (65)'te yerine konulduğunda tahmin edici,

$$\hat{Q}_{RD2} \cong Q_y(\beta)(1+e_0) - R(1+e_0{}^*)(1+e_1{}^*)^{-1}(Q_x(\beta) - Q_x(\beta)(1+e_1) \qquad (71)$$

olur ve $(1+e_1{}^*)^{-1}$ terimi Taylor serisi ile açılıp ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edildiğinde

$$\hat{Q}_{RD2} \cong Q_y(\beta)(1+e_0) - RQ_x(\beta)(e_1 + e_1e_0{}^* - e_1e_1{}^*)$$

$$E\left(\hat{Q}_{RD2} - Q_y(\beta)\right)^2 \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^2) + R^2\left(Q_x(\beta)\right)^2 E(e_1^2) - 2RQ_x(\beta)Q_y(\beta)E(e_0e_1)$$

$$HKO_{asym}(\hat{Q}_{RD2}) \cong \frac{1-f}{n}\left[\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + R^2\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2\right.$$

$$\left. -2R\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)\right]$$

$$HKO_{asym}(\hat{Q}_{RD2}) \cong \frac{(1-f)\beta(1-\beta)}{n}\left[\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + R^2\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2\right.$$

$$\left. -2R\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right)\right] \qquad (72)$$

elde edilir. Tahmin ediciye ilişkin asimptotik HKO eşitliği Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse

$$HKO_{asym}(\hat{Q}_{RD2}) \cong \frac{(1-f)\beta(1-\beta)}{n}\left[\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 + R^2\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2\right.$$

$$\left. -2R\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\phi(\beta)\right] \qquad (73)$$

biçiminde yazılabilir.

Eşitlik (66)'da verilen tahmin edicide ĉ regresyon katsayısı olarak ele alınmıştır. $E(\hat{c}) = B$ yaklaşımından yararlanarak,

$$E\left(\hat{Q}_{RD3} - Q_y(\beta)\right)^2 \cong \left(Q_y(\beta)\right)^2 E(e_0^2) +$$

$$-2\hat{b}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\Bigg] \tag{77}$$

Eşitlik (77)'de $\hat{b}$'ya göre türev alınarak optimal $\hat{b}$ değeri

$$\hat{b}=\frac{f_x(Q_x(\alpha))}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right) \tag{78}$$

biçiminde elde edilir. Optimal $\hat{b}$ değeri Eşitlik (77)'de yerine konulursa minimum asimptotik varyans Eşitlik (79)'da görüldüğü gibi elde edilir.

$$V_{asym(min)}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)=\frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2\beta(1-\beta)\left[1-\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)^2\right] \tag{79}$$

Tahmin ediciye ilişkin asimptotik varyans Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse

$$V_{asym}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)=\frac{(1-f)\beta(1-\beta)}{n}\left[\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2+\hat{b}^2\left(\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\hat{b}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x(Q_x(\beta))}\phi(\beta)\right] \tag{80}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (80)'de $\hat{b}$'ya göre türev alınarak Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen optimal $\hat{b}$ değeri

$$\hat{b}=\frac{f_x(Q_x(\alpha))}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\phi(\beta) \tag{81}$$

biçiminde elde edilir. Optimal $\hat{b}$ değeri Eşitlik (80)'de yerine konulursa Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen minimum asimptotik varyans, Eşitlik (82)'de görüldüğü gibi elde edilir.

$$V_{asym(min)}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)=\frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2\beta(1-\beta)\left[1-\left(\phi(\beta)\right)^2\right] \tag{82}$$

2.2.3. Rueda ve Arcos [21] Tahmin Edicisi

Rueda ve Arcos [21], Woodruff [5] güven aralığı yaklaşımını kullanarak önermiş oldukları üstel tahmin edicinin asimptotik varyansını da elde etmişlerdir. Rueda ve Arcos [21] tarafından önerilen tahmin edici Eşitlik (83)'te görülmektedir.

$$\hat{Q}_{RA}(\beta)=\hat{Q}_y(\beta)\left(\frac{Q_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)}\right)^{\alpha} \tag{83}$$

Tahmin ediciye ilişkin HKO eşitliğinin elde edilmesinde fark yöntemi kullanılmıştır. Fark yönteminde tanımlanan terimler Eşitlik (83)'te yerine konulursa,

$$\hat{Q}_{RA}(\beta) = Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-\alpha}$$

$$= Q_y(\beta)(1+e_0)\left(1-\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2-\ldots\right)$$

$$\cong Q_y(\beta)\left(1+e_0-\alpha e_1-\alpha e_0 e_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2\right) \tag{84}$$

elde edilir. Eşitlik (84)'ün her iki tarafından $Q_y(\beta)$ çıkartılıp, her iki tarafın karesinin beklenen değeri alınırsa, önerilen tahmin edicinin HKO,

$$HKO\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong Q_y^2(\beta)E(e_0^2+\alpha^2 e_1^2-2\alpha e_0 e_1)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong Q_y^2(\beta)\frac{(1-f)\big(\beta(1-\beta)\big)}{n}\left[\frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_y\big(Q_y(\beta)\big)}\right)^2+\alpha^2\frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_x\big(Q_x(\beta)\big)}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\alpha\frac{1}{f_y\big(Q_y(\beta)\big)f_x\big(Q_x(\beta)\big)Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right] \tag{85}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (85)'te α'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal α değeri Eşitlik (86)'daki gibi elde edilir.

$$\alpha_{opt} = \frac{Q_x(\beta)f_x\big(Q_x(\beta)\big)}{Q_y(\beta)f_y\big(Q_y(\beta)\big)}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right) \tag{86}$$

Eşitlik (86)'da verilen optimal α değeri Eşitlik (85)'te yerine konulursa minimum HKO,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong \frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_y\big(Q_y(\beta)\big)}\right)^2\beta(1-\beta)\left(1-\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)^2\right) \tag{87}$$

biçiminde elde edilir.

Tahmin ediciye ilişkin asimptotik HKO, Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse

$$HKO\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong Q_y^2(\beta)\frac{(1-f)\big(\beta(1-\beta)\big)}{n}\left[\frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_y\big(Q_y(\beta)\big)}\right)^2+\alpha^2\frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_x\big(Q_x(\beta)\big)}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\alpha\frac{1}{f_y\big(Q_y(\beta)\big)f_x\big(Q_x(\beta)\big)Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\phi(\beta)\right] \tag{88}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (88)'de α'ya göre türev alınarak Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen optimal α değeri

$$\alpha_{opt} = \frac{Q_x(\beta) f_x\left(Q_x(\beta)\right)}{Q_y(\beta) f_y\left(Q_y(\beta)\right)} \phi(\beta) \tag{89}$$

biçiminde elde edilir. Optimal α değeri Eşitlik (88)'de yerine konulursa Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen minimum asimptotik HKO eşitliği, Eşitlik (90)'da görüldüğü gibi elde edilir.

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{RA}(\beta)\right) \cong \frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 \beta(1-\beta)\left(1-\left(\phi(\beta)\right)^2\right) \tag{90}$$

2.2.4. Arcos ve Diğerleri [26] Tahmin Edicileri

Arcos ve diğerleri [26] yardımcı değişken bilgisi olarak kitle ortalamasından yararlanarak yeni üstel ve fark yüzdelik edicileri önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{AM1}(\beta) = \hat{Q}_y(\beta) \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\bar{X}_i}{\bar{x}_{HTi}}\right)^{\gamma_i} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{Q_{x_i}(\beta)}{\hat{Q}_{x_i}(\beta)}\right)^{\delta_i} \tag{91}$$

$$\hat{Q}_{AM2}(\beta) = \hat{Q}_y(\beta) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\hat{Q}_{x_i}(\beta) - Q_{x_i}(\beta)\right) + \sum_{i=1}^{k} d_i (\bar{x}_{HTi} - \bar{X}_i) \tag{92}$$

Eşitlik (91) ve Eşitlik (92)'de verilen tahmin edicilerin HKO ve varyansının elde edilmesinde aşağıda verilen varyans ve kovaryans eşitliklerinden yararlanmışlardır.

$$V(\bar{x}_i) = \frac{1-f}{n} S_{x_i}^2 \qquad V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2$$

$$cov\left(\bar{x}_i, \bar{x}_j\right) = \frac{1-f}{n} S_{x_i x_j} \qquad cov\left(\bar{x}_i, \hat{Q}_y(\beta)\right) = -\frac{1-f}{n}\frac{\rho_{zx_i} S_{x_i}\sqrt{\beta(1-\beta)}}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}$$

Burada $z_j = \Delta\left(Q_y(\beta) - y_j\right)$ ve ρ_{zx_i}, z ve x_i arasındaki korelasyon katsayısını göstermektedir. Arcos ve diğerleri [26], Eşitlik (92)'de önermiş olduğu tahmin edicinin özel hali olarak aşağıda yer alan tahmin edicilerle klasik yüzdelik tahmin edicisini kıyaslayarak, önermiş oldukları tahmin edicilerin klasik yüzdelik tahmin edicisinden daha etkin olduklarını sayısal örnekle göstermişlerdir.

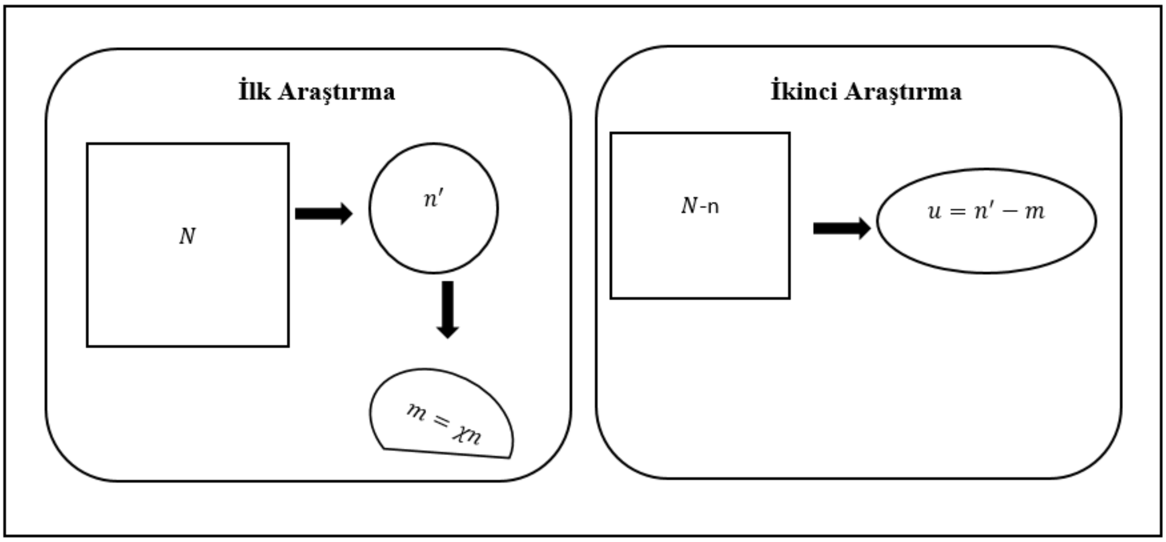
$$\widehat{M}_{D1} = \widehat{M}_y + \hat{c}_{opt}(\bar{X} - \bar{x})$$

$$\widehat{M}_{D2} = \widehat{M}_y + \hat{c}_{opt}\left(M_x - \widehat{M}_x\right) + \hat{d}_{opt}(\bar{X} - \bar{x})$$

3. ARD ARDA ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

Birçok sosyal araştırmada, aynı kitleden örneklemler ve aynı ilgilenilen değişkene ilişkin ölçümler tekrarlanmaktadır. Örneğin iş gücü araştırmaları çalışan işçi sayısını tahmin etmek için her ay yapılmaktadır. Tüketici fiyat endeksinin belirlenmesinde her ay belirli malların fiyatları aylık olarak toplanmaktadır. Bu gibi araştırmalarda ard arda örnekleme yönteminin kullanılması daha avantajlıdır. Ard arda örnekleme yönteminde önemli olan daha önceki araştırmadan ne kadarlık bir örneklemin güncel araştırmaya dâhil edileceği ve aynı zamanda son araştırmada dâhil edilen örneklemden ne kadarlık bir örneklemin yeniden inceleneceğidir. Buna optimum yenileme ilkesi denilmektedir [42].

İki ya da daha fazla zaman periyotlarının birleşiminden oluşan N büyüklüğünde sonlu bir U kitlesi olsun. y_i ikinci araştırmada, x_i de birinci araştırmadaki değerleri göstersin. n' birim ilk araştırmada seçilsin. İlk araştırmada seçilen n' birimden m büyüklüğünde eşleşmiş örneklem olarak adlandırılan bir alt örneklem ikinci araştırmada seçilsin. $u = n - m$ birim eşleşmiş kısımdan bağımsız olarak yeni birimler olarak seçilsin. $\chi = m/n$ eşleşme oranı olarak adlandırılsın. Ard arda örnekleme yönteminde örneklem seçim süreci Şekil 3.1'de özetlenmiştir.



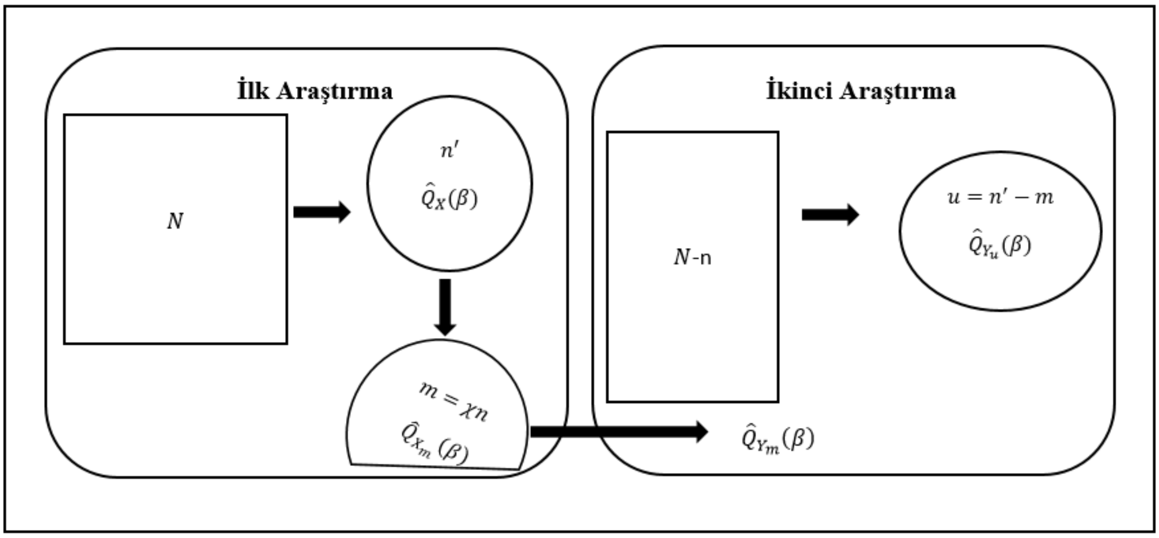
Şekil 3.1: Ard Arda Örnekleme Yönteminde Örneklem Seçim Süreci [42]

Ard arda örnekleme yönteminde ilk olarak yapılan çalışmalar Jessen [43] ve Patterson [44] tarafından yapılan çalışmalardır. Narain [45], Rao ve Graham [46], Adhvaryu [47], Sen [48], Gupta [49] ve Das [50] önceki araştırmalardan elde edilen bilgilerin kullanılmasının tekrarlanan örneklem araştırmalarında avantaj sağladığını göstermişlerdir.

Ortalama üzerinde güçlü etkisi olan aşırı uç değerlerin var olduğu çalışmalarda ortalama tahmini yerine ortanca tahminin ya da yüzdelik tahmin edicilerinin kullanılması daha uygundur. Martinez-Miranda ve diğerleri [27], Rueda ve diğerleri [28], Singh ve diğerleri [29] ve Rueda ve diğerleri [30] ard arda örnekleme yönteminde yüzdelik tahmin edicileri üzerinde çalışmışlardır.

3.1.Martinez-Miranda ve Diğerleri [27] Tahmin Edicileri

$\hat{Q}_X(\beta)$ birinci araştırmada elde edilen β'ıncı örneklem yüzdeliği, $\hat{Q}_Y(\beta)$ ikinci araştırmada elde edilen β'ıncı örneklem yüzdeliği olsun. $\hat{Q}_{X_m}(\beta)$ ve $\hat{Q}_{Y_m}(\beta)$ sırasıyla birinci ve ikinci araştırmalarda eşleşmiş örneklemden elde edilen örneklem yüzdelikleri olsun. $\hat{Q}_{Y_u}(\beta)$ ikinci araştırmada eşleşmeyen örneklemdeki örneklem yüzdeliğini göstersin. Yüzdelik tahmini için ard arda örnekleme yönteminde örneklem seçim süreci Şekil 3.2'de görülmektedir.



Şekil 3.2: Ard Arda Örnekleme Yönteminde Yüzdelik Tahmini

Martinez-Miranda ve diğerleri [27] Eşitlik (93)'te verilen genel tahmin ediciyi önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{MD}(\beta) = w\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta) + (1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \quad (93)$$

w, $0 < w < 1$ olmak üzere sabit bir değer olsun. $\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)$ aşağıda elemanları verilen H tahmin edici sınıfına ait olsun. Burada $t = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)}$ olarak tanımlanmış ve H fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlamaktadır.

$$\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta) = H\big(\hat{Q}_{Y_m}(\beta), t\big) \quad (94)$$

(1) $(Q_Y(\beta),1)$, $C \subset R_2$ kapalı kümesinin elemanı olmalıdır.

(2) H, C ‘de tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur öyle ki $H(Q_Y(\beta),1) = Q_Y(\beta)$ eşitliğini sağlansın.

(3) H’ın birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır ve C’de tanımlıdır ve $H_{10} = (Q_Y(\beta),1) = \left.\frac{\partial H(q,t)}{\partial q}\right|_{(q,t)=(Q_Y(\beta),1)} = 1$ eşitliği sağlanmalıdır.

$\hat{Q}_{MD}(\beta) = w\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta) + (1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta)$ genel tahmin edicisi için $\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)$ ve $\hat{Q}_{Y_u}(\beta)$ bağımsız oldukları varsayımı altında varyans eşitliği Eşitlik (95)’teki gibi yazılabilir.

$$V\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right) = w^2 V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right) + (1-w)^2 V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) \tag{95}$$

$$V\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right) = w^2 V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right) + (1-2w+w^2) V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) \tag{96}$$

Eşitlik (96)’da w’ye türev alıp sıfıra eşitlediğimizde optimal w değeri Eşitlik (97)’de görüldüğü biçimde elde edilir.

$$\frac{\partial V\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right)}{\partial w} = 2wV\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right) - 2V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) + 2wV\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = 0$$

$$w_{opt} = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)} \tag{97}$$

Eşitlik (96)’daki varyans eşitliğinde, Eşitlik (97)’de verilen w_{opt} değeri yerine konulursa,

$$V\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right) = \left(\frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}\right)^2 V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right) + \left(1 - \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}\right)^2 V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$$

$$= \left(\frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}\right)^2 V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right) + \left(\frac{V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}\right)^2 V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$$

$$= \frac{V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)\left[V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)\right]}{\left[V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)\right]^2}$$

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^H_{Y_m}(\beta)\right)} \tag{98}$$

elde edilir.

H fonksiyonunun $(H(q,t) = q/t)$ özel bir biçimi olan oransal tahmin edici Eşitlik (99)’da görüldüğü biçimde tanımlansın.

$$\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta) = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}\hat{Q}_X(\beta) \tag{99}$$

Bu durumda ard arda örnekleme yöntemi için önerilen tahmin edici

$$\hat{Q}_{MD1}(\beta) = w\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta) + (1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \tag{100}$$

biçiminde olacaktır.

Eşitlik (100)'de verilen tahmin edicinin minimum varyansı Eşitlik (98)'den yararlanarak elde edilir. Eşitlik (98)'de verilen minimum varyans eşitliğindeki $V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-2}$ olmak üzere $V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta)\right)$ Eşitlik (102)'de tanımlanmıştır.

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{MD1}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta)\right)} \tag{101}$$

$$V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_Y\left(\mathrm{Q_Y(\beta)}\right)\right\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n\prime}\right)R\frac{f_Y\left(\mathrm{Q_Y(\beta)}\right)}{f_X\left(\mathrm{Q_X(\beta)}\right)}\left(R\frac{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}{f_X\left(Q_X(\beta)\right)}+2\left(1-\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}\right)\right)\right] \tag{102}$$

Eşitlik (102)'de verilen varyans eşitliğinin elde edilmesi için fark yönteminden kullanılan terimler, bu terimlerin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları aşağıda verilmiştir.

$e_0 = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{Q_Y(\mathrm{\beta})} - 1$, $e_1 = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{Q_X(\mathrm{\beta})} - 1$ ve $e_2 = \frac{\hat{Q}_X(\beta)}{Q_X(\beta)} - 1$

$$E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0$$

$$E(e_0^2) = \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_Y(\beta)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-2}$$

$$E(e_1^2) = \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_X(\beta)f_X\left(Q_X(\beta)\right)\right\}^{-2}.$$

$$E(e_2^2) = \left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_X(\beta)f_X\left(Q_X(\beta)\right)\right\}^{-2}$$

$$E(e_0e_1) = \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_Y(\beta)Q_X(\beta)f_X\left(Q_X(\beta)\right)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$E(e_0e_2) = \left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_Y(\beta)Q_X(\beta)f_X\left(Q_X(\beta)\right)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$E(e_1e_2) = \left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_X(\beta)f_X\left(Q_X(\beta)\right)\right\}^{-2}$$

Eşitlik (99)'da tanımlanan tahmin edici e'li terimler biçiminde yazıldığında Eşitlik (103) elde edilir.

$$\hat{Q}^{r}_{Y_m}(\beta) = Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1}(1+e_2)$$

$$= Q_Y(\beta)(1+e_0+e_2+e_0e_2)(1-e_1+e_1^2)$$

$$= Q_Y(\beta)(1+e_0-e_1+e_2-e_0e_1+e_0e_2-e_1e_2+e_1^2) \tag{103}$$

Eşitlik (103)'te eşitliğin her iki tarafından $Q_Y(\beta)$ çıkartılarak her iki tarafın da karesinin beklenen değeri alındığında ve ikinci dereceden büyük terimler ihmal edildiğinde Eşitlik (104) elde edilir.

$$V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}\right) = [Q_Y(\beta)]^2 E[e_0^2+e_1^2+e_2^2-2e_0e_1+2e_0e_2-2e_1e_2] \tag{104}$$

Eşitlik (104)'te fark yönteminde tanımlanan terimler yerine konulduğunda $R = \frac{Q_Y(\beta)}{Q_X(\beta)}$ olmak üzere

$$V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}\right) = [Q_Y(\beta)]^2 \Bigg[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_Y(\beta)f_Y(Q_Y(\beta))\}^2} + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q(\beta))\}^2} - \left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^2} + 2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n\prime}\right)\frac{\beta(1-\beta)-P_{11}}{Q_X(\beta)Q_Y(\beta)f_X(Q_X(\beta))f_Y(Q_Y(\beta))}\Bigg]$$

$$V\left(\hat{Q}^{r}_{Y_m}\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n\prime}\right)R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))}\left(R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))} + 2\left(1-\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}\right)\right)\right] \tag{105}$$

elde edilir.

Martinez-Miranda ve diğerleri [27] H fonksiyonunun $\left(H(q,t) = q + d(1-t)\hat{Q}_X(\beta)\right)$ özel bir biçimi olan fark tahmin edicisini Eşitlik (106)'da görüldüğü biçimde tanımlamışlardır.

$$\hat{Q}^{d}_{Y_m}(\beta) = \hat{Q}_{Y_m}(\beta) + d\left(\hat{Q}_X(\beta) - \hat{Q}_{X_m}(\beta)\right) \tag{106}$$

Bu durumda ard arda örnekleme yöntemi için önerilen tahmin edici

$$\hat{Q}_{MD2}(\beta) = w\hat{Q}^{d}_{Y_m}(\beta) + (1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \tag{107}$$

biçiminde olacaktır.

Eşitlik (106)'da tanımlanan fark tahmin edicisi e'li terimler biçiminde yazıldığında Eşitlik (108) elde edilir.

$$\hat{Q}^{d}_{Y_m}(\beta) = Q_Y(\beta)(1+e_0) + d[Q_X(\beta)(1+e_2) - Q_X(\beta)(1+e_1)]$$

$$= Q_Y(\beta)(1+e_0) + dQ_X(\beta)(e_2-e_1) \tag{108}$$

Eşitlik (108)'de eşitliğin her iki tarafından $Q_Y(\beta)$ çıkartılarak her iki tarafın da karesinin beklenen değeri alındığında ve ikinci dereceden büyük terimler ihmal edildiğinde Eşitlik (109) elde edilir.

$$V\left(\hat{Q}^d_{Y_m}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2 E[e_0^2] + d^2 [Q_X(\beta)]^2 E[e_1^2 + e_2^2 - 2e_0 e_1]$$

$$+2dQ_Y(\beta)Q_X(\beta)E[e_0 e_2 - e_0 e_1] \tag{109}$$

Eşitlik (109)'da fark yönteminde tanımlanan terimler yerine konulduğunda,

$$V\left(\hat{Q}^d_{Y_m}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right) \beta(1-\beta)\left\{Q_Y(\beta) f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-2}$$

$$+d^2 [Q_X(\beta)]^2 \Bigg[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right) \beta(1-\beta)\left\{Q_X(\beta) f_X\big(Q_X(\beta)\big)\right\}^{-2}$$

$$+\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) \beta(1-\beta)\left\{Q_X(\beta) f_X\big(Q_X(\beta)\big)\right\}^{-2}$$

$$-2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)\big(P_{11} - \beta(1-\beta)\big)\left\{Q_Y(\beta) Q_X(\beta) f_X\big(Q_X(\beta)\big) f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}\Bigg]$$

$$+2dQ_Y(\beta)Q_X(\beta)\Bigg[\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\big(P_{11} - \beta(1-\beta)\big)\left\{Q(\beta) Q_X(\beta) f_X\big(Q_X(\beta)\big) f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}$$

$$-\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)\big(P_{11} - \beta(1-\beta)\big)\left\{Q_Y(\beta) Q_X(\beta) f_X\big(Q_X(\beta)\big) f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}\Bigg]$$

$$V\left(\hat{Q}^d_{Y_m}\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^2}\left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n\prime}\right) d\,\frac{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)}{f_X\big(Q_X(\beta)\big)}\left(d\,\frac{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)}{f_X\big(Q_X(\beta)\big)} + 2\left(1 - \frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}\right)\right)\right] \tag{110}$$

elde edilir. Eşitlik (110)'da d'ye göre türev alıp sıfıra eşitlediğimizde optimal d_{opt} Eşitlik (111)'deki gibi elde edilir.

$$2d\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n\prime}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_X\big(\mathrm{Q_X(\beta)}\big)\right\}^2} - 2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n\prime}\right)\frac{P_{11} - \beta(1-\beta)}{f_X\big(\mathrm{Q_X(\beta)}\big) f_Y\big(\mathrm{Q_Y(\beta)}\big)} = 0$$

$$d_{opt} = \frac{f_X\big(\mathrm{Q_X(\beta)}\big)}{f_Y\big(\mathrm{Q_Y(\beta)}\big)}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right) \tag{111}$$

Optimal Eşleştirme Oranı

Martinez-Miranda ve diğerleri [27] $\chi = m/n$ optimal eşleştirme oranının asimptotik açılımını incelemişlerdir.

Eşitlik (94)'te tanımlanan H fonksiyonun $(Q_Y(\beta), 1)$ noktasında birinci dereceden Taylor serisi açılımı H_{10} ve H_{01} H'ın birinci dereceden kısmi türevleri olmak üzere,

$$\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta) = H(Q_Y(\beta),1) + \left(\hat{Q}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta)\right)H_{10}\big((Q_Y(\beta),1)\big) + (t-1)H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big) + o_p(m^{-1}) \tag{112}$$

biçiminde yazılabilir. $H(Q_Y(\beta),1) = Q_Y(\beta)$ ve $t = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)}$ olarak tanımlandığından Eşitlik (112)

$$\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta) = Q_Y(\beta) + \left(\hat{Q}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta)\right)H_{10}\big((Q_Y(\beta),1)\big) + \left(\frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)} - 1\right)H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big)$$

biçiminde yazılabilir. $H_{10} = (Q_Y(\beta),1) = \frac{\partial H(q,t)}{\partial q}\Big|_{(q,t)=(Q_Y(\beta),1)} = 1$ olmak üzere $\hat{Q}_{Y_m}(\beta)$, $\hat{Q}_{X_m}(\beta)$ ve $\hat{Q}_X(\beta)$ terimleri e'li terimler biçiminde ifade edilirse Eşitlik (113) elde edilir.

$$\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta) = Q_Y(\beta)e_0 + (e_1 - e_2)H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big) \tag{113}$$

Eşitlik (113)'te eşitliğin her iki tarafının karesinin beklenen değeri alındığında

$$V\left(\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2E(e_0^2) + \left[H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big)^2\right]E[e_1^2 - 2e_1e_2 + e_2^2] + 2Q_Y(\beta)H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big)E[e_0e_1 - e_0e_2] \tag{114}$$

elde edilir. e'li ifadelerin varyans ve kovaryans terimleri yerine konulursa,

$$V\left(\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta)\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n\prime}\right)\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))} \times H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big)\left\{\frac{f_Y(\mathrm{Q_Y(\beta)})}{Q_X(\beta)f_X(\mathrm{Q_X(\beta)})}H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big) + 2\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - \beta(1-\beta)\right)\right\}\right] \tag{115}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (115) $\chi = m/n$, $C_1 = \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(\mathrm{Q_Y(\beta)})\}^2}$ ve $C_2 = \frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))}H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big)\left\{\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))}H_{01}\big((Q_Y(\beta),1)\big) + 2\left(\frac{P_{11}-\beta^2}{\beta(1-\beta)}\right)\right\}$ olmak üzere Eşitlik (116)'daki gibi yazılabilir.

$$V\left(\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta)\right) = C_1\left[\left(\frac{1}{n\chi} - \frac{1}{N}\right) + C_2\left(\frac{1}{n\chi} - \frac{1}{n\prime}\right)\right] \tag{116}$$

$V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-2}$ ve $u = n - m$ olduğu bilindiğinden $V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = C_1\left(\frac{1}{n(1-\chi)} - \frac{1}{N}\right)$ biçiminde yazılabilir.

Eşitlik (98)'de tanımlanan varyans eşitliği$\left(V_{Min}\left(\hat{Q}_{MD}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}^{H}_{Y_m}(\beta)\right)} \right)$ $\psi(\chi)$'nin bir fonksiyonu olarak $0 < \chi < 1$ olmak üzere Eşitlik (117)'de görüldüğü biçimde yazılabilir.

$$\psi(\chi) = C_1 \frac{\left(\frac{1}{n(1-\chi)}-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1}{n\chi}-\frac{1}{N}\right)+C_2\left(\frac{1}{n\chi}-\frac{1}{n\prime}\right)\right]}{\left(\frac{1}{n(1-\chi)}-\frac{1}{N}\right)+\left[\left(\frac{1}{n\chi}-\frac{1}{N}\right)+C_2\left(\frac{1}{n\chi}-\frac{1}{n\prime}\right)\right]} \quad (117)$$

Martinez-Miranda ve diğerleri [27] yapmış oldukları benzetim çalışmasında oransal ve fark tahmin edicilerini kullanarak önermiş oldukları tahmin edicilerin ikinci araştırmadan elde edilen basit yüzdelik tahmin edicisine göre etkinliklerini incelemişlerdir. β=0,25; β=0,50 ve β=0,75 için oransal tahmin edicinin klasik tahmin ediciye göre daha etkin olduğunu görmüşlerdir. Fark tahmin edicisinin β=0,75 dışında klasik tahminden daha etkin olduğunu görmüşlerdir.

3.2.Rueda ve Diğerleri [28] Tahmin Edicisi

Rueda ve diğerleri [28] yüzdelik tahmini için Horwitz –Thompson tipi genel bir tahmin edici sınıfı önermişlerdir.

$$\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta) = w\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta) + (1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \quad (118)$$

w, $0 < w < 1$ olmak üzere sabit bir değer olsun. $\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)$ aşağıda elemanları verilen H tahmin edici sınıfına ait olsun. Burada $t = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)}$ olarak tanımlanmış ve H fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlamaktadır.

$$\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta) = H\left(\hat{Q}_{Y_m}(\beta), t\right) \quad (119)$$

(1) $(Q_Y(\beta), 1)$, $C \subset R_2$ kapalı kümesinin elemanı olmalıdır.

(2) H, C 'de tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur öyle ki $H(Q_Y(\beta), 1) = Q_Y(\beta)$ eşitliğini sağlansın.

(3) H'ın birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır ve C'de tanımlıdır ve $H_{10} = (Q_Y(\beta), 1) = \frac{\partial H(q,t)}{\partial q}\Big|_{(q,t)=(Q_Y(\beta),1)} = 1$ eşitliği sağlanmalıdır.

Eşitlik (119)'da verilen tahmin ediciye ilişkin varyans

$$V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)\right) = w^2 V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)\right) + (1-w)^2 V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) + 2w(1-w)cov\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta), \hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$$

$V_1 = V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)\right)$, $V_2 = V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$ ve $C = cov\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta), \hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$ olmak üzere

$$V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)\right) = w^2 V_1 + (1-w)^2 V_2 + 2w(1-w)C \tag{120}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (120)'de w'ye görev türev alıp sıfıra eşitlendiğinde optimal w_{opt} değeri $V_1 + V_2 - 2C > 0$ olmak üzere Eşitlik (121)'deki gibi elde edilir.

$$w_{opt} = \frac{V_2 - C}{V_1 + V_2 - 2C} \tag{121}$$

Eşitlik (121)'de verilen optimal w_{opt} değeri Eşitlik (120)'de yerine konulursa minimum varyans eşitliği

$$V_{Min}\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)\right) = \frac{V_1 V_2 - C^2}{V_1 + V_2 - 2C} \tag{122}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (119)'da tanımlanan H fonksiyonun $(Q_Y(\beta), 1)$ noktasında birinci dereceden Taylor serisi açılımı H_{10} ve H_{01} H'ın birinci dereceden kısmi türevleri olmak üzere,

$$\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta) = \hat{Q}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta) + \left(\frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)} - 1\right) H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right)$$

$e_0 = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{Q_Y(\beta)} - 1$, $e_1 = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{Q_X(\beta)} - 1$ ve $e_2 = \frac{\hat{Q}_X(\beta)}{Q_X(\beta)} - 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta) - Q_Y(\beta) &= Q_Y(\beta)e_0 + \frac{e_1 - e_2}{1 + e_2} H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right) \\ &= Q_Y(\beta)e_0 + (e_1 - e_2)(1 - e_2) H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right) \\ &= Q_Y(\beta)e_0 + (e_1 - e_2) H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right) - e_2(e_1 - e_2) H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right)\end{aligned} \tag{123}$$

elde edilir. Eşitlik (123)'te eşitliğin her iki tarafının karesinin beklenen değeri alındığında,

$$\begin{aligned}V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2 E(e_0^2) + \left[H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right)^2\right] E[e_1^2 - 2e_1 e_2 + e_2^2] + \\ 2Q_Y(\beta) H_{01}\left((Q_Y(\beta), 1)\right) E[e_0 e_1 - e_0 e_2]\end{aligned} \tag{124}$$

iki safhalı örnekleme yönteminde verilen varyans eşitliğinden yararlanarak,

$$V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)\right) = E_{d1} V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right) + V_{d1} E\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right) \tag{125}$$

eşitliği yazılabilir. π'_i ilk aşamada i. birimin örnekleme seçilmesi olasılığını ve π'_{ij} ilk aşamada i. ve j. birimlerin örnekleme seçilmesi olasılığını göstersin. $\pi_{i/s'}$ ikinci aşamada i. birimin örnekleme seçilmesi olasılığı ve $\pi_{ij/s'}$ ikinci aşamada i. ve j. birimlerin örnekleme seçilmesi olasılığını göstersin. $\Delta'_{ij}= \pi'_{ij} - \pi'_i \pi'_j$ ve $\Delta^{s'}_{ij}= \pi_{ij/s'} - \pi_{i/s'}\pi_{j/s'}$ olarak tanımlanmış. $\delta(a) = 1, eğer\ a \geq 1,\ \delta(a) = 0, öteki\ değer$ olarak tanımlanmış.

$$V_{d_1}E\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right) = \frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in U}\Delta'_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j} \tag{126}$$

$$\begin{aligned}E_{d1}V\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right) = E_{d1}\Bigg(&\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in s'}\Delta^{s'}_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i\cdot\pi_{\frac{i}{s'}}}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j\cdot\pi_{\frac{j}{s'}}}\\ &+\frac{H^2_{01}\left(Q_Y(\beta),1\right)}{Q^2_X(\beta)}\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in s'}\Delta^{s'}_{ij}\frac{\delta\left(Q_X(\beta)-x_i\right)}{\pi'_i\cdot\pi_{\frac{i}{s'}}}\frac{\delta\left(Q_X(\beta)-x_j\right)}{\pi'_j\cdot\pi_{\frac{j}{s'}}}\\ &+2\frac{H_{01}\left(Q_Y(\beta),1\right)}{Q_X(\beta)}\frac{1}{N^2 f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)f_X\left(Q_X(\beta)\right)}\\ &\times\sum_{i,j\in s'}\Delta^{s'}_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-x_i\right)}{\pi'_i\cdot\pi_{\frac{i}{s'}}}\frac{\delta\left(Q_X(\beta)-x_j\right)}{\pi'_j\cdot\pi_{\frac{j}{s'}}}\Bigg)\end{aligned} \tag{127}$$

$\sum_{i,j\in U}\Delta'_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j}$ eşitliği tam olarak hesaplanamadığından birinci aşamada örneklemden tahmini olan $\sum_{i,j\in s_m}\frac{\Delta'_{ij}}{\pi'_{ij}\cdot\pi_{ij/s'}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j}$ eşitliği hesaplanır. $E_{d1}\left(\sum_{i,j\in s'}\Delta^{s'}_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i\cdot\pi_{\frac{i}{s'}}}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j\cdot\pi_{\frac{j}{s'}}}\right)$ ifadesi yerine de $\sum_{i,j\in s_m}\frac{\Delta'_{ij}}{\pi_{ij/s'}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i\cdot\pi_{\frac{i}{s'}}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'_j\cdot\pi_{\frac{j}{s'}}}$ ifadesi kullanılır. Benzer olarak $\Delta'^c_{ij}= \pi'^c_{ij} - \pi'^c_i\pi'^c_j$ ve $\Delta^{s'^c}_{ij} = \pi_{ij/s'^c} - \pi_{i/s'^c}\pi_{j/s'^c}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}V\left(\hat{Q}_{Yu}(\beta)\right) = &\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in U}\Delta'^c_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'^c_i}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'^c_j}\\ &+E_{d1}\left(\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in s'^c}\Delta^{s'^c}_{ij}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_i\right)}{\pi'^c_i\pi_{i/s'^c}}\frac{\delta\left(Q_Y(\beta)-y_j\right)}{\pi'^c_j\pi_{j/s'^c}}\right)\end{aligned} \tag{128}$$

eşitliği yazılabilir. (128) numaralı eşitliğin yansız tahmin edicisi Eşitlik (129)'da verilmiştir.

$$\begin{aligned}\hat{V}\left(\hat{Q}_{Yu}(\beta)\right) = &\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in s_u}\frac{\Delta'^c_{ij}}{\pi'^c_{ij}\pi_{\frac{ij}{s'}}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'^c_i}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_j\right)}{\pi'^c_j}\\ &+\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in s_u}\frac{\Delta^{s'^c}_{ij}}{\pi_{ij/s'^c}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'^c_i\pi_{i/s'^c}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_j\right)}{\pi'^c_j\pi_{j/s'^c}}\end{aligned} \tag{129}$$

Kovaryans eşitliği Eşitlik (130)'da verilmiştir.

$$cov\left(\hat{Q}_{Yu}(\beta),\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)\right) = cov\left(E\left(\hat{Q}_{Yu}(\beta)/s'\right),E\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right)\right) + E\left(cov\left(\hat{Q}_{Yu}(\beta),\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{Y_m}(\beta)/s'\right)\right) \qquad (130)$$

(130) numaralı eşitlikte verilen ikinci terim s_u ve s_m bağımsız olduğundan sıfırdır. $\hat{F}_{Ys'}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i\epsilon s'}\frac{\delta(t-y_i)}{\pi'_i}$, $\hat{F}_{Ys'^c}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i\epsilon s'^c}\frac{\delta(t-y_i)}{\pi'^c_i}$, $\hat{Q}_{Ys'}(\beta) = \hat{F}^{-1}_{Ys'}(\beta)$ ve $\hat{Q}_{Ys'^c}(\beta) = \hat{F}^{-1}_{Ys'^c}(\beta)$ olmak üzere $E\left(\hat{Q}^{\mathcal{H}}_{YRD}(\beta)/s'\right) = \hat{Q}_{Ys'}(\beta) + o(m^{-1})$ ve $E\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)/s'\right) = \hat{Q}_{Ys'^c}(\beta) + o(m^{-1})$ eşitlikleri yazılabilir.

$$\hat{Q}_{Ys'^c}(\beta) - Q_Y(\beta) = \frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}_{Ys'^c}\left(Q_Y(\beta)\right)\right) + o_p\left(n^{-1/2}\right)$$

$$\hat{Q}_{Ys'}(\beta) - Q_Y(\beta) = \frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}_{Ys'}\left(Q_Y(\beta)\right)\right) + o_p\left(n^{-1/2}\right)$$

olmak üzere,

$$cov\left(\hat{Q}_{Ys'^c}(\beta),\hat{Q}_{Ys'}(\beta)\right) \cong -\frac{1}{N^2\left\{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^2}\sum_{i,j\in u}\Delta'_{ij}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(\hat{Q}_{Y_n}(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j} \qquad (131)$$

eşitliği yazılabilir.

3.3.Singh ve Diğerleri [29] Tahmin Edicileri

Singh ve diğerleri [29] oransal, çarpımsal ve regresyon yüzdelik tahmin edicilerini önermişlerdir. Önermiş oldukları tahmin ediciler (132)-(134) numaralı eşitliklerde görülmektedir.

$$\hat{Q}_{STSK(O)}(\beta) = \alpha\hat{Q}^{(O)}_{Y_m}(\beta) + (1-\alpha)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \qquad (132)$$

$$\hat{Q}_{STSK(Ç)}(\beta) = \delta\hat{Q}^{(Ç)}_{Y_m}(\beta) + (1-\delta)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \qquad (133)$$

$$\hat{Q}_{STSK(R)}(\beta) = \gamma\hat{Q}^{(R)}_{Y_m}(\beta) + (1-\gamma)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \qquad (134)$$

Eşitlik (132)'de verilen oransal tahmin edicide tanımlanan $\hat{Q}^{(O)}_{Y_m}(\beta)$,

$$\hat{Q}^{(O)}_{Y_m}(\beta) = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}\hat{Q}_X(\beta) \qquad (135)$$

biçiminde tanımlanmıştır. (133) numaralı eşitlikte verilen çarpımsal tahmin edicide $\hat{Q}^{(Ç)}_{Y_m}(\beta)$,

$$\hat{Q}^{(Ç)}_{Y_m}(\beta), = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)}\hat{Q}_{X_m}(\beta) \qquad (136)$$

biçiminde tanımlanmıştır. (134) numaralı eşitlikte verilen regresyon tahmin edicisinde $b = \frac{f_X(Q_X(\beta))}{f_Y(Q_Y(\beta))}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right)$ olmak üzere $\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)$,

$$\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta) = \hat{Q}_{Y_m}(\beta) + b\left(\hat{Q}_X(\beta) - \hat{Q}_{X_m}(\beta)\right) \tag{137}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Tahmin edicilerin varyansının elde edilmesinde kullanılan terimler,bu terimlerin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları aşağıda verilmiştir.

$e_0 = \frac{\hat{Q}_{Y_m}(\beta)}{Q_Y(\beta)} - 1$, $e_1 = \frac{\hat{Q}_{X_m}(\beta)}{Q_X(\beta)} - 1$ ve $e_2 = \frac{\hat{Q}_X(\beta)}{Q_X(\beta)} - 1$

$$E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0$$

$$E(e_0^2) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{Q_Y(\beta)f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-2}$$

$$E(e_1^2) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^{-2}.$$

$$E(e_2^2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^{-2}$$

$$E(e_0e_1) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)(P_{11} - \beta(1-\beta))\{Q_Y(\beta)Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-1}$$

$$E(e_0e_2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)(P_{11} - \beta(1-\beta))\{Q_Y(\beta)Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-1}$$

$$E(e_1e_2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^{-2}$$

$V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-2}$ ve $R = \frac{Q_Y(\beta)}{Q_X(\beta)}$ olmak üzere, Eşitlik (132)'de verilen tahmin edicinin varyansını elde etmek için fark yönteminde tanımlanan terimler yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta) &= Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1}(1+e_2)\\ &= Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1}(1+e_2)\\ &\cong Q_Y(\beta)(1+e_0+e_2+e_0e_2)(1-e_1+e_1^2)\\ &\cong Q_Y(\beta)(1+e_0-e_1+e_2-e_0e_1+e_0e_2-e_1e_2+e_1^2)\end{aligned}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right) \cong [Q_Y(\beta)]^2E[e_0^2+e_1^2+e_2^2-2e_0e_1+2e_0e_2-2e_1e_2]$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right) \cong [Q_Y(\beta)]^2\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_Y(\beta)f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q(\beta))\}^2}-\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^2}-2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_X(\beta)Q_Y(\beta)f_X(Q_X(\beta))f_Y(Q_Y(\beta))}\right]$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right) \cong \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))}\left(R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))}-2\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right)\right] \tag{138}$$

$$V\left(\hat{Q}_{STSK(O)}(\beta)\right) = \alpha^2\left(V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)\right)+(1-2\alpha)V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) \tag{139}$$

Eşitlik (132)'de verilen oransal tahmin edicinin varyansı Eşitlik (139)'da olduğu gibi elde edilir.

(139) numaralı eşitlikte α'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal α değeri

$$\alpha = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{140}$$

biçiminde elde edilir. (140) numaralı eşitlikte verilen optimal α değeri Eşitlik (139)'da yerine konulursa Eşitlik (132)'de verilen oransal tahmin edicinin minimum varyansı

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{STSK(O)}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(O)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{141}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (133)'te verilen çarpımsal tahmin edicinin varyansı $V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) = \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-2}$ ve $R = \frac{Q_Y(\beta)}{Q_X(\beta)}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta) &= Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)(1+e_2)^{-1} \\
&= Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_1)(1-e_2+e_2^2) \\
&\cong Q_Y(\beta)(1+e_0+e_1+e_0e_1)(1-e_2+e_2^2) \\
&\cong Q_Y(\beta)(1+e_0+e_1-e_2+e_0e_1-e_0e_2-e_1e_2+e_2^2)
\end{aligned}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right) \cong [Q_Y(\beta)]^2E[e_0^2+e_1^2+e_2^2+2e_0e_1-2e_0e_2-2e_1e_2]$$

$$\cong [Q_Y(\beta)]^2\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_Y(\beta)f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q(\beta))\}^2}-\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_X(\beta)f_X(Q_X(\beta))\}^2}+2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_X(\beta)Q_Y(\beta)f_X(Q_X(\beta))f_Y(Q_Y(\beta))}\right]$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right) \cong \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n\prime}\right)R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))}\left(R\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_X(Q_X(\beta))}+2\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right)\right] \tag{142}$$

$$V\left(\hat{Q}_{STSK(Ç)}(\beta)\right) = \delta^2\left(V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)\right)+(1-2\delta)V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) \tag{143}$$

biçiminde elde edilir

Eşitlik (143)’te δ’ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal δ değeri,

$$\delta = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{144}$$

biçimde elde edilir. (144) numaralı eşitlikte verilen optimal δ değeri Eşitlik (143)’te yerine konulursa Eşitlik (133)’te verilen çarpımsal tahmin edicinin minimum varyansı

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{STSK(Ç)}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{145}$$

biçimde elde edilir.

Eşitlik (134)’te verilen regresyon tahmin edicinin varyansı $V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^{-2}$ ve $b=\frac{f_X(Q_X(\beta))}{f_Y(Q_Y(\beta))}\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)$ olmak üzere,

$$\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta) = Q_Y(\beta)(1+e_0)+b\left(Q_X(\beta)(e_2-e_1)\right) \tag{146}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)\right) = \left(Q_Y(\beta)\right)^2e_0^2+b^2\left(Q_X(\beta)\right)^2e_1^2+b^2\left(Q_X(\beta)\right)^2e_2^2-2bQ_Y(\beta)Q_X(\beta)e_0e_1+ 2bQ_Y(\beta)Q_X(\beta)e_0e_2-2b^2\left(Q_X(\beta)\right)^2e_1e_2 \tag{147}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)\right) \cong \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n\prime}\right)\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)^2\right] \tag{148}$$

$$V\left(\hat{Q}_{STSK(R)}(\beta)\right) = \gamma^2\left(V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(Ç)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)\right)+(1-2\gamma)V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right) \tag{149}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (149)’da γ’ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal γ değeri

$$\gamma = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{150}$$

biçimde elde edilir. Eşitlik (150)’de verilen optimal γ değeri Eşitlik (149)’da yerine konulursa Eşitlik (134)’te verilen regresyon tahmin edicinin minimum varyansı

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{STSK(R)}(\beta)\right)=\frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_m}^{(R)}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)} \tag{151}$$

biçiminde elde edilir.

3.4.Rueda ve Diğerleri [30] Tahmin Edicisi

Rueda ve diğerleri [30] P yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak ard arda örnekleme yönteminde eşleşmiş örneklem kısmı için

$$\hat{Q}_{Ym}^{MR}(\beta)=\sum_{1\le i\le \mathrm{p}} w_i\frac{\hat{Q}_{Ym}(\beta)}{\hat{Q}_{Xim}(\beta)}\hat{Q}_{Xi}(\beta)=\sum_{1\le i\le \mathrm{p}} w_i\hat{Q}_{Yrim}(\beta) \tag{152}$$

tahmin ediciyi önermişlerdir.

$\hat{Q}_{Yrim}(\beta)$ tahmin edicisinin varyansını ve kovaryansını elde etmek için fark yönteminde kullanılan terimler, bu terimlerin beklenen değerleri, varyans ve kovaryans terimleri aşağıda verilmiştir.

$e_0=\frac{\hat{Q}_{Ym}(\beta)}{Q_Y(\beta)}-1$, $e_{1i}=\frac{\hat{Q}_{Xi_m}(\beta)}{Q_{Xi}(\beta)}-1$ ve $e_{2i}=\frac{\hat{Q}_{Xi}(\beta)}{Q_{Xi}(\beta)}-1$

$$E(e_0)=E(e_{1i})=E(e_{2i})=0$$

$$E(e_0^2)=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_Y(\beta)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-2}$$

$$E(e_{1i}^2)=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_{Xi}(\beta)\right)\right\}^{-2}.$$

$$E(e_{2i}^2)=E(e_{1i}e_{2i})=\left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_X(\beta)\right)\right\}^{-2}$$

$$E(e_0e_{1i})=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}(y,x_i)-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_Y(\beta)Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_{Xi}(\beta)\right)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$E(e_0e_{2i})=\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}(y,x_i)-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_Y(\beta)Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_{Xi}(\beta)\right)f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$E\left(e_{1j}e_{2i}\right)=E\left(e_{2j}e_{2i}\right)=\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}\left(x_i,x_j\right)-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_{Xi}(\beta)\right)Q_{Xj}(\beta)f_{Xj}\left(Q_{Xj}(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$E\left(e_{1j}e_{1i}\right)=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\left(P_{11}\left(x_i,x_j\right)-\beta(1-\beta)\right)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\left(Q_{Xi}(\beta)\right)Q_{Xj}(\beta)f_{Xj}\left(Q_{Xj}(\beta)\right)\right\}^{-1}$$

$$\hat{Q}_{Yrim}(\beta)=\frac{\hat{Q}_{Ym}(\beta)}{\hat{Q}_{Xim}(\beta)}\hat{Q}_{Xi}(\beta) \tag{153}$$

Eşitlik (153)'te tanımlanan tahmin edici e'li terimler biçiminde ifade edilirse,

$$\hat{Q}_{Yrim}(\beta) = Q_Y(\beta)(1+e_0)(1+e_{1i})^{-1}(1+e_{2i})$$

$$= Q_Y(\beta)(1+e_0+e_{2i}+e_0e_{2i})(1-e_{1i}+e_{1i}^2)$$

$$= Q_Y(\beta)(1+e_0-e_{1i}+e_{2i}-e_0e_{1i}+e_0e_{2i}-e_{1i}e_{2i}+e_{1i}^2) \quad (154)$$

elde edilir. $Q_Y(\beta)$ terimi eşitliğin her iki yanından çıkartılarak karesinin beklenen değeri alınırsa varyans eşitliği e'li terimlerle Eşitlik (155)'teki gibi elde edilir.

$$V\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2 E[e_0^2+e_{1i}^2+e_{2i}^2-2e_0e_{1i}+2e_0e_{2i}-2e_{1i}e_{2i}] \quad (155)$$

Eşitlik (155)'te fark yönteminde tanımlanan terimler yerine konulduğunda $R_i = \frac{Q_Y(\beta)}{Q_{Xi}(\beta)}$ olmak üzere

$$V\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_Y(\beta)f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-2}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)\right\}^{-2}+\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_X(\beta)\big)\right\}^{-2}-2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\big(P_{11}(y,x_i)-\beta(1-\beta)\big)\left\{Q_Y(\beta)Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}+2\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\big(P_{11}(y,x_i)-\beta(1-\beta)\big)\left\{Q_Y(\beta)Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}-2\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_X(\beta)\big)\right\}^{-2}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_Y(\beta)f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-2}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)\beta(1-\beta)\left\{Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_X(\beta)\big)\right\}^{-2}-2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)\big(P_{11}(y,x_i)-\beta(1-\beta)\big)\left\{Q_Y(\beta)Q_{Xi}(\beta)f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^{-1}$$

$$V\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)\right\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n'}\right)R_i\frac{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)}{f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)}\times\left\{R_i\frac{f_Y\big(Q_Y(\beta)\big)}{f_{Xi}\big(Q_{Xi}(\beta)\big)}+2\left(1-\frac{P_{11}(y,x_i)}{\beta(1-\beta)}\right)\right\}\right] \quad (156)$$

elde edilir. Kovaryans terimi ise,

$$cov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right) = E\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)-Q_Y(\beta)\right)\left(\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)-Q_Y(\beta)\right)$$

$$=Q_Y(\beta)E(1+e_0)(1+e_{1i})^{-1}(1+e_{2i})Q_Y(\beta)(1+e_0)\big(1+e_{1j}\big)^{-1}\big(1+e_{2j}\big)$$

$$cov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right) = [Q_Y(\beta)]^2E(1+e_0-e_{1i}+e_{2i}-e_0e_{1i}+e_0e_{2i}-e_{1i}e_{2i}+e_{1i}^2)\times\big(1+e_0-e_{1j}+e_{2j}-e_0e_{1j}+e_0e_{2j}-e_{1i}e_{2j}+e_{1j}^2\big)$$

$$cov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right)=[Q_Y(\beta)]^2E\left[e_0^2-e_0e_{1j}+e_0e_{2j}+e_0e_{2i}+e_{2i}e_{2j}-e_{2i}e_{1j}-e_{1i}e_0-e_{1i}e_{2j}+e_{1i}e_{1j}\right]$$

$$cov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right)=\frac{\beta(1-\beta)}{\{f_Y(Q_Y(\beta))\}^2}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{m}\right)R_i\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_{Xi}(Q_{Xi}(\beta))}\left(\frac{P_{11}(y,x_i)}{\beta(1-\beta)}-1\right)+\left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{m}\right)R_j\frac{f_Y(Q_Y(\beta))}{f_{Xj}(Q_{Xj}(\beta))}\left(\frac{P_{11}(y,x_j)}{\beta(1-\beta)}-1\right)-\left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{m}\right)R_iR_j\frac{\left[f_Y(Q_Y(\beta))^2\right]}{f_{Xi}(Q_{Xi}(\beta))f_{Xj}(Q_{Xj}(\beta))}\left(\frac{P_{11}(x_i,x_j)}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right] \quad (157)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (152)'de verilen tahmin edicinin varyansı

$$V\left(\hat{Q}_{Ym}^{MR}(\beta)\right)=\sum_{1\le i\le p}w_i^2V\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta)\right)+2\sum_{i<j}w_iw_jcov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right) \quad (158)$$

biçiminde yazılabilir.

Eşitlik (158)'de verilen varyans eşitliğini matris biçiminde yazmak istersek $\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\dots,w_p\right)'$, $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$, $b_{ij}=cov\left(\hat{Q}_{Yrim}(\beta),\hat{Q}_{Yrjm}(\beta)\right)$ olmak üzere $V\left(\hat{Q}_{Ym}^{MR}(\beta)\right)=\boldsymbol{w}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikten optimal $\boldsymbol{w}_{opt}$ değeri $e=(1,1,\dots,1)'$ olmak üzere $w_{opt}=\frac{\boldsymbol{B}^{-1}e}{e\prime\boldsymbol{B}^{-1}e}$ biçiminde elde edilir. Optimal $\boldsymbol{w}_{opt}$ değeri varyans eşitliğinde yerine konulduğunda minimum varyans eşitliği Eşitlik (159)'daki gibi elde edilir.

$$V_{min}\left(\hat{Q}_{Ym}^{MR}(\beta)\right)=\frac{1}{e\prime\boldsymbol{B}^{-1}e} \quad (159)$$

Ard arda örnekleme yöntemi için önerilen tahmin edici Eşitlik (160)'da görülmektedir.

$$\hat{Q}_{YRD}(\beta)=w\hat{Q}_{Y_{mopt}}^{MR}(\beta)+(1-w)\hat{Q}_{Y_u}(\beta) \quad (160)$$

Eşitlik (160)'dan elde edilen optimal w_{opt} değeri Eşitlik (161)'de verilmiştir.

$$w_{opt}=\frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Y_{mopt}}^{MR}(\beta)\right)} \quad (161)$$

Eşitlik (161)'de verilen optimal w_{opt} varyans eşitliğinde yerine konulursa tahmin ediciye ilişkin minimum varyans Eşitlik (162)'deki gibi elde edilir.

$$\hat{Q}_{Yopt}(\beta)=w_{opt}\hat{Q}_{Y_{mopt}}^{MR}(\beta)+\left(1-w_{opt}\right)\hat{Q}_{Y_u}(\beta)$$

$$V\left(\hat{Q}_{Yopt}(\beta)\right)=w_{opt}^2V\left(\hat{Q}_{Y_{mopt}}^{MR}(\beta)\right)+\left(1-w_{opt}^2\right)V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)$$

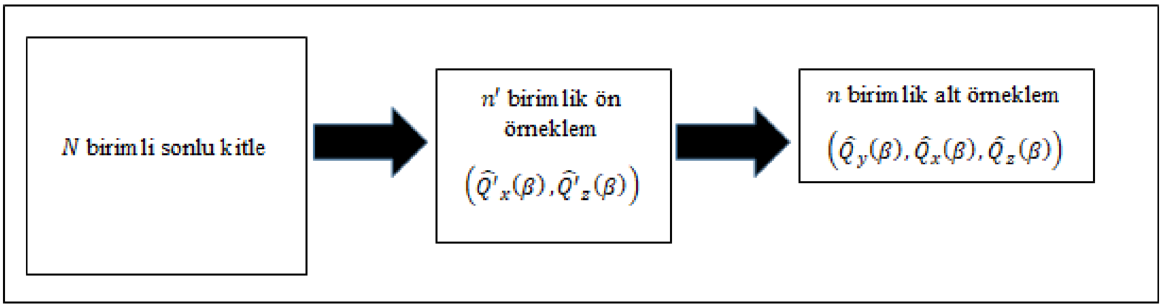
$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{Yopt}(\beta)\right) = \frac{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)V\left(\hat{Q}_{Ymopt}^{MR}(\beta)\right)}{V\left(\hat{Q}_{Y_u}(\beta)\right)+V\left(\hat{Q}_{Ymopt}^{MR}(\beta)\right)} \tag{162}$$

Rueda ve diğerleri [30] yapmış oldukları benzetim çalışmasında önermiş oldukları çoklu oransal tahmin edicinin klasik tahmin ediciden ve tek değişkenli oransal tahmin ediciden daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

4. İKİ SAFHALI ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

Kitleye ilişkin çeşitli parametrelerin tahmin edilmesinde yardımcı değişken bilgisinin kullanımına sık rastlanılmaktadır. Ancak bazı çalışmalarda yardımcı değişkene ilişkin kitle bilgisine ulaşılamamaktadır. Bu durumda iki safhalı örnekleme yöntemi kullanılmaktadır. İki safhalı örnekleme yönteminde, ilk aşamada X yardımcı değişkenine ait bilgilerin tahmini için ön örneklem seçilir. İkinci aşamada ise ön örneklemden Y değişkeninin tahmin edilmesi için alt örneklem seçilir.

N birimli sonlu bir kitleden eşit olasılıkla ve yerine koymaksızın, X ve Z yardımcı değişkenlerine ilişkin kitle yüzdeliği $Q_x(\beta)$ ve $Q_z(\beta)$'nın tahmininin $\widehat{Q'}_x(\beta)$ ve $\widehat{Q'}_z(\beta)$ ile gösterildiği n' birimlik bir ön örneklem seçilsin. Ön örneklemden y değişkenine ilişkin kitle yüzdeliğini tahmin etmek amacıyla n birimlik bir alt örneklem seçilsin. $Q_y(\beta)$, $Q_x(\beta), Q_z(\beta)$ kitle yüzdeliklerini ve $\hat{Q}_y(\beta)$, $\hat{Q}_x(\beta)$, $\hat{Q}_z(\beta)$ alt örneklemdeki örneklem yüzdeliklerinin tahminlerini göstersin. . İki safhalı örnekleme yönteminde örneklem seçimi Şekil 4.1'de görüldüğü gibi özetlenmiştir.



Şekil 4.1: İki Safhalı Örnekleme Yönteminde Ön ve Alt Örneklem Seçimi

4.1. Rueda ve Diğerleri [24] Tahmin Edicileri

Rueda ve diğerleri [24] iki safhalı örnekleme yönteminde yüzdelik tahmini için genel bir tahmin edici sınıfı önermişlerdir. Özel durum olarak da oransal ve zincirleme oransal tahmin edicilerini incelemişlerdir. İlk olarak yüzdelik tahmininin Horvitz-Thompson tahmin edicisini iki safhalı örnekleme yönteminde tanımlamışlardır. İlk safhada, d_1 örnekleme tasarımına sahip n' örneklem büyüklüğündeki s' örneklemi $p_{d_1}(s')$ olasılığı ile seçilsin. π_i' ve π_{ij}' birinci ve ikinci dereceden olasılıkları göstersin. İkinci safhada, d_1 örnekleme tasarımına sahip n büyüklüğündeki s örneklemi $p(s/s')$ koşullu olasılığına göre seçilsin. Bu tasarım altındaki olasılıklar $\pi_{i/s'}$ ve $\pi_{ij/s'}$ ile gösterilsin.

$\pi'_i = \sum_{s' \ni i} p_{d_1}(s')$, $\pi'_{ij} = \sum_{s' \ni i,j} p_{d_1}(s')$, $\pi^*_i = \pi'_i \cdot \pi_{i/s'}$ ve $\pi^*_{ij} = \pi'_{ij} \cdot \pi_{ij/s'}$ olmak üzere, dağılım fonksiyonunun Horvitz-Thompson tahmin edicisi

$$\hat{F}^*_{HTy}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in s} \frac{\delta(t - y_i)}{\pi^*_i} \tag{163}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradan yüzdelik tahmin edicisi

$$\hat{Q}^*_y(\beta) = \hat{F}^{*-1}_{HTy}(t) \tag{164}$$

olarak yazılabilir.

$\hat{Q}^*_y(\beta)$'nin varyans eşitliği ise Eşitlik (165)'te verilmektedir.

$$V\left(\hat{Q}^*_y(\beta)\right) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{f^2_y\left(Q_y(\beta)\right)} \left(\sum_{i,j \in U} \left(\pi'_{ij} - \pi'_i \pi'_j\right) \frac{\delta\left(Q_y(\beta) - y_i\right)}{\pi'_i} \frac{\delta\left(Q_y(\beta) - y_j\right)}{\pi'_j} \right.$$

$$\left. + E_{d_1}\left[\sum_{i,j \in s'} \left(\pi_{ij/s'} - \pi_{i/s'} \pi_{j/s'}\right) \frac{\delta\left(Q_y(\beta) - y_i\right)}{\pi^*_i} \frac{\delta\left(Q_y(\beta) - y_j\right)}{\pi^*_j} \right] \right)$$

$$V\left(\hat{Q}^*_y(\beta)\right) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{f^2_y\left(Q_y(\beta)\right)} \left(\sum_{i,j \in U} \frac{\pi'_{ij} - \pi'_i \pi'_j}{\pi^*_{ij}} \frac{\delta\left(\hat{Q}^*_y(\beta) - y_i\right)}{\pi'_i} \frac{\delta\left(\hat{Q}^*_y(\beta) - y_j\right)}{\pi'_j} \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j \in s'} \frac{\pi_{ij/s'} - \pi_{i/s'} \pi_{j/s'}}{\pi_{ij/s'}} \frac{\delta\left(\hat{Q}^*_y(\beta) - y_i\right)}{\pi^*_i} \frac{\delta\left(\hat{Q}^*_y(\beta) - y_j\right)}{\pi^*_j} \right) \tag{165}$$

$t^* = \hat{Q}^*_x(\beta) / \hat{Q}'_x(\beta)$ ve $\hat{Q}'_x(\beta)$ $Q_x(\beta)$'nın birinci safhadaki örneklem tahmini olmak üzere

$$\hat{Q}^H_y(\beta) = H\left(\hat{Q}^*_y(\beta), t^*\right) \tag{166}$$

biçiminde tanımlansın.

(1) $\left(Q_y(\beta), 1\right)$, $C \subset R_2$ kapalı kümesinin elemanı olmalıdır.

(2) H, C 'de tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur öyle ki $H\left(Q_y(\beta), 1\right) = Q_y(\beta)$ eşitliğini sağlansın.

(3) H'ın birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır ve C'de tanımlıdır ve $H_{10} = \left(Q_y(\beta), 1\right) = \left.\frac{\partial H(q, t^*)}{\partial q}\right|_{(q,t^*) = \left(Q_y(\beta), 1\right)} = 1$ eşitliği sağlanmalıdır.

H genel tahmin edici sınıfının özel durumu olarak tanımlanan oransal ve zincirleme oransal tahmin ediciler (167) ve (168) numaralı eşitliklerde görülmektedir.

$$\hat{Q}^*_{yr}(\beta) = \hat{Q}^*_y(\beta)\frac{\hat{Q}'_x(\beta)}{\hat{Q}^*_x(\beta)} \tag{167}$$

$$\hat{Q}^*_{ye}(\beta) = \hat{Q}^*_y(\beta)\left(\frac{\hat{Q}'_x(\beta)}{\hat{Q}^*_x(\beta)}\right)^{\alpha} \tag{168}$$

$$\hat{Q}^*_y(\beta) - Q_y(\beta) = \frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}^{*-1}_{HTy}\left(Q_y(\beta)\right)\right) + O\left(n^{-1/2}\right)$$

$$\hat{Q}^*_x(\beta) - Q_x(\beta) = \frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}^{*-1}_{HTx}\left(Q_x(\beta)\right)\right) + O\left(n^{-1/2}\right)$$

$$\hat{Q}'_x(\beta) - Q_x(\beta) = \frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}'_{HTx}\left(Q_x(\beta)\right)\right) + O\left(n^{-1/2}\right)$$

H için $\left(Q_y(\beta), 1\right)$ noktasında birinci dereceden Taylor serisi açılımını kullanarak

$$\hat{Q}^H_y(\beta) = H\left(\left(Q_y(\beta), 1\right)\right) + \left(\hat{Q}^*_y(\beta) - Q_y(\beta)\right)H_{10}\left(Q_y(\beta), 1\right)$$

$$+(t^* - 1)H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right) + O(n^{-1}) \tag{169}$$

$e_0 = \frac{\hat{Q}^*_y(\beta) - Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)}$ $e_1 = \frac{\hat{Q}^*_x(\beta) - Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$ $e_2 = \frac{\hat{Q}'_x(\beta) - Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$ olarak tanımlansın.

$$\hat{Q}^H_y(\beta) - Q_y(\beta) = \left(\hat{Q}^*_y(\beta) - Q_y(\beta)\right) + \left(\frac{\hat{Q}^*_x(\beta)}{\hat{Q}'_x(\beta)}\right)H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right) + O(n^{-1})$$

$$\hat{Q}^H_y(\beta) - Q_y(\beta) = Q_y(\beta)e_0 + \frac{e_1 - e_2}{1 + e_2}H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right)$$

$$\cong Q_y(\beta)e_0 + (e_1 - e_2)(1 - e_2)H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right)$$

$$\cong Q_y(\beta)e_0 + (e_1 - e_2)H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right) - e_2(e_1 - e_2)H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right) \tag{170}$$

Birinci dereceden yaklaşımla elde edilen varyans eşitliği Eşitlik (171)'de görülmektedir.

$$V\left(\hat{Q}^H_y(\beta)\right) = Q^2_y(\beta)V(e_0) + H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right)^2 V(e_1 - e_2)$$

$$+2H_{01}\left(Q_y(\beta), 1\right)Q_y(\beta)Cov(e_0, e_1 - e_2) \tag{171}$$

İki safhalı örnekleme yönteminde varyans eşitliği Eşitlik (172)'deki gibi yazılabilir.

$$V\left(\hat{Q}^H_y(\beta)\right) = E_{d_1}V\left(\hat{Q}^H_y(\beta)/s'\right) + V_{d_1}E\left(\hat{Q}^H_y(\beta)/s'\right) \tag{172}$$

$$V_{d_1}E\left(\hat{Q}_y^H(\beta)/s'\right)=\frac{1}{N^2}\frac{1}{f_y^2\left(Q_y(\beta)\right)}\left(\sum_{i,j\in U}\Delta'_{ij}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j}\right)$$

$$E_{d_1}V\left(\hat{Q}_y^H(\beta)/s'\right)=E_{d_1}\left(\frac{1}{N^2}\frac{1}{f_y^2\left(Q_y(\beta)\right)}\sum_{i,j\in s'}\Delta_{ij}^{s'}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_i\right)}{\pi_i^*}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_j\right)}{\pi_j^*}\right.$$

$$+\frac{H_{01}^2\left(Q_y(\beta),1\right)}{Q_x^2(\beta)}\frac{1}{N^2}\frac{1}{f_x^2\left(Q_x(\beta)\right)}\Delta_{ij}^{s'}\frac{\delta\left(Q_x\,(\beta)-x_i\right)}{\pi_i^*}\frac{\delta\left(Q_x\,(\beta)-x_j\right)}{\pi_j^*}$$

$$+2\frac{H_{01}\left(Q_y(\beta),1\right)}{Q_x(\beta)}\frac{1}{N^2}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)f_x\left(Q_x(\beta)\right)}$$

$$\left.\times\sum_{i,j\in s'}\Delta_{ij}^{s'}\frac{\delta\left(Q_y(\beta)-y_i\right)}{\pi_i^*}\frac{\delta\left(Q_y(\beta)-y_j\right)}{\pi_j^*}\right)$$

$\sum_{i,j\in U}\Delta'_{ij}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j}$ yerine örneklem tahmini $\sum_{i,j\in U}\frac{\Delta'_{ij}}{\pi_{ij}^*}\frac{\delta\left(\hat{Q}_y^*(\beta)-y_i\right)}{\pi'_i}\frac{\delta\left(\hat{Q}_y^*(\beta)-y_j\right)}{\pi'_j}$ kullanılmaktadır. $E_{d_1}\left(\sum_{i,j\in s'}\Delta_{ij}^{s'}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_i\right)}{\pi_i^*}\frac{\delta\left(Q_y\,(\beta)-y_j\right)}{\pi_j^*}\right)$ yerine yine örneklem tahmini $\sum_{i,j\in s'}\frac{\Delta_{ij}^{s'}}{\pi_{ij/s'}}\frac{\delta\left(\hat{Q}_y^*(\beta)-y_i\right)}{\pi_i^*}\frac{\delta\left(\hat{Q}_y^*(\beta)-y_j\right)}{\pi_j^*}$ kullanılmaktadır.

Rueda ve diğerlerinin [24] önermiş oldukları oransal ve zincirleme oransal tahmin edicilerin iki safhalı örnekleme yönteminde asimptotik varyanslarınının elde edilmesine ilişkin açıklamalar aşağıda yer almaktadır.

$$\hat{Q}_{RD}^{S1}=\hat{Q}_y(\beta)\frac{\widehat{Q'}_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)} \tag{173}$$

Tahmin ediciye ilişkin HKO eşitliğini elde etmek için fark yönteminde kullanılan terimler aşağıda verilmektedir.

$$e_0=\frac{\hat{Q}_y(\beta)-Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)}\qquad e_1=\frac{\hat{Q}_x(\beta)-Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}\qquad e_2=\frac{\hat{Q'}_x(\beta)-Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$$

$$E(e_0)=E(e_1)=E(e_2)=0$$

$$E(e_0^2)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_1^2)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_2^2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2}$$

$$E(e_0e_1) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}$$

$$E(e_0e_2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}$$

$$E(e_1e_2) = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2}$$

Eşitlik (173)'te verilen tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse ve ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse

$$\hat{Q}_{RD}^{S1} = Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_2)(1+e_1)^{-1}$$

$$\hat{Q}_{RD}^{S1} \cong Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_2)(1-e_1+e_1^2)$$

$$\hat{Q}_{RD}^{S1} \cong Q_y(\beta)(1+e_0-e_1+e_2+e_1^2+e_0e_2-e_0e_1-e_1e_2) \tag{174}$$

elde edilir. Eşitlik (174)'te eşitliğin her iki tarafından $Q_y(\beta)$ çıkartılıp beklenen değerinin karesi alınırsa ve ikinci dereceden büyük terimler ihmal edilirse, Eşitlik (173)'te verilen tahmin edicinin HKO eşitliği,

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S1}\right) \cong Q_y^2(\beta)E(e_0^2+e_1^2+e_2^2-2e_0e_1+2e_0e_2-2e_1e_2)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S1}\right) \cong Q_y^2(\beta)\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2}+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2}\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)} - 2\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2}\right\}$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S1}\right) \cong Q_y^2(\beta)\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2}+\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))\}^2}\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x(Q_x(\beta))Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right\}$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S1}\right) \cong \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\prime}\right)\frac{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\left\{\frac{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)}-2\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right\}\right] \quad (175)$$

elde edilir.

Rueda ve diğerleri [24] iki safhalı örnekleme yönteminde yüzdelik tahmini için zincirleme oransal tahmin ediciyi Eşitlik (176)'da görüldüğü biçimde önermişlerdir.

$$\hat{Q}_{RD}^{S2} = \hat{Q}_y(\beta)\left(\frac{\widehat{Q\prime}_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)}\right)^{\alpha} \quad (176)$$

Eşitlik (176)'da verilen tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse

$$\hat{Q}_{RD}^{S2} = Q_y(\beta)(1+e_0)(1+e_2)^{\alpha}(1+e_1)^{-\alpha} \quad (177)$$

yazılabilir. Eşitlik (177) Taylor serisi açılımı ile açılıp ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse Eşitlik (178) elde edilir.

$$\hat{Q}_{RD}^{S2} \cong Q_y(\beta)(1+e_0)\left(1+\alpha e_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_2^2\right)\left(1-\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2\right)$$

$$\cong Q_y(\beta)\left(1+e_0-\alpha e_1+\alpha e_2-\alpha e_0 e_1-\alpha^2 e_1 e_2+\alpha e_0 e_2+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}e_1^2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_2^2\right) \quad (178)$$

Eşitlik (178)'de eşitliğin her iki tarafından $Q_y(\beta)$ çıkatılıp beklenen değerinin karesi alınıp ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse, tahmin edicinin HKO eşitliği, Eşitlik (179)'da görüldüğü biçimde elde edilir.

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S2}\right) \cong Q_y^2(\beta)E(e_0^2+\alpha^2 e_1^2+\alpha^2 e_2^2-2\alpha e_0 e_1+2\alpha e_0 e_2-2\alpha^2 e_1 e_2)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S2}\right) \cong Q_y^2(\beta)\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2}+\alpha^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\prime}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)\right\}^2}\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{1}{n\prime}-\frac{1}{n}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right\} \quad (179)$$

(179) numaralı eşitlikte α'ya göre türev alıp sıfıra eşitlenirse optimal α değeri Eşitlik (180)'de görüldüğü biçimde elde edilir. Optimal α değeri Eşitlik (179)'da yerine konulursa minimum HKO, Eşitlik (181)'deki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial HKO\left(\hat{Q}_{RD}^{S2}\right)}{\partial\alpha} = 2\alpha\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\prime}\right)\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)\right\}^2}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\frac{P_{11}-\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}=0$$

$$\alpha = \left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right) \frac{Q_x(\beta) f_x\left(Q_x(\beta)\right)}{Q_y(\beta) f_y\left(Q_y(\beta)\right)} \tag{180}$$

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{RD}^{S2}\right) = \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n\prime}\right)\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right)^2\right] \tag{181}$$

4.2. Rueda ve Diğerleri [25] Tahmin Edicisi

Rueda ve diğerlerinin [25] yüzdelik tahmini için iki safhalı örnekleme yönteminde önermiş oldukları tabakalanma tahmin edicisi Eşitlik (182)'de görülmektedir.

$$Q_{st}^{*}(\beta) = \hat{F}_{st}^{*-1}(\beta) = \inf\left\{t \middle| \hat{F}_{st}^{*}(t) \geq \beta\right\} \tag{182}$$

$Q_{st}^{*}(\beta) - Q_y(\beta) = \frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\left(\beta - \hat{F}_{st}^{*}\left(Q_y(\beta)\right)\right)$ eşitliğinden $Q_{st}^{*}(\beta)$'nın asimptotik varyansı $z_i = \delta(Q_{st}^{*}(\beta) - y_i)$ olmak üzere Eşitlik (183)'te verilmiştir.

$$V\left(Q_{st}^{*}(\beta)\right) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{\left\{f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}^2} \left(\sum_{i,j\in U} \Delta_{ij}' \frac{z_i}{\pi_i'} \frac{z_j}{\pi_j'} + E_{d_1}\left[\sum_{h=1}^{H} \sum_{i,j\in s_h'} \Delta_{ij}^{s\prime} \frac{z_i}{\pi_i^*} \frac{z_j}{\pi_j^*}\right]\right) \tag{183}$$

5. YÜZDELİK TAHMİNİNDE KALİBRASYON YÖNTEMLERİ

Araştırmalarda istatistikçiler daha iyi tahminler elde edebilmek için birçok alanda yardımcı değişken bilgisinden yararlanırlar. Kalibrasyon yardımcı değişken bilgisi bilindiğinde parametre tahminlerinin daha duyarlı olmasına olanak sağlayabilmektedir. Gerçek hayat problemlerinde, kalibrasyon yaklaşımının kullanımı oldukça günceldir. Örneklem ağırlıkları ve doğal kalibrasyon kısıtlarının kolay yorumlanması nedeniyle kalibrasyon yaklaşımı sık kullanılan yöntemler arasında yer almaktadır.

Sonlu bir kitlede, kalibrasyon yaklaşımı 3 adımdan oluşur [51]

1) Kalibrasyon denklemleri ile tanımlanan kısıtlar ve yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı ağırlıklar hesaplanır.
2) Elde edilen bu ağırlıklar kitle toplamı ya da kitleye ilişkin diğer parametrelerin tahminlerinde doğrusal olarak kullanılır.
3) Yaklaşık olarak yansız tahminler veren tasarımlar oluşturulur.

Deville ve Särndal [52] minimum uzaklık yaklaşımı ile kalibrasyon denklemine bağlı olarak kalibrasyon ağırlıklarını incelemişlerdir. Literatürde yüzdelik tahmininde kalibrasyon yaklaşımının uygulanmasında Deville ve Särndal'ın [52] yaklaşımından yararlanarak yüzdelik tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu yüzden ilk olarak Deville ve Särndal [52] kalibrasyonu tanıtılmıştır.

5.1. Deville ve Särndal [52] Kalibrasyonu

N büyüklükteki U sonlu kitlesinden, belirlenen bir örnekleme yöntemiyle n büyüklükte s $(s \subseteq U)$ örneklemi seçilsin. π_k, k'ıncı birimin n büyüklükteki örnekleme seçilme olasılığı olsun. Her $k \in s$ için (y_k, x_k) gözlemlensin.

Yardımcı değişkene ilişkin kitle toplamı

$$X = \sum_U x_k \tag{184}$$

olmak üzere bilindiği varsayılsın. Kitle toplamı

$$Y = \sum_U y_k \tag{185}$$

için Horvitz-Thompson tahmin edicisi

$$\hat{Y} = \sum_s y_k/\pi_k = \sum_s d_k y_k \tag{186}$$

biçiminde tanımlansın.

Deville [53], Lernel [54]'in fikrini genişleterek bilinen yardımcı değişkene ilişkin kitle toplamı üzerinde kalibrasyon yaparak $d_k = 1/\pi_k$ örneklem ağırlıklarında değişiklik yapmayı amaçlamıştır. Bu durumda kalibrasyon denklemi

$$\hat{X} = \sum_s w_k x_k \tag{187}$$

olarak tanımlanır. Deville ve Särndal [52] örneklem ağırlıklarına oldukça yakın yeni ağırlıklar elde etmeyi amaçlamışlardır. Kalibrasyon kısıdını Eşitlik (188)'de verilen ki-kare uzaklığına

$$D = \sum \frac{(w_k - d_k)^2}{d_k q_k} \tag{188}$$

göre minimize etmişlerdir. Lagrange fonksiyonu

$$L = \sum \frac{(w_k - d_k)^2}{d_k q_k} - 2\lambda\left(\sum w_k x_k - X\right) \tag{189}$$

biçiminde yazılabilir.

w_k'ya göre türev alınırsa,

$$\sum \frac{2(w_k - d_k)}{d_k q_k} - 2\lambda\left(\sum x_k\right) = 0$$

$$w_k = d_k + \lambda d_k q_k x_k \tag{190}$$

w_k, (190) numaralı eşitlikte görüldüğü biçimde elde edilir. $X = \sum w_k x_k$ eşitliğinden λ Eşitlik (191)'de görüldüğü biçimde elde edilir.

$$\lambda = \frac{X - \sum d_k x_k}{\sum d_k q_k x_k^2} \tag{191}$$

Bu durumda w_k ağırlıkları,

$$w_k = d_k + \frac{(X - \sum d_k x_k)}{\sum d_k q_k x_k^2}(d_k q_k x_k) \tag{192}$$

biçiminde elde edilir.

Elde edilen ağırlıklar $\hat{Y}_G = \sum_s w_k y_k$ eşitliğinde yerine konulursa toplam için genelleştirilmiş regresyon tahmin edicisi (193) numaralı eşitlikte görüldüğü biçimde elde edilir.

$$\hat{Y}_G = \sum d_k y_k + \left(X - \sum d_k x_k\right)\frac{\sum d_k q_k x_k y_k}{\sum d_k q_k x_k^2} \tag{193}$$

5.2. Ren [34] Yaklaşımı

Kovačević [55] dağılım fonksiyonları ve yüzdelikler için kalibrasyon tahmin edicilerini önermiştir. Kovačević [55], yardımcı değişkenin momentleri üzerinden kalibrasyon yaparak dağılım fonksiyonunun tahmin edicileri ile ilgilenmiştir. Harms [56] benzer bir yaklaşım kullanarak Finlandiya Avrupa Hane Halkı Araştırması'na uygulamıştır. Ren [34], dağılım fonksiyonu ve yüzdelikler için kalibrasyon tahmin edicilerini birlikte geliştirmede ilk çalışan isim olarak görülmektedir.

İlgilenilen y değişkenine ilişkin sonlu kitle dağılım fonksiyonu, $\Delta(t-y_i)=\begin{cases}1 & t-y_i\geq 0\\ 0 & ö.d.\end{cases}$ olmak üzere, Eşitlik (194)'te görüldüğü biçimde tanımlanmaktadır.

$$F_Y(t)=\frac{1}{N}\sum_U \Delta(t-y_i) \tag{194}$$

$d_i=\frac{1}{\pi_i}$ olmak üzere $F_Y(t)$'nin Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{F}_{HTY}(t)=\frac{1}{N}\sum_s d_i\Delta(t-y_i) \tag{195}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $a_{ij}=(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j)/(\pi_i\pi_j)$ ve $i=j$ için $\pi_{ij}=\pi_i$ olmak üzere Eşitlik (195)'te verilen tahmin edicinin varyansı

$$V\left(\hat{F}_{HTY}(t)\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}\Delta(t-y_i)\Delta(t-y_j) \tag{196}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (196)'da verilen varyansın tahmini ise

$$\hat{V}\left(\hat{F}_{HTY}(t)\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}\pi_{ij}^{-1}\Delta(t-y_i)\Delta(t-y_j) \tag{197}$$

olarak verilmektedir.

$\hat{F}_{HTY}(t)$ yansız bir tahmin edicidir ancak gerçek bir dağılım fonksiyonu değildir. N yerine $\hat{N}=\sum_s d_i$ yazılırsa gerçek bir dağılım fonksiyonu olan dağılım fonksiyonunun Hajek tahmin edicisi

$$\hat{F}_{HY}(t)=\frac{\sum_s d_k\Delta(t-y_i)}{\sum_s d_i} \tag{198}$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (198)'de verilen tahmin edici yanlı bir tahmin edicidir ve bu tahmin ediciye ilişkin HKO,

$$HKO\left(\hat{F}_{HY}(t)\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}\left(\Delta(t-y_i)-F_y(t)\right)\left(\Delta(t-y_j)-F_y(t)\right) \tag{199}$$

biçiminde verilmektedir. HKO'nın örneklemden tahmini ise,

$$\widehat{HKO}\left(\hat{F}_{HY}(t)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\in s}\sum_{j\in s} a_{ij}\pi_{ij}^{-1}\left(\Delta(t-y_i) - \hat{F}_{HY}(t)\right)\left(\Delta(t-y_j) - \hat{F}_{HY}(t)\right) \quad (200)$$

olarak verilmektedir.

Oransal tahmin edici Eşitlik (201)'de görüldüğü biçimde tanımlanmaktadır.

$$\hat{F}_{RY}(t) = \frac{\sum_s d_i\Delta(t-y_i)}{\sum_s d_i\Delta(t-x_i)} F_x(t) = \frac{\hat{F}_{HTY}(t)}{\hat{F}_{HTX}(t)} F_x(t) \quad (201)$$

$R(t) = \frac{F_y(t)}{F_x(t)}$ olmak üzere tahmin edicinin HKO,

$$HKO\left(\hat{F}_{RY}(t)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}[\Delta(t-y_i) - R(t)\Delta(t-x_i)] \times$$
$$[\Delta(t-y_j) - R(t)\Delta(t-x_j)] \quad (202)$$

biçiminde verilmektedir. Eşitlik (201)'de verilen tahmin edicinin HKO'nın örneklemden tahmini,

$$\widehat{HKO}\left(\hat{F}_{RY}(t)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\in s}\sum_{j\in s} a_{ij}\pi_{ij}^{-1}[\Delta(t-y_i) - \hat{R}(t)\Delta(t-x_i)] \times$$
$$[\Delta(t-y_j) - \hat{R}(t)\Delta(t-x_j)] \quad (203)$$

$\hat{R}(t) = \frac{\hat{F}_{HTY}(t)}{\hat{F}_{HTX}(t)}$ olmak üzere Eşitlik (203)'te görülmektedir.

$R = \sum_{i\in U} Y_i / \sum_{i\in U} X_i$ olmak üzere oransal tahmin edici,

$$\tilde{F}_{RY}(t) = \frac{\sum_s d_i\Delta(t-y_i)}{\sum_s d_i\Delta(t-Rx_i)} F_x(R^{-1}t) = \frac{\hat{F}_{HTY}(t)}{\hat{F}_{HTX}(R^{-1}t)} F_x(R^{-1}t) \quad (204)$$

biçiminde tanımlansın. Tahmin ediciye ilişkin HKO eşitliği $R^* = \frac{F_y(t)}{F_x(R^{-1}t)}$ olmak üzere,

$$HKO\left(\tilde{F}_{RY}(t)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}[\Delta(t-y_i) - R^*(t)\Delta(t-Rx_i)] \times$$
$$[\Delta(t-y_j) - R^*(t)\Delta(t-Rx_j)] \quad (205)$$

biçiminde elde edilir. Tahmin edicinin HKO'nın örneklemden tahmini $\hat{R}^*(t) = \frac{\hat{F}_{HTY}(t)}{\hat{F}_{HTX}(R^{-1}t)}$ olmak üzere,

$$\widehat{HKO}\left(\tilde{F}_{RY}(t)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\in U}\sum_{j\in U} a_{ij}\pi_{ij}^{-1}[\Delta(t-y_i) - \hat{R}^*(t)\Delta(t-Rx_i)] \times$$
$$[\Delta(t-y_j) - \hat{R}^*(t)\Delta(t-Rx_j)] \quad (206)$$

biçimindedir.

Ren [34], Eşitlik (201)'de verilen tahmin ediciyi yeniden, $w_i = \frac{d_i \sum_{j\in s} \Delta(t - Rx_j)}{\sum_{l\in s} d_l \Delta(t - Rx_l)} = d_i F_x(R^{-1}t) F_{HTX}^{-1}(R^{-1}t)$ ve $D_s^+ = \{t;\ \sum_{l\in s} \sum_{l\in s} d_l \Delta(t - Rx_l) > 0\}$ olmak üzere Eşitlik (207)'de görüldüğü gibi tanımlamıştır.

$$\tilde{F}_{RY}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i\in s} w_i(t) \Delta(t - Y_i)\,, t \in D_s^+ \tag{207}$$

Kalibrasyon kısıdı olarak,

$$\sum_{i\in s} w_i(t) \Delta(t - RX_i) = \sum_{j\in U} \Delta\left(t - RX_j\right) \tag{208}$$

eşitliği verilmiştir.

F^* kalibrasyon fonksiyonu, $q_i(t)$ istatistikçi tarafından belirlenen ağırlıklar ve $\lambda(t)$ Lagrange çarpanları olmak üzere kalibrasyon sonrası elde edilen ağırlıklar Eşitlik (209)'da verilmiştir.

$$w_i(t) = d_i F^*[q_i(t) \Delta(t - X_i)] \lambda(t),\ i \in s,\ t \in D_s^+ \tag{209}$$

Ren [34], $Q_Y(\alpha) = F_Y^{-1}(\alpha)$ tanımından yola çıkarak x yardımcı değişkeni için kalibrasyon denklemini,

$$\hat{Q}_{x,w}(\alpha) = \hat{F}_{x,w}^{-1} = Q_x(\alpha) \tag{210}$$

biçiminde tanımlamıştır. $\hat{F}_{x,w}(t)$ ise,

$$\hat{F}_{x,w}(t) = \sum_{i\in s} w_i(t - X_i) / \sum_{i\in s} w_i \tag{211}$$

biçimindedir.

$\sum_{i\in s} w_i \Delta(Q_x(\alpha) - X_i) = \sum_{i\in U} \Delta(Q_x(\alpha) - X_i)$ kısıdı $d(d_i, w_i)$ belli bir uzaklık ölçütü olmak üzere minimize edilir. İlgilenilen değişkene ilişkin kalibrasyon tahmin edicisi,

$$\hat{F}_{y,w}(t) = \sum_{i\in s} w_i(t - Y_i) / \sum_{i\in s} w_i \tag{212}$$

biçiminde tanımlamıştır.

5.3. Harms ve Duchesne [35] Yaklaşımı

Harms ve Duchesne [35] ara değeri hesaplanmış (interpolated) dağılım fonksiyonunu kullanarak yüzdelik için yeni kalibrasyon tahmin edicisi önermişlerdir. $L_{y,s}(t) = max\{\{y_k, k \in s | y_k \le t\} \cup \{-\infty\}\}$, $U_{y,s}(t) = min\{\{y_k, k \in s | y_k > t\} \cup \{\infty\}\}$ ve $B_{y,s}(t) = \{t - L_{y,s}(t)\} / \{U_{y,s}(t) - L_{y,s}(t)\}$ olmak üzere H Heavyside fonksiyonu

$$H_{y,s}(t,y_k)=\begin{cases}1 & y_k \le L_{y,s}(t)\\ B_{y,s}(t) & y_k = U_{y,s}(t)\\ 0 & y_k > U_{y,s}(t)\end{cases} \tag{213}$$

biçiminde verilmiştir. Eşitlik (213)'te verilen Heavyside fonksiyonundan yararlanarak kalibrasyon tahmin edicilerini (214) ve (215) numaralı eşitliklerde görüldüğü biçimde önermişlerdir.

$$\hat{F}_{y,cal}(t)=\frac{\sum_s w_k H_{y,s}(t,y_k)}{\sum_s w_k} \tag{214}$$

$$\hat{F}_{x,cal}(t)=\frac{\sum_s w_k H_{y,s}(t,x_k)}{\sum_s w_k} \tag{215}$$

Kalibrasyon kısıtları $\sum_s v_k = N$ ve $\hat{Q}_{x,cal,\alpha}=\left(\hat{Q}_{x_1,cal,\alpha},\dots,\hat{Q}_{x_j,cal,\alpha}\right)'=Q_{x,\alpha}$ olmak üzere verilen $d(d_i,w_i)$ belli bir uzaklık ölçütüne göre minimize edilmek üzere, yüzdelik için kalibrasyon tahmin edicisi,

$$\hat{Q}_{y,cal,\alpha}=F_{y,cal}^{-1}(\alpha) \tag{216}$$

şeklinde önerilmiştir.

Verilen belli bir uzaklık ölçütüne göre kalibrasyon kısıdı minimize edildiğinde $\lambda_s=(\sum_s d_k q_k a_k a_k')^{-1}(T_a-\sum_s d_k a_k)$, $\mathrm{T}_a=(N,\alpha,\dots,\alpha)'$, $a_k=\left(1,a_{1k},\dots,a_{Jk}\right)'$ ve $a_{jk}=\begin{cases}N^{-1} & x_{jk}\le L_{x_j,s}\left(Q_{x_j,\alpha}\right)\\ N^{-1}B_{x_j,s}\left(Q_{x_j,\alpha}\right) & x_{jk}= U_{x_j,s}\left(Q_{x_j,\alpha}\right)\\ 0 & x_{jk}> U_{x_j,s}\left(Q_{x_j,\alpha}\right)\end{cases}$ $j=1,\dots,J$ olmak üzere w_k ağırlıkları

$$w_k=d_k(1+q_k a_k'\lambda_s), k\epsilon s \tag{217}$$

Eşitlik (217)'de görüldüğü biçimde elde edilir. $\Delta_{kl}=\pi_{kl}-\pi_k\pi_l$, $e_k=H_{y,s}\left(\hat{Q}_{y,cal,\alpha},y_k\right)-a_k'\hat{B}_s$ ve $\hat{B}_s=(\sum_s w_k q_k a_k a_k')^{-1}\sum_s w_k q_k a_k\, H_{y,s}\left(\hat{Q}_{y,cal,\alpha},y_k\right)$ olmak üzere kalibrasyon tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (218)'de verilmiştir.

$$\hat{V}\{\hat{F}_{y,cal}\left(Q_{y,\alpha}\right)\}=N^{-2}\sum\sum_s\frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}}(w_k e_k)(w_l e_l) \tag{218}$$

5.4. Rueda ve Diğerleri [36] Yaklaşımı

İlgilenilen değişkene ilişkin sonlu kitlenin dağılım fonksiyonu $\Delta(z)=1\ (0),\ z\ge 0\ (\text{ö}.d)$ olmak üzere,

$$F_y(t)=\frac{1}{N}\sum_{k\in U}\Delta(t-y_k) \tag{219}$$

biçimindedir.

y değişkenine ilişkin α'ıncı yüzdelik,

$$Q_y(\alpha)=inf\{t\colon F_y(t)\ge\alpha\} \tag{220}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

$Q_y(\alpha)$'yı tahmin etmek için genel yöntem, ilk olarak $\hat{F}_y(t)$ tahmin edilir, daha sonra $\hat{F}_y(t)$'nin tersi alınarak $\hat{Q}_y(\alpha)$ tahmin edilir.

$$\hat{Q}_y(\alpha) = \hat{F}_y^{-1}(t) = inf\{t: \hat{F}_y(t) \geq \alpha\} \tag{221}$$

$F_y(t)$'nin Horvitz-Thompson tahmin edicisi $d_k = 1/\pi_k$ olmak üzere Eşitlik (222)'de görülmektedir.

$$\hat{F}_{HY}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k\in U} d_k \Delta(t - y_k) \tag{222}$$

$\hat{F}_{HY}(t)$ yansız bir tahmin edicidir ancak gerçek bir dağılım fonksiyonu değildir. Eğer N $\hat{N} = \sum_{k\in s} 1/\pi_k$ ile yer değiştirirse gerçek bir dağılım fonksiyonu olan dağılım fonksiyonunun Hajek tahmin edicisi,

$$\hat{F}_0(t) = \frac{\sum_{k\in s} \Delta(t-y_k) d_k}{\sum_{k\in s} d_k} \tag{223}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

$\hat{\beta}' = (\sum_{k\in s} d_k q_k x_k x_k')^{-1} \sum_{k\in s} d_k q_k x_k y_k$, x ve y arasında çoklu regresyon katsayısının ağırlıklandırılmış tahmin edicisi olmak üzere $g = \hat{\beta}' x$ değişkeni tanımlansın.

$g_k = \hat{\beta}' x_k \quad k = 1, \dots, N, \quad F_g(t) = \frac{1}{N}\sum_{k\in U} \Delta(t - g_k)$ ve $Q_g(\alpha) = inf\{t: F_g(t) \geq \alpha\}$

eşitlikleri verilsin. Dağılım fonksiyonunun kalibrasyon tahmin edicisi

$$\hat{F}_{yc}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k\in s} w_k \Delta(t - y_k) \tag{224}$$

olarak tanımlansın. Yeni ağırlıklar w_k, $d_k = 1/\pi_k$ eşitliğinden uyarlanmıştır. Eşitlik (225)'te ki-kare uzaklığı verilmektedir.

$$\phi_s = \frac{1}{2}\sum_{k\epsilon s} \frac{(w_k - d_k)^2}{d_k q_k} \tag{225}$$

Kalibrasyon kısıdı ise,

$$\frac{1}{N}\sum_{k\in s} w_k \Delta\big(Q_g(\alpha) - g_k\big) = F_g\Big(Q_g(\alpha)\Big) \tag{226}$$

biçimdedir. Ki-kare uzaklığının kalibrasyon kısıdına göre minimize edilmesi ile

$$w_k = d_k + \frac{d_k q_k N \Delta\big(Q_g(\alpha) - g_k\big)\Big(F_g\big(Q_g(\alpha)\big) - \hat{F}_{GH}\big(Q_g(\alpha)\big)\Big)}{\sum_{l\in s} d_l q_l \Delta\big(Q_g(\alpha) - g_l\big)} \tag{227}$$

$\sum_{l\in s} d_l q_l \Delta\big(Q_g(\alpha) - g_l\big) \neq 0$ olmak üzere w_k ağırlıkları Eşitlik (227)'deki gibi elde edilir.

$\hat{B} = \frac{\sum_{l\in s} d_l q_l \Delta(Q_g(\alpha) - g_l) \Delta(t - y_l)}{\sum_{l\in s} d_l q_l \Delta(Q_g(\alpha) - g_l)}$ olmak üzere kalibrasyon tahmin edicisi Eşitlik (228)'deki gibi elde edilir.

$$\hat{F}_{yc}(t) = \hat{F}_{YH}(t) + \Big(F_g\Big(Q_g(\alpha)\Big) - \hat{F}_{GH}\Big(Q_g(\alpha)\Big)\Big)\hat{B} \tag{228}$$

$\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l$, $E_k = \Delta\big(Q_y(\alpha) - y_k\big) - \Delta\big(Q_g(\alpha) - g_k\big)$, $B = \frac{\sum_{k\in U} \Delta(Q_g(\alpha) - g_k)\Delta(Q_y(\alpha) - y_k)}{\sum_{k\in U} \Delta(Q_g(\alpha) - g_k)}$ ve $AV\left(\hat{F}_{yc}\left(Q_y(\alpha)\right)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U} \Delta_{kl}(d_k E_k)\,(d_l E_l)$ olmak üzere yüzdelik için kalibrasyon tahmin edicisinin asimptotik varyansı,

$$AV\left(\hat{Q}_{yc}(\alpha)\right) = \frac{1}{\left(f_Y\left(Q_y(\alpha)\right)\right)^2} AV\left(\hat{F}_{yc}\left(Q_y(\alpha)\right)\right) \tag{229}$$

biçiminde verilmiştir.

Rueda ve diğerleri [36] alternatif kalibrasyon tahmin edicisi olarak ki-kare uzaklığını Eşitllik (230)'da verilen kalibrasyon kısıdına göre $t_j = Q_g(\alpha_j)$ $j = 1, \dots, P-1$ $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{P-1}$ olmak üzere minimize etmişlerdir.

$$\frac{1}{N}\sum_{k\in s} w_k \Delta\big(t_j - g_k\big) = F_g\big(t_j\big)\ j = 1, \dots, P \tag{230}$$

$t' = (t_1, \dots, t_P)$, $\Delta(t - g_k)' = \Delta\big((t_1 - g_k), \dots, (t_P - g_k)\big)$, $F_g(t) = \left(F_g(t_1), \dots, F_g(t_P)\right)'$ ve $\hat{F}_{GH}(t) = \left(\hat{F}_{GH}(t_1), \dots, \hat{F}_{GH}(t_P)\right)'$ olmak üzere yeni kalibrasyon ağırlıkları,

$$w_k = d_k + d_k N\left(F_g(t) - \hat{F}_{GH}(t)\right)' T^{-1}\Delta(t - g_k) \tag{231}$$

biçiminde verilmiştir. Burada $T = \sum_{k\in s} d_k \Delta(t - g_k)\,\Delta(t - g_k)' = \big(\sum_{k\in s} d_k \Delta(t_i - g_k)\Delta(t_j - g_k)\big)_{1\le i,j\le P}$ biçiminde tanımlanmıştır.

$\hat{D} = T^{-1}\sum_{k\in s} d_k\, \Delta(t - g_k)\Delta(t - y_k)$ olmak üzere kalibrasyon tahmin edicisi

$$\hat{F}^{*}_{yc}(t) = \hat{F}_{YH}(t) + \left(F_g(t) - \hat{F}_{GH}(t)\right)' \hat{D} \tag{232}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

$H_k = \Delta\big(Q_y(\alpha) - y_k\big) - \Delta(t - b_k)'D$, $b_k = \beta' x_k$,

$D = \left(\sum_{k\in u} d_k\, \Delta(t - b_k)\Delta(t - b_k)'\right)^{-1}\left(\sum_{k\in u} d_k\, \Delta(t - b_k)\Delta(t - y_k)\right)$ ve

$AV\left(\hat{F}^{*}_{yc}\left(Q_y(\alpha)\right)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U} \Delta_{kl}(d_k H_k)\,(d_l H_l)$ olmak üzere $Q^{*}_{yc}(\alpha)$'nin asimptotik varyansı,

$$AV\left(Q^{*}_{yc}(\alpha)\right) = \frac{1}{\left(f_Y\left(Q_y(\alpha)\right)\right)^2} AV\left(\hat{F}^{*}_{yc}\left(Q_y(\alpha)\right)\right) \tag{233}$$

biçiminde verilmiştir.

6. ÇEŞİTLİ ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNDE ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER

6.1. BRÖ Yönteminde Önerilen Tahmin Edici Aileleri

6.1.1. İlk Önerilen Tahmin Edici Ailesi $\left(\hat{Q}^{1}_{\text{Ö}_i}\right)$

Gupta ve Shabbir [57] kitle ortalaması tahmini için genel bir tahmin edici ailesi önermişlerdir. Koyuncu ve Kadılar [58], Gupta ve Shabbir [57] tahmin edicisinin HKO'nda düzeltme yapmışlardır. Gupta ve Shabbir [57] tahmin edicisinden yola çıkarak kitle yüzdeliğinin tahmin edilmesi için yeni bir yüzdelik tahmin edici ailesi önerilmiştir. Önerilen tahmin edici ailesi,

$$\hat{Q}^{1}_{\text{Ö}_i} = \left[\omega_1 \hat{Q}_y(\beta) + \omega_2 \left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right)\right]\left[\frac{\eta Q_x(\beta)+\delta}{\eta \hat{Q}_x(\beta)+\delta}\right] \qquad (234)$$

biçimindedir. Tahmin edici ailesine dâhil olan çeşitli tahmin ediciler Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1: Tahmin Edici Ailesine Dâhil Olan Çeşitli Tahmin Ediciler

Tahmin Edici	Tahmin Edici	ω_1	ω_2	η	δ
Klasik	$\hat{Q}_y(\beta)$	1	0	0	0
Rueda vd. (2004)	$\hat{Q}^*_{RD1} = \hat{Q}_y(\beta)\dfrac{Q_x(\beta)}{\hat{Q}_x(\beta)}$	1	0	1	0
Rueda vd. (2004)	$\hat{Q}^*_{RD2} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{R}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right)$	1	$\hat{R}$	0	0
Rueda vd. (2004)	$\hat{Q}^*_{RD3} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{c}\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right)$	1	$\hat{c}$	0	0
Rueda vd. (2004)	$\hat{Q}^*_{RD4} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{b}_\alpha\left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right)$	1	$\hat{b}_\alpha$	0	0
Sisodia ve Dwiwedi(1981), Singh ve Kakran (1993)	$\hat{Q}_{SD-SK_1} = \hat{Q}_Y(\beta)\left[\dfrac{Q_X(\beta)+R_X}{\hat{Q}_X(\beta)+R_X}\right]$	1	0	1	R_X
Sisodia ve Dwiwedi(1981), Singh ve Kakran (1993)	$\hat{Q}_{SD-SK_2} = \hat{Q}_Y(\beta)\left[\dfrac{Q_X(\beta)+M_0}{\hat{Q}_X(\beta)+M_0}\right]$	1	0	1	M_0
Upadyaya ve Singh (1999)	$\hat{Q}_{US_1} = \hat{Q}_Y(\beta)\left[\dfrac{M_0 Q_X(\beta)+R_X}{M_0\hat{Q}_X(\beta)+R_X}\right]$	1	0	M_0	R_X
Upadyaya ve Singh (1999)	$\hat{Q}_{US_2} = \hat{Q}_Y(\beta)\left[\dfrac{R_X Q_X(\beta)+M_0}{R_X\hat{Q}_X(\beta)+M_0}\right]$	1	0	R_X	M_0
Kadılar ve Çıngı (2004)	$\hat{Q}_{KC2004_1} = \left[\hat{Q}_Y(\beta) + b\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)\right]\left[\dfrac{Q_X(\beta)}{\hat{Q}_X(\beta)}\right]$	1	b	1	0

Çizelge 6.1: Tahmin Edici Ailesine Dâhil Olan Çeşitli Tahmin Ediciler (Devamı)

Tahmin Edici	Tahmin Edici	ω_1	ω_2	η	δ
Kadılar ve Çıngı (2004)	$\hat{Q}_{KC2004_2} = \left[\hat{Q}_Y(\beta) + b\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)\right]\left[\dfrac{Q_X(\beta) + R_X}{\hat{Q}_X(\beta) + R_X}\right]$	1	b	1	R_X
Kadılar ve Çıngı (2004)	$\hat{Q}_{KC2004_2} = \left[\hat{Q}_Y(\beta) + b\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)\right]\left[\dfrac{Q_X(\beta) + M_0}{\hat{Q}_X(\beta) + M_0}\right]$	1	b	1	M_0
Kadılar ve Çıngı (2004)	$\hat{Q}_{KC2004_3} = \left[\hat{Q}_Y(\beta) + b\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)\right]\left[\dfrac{R_X Q_X(\beta) + M_0}{R_X \hat{Q}_X(\beta) + M_0}\right]$	1	b	R_X	M_0
Kadılar ve Çıngı (2004)	$\hat{Q}_{KC2004_4} = \left[\hat{Q}_Y(\beta) + b\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)\right]\left[\dfrac{M_0 Q_X(\beta) + R_X}{M_0 \hat{Q}_X(\beta) + R_X}\right]$	1	b	M_0	R_X

Çizelge 6.1'de Sisodia ve Dwiwedi [59], Singh ve Kakran [60], Upadyaya ve Singh [61] ve Kadılar ve Çıngı [62] tarafından ortalama için önerilen tahmin ediciler yüzdelik tahmini için uyarlanmıştır ve önerilen tahmin ediciler tahmin edici ailesine dâhil olmaktadır.

HKO'nın elde edilmesinde fark yönteminden yararlanılmıştır. Fark yönteminde kullanılan terimler, bu terimlerin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryans terimi aşağıda verilen eşitliklerde tanımlanmıştır.

$$e_0 = \frac{\hat{Q}_y(\beta) - Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)} \qquad e_1 = \frac{\hat{Q}_x(\beta) - Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)}$$

$$E(e_0) = E(e_1) = 0$$

$$E(e_0^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2$$

$$E(e_1^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\right)^2$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\frac{1}{Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)$$

Tahmin edici Eşitlik (235)'te görüldüğü biçimde e'li terimler ile ifade edilebilir.

$$\hat{Q}^1_{\ddot{\text{O}}_i} = \left[\omega_1 Q_y(\beta)(1+e_0) + \omega_2\left(Q_x(\beta) - Q_x(\beta)(1+e_1)\right)\right]\left[\frac{\eta Q_x(\beta) + \delta + \eta Q_x(\beta) e_1}{\eta Q_x(\beta) + \delta}\right]^{-1} \tag{235}$$

$\gamma = \frac{\eta Q_x(\beta)}{\eta Q_x(\beta) + \delta}$ olmak üzere Eşitlik (235)'te verilen tahmin edici

$$\hat{Q}^1_{\ddot{\text{O}}_i} = \left[\omega_1 Q_y(\beta)(1+e_0) - \omega_2 Q_y(\beta) e_1\right]\left[1 + \gamma e_1\right]^{-1} \tag{236}$$

biçiminde yazılır. $[1+\gamma e_1]^{-1}$ ifadesi binom açılımına göre açılıp, ikinci dereceden yüksek derecedeki terimler ihmal edilirse tahmin edici

$$\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i} \cong \left[\omega_1 Q_y(\beta)(1+e_0) - \omega_2 Q_x(\beta)e_1\right][1-\gamma e_1+\gamma^2 e_1^2]$$

$$\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i} \cong \omega_1 Q_y(\beta) - \omega_1 Q_y(\beta)\gamma e_1 + \omega_1 Q_y(\beta)\gamma^2 e_1^2 + \omega_1 Q_y(\beta)e_0$$
$$-\omega_1 Q_y(\beta)\gamma e_0 e_1 - \omega_2 Q_x(\beta)e_1 + \omega_2 Q_x(\beta)\gamma e_1^2$$

biçiminde elde edilir. Eşitliğin her iki tarafından $Q_y(\beta)$ çıkartılırsa ve $\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i} - Q_y(\beta)$ ifadesinin karesinin beklenen değeri alınırsa tahmin ediciye ilişkin HKO elde edilir.

$$\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i} - Q_y(\beta) \cong (\omega_1-1)Q_y(\beta) + \omega_1 Q_y(\beta)e_0 - \omega_1 Q_y(\beta)\gamma e_1 - \omega_2 Q_x(\beta)e_1$$
$$-\omega_1 Q_y(\beta)\gamma e_0 e_1 + \omega_1 Q_y(\beta)\gamma^2 e_1^2 + \omega_2 Q_x(\beta)\gamma e_1^2 \quad (237)$$

$\lambda = (1-f)/n, \quad C_{Q_y(\beta)} = 1/\left\{Q_y(\beta) f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right\}$ ve $C_{Q_x(\beta)} = 1/\{Q_x(\beta) f_x(Q_x(\beta))\}$ biçiminde tanımlansın. P_{11} ise $x \le Q_x(\beta)$ ve $y \le Q_y(\beta)$ olan birimlerin oranını ifade etmektedir.

$$HKO\left(\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i}\right) \cong Q_y^2(\beta)(\omega_1-1)^2 + \omega_1^2 Q_y^2(\beta)\lambda\left\{\beta(1-\beta)C^2_{Q_y(\beta)} + 3\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - 4\gamma C_{Q_y(\beta)}C_{Q_x(\beta)}\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right)\right\} + \omega_2^2 Q_x^2(\beta)\lambda\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - 2\omega_1 Q_y^2(\beta)\lambda\left\{\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - \gamma C_{Q_y(\beta)}C_{Q_x(\beta)}\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right)\right\} - 2\omega_2\gamma\lambda Q_y(\beta)Q_x(\beta)\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - 2\omega_1\omega_2\lambda Q_y(\beta)Q_x(\beta)\left\{C_{Q_y(\beta)}C_{Q_x(\beta)}\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right) - 2\gamma\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)}\right\} \quad (238)$$

HKO'nda ω_1 ve ω_2'ye göre birinci dereceden türev alınarak sıfıra eşitlenirse optimal ω_1 ve ω_2 değerleri eşitliklerdeki gibi elde edilir.

$$\omega_1 = \frac{1-\lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)}}{1+\lambda\beta(1-\beta)C^2_{Q_y(\beta)} - \lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - \dfrac{\lambda C^2_{Q_y(\beta)}\left(P_{11}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}}$$

Optimal ω_1 değeri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$\omega_1 = \frac{1-\lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)}}{1+\lambda\beta(1-\beta)C^2_{Q_y(\beta)} - \lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)} - \lambda C^2_{Q_y(\beta)}\beta(1-\beta)(\phi(\beta)\,)^2}$$

biçiminde yazılabilir.

$$\omega_2 = \frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)}\left[\gamma + \omega_1 \frac{C_{Q_y(\beta)} C_{Q_x(\beta)} \left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right) - 2\gamma\beta(1-\beta) C^2_{Q_x(\beta)}}{\beta(1-\beta) C^2_{Q_x(\beta)}}\right]$$

Optimal ω_2 değeri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$\omega_2 = \frac{Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)}\left[\gamma + \omega_1 \frac{C_{Q_y(\beta)} C_{Q_x(\beta)} \phi(\beta) \; - 2\gamma C^2_{Q_x(\beta)}}{C^2_{Q_x(\beta)}}\right]$$

biçiminde yazılabilir.

Optimal ω_1 ve ω_2 değerleri Eşitlik (238)'de verilen HKO'nda yerine konulursa, $\hat{Q}_{RD4} = \hat{Q}_y(\beta) + \hat{b}_\alpha \left(Q_x(\beta) - \hat{Q}_x(\beta)\right)$ ve $V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right) = \frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2 \beta(1-\beta)\left[1 - \left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)} - 1\right)^2\right]$ olmak üzere önerilen tahmin ediciye ilişkin HKO,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}^1_{\ddot{O}_i}\right) \cong \frac{\left(1-\lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)}\right)V\left(Q_{RD4}\right)}{\left(1-\lambda\gamma^2\beta(1-\beta)C^2_{Q_x(\beta)}\right)+V\left(Q_{RD4}\right)/Q^2_y(\beta)} \tag{239}$$

biçiminde bulunmuştur.

6.1.2. İlk Önerilen Tahmin Edici Ailesi $\left(\hat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{1}}_{\ddot{O}_i}\right)$ ile Diğer Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

$\hat{Q}_Y(\beta)$'nin asimptotik varyansı

$$V\left(\hat{Q}_Y(\beta)\right) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\right)^2 \tag{240}$$

biçimindedir.

Rueda ve diğerleri [20] tarafından tanımlanan $\hat{Q}_{RD1} = \hat{Q}_Y(\beta)\frac{Q_Y(\beta)}{\hat{Q}_Y(\beta)}$ oransal tahmin edicinin asimptotik varyansı

$$V\left(\hat{Q}_{RD1}\right) \cong \frac{1-f}{n}\left[\beta(1-\beta)\left(\frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\right)^2 + \beta(1-\beta)\frac{\left(Q_Y(\beta)\right)^2}{\left(Q_X(\beta)\right)^2}\left(\frac{1}{f_X\left(Q_X(\beta)\right)}\right)^2 \right.$$
$$\left. -2\frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\frac{1}{f_X\left(Q_X(\beta)\right)}\frac{Q_Y(\beta)}{Q_Y(\beta)}\left(P_{11} - \beta(1-\beta)\right)\right] \tag{241}$$

biçimindedir.

Rueda ve diğerleri [20] tarafından tanımlanan $\hat{Q}_{RD4} = \hat{Q}_Y(\beta) + \hat{b}_\alpha\left(Q_X(\beta) - \hat{Q}_X(\beta)\right)$ fark tahmin edicisinin asimptotik varyansı

$$V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)=\frac{1-f}{n}\left(\frac{1}{f_Y\left(Q_Y(\beta)\right)}\right)^2\beta(1-\beta)\left[1-\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)^2\right] \quad (242)$$

olarak elde edilmektedir.

(240) ve (242) numaralı eşitliklerden yararlanarak fark yüzdelik tahmin edicisinin klasik yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu

$$V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)<V\left(\hat{Q}_y(\beta)\right)$$

$$\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)^2>0\,,\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}\neq 1\right)\ olmak\ \text{üzere}\ (o.\text{ü}.) \quad (243)$$

biçiminde gösterilmiştir.

Oransal yüzdelik tahmin edicisi ile fark tahmin edicisi HKO'ları bakımından karşılaştırıldığında Eşitlik (244)'te verilen koşul her zaman sağlandığı için fark yüzdelik tahmin edicisi, oransal yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin bir tahmin edicidir.

$$V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)<V\left(\hat{Q}_{RD1}\right)$$

$$\left[\frac{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)}-\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\right]^2>0,\left[\frac{Q_y(\beta)f_y\left(Q_y(\beta)\right)}{Q_x(\beta)f_x\left(Q_x(\beta)\right)}-\left(\frac{P_{11}}{\beta(1-\beta)}-1\right)\neq 0\right],o.\text{ü}. \quad (244)$$

Önerilen tahmin edici ile fark yüzdelik tahmin edicisi HKO'ları bakımından karşılaştırıldığında önerilen tahmin edicinin her zaman fark yüzdelik tahmin edicisinden daha etkin olduğu (245) numaralı koşuldan görülmektedir.

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i}\right)<V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)$$

$$\frac{V_{min}\left(\hat{Q}_{RD4}\right)}{Q_Y^2(\beta)}>0 \quad (245)$$

6.1.3. İkinci Önerilen Tahmin Edici Ailesi $\left(\hat{\boldsymbol{Q}}^{\mathbf{2}}_{\text{Ö}_i}\right)$

İki yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak yüzdelik tahmini için yeni bir tahmin edici ailesi önerilmiştir. Önerilen tahmin edici ailesi

$$\hat{Q}^2_{\text{Ö}_i}=\left[\hat{Q}_y(\beta)+w_1\left(Q_x(\beta)-\hat{Q}_x(\beta)\right)+w_2\left(Q_z(\beta)-\hat{Q}_z(\beta)\right)\right]\left[\frac{\eta Q_x(\beta)+\delta}{\eta\hat{Q}_x(\beta)+\delta}\right]^a\left[\frac{\eta Q_z(\beta)+\delta}{\eta\hat{Q}_z(\beta)+\delta}\right]^b \quad (246)$$

biçimindedir. Tahmin edicinin HKO eşitliğinin elde edilmesi için fark yönteminde kullanılan terimler aşağıda verilmiştir.

$$e_0 = \frac{\hat{Q}_y(\beta)-Q_y(\beta)}{Q_y(\beta)} \qquad e_1 = \frac{\hat{Q}_x(\beta)-Q_x(\beta)}{Q_x(\beta)} \qquad e_2 = \frac{\hat{Q}_z(\beta)-Q_z(\beta)}{Q_z(\beta)}$$

$$E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0$$

$$E(e_0^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_y(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\right)^2$$

$$E(e_1^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_x(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\right)^2$$

$$E(e_2^2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{(Q_z(\beta))^2}\left(\frac{1}{f_z\left(Q_z(\beta)\right)}\right)^2$$

$$E(e_0e_1) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\frac{1}{Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\left(P_{11}^{xy} - \beta(1-\beta)\right)$$

$E(e_0e_1)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$E(e_0e_1) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\frac{1}{Q_y(\beta)Q_x(\beta)}\phi^{xy}(\beta)$$

biçimindedir.

$$E(e_0e_2) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_z\left(Q_z(\beta)\right)}\frac{1}{Q_y(\beta)Q_z(\beta)}\left(P_{11}^{yz} - \beta(1-\beta)\right)$$

$E(e_0e_2)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$E(e_0e_2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{f_y\left(Q_y(\beta)\right)}\frac{1}{f_z\left(Q_z(\beta)\right)}\frac{1}{Q_y(\beta)Q_z(\beta)}\phi^{yz}(\beta)$$

biçimindedir.

$$E(e_1e_2) = \frac{1-f}{n}\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\frac{1}{f_z\left(Q_z(\beta)\right)}\frac{1}{Q_z(\beta)Q_z(\beta)}\left(P_{11}^{xz} - \beta(1-\beta)\right)$$

$E(e_1e_2)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$E(e_1e_2) = \frac{1-f}{n}\beta(1-\beta)\frac{1}{f_x\left(Q_x(\beta)\right)}\frac{1}{f_z\left(Q_z(\beta)\right)}\frac{1}{Q_z(\beta)Q_z(\beta)}\phi^{xz}(\beta)$$

biçimindedir.

P_{11}^{xy} $: x \leq Q_x(\beta)$ ve $y \leq Q_y(\beta)$ olan birimlerin oranını, P_{11}^{yz} $: y \leq Q_y(\beta)$ ve $z \leq Q_z(\beta)$ olan birimlerin oranını ve P_{11}^{xz} $: x \leq Q_x(\beta)$ ve $z \leq Q_z(\beta)$ olan birimlerin oranını ifade etmektedir. Eşitlik (246)'da önerilen tahmin edici $\theta = \frac{Q_x(\beta)}{\eta Q_x(\beta)+\delta}$ ve $\zeta = \frac{Q_z(\beta)}{\eta Q_z(\beta)+\delta}$ olmak üzere e'li terimler ile ifade edilir ve ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2 = \left[Q_y(\beta)(1+e_0) - w_1 Q_x(\beta) - w_2 Q_z(\beta)\right][1+\theta e_1]^{-a}[1+\zeta e_2]^{-b}$$

$$\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2 \cong \left[Q_y(\beta)(1+e_0) - w_1 Q_x(\beta)e_1 - w_2 Q_z(\beta)e_2\right]\left[1 - a\theta e_1 + \theta^2 \frac{a(a+1)}{2} e_1^2\right]\left[1 - b\zeta e_2 + \zeta^2 \frac{b(b-1)}{2} e_2^2\right]$$

$$\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2 \cong \Big[Q_y(\beta) + Q_y(\beta)e_0 - w_1 Q_x(\beta)e_1 - w_2 Q_z(\beta)e_2 - a\theta Q_y(\beta)e_1 - b\zeta Q_y(\beta)e_2 + \theta^2 \frac{a(a+1)}{2} Q_y(\beta)e_1^2 + \zeta^2 \frac{b(b-1)}{2} Q_y(\beta)e_2^2 - a\theta Q_y(\beta)e_0 e_1 - b\zeta Q_y(\beta)e_0 e_2 + w_1 a\theta Q_x(\beta)e_1^2 + w_1 b\zeta Q_x(\beta)e_1 e_2 + w_2 a\theta Q_z(\beta)e_1 e_2 + w_2 b\zeta Q_z(\beta)e_2^2\Big] \tag{247}$$

biçiminde elde edilir. Tahmin edicinin HKO eşitliği,

$$HKO\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2\right) \cong Q_y^2(\beta)e_0^2 + w_1^2 Q_x^2(\beta)e_1^2 + w_2^2 Q_z^2(\beta)e_2^2 + a^2\theta^2 Q_y^2(\beta)e_1^2 + b^2\zeta^2 Q_y^2(\beta)e_2^2 - 2w_1 Q_y(\beta)Q_x(\beta)e_0 e_1 - 2w_2 Q_z(\beta)Q_y(\beta)e_0 e_2 - 2a\theta Q_y^2(\beta)e_0 e_1 - 2b\zeta Q_y^2(\beta)e_0 e_2 + 2w_1 w_2 Q_x(\beta)Q_z(\beta)e_1 e_2 + 2w_1 a\theta Q_x(\beta)Q_y(\beta)e_1^2 + 2w_1 b\zeta Q_x(\beta)Q_y(\beta)e_1 e_2 + 2w_2 a\theta Q_z(\beta)Q_y(\beta)e_1 e_2 + 2w_2 b\zeta Q_z(\beta)Q_y(\beta)e_2^2 + 2a\theta b\zeta Q_y^2(\beta)e_1 e_2 \tag{248}$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2\right) \cong Q_y^2(\beta)\beta(1-\beta)\lambda C_{Q_y(\beta)}^2 + \beta(1-\beta)\lambda C_{Q_x(\beta)}^2\left[w_1^2 Q_x^2(\beta) + a^2\theta^2 Q_y^2(\beta) + 2w_1 a\theta Q_x(\beta)Q_y(\beta)\right] + \beta(1-\beta)\lambda C_{Q_z(\beta)}^2\left[w_2^2 Q_z^2(\beta) + b^2\zeta^2 Q_y^2(\beta) + 2w_2 b\zeta Q_z(\beta)Q_y(\beta)\right] - \left(P_{11}^{xy} - \beta(1-\beta)\right)\lambda C_{Q_x(\beta)} C_{Q_y(\beta)}\left[2w_1 Q_x(\beta)Q_y(\beta) + 2a\theta Q_y^2(\beta)\right] - \left(P_{11}^{yz} - \beta(1-\beta)\right)\lambda C_{Q_y(\beta)} C_{Q_z(\beta)}\left[2w_2 Q_y(\beta)Q_z(\beta) + 2b\zeta Q_y^2(\beta)\right] + \left(P_{11}^{xz} - \beta(1-\beta)\right)\lambda C_{Q_x(\beta)} C_{Q_z(\beta)}\left[2w_1 w_2 Q_x(\beta)Q_z(\beta) + 2w_1 b\zeta Q_x(\beta)Q_y(\beta) + 2w_2 a\theta Q_z(\beta)Q_y(\beta) + 2a\theta b\zeta Q_y^2(\beta)\right] \tag{249}$$

biçiminde elde edilir. Optimal w_1 ve w_2 değerlerini bulmak için Eşitlik (249)'da w_1 ve w_2'ye göre birinci dereceden türev alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial HKO\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_i}^2\right)}{w_1} = 0$$

$$w_1 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}\left(P_{11}^{xy} - \beta(1-\beta)\right) - w_2 Q_z(\beta)C_{Q_z(\beta)}\left(P_{11}^{xz} - \beta(1-\beta)\right) - b\zeta Q_y(\beta)C_{Q_z(\beta)}\left(P_{11}^{xz} - \beta(1-\beta)\right) - a\theta Q_y(\beta)C_{Q_x(\beta)}\beta(1-\beta)}{Q_x(\beta)C_{Q_x(\beta)}\beta(1-\beta)} \tag{250}$$

w_1 değeri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$w_1 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}\phi^{xy}(\beta) - w_2 Q_z(\beta)C_{Q_z(\beta)}\phi^{xz}(\beta) - b\zeta Q_y(\beta)C_{Q_z(\beta)}\phi^{xz}(\beta) - a\theta Q_y(\beta)C_{Q_x(\beta)}}{Q_x(\beta)C_{Q_x(\beta)}} \tag{251}$$

biçiminde yazılabilir.

$$\frac{\partial HKO\left(\hat{Q}^2_{\ddot{0}_i}\right)}{w_2} = 0$$

$$w_2 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)-w_1Q_x(\beta)C_{Q_x(\beta)}\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)-a\theta Q_y(\beta)C_{Q_x(\beta)}\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)-b\zeta Q_y(\beta)C_{Q_z(\beta)}\beta(1-\beta)}{Q_z(\beta)C_{Q_z(\beta)}\beta(1-\beta)} \quad (252)$$

Eşitlik (250)'de Eşitlik (252) yerine konulursa optimal w_1 değeri

$$w_1 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}\left[\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}-\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta^2(1-\beta)^2}\right]}{Q_x(\beta)C_{Q_x(\beta)}\left[1-\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta^2(1-\beta)^2}\right]} - \frac{a\theta Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)} \quad (253)$$

biçiminde elde edilir. Optimal w_1 değeri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$w_1 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}[\phi^{xy}(\beta)-\phi^{yz}(\beta)\phi^{xz}(\beta)]}{Q_x(\beta)C_{Q_x(\beta)}\left[1-\left(\phi^{xz}(\beta)\right)^2\right]} - \frac{a\theta Q_y(\beta)}{Q_x(\beta)} \quad (254)$$

biçiminde yazılabilir. Optimal w_2 değeri ise Eşitlik (255)'de görülmektedir.

$$w_2 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}\left[\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}-\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta^2\right)\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta^2(1-\beta)^2}\right]}{Q_z(\beta)C_{Q_z(\beta)}\left[1-\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta^2(1-\beta)^2}\right]} - \frac{b\zeta Q_y(\beta)}{Q_z(\beta)} \quad (255)$$

Optimal w_2 değeri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$w_2 = \frac{Q_y(\beta)C_{Q_y(\beta)}[\phi^{yz}(\beta)-\phi^{xy}(\beta)\phi^{xz}(\beta)]}{Q_z(\beta)C_{Q_z(\beta)}\left[1-\left(\phi^{xz}(\beta)\right)^2\right]} - \frac{b\zeta Q_y(\beta)}{Q_z(\beta)} \quad (256)$$

biçiminde yazılabilir.

(253) ve (255) numaralı eşitliklerde verilen optimal w_1 ve w_2, Eşitlik (249)'da verilen HKO'sında yerine konulursa minimum HKO eşitliği

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}^2_{\ddot{0}_i}\right) = \frac{\lambda\beta(1-\beta)}{\left(f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)^2}\left[1-\frac{\left(\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2+\left(\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2-2\left(\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)}{1-\left(\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2}\right] \quad (257)$$

biçiminde elde edilir.

Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen (254) ve (256) numaralı eşitliklerde verilen optimal w_1 ve w_2, Eşitlik (249)'da verilen HKO'sında yerine konulursa minimum HKO eşitliği,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}^2_{\ddot{0}_i}\right) = \frac{\lambda\beta(1-\beta)}{\left(f_y\left(Q_y(\beta)\right)\right)^2}\left[1-\frac{\left(\phi^{xy}(\beta)\right)^2+\left(\phi^{yz}(\beta)\right)^2-2\left(\phi^{xy}(\beta)\right)\left(\phi^{yz}(\beta)\right)\left(\phi^{xz}(\beta)\right)}{1-\left(\phi^{xz}(\beta)\right)^2}\right] \quad (258)$$

biçiminde olur.

Önerilen $\hat{Q}^2_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesinin $\frac{\left(\frac{\left(P_{11}^{xy}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2+\left(\frac{\left(P_{11}^{yz}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2-2\left(\frac{\left(P_{11}^{xy}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P_{11}^{yz}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P_{11}^{xz}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)}{1-\left(\frac{\left(P_{11}^{xz}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2} > 0$ olması durumunda klasik yüzdelik edicisinden daha etkin olduğu Eşitlik (257)'den görülmektedir.

6.2. TRÖ Yönteminde Önerilen Tahmin Ediciler

N_h, h'ıncı tabakanın kitle büyüklüğü olmak üzere $\sum_{h=1}^{l} N_h = N$ olarak tanımlansın. n_h, h'ıncı tabakanın örneklem büyüklüğü olmak üzere $\sum_{h=1}^{l} n_h = n$ olarak tanımlansın. h'ıncı tabakanın ağırlığı $w_h = \frac{N_h}{N}$ biçiminde tanımlansın. TRÖ yönteminde, $\hat{Q}_{Yh}(\beta)$ h'ıncı tabakanın β'ıncı örneklem yüzdeliği olmak üzere, ilgilenilen değişkene ilişkin yüzdelik tahmin edicisi $\hat{Q}_{Yst}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h \hat{Q}_{Yh}(\beta)$ olarak tanımlansın. TRÖ yönteminde, $\hat{Q}_{Xh}(\beta)$ yardımcı değişkene ilişkin h'ıncı tabakanın β'ıncı örneklem yüzdeliği olmak üzere, yardımcı değişkene ilişkin yüzdelik tahmin edicisi $\hat{Q}_{Xst}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h \hat{Q}_{Xh}(\beta)$ olarak tanımlansın. İlgilenilen değişkene ilişkin TRÖ yönteminde yüzdelik tahmin edicisinin varyansı $V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$ biçiminde gösterilsin.

6.2.1. TRÖ Yönteminde Önerilen Birleşik Oransal Tahmin Edici $\left(\hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{YOB}}(\boldsymbol{\beta})\right)$

TRÖ yönteminde birleşik oransal yüzdelik tahmin edicisi

$$\hat{Q}_{YOB}(\beta) = \hat{Q}_{Yst}(\beta) \frac{Q_{Xst}(\beta)}{\hat{Q}_{Xst}(\beta)} \tag{258}$$

biçiminde önerilmektedir. Buarada fark yönteminden yararlanarak $e_0 = \frac{\hat{Q}_{Yst}(\beta)-Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Yst}(\beta)}$ ve $e_1 = \frac{\hat{Q}_{Xst}(\beta)-Q_{Xst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)}$ biçiminde tanımlansın. e_0 ve e_1 için beklenen değer, varyans ve kovaryans terimleri

$$E(e_0) = E(e_1) = 0$$

$$E(e_0^2) = \frac{1}{Q_{Yst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{Q_{Xst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_0e_1)=\frac{1}{Q_{Yst}(\beta)Q_{Xst}(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}$$

biçimindedir. $E(e_0e_1)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$E(e_0e_1)=\frac{1}{Q_{Yst}(\beta)Q_{Xst}(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}$$

biçiminde yazılabilir.

P_{11h} h'ıncı tabakada $x\le Q_{xh}(\beta)$ ve $y\le Q_{yh}(\beta)$ olan birimlerin oranını ifade etmektedir. Fark yönteminden yararlanarak birleşik oransal yüzdelik tahmin edici Eşitlik (258)'den,

$$\hat{Q}_{YOB}(\beta)=Q_{Yst}(\beta)(1+e_0)(1+e_1)^{-1} \tag{259}$$

biçiminde yazılabilir. $(1+e_1)^{-1}$ terimi Taylor serisine göre açılıp ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse

$$\hat{Q}_{YOB}(\beta)=Q_{Yst}(\beta)(1+e_0)(1-e_1+e_1^2-\cdots)$$

$$\hat{Q}_{YOB}(\beta)\cong Q_{Yst}(\beta)(1+e_0-e_1-e_0e_1+e_1^2+\cdots) \tag{260}$$

biçiminde yazılabilir. Birleşik oransal yüzdelik tahmin edicisine ilişkin HKO Eşitlik (261)'da görüldüğü biçimde elde edilir.

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)\cong Q_{Yst}^2(\beta)E(e_0^2+e_1^2-2e_0e_1)$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)\cong Q_{Yst}^2(\beta)\Bigg[\frac{1}{Q_{Yst}^2(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}+$$

$$\frac{1}{Q_{Xst}^2(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}-2\frac{1}{Q_{Yst}(\beta)Q_{Xst}(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\Bigg] \tag{261}$$

$HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)\cong Q_{Yst}^2(\beta)\Bigg[\frac{1}{Q_{Yst}^2(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}+$$

$$\frac{1}{Q_{Xst}^2(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}-2\frac{1}{Q_{Yst}(\beta)Q_{Xst}(\beta)}\sum_{h=1}^{l}w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\Bigg] \tag{262}$$

biçiminde olur.

6.2.2. TRÖ Yönteminde Önerilen Ayrı Oransal Tahmin Edici $\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right)$

TRÖ yönteminde önerilen ayrı oransal yüzdelik tahmin edicisi

$$\hat{Q}_{YOA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h \hat{Q}_{Yh}(\beta) \frac{Q_{Xh}(\beta)}{\hat{Q}_{Xh}(\beta)} \tag{263}$$

biçiminde tanımlansın. Fark yönteminden yararlanarak e_{0h} ve e_{1h} terimleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$e_{0h} = \frac{\hat{Q}_{Yh}(\beta) - Q_{Yh}(\beta)}{Q_{Yh}(\beta)}$$

$$e_{1h} = \frac{\hat{Q}_{Xh}(\beta) - Q_{Xh}(\beta)}{Q_{Xh}(\beta)}$$

e_{0h} ve e_{1h} terimlerine ilişkin beklenen değer, varyans ve kovaryans terimleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$E(e_{0h}) = E(e_{1h}) = 0$$

$$E(e_{0h}^2) = \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_{1h}^2) = \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{xh}(\beta) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$E(e_{0h}e_{1h}) = \frac{1-f_h}{n_h} \frac{P_{11h} - \beta(1-\beta)}{Q_{xh}(\beta) Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}$$

$E(e_{0h}e_{1h})$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$E(e_{0h}e_{1h}) = \frac{1-f_h}{n_h} \frac{(1-\beta)\beta\phi_h(\beta)}{Q_{xh}(\beta) Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}$$

biçiminde olur.

TRÖ yönteminde yüzdelik tahmini için ayrı oransal tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse

$$\hat{Q}_{YOA}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Yh}(\beta)(1+e_{0h}) \frac{Q_{Xh}(\beta)}{Q_{Xh}(\beta)(1+e_{1h})}$$

$$\hat{Q}_{YOA}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Yh}(\beta)(1+e_{0h})(1+e_{1h})^{-1}$$

$$\hat{Q}_{YOA}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Yh}(\beta)(1+e_{0h} - e_{1h} - e_{0h}e_{1h} + e_{1h}^2) \tag{264}$$

yazılabilir. Yüzdelik tahmini için ayrı oransal tahmin edici için HKO Eşitlik (265)'deki gibi elde edilir.

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 Q_{Yh}^2(\beta)\, E(e_{0h}^2 + e_{1h}^2 - 2e_{0h}e_{1h})$$

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} Q_{Yh}^2(\beta)\left(\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{yh}(\beta)f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{xh}(\beta)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{Q_{xh}(\beta)Q_{yh}(\beta)f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right) \quad (265)$$

$HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} Q_{Yh}^2(\beta)\left(\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{yh}(\beta)f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{xh}(\beta)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2\frac{\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)}{Q_{xh}(\beta)Q_{yh}(\beta)f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right) \quad (266)$$

biçiminde olur.

6.2.3. TRÖ Yönteminde Önerilen Birleşik Fark Tahmin Edicisi $\left(\hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{YFB}}(\boldsymbol{\beta})\right)$

TRÖ yönteminde önerilen birleşik fark yüzdelik tahmin edicisi

$$\hat{Q}_{YFB}(\beta) = \hat{Q}_{Yst}(\beta) + d_c\left(Q_{Xst}(\beta) - \hat{Q}_{Xst}(\beta)\right) \quad (267)$$

biçimindedir. Eşitlik (267)'de verilen tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse,

$$\hat{Q}_{YFB}(\beta) = Q_{Yst}(\beta)(1+e_0) + d_c\big(Q_{Xst}(\beta) - Q_{Xst}(\beta)(1+e_1)\big)$$

$$\hat{Q}_{YFB}(\beta) = Q_{Yst}(\beta)(1+e_0) + d_c Q_{Xst}(\beta)e_1 \quad (268)$$

yazılabilir. Önerilen tahmin ediciye ilişkin varyans,

$$V\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) = Q_{Yst}^2(\beta)e_0^2 - 2d_c Q_{Yst}(\beta)Q_{Xst}(\beta)e_0e_1 + d_c^2 Q_{Xst}^2(\beta)e_1^2 \quad (269)$$

$$V\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2d_c\sum_{h=1}^{l} w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)} + d_c^2\sum_{h=1}^{l} w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} \quad (270)$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (270)'de d_c'ye göre türev alınıp 0'a eşitlenirse optimal d_c değeri ve minimum varyans eşitliği sırasıyla (271) ve (273) numaralı eşitliklerde verilmektedir. Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen optimal d_c değeri ve minimum varyans eşitliği ise sırasıyla (272) ve (274) numaralı eşitliklerde verilmektedir.

$$d_c = \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h} - \beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} \tag{271}$$

$$d_c = \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} \tag{272}$$

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h} - \beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} \tag{273}$$

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} \tag{274}$$

6.2.4. TRÖ Yönteminde Önerilen Ayrı Fark Tahmin Edicisi $\left(\hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{YFA}}(\boldsymbol{\beta})\right)$

TRÖ yönteminde önerilen ayrı fark yüzdelik tahmin edicisi Eşitlik (275)'te görülmektedir.

$$\hat{Q}_{YFA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h \left[\hat{Q}_{Yh}(\beta) + d_{cs}\left(Q_{Xh}(\beta) - \hat{Q}_{Xh}(\beta)\right)\right] \tag{275}$$

Eşitlik (275)'te verilen tahmin edici e'li terimler ile ifade edilirse,

$$\hat{Q}_{YFA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h \left[Q_{Yh}(\beta)(1 + e_{0h}) + d_{cs}\left(Q_{Xh}(\beta) - Q_{Xh}(\beta)(1 + e_{1h})\right)\right]$$

$$\hat{Q}_{YFA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h [Q_{Yh}(\beta) + Q_{Yh}(\beta)e_{0h} + d_{cs}Q_{Xh}(\beta)e_{1h}] \tag{276}$$

olarak elde edilir. Tahmin ediciye ilişkin varyans eşitliği Eşitlik (277)'de verilmektedir.

$$V\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \left[\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + d_{cs}^2 \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2d_{cs} \frac{P_{11h} - \beta(1-\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right] \tag{277}$$

(277) numaralı eşitlikte verilen varyans eşitliğinde d_{cs}'ye göre birinci dereceden türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal d_{cs} değeri ve minimum varyans eşitliği sırasıyla (278) ve (280) numaralı eşitliklerde verilmektedir. Cramer'in V katsayısı ile ifade edilen optimal

d_{cs} değeri ve minimum varyans eşitliği ise sırasıyla (279) ve (281) numaralı eşitliklerde verilmektedir.

$$d_{cs} = \frac{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta))} \frac{\left(P_{11h} - \beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)} \tag{278}$$

$$d_{cs} = \frac{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta))} \phi_h(\beta) \tag{279}$$

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{1}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} \left[\beta(1-\beta) - \frac{\left(P_{11h} - \beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}\right] \tag{280}$$

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} [1 - \phi_h(\beta)^2] \tag{281}$$

6.2.5. TRÖ Örnekleme Yönteminde Önerilen Birleşik Tahmin Edici Ailesi $\left(\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st}\right)$

Gupta ve Shabbir [57], Koyuncu ve Kadılar [58] tahmin edicisinden yola çıkarak yüzdelik tahmini için önerilen birleşik tahmin edici ailesi Eşitlik (282)'de görülmektedir.

$$\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st} = \left[w_1 \hat{Q}_{Yst}(\beta) + w_2 \left(Q_{Xst}(\beta) - \hat{Q}_{Xst}(\beta)\right)\right] \left[\frac{\eta_{st} Q_{Xst}(\beta) + \delta_{st}}{\eta_{st} \hat{Q}_{Xst}(\beta) + \delta_{st}}\right] \tag{282}$$

Eşitlik (282)'de verilen tahmin edici $\gamma_{st} = \frac{\eta_{st} Q_{Xst}(\beta)}{\eta_{st} Q_{Xst}(\beta) + \delta_{st}}$ olmak üzere e'li terimler ile ifade edilirse ve ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st} = \left[w_1 Q_{Yst}(\beta)(1+e_0) + w_2\left(Q_{Xst}(\beta) - Q_{Xst}(\beta)(1+e_1)\right)\right][1 + \gamma_{st} e_1]^{-1}$$

$$\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st} \cong [w_1 Q_{Yst}(\beta) + w_1 Q_{Yst}(\beta) e_0 - w_2 Q_{Xst}(\beta) e_1][1 - \gamma_{st} e_1 + \gamma_{st}^2 e_1^2]$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st} \cong{}& w_1 Q_{Yst}(\beta) + w_1 Q_{Yst}(\beta) e_0 - w_2 Q_{Xst}(\beta) e_1 - w_1 Q_{Yst}(\beta) \gamma_{st} e_1 \\ & - w_1 Q_{Yst}(\beta) \gamma_{st} e_0 e_1 + w_2 Q_{Xst}(\beta) \gamma_{st} e_1^2 + w_1 Q_{Yst}(\beta) \gamma_{st}^2 e_1^2\end{aligned} \tag{283}$$

elde edilir. Eşitlik (283)'te verilen tahmin edicide eşitliğin her iki tarafından $Q_{Yst}(\beta)$ çıkartılıp karesinin beklenen değeri alınırsa, tahmin ediciye ilişkin HKO

$$\begin{aligned}HKO\left(\hat{Q}_{Ö_{ib}}^{1st}\right) \cong{}& E[(w_1 - 1)^2 Q_{Yst}^2(\beta) + w_1^2 Q_{Yst}^2(\beta)(e_0^2 + 3\gamma_{st}^2 e_1^2 - 4\gamma_{st} e_0 e_1) \\ & w_2^2 Q_{Xst}^2(\beta) e_1^2 - 2w_1 Q_{Yst}^2(\beta)(\gamma_{st}^2 e_1^2 - \gamma_{st} e_0 e_1) \\ & -2w_2 Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta) \gamma_{st} e_1^2 - 2w_1 w_2 Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)(e_0 e_1 - 2\gamma_{st} e_1^2)\end{aligned} \tag{284}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (284)'te verilen HKO'nda w_1 ve w_2'ye göre birinci dereceden türev alınıp sıfıra eşitlenirse optimal w_1 ve w_2 değerleri (285) ve (287) numaralı eşitliklerde görüldüğü biçimde elde edilir. Optimal w_1 ve w_2 değerleri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse Eşitlik (286) ve Eşitlik (288) yazılabilir.

$$w_1 = \frac{1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}{1+\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{yh}(Q_{yh}(\beta))\}^2}}{Q_{Yst}^2(\beta)}-\gamma_{st}^2 \frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}-\frac{\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta)) f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}}{Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)}}{\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}} \quad (285)$$

$$w_1 = \frac{1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}{1+\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{yh}(Q_{yh}(\beta))\}^2}}{Q_{Yst}^2(\beta)}-\gamma_{st}^2 \frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}-\frac{\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)\right)}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta)) f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}}{Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)}}{\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}} \quad (286)$$

$$w_2 = \frac{Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)}\left[\gamma_{st} + w_1 \frac{\left(\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta)) f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}}{Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)} - 2\gamma_{st} \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right)}{\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}\right] \quad (287)$$

$$w_2 = \frac{Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)}\left[\gamma_{st} + w_1 \frac{\left(\frac{1\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)\right)}{f_{yh}(Q_{yh}(\beta)) f_{xh}(Q_{xh}(\beta))}}{Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)} - 2\gamma_{st} \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right)}{\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\{f_{xh}(Q_{xh}(\beta))\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}}\right] \quad (288)$$

(285) ve (287) numaralı eşitliklerdeki optimal w_1 ve w_2 değerleri (284) numaralı eşitlikte verilen HKO'nda yerine konulursa minimum HKO,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ib}}\right) \cong \frac{\left(1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right) V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)}{\left(1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right) + \left(\frac{V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)}{Q_{Yst}^2(\beta)}\right)} \tag{289}$$

biçiminde elde edilir.

6.2.6. TRÖ Yönteminde Önerilen Ayrı Tahmin Edici Ailesi $\left(\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}}\right)$

Gupta ve Shabbir [57], Koyuncu ve Kadılar [58] tahmin edicisinden yola çıkarak yüzdelik tahmini için önerilen ayrı tahmin edici ailesi Eşitlik (290)'da görülmektedir.

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} = \sum_{h=1}^{l} w_h \left[\omega_{1h}\hat{Q}_{Yh}(\beta) + \omega_{2h}\left(Q_{Xh}(\beta) - \hat{Q}_{Xh}(\beta)\right)\right]\left[\frac{\eta_h Q_{Xh}(\beta)+\delta_h}{\eta_h \hat{Q}_x(\beta)+\delta_h}\right] \tag{290}$$

(290) numaralı eşitlik e'li terimler ile ifade edilirse,

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} = \sum_{h=1}^{l} w_h \left[\omega_{1h} Q_{Y_h}(\beta)(1+e_{0h}) + \omega_{2h}\left(Q_{X_h}(\beta) - Q_{X_h}(\beta)(1+e_{1h})\right)\right]\left[\frac{\eta_h Q_{Xh}(\beta)+\delta_h+\eta_h Q_{Xh}(\beta)e_1}{\eta_h Q_x(\beta)+\delta_h}\right]^{-1}$$

$\gamma_h = \frac{\eta_h Q_{Xh}(\beta)}{\eta_h Q_{Xh}(\beta)+\delta_h}$ olmak üzere Eşitlik (290)'da verilen tahmin edici

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} = \sum_{h=1}^{l} w_h \left[\omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)(1+e_{0h}) - \omega_{2h} Q_{Xh}(\beta)e_1\right]\left[1+\gamma_h e_{1h}\right]^{-1} \tag{291}$$

biçiminde yazılır. $[1+\gamma_h e_{1h}]^{-1}$ ifadesi binom açılımına göre açılıp, ikinci dereceden yüksek derecedeki terimler ihmal edilirse tahmin edici eşitlikte görüldüğü biçimde elde edilir.

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} \cong \sum_{h=1}^{l} w_h \left[\omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)(1+e_{0h}) - \omega_{2h} Q_{Xh}(\beta)e_{1h}\right]\left[1-\gamma_h e_{1h} + \gamma_h^2 e_1^2\right]$$

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} \cong \sum_{i=1}^{h} \omega_h [\omega_{1h} Q_{Yh}(\beta) - \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h e_{1h} + \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h^2 e_{1h}^2 + \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta) e_{0h}$$

$$-\omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h e_{0h} e_{1h} - \omega_{2h} Q_{Xh}(\beta) e_{1h} + \omega_{2h} Q_{Xh}(\beta)\gamma_h e_{1h}^2]$$

Eşitliğin her iki tarafından $\sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Y_h}(\beta)$ çıkartılırsa ve $\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} - \sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Yh}(\beta)$ ifadesinin karesinin beklenen değeri alınırsa tahmin ediciye ilişkin HKO elde edilir.

$$\hat{Q}^{1st}_{\ddot{\mathrm{O}}_{ia}} - \sum_{h=1}^{l} w_h Q_{Yh}(\beta) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h([\omega_{1h}-1)Q_{Yh}(\beta) + \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)e_{0h} -$$
$$\omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h e_{1h} - \omega_{2h} Q_{Xh}(\beta)e_{1h} - \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h e_{0h} e_{1h} + \omega_{1h} Q_{Yh}(\beta)\gamma_h^2 e_{1h}^2 +$$
$$\omega_{2h} Q_{Xh}(\beta)\gamma_h e_{1h}^2] \tag{292}$$

$\lambda_h = (1-f_h)/n_h$, $C_{Q_{Yh}(\beta)} = 1/\{Q_{Yh}(\beta) f_{Yh}(Q_{Yh}(\beta))\}$ ve $C_{Q_{Xh}(\beta)} = 1/\{Q_{Xh}(\beta) f_{Xh}(Q_{Xh}(\beta))\}$ biçiminde tanımlansın. P_{11h} ise $x \leq Q_{Xh}(\beta)$ ve $y \leq Q_{Yh}(\beta)$ olan birimlerin oranını ifade etmektedir.

$$HKO\left(\hat{Q}_{\text{Ö}_{ia}}^{1st}\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \Big(Q_{Yh}^2(\beta)(\omega_{1h}-1)^2 + \omega_{1h}^2 Q_{Yh}^2(\beta)\lambda_h \Big\{\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2 + 3\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - 4\gamma_h C_{Q_{Yh}(\beta)}C_{Q_{Xh}(\beta)}\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)\Big\} + \omega_{2h}^2 Q_{Xh}^2(\beta)\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - 2\omega_{1h}Q_{Yh}^2(\beta)\lambda_h\Big\{\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - \gamma_h C_{Q_{Yh}(\beta)}C_{Q_{Xh}(\beta)}\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)\Big\} - 2\omega_{2h}\gamma_h\lambda_h Q_{Yh}(\beta)Q_{Xh}(\beta)\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - 2\omega_{1h}\omega_{2h}\lambda_h Q_{Yh}(\beta)Q_{Yh}(\beta)\Big\{C_{Q_{Yh}(\beta)}C_{Q_{Xh}(\beta)}\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right) - 2\gamma_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\Big\}\Big) \quad (293)$$

HKO'nda ω_{1h} ve ω_{2h}'a göre birinci dereceden türev alınarak sıfıra eşitlenirse optimal ω_{1h} ve ω_{2h} değerleri eşitliklerdeki gibi elde edilir.

$$\omega_{1h} = \frac{1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}{1+\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2 - \lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - \dfrac{\lambda_h C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}}$$

$$\omega_{2h} = \frac{Q_{Yh}(\beta)}{Q_{Xh}(\alpha)}\left[\gamma_h + \omega_{1h}\frac{C_{Q_{Yh}(\beta)}C_{Q_{Xh}(\beta)}\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right) - 2\gamma_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}{\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}\right]$$

Optimal ω_{1h} ve ω_{2h} değerleri Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$\omega_{1h} = \frac{1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}{1+\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2 - \lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2 - \dfrac{\lambda_h C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\left(\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}}$$

$$\omega_{2h} = \frac{Q_{Yh}(\beta)}{Q_{Xh}(\alpha)}\left[\gamma_h + \omega_{1h}\frac{C_{Q_{Yh}(\beta)}C_{Q_{Xh}(\beta)}\left(\beta(1-\beta)\phi_h(\beta)\right) - 2\gamma_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}{\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2}\right]$$

biçiminde olur.

Optimal ω_{1h} ve ω_{2h} değerleri Eşitlik (293)'te verilen HKO'nda yerine konulursa, önerilen tahmin ediciye ilişkin minimum HKO,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\text{Ö}_{ia}}^{1st}\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2\, Q_{Yh}^2(\beta)\frac{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)\left(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]}{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]} \quad (294)$$

biçiminde elde edilir. $HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\text{Ö}_{ia}}^{1st}\right)$ Cramer'in V katsayısı ile ifade edilirse,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\text{Ö}ia}^{1st}\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2\, Q_{Yh}^2(\beta)\, \frac{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)\left(\lambda_h \beta(1-\beta) C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\phi_h(\beta)\right)^2\right]}{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h \beta(1-\beta) C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\phi_h(\beta)\right)^2\right]} \qquad (295)$$

biçiminde olur.

6.2.7. TRÖ Yönteminde Önerilen Birleşik Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Eşitlik (267)'de verilen birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (265)'te verilen minimum varyans eşitliği, klasik yüzdelik tahmin edicisinin varyansı ile karşılaştırılırsa,

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) < V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta^2\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} < \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$\frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta^2\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} > 0 \qquad (296)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (267)'de verilen birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinin klasik yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir.

Eşitlik (258)'de verilen birleşik oransal yüzdelik edicisinin Eşitlik (261)'de verilen HKO, birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (273)'te verilen minimum varyans eşitliği ile karşılaştırılırsa,

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) < HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} < \left[\frac{1}{Q_{Yst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \right.$$

$$\left. \frac{Q_{Yst}^2(\beta)}{Q_{Xst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2\frac{Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right]$$

$$\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)} - \frac{Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}\right)^2 > 0 \qquad (297)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (258)'de verilen birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinin birleşik oransal yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir.

Eşitlik (282)'de verilen birleşik $\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (289)'da verilen minimum HKO eşitliği, birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (261)'de verilen minimum varyans eşitliği ile karşılaştırılırsa,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}\right) < V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)$$

$$\frac{\left(1-\gamma_{st}^2\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right)V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)}{\left(1-\gamma_{st}^2\frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2\frac{1-f_h}{n_h}\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right)+\left(\frac{V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)}{Q_{Yst}^2(\beta)}\right)} < V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)$$

$$\frac{V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)}{Q_{Yst}^2(\beta)} > 0 \tag{298}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (282)'de verilen birleşik $\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisinin birleşik fark yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir. Dolayısıyla önerilen birleşik $\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisi, birleşik klasik tahmin ediciden ve birleşik oransal tahmin ediciden her zaman daha etkindir.

TRÖ yönteminde önerilen birleşik tahmin edicilerin karşılaştırılmasına ilişkin tahmin ediciler, bunlara ilişkin HKO eşitlikleri, yapılan karşılaştırmalar ve bulunan üstünlük koşulları Çizelge 6.2'de özetlenmiştir.

Çizelge 6.2: TRÖ Yönteminde Önerilen Birleşik Tahmin Ediciler, HKO Eşitlikleri, Karşılaştırmalar ve Koşullar

Tahmin Edici	HKO ya da Varyans	Karşılaştırma	Koşul
$\hat{Q}_{Yst}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h \hat{Q}_{Yh}(\beta)$	$V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$		
$\hat{Q}_{YOB}(\beta) = \hat{Q}_{Yst}(\beta) \frac{Q_{Xst}(\beta)}{\hat{Q}_{Xst}(\beta)}$	$HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right) \cong Q_{Yst}^2(\beta)\left[\frac{1}{Q_{Yst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \frac{1}{Q_{Xst}^2(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2 \frac{1}{Q_{Yst}(\beta) Q_{Xst}(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right]$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) < HKO\left(\hat{Q}_{YOB}(\beta)\right)$	$\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)} - \frac{Q_{Yst}(\beta)}{Q_{Xst}(\beta)} \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}\right)^2 > 0$
$\hat{Q}_{YFB}(\beta) = \hat{Q}_{Yst}(\beta) + d_c\left(Q_{Xst}(\beta) - \hat{Q}_{Xst}(\beta)\right)$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right) < V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right)$	$\frac{\left(\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\left(P_{11h}-\beta^2\right)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)^2}{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}} > 0$
$\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st} = \left[w_1 \hat{Q}_{Yst}(\beta) + w_2\left(Q_{Xst}(\beta) - \hat{Q}_{Xst}(\beta)\right)\right]\left[\frac{\eta_{st} Q_{Xst}(\beta)+\delta_{st}}{\eta_{st} \hat{Q}_{Xst}(\beta)+\delta_{st}}\right]$	$HKO_{Min}\left(Q_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}\right) \cong \frac{\left(1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right) V_{Min}\left(\hat{Q}_{YDS}(\beta)\right)}{\left(1-\gamma_{st}^2 \frac{\sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2}}{Q_{Xst}^2(\beta)}\right) + \left(\frac{V_{Min}\left(\hat{Q}_{YDS}(\beta)\right)}{Q_{Yst}^2(\beta)}\right)}$	$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_{ib}}^{1st}\right) < V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFB}(\beta)\right)$	$\frac{V_{Min}\left(\hat{Q}_{YDC}(\beta)\right)}{Q_{Yst}^2(\beta)} > 0$

6.2.8. TRÖ Yönteminde Önerilen Ayrı Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Eşitlik (275)'de verilen ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (280)'de verilen minimum varyans eşitliği, klasik yüzdelik tahmin edicisinin varyansı ile karşılaştırılırsa,

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) < V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{1}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}\left[\beta(1-\beta) - \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}\right] < \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$$

$$\frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)^2} > 0 \qquad (299)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (275)'te verilen ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinin klasik yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir.

Eşitlik (263)'te verilen ayrı oransal yüzdelik edicisinin Eşitlik (265)'de HKO, ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (280)'de verilen minimum varyans eşitliği ile karşılaştırılırsa,

$$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) < HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{1}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}\left[\beta(1-\beta) - \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}\right] < \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h}\left(\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \left(\frac{Q_{yh}(\beta)}{Q_{xh}(\beta)}\right)^2 \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2\frac{Q_{yh}(\beta)}{Q_{xh}(\beta)} \frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)$$

$$\left[\frac{Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)}{Q_{xh}(\beta) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)} - \frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right]^2 > 0 \qquad (300)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (275)'te verilen ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinin ayrı oransal yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir.

Eşitlik (290)'da verilen ayrı $\hat{Q}_{\ddot{O}_{ia}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (294)'te verilen minimum HKO eşitliği, ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinin Eşitlik (280) e verilen minimum varyans eşitliği ile karşılaştırılırsa,

$$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\ddot{O}_{ia}}^{1st}\right) < V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{l} w_h^2\, Q_{Yh}^2(\beta)\frac{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)\left(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]}{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]} < \sum_{h=1}^{l} w_h^2\, Q_{Yh}^2(\beta)(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]$$

$$1-\frac{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)}{\left(1-\lambda_h\gamma_h^2\beta(1-\beta)C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h\beta(1-\beta)C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]} > 0 \tag{301}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten Eşitlik (290)'da verilen ayrı $\hat{Q}_{\text{Ö}_{ia}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisinin ayrı fark yüzdelik tahmin edicisinden her zaman daha etkin olduğu görülmektedir. Dolayısıyla önerilen ayrı $\hat{Q}_{\text{Ö}_{ia}}^{1st}$ yüzdelik tahmin edicisi, klasik tahmin ediciden ve ayrı oransal tahmin ediciden her zaman daha etkindir.

TRÖ yönteminde önerilen ayrı tahmin edicilerin karşılaştırılmasına ilişkin tahmin ediciler, bunlara ilişkin HKO eşitlikleri, yapılan karşılaştırmalar ve bulunan üstünlük koşulları Çizelge 6.3'te özetlenmiştir.

Çizelge 6.3: TRÖ Yönteminde Önerilen Ayrı Tahmin Ediciler, HKO Eşitlikleri, Karşılaştırmalar ve Koşullar

Tahmin Edici	HKO ya da Varyans	Karşılaştırma	Koşul
$\hat{Q}_{Yst}(\beta) = \sum_{h=1}^{l} w_h \hat{Q}_{Yh}(\beta)$	$V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right) = \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2}$		
$\hat{Q}_{YOA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h \hat{Q}_{Yh}(\beta) \frac{Q_{Xh}(\beta)}{\hat{Q}_{Xh}(\beta)}$	$HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} Q_{Yh}^2(\beta) \left(\frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} + \frac{\beta(1-\beta)}{\left\{Q_{xh}(\beta) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)\right\}^2} - 2\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{Q_{xh}(\beta) Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)}\right)$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) <$ $HKO\left(\hat{Q}_{YOA}(\beta)\right)$	$\left[\frac{Q_{yh}(\beta) f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)}{Q_{xh}(\beta) f_{xh}\left(Q_{xh}(\beta)\right)} - \frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right]^2 > 0$
$\hat{Q}_{YFA}(\beta) = \sum_{i=1}^{h} w_h \left[\hat{Q}_{Yh}(\beta) + d_{cs}\left(Q_{Xh}(\beta) - \hat{Q}_{Xh}(\beta)\right)\right]$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) = \sum_{i=1}^{h} w_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} \frac{1}{\left\{f_{yh}\left(Q_{yh}(\beta)\right)\right\}^2} \left[\beta(1-\beta) - \frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)}\right]$	$V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right) <$ $V\left(\hat{Q}_{Yst}(\beta)\right)$	$\frac{\left(P_{11h}-\beta(1-\beta)\right)^2}{\beta(1-\beta)^2} > 0$
$\hat{Q}_{\text{Ö}ia}^{1st} = \sum_{h=1}^{l} w_h \left[\omega_{1h} \hat{Q}_{Yh}(\beta) + \omega_{2h}\left(Q_{Xh}(\beta) - \hat{Q}_{Xh}(\beta)\right)\right] \left[\frac{\eta_h Q_{Xh}(\beta)+\delta_h}{\eta_h \hat{Q}_x(\beta)+\delta_h}\right]$	$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\text{Ö}ia}^{1st}\right) \cong \sum_{h=1}^{l} w_h^2 Q_{Yh}^2(\beta) \frac{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)\left(\lambda_h \beta(1-\beta) C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]}{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h \beta(1-\beta) C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]}$	$HKO_{Min}\left(\hat{Q}_{\text{Ö}ia}^{1st}\right) <$ $V_{Min}\left(\hat{Q}_{YFA}(\beta)\right)$	$1 - \frac{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)}{\left(1-\lambda_h \gamma_h^2 \beta(1-\beta) C_{Q_{Xh}(\beta)}^2\right)+\left(\lambda_h \beta(1-\beta) C_{Q_{Yh}(\beta)}^2\right)\left[1-\left(\frac{P_{11h}-\beta(1-\beta)}{\beta(1-\beta)}\right)^2\right]} > 0$

7. SAYISAL GÖSTERİMLER

7.1. BRÖ Yönteminde Yüzdelik Tahmin Edicileri için Sayısal Örnek

BRÖ yönteminde tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için iki farklı veri seti ele alınmıştır. Sayısal örnekte ilk olarak 'Türkiye genelinde ilk ve ortaöğretim olanaklarının incelenmesi ve belirlenen aksaklıklara çözüm önerilerinin getirilmesi' konulu projede kullanılan 2006–2007 öğretim yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nın okullardan derlediği eğitim verilerinden yararlanılmıştır. İlgilenilen değişken Y olarak 2006 yılında ÖSS'ye yerleşen öğrenci sayısı, ilk yardımcı değişken X olarak ilçe başına düşen ortaöğretimdeki toplam derslik sayısı ve ikinci yardımcı değişken Z olarak ise ilçe başına düşen ÖSS'ye hazırlık dershane sayısı alınmıştır [64].

Çizelge 7.1'de değişkenlere ilişkin kitle bilgileri yer almaktadır.

Çizelge 7.1: Çıngı vd. [64] Verisi İçin Kitle Bilgileri

$N = 444$	$n = 60$	$R_x = 1542$	$M_0 = 51$
$Q_y(0{,}10) = 136$	$Q_x(0{,}10) = 37{,}5$	$Q_z(0{,}10) = 1$	$\phi_{xy}(0{,}10) = 0{,}6379$
$Q_y(0{,}25) = 259{,}25$	$Q_x(0{,}25) = 60$	$Q_z(0{,}25) = 1$	$\phi_{xy}(0{,}25) = 0{,}7285$
$Q_y(0{,}50) = 541$	$Q_x(0{,}50) = 106$	$Q_z(0{,}50) = 3$	$\phi_{xy}(0{,}50) = 0{,}815324$
$Q_y(0{,}75) = 1533{,}25$	$Q_x(0{,}75) = 239{,}75$	$Q_z(0{,}75) = 6$	$\phi_{xy}(0{,}75) = 0{,}8679$
$Q_y(0{,}90) = 4201{,}50$	$Q_x(0{,}90) = 509{,}5$	$Q_z(0{,}90) = 13$	$\phi_{xy}(0{,}90) = 0{,}8486$
$f_y\left(Q_y(0{,}10)\right) = 0{,}0010$	$f_x\left(Q_x(0{,}10)\right) = 0{,}0060$	$f_z\left(Q_z(0{,}10)\right) = 0{,}2420$	$\phi_{yz}(0{,}10) = 0{,}4839$
$f_y\left(Q_y(0{,}25)\right) = 0{,}0011$	$f_x\left(Q_x(0{,}25)\right) = 0{,}0060$	$f_z\left(Q_z(0{,}25)\right) = 0{,}2420$	$\phi_{yz}(0{,}25) = 0{,}6288$
$f_y\left(Q_y(0{,}50)\right) = 0{,}0006$	$f_x\left(Q_x(0{,}50)\right) = 0{,}0040$	$f_z\left(Q_z(0{,}50)\right) = 0{,}1332$	$\phi_{yz}(0{,}50) = 0{,}7275$
$f_y\left(Q_y(0{,}75)\right) = 0{,}0002$	$f_x\left(Q_x(0{,}75)\right) = 0{,}0012$	$f_z\left(Q_z(0{,}75)\right) = 0{,}0535$	$\phi_{yz}(0{,}75) = 0{,}7595$
$f_y\left(Q_y(0{,}90)\right) = 0{,}00003$	$f_x\left(Q_x(0{,}90)\right) = 0{,}0003$	$f_z\left(Q_z(0{,}90)\right) = 0{,}0196$	$\phi_{yz}(0{,}90) = 0{,}7170$
$\phi_{xz}(0{,}10) = 0{,}4266$	$\phi_{xz}(0{,}25) = 0{,}5546$	$\phi_{xz}(0{,}50) = 0{,}6215$	$\phi_{xz}(0{,}75) = 0{,}7097$
$\phi_{xz}(0{,}90) = 0{,}7428$			

Ele alınan değişkenler için çeyrekler arası değişim aralıkları (ÇAD) hesaplanmıştır. İlgilenilen değişken için ÇAD=1274, x yardımcı değişkeni için ÇAD=179,75 ve z yardımcı değişkeni için ÇAD=5 olarak elde edilmiştir. $[\text{ÇAD} - 1{,}5Q_1, \text{ÇAD} + 1{,}5Q_3]$ aralığının dışında kalan değerler aşırı değer olarak kabul edilmektedir. İlgilenilen değişken için bu aralık [1014,75 , 3573,875], x yardımcı değişkeni için [119,75 , 539,375] ve z yardımcı değişkeni için ise [4, 14] olarak hesaplanmıştır. İlgilenilen değişken, x yardımcı değişkeni ve z yardımcı değişkeni için maksimum değerler sırasıyla 15422, 1550 ve 264'tür. $[\text{ÇAD} - 1{,}5Q_1, \text{ÇAD} + 1{,}5Q_3]$ aralığının dışında çok fazla değişkenin yer aldığı görüldüğünden ortalama yerine ortanca ve yüzdelik tahmin edicilerinin kullanılması daha uygundur.

BRÖ yönteminde önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için önerilen tahmin edicilerin ve literatürde verilen klasik, oransal, fark ve üstel tahmin edicilerin asimptotik HKO değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen HKO değerleri Çizelge 7.2'de verilmiştir.

Çizelge 7.2: Çıngı vd. [64] Verisi için Tahmin Edicilerin HKO Değerleri

Tahmin Edici	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}25$	$\beta = 0{,}50$	$\beta = 0{,}75$	$\beta = 0{,}90$
Klasik $\widehat{Q}_Y(\beta)$	1.296,00	2.231,40	10.000,00	67.500,00	1.440.000,00
Oransal $\widehat{Q}_{RD1}$	1.222,76	2.215,60	9.529,25	64.491,72	1.410.566,54
Fark $\widehat{Q}_{RD4}$	768,64	1.047,17	3.352,86	16.655,60	403.024,38
Üstel $\widehat{Q}_{RA}(\beta)$	768,64	1.047,17	3.352,86	16.655,60	403.024,38
Öneri1a $\widehat{Q}^1_{Ö_1}$	737,20	1.030,77	3.314,12	16.534,50	393.512,61
Öneri1b $\widehat{Q}^1_{Ö_2}$	737,74	1.030,96	3.314,42	16.535,35	393.571,51
Öneri2 $\widehat{Q}^2_{Ö_i}$	**697,58**	**884,41**	**2.558,57**	**13.853,06**	**378.898,64**

Çizelge 7.2'de bu çalışmada incelenen yüzdelik tahmin edicileri için en etkin tahmin edici iki yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı $\widehat{Q}^2_{Ö_i}$ olarak elde edilmiştir. $\widehat{Q}^1_{Ö_i}$'nin klasik, oransal ve fark tahmin edicilerinden her zaman etkin olduğu teorik karşılaştırmalarda gösterilmiş olup, sayısal örnekte de bu sonuç görülmektedir.

Sayısal örnekte ikinci olarak literatürde en çok kullanılan veri setinden şeker kamışı veri seti ele alınmıştır [9]. İlgilenilen değişken (y) olarak toplam şeker kamışı hasılatı, ilk yardımcı değişken olarak (x) şeker kamışının büyümesi için ayrılmış alan, ikinci yardımcı değişken olarak (z) toplam çiftlik harcaması ele alınmıştır.

Çizelge 7.3'te değişkenlere ilişkin kitle bilgileri yer almaktadır.

Çizelge 7.3: Şeker Kamışı [9] Verisi İçin Kitle Bilgileri

$N = 338$	$n = 60$	$R_x = 19156$	$M_0 = 2318$
$Q_y(0{,}10) = 40480{,}60$	$Q_x(0{,}10) = 1847{,}90$	$Q_z(0{,}10) = 26759{,}3$	$\phi_{xy}(0{,}10) = 0{,}8321$
$Q_y(0{,}25) = 57515{,}50$	$Q_x(0{,}25) = 2494{,}25$	$Q_z(0{,}25) = 34417{,}30$	$\phi_{xy}(0{,}25) = 0{,}8257$
$Q_y(0{,}50) = 80391{,}00$	$Q_x(0{,}50) = 3389$	$Q_z(0{,}50) = 49255{,}5$	$\phi_{xy}(0{,}50) = 0{,}8462$
$Q_y(0{,}75) = 117263{,}25$	$Q_x(0{,}75) = 4934{,}5$	$Q_z(0{,}75) = 73741{,}75$	$\phi_{xy}(0{,}75) = 0{,}8257$
$Q_y(0{,}90) = 173642{,}60$	$Q_x(0{,}90) = 7113{,}40$	$Q_z(0{,}90) = 106446{,}10$	$\phi_{xy}(0{,}90) = 0{,}89935$
$f_y\left(Q_y(0{,}10)\right) = 0{,}000001$	$f_x\left(Q_x(0{,}10)\right) = 0{,}000195$	$f_z\left(Q_z(0{,}10)\right) = 0{,}000014$	$\phi_{yz}(0{,}10) = 0{,}6978$
$f_y\left(Q_y(0{,}25)\right) = 0{,}000011$	$f_x\left(Q_x(0{,}25)\right) = 0{,}000260$	$f_z\left(Q_z(0{,}25)\right) = 0{,}000018$	$\phi_{yz}(0{,}25) = 0{,}6832$
$f_y\left(Q_y(0{,}50)\right) = 0{,}000009$	$f_x\left(Q_x(0{,}50)\right) = 0{,}000231$	$f_z\left(Q_z(0{,}50)\right) = 0{,}000015$	$\phi_{yz}(0{,}50) = 0{,}6686$
$f_y\left(Q_y(0{,}75)\right) = 0{,}000005$	$f_x\left(Q_x(0{,}75)\right) = 0{,}000118$	$f_z\left(Q_z(0{,}75)\right) = 0{,}000007$	$\phi_{yz}(0{,}75) = 0{,}6515$
$f_y\left(Q_y(0{,}90)\right) = 0{,}000002$	$f_x\left(Q_x(0{,}90)\right) = 0{,}000039$	$f_z\left(Q_z(0{,}90)\right) = 0{,}000003$	$\phi_{yz}(0{,}90) = 0{,}7313$
$\phi_{xz}(0{,}10) = 0{,}6306$	$\phi_{xz}(0{,}25) = 0{,}6990$	$\phi_{xz}(0{,}50) = 0{,}6923$	$\phi_{xz}(0{,}75) = 0{,}6990$
$\phi_{xz}(0{,}90) = 0{,}7985$			

Ele alınan değişkenler için çeyrekler arası değişim aralıkları (ÇAD) hesaplanmıştır. İlgilenilen değişken için ÇAD=59747,75, x yardımcı değişkeni için ÇAD=2440,25 ve z yardımcı değişkeni için ÇAD=39324,25 olarak elde edilmiştir. İlgilenilen değişken için bu aralık [2232,25 , 235642,63], x yardımcı değişkeni için [-54 , 9842] ve z yardımcı değişkeni için ise [4906,75 , 149936,88] olarak hesaplanmıştır. İlgilenilen değişken, x yardımcı değişkeni ve z yardımcı değişkeni için maksimum değerler sırasıyla 484346, 19697 ve 345305'dir. $[\text{ÇAD} - 1{,}5Q_1, \text{ÇAD} + 1{,}5Q_3]$ aralığının dışında çok fazla değişkenin yer aldığı görüldüğünden ortalama yerine ortanca ve yüzdelik tahmin edicilerinin kullanılması daha uygundur.

BRÖ yönteminde önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için önerilen tahmin edicilerin ve literatürde verilen klasik, oransal, fark ve üstel tahmin edicilerin asimptotik HKO değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen HKO değerleri Çizelge 7.4'te verilmiştir.

Çizelge 7.4: Şeker Kamışı [9] Verisi İçin Tahmin Edicilerin HKO Değerleri

Tahmin Edici	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}25$	$\beta = 0{,}50$	$\beta = 0{,}75$	$\beta = 0{,}90$
Klasik $\hat{Q}_Y(\beta)$	12.330.000,00	21.229.338,84	42.283.950,62	102.750.000,00	308.250.000,00
Oransal $\hat{Q}_{RD1}$	12.282.031,72	21.165.087,77	42.163.972,31	102.447.772,37	307.086.633,78
Fark $\hat{Q}_{RD4}$	3.792.826,24	6.755.589,80	10.675.295,40	32.697.054,65	58.955.743,96
Üstel $\hat{Q}_{RA}(\beta)$	3.792.826,24	6.755.589,80	10.675.295,40	32.697.054,65	58.955.743,96
Öneri1a $\hat{Q}^1_{\text{Ö}_1}$	3.783.984,02	6.741.737,38	10.657.591,95	32.618.899,62	58.838.823,30
Öneri1b $\hat{Q}^1_{\text{Ö}_2}$	3.783.984,76	6.741.737,93	10.657.592,42	32.618.901,59	58.838.827,63
Öneri2 $\hat{Q}^2_{\text{Ö}_i}$	**3.179.627,61**	**6.288.843,58**	**10.276.976,43**	**31.586.814,76**	**58.807.337,03**

Çizelge 7.4'te bu çalışmada incelenen yüzdelik tahmin edicileri için en etkin tahmin edici iki yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı $\hat{Q}^2_{\text{Ö}_i}$ olarak elde edilmiştir. $\hat{Q}^1_{\text{Ö}_i}$'nin klasik, oransal ve fark tahmin edicilerinden her zaman etkin olduğu teorik karşılaştırmalarda gösterilmiş olup, sayısal örnekte de bu sonuç görülmektedir.

7.2. TRÖ Yönteminde Yüzdelik Tahmin Edicileri için Sayısal Örnek

TRÖ yönteminde önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için Kadılar ve Çıngı [63] makalesindeki elma ağacı sayısı ve elma üretimi verilerinden yararlanılmıştır. İlgilenilen değişken (y) olarak Türkiye'de 1999 yılında üretilen elma miktarı, yardımcı değişken olarak (x) ise 1999 yılındaki elma ağacı sayısı alınmıştır. Çizelge 7.5'te veriye ilişkin kitle bilgileri görülmektedir.

TRÖ yönteminde önerilen tahmin edicilere ilişkin HKO değerleri Çizelge 7.6 ve Çizelge 7.7'de verilmiştir.

TRÖ yönteminde ayrı ve birleşik tahminler için önerilen tahmin ediciler içerisinde önerilen tahmin edici ailesi en düşük HKO değerine sahip tahmin ediciler olarak elde edilmiştir.

Teorik karşılaştırmalarda önerilen tahmin edici ailesinin her zaman etkin olduğu teorik olarak gösterilmiştir. Sayısal örnek ile de en etkin tahmin ediciler önerilen tahmin edici aileleri bulunmuştur. Ayrı önerilen tahmin edici ailesinin HKO değeri daha düşük olarak elde edilmiştir.

Çizelge 7.5: TRÖ İçin Kitle Bilgileri

$N_1 = 106$	$N_2 = 106$	$N_3 = 94$	$N_4 = 171$	$N_5 = 204$	$N_6 = 173$
$n_1 = 9$	$n_2 = 17$	$n_3 = 38$	$n_4 = 67$	$n_5 = 7$	$n_6 = 2$
$Q_{y1}(0{,}10) = 33{,}7$	$Q_{y2}(0{,}10) = 6{,}7$	$Q_{y3}(0{,}10) = 39$	$Q_{y4}(0{,}10) = 47{,}4$	$Q_{y5}(0{,}10) = 66$	$Q_{y6}(0{,}10) = 5$
$Q_{y1}(0{,}25) = 95{,}25$	$Q_{y2}(0{,}25) = 67{,}5$	$Q_{y3}(0{,}25) = 133{,}75$	$Q_{y4}(0{,}25) = 150$	$Q_{y5}(0{,}25) = 142{,}5$	$Q_{y6}(0{,}25) = 18$
$Q_{y1}(0{,}50) = 258{,}5$	$Q_{y2}(0{,}50) = 254$	$Q_{y3}(0{,}50) = 670{,}5$	$Q_{y4}(0{,}50) = 568$	$Q_{y5}(0{,}50) = 320{,}5$	$Q_{y6}(0{,}50) = 84$
$Q_{y1}(0{,}75) = 582{,}25$	$Q_{y2}(0{,}75) = 1265$	$Q_{y3}(0{,}75) = 5179{,}25$	$Q_{y4}(0{,}75) = 1734$	$Q_{y5}(0{,}75) = 767$	$Q_{y6}(0{,}75) = 375$
$Q_{y1}(0{,}90) = 2859$	$Q_{y2}(0{,}90) = 3070{,}2$	$Q_{y3}(0{,}90) = 18422{,}5$	$Q_{y4}(0{,}90) = 5910{,}4$	$Q_{y5}(0{,}90) = 1913{,}5$	$Q_{y6}(0{,}90) = 954{,}4$
$Q_{x1}(0{,}10) = 1077$	$Q_{x2}(0{,}10) = 310{,}5$	$Q_{x3}(0{,}10) = 1270$	$Q_{x4}(0{,}10) = 1576$	$Q_{x5}(0{,}10) = 2625$	$Q_{x6}(0{,}10) = 290$
$Q_{x1}(0{,}25) = 3950$	$Q_{x2}(0{,}25) = 2325$	$Q_{x3}(0{,}25) = 5758$	$Q_{x4}(0{,}25) = 4700$	$Q_{x5}(0{,}25) = 5500$	$Q_{x6}(0{,}25) = 785$
$Q_{x1}(0{,}50) = 8600$	$Q_{x2}(0{,}50) = 7297{,}5$	$Q_{x3}(0{,}50) = 18305$	$Q_{x4}(0{,}50) = 17850$	$Q_{x5}(0{,}50) = 13650$	$Q_{x6}(0{,}50) = 3400$
$Q_{x1}(0{,}75) = 19762{,}5$	$Q_{x2}(0{,}75) = 27175$	$Q_{x3}(0{,}75) = 58250$	$Q_{x4}(0{,}75) = 37900$	$Q_{x5}(0{,}75) = 28935$	$Q_{x6}(0{,}75) = 11850$
$Q_{x1}(0{,}90) = 61580$	$Q_{x2}(0{,}90) = 78450$	$Q_{x3}(0{,}90) = 218500$	$Q_{x4}(0{,}50) = 117040$	$Q_{x5}(0{,}90) = 63650$	$Q_{x6}(0{,}90) = 24755$
$f_{y1}\left(Q_{y1}(0{,}10)\right) = 0{,}00302$	$f_{y2}\left(Q_{y2}(0{,}10)\right) = 0{,}00661$	$f_{y3}\left(Q_{y3}(0{,}10)\right) = 0{,}00176$	$f_{y4}\left(Q_{y4}(0{,}10)\right) = 0{,}00165$	$f_{y5}\left(Q_{y5}(0{,}10)\right) = 0{,}00179$	$f_{y6}\left(Q_{y6}(0{,}10)\right) = 0{,}01471$
$f_{y1}\left(Q_{y1}(0{,}25)\right) = 0{,}00229$	$f_{y2}\left(Q_{y2}(0{,}25)\right) = 0{,}00207$	$f_{y3}\left(Q_{y3}(0{,}25)\right) = 0{,}00102$	$f_{y4}\left(Q_{y4}(0{,}25)\right) = 0{,}00110$	$f_{y5}\left(Q_{y5}(0{,}25)\right) = 0{,}00172$	$f_{y6}\left(Q_{y6}(0{,}25)\right) = 0{,}0067$
$f_{y1}\left(Q_{y1}(0{,}50)\right) = 0{,}00103$	$f_{y2}\left(Q_{y2}(0{,}50)\right) = 0{,}00073$	$f_{y3}\left(Q_{y3}(0{,}50)\right) = 0{,}00028$	$f_{y4}\left(Q_{y4}(0{,}50)\right) = 0{,}00041$	$f_{y5}\left(Q_{y5}(0{,}50)\right) = 0{,}00104$	$f_{y6}\left(Q_{y6}(0{,}50)\right) = 0{,}00211$
$f_{y1}\left(Q_{y1}(0{,}75)\right) = 0{,}00035$	$f_{y2}\left(Q_{y2}(0{,}75)\right) = 0{,}00012$	$f_{y3}\left(Q_{y3}(0{,}75)\right) = 0{,}00002$	$f_{y4}\left(Q_{y4}(0{,}75)\right) = 0{,}00010$	$f_{y5}\left(Q_{y5}(0{,}75)\right) = 0{,}00033$	$f_{y6}\left(Q_{y6}(0{,}75)\right) = 0{,}00045$
$f_{y1}\left(Q_{y1}(0{,}90)\right) = 0{,}00002$	$f_{y2}\left(Q_{y2}(0{,}90)\right) = 0{,}00003$	$f_{y3}\left(Q_{y3}(0{,}90)\right) = 0{,}000003$	$f_{y4}\left(Q_{y4}(0{,}90)\right) = 0{,}00001$	$f_{y5}\left(Q_{y5}(0{,}90)\right) = 0{,}00006$	$f_{y6}\left(Q_{y6}(0{,}90)\right) = 0{,}00012$
$f_{x1}\left(Q_{x1}(0{,}10)\right) = 0{,}00007$	$f_{x2}\left(Q_{x2}(0{,}10)\right) = 0{,}000164$	$f_{x3}\left(Q_{x3}(0{,}10)\right) = 0{,}00005$	$f_{x4}\left(Q_{x4}(0{,}10)\right) = 0{,}00005$	$f_{x5}\left(Q_{x5}(0{,}10)\right) = 0{,}000475$	$f_{x6}\left(Q_{x6}(0{,}10)\right) = 0{,}00049$
$f_{x1}\left(Q_{x1}(0{,}25)\right) = 0{,}00007$	$f_{x2}\left(Q_{x2}(0{,}25)\right) = 0{,}000058$	$f_{x3}\left(Q_{x3}(0{,}25)\right) = 0{,}00003$	$f_{x4}\left(Q_{x4}(0{,}25)\right) = 0{,}00004$	$f_{x5}\left(Q_{x5}(0{,}25)\right) = 0{,}000044$	$f_{x6}\left(Q_{x6}(0{,}25)\right) = 0{,}00023$
$f_{x1}\left(Q_{x1}(0{,}50)\right) = 0{,}00004$	$f_{x2}\left(Q_{x2}(0{,}50)\right) = 0{,}000027$	$f_{x3}\left(Q_{x3}(0{,}50)\right) = 0{,}00001$	$f_{x4}\left(Q_{x4}(0{,}50)\right) = 0{,}00002$	$f_{x5}\left(Q_{x5}(0{,}50)\right) = 0{,}000026$	$f_{x6}\left(Q_{x6}(0{,}50)\right) = 0{,}000050$
$f_{x1}\left(Q_{x1}(0{,}75)\right) = 0{,}00001$	$f_{x2}\left(Q_{x2}(0{,}75)\right) = 0{,}000008$	$f_{x3}\left(Q_{x3}(0{,}75)\right) = 0{,}0000003$	$f_{x4}\left(Q_{x4}(0{,}75)\right) = 0{,}00001$	$f_{x5}\left(Q_{x5}(0{,}75)\right) = 0{,}000009$	$f_{x6}\left(Q_{x6}(0{,}75)\right) = 0{,}00002$
$f_{x1}\left(Q_{x1}(0{,}90)\right) = 0{,}000002$	$f_{x2}\left(Q_{x2}(0{,}90)\right) = 0{,}000002$	$f_{x3}\left(Q_{x3}(0{,}90)\right) = 0{,}0000003$	$f_{x4}\left(Q_{x4}(0{,}90)\right) = 0{,}000001$	$f_{x5}\left(Q_{x5}(0{,}90)\right) = 0{,}000002$	$f_{x6}\left(Q_{x6}(0{,}90)\right) = 0{,}0000005$
$\phi_1(0{,}10) = 0{,}5583$	$\phi_2(0{,}10) = 0{,}7792$	$\phi_3(0{,}10) = 0{,}7543$	$\phi_4(0{,}10) = 0{,}5428$	$\phi_5(0{,}10) = 0{,}6120$	$\phi_6(0{,}10) = 0{,}6701$
$\phi_1(0{,}25) = 0{,}5923$	$\phi_2(0{,}25) = 0{,}8981$	$\phi_3(0{,}25) = 0{,}8273$	$\phi_4(0{,}25) = 0{,}7515$	$\phi_5(0{,}25) = 0{,}7938$	$\phi_6(0{,}25) = 0{,}8926$
$\phi_1(0{,}50) = 0{,}8113$	$\phi_2(0{,}50) = 0{,}8113$	$\phi_3(0{,}50) = 0{,}7447$	$\phi_4(0{,}50) = 0{,}7193$	$\phi_5(0{,}50) = 0{,}7059$	$\phi_6(0{,}50) = 0{,}7688$
$\phi_1(0{,}75) = 0{,}7962$	$\phi_2(0{,}75) = 0{,}8471$	$\phi_3(0{,}75) = 0{,}9424$	$\phi_4(0{,}75) = 0{,}7475$	$\phi_1(0{,}75) = 0{,}6863$	$\phi_6(0{,}75) = 0{,}7524$

Çizelge 7.5: TRÖ İçin Kitle Bilgileri (Devamı)

$\phi_1(0{,}90) = 0,$	$\phi_2(0{,}90) = 0{,}7792$	$\phi_3(0{,}90) = 0{,}7543$	$\phi_4(0{,}90) = 0{,}8041$	$\phi_5(0{,}90) = 0{,}7228$	$\phi_6(0{,}90) = 0{,}7524$
$R_{x1} = 336400$	$R_{x2} = 470800$	$R_{x3} = 1179960$	$R_{x4} = 3298342$	$R_{x5} = 381700$	$R_{x1} = 151000$
$M_{01} = 460$	$M_{02} = 350$	$M_{03} = 1500$	$M_{04} = 8700$	$M_{05} = 5200$	$M_{01} = 200$

Çizelge 7.6: TRÖ'de Birleşik Tahminler İçin HKO Değerleri

	Birleşik Tahminler				
Tahmin Edici	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}25$	$\beta = 0{,}50$	$\beta = 0{,}75$	$\beta = 0{,}90$
Klasik $\hat{Q}_{Yst}(\beta)$	264,1262	763,5597	4694,0120	140496,3464	2979054,7228
Oransal $\hat{Q}_{YOB}(\beta)$	230,3472	336,5700	2847,4711	512807,1769	20456687,7429
Fark $\hat{Q}_{YFB}(\beta)$	229,5930	309,1785	2237,9590	42185,2675	2684940,1144
Tahmin Edici Ailesi $\hat{Q}_{Öib}^{1st}$	**193,2349**	**300,3642**	**2196,5915**	**41303,5490**	**2352232,7310**

Çizelge 7.7: TRÖ'de Ayrı Tahminler İçin HKO Değerleri

	Ayrı Tahminler				
Tahmin Edici	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}25$	$\beta = 0{,}50$	$\beta = 0{,}75$	$\beta = 0{,}90$
Klasik $\hat{Q}_{Yst}(\beta)$	264,1262	763,5597	4694,0120	140496,3464	2979054,7228
Oransal $\hat{Q}_{YOA}(\beta)$	237,1445	330,9777	2357,7944	2246740,3671	10499580,0414
Fark $\hat{Q}_{YFA}(\beta)$	165,0663	279,9070	2110,8053	31966,1248	1251801,6935
Tahmin Edici Ailesi $Q_{Öia}^{1st}$	**105,1242**	**268,1117**	**1691,4420**	**14429,6000**	**885930,4828**

8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Kitle ortalaması, toplamı ve varyansının tahmini için literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Ancak kitle ortancasının ya da yüzdelik değerlerinin tahmini için daha az çalışma yer almaktadır. İlgilenilen değişkeninin dağılımı oldukça çarpık bir dağılıma sahip olabilmektedir. Bu durumda kitle ortalamasının tahmini yerine kitle ortancasının ya da yüzdelik değerlerinin tahmin edilmesi daha uygun olmaktadır.

Bu çalışmada BRÖ, ard arda örnekleme ve iki safhalı örnekleme yöntemlerinde önerilen yüzdelik tahmin edicileri incelenmiştir. Ayrıca yüzdelik tahmininde kullanılan kalibrasyon yöntemlerinden de söz edilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde BRÖ yönteminde önerilen yüzdelik tahmin edicileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yapılan çalışmalar incelendiğinde yüzdelik tahmininde kitle yüzdeliğinin varyansının elde edilmesinde iki farklı yaklaşımın kullanıldığı görülmüştür. Woodruff [5] güven aralığı yaklaşımı kullanılarak ve asimptotik varyans yaklaşımı kullanılarak kitle yüzdeliğinin varyansı elde edilmiştir. Çalışmanın altıncı bölümünde BRÖ yönteminde kitle yüzdeliğinin tahmini için yüzdelik tahmin edici aileleri önerilmiş olup, çalışmanın yedinci bölümünde bu tahmin edicilere ilişkin asimptotik HKO değerleri elde edilmiştir. Literatürde asimptotik varyansı, HKO eşitlikleri verilen klasik, oransal, fark yüzdelik tahmin edicileri ile ilk olarak önerilen $\hat{Q}^{1}_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesi HKO bakımından teorik olarak karşılaştırılmıştır. $\hat{Q}^{1}_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesinin klasik, oransal ve fark yüzdelik tahmin edicilerinden her zaman daha etkin olduğu görülmüştür. $\hat{Q}^{2}_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesinin ise $\frac{\left(\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2+\left(\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2-2\left(\frac{\left(P^{xy}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P^{yz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)\left(\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)}{1-\left(\frac{\left(P^{xz}_{11}-\beta(1-\beta)\right)}{\beta(1-\beta)}\right)^2} > 0$ olması durumunda klasik yüzdelik tahmin edicisinden daha etkin bir tahmin edici olduğu görülmüştür.

Çalışmanın yedinci bölümünde BRÖ yönteminde önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini incelemek amacıyla iki farklı veri seti ele alınmıştır. Yapılan sayısal örneklerde en etkin tahmin edicinin ikinci olarak önerilen $\hat{Q}^{2}_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesinin olduğu görülmüştür. İki yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı $\hat{Q}^{2}_{\text{Ö}_i}$ tahmin edici ailesinde, yardımcı değişken bilgisinin kullanılması ile daha etkin tahmin edicilerin elde edildiği görülmüştür.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ard arda örnekleme yönteminde önerilen tahmin ediciler, dördüncü bölümünde iki safhalı örnekleme yönteminde önerilen tahmin ediciler ve beşinci bölümünde yüzdelik tahmininde kalibrasyon yöntemleri incelenmiştir.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde yüzdelik tahminine ilişkin TRÖ yönteminde çalışma yapılmadığı görülmüştür. Altıncı bölümde TRÖ yönteminde ayrı ve birleşik tahminler olmak üzere oransal ve fark yüzdelik tahmin edicileri önerilmiştir. Ayrıca BRÖ yönteminde ilk olarak önerilen tahmin edici ailesi TRÖ yönteminde ayrı ve birleşik tahminler için uyarlanmıştır. TRÖ yönteminde ayrı ve birleşik tahminler için önerilen tahmin ediciler içerisinde önerilen tahmin edici ailesinin her zaman klasik, oransal ve fark tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir. Çalışmanın yedinci bölümünde yapılan sayısal örnekte de ayrı ve birleşik tahminler için önerilen tahmin edici ailesi en düşük HKO değerlerine sahip tahmin ediciler olarak elde edilmiştir. Birleşik ve ayrı tahminler incelendiğinde ayrı tahmin edici ailesinin en düşük HKO değerine sahip olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Çıngı, H., *Örnekleme Kuramı*, Bizim Büro Basımevi, Ankara, **2009**.

[2] Özdemir, Y. A., Şahin Tekin, S. T., Esin, A., *Çözümlü Örneklerle Örnekleme Yöntemlerine Giriş*, Seçkin Yayınları, Ankara, **2015**.

[3] Çıngı H., Kadılar C., *Advances in Sampling Theory – Ratio Method of Estimation*, Bentham Science Publishers, **2009**.

[4] Singh S., *Advanced Sampling Theory with Applications: How Michael "selected" Amy*, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, **2003.**

[5] Woodruff, R. S., Confidence intervals for medians and other position measures, *Journal of the American Statistical Association*, 47 (260), 635-646, **1952**.

[6] Sen P. K., On some properties of the asymptotic variance of the sample quantiles and mid-ranges, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 23 (2), 453-459, **1961**.

[7] Sedranks, J., Meyer, J., Confidence intervals for the quantiles of a finite population: Simple random and stratified simple random sampling, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 40 (2), 239-252, **1978**.

[8] Gross, S. T., Median estimation in sample surveys, *Proceedings of the Survey Research Methods Section, American Statistical Association*, 181-184, **1980**.

[9] Chambers, R.L., Dunstan, R., Estimating distribution functions from survey data, *Biometrika*, 73 (3), 597-604, **1986**.

[10] Francisco, C. A. and Fuller, W. A., Estimation of the distribution function with a complex survey, In: *Section on Survey Research Methods at the 1986 Annual ASA meetings. Rao, JNK and CFJ Wu (1987)." Methods for Standard Errors and Confidence Intervals from Sample Survey Data: Some Recent Work." Invited Paper*, **1986**.

[11] Kuk, A. Y. C., Mak, T. K., Median estimation in the presence of auxiliary information, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 51(2, 261-269, **1989**.

[12] Rao, J. N. K., Kovar, J. G., Mantel H. J., On estimating distribution functions and quantiles from survey data using auxiliary information, *Biometrika*, 77, 365-375, **1990.**

[13] Kuk A. Y. C., A kernel method for estimating finite population distribution functions using auxiliary information, *Biometrika*, 80 (2), 385-392, **1993**.

[14] Mak, T. K., Kuk, A. Y. C., A new method for estimating finite-population quantiles using auxiliary information, *The Canadian Journal of Statistics*, 21 (1), 29-38, **1993**.

[15] Garcia, M. R., Cebrian A. A., Rodriguez, E. A., Quantile interval estimation in finite population using a multivariate ratio estimator, *Metrika*, 47, 203-213, **1998**.

[16] Garcia, M. R., Cebrian A. A., On estimating the median from survey data using multiple auxiliary information, *Metrika*, 54, 59-76, **2001**.

[17] Rueda, M. D. M., Arcos, A., The use of quantiles of auxiliary variable to estimate medians, Biometrical Journal, 44, 5, 619-632, **2002.**

[18] Ahmed, M. S., Abu-Dayyeh, W., Samawi, Hani M., Interval estimation of the quantiles of finite population using multivariate auxiliary information, Metron, 60, 1-2, 115-124, **2002.**

[19] Rueda, M. D. M., Arcos, A., Martinez-Miranda M. D., Difference estimators of quantiles in finite populations, *Test*, 12 (2), 481-496, **2003**.

[20] Rueda, M. D. M., Arcos, A., Martinez- Miranda, M. D., Roman, Y., Some improved estimators of finite population quantile using auxiliary information in sample surveys, *Computational Statistics & Data Analysis,* 45, 825-848, **2004**.

[21] Rueda, M., Arcos, A., Improving ratio-type quantile estimates in a finite population, *Statistical Papers*, 45, 231-248, **2004.**

[22] Arcos, A., Rueda, M. D .M., Martinez- Miranda, M. D., Using multiparametric auxiliary information at the estimation stage, *Statistical Papers,* 46, 339-358, **2005.**

[23] Zhu, M., Wang Y., Quantile estimation from ranked set sampling data, *Sankhya: The Indian Journal of Statisics*, *Special Isssue on Quantile Regresion and Relate Methods,* 67 (2), 295-304, **2005.**

[24] Rueda, M. D. M., Arcos, A., Munoz, J. F., Singh S., Quantile estimation in two-phase sampling, *Computational Statistics & Data Analysis,* 51, 2559-2572, **2007.**

[25] Rueda, M., Munoz, J. F., Sanchez-Borrego, I., A quantile estimator under two-phase sampling for stratification, *International Journal of Computer Mathematics,* 88 (8), 1565-1575, **2011**.

[26] Arcos, A., Rueda, M., Munoz, J. F., An improved class of estimators of a finite population quantile in sample surveys, *Applied Mathematics Letters,* 20, 312-315, **2007.**

[27] Martinez- Miranda, M. D., Garcia, M. R., Cebrian A. A., Montoya, Y. R., Aguilera S. G., Quantile estimation under successive sampling, *Computational Statistics*, 20, 385-399, **2005**.

[28] Rueda, M., Munoz, J. F., Gonzalez S., Arcos, A., Estimating quantiles under sampling on two occasions with arbitrary sample designs, *Computational Statistics,* 51, 6596-6613, **2007.**

[29] Singh H. P., Tailor, R., Singh S., Kim J. M., Quantile estimation in successive sampling, *Journal of the Korean Statistical Society,* 36 (4), 543-556, **2007.**

[30] Rueda, M. D. M., Munoz, J. F., Arcos, A., Successive sampling to estimate quantiles with p-auxiliary variables, *Quality & Quantity,* 42, 427-443, **2008.**

[31] Singh, H. P., Singh, S., Kozak, M., A family of estimators of finite-population distribution function using auxiliary information, *Acta Appl Math*, 104, 115-130, **2008.**

[32] Roman-Montoya, Y., Rueda, M., Arcos, A., Confidence intervals for quantile estimation using Jackknife techniques, *Comput Stat*, 23, 573-585, **2008.**

[33] Munoz, J. F., Arcos, A., Alvarez, E., Rueda M., New ratio and difference estimatorsof the finite population distribution function, *Mathematics and Computers in Simulation*, 102, 51-61, **2014.**

[34] Ren, R. Estimation de la fonction de répartition et des fractiles d'une population finie, *Actes des journées de méthodologie statistique, INSEE Méthodes*, 1, 263-289, **2002.**

[35] Harms, T., Duchesne, P., On calibration estimation for quantiles, *Survey Methodology*, *32*(1), 37-52, **2006.**

[36] Rueda, M., Martínez-Puertas, S., Martínez-Puertas, H., Arcos, A., Calibration methods for estimating quantiles. *Metrika*, *66*(3), 355-371, **2007.**

[37] Martinez, S., Rueda, M., Arcos, A., Martinez, H., Borrego-Sanchez, I., Post-stratified calibration method for estimating quantiles, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55, 838-851, **2011.**

[38] Mahdizadeh, M., Arghami, N.R., Quantile estimation using ranked set samples from a population with known mean, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, 41, 1872-1881, **2012.**

[39] Kendall, M. G., Stuart, A., Ord, J. K, *Kendall's advanced theory of statistics*, Oxford University Press, New York, **1987.**

[40] Kovar, J. G., Rao, J. N. K, Wu, C. F. J., Bootstrap and other methods to measure errors in survey estimates, *The Canadian Journal of Statistic,* 16 *Supplement: A Special Issue of Papers Presenting Current Statistical Work at Statistics Canada*, 25-45, **1988.**

[41] Srivastava, S. K., Jhajj, H. S., A class of estimators in survey sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 68, 341-343, **1981.**

[42] Satıcı, E., *Kayıp Gözlem Olması Durumunda Kitle Ortalaması Tahmini*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2009.**

[43] Jessen, R. J., *Statisticial investigation of a sample survey for obtaining farm facts*, Iowa Agricultural Experiment Statistical Research Bulletin 304, **1942.**

[44] Patterson, H. D., Sampling on successive occasions with partial replacement of units, *Journal of the Royal Statistical Society B,* 12, 241-255, **1950.**

[45] Narain, R., D., On the recurrence formula in sampling on successive occasions, *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, 5, 96-99, **1953.**

[46] Rao, J.N.K., Graham, J.E., Rotation design for sampling on repeated occassions, Journal American Statistical Association, 59, 492-509, **1964**.

[47] Adhvaryu, D., Successive sampling using multi-auxiliary information, *Sankhya*, 40, 167-173, **1978**.

[48] Sen A. R., Sampling theory on repeated occasions with ecological applications, in *Sampling Biological Populations*, 315-328, **1979**.

[49] Gupta, P.C., Sampling on two successive occasions, *Journal of Statistical Research*, 13, 7-16, **1979**.

[50] Das, A.K., Estimation of population ratio on two occasions, *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, 34, 1-9, **1982.**

[51] Koyuncu, N., *Örnekleme Kuramında Tahmin Edicilere Kalibrasyon Yönteminin Uygulanması*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2012.**

[52] Deville, J. C., Särndal, C. E., Calibration estimators in survey sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 87(418), 376-382, **1992.**

[53] Deville, J. C., Estimation Linaėire et Redressement sur Information Auxiliaires d'Enquêtes par Sondage, *in Essais en l'Honneur d'Edmond Malinvaud, eds. A monfort and J.J. Laffond, Paris: Econimica*, 915-927, **1988.**

[54] Lemel, Y., Une généralisation de la méthode du quotient pour le redressement des enquêtes par sondage. *Annales de l'INSEE*, 22-23, 273-282, **1976.**

[55] Kovačević, M. S., Calibration estimation of cumulative distribution and quantile functions from survey data, *Proceedings of the Survey Methods Section, Statistical Society of Canada*, 139-144, **1997.**

[56] Harms, T., Extensions of the calibration approach: calibration of distribution functions and its link to small area estimators, *Chintex document de travail*, 13, **2003.**

[57] Gupta, S., Shabbir, J., On improvement in estimating the population mean in simple random sampling, *Journal of Applied Statistics*, 35(5), 559-566, **2008.**

[58] Koyuncu, N., Kadilar, C., On improvement in estimating population mean in stratified random sampling, *Journal of Applied Statistics*, 37(6), 999-1013, **2010.**

[59] Sisodia, B. V. S., Dwivedi, V. K, A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable, *Journal of Indian Society Agricultural Statistics* 33, 13–18, **1981.**

[60] Singh, H. P., Kakran, M. S., A modified ratio estimator using known coefficient of kurtosis of an auxiliary character, unpublished paper, **1993.**

[61] Upadhyaya, L. N., Singh, H.P., Use of transformed auxiliary variable in estimating the population mean, *Biometrical J.* 41 (5), 627-636, **1999.**

[62] Kadilar, C., Cingi, H., Ratio estimators in simple random sampling, *Applied Mathematics and Computation*, 151, 893–902, **2004.**

[63] Kadilar, C., Cingi, H., Ratio estimators in stratified sampling, *Biometrical Journal* 45 (2), 218–225, **2003**.

[64] Çıngı H., Kadılar C., Koçberber G., Türkiye Genelinde İlk ve Orta Öğretim Olanaklarının İncelenmesi ve Belirlenen Aksaklıklara Çözüm Önerilerinin Getirilmesi, TÜBİTAK, SOBAG, 106K077, **2007.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Sibel AL

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : sibelal84@gmail.com

Adresi : Batı Sitesi Mah. 2026. Sok. Yeni Dolunay Sitesi 7/3 Batıkent/ANKARA

Eğitim

Lise : Süleyman Demirel Anadolu Lisesi

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Orta Düzey

İş Deneyimi

2008-2011 : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Araştırma Görevlisi

2011-2015 : Sosyal Güvenlik Kurumu, Sosyal Güvenlik Uzman Yardımcısı

2015- : Sosyal Güvenlik Kurumu Sosyal Güvenlik Uzmanı

Deneyim Alanları

Örnekleme, Uygulamalı İstatistik, Veri Madenciliği, Büyük Veri

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
~~YÜKSEK LİSANS~~/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 08/11/2018

Tez Başlığı / Konusu: ÖRNEKLEME KURAMINDA YÜZDELİK TAHMİN EDİCİLERİ

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 97 sayfalık kısmına ilişkin, 08/11/2018 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 7 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

08/11/2018

Adı Soyadı: Sibel AL
Öğrenci No: N10145131
Anabilim Dalı: İSTATİSTİK
Programı: DOKTORA
Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Hülya ÇINGI