

**TEKTÜR OLMAYAN WEIBULL DAĞILIMLI ÇEVRESEL
YANSIMA ORTAMININ BEKLENTİ ENBÜYÜLTME
YÖNTEMİNE DAYALI ANALİZİ**

**ANALYSIS OF NON-HOMOGENOUS WEIBULL
DISTRIBUTED CLUTTER BASED ON
EXPECTATION MAXIMIZATION METHOD**

MUHAMMED HANŞEREF YAŞIN

DR. ÖĞRETİM ÜYESİ MÜCAHİT KANİ ÜNER
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır

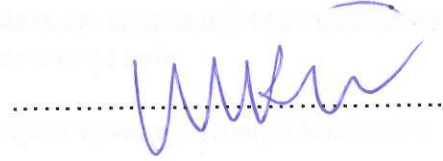
2018

MUHAMMED HANŞEREF YAŞIN'in hazırladığı "Tektür Olmayan Weibull Dağılımlı Çevresel Yansıma Ortamının Beklenti Enbüyütme Yöntemine Dayalı Analizi" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

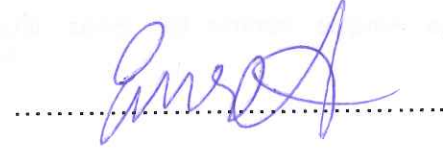
Prof. Dr. Tolga ÇILOĞLU
Başkan



Dr. Öğretim Üyesi Mücahit Kani ÜNER
Danışman



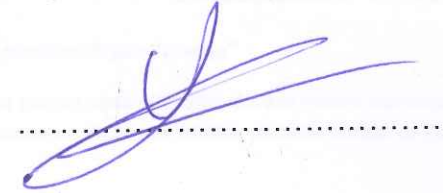
Prof. Dr. Emre AKTAŞ
Üye



Doç. Dr. Berkan DÜLEK
Üye



Doç. Dr. Umut SEZEN
Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin / raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “ Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge” kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. ⁽¹⁾
- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden Ay ertelenmiştir. ⁽²⁾
- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. ⁽³⁾

01 / 10 / 2018

(İmza)



Öğrencinin Adı SOYADI

Muhammed Haseef TAZİN

“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”

- (1) Madde 6. 1. Lisansüstü teze ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir
- (2) Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internette paylaşılması durumunda 3. Şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü ve fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.
- (3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.
Madde 7. 2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

* Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01.10/2018

MUHAMMED HANŞEREF YAŞIN

ÖZET

TEKTÜR OLMAYAN WEIBULL DAĞILIMLI ÇEVRESEL YANSIMA ORTAMININ BEKLENTİ ENBÜYÜLTME YÖNTEMİNE DAYALI ANALİZİ

Muhammed Hanşeref YAŞIN

Yüksek Lisans, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Mücahit Kani ÜNER

Eylül 2018, 137 sayfa

Bu tez çalışmasında yüksek çözünürlüklü sabit yanlış alarm oranlı (SYAO) radar sistemleri için tektür olmayan ortamlarda, Weibull dağılıma sahip çevresel yansımaya sinyallerinin dağılım parametrelerinin kestirilmesi ve tektür bölgelerin saptanması amacıyla Beklenti Enbüyültme yöntemi kullanılmış ve başarımı incelenmiştir. Ortamdaki dağılım sayısının, dağılım oranlarının, dağılımlarının ölçek ve şekil parametrelerinin bilinmediği varsayılmıştır. Beklenti Enbüyültme adımlarının Weibull ortama uygulanışında ortaya çıkan doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde parçacık sürü optimizasyonu (PSO) algoritması kullanılmıştır. Ortamdaki kargaşalı bölge sayısının, kargaşalı bölgelerin oranlarının, SYAO referans hücre sayısının, dağılımların şekil ve ölçek parametrelerinin başarımlar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Beklenti Enbüyültme, BE algoritması, sabit yanlış alarm oranlı sistemler, SYAO, Gaussian olmayan kargaşa, tektür olmayan kargaşa, Weibull dağılımı, Weibull kargaşa, iki seviyeli kargaşa, çok seviyeli kargaşa, en büyük olasılık, parametre kestirimi.

ABSTRACT

ANALYSIS OF NON-HOMOGENOUS WEIBULL DISTRIBUTED CLUTTER BASED ON EXPECTATION MAXIMIZATION METHOD

Muhammed Hanşeref YAŞIN

Master of Science, Department of Electrical and Electronics Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mücahit Kani ÜNER

September 2018, 137 pages

In this thesis study, for high resolution CFAR radar systems, Expectation-Maximization (EM) method was applied to range heterogeneous Weibull clutter to determine homogeneous regions and estimate the parameters of distributions. The number of distribution in range and their ratio, the scale and shape parameter of distributions was assumed to be unknown. Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm was used to solve the complex nonlinear equations in EM algorithm. The performance of EM algorithm in terms of, the number of clutter regions on the environment, the ratio of the regions, the number of CFAR reference cells, the value of shape and scale parameters of the distributions, were analysed.

Key Words: Expectation-Maximization, EM algorithm, constant false alarm ratio, CFAR, non-Gaussian clutter, non-homogeneous clutter, Weibull distribution, Weibull clutter, two level clutter, multi level clutter, maximum likelihood, parameter estimation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşumundan sonuçlanmasına kadar her aşamasında, ilgisini, sabrını, desteğini ve bilgisini esirgemeyen, tez danışmanım ve değerli hocam sayın Dr. Öğretim Üyesi Mücahit Kani ÜNER'e ve özverilerinden dolayı ailesine,

Değerli görüşlerini paylaşan sayın jüri üyelerine,

Tez çalışmam boyunca çok büyük sabır gösteren, sevgisini, yardımını, desteğini esirgemeyen, her koşulda yanımda olduğunu hissettiren meslektaşım ve sevgili eşim Ezgi KÜPÜOęLU YAŞIN'a

Bu uzun süreçte, gösterdikleri ilgi ve destekleri için değerli iř arkadaşlarıma,

En önemlisi hayatım boyunca attığım her adımda destekleriyle yanımda olan, en zor şartlarda bile her türlü fedakârlığı gösteren sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİLLER	vii
ÇİZELGELER.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1 GİRİŞ.....	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Sabit Yanlış Alarm Oranlı Sistemler	5
2.1.1 SYAO Eşik Değeri Hesaplanmasında Kullanılan Bazı Yöntemler	6
2.2 Weibull Dağılımı	8
2.3 Beklenti Enbüyültme (BE) Yöntemi.....	10
2.4 Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO)	13
3 TEMEL BEKLENTİ ENBÜYÜLTME	15
3.1 BE ile karışım yoğunluk parametrelerinin en büyük olabirliğini bulma.....	17
4 BE YÖNTEMİNİN İKİ SEVİYELİ WEIBULL ORTAMA UYGULANIŞI	22
4.1 Weibull dağılımı için BE adımlarının çıkarımları	23
4.1.1 Beklenti Adımı: Beklenti fonksiyonunun oluşturulması	23
4.1.2 Enbüyültme Adımı: Beklenti fonksiyonunu enbüyülten parametrelerin bulunması.....	25
5 BE YÖNTEMİNİN ÇOK SEVİYELİ WEIBULL ORTAMA UYGULANIŞI	32
6 BE YÖNTEMİNİN BAŞARIM ANALİZİ.....	34
6.1 Ortamın Ayırt Edilebilirliği ve Cramer Rao Alt Sınırı	34
6.2 BE Yönteminin İki Seviyeli Weibull Ortamlardaki Başarımı	41
6.2.1 Şekil parametresinin başarımlar üzerinde etkisi ($\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 = c$)...45	45

6.2.2	Ölçek parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\beta_1 = \beta_2, \alpha_1 \neq \alpha_2$)	53
6.2.3	Ölçek parametresinin başarımlar üzerinde etkisi ($\beta_1 \neq \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2 = c$) ..	57
6.2.4	Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$).....	62
6.2.5	SYAO referans hücre sayısının başarımlar üzerinde etkisi	65
6.2.6	İki seviyeli ortamın dağılım şeklinin başarımlar üzerinde etkisi	73
6.2.7	İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisi	79
6.2.8	Tektür ortamın tespiti.....	87
6.3	BE YÖNTEMİNİN ÇOK SEVİYELİ WEIBULL ORTAMDAKİ BAŞARIMI.....	91
6.3.1	Beş Seviyeli BE Algoritmasının 5 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı ..	92
6.3.2	Beş Seviyeli BE Algoritmasının 4 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı ..	96
6.3.3	Beş Seviyeli BE Algoritmasının 3 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı	100
6.3.4	Beş Seviyeli BE Algoritmasının 2 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı	108
6.3.5	Beş Seviyeli BE Algoritmasının Tektür Weibull Ortamdaki Başarımı.....	113
7	SONUÇ.....	117
	KAYNAKLAR.....	121
EK1.	FISHER BİLGİ MATRİSİNİN BULUNMASI	124
EK2.	PARAMETRE KESTİRİM HATA VARYANSLARININ BULUNMASI (FISHER BİLGİ MATRİSİNİN TERSİNİN HESAPLANMASI).....	134
EK3.	WEIBULL DAĞILIMININ BEKLENEN DEĞERİNİN VE VARYANSININ HESAPLANMASI	135
	ÖZGEÇMİŞ	137

ŞEKİLLER

Sayfa

Şekil 2.1 Farklı şekil parametreleri için Weibull dağılımının yoğunluk fonksiyonu ...8	8
Şekil 2.2 Şekil ve ölçek parametrelerinin güç üzerinde etkisi9	9
Şekil 2.3 Dağılım parametrelerinin kestirimi10	10
Şekil 2.4 Hücrelerin sınıflandırılması11	11
Şekil 2.5 Eksik veri durumu11	11
Şekil 2.6 Hücrelerin dağılımlardan gelme olasılıklarının hesaplanması.....11	11
Şekil 2.7 Dağılım parametrelerinin kestirimi12	12
Şekil 2.8 BE Algoritmasında adımların ilerlemesi12	12
Şekil 2.9 PSO algoritması.....14	14
Şekil 4.1 İki seviyeli tektür olmayan çevresel yansıma ortamı22	22
Şekil 6.1 Ortamdaki güç dağılımı.....42	42
Şekil 6.2 İki seviyeli ortamdaki alınmış örnek bir veri seti43	43
Şekil 6.3 Hücrelerden alınan örneklerin dağılımlardan gelme olasılıkları44	44
Şekil 6.4 BE yöntemiyle elde edilen ortamdaki dağılımlar45	45
Şekil 6.5 Şekil parametrelerinin $\beta_1 = \beta_2 = 3$ olma durumu46	46
Şekil 6.6 Şekil parametrelerinin 2 olma durumu47	47
Şekil 6.7 Şekil parametrelerinin 1,5 olma durumu48	48
Şekil 6.8 Şekil parametrelerinin 0,75 olma durumu49	49
Şekil 6.9 Şekil parametrelerinin 0,5 olma durumu50	50
Şekil 6.10 Varyansın şekil parametresine göre değişim grafiği51	51
Şekil 6.11 $\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$ için dağılımların yoğunluk fonksiyonları52	52
Şekil 6.12 Gücün şekil parametresine göre değişim grafiği52	52
Şekil 6.13 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 0,2 ve 8 olma durumu54	54
Şekil 6.14 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 0,5 ve 5 olma durumu55	55
Şekil 6.15 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 2,5 ve 3,5 olma durumu56	56
Şekil 6.16 Ölçek parametrelerinin 10 olma durumu58	58
Şekil 6.17 Ölçek parametrelerinin 5 olma durumu59	59
Şekil 6.18 Ölçek parametrelerinin 1 olma durumu60	60
Şekil 6.19 Gücün ölçek parametresine göre değişim grafiği61	61
Şekil 6.20 $\beta_1 = 0,75$ ve $\beta_2 = 2$ için dağılımların yoğunluk fonksiyonları62	62
Şekil 6.21 Şekil parametrelerinin 2,5 ve 0,5 olma durumu63	63

Şekil 6.22 Şekil parametrelerinin 1,8 ve 0,75 olma durumu.....	64
Şekil 6.23 SYAO Referans hücre sayısının 256 olması durumu	66
Şekil 6.24 SYAO referans hücre sayısının 128 olması durumu	67
Şekil 6.25 SYAO referans hücre sayısının 64 olması durumu.....	68
Şekil 6.26 SYAO hücre sayısının 32 olması durumu	69
Şekil 6.27 SYAO hücre sayısının 16 olması durumu	70
Şekil 6.28 Referans hücre sayısının verilerin ortamlardan gelme olasılıkları üzerindeki etkisi.....	72
Şekil 6.29 Dağılımlar arası geçiş sayısının 1 olduğu durum	74
Şekil 6.30 Dağılımlar arası geçiş sayısının 3 olduğu durum	75
Şekil 6.31 Dağılımlar arası geçiş sayısının 7 olduğu durum	76
Şekil 6.32 Dağılımlar arası geçiş sayısının 15 olduğu durum	77
Şekil 6.33 Ortamın %80'inin ikinci dağılımdan gelme durumu	80
Şekil 6.34 Ortamın %60'ının kargaşalı bölge olma durumu.....	81
Şekil 6.35 Ortamın %20'sinin kargaşalı bölge olma durumu	82
Şekil 6.36 Ortamın %10'unun kargaşalı bölge olma durumu	83
Şekil 6.37 Ortamın %2'sinin kargaşalı bölge olma durumu	84
Şekil 6.38 Ortamdaki bölgelerin 5 farklı bulunma oranı için verilerin ortamlardan gelme olasılığı grafikleri.....	86
Şekil 6.39 Weibull ölçek parametresi 3 ve şekil parametresi 1 olan tektür ortam ..	88
Şekil 6.40 Weibull ölçek parametresi 10 ve şekil parametresi 1 olan tektür ortam	89
Şekil 6.41 Beş seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum	93
Şekil 6.42 Beş seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum	94
Şekil 6.43 Dört seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum	97
Şekil 6.44 Dört seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum	98
Şekil 6.45 Üç seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum.....	101
Şekil 6.46 Üç seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum	102
Şekil 6.47 Üç seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum.....	105
Şekil 6.48 Üç seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum	106

Şekil 6.49 İki seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum.....	109
Şekil 6.50 İki seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum	110
Şekil 6.51 Seviyesi tespit edilen ortamın parametre kestirimi için yeniden çalıştırılması	112
Şekil 6.52 Tektür ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum.....	114
Şekil 6.53 Tektür ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum.....	115

ÇİZELGELER

Sayfa

Tablo 6.1 Örnek çalışma için incelenen durum.....	41
Tablo 6.2 Şekil parametresinin etkisini incelemek için bakılan durumlar	45
Tablo 6.3 Şekil parametresinin (β) kestirim başarımı üzerindeki etkisi.....	51
Tablo 6.4 Ölçek parametrelerinin uzaklıklarının etkisini incelemek için bakılan durumlar	53
Tablo 6.5 Ölçek parametresinin uzaklıklarının etkisi	57
Tablo 6.6 Ölçek parametrelerinin etkisini incelemek için bakılan durumlar	57
Tablo 6.7 Ölçek parametresinin (α) kestirim başarımı üzerindeki etkisi	61
Tablo 6.8 Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisini incelemek için bakılan durumlar	62
Tablo 6.9 Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisi.....	65
Tablo 6.10 SYAO referans hücre sayısının etkisini incelemek için incelenen durumlar	65
Tablo 6.11 SYAO referans hücre sayısının etkisini incelemek üzere bakılan durumlar	71
Tablo 6.12 Dağılım şeklinin etkisini incelemek için bakılan durumlar	73
Tablo 6.13 Ortamdaki bölgelerin dağılım şeklinin etkisi.....	78
Tablo 6.14 İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisini incelemek için bakılan durumlar	79
Tablo 6.15 İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisini incelemek için bakılan durumların sonuçları.....	85
Tablo 6.16 Tektür ortam tespiti için incelenen durumlar	87
Tablo 6.17 Tektür ortam tespiti sonuçları	90
Tablo 6.18 5 Seviyeli BE algoritması için başlangıç değerleri	92
Tablo 6.19 Şekil parametresi biliniyor kabul edilen durumlar için BE algoritmasının başlangıç değerleri	92
Tablo 6.20 Parametrelerin 5 seviyeli ortamdaki değerleri.....	92
Tablo 6.21 Beş seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu	95
Tablo 6.22 Beş seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu	95
Tablo 6.23 Parametrelerin 4 seviyeli ortamdaki değerleri.....	96
Tablo 6.24 Dört seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu.....	99

Tablo 6.25 Dört seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu.....	99
Tablo 6.26 Parametrelerin 3 seviyeli ortamdaki değerleri.....	100
Tablo 6.27 Üç seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu.....	103
Tablo 6.28 Üç seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu.....	103
Tablo 6.29 Farklı parametrelerle 3 seviyeli ortamın yeniden analizi.....	104
Tablo 6.30 Üç seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu.....	107
Tablo 6.31 Üç seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu.....	107
Tablo 6.32 Parametrelerin 2 seviyeli ortamdaki değerleri.....	108
Tablo 6.33 İki seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu.....	111
Tablo 6.34 İki seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu.....	111
Tablo 6.35 İki seviyeli ortamda 5 ve 2 seviyeli BE algoritma sonuçları.....	113
Tablo 6.36 Parametrelerin 1 seviyeli ortamdaki değerleri.....	113
Tablo 6.37 Tektür ortamda 1. yöntem sonucu.....	116
Tablo 6.38 Tektür ortamda 2. yöntem sonucu.....	116

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

α	Ölçek Parametresi
β	Şekil Parametresi
Θ	Kestirimi Yapılacak Parametreler
w	Weibull Dağılımı
E	Beklenen Değer Fonksiyonu

Kısaltmalar

BE	Beklenti Enbüyültme
SYAO	Sabit Yanlış Alarm Oranı
GEB	Genelleştirilmiş Beklenti Enbüyültme
PSO	Parçacık Sürü Optimizasyonu

1 GİRİŞ

Radar (Radio Detection and Ranging); gemi, uçak, dron, insan gibi herhangi bir hedefi sezimlemede kullanılan bir yöntemdir. Radarın temel işlevi uzaya sinyal yollayarak, hedef veya herhangi bir nesneden yansıyan sinyallerin radar alıcı anteni doğrultusunda algılamak ve sezimlemektir. Ancak radara geri dönen sinyaller sadece ilgilenilen hedeflerden yansımamakta aynı zamanda ortamdaki pek çok yüzey ve nesneden de yansımaktadır.

Herhangi bir radar alıcısı için istenmeyen tüm yansımalara çevresel yansıma denmektedir. Kullanılan frekans, çözünürlük, radarın gördüğü alan, radarın açısı gibi birçok parametre çevresel yansımayı etkilemektedir. Ortamın ve hedeflenen nesnenin istatistiksel olarak doğru bir şekilde modellenmesi radar uygulamalarında büyük önem taşımaktadır. Radar tasarımlarında başlangıçta ortama ve gürültüye ait genlik dağılımlarını matematiksel hesaplamalarda kolaylık sağladığı için Rayleigh olarak kabul edilmiştir. Radar sinyalinin dalga boyu, yansımaların gerçekleştiği nesnelerin boyutundan büyükse, yansıyan sinyallerin genlik dağılımı Rayleigh dağılımı olmaktadır.

Yüksek çözünürlüklü radarlarda ve radarın aydınlattığı yüzeyin dar olması durumunda, kargaşaların genlik dağılımları büyük ölçekte Rayleigh'den sapmaktadır. Weibull, Log-normal ve K dağılımları Rayleigh olmayan kargaşa genlik dağılımlarını modellemek için kabul görmüş dağılımlardır [1], [2]. Bu dağılımlar şekil parametrelerinin değiştirilmesiyle farklı ortamları tanımlayabilmektedirler. Özel bir durum olarak Rayleigh dağılımı, Weibull dağılımının şekil parametresinin 2 seçilmiş formuna denk gelmektedir. Ayrıca Weibull dağılımı birçok durumda çok sayıda kargaşa tipini kapsadığı [3], [4] için bu çalışmada kargaşaların genlik dağılımları Weibull olarak seçilmiştir.

Geleneksel radar işlemcileri, ortamın çevresel yansımalarına ait genlik dağılımının parametreleri ile birlikte bilindiği kabulüyle tasarlanarak sabit bir eşik değeri ile çalışırlar. Ancak ortamın bilinmediği veya değiştiği durumlarda geleneksel radar işlemcilerinin başarımı ciddi oranda düşmektedir. Bu tür durumlar için Sabit Yanlış Alarm Oranlı (SYAO) sezimleme tekniği 1968'de Finn ve Johnson tarafından önerilmiştir [5].

Radar seziminde, kargaşa bastırımı ve Doppler işlemlerinden sonra sinyaller karesel algılayıcıdan geçirilirler. Yanlış alarm oranını sabitlemek amacıyla algılayıcıdan geçirilmiş sinyallere evre uyumsuz SYAO sezimleme tekniği uygulanmaktadır.

Birçok sezim yöntemi yüksek çözünürlüklü radar kargaşalarının keskin doğasını modellemede yetersiz olan Rayleigh kargaşaları için tasarlanmıştır. Sezim yöntemlerinin başarımını etkileyen bir başka sorun ise denizden karaya veya seyrek yapraklı ormanlık alandan sık yapraklı ormanlık alana geçiş gibi ortamdaki kargaşanın özelliklerinin değişebilmesidir. Bu durumlar tektür kargaşalı ortamlar için tasarlanmış geleneksel SYAO işlemcileri için sorun teşkil etmektedirler. Ortam geçişlerinde çok fazla yanlış alarm veya hedef maskeleye görülebilir. Gauss olmayan ortamlar için tasarlanmış SYAO işlemcileri bile ortam geçişlerinde yeterince başarılı olamamaktadır.

Daha önce birçok Gauss olmayan Weibull kargaşalar [1], [6], [7] ve tektür olmayan ortamlı Rayleigh kargaşalar [8]–[11] için birçok hedef sezici önerilmiştir. Fakat ikisi birden çok az çalışmada [12], [13] ele alınmıştır. Log-t seziciye dayanan tektür olmayan Weibull kargaşa algoritması [12]'de önerilmiştir. Burada sezici, ortamdaki bölgelerin değişim noktasını kestirerek, eşik değerini hesaplar. [13]'de ise en iyi yansız kestiriciler ile parametreleri kestiren sansür algoritması tasarlanmıştır.

Streit ve Willet beklenti enbüyültme yöntemi ile üssel dağılıma sahip ortamlarda süreksiz sinyal kestirimi gerçekleştirmişlerdir [14]. Daha sonra Chen et al. bu yöntem ile SYAO analizi gerçekleştirmiştir [11]. Bu çalışmalar üssel dağılım kullanılarak yapılmıştır. Doyuran [15], beklenti enbüyültme yöntemini Weibull ortama uyarlamıştır. Ancak çalışmadaki başarım analizinde ortamın şekil parametrelerinin önceden bilindiği varsayılmıştır.

Bu tez çalışmasında beklenti enbüyültme yönteminin yüksek çözünürlüklü kargaşa sinyallerini kapsayan tektür olmayan Weibull ortama uyarlanması ele alınmıştır. Tektür olmayan ortam, farklı Weibull ölçek ve/veya şekil parametrelerine sahip bölgeler olarak modellenmiştir. Bu çalışmada ortamdaki dağılımlara ait ölçek ve şekil parametrelerinin ikisinin de bilinmediği varsayılmıştır. Benzer çalışmalarda olduğu gibi ısı gürültünün etkisi ihmal edilmiştir. Burada veri setinin bir ya da birden fazla dağılıma sahip örnekler içerdiği varsayılmıştır. Bu çalışmadaki amaç

her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiğini tespit etmek ve ortamdaki dağılımları belirleyerek kendi içerisinde tektür olan bölgeleri saptamaktır.

Yapılan çalışmalarda, Weibull dağılıma sahip iki seviyeli ve çok seviyeli ortamlarda beklenti enbüyültme yöntemi ile ortamın kargaşa haritası çıkarılmış ve ortam parametreleri kestirilmiştir.

Bölüm 2’de SYAO (Sabit Yanlış Alarm Oranlı) sistemler, Weibull dağılımı, Beklenti Enbüyültme Yöntemi ve Parçacık Sürü Optimizasyonu gibi tez çalışmasında kullanılan kavramlar anlatılmıştır.

Bölüm 3’te Beklenti Enbüyültme yöntemi kavramı analitik yöntemler ile anlatılmıştır.

Bölüm 4’te Beklenti Enbüyültme yönteminin iki seviyeli Weibull ortama uygulanışı analitik olarak anlatılmıştır. Burada iki seviyeli Weibull ortam için Beklenti ve Enbüyültme adımlarının analitik çıkarımı yapılmıştır.

Bölüm 5’te Beklenti Enbüyültme yönteminin çok seviyeli Weibull ortama uygulanışı analitik olarak anlatılmıştır. Burada çok seviyeli Weibull ortam için Beklenti ve Enbüyültme adımlarının analitik çıkarımı yapılmıştır.

Bölüm 6’da Beklenti Enbüyültme yönteminin başarımı detaylı incelenmiştir. 6.1’de Ortamın ayırt edilebilirliği ile Cramer-Rao alt sınırı ilişkisi anlatılmıştır. Burada Weibull dağılımının ölçek ve şekil parametreleri için Fisher bilgi matrisi kullanılarak Cramer-Rao alt sınırları hesaplanmıştır.

6.2’de iki seviyeli ortamlar için geliştirilmiş Beklenti Enbüyültme algoritmasının başarımı incelenmiştir. Şekil ve ölçek parametrelerinin, SYAO referans hücre sayısının, iki seviyeli ortamın dağılım şeklinin, iki seviyeli ortamın dağılım oranının başarım üzerine etkileri incelenmiştir.

6.3’te çok seviyeli ortamlar için geliştirilmiş 5 seviyeli Beklenti Enbüyültme algoritmasının başarımı incelenmiştir. 5 seviyeli Beklenti Enbüyültme algoritmasının 5 seviyeli, 4 seviyeli, 3 seviyeli, 2 seviyeli ve 1 seviyeli (tektür) Weibull ortamlardaki başarımı incelenmiştir. Çok seviyeli ortamlarda çalışılırken ortamdaki dağılım sayısının, dağılım oranlarının, dağılımlarının ölçek ve şekil parametrelerinin bilinmediği varsayılmıştır. BE algoritmasının çok seviyeli ortamlardaki başarımında parametre kestirimi yönünden iki farklı yöntem

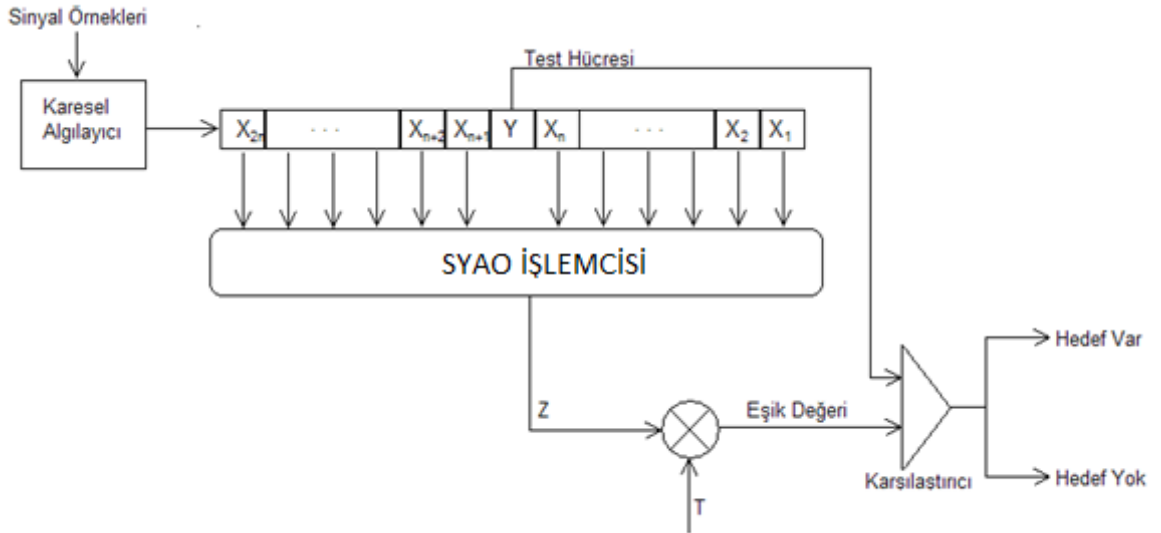
kullanılmış ve bu yöntemlerin sonuçları birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Bunlardan ilki şekil parametresi dahil tüm parametrelerin kestirilerek ortam seviyesini hesaplayan yöntemdir. İkincisi ise önceden belirlenmiş şekil parametreleri ile ortamın diğer parametrelerini kestirerek [16] ortam seviyesini hesaplayan yöntemdir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde SYAO (Sabit Yanlış Alarm Oranlı) sistemler, Weibull dağılımı, Beklenti Enbüyültme yöntemi ve Parçacık Sürü Optimizasyonu gibi tez çalışmasında kullanılan kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1 Sabit Yanlış Alarm Oranlı Sistemler

Radar hedeflerinden dönen sinyaller genellikle ısı gürültü ve çevresel yansımanın içinde gömülü olurlar. Bu durum hedefin sezimlenmesinde önemli bir problem yaratır. Ortamdaki gürültü ve çevresel yansımanın gücü bilinemeyeceğinden dolayı, hücrelenmiş radar sinyallerine sabit eşik seviyesi ile sezimleme yöntemi uygulanamaz. Uyarlanabilir eşik seviyesini temel alan ve yanlış alarm oranını sabitleyen Sabit Yanlış Alarm Oranlı (Constant False Alarm Ratio) eşikleme yöntemi bu ısı gürültü ve çevresel yansımaların yarattığı sorunlar karşısında başarılı olmuştur [17]. SYAO, eşik değerini, ortamdaki toplam gürültü gücüne göre anlık olarak belirler. SYAO işlemcisi incelenen alanı hücrelere bölerek tarar. Hedef aranan hücreye test hücresi, diğer hücrelere ise referans hücreler denilmektedir. İncelenecek olan hücre (test hücresi) için eşik değeri, test hücresinin etrafında bulunan referans hücrelerinde bulunan termal gürültü / çevresel yansıma seviyesine göre hesaplanır.



Şekil 1 SYAO İşlemcisi

2.1.1 SYAO Eşik Değeri Hesaplanmasında Kullanılan Bazı Yöntemler

2.1.1.1 Hücre Ortalama SYAO

Hücre Ortalama SYAO (HO-SYAO) eşik değeri belirlenirken N adet referans hücrenin gürültülerin ortalaması alınır. Hücre Ortalama SYAO yöntemi, tektür ortamlarda referans hücrelerin bağımsız ve özdeş dağıtılmış (IID) üstel dağılımdan (Gauss dağılımlı ortam) gelen durumlarda en iyi sonucu verir ve referans hücrelerin sayısı arttıkça sezim olasılığı da artar.

Çevresel yansıma ortamına geçiş alanı ve birden fazla hedef olma durumları Hücre Ortalama SYAO eşik değeri yönteminde dikkat edilmesi gereken en önemli problemlerdir. İlk sorun bir tek hücredeki toplam gürültü gücü ani değişim yaşadığı durumlarda görülür. Bu tür çevresel yansıma uçlarında test edilen hücrenin çevresel yansımali alanda olup olmamasına göre ciddi yanlış alarmlar veya hedef maskelenmesi durumlarıyla karşılaşılır. İkinci sorun ise iki ya da daha fazla hedefin birbirine yakın bir şekilde menzile yerleştirilmiş durumlarda karşılaşılır. Referans hücrelerde kalmış olan hedefler test hücresindeki hedef için hesaplanan eşik değerini artırırlar ve sezim olasılığının düşmesi (hedef maskelenmesi) durumu oluşur.

HO-SYAO eşik değeri yönteminde ortamın tektür olması varsayımı geçerli olmadığı zaman işlemci performansı dramatik bir şekilde azalır. Çoklu hedef içeren durumlarda eşik değeri yüksek bulunarak incelenen hücredeki hedefin maskelenmesine neden olurlar. Çevresel yansımali ortamlarda da tektür olmayan dağılımın pozisyonuna göre eşik değeri yanlış alarm olasılığının artmasına veya sezim olasılığının azalmasına neden olur.

2.1.1.2 En Büyük SYAO

Çevresel yansımali ortama geçiş sırasındaki yanlış alarm oranını düzenlemek için Hansen [18] tarafından En Büyük SYAO (EB-SYAO) yaklaşımı ortaya atılmıştır. Bu yaklaşıma göre test hücresinin öncesindeki referans hücreler ile sonrasındaki referans hücreler kendi aralarında toplanır ve çıkan iki sonucun büyük olanı eşik değeri olarak seçilir. Bu yöntemin en kötü durum senaryosu test hücresinden önceki hücrelerin temiz bölgeden yansıyan radar sinyallerinden geldiği ve sonrasındaki hücrelerin ise yüksek çevresel yansımali bölgeden yansıyan radar sinyallerinden geldiği durumda gerçekleşir. Bu durumda eşik değeri yüksek

çevresel yansımali bölgeden gelen radar sinyaline göre olacağından hedef kaçırılabilir. EB-SYAO birbirine yakın halde bulunan çoklu hedeflerin bulunduğu ortamlarda da başarısızlık gösterir.

2.1.1.3 En Küçük SYAO

Birbirine yakın halde bulunan çoklu hedeflerin bastırılmasını önlemek amacıyla Trunk [19] tarafından En Küçük SYAO (EK-SYAO) yaklaşımı yayınlanmıştır. Bu yaklaşıma göre test hücresinin öncesindeki referans hücreler ile sonrasındaki referans hücreler kendi aralarında toplanır ve çıkan iki sonucun küçük olanı eşik değeri olarak seçilir. EK-SYAO'nun tektür ortamlardaki sezim başarısı düşse de birbirine yakın halde bulunan iki hedefin tespit edilmesi sorununu çözmektedir. Fakat hedefler hem önceki hem de sonraki hücrelerde bulunuyorsa bu hedefler eşik değerini yukarı çekeceğinden EK-SYAO başarısı önemli ölçüde düşmektedir.

2.1.1.4 Sıralı İstatistik SYAO

Sİ-SYAO işlemcisi N tane referans hücreden en yüksek değerli k'nıncı hücreyi seçerek gürültü gücünü kestirir. Birbirine yakın halde bulunan hedeflerin olduğu tektür ve üstel dağılıma sahip gürültülü ortamlarda sezim başarımında çok az bozulmalar görülür. Ancak çevresel yansıma seviyelerin değiştiği noktalarda eğer k değeri en yüksek değere yakın seçilmezse işlemci yanlış alarm oranını koruyamamaktadır. k'nın en yüksek değere çok yakın seçilmesi durumunda da işlemcinin sezim performansı düşer.

2.1.1.5 Ayıklanmış Ortalama SYAO

Ayıklanmış Ortalama (AO) SYAO işlemcisinde sıralanmış hücre değerlerinin hem üst hem de alt taraftan bir kısmını hesaba katmayarak kalan ayıklanmış değerler işlenir. Eşik değeri seçilirken geriye kalan hücrelerin ortalaması kullanılır. Çevresel yansıma seviyelerin değiştiği noktalarda işlemci yanlış alarm oranı artmaktadır.

2.2 Weibull Dağılımı

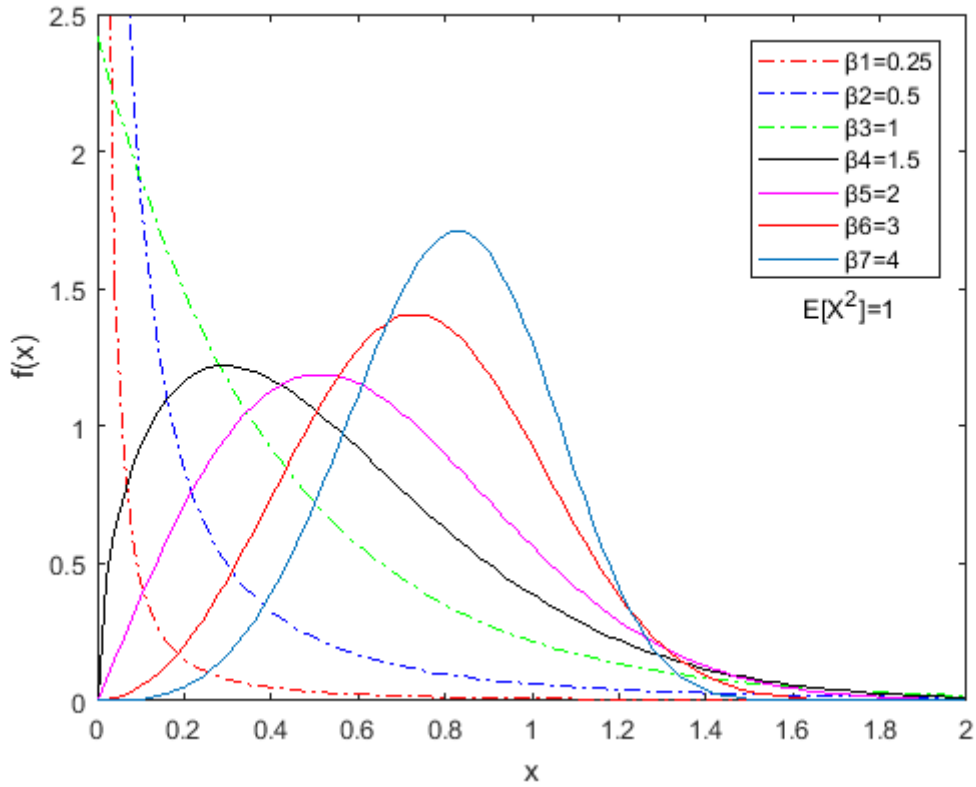
Bilindiği üzere, değişkenin belli aralıkta herhangi bir değer alabildiği rasgele olayları tanımlamak için rasgele değişkenler kullanılmaktadır. Weibull dağılımı da bu anlamda sürekli aynı zamanda esnek bir dağılımdır ve birçok uygulamada teorik olarak uygun çözümler sağlar. Değişik parametre değerleri kullanılarak Rayleigh dağılımı, üstel dağılım gibi popüler diğer istatistiksel dağılımların davranışlarını Weibull dağılımı kullanarak aynen taklit etme imkanı bulunmaktadır.

İki parametrelili Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun genel ifadesi;

$$f(x; \beta, \alpha) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, x \geq 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada $\alpha > 0$ ölçek (scale) parametresi ve $\beta > 0$ şekil (shape) parametresidir.

Bu çalışmada radara dönen çevresel yansıma sinyallerinin olasılık dağılımları Weibull dağılımı olarak varsayılacaktır.



Şekil 2.1 Farklı şekil parametreleri için Weibull dağılımının yoğunluk fonksiyonu

Weibull dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıda verilmiştir. Beklenen değer ve varyansın hesaplanması ek bölümde (EK3) sunulmuştur.

$$E[X] = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.2)$$

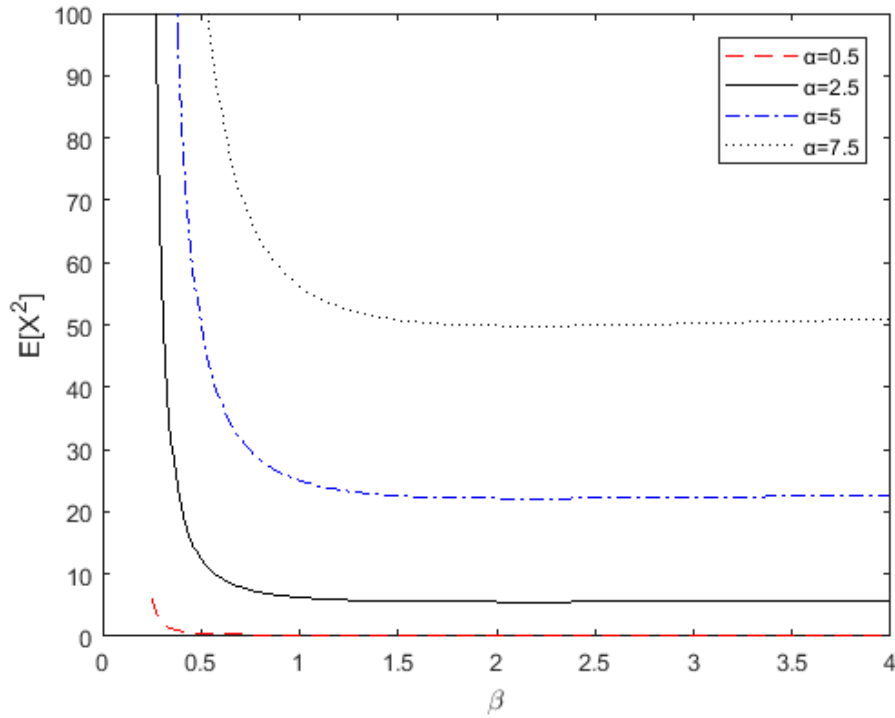
$$Var(X) = \alpha^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right) \quad (2.3)$$

Burada $\Gamma()$, Gama fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \text{ pozitif kompleks sayı} \quad (2.4)$$

Weibull dağılımının gücü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= Var(X) + (E[X])^2 \\ &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$



Şekil 2.2 Şekil ve ölçek parametrelerinin güç üzerinde etkisi

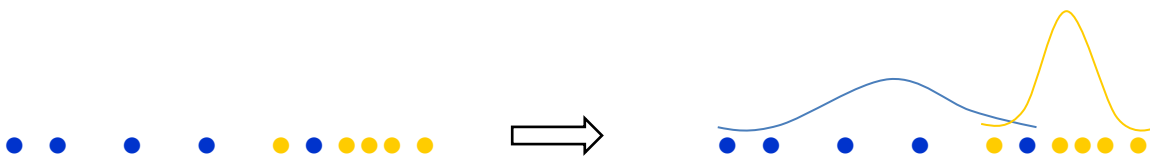
2.3 Beklenti Enbüyültme (BE) Yöntemi

Beklenti Enbüyültme yöntemi Arthur Dempster, Nan Laird ve Donald Rubin tarafından 1977 yılında ortaya atılmıştır [20]. BE algoritması, denklemlerin doğrudan çözülmediği durumlarda istatistiksel modelin en büyük olabilirlik parametre kestirim değerlerini bulmak için kullanılır. Genellikle bu modeller, bilinmeyen parametrelere ve bilinen veri gözlemlerine ek olarak saklı değişkenler içerir. Saklı değişken ya da gözlemlenmemiş veri varsayımlarıyla en büyük olabilirlik fonksiyonu daha basit bir şekilde formüle edilebilir [21].

En büyük olabilirliğin bulunması, olabilirlik fonksiyonunun tüm bilinmeyen parametrelere ve saklı değişkenlere göre türevlerini almayı ve eşzamanlı olarak ortaya çıkan denklemleri çözmeyi gerektirir. Saklı değişkenlere sahip istatistiksel modellerde, bu genellikle imkansızdır. Bunun yerine, parametrelerin saklı değişkene bağlı olduğu ve saklı değişkenin de parametrelere bağlı olduğu denklemler dizisi kullanılarak problem çözülmeye çalışılır. BE algoritması, bu iki denklem dizisini sayısal olarak çözmenin bir yolu olduğu gözlemden yola çıkmaktadır. İki bilinmeyen kümeden biri için keyfi değerler seçilerek, bunlar ikinci seti tahmin etmek için kullanılır. Daha sonra ilk kümenin daha iyi bir tahminini bulmak için bulunan ikinci setin değerleri kullanılır. İkisi arasında dönüşümlü olarak ortaya çıkan değerler belli bir noktaya yakınsayana kadar devam edilir.

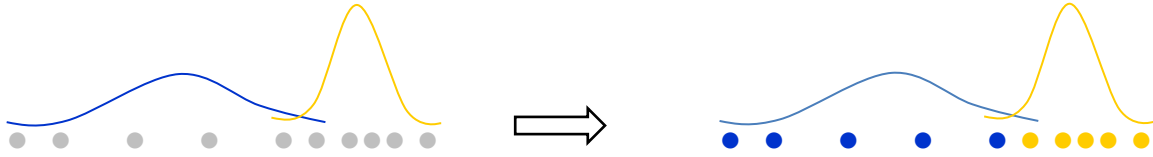
İki farklı dağılımdan oluşan bir boyutlu ortamdan N adet veri alınmış olsun. Ortamın istatistiksel modelinin bilindiği ya da belirli bir model seçildiği varsayılmaktadır.

Eğer her bir verinin hangi dağılımdan geldiği biliniyorsa, her bir dağılıma ait veriler kullanılarak dağılımın parametreleri Şekil 2.3'teki gibi kestirilebilir.



Şekil 2.3 Dağılım parametrelerinin kestirimi

Eğer her iki dağılımın parametreleri biliniyorsa, her bir verinin yüksek olasılıkla hangi dağılımdan geldiği Şekil 2.4'teki gibi hesaplanabilir.



Şekil 2.4 Hücrelerin sınıflandırılması

Ancak ne dağılımların parametrelerinin ne de her bir verinin hangi dağılımdan geldiği bilgisinin bilinmemesi durumunda problem oluşmaktadır (Şekil 2.5).

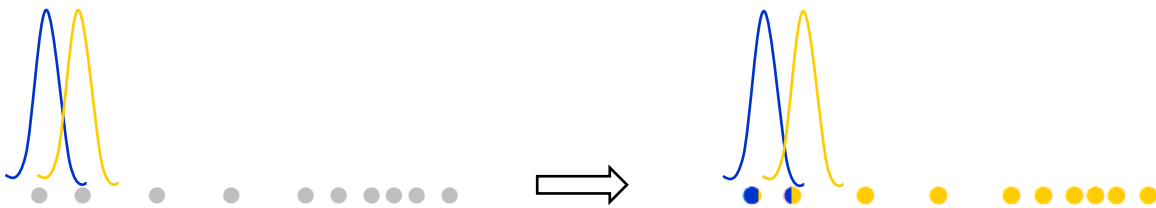


Şekil 2.5 Eksik veri durumu

Bu problemde bilinmeyen parametreler ile birlikte saklı değişken bulunmaktadır. Problemdaki saklı değişken, her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiği bilgisi olarak tanımlanabilir. Dağılımlara ait parametrelerin hesaplanabilmesi için her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiği (saklı değişken) bilgisine ihtiyaç duyulurken, saklı değişken olan hücrelerin hangi dağılımdan geldiği bilgisinin hesaplanabilmesi için de dağılımların parametrelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Beklenti Enbüyültme yöntemi bu probleme uygulanabilir.

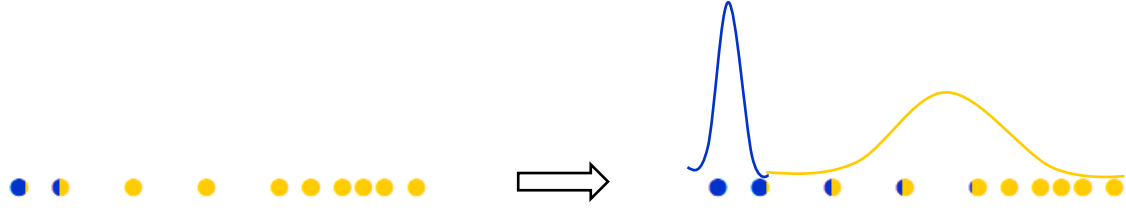
Birbirlerine bağlı denklemler iteratif bir şekilde çözümlenerek değerlerin belli bir noktaya yakınsaması amaçlanmaktadır. Birbirine bağlı denklemleri çözmek için bir başlangıç noktasına ihtiyaç duyulmaktadır. Başlangıç değerleri parametreler için seçilebileceği gibi her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiği bilgisi için de seçilebilir. Bu örnekte başlangıç değerleri parametreler için seçilmiştir. BE yönteminin düzgün çalışabilmesi için başlangıç değerlerinin birbiri ile aynı olmaması gerekmektedir [22].

Şekil 2.6'da parametreler için başlangıç değerleri kullanılarak her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiği bilgisinin hesaplanmış sonucu gösterilmiştir.



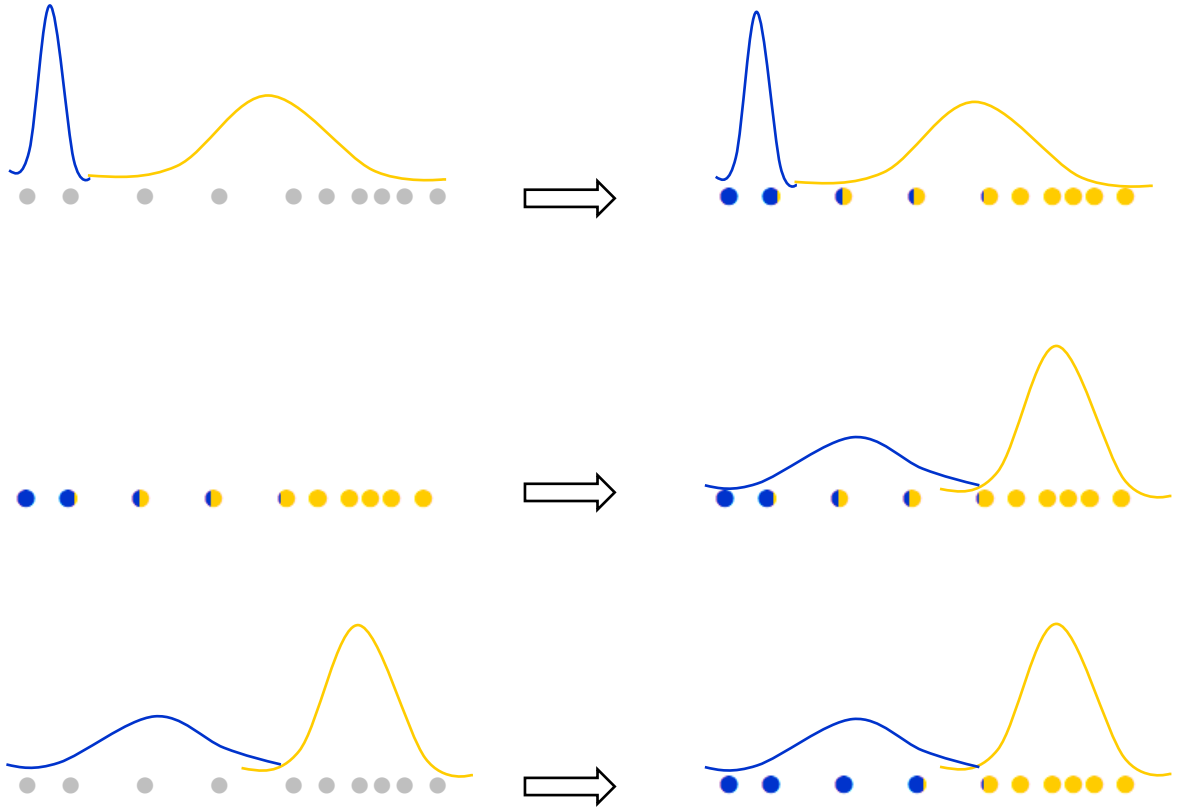
Şekil 2.6 Hücrelerin dağılımlardan gelme olasılıklarının hesaplanması

Şekil 2.7’de gösterildiği gibi bir önceki adımda bulunan, her bir hücrenin hangi dağılımdan geldiği bilgisi kullanılarak dağılımların parametreleri kestirilir.



Şekil 2.7 Dağılım parametrelerinin kestirimi

Bu ardaşık adımlar da bulunan değerlerin değişimi belli bir miktarın altına ininceye kadar tekrar edilir (Şekil 2.8-).



Şekil 2.8 BE Algoritmasında adımların ilerlemesi

Sonuç olarak BE yöntemiyle ne dağılımların parametreleri ne de her bir verinin hangi dağılımdan geldiği bilgileri olmadan sadece veri seti ile hem dağılımların parametreleri kestirilmiş hem de her bir verinin hangi dağılımdan geldiği bilgisi hesaplanmıştır.

2.4 Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO)

Parçacık sürü optimizasyonu (PSO), 1995 yılında Dr. Eberhart ve Dr. Kennedy tarafından geliştirilen [23], kuş ve balık sürülerinin sosyal davranışlarından esinlenen popülasyon bazlı stokastik (rasgele) optimizasyon yöntemidir.

PSO algoritmasının temeli, parçacık olarak adlandırılan aday çözümlerin sürü olarak adlandırılan bir popülasyona sahip olmasına dayanmaktadır. Parçacıklar birkaç basit formüle göre arama alanında dolaşmaktadırlar [24]. Parçacıkların hareketleri, arama alanındaki bilinen en iyi pozisyona ve tüm sürünün bilinen en iyi pozisyonuna göre yönlendirilir. Sonuç olarak uzaydaki en iyi (en azından lokal) noktanın bulunması beklenmektedir. Ancak bunun garantisi yoktur.

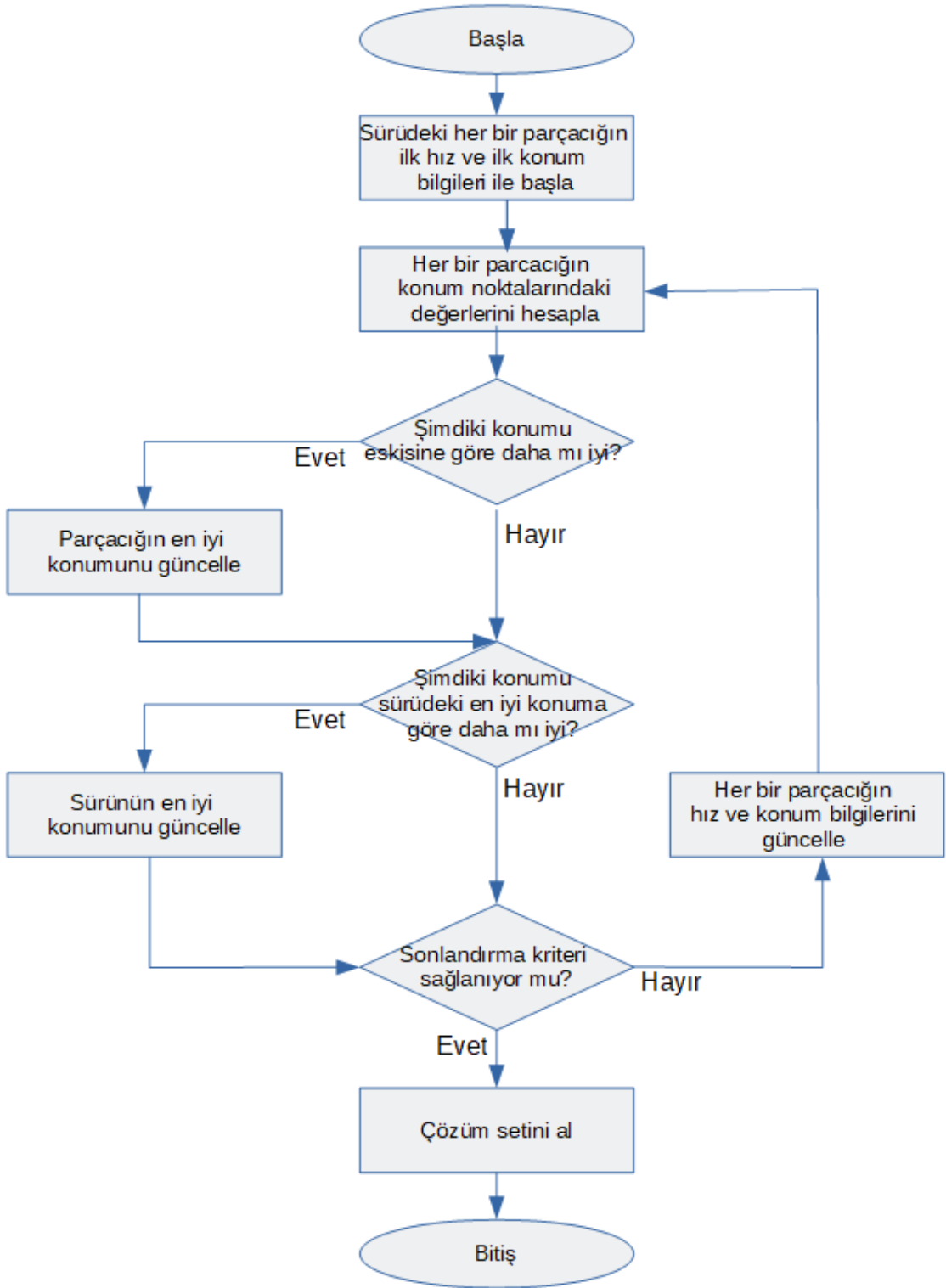
PSO algoritmasının hız (2.6) ve konum (2.7) eşitlikleri aşağıdaki gibidir.

$$v_i^{(k+1)} = c_1 v_i^{(k)} + c_2 r_1 (p_i^{(k)} - x_i^{(k)}) + c_3 r_2 (g_i^{(k)} - x_i^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

(2.6)'daki ilk terim eylemsizlik hareketini, ikinci terim bilişsel hareketi ve son terim sosyal hareketi ifade eder. Denklemdaki $x_i^{(k)}$ ve $v_i^{(k)}$, sürüdeki i 'ninci parçacığın k 'ninci adımdaki konum ve hız değerleridir. $x_i^{(k+1)}$ ve $v_i^{(k+1)}$, sürüdeki i 'ninci parçacığın bir sonraki adımdaki konum ve hız değerleridir. $p_i^{(k)}$, sürüdeki i 'ninci parçacığın k 'ninci adıma kadarki kendisine ait en iyi konum değeridir. $g_i^{(k)}$, sürüdeki i 'ninci parçacığın k 'ninci adıma kadarki sürüye ait en iyi konum bilgisidir. r_1 ve r_2 değerleri 0 ile 1 arasında rasgele sayılardır. c_1 , c_2 ve c_3 önceden belirlenmiş katsayılardır. Bu çalışmada $c_1 = 1$, $c_2 = 1,5$ ve $c_3 = 2,5$ olarak kullanılmıştır.

PSO algoritmasının temel çalışma prensibi Şekil 2.9'de gösterilmiştir.



Şekil 2.9 PSO algoritması

3 TEMEL BEKLENTİ ENBÜYÜLTME

Beklenti Enbüyültme (Expectation-Maximization) algoritması son yıllarda sıklıkla kullanılan popüler bir tekniktir [20], [25]–[29]. Beklenti Enbüyültme (BE) algoritması verilen bir bilgi kümesinde tamamlanmamış veri ya da kayıp değerler varken esas dağılımın parametrelerinin en yüksek olabilirlik kestiriminin bulunmasında kullanılan genel bir yöntemdir.

BE algoritması için iki ana uygulama alanı vardır. Birincisi, gözlemeleme işlemindeki sorunlar ya da kısıtlamalar nedeniyle elde edilen veride kayıp değerler var iken olan durumdur. İkincisi ise olabilirlik fonksiyonunun optimizasyonu analitik olarak takip edilemezken bazı parametrelerin var olduğu varsayımı ile olabilirlik fonksiyonunun basitleştirilebileceği durumdur.

Varsayalım ki \mathbf{x} gözlemlenmiş veri setidir ($\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$) ve bazı dağılımlardan oluşmuştur. \mathbf{x} 'e tamamlanmamış veri diyelim. Bir de tam veri kümesi $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ var olduğunu varsayalım. Bu verilerin ortak yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$p(\mathbf{z}|\Theta) = p(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\Theta) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \Theta) p(\mathbf{x}|\Theta) \quad (3.1)$$

Θ ise dağılımların parametrelerini ifade etmektedir. Bu ortak yoğunluk fonksiyonu, marjinal yoğunluk fonksiyonu $p(\mathbf{x}|\Theta)$ ile saklı değişken (\mathbf{y}) ve parametrelerin tahmininin varsayımından doğmuştur.

Bu yeni yoğunluk fonksiyonu ile birlikte yeni bir olabilirlik fonksiyonu tanımlayabiliriz. $L(\Theta|\mathbf{z}) = L(\Theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\Theta)$ bu fonksiyona tüm veri olabilirliği diyebiliriz. Kayıp bilgi (saklı değişken) \mathbf{y} bilinmediğinden ve rastgele bir şekilde esas dağılımdan geldiğinden dolayı tüm veri olabilirliği aslında bir rasgele değişkendir. \mathbf{x} ve Θ 'yı sabit olarak düşünüp $L(\Theta|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunu \mathbf{y} 'nin bir fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Asıl olabilirlik $L(\Theta|\mathbf{x})$ ise tamamlanmamış verinin olabilirlik fonksiyonudur.

BE algoritması ilk olarak tam verinin olabilirlik logaritmasının, $\log p(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\Theta)$, beklenen değerini, bilinmeyen \mathbf{y} verisi, verilen gözlemlenen \mathbf{x} verisi ve parametre kestirimlerine göre bulur.

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\log(p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})) | \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}] \quad (3.2)$$

Buradaki $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ şimdiki kestirilmiş parametreleri temsil eder. Şimdiki kestirilmiş parametreler, beklenen değeri ve bir sonraki adımda parametrelerin bulunmasında kullanılan Q değerini bulmada kullanılır.

Yukardaki ifadede \mathbf{x} ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sabit iken $\boldsymbol{\theta}$ ayarlamak istediğimiz bir değişkendir. \mathbf{y} ise $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ dağılımı tarafından yönetilen bir rastgele değişkendir. Bu bilgilere göre (3.2) denkleminde eşitliğin sağ tarafı yeniden yazılır:

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \log p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) d\mathbf{y} \quad (3.3)$$

$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ ifadesi gözlemlenmemiş bilginin marjinal dağılım fonksiyonudur ve \mathbf{x} gözlemlenmiş verisi ile şimdiki parametrelere bağlıdır. \mathcal{Y} ise \mathbf{y} 'nin alabileceği değerler uzayıdır.

BE için olabilecek en iyi durum, bu marjinal dağılımın, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 'in ve belki verinin de basit analitik ifadesi olmasıdır.

Benzetme yapılırsa, diyelim ki iki değişkene sahip $h(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu var. $h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ fonksiyonundaki $\boldsymbol{\theta}$ bir sabit, \mathbf{y} de $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ dağılımına sahip bir rastgele değişkendir.

Buna göre $q(\boldsymbol{\theta}) = E_{\mathbf{y}}[h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})] = \int_{\mathbf{y}} h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ istenildiğinde enbüyütlebilen bir deterministik fonksiyondur.

Beklentinin değerinin tahminine algoritmanın B-Adım'ı (beklenti adımı) denilir. $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ fonksiyonundaki iki bağımsız değişkenden birinci değişken $\boldsymbol{\theta}$, sonunda en büyük olabilirliği optimize edecek parametre değerleridir. İkinci değişken $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ise beklenti hesaplarken kullandığımız parametre değerleridir.

BE algoritmasının ikinci adımı olan E-Adım'ı (enbüyütleme adımı) ilk adımda hesapladığımız beklenti enbüyültür. Aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) \quad (3.4)$$

$\boldsymbol{\theta}^{(t-1)} \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}}$ bir önceki adımda kestirilmiş parametreleri, $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ ise $\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}$ kullanılarak bulunan beklenti fonksiyonunu enbüyütleme parametreleri ifade eder.

B-adımı ve E-adımı gerektiği kadar tekrarlanır. Her bir tekrarlama olabilirliğin logaritmasının arttığını ve olabilirlik fonksiyonunun da yerel maksimuma yakınsadığını garanti eder [30].

E-adımını biraz değiştirerek $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)})$ ifadesini enbüyütmek yerine $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^{(t)}, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) > Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(t-2)})$ eşitsizliğini sağlayacak $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ değerleri bulunabilir. Algoritmanın bu formuna Genelleştirilmiş BE (GEB) denir ve bu da yakınsamayı garantiler [31].

3.1 BE ile karışım yoğunluk parametrelerinin en büyük olabilirliğini bulma

Karıştırılmış haldeki yoğunluk fonksiyonu (mixture-density) parametrelerinin kestirimi problemi muhtemelen BE algoritmasının örüntü tanıma alanındaki en geniş uygulama alanıdır. Aşağıdaki olasılıksal modeli varsayalım:

$$P(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^M q_i p_i(\mathbf{x} | \theta_i) \quad (3.5)$$

denkleminde parametre seti $\boldsymbol{\theta}$ ile gösterilmiştir. $\boldsymbol{\theta} = (q_1, \dots, q_M, \theta_1, \dots, \theta_M)$.

$\sum_{i=1}^M q_i = 1$ ve her $p_i(\mathbf{x} | \theta_i)$, θ_i parametresi ile ifade edilen bir yoğunluk fonksiyonudur. Başka bir deyişle M adet yoğunluk bileşeni, M adet karışım katsayısı q_i ile karışmıştır. \mathbf{x} 'in N tane gözleminden gelen bu yoğunluk için eksik bilgi olabilirlik logaritması şu şekilde verilir:

$$\log(L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})) = \log \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}_i | \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log \left(\sum_{j=1}^M q_j p_j(\mathbf{x}_i | \theta_j) \right) \quad (3.6)$$

denklemin içinde toplamların logaritması olduğu için denklemi optimize etmek zordur. \mathbf{x} 'in tamamlanmamış veri olduğu dikkate alınır. Değerlerin hangi elemanın yoğunluk fonksiyonunun hangi veri ögesinden oluştuğu bilgisini veren gözlemlenememiş $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^N$ verisinin var olduğunu varsayarsak olabilirlik denklemi önemli derecede sadeleşmiş olur. Varsayımımıza göre eğer i'ninci örnek k'nıncı dağılımdan geliyorsa $y_i = k$ olur. Eğer \mathbf{y} değeri biliniyorsa olabilirlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\log(L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}, \mathbf{y})) = \log(P(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \log(P(x_i|y_i)P(y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^N \log(q_{y_i}p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i})) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Verilen yoğunluk fonksiyonu çeşitli teknikler kullanılarak optimize edilebilir.

\mathbf{y} 'nin bilinmemesi bir sorun olmasına rağmen \mathbf{y} 'yi rastgele vektör varsayınca bu sorunun üstesinden gelinbilir.

Öncelikle gözlemlenmemiş verinin dağılımının matematiksel ifadesi çıkarılmalıdır. İlk önce dağılım karışımlarının parametreleri $\hat{\Theta} = (q_1^g, \dots, q_M^g, \theta_1^g, \dots, \theta_M^g)$ için başlangıç değerleri seçilir. Bilinen $\hat{\Theta}$ değerleri ile her i ve j değerleri için $p_j(x_i|\theta_j^g)$ ifadesi kolayca hesaplanabilir. Ayrıca q_j karıştırma parametresi her bir karışımın önsel olasılığı olarak düşünülebilir. Yani $q_j = p(j)$.

$$p(x_i|y_i, \hat{\Theta}) = p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i}^g) \tag{3.8}$$

$$p(y_i|\hat{\Theta}) = q_{y_i}^g \tag{3.9}$$

$$p(x_i, y_i|\hat{\Theta}) = p(x_i|y_i, \hat{\Theta}) p(y_i|\hat{\Theta}) \tag{3.10}$$

Bayes kuralı kullanılırsa,

$$p(y_i|x_i, \hat{\Theta}) = \frac{q_{y_i}^g p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i}^g)}{p(x_i|\hat{\Theta})} = \frac{q_{y_i}^g p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i}^g)}{\sum_{k=1}^M q_k^g p_k(x_i|\theta_k^g)} \tag{3.11}$$

Toplam olasılık kuralına göre, $p(x_i|\hat{\Theta}) = \sum_{k=1}^M q_k^g p_k(x_i|\theta_k^g)$.

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \hat{\Theta}) = \prod_{i=1}^N p(y_i|x_i, \hat{\Theta}) \tag{3.12}$$

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ bağımsız olarak işlenmiş gözlemlenemeyen veridir.

(3.3) numaralı denkleme bakıldığı zaman istenilen marjinal yoğunluk fonksiyonunu bulmak için saklı değişkenler varsayılp parametreler için de başlangıç değerleri tahmin edilmiştir.

(3.2) numaralı denklem (3.3) numaralı denklem formunda şu şekilde yazılabilir,

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \log(L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \mathbf{y})) p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.13)$$

(3.7) ve (3.12) numaralı eşitlikler (3.13) numaralı denklemde yerine yazılır.

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^N \log(q_{y_i} p_{y_i}(x_i | \theta_{y_i})) \prod_{j=1}^N p(y_j | x_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \sum_{y_1=1}^M \sum_{y_2=1}^M \dots \sum_{y_N=1}^M \sum_{i=1}^N \log(q_{y_i} p_{y_i}(x_i | \theta_{y_i})) \prod_{j=1}^N p(y_j | x_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \sum_{y_1=1}^M \sum_{y_2=1}^M \dots \sum_{y_N=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M \delta_{l, y_i} \log(q_l p_l(x_i | \theta_l)) \prod_{j=1}^N p(y_j | x_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \log(q_l p_l(x_i | \theta_l)) \sum_{y_1=1}^M \sum_{y_2=1}^M \dots \sum_{y_N=1}^M \delta_{l, y_i} \prod_{j=1}^N p(y_j | x_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.14) \end{aligned}$$

Burada $\delta_{l, y_i} = \begin{cases} 1, & l = y_i \\ 0, & l \neq y_i \end{cases}$ olarak tanımlanmıştır.

$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ ifadesi hala istenilen düzeyde sadeleşmemiştir. Bunun için önce ikinci terim sadeleştirilir.

Başlangıçta seçilen bir l değeri için,

$$\begin{aligned}
& \sum_{y_1=1}^M \sum_{y_2=1}^M \cdots \sum_{y_N=1}^M \delta_{l,y_i} \prod_{j=1}^N p(y_j|x_j, \hat{\Theta}) \\
&= \left(\sum_{y_1=1}^M \cdots \sum_{y_{i-1}=1}^M \sum_{y_{i+1}=1}^M \cdots \sum_{y_N=1}^M \prod_{j=1, j \neq i}^N p(y_j|x_j, \Theta^g) \right) p(l|x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \prod_{j=1, j \neq i}^N \left(\sum_{y_j=1}^M p(y_j|x_j, \hat{\Theta}) \right) p(l|x_i, \hat{\Theta}) \\
&= p(l|x_i, \hat{\Theta}) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

bulunur. Toplam olasılık kuralına göre $\sum_{y_j=1}^M p(y_j|x_j, \hat{\Theta}) = 1$ olduğu biliniyor. (3.15) numaralı eşitliği (3.14) numarada yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}, \Theta, \hat{\Theta}) &= \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \log(q_l p_l(x_i|\theta_l)) p(l|x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N (\log(q_l) + \log(p_l(x_i|\theta_l))) p(l|x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \log(q_l) p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \log(p_l(x_i|\theta_l)) p(l|x_i, \hat{\Theta}) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Bu ifade enbüyültülmek istenirse q_l 'e bağlı ifade olan ilk terim ve θ_l 'e bağlı ifade olan ikinci terim birbirlerinden bağımsız bir şekilde enbüyültülebilir.

q_l 'in kestirim denklemini bulmak için yerel en büyük ve en küçük noktaların bulunmasında kullanılan Lagrange çarpan yönteminden yararlanılacaktır. Burada Lagrange çarpanı λ ve $\sum_l q_l = 1$ bilgisini kullanarak aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_l} \left[\sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \log(q_l) p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \lambda \left(\sum_l q_l - 1 \right) \right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \frac{1}{q_l} p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \lambda &= 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \lambda q_l = 0$$

$$\sum_{l=1}^M \left[\sum_{i=1}^N p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \lambda q_l \right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M p(l|x_i, \hat{\Theta}) + \lambda \sum_{l=1}^M q_l = 0 \quad (3.17)$$

Toplam olasılık kuralına göre $\sum_{l=1}^M p(l|x_i, \hat{\Theta}) = 1$ ve $\sum_{l=1}^M q_l = 1$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^N 1 + \lambda = 0 \quad (3.18)$$

$\lambda = -N$ bulunur.

$$\sum_{i=1}^N p(l|x_i, \hat{\Theta}) - Nq_l = 0 \quad (3.19)$$

$$q_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(l|x_i, \hat{\Theta}) \quad (3.20)$$

olarak bulunur.

(3.16) numaralı denklemdeki θ_l 'e bağlı ifade olan ikinci terimin enbüyütlebilmesi için ortamın hangi formda olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada ortamın Weibull olduğu varsayılmıştır.

4 BE YÖNTEMİNİN İKİ SEVİYELİ WEIBULL ORTAMA UYGULANIŞI

Tektür olmayan ortamın iki farklı güçte dağılıma sahip olası bir modeli Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Burada, x_i ($i = 1, \dots, N$) gözlem örnekleri, $f(x|\alpha_1, \beta_1)$ veya $f(x|\alpha_2, \beta_2)$ dağılımlarından gelmektedir. Buradaki saklı değişken y_i her bir x_i örneğinin hangi dağılımdan geldiğini belirtir.

$$\begin{array}{|l} f(x|\alpha_1, \beta_1) , y = 1 \\ \hline f(x|\alpha_2, \beta_2) , y = 2 \end{array}$$

Şekil 4.1 İki seviyeli tektür olmayan çevresel yansıma ortamı

Sırasıyla birinci ve ikinci ortamların dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibi olur.

$$f(x|\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}}, \quad x \geq 0, y = 1 \quad (4.1)$$

$$f(x|\alpha_2, \beta_2) = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}}, \quad x \geq 0, y = 2 \quad (4.2)$$

Bir örneğin birinci dağılımdan ($y_i = 1$) ya da ikinci dağılımdan ($y_i = 2$) gelme olasılığı aşağıdaki gibi olduğu varsayılır.

$$\begin{aligned} P[y_i = 1] &= q_1 \\ P[y_i = 2] &= q_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Gözlemlerin saklı bilgiye bağlı olduğu görülmektedir. Saklı bilgi (y_i) olmadan gözlem bilgileri eksik olur ve parametrelerin en yüksek olasılık kestirimi yapılamaz. Bu durumda Beklenti Enbüyüleme (BE) algoritması uygulanabilir. Eksik bilgi olduğunda, BE algoritmasının en yüksek olasılık kestiriminde başarılı bir yöntem olduğu bilinmektedir.

BE algoritması iki adımın birbiri ardına tekrarlanmasıyla uygulanır. Bu adımlar (önceki bölümde anlatıldığı gibi) B (Beklenti) ve E (Enbüyültme) adımlarıdır. Bu bölümde BE adımlarının iki seviyeli ortamda Weibull dağılımı için çıkarımları yapılmıştır.

4.1 Weibull dağılımı için BE adımlarının çıkarımları

4.1.1 Beklenti Adımı: Beklenti fonksiyonunun oluşturulması

B adımında tüm verinin yeterli istatistiğinin kestirimi yapılır.

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\ln(p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})] \quad (4.4)$$

Burada test parametreleri ve iterasyonun başlangıcında tahmin edilen parametreler sırasıyla $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, q]$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{q}]$ ile gösterilmiştir.

(3.11) eşitliğinde incelenen $P(y_i = c | \hat{\boldsymbol{\theta}}, x_i)$ ifadesi, x_i gözlemi ve varsayılan dağılım parametreleri $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ biliniyorken i'ninci hücre için y'nin c'ye (iki seviyeli ortam için, $c = 1$ veya $c = 2$) eşit olduğu durumun sonsal olasılığıdır (aposterior probability).

Beklenti fonksiyonundaki $p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = p(x_1, y_1 | \boldsymbol{\theta}) p(x_2, y_2 | \boldsymbol{\theta}) \dots p(x_n, y_n | \boldsymbol{\theta}) \quad (4.5)$$

Eşitliğin e tabanında logaritması alınırsa

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) &= \ln p(x_1, y_1 | \boldsymbol{\theta}) \\ &+ \ln p(x_2, y_2 | \boldsymbol{\theta}) + \dots + \ln p(x_n, y_n | \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

$$\ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, y_i | \boldsymbol{\theta}) \quad (4.6)$$

bulunur. Beklenti fonksiyonu,

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E [\ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_y \ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \Theta) P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_y \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, y_i = c | \Theta) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{c=1}^2 [\ln p(x_1, y_1 = c | \Theta) P(y_1 = c | x_1, \hat{\Theta}) \\
&\quad + \ln p(x_2, y_2 = c | \Theta) P(y_2 = c | x_2, \hat{\Theta}) + \dots \\
&\quad + \ln p(x_n, y_n = c | \Theta) P(y_n = c | x_n, \hat{\Theta})] \\
&= \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, y_i = c | \Theta) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N [\ln p(x_i, y_i = 1 | \Theta) P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\
&\quad + \ln p(x_i, y_i = 2 | \Theta) P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Koşullu olasılık teoreminine göre,

$p(x_i, y_i = c | \Theta) = p(x_i | y_i = c, \Theta) P(y_i = c | \Theta)$ şeklinde yazılabilir. İfadenin logaritması alınınca aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\ln p(x_i, y_i = c | \Theta) = \ln p(x_i | y_i = c, \Theta) + \ln P(y_i = c | \Theta) \tag{4.9}$$

Beklenti fonksiyonu aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}, \Theta, \hat{\Theta}) &= \sum_{i=1}^N [\ln p(x_i | y_i = 1, \Theta) + \ln P(y_i = 1 | \Theta)] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\
&\quad + [\ln p(x_i | y_i = 2, \Theta) + \ln P(y_i = 2 | \Theta)] P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Weibull dağılım fonksiyonu ($p(x) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (\frac{x}{\alpha})^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta}$, $x \geq 0$)'nun logaritması alınınca aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\ln p(x) &= \ln \beta - \ln \alpha + (\beta - 1) (\ln x - \ln \alpha) - (x/\alpha)^\beta \\
&= \ln \beta - \ln \alpha + \beta \ln x - \beta \ln \alpha - \ln x + \ln \alpha - (x/\alpha)^\beta \\
&= \ln \beta - \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \ln x - (x/\alpha)^\beta
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Örneklerin hangi dağılımdan geldiği biliniyorsa, o dağılımın parametreleri kullanılır.

$$\ln p(x | y = c, \Theta) = \ln \beta_c - \beta_c \ln \alpha_c + (\beta_c - 1) \ln x - (x/\alpha_c)^{\beta_c} \tag{4.12}$$

İki seviyeli ortamda $P(y_i = 1 | \Theta) = q_1$ ve $P(y_i = 2 | \Theta) = q_2$ olduğu varsayılmıştır.

Bu bilgiler kullanılarak beklenti fonksiyonu düzenlenmek istenirse aşağıdaki sonuç bulunur.

$$Q(x, \Theta, \hat{\Theta}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{aligned} &\left[\ln q_1 + \ln \beta_1 - \beta_1 \ln \alpha_1 + (\beta_1 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\ &+ \left[\ln q_2 + \ln \beta_2 - \beta_2 \ln \alpha_2 + (\beta_2 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} \right] P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) \end{aligned} \right\} \tag{4.13}$$

4.1.2 Enbüyültme Adımı: Beklenti fonksiyonunu enbüyülten parametrelerin bulunması

Beklenti fonksiyonunu enbüyülten parametrelerin hesaplanması için fonksiyonun parametrelere göre gradyanı sıfıra eşitlenir.

$$\nabla_{\theta} Q(x, \Theta, \hat{\Theta}) = 0 \tag{4.14}$$

4.1.2.1 Beklenti fonksiyonunu enbüyülten q_c ($c = 1, 2$) parametrelerinin hesaplanması

Beklenti fonksiyonunu (4.7) numaralı denklem formunu kullanarak yeniden yazalım.

$$Q(x, \Theta, \hat{\Theta}) = \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln P(x_i, y_i = c | \Theta) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln [P(x_i | y_i = c, \Theta) P(Y_i = c, \Theta)] P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N [\ln P(x_i | y_i = c, \Theta) + \ln P(y_i = c, \Theta)] P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \ln P(y_i = c | \Theta) \\
&\quad + \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln P(x_i | y_i = c, \Theta) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\
&= \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln(q_c) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\
&\quad + \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln P(x_i | y_i = c, \Theta) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

İki seviyeli ortam için bir verinin birinci ortamdan ya da ikinci ortamdan gelme olasılığının toplamının 1 olduğu açıktır. Diğer bir ifadeyle $\sum_{c=1}^2 q_c = 1$ 'dir.

Beklenti fonksiyonunu enbüyükten q_c değerini bulmak için fonksiyonun q_c 'ye göre türevi alınıp 0'a eşitlenir. Beklenti fonksiyonunun bu formunda ikinci terimin q_c ile ilgili olmadığı görülür.

$$\frac{d}{dq_c} Q(x, \Theta, \hat{\Theta}) = \frac{d}{dq_c} \sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln(q_c) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \tag{4.16}$$

q_c ile ilgili eşitliği bulabilmek için Lagrange çarpan yönteminden yararlanılır. $\sum_{c=1}^2 q_c = 1$ ve $q_c > 0$, kısıtlaması altında,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dq_c} \left[\sum_{c=1}^2 \sum_{i=1}^N \ln(q_c) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) + \lambda \left(\sum_{c=1}^2 q_c - 1 \right) \right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \frac{1}{q_c} P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) + \lambda &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Eşitliğin her iki tarafı q_c ile çarpılır.

$$q_c \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{q_c} P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) + \lambda \right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) + \lambda q_c = 0 \quad (4.18)$$

c üzerinden toplamlar hesaplanırsa,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^2 P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) + \lambda \sum_{c=1}^2 q_c = 0 \quad (4.19)$$

$\sum_{c=1}^2 P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) = 1$ ve $\sum_{c=1}^2 q_c = 1$ olduğundan,

$$\left(\sum_{i=1}^N 1 \right) + \lambda = 0 \quad (4.20)$$

$\lambda = -N$ bulunur. (4.18) denkleminde λ yerine koyulursa,

$$\sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) - N q_c = 0 \quad (4.21)$$

$$q_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \quad (4.22)$$

4.1.2.2 Beklenti fonksiyonunu enbüyükten ölçek (α_1 ve α_2) parametrelerinin bulunması

Weibull dağılım için beklenti fonksiyonu aşağıdaki gibi (4.13) bulunmuştu.

$$Q(x, \Theta, \hat{\Theta})$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\ln q_1 + \ln \beta_1 - \beta_1 \ln \alpha_1 + (\beta_1 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \right. \\ \left. + \left[\ln q_2 + \ln \beta_2 - \beta_2 \ln \alpha_2 + (\beta_2 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) \right\}$$

Beklenti fonksiyonunu enbüyütlen α_1 değerini bulmak için fonksiyonun α_1 'ye göre türevi alınıp 0'a eşitlenir.

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\alpha_1} &= 0 = \sum_{i=1}^N \left[-\beta_1 \frac{1}{\alpha_1} - x_i^{\beta_1} \frac{d}{d\alpha_1} \alpha_1^{-\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[-\beta_1 \frac{1}{\alpha_1} + x_i^{\beta_1} \beta_1 \alpha_1^{-\beta_1-1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{-\beta_1}{\alpha_1} + \frac{x_i^{\beta_1} \beta_1 \alpha_1^{-\beta_1}}{\alpha_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\beta_1(-1 + x_i^{\beta_1} \alpha_1^{-\beta_1})}{\alpha_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \sum_{i=1}^N -P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_{i=1}^N x_i^{\beta_1} \alpha_1^{-\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \alpha_1^{\beta_1} \left[\sum_{i=1}^N -P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_{i=1}^N x_i^{\beta_1} \alpha_1^{-\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \\
&= -\alpha_1^{\beta_1} \sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_{i=1}^N x_i^{\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

İlk terim eşitliğin sol tarafına alınır,

$$\alpha_1^{\beta_1} \sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^N x_i^{\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{4.24}$$

$$\alpha_1^{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^{\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}})} \tag{4.25}$$

α_1 için aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (x_i)^{\beta_1} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})}{\sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})} \right)^{\frac{1}{\beta_1}} \quad (4.26)$$

Eğer beklenti fonksiyonunun α_2 'ye göre türevi alınır ve benzer cebirsel işlemler yapılırsa, α_2 için de aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\alpha_2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (x_i)^{\beta_2} P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})}{\sum_{i=1}^N P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \quad (4.27)$$

4.1.2.3 Beklenti fonksiyonunu enbüyütlen şekil (β_1 ve β_2) parametrelerinin bulunması

Weibull dağılım için beklenti fonksiyonu aşağıdaki gibi (4.13) bulunmuştur.

$$Q(x, \Theta, \hat{\Theta}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{aligned} & \left[\ln q_1 + \ln \beta_1 - \beta_1 \ln \alpha_1 + (\beta_1 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\ & + \left[\ln q_2 + \ln \beta_2 - \beta_2 \ln \alpha_2 + (\beta_2 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) \end{aligned} \right\}$$

Beklenti fonksiyonunu enbüyütlen β_1 değerinin bulunması için fonksiyonun β_1 'e göre türevi alınıp 0'a eşitlenir.

$$\begin{aligned} \frac{dQ(x, \Theta, \hat{\Theta})}{d\beta_1} = 0 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\beta_1} - \ln \alpha_1 + \ln x_i - \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right) \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\beta_1} + \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right) - \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right) \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\beta_1} - \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right) \left(-1 + \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right) \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[1 - \beta_1 \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right) \left(-1 + \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right) \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

β_1 için aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) - \sum_{i=1}^N \beta_1 \ln\left(\frac{x_i}{\alpha_1}\right) \left(-1 + \left(\frac{x_i}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right) P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) = 0 \quad (4.29)$$

Benzer şekilde β_2 için de aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) - \sum_{i=1}^N \beta_2 \ln\left(\frac{x_i}{\alpha_2}\right) \left(-1 + \left(\frac{x_i}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right) P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) = 0 \quad (4.30)$$

Görüldüğü üzere bütün parametreler $P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})$ ve $P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})$ ifadelerine bağlıdır. Bu ifadeler açılırsa,

$$\begin{aligned} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta}) &= \frac{P(y_i = 1, x_i | \hat{\Theta})}{P(x_i | \hat{\Theta})} \\ &= \frac{P(x_i | y_i = 1, \hat{\Theta}) P(y_i = 1 | \hat{\Theta})}{P(x_i | \hat{\Theta})} \\ &= \frac{\hat{q}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}}}{\sum_{c=1}^2 P(x_i, y_i = c | \hat{\Theta})} \\ &= \frac{\hat{q}_1 \hat{\alpha}_1^{-\hat{\beta}_1} \hat{\beta}_1 x_i^{\hat{\beta}_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}}}{\sum_{c=1}^2 P(x_i | y_i = c, \hat{\Theta}) P(y_i = c | \hat{\Theta})} \\ &= \frac{\hat{q}_1 \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1^{-\hat{\beta}_1} x_i^{\hat{\beta}_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}}}{\hat{q}_1 \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1^{-\hat{\beta}_1} x_i^{\hat{\beta}_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}} + \hat{q}_2 \hat{\beta}_2 \hat{\alpha}_2^{-\hat{\beta}_2} x_i^{\hat{\beta}_2-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2}}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir. $P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) = 1 - P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})$ olduğundan,

$$P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta}) = \frac{\hat{q}_2 \hat{\beta}_2 \hat{\alpha}_2^{-\hat{\beta}_2} x_i^{\hat{\beta}_2-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2}}}{\hat{q}_1 \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1^{-\hat{\beta}_1} x_i^{\hat{\beta}_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}} + \hat{q}_2 \hat{\beta}_2 \hat{\alpha}_2^{-\hat{\beta}_2} x_i^{\hat{\beta}_2-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2}}} \quad (4.32)$$

bulunur. Sonuç olarak parametre kestirim algoritması aşağıdaki adımlarla özetlenebilir:

1. $\hat{\Theta} = [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{q}]$ parametreleri için algoritmanın ilk adımında kullanılmak üzere tahmini değerler seçilir.
2. $\hat{\Theta}$ parametreleri kullanılarak $P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})$ ve $P(y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})$ değerleri (4.31) ve (4.32) yardımıyla hesaplanır.
3. (4.22), (4.26), (4.27), (4.29), (4.30) numaralı formüller ve 2. adımda hesaplanan $P(Y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})$ ve $P(Y_i = 2 | x_i, \hat{\Theta})$ değerleri kullanılarak parametreler hesaplanır ve $\hat{\Theta} = [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{q}]$ güncellenir.
4. Bulunan parametre değerlerinin bir önceki iterasyonda bulunan parametre kestirim sonuçları ile aralarındaki fark belirli bir değerin altına düştüğünde iterasyon sonlandırılır. Aksi takdirde 2. adımdan iterasyona devam edilir.

5 BE YÖNTEMİNİN ÇOK SEVİYELİ WEIBULL ORTAMA UYGULANIŞI

Çok seviyeli (M seviyeli) ortamlar için genelleştirilmiş beklenti fonksiyonunu bulmak için (4.4)-(4.13) eşitlikleri takip edilerek (5.1) elde edilir.

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= E [\ln p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}] \\
 &= \sum_{c=1}^M \sum_{i=1}^N \ln P(x_i, y_i = c | \boldsymbol{\theta}) P(y_i = c | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{array}{l} \ln P(x_i, y_i = 1 | \boldsymbol{\theta}) P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ + \ln P(x_i, y_i = 2 | \boldsymbol{\theta}) P(y_i = 2 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ + \dots \\ + \ln P(x_i, y_i = M | \boldsymbol{\theta}) P(y_i = M | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{array}{l} \left[\ln q_1 + \ln \beta_1 - \beta_1 \ln \alpha_1 + (\beta_1 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] P(y_i = 1 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ + \left[\ln q_2 + \ln \beta_2 - \beta_2 \ln \alpha_2 + (\beta_2 - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] P(y_i = 2 | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ + \dots \\ + \left[\ln q_M + \ln \beta_M - \beta_M \ln \alpha_M + (\beta_M - 1) \ln x_i - \left(\frac{x_i}{\alpha_M} \right)^{\beta_M} \right] P(y_i = M | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{array} \right\} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Parametre seti $\boldsymbol{\theta} = [q_1, \dots, q_M, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_M, \beta_M]$ olarak belirlenirken, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ise bu parametrelerin kestirilmiş değerler setini ifade eder.

Beklenti fonksiyonunu enbüyülten parametrelerin hesaplanması için (4.14) beklenti fonksiyonun her bir parametreye göre gradienti sıfıra eşitlenir ($\nabla_{\boldsymbol{\theta}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$).

(4.16)-(4.22) eşitlikleri takip edilerek beklenti fonksiyonunu enbüyülten q_c değerini hesaplayan eşitlik aşağıdaki gibi bulunur.

$$q_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (5.2)$$

Sırasıyla (4.23)-(4.26) ve (4.28)-(4.29) eşitlikleri takip edilerek M seviyeli ortam için beklenti fonksiyonunu enbüyülten α_c ve β_c değerleri aşağıdaki denklemler kullanılarak bulunur.

$$\alpha_c = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (x_i)^{\beta_c} P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})}{\sum_{i=1}^N P(y_i = 1 | x_i, \hat{\Theta})} \right)^{\frac{1}{\beta_c}} \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^N P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) = \beta_c \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{x_i}{\alpha_c} \right) \left(-1 + \left(\frac{x_i}{\alpha_c} \right)^{\beta_c} \right) P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \quad (5.4)$$

$P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta})$ ifadesi (4.31) ile benzer şekilde hesaplanarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned} & P(y_i = c | x_i, \hat{\Theta}) \\ &= \frac{\hat{q}_c \hat{\beta}_c \hat{\alpha}_c^{-\hat{\beta}_c} x_i^{\hat{\beta}_c - 1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_c}\right)^{\hat{\beta}_c}}}{\hat{q}_1 \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1^{-\hat{\beta}_1} x_i^{\hat{\beta}_1 - 1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1}} + \dots + \hat{q}_M \hat{\beta}_M \hat{\alpha}_M^{-\hat{\beta}_M} x_i^{\hat{\beta}_M - 1} e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}_M}\right)^{\hat{\beta}_M}}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

6 BE YÖNTEMİNİN BAŞARIM ANALİZİ

Bu bölümde Beklenti Enbüyültme yönteminin başarımı detaylıca incelenmiştir. Ortamın ayırt edilebilirliğinin Cramer-Rao alt sınırı ile ilişkisi anlatılarak Weibull dağılımının ölçek ve şekil parametreleri için Cramer-Rao alt sınırları hesaplanmıştır.

İki seviyeli ortamlar için geliştirilmiş Beklenti Enbüyültme algoritmasının başarımı değişik senaryolar üzerinde incelenmiştir. İki seviyeli ortamlarda çalışılırken ortamdaki dağılımların oranlarının, ölçek ve şekil parametrelerinin bilinmediği varsayılmıştır.

Çok seviyeli ortamlar için geliştirilmiş 5 seviyeli beklenti enbüyültme algoritmasının başarımı farklı seviyelerdeki ortamlar üzerinde incelenmiştir. BE algoritmasının çok seviyeli ortamlardaki başarımında parametre kestirimi yönünden iki farklı yöntem kullanılmış ve bu yöntemlerin sonuçları birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

6.1 Ortamın Ayırt Edilebilirliği ve Cramer Rao Alt Sınırı

Cramer-Rao sınırı, verilen bir sistem için en iyi yansız kestirici (unbiased estimator) tarafından kestirilen bir parametrenin hata varyansının alt sınırını ifade eder. Bütün kestiricilerin hata varyansı bu değerden daha büyük olur. Bu durumda başarımların analizinde parametre seçiminde kestirim değerleri arası uzaklıklar Cramer-Rao sınırı ile sınırlandırılmıştır.

Her bir parametrenin kestirim hata varyansı sınırının bulunması için Cramer-Rao alt sınırı hesaplanır. Her bir parametrenin Cramer-Rao sınırı Fisher bilgi matrisinin tersinin diyagonal elemanı olarak hesaplanır. [33]

$$\sigma_{\varepsilon_{\theta_i}}^2 = \text{Var}[\hat{\theta}_i(\mathbf{x}) - \theta_i] \geq J^{ii} \quad (6.1)$$

Her bir parametrenin hata varyansı $\sigma_{\varepsilon_{\theta_i}}^2$ ile ifade edilmiştir. J^{ii} ise FBM (Fisher Bilgi Matrisi) olan $I(\theta)$ 'in tersinin (i,i) endeksli elemanıdır (ölçek ve şekil parametreleri için bu sınırların çıkarımı gösterilecektir).

$$\mathbf{J} = [I(\theta)]^{-1} \quad (6.2)$$

FBM aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$I(\Theta) = -E \left(\nabla_{\Theta} (\nabla_{\Theta} \ln P_{x|\Theta}(x|\Theta))^T \right) \quad (6.3)$$

$\ln P_{x|\Theta}(x|\Theta)$ fonksiyonunu tanımlamak için x bilgi setine ait dağılım fonksiyonunu $\left(P(x|\Theta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \right)$ aşağıdaki formda yazdıktan sonra logaritması alınır.

$$P(x|\Theta) = \prod_{i=1}^N \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x_i/\alpha)^{\beta}} \right] \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \ln P(x|\Theta) &= \sum_{i=1}^N \left[\ln \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} - (x_i/\alpha)^{\beta} \right] \\ &= N \ln \beta - N \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^N \ln x_i - \sum_{i=1}^N (x_i/\alpha)^{\beta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

İki parametrelili ($\Theta = [\alpha, \beta]$) Weibull dağılımı için gradient işlemleri şu şekilde hesaplanır.

$$\nabla_{\Theta} \ln P_{x|\Theta}(x|\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \beta} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Burada $\frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \alpha}$ ve $\frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \beta}$ ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \alpha} = -N\beta \frac{1}{\alpha} + \beta \alpha^{-\beta-1} \sum_{i=1}^N x_i^{\beta} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} - N \ln \alpha + \sum_{i=1}^N \ln x_i - \sum_{i=1}^N (x_i/\alpha)^{\beta} \ln(x_i/\alpha) \quad (6.8)$$

İkinci gradient işlemi alınırsa,

$$\nabla_{\Theta} \{ \nabla_{\Theta} \ln P_{x|\Theta}(x|\Theta) \}^T = \nabla_{\Theta} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln P(x|\Theta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \alpha} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \beta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \alpha} \right) & \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \beta} \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta & -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \\ -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) & -\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right]^2 \end{bmatrix} \quad (6.9)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. $I(\theta) = -E \left\{ \nabla_\theta \left\{ \nabla_\theta \ln P_{\mathbf{x}|\theta}(\mathbf{x}|\theta) \right\}^T \right\}$ olduğundan her bir terimin beklenen değerinin negatifi alınır.

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= -E \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \alpha} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \beta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \alpha} \right) & \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \beta} \right) \end{bmatrix} \right) \\
&= -E \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta & -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \\ -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) & -\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right]^2 \end{bmatrix} \right\} \\
&= - \begin{bmatrix} E \left(\frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta \right) & E \left(-\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \right) \\ E \left(-\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \right) & E \left(-\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right]^2 \right) \end{bmatrix} \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Matrisin her bir elemanının beklenen değer hesaplaması ek bölümde (EK1) gösterilmiştir. Beklenen değerler hesaplanıp denklemden yerine konulduğunda zaman FBM şu şekilde bulunur.

$$I(\theta) = N \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 & \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} & \frac{\left(1 - 2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right)}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$\gamma = 0.5772$ Euler sabitidir. Cramer-Rao alt sınırı FBM'nin tersinin elemanları ile ilişkili olduğundan matrisin tersini alma işlemi yapılır.

$$\begin{aligned}
 J = [I(\theta)]^{-1} &= \left(N \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 & \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} & \frac{1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}}{\beta^2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{6\alpha^2}{\pi^2} \begin{bmatrix} \frac{\left(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right)}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

FBM'nin tersinin hesaplaması ek bölümde (EK2) gösterilmiştir.

Ölçek ve şekil parametreleri için kestirim hataları $(\sigma_{\varepsilon_\alpha}^2 \geq J^{11}, \sigma_{\varepsilon_\beta}^2 \geq J^{22})$ aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha}^2 \geq \frac{1}{N} \frac{6\alpha^2}{\pi^2} \frac{\left(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right)}{\beta^2} \quad (6.13)$$

$$\sigma_{\varepsilon_\beta}^2 \geq \frac{1}{N} \frac{6\beta^2}{\pi^2} \quad (6.14)$$

Sabitler hesaplandığında ölçek ve şekil parametrelerinin hata varyansları

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha}^2 \geq \frac{1}{N} \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1,1087) \quad (6.15)$$

$$\sigma_{\varepsilon_\beta}^2 \geq \frac{1}{N} \beta^2 (0,6080) \quad (6.16)$$

olarak bulunur. (6.15) ve (6.16) numaralı eşitliklerde görüldüğü gibi şekil parametresinin kestirim hatasının standart sapması şekil parametresinin kendisine, ölçek parametresinin kestirim hatasının standart sapması ölçek parametresinin şekil parametresinin oranına bağlıdır.

Şekil parametresinin kestirim hatasının standart sapması aşağıda gösterilmiştir.

$$\sigma_{\varepsilon_{\beta}} \geq \frac{\beta}{\sqrt{Nk_{\beta}}} \quad (6.17)$$

Burada $k_{\beta} = \frac{1}{0,6080}$, sabit bir sayıdır. Şekil parametresi değişken değerler seçildiğinde şekil parametresinin kestirim hatasının standart sapması göz önünde tutulmalıdır. Seçilen en küçük şekil parametresi β_0 olsun. n 'inci şekil parametresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \Delta\beta_n \triangleq \beta_n - \beta_{n-1} &\geq (\sigma_{\varepsilon_{\beta_n}} + \sigma_{\varepsilon_{\beta_{n-1}}}) n_{\sigma_{\beta}} = \frac{\beta_n + \beta_{n-1}}{\sqrt{Nk_{\beta}}} n_{\sigma_{\beta}} \\ \beta_n - \beta_{n-1} &\geq \frac{\beta_n + \beta_{n-1}}{\sqrt{Nk_{\beta}}} n_{\sigma_{\beta}} \\ \beta_n - \beta_{n-1} &\geq n_{\sigma_{\beta}} \frac{\beta_{n-1}}{\sqrt{Nk_{\beta}}} + n_{\sigma_{\beta}} \frac{\beta_n}{\sqrt{Nk_{\beta}}} \\ \beta_n - n_{\sigma_{\beta}} \frac{\beta_n}{\sqrt{Nk_{\beta}}} &\geq \beta_{n-1} + n_{\sigma_{\beta}} \frac{\beta_{n-1}}{\sqrt{Nk_{\beta}}} \\ \beta_n \left(1 - n_{\sigma_{\beta}} \frac{1}{\sqrt{Nk_{\beta}}} \right) &\geq \beta_{n-1} \left(1 + n_{\sigma_{\beta}} \frac{1}{\sqrt{Nk_{\beta}}} \right) \\ \beta_n &\geq \beta_{n-1} \frac{(\sqrt{Nk_{\beta}} + n_{\sigma_{\beta}})}{(\sqrt{Nk_{\beta}} - n_{\sigma_{\beta}})} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$n_{\sigma_{\beta}}$ ifadesi, değeri 1 ya da daha büyük olan bir katsayıdır.

$\frac{\sqrt{Nk_{\beta}} + n_{\sigma_{\beta}}}{\sqrt{Nk_{\beta}} - n_{\sigma_{\beta}}}$ ifadesi sabit bir sayıdır. Bu değer λ_{β} ile gösterilirse,

$$\lambda_{\beta} \triangleq \frac{\sqrt{Nk_{\beta}} + n_{\sigma_{\beta}}}{\sqrt{Nk_{\beta}} - n_{\sigma_{\beta}}} \quad (6.19)$$

Bu durumda (6.18) eşitsizliği aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\beta_n \geq \beta_{n-1} \lambda_{\beta} \quad (6.20)$$

β_n 'in en küçük değeri eşitliklik durumunda elde edilir. n 'inci şekil parametresi, seçilen en küçük şekil parametresine göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta_n = \beta_0 \lambda_\beta^n \quad (6.21)$$

Ölçek parametresinin kestirim hatasının standart sapması aşağıda gösterilmiştir.

$$\sigma_{\varepsilon_\alpha}^2 \geq \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\sqrt{Nk_\alpha}} \quad (6.22)$$

Burada $k_\alpha = \frac{1}{1,1087}$, sabit bir sayıdır. Ölçek parametresi performans analizi yapılırken değişken değerler seçildiğinde şekil parametresine de bağlı olan ölçek parametresinin kestirim hatasının standart sapması göz önünde tutulmalıdır. Seçilen en küçük ölçek parametresi α_0 olsun. n 'inci ölçek parametresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_n \triangleq \alpha_n - \alpha_{n-1} &\geq (\sigma_{\varepsilon_{\alpha_n}} + \sigma_{\varepsilon_{\alpha_{n-1}}}) n_{\sigma_\alpha} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} n_{\sigma_\alpha} \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &\geq \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} n_{\sigma_\alpha} \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &\geq n_{\sigma_\alpha} \frac{\alpha_{n-1}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} + n_{\sigma_\alpha} \frac{\alpha_n}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} \\ \alpha_n - n_{\sigma_\alpha} \frac{\alpha_n}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} &\geq \alpha_{n-1} + n_{\sigma_\alpha} \frac{\alpha_{n-1}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} \\ \alpha_n \left(1 - n_{\sigma_\alpha} \frac{1}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} \right) &\geq \alpha_{n-1} \left(1 + n_{\sigma_\alpha} \frac{1}{\beta\sqrt{Nk_\alpha}} \right) \\ \alpha_n &\geq \alpha_{n-1} \frac{(\beta\sqrt{Nk_\alpha} + n_{\sigma_\alpha})}{(\beta\sqrt{Nk_\alpha} - n_{\sigma_\alpha})} \end{aligned} \quad (6.23)$$

n_{σ_α} ifadesi, değeri 1 ya da daha büyük olan bir katsayıdır.

Seçilen bir şekil parametresi için $\frac{\beta\sqrt{Nk_\alpha} + n_{\sigma_\alpha}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha} - n_{\sigma_\alpha}}$ ifadesi sabit sayı olur. Bu sayı λ_α ile ifade edilirse;

$$\lambda_\alpha \triangleq \frac{\beta\sqrt{Nk_\alpha} + n_{\sigma_\alpha}}{\beta\sqrt{Nk_\alpha} - n_{\sigma_\alpha}} \quad (6.24)$$

Bu durumda (6.23) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha_n \geq \alpha_{n-1}\lambda_\alpha \quad (6.25)$$

α_n 'in en küçük değeri eşitliklik durumunda elde edilir. n 'inci ölçek parametresi, seçilen en küçük ölçek parametresine göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha_n = \alpha_0\lambda_\alpha^n \quad (6.26)$$

6.2 BE Yönteminin İki Seviyeli Weibull Ortamlardaki Başarımı

Bu bölümdeki çalışmalarda kestirilen parametre değerleri, birbirinden bağımsız 500 simülasyon tekrarı sonucunda elde edilen parametre değerlerinin ortalaması olarak hesaplanmıştır. Şekil parametresinin kestirimi için kullanılacak olan 4.29 ve 4.30 eşitliklerinin hesaplanması için PSO (Parçacık Sürü Optimizasyonu) algoritması kullanılmıştır.

Beklenti Enbüyütleme yönteminin başarımı Weibull dağılımına sahip iki seviyeli ortamlar üzerinde incelenirken aşağıdaki senaryolar üzerinde çalışılmıştır.

- Şekil parametresinin etkisi ($\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 = \bar{c}$),
- Ölçek parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\beta_1 = \beta_2, \bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$),
- Ölçek parametresinin etkisi ($\beta_1 \neq \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2 = \bar{c}$),
- Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\alpha_1 = \alpha_2, \bar{\beta}_1 \neq \bar{\beta}_2$),
- SYAO referans hücre sayısının etkisi (N),
- İki seviyeli ortamın dağılım şeklinin etkisi,
- İki seviyeli ortamın dağılım oranının etkisi,
- Tektür ortamın tespiti

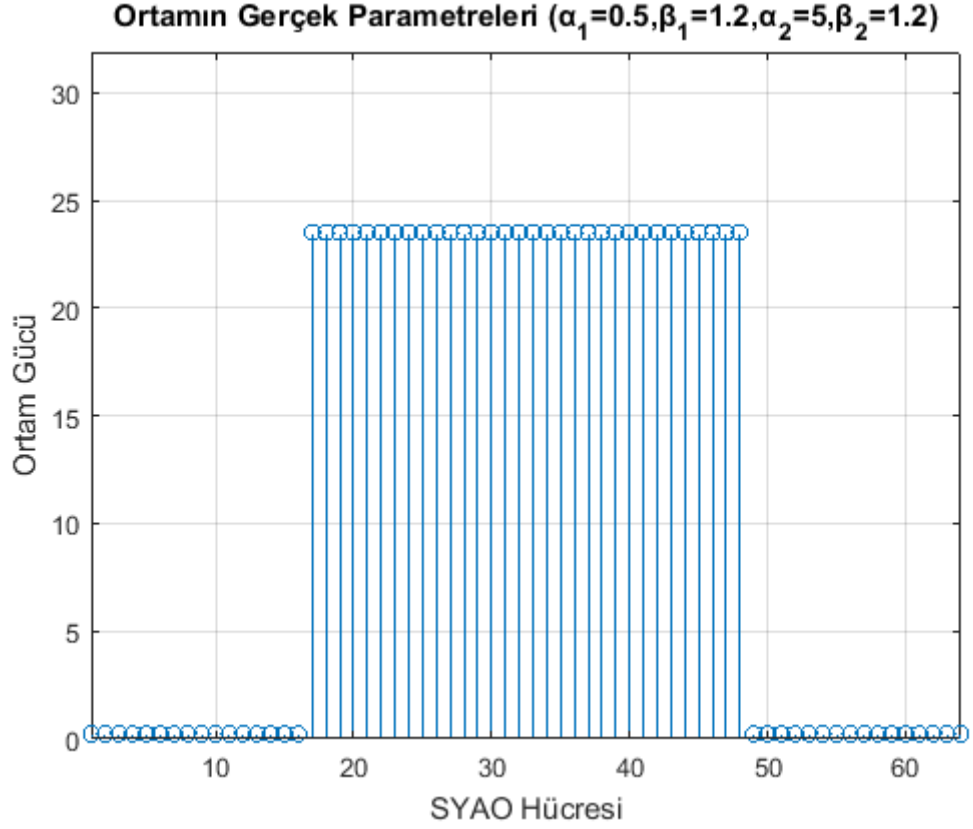
\bar{c} notasyonu c 'nin farklı değerler alarak değiştiğini ifade eder. $\bar{a} \neq \bar{b}$ notasyonu ise a ve b 'nin birbirlerine yaklaşan değerler aldığını ifade etmektedir.

Bu bölümde farklı senaryolar tek tek incelenmeden önce örnek bir çalışma olarak iki seviyeli bir ortamın Beklenti Enbüyütleme yöntemiyle tektür bölgelerinin saptanması, detaylıca incelenmiştir.

Tablo 6.1'de incelenecek ortamdaki parametreler ile BE algoritması için parametrelerin başlangıç değerleri gösterilmiştir.

Dağılımların parametreleri					BE algoritması için başlangıç değerleri				
α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
0,5	5	1,2	1,2	0,5	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.1 Örnek çalışma için incelenen durum



Şekil 6.1 Ortamdaki güç dağılımı

İki seviyeli bir ortamdaki sinyal gücünün 64 hücre üzerindeki dağılımı Şekil 6.1'de gösterilmiştir.

Weibull dağılımı için (2.5)'te verilen güç formülü aşağıdaki gibidir. $\Gamma(\cdot)$, Gama fonksiyonudur.

$$E[X^2] = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$$

Ortamdaki güç değerleri, $\alpha_1 = 0,5$, $\beta_1 = 2$ parametre değerlerine sahip bölgeler için,

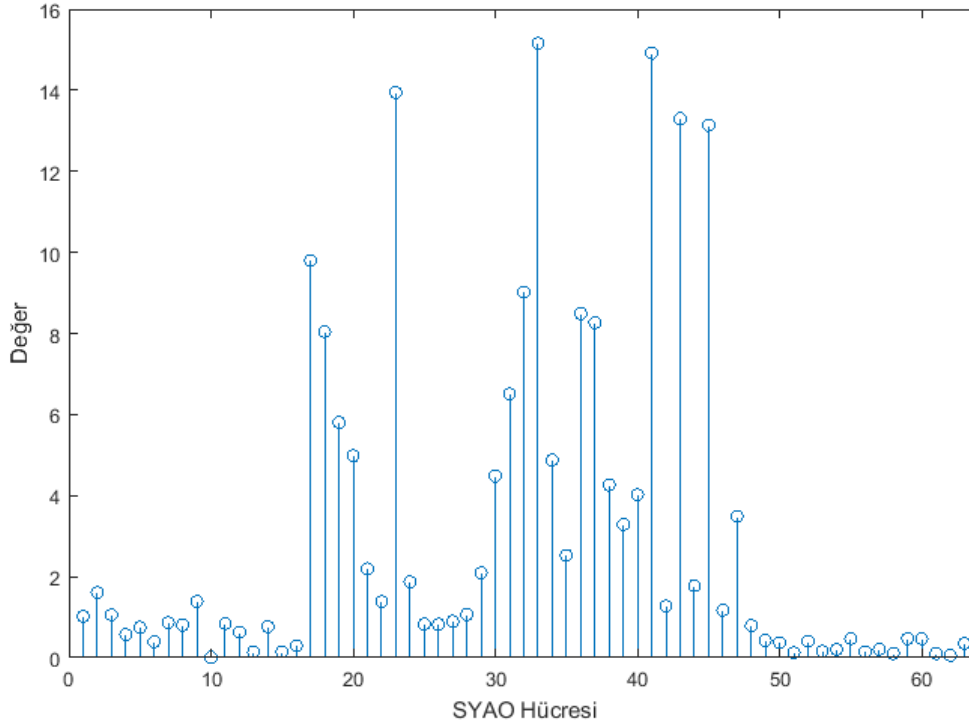
$$Güç_1 = (0,5) \Gamma\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 0,2352$$

olarak hesaplanır. $\alpha_2 = 5$, $\beta_2 = 2$ parametre değerlerine sahip bölge için,

$$Güç_2 = (5,0) \Gamma\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 23,52$$

hesaplanır.

Böyle bir ortamdan alınan örnek bir veri seti Şekil 6.2’de gösterilmiştir.

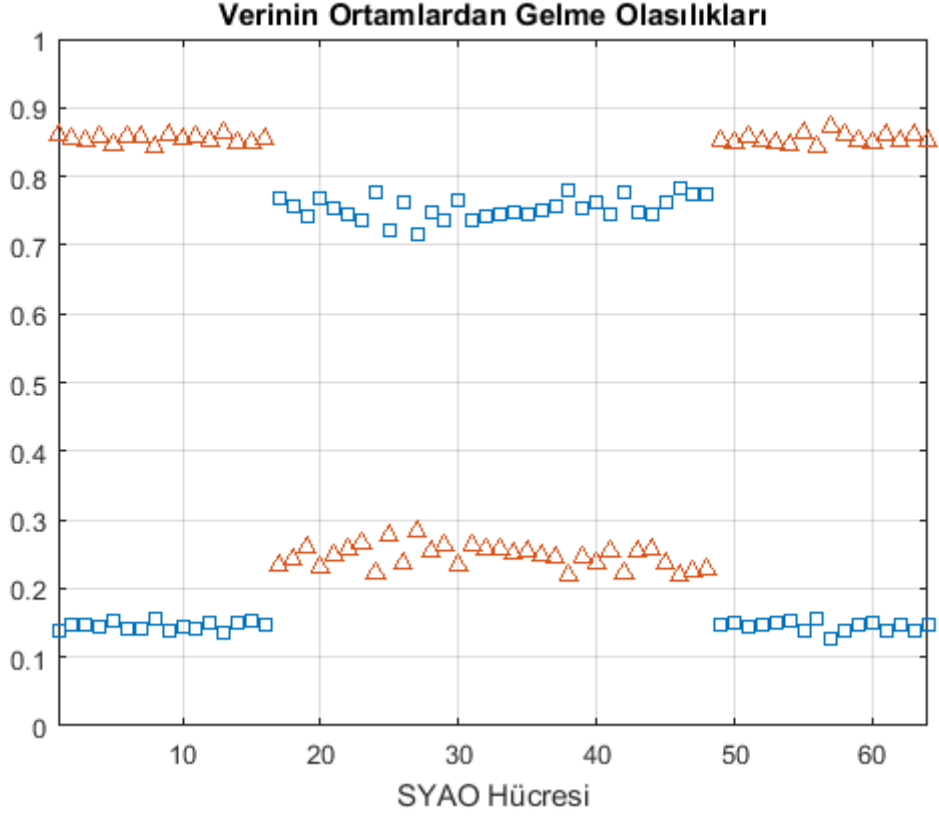


Şekil 6.2 İki seviyeli ortamdan alınmış örnek bir veri seti

Beklenti Enbüyültme algoritması ile sadece bu veri seti kullanılarak ortamın tektürlüğü hakkında fikir edinilebilir ve ortamın parametreleri kestirilebilir.

Veri seti iki seviyeli Beklenti Enbüyültme algoritmasına, parametrelerin başlangıç değerleri $\hat{\Theta} = [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{q}]$ ile birlikte verilir. Bu örnekte başlangıç değerleri $\hat{\Theta} = [1.25, 1.5, 3.75, 2.5, 0.35]$ olarak seçilmiştir.

Veri seti ve belirtilen başlangıç değerlerine sahip parametreler kullanılarak birbirini tekrarlayan beklenti ve enbüyültme adımları sonrasında parametreler belirli bir değerlere yakınsamaktadır. Bu şekilde birbirinden bağımsız 500 adet veri seti aynı işlemler tekrarlanır. Kestirilen değerlerin ortalaması alınarak parametre kestirim sonucu $\hat{\Theta} = [0.66, 1.3, 5.4, 1.5, 0.51]$ elde edilir.



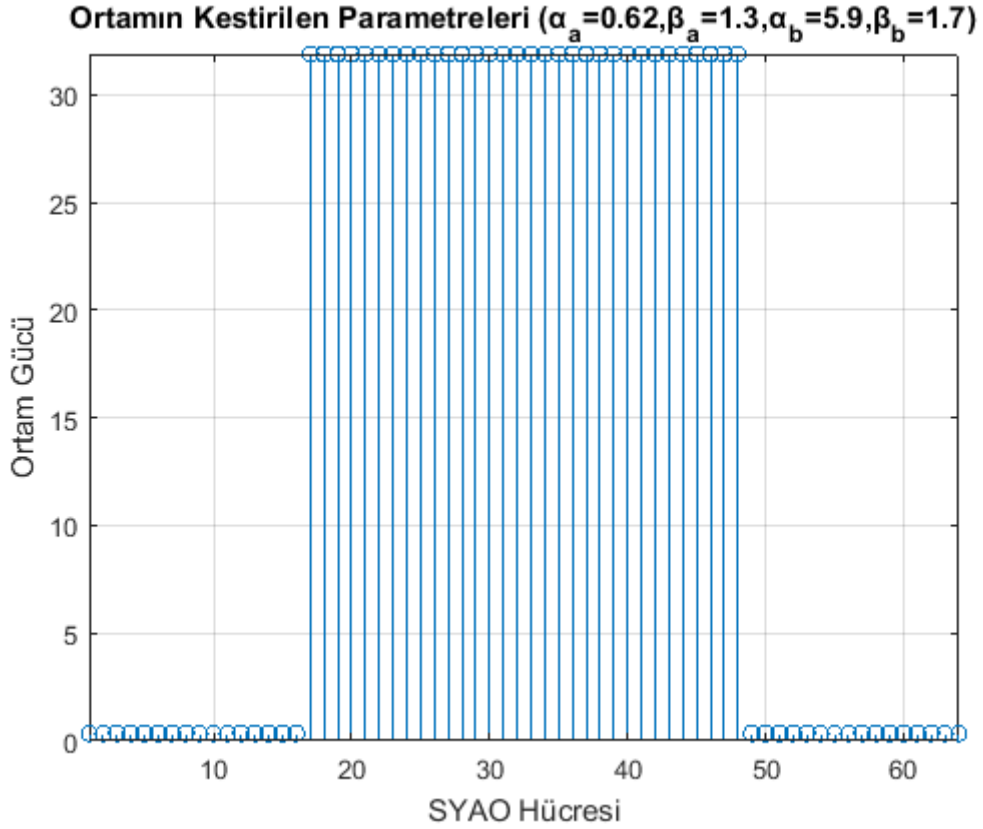
Şekil 6.3 Hücrelerden alınan örneklerin dağılımlardan gelme olasılıkları

$$(\triangle: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Her bir hücredeki verilerin birinci ve ikinci dağılımdan gelme olasılıkları kestirilmiş parametreler hesaplanarak Şekil 6.3'te gösterilmiştir.

Grafikte \triangle ile gösterilen değerler, her bir hücrenin birinci dağılımdan (a) gelme olasılığını, \square şeklinde gösterilen değerler ise her bir hücrenin ikinci dağılımdan (b) gelme olasılığını belirtir. Hücrelerin hangi dağılıma sahip olduğu belirlenirken her bir hücre için olasılığı en yüksek dağılım seçilir.

Yapılan örnek çalışma için her bir hücredeki verilerin yüksek olasılıkla hangi dağılımdan geldiği Şekil 6.3'te görülmektedir. Buna göre 1 ile 16 arası ve 49 ile 64 arasındaki hücrelerdeki veriler ilk dağılımdan, 17 ile 48 arasındaki hücrelerdeki veriler ikinci dağılımdan geldiği bulunur.



Şekil 6.4 BE yöntemiyle elde edilen ortamdaki dağılımlar

($G_1=0.3522, G_2=31.0044$)

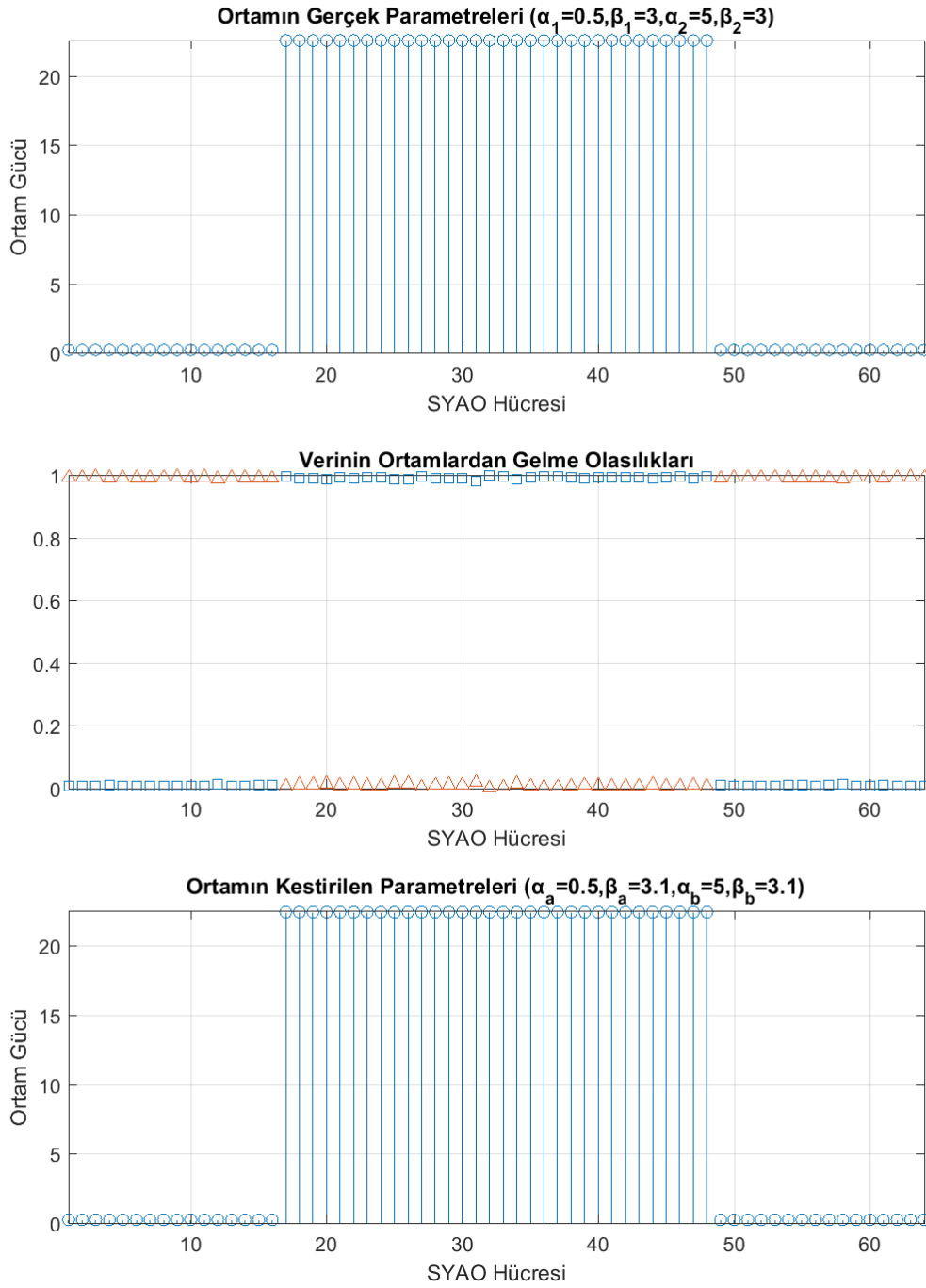
Hücreler sınıflandırıldıktan sonra ortam gücü grafiği Şekil 6.4 'deki gibi elde edilir.

6.2.1 Şekil parametresinin başarımlar üzerinde etkisi ($\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 = \vec{c}$)

Weibull dağılımının şekil parametresinin başarımlar üzerine etkisini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri			BE algoritması için başlangıç değerleri				
α_1	α_2	$\beta_1 = \beta_2$	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
0,5	5	3	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	2	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	1,5	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,75	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,5	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

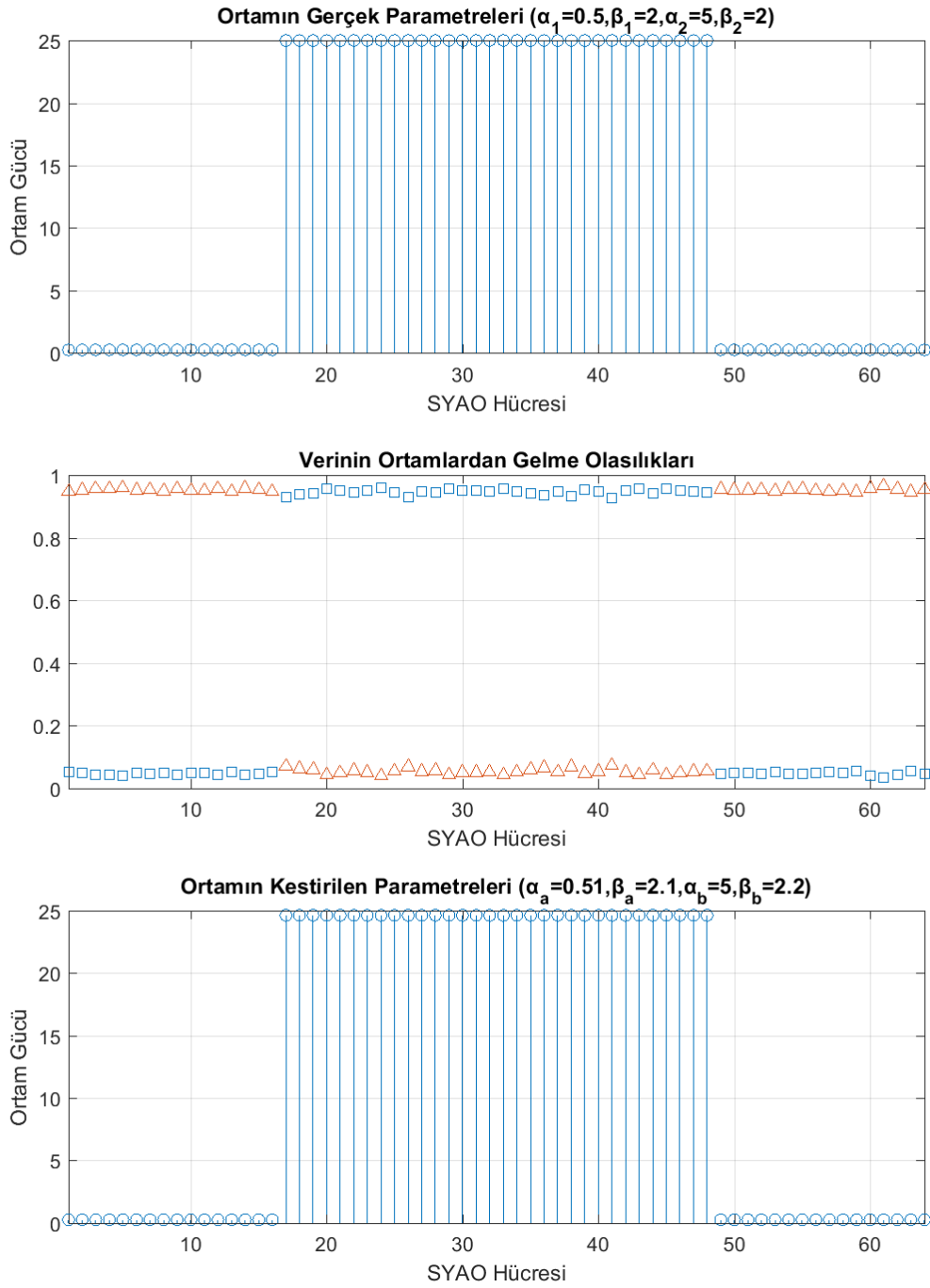
Tablo 6.2 Şekil parametresinin etkisini incelemek için bakılan durumlar



Şekil 6.5 Şekil parametrelerinin $\beta_1 = \beta_2 = 3$ olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

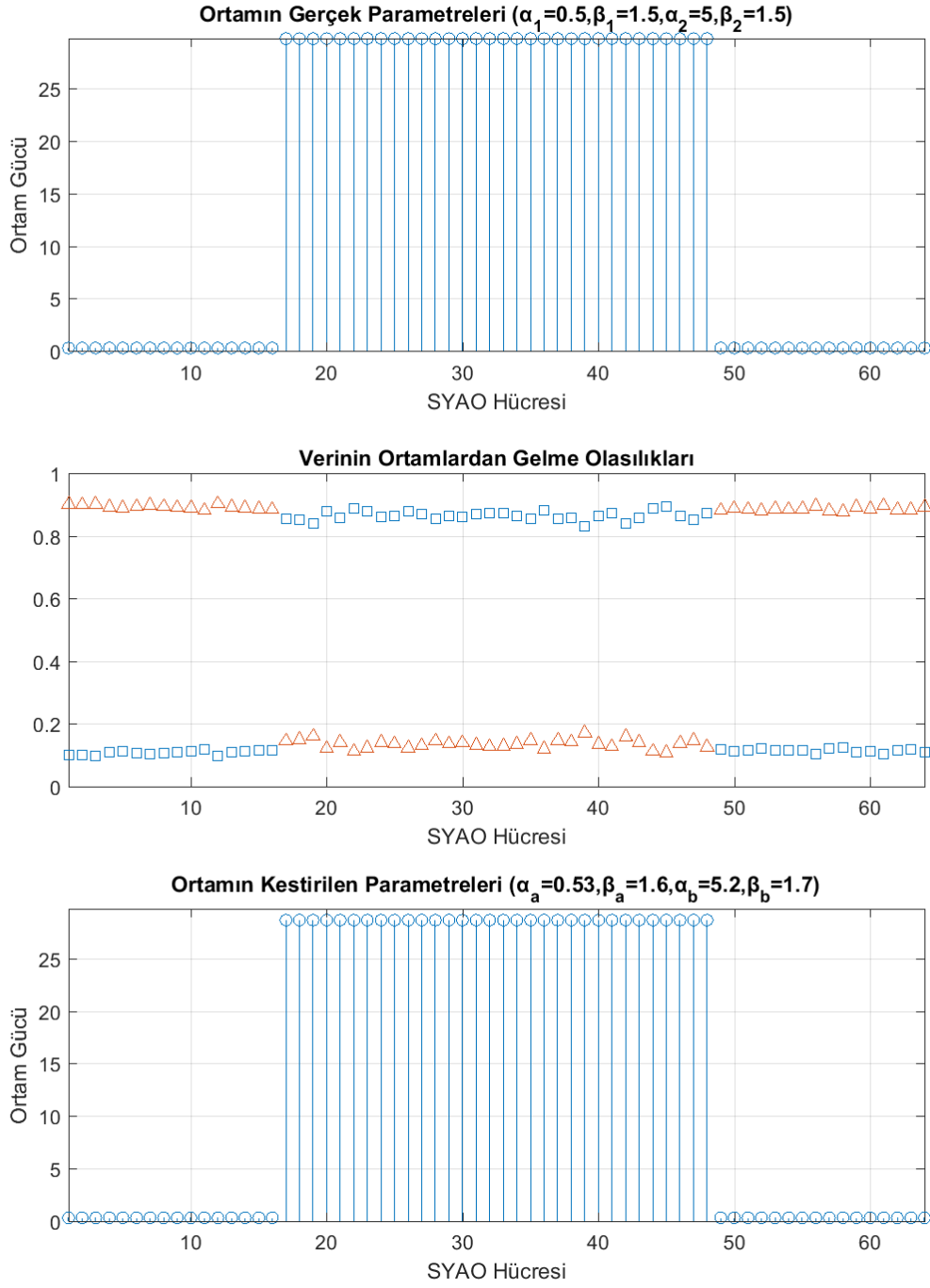
Şekil 6.5'te sonuçları gösterilen çalışmada şekil parametrelerinin değeri 3 ($\beta_1 = \beta_2 = 3$) olan ortam incelenmiştir. Verilerin Ortamlardan Gelme Olasılıkları grafiğinde olasılık değerlerinin neredeyse kesine yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 6.6 Şekil parametrelerinin 2 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

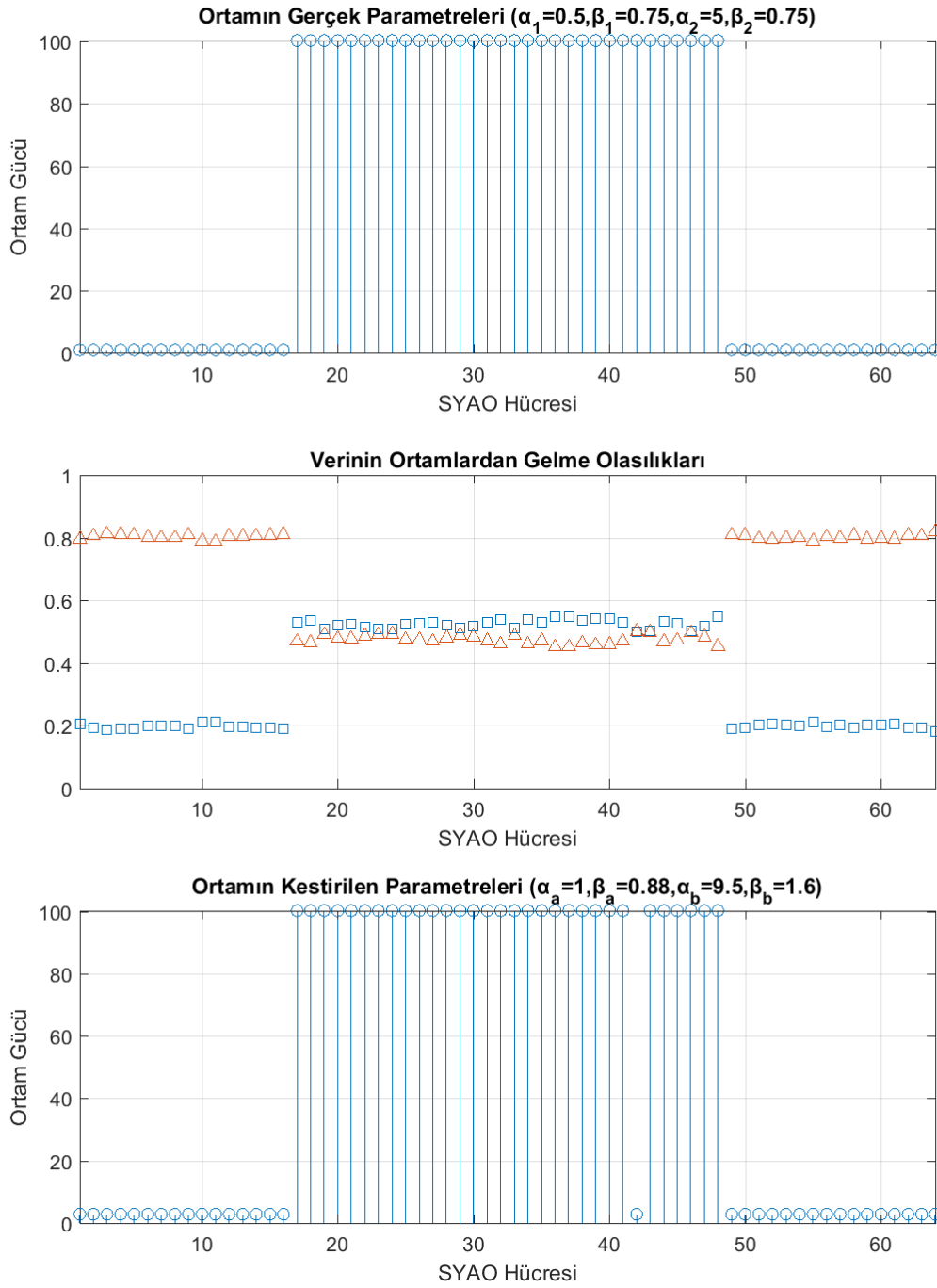
Şekil 6.6'da sonuçları gösterilen çalışmada şekil parametrelerinin değeri 2 ($\beta_1 = \beta_2 = 2$) olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.7 Şekil parametrelerinin 1,5 olma durumu

$$(\Delta: p(\mathbf{y} = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(\mathbf{y} = b|x_i, \hat{\theta}))$$

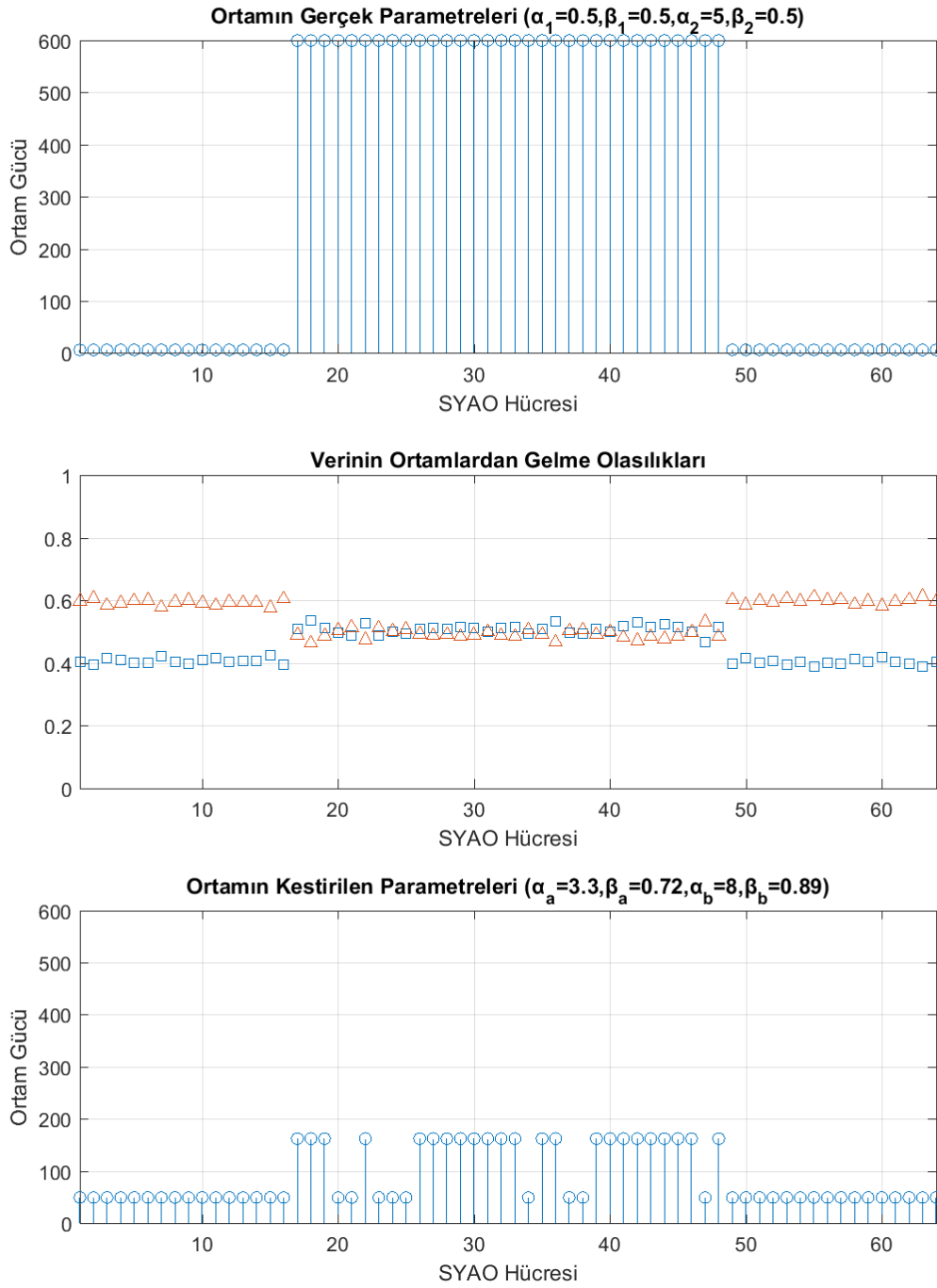
Şekil 6.7 'de sonuçları gösterilen çalışmada şekil parametrelerinin değeri 1,5 olan ($\beta_1 = \beta_2 = 1,5$) iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.8 Şekil parametrelerinin 0,75 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.8'de sonuçları gösterilen çalışmada şekil parametrelerinin değeri 0,75 ($\beta_1 = \beta_2 = 0,75$) olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Verilerin Ortamlardan Gelme Olasılıkları grafiğinde özellikle yüksek güçlü ortamda olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 6.9 Şekil parametrelerinin 0,5 olma durumu

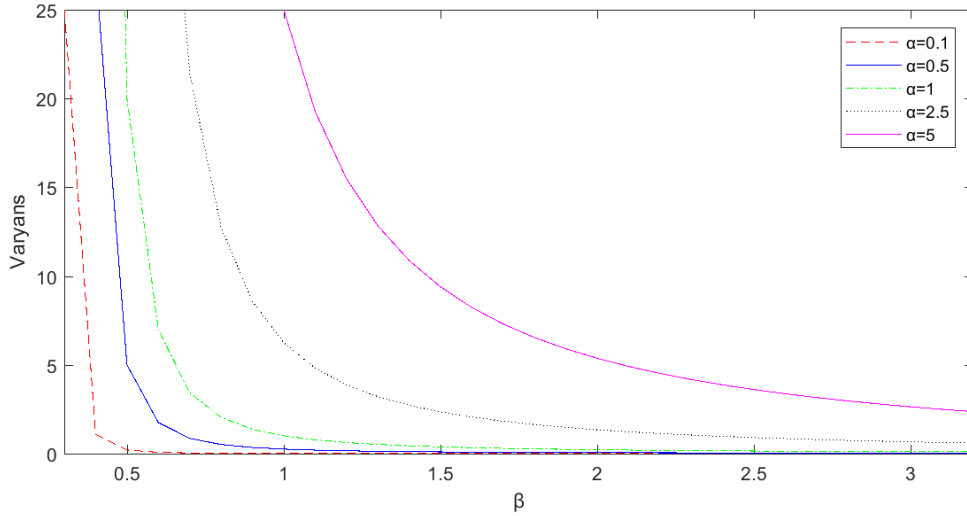
$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.9'da sonuçları gösterilen çalışmada şekil parametrelerinin değeri 0,5 olan ($\beta_1 = \beta_2 = 0,5$) iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Her bir hücredeki verilerin hangi dağılımdan geldiğini gösteren grafikte olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu, yüksek güçlü ortamda ise girişim yaşandığı görülmektedir.

Dağılımların parametreleri				Kestirilen parametreler					Yüksek güçlü bölge tespit başarısı
α_1	α_2	β_1, β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
0,5	5	3	0,5	0,5	5	3,1	3,1	0,5	32/32
0,5	5	2	0,5	0,51	5	2,1	2	0,5	32/32
0,5	5	1,5	0,5	0,53	5,2	1,6	1,7	0,49	32/32
0,5	5	0,75	0,5	1	9,5	0,88	1,6	0,36	31/32
0,5	5	0,50	0,5	3,3	8,0	0,72	0,89	0,45	24/32

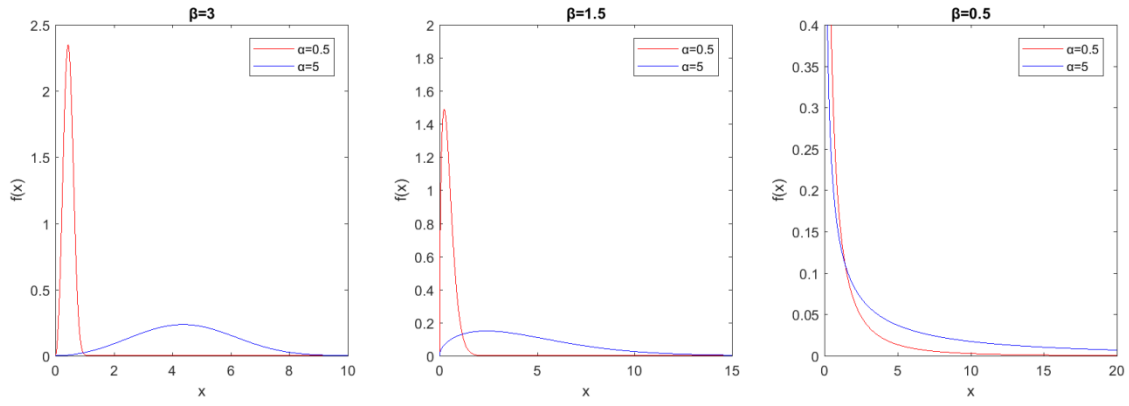
Tablo 6.3 Şekil parametresinin (β) kestirim başarımı üzerindeki etkisi

Tablo 6.3'de görüldüğü üzere şekil parametresinin (β) değeri azaldıkça kestirilen parametrelerin hata oranları artmış, buna bağlı olarak yüksek güçlü ortam tespiti zorlaşmıştır. Şekil 6.10'da varyansın şekil parametresine göre değişimi gösterilmiştir. Şekil parametresi (β) azaldıkça varyansın dramatik bir şekilde arttığı görülmektedir.



Şekil 6.10 Varyansın şekil parametresine göre değişim grafiği

Şekil 6.11'de şekil parametresinin üç farklı ($\beta = 3$, $\beta = 1,5$ ve $\beta = 0,5$) değer aldığı ortamlarda farklı ölçek parametrelili ($\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$) dağılımların yoğunluk fonksiyonları gösterilmiştir. Varyansın yüksek olduğu ortamlarda kargaşalı ortam tespiti, varyansı düşük ortamlara göre daha zor olduğu gözlenmektedir.



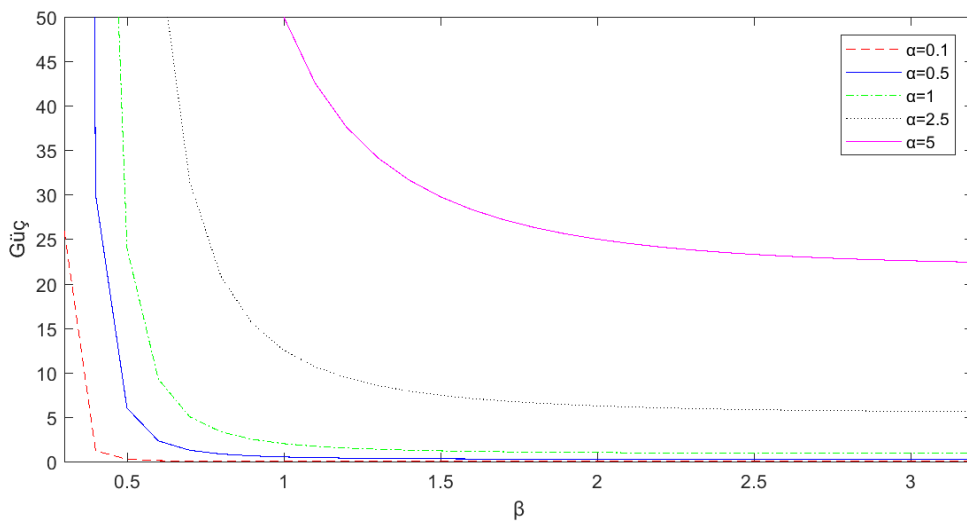
Şekil 6.11 $\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$ için dağılımların yoğunluk fonksiyonları

Buna göre şekil parametresi 3 ($\beta = 3$) iken, ölçek parametresi $\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$ iken dağılımların yüksek olasılıkla alabildiği değerlerin çok farklı olduğu, aynı zamanda dağılımların varyansının düşük olduğu görülmektedir.

Şekil parametresi 1,5 ($\beta = 1,5$) olduğunda dağılımların yüksek olasılıkla alabildiği değerlerin daha fazla kesiştiği, aynı şekilde dağılımların varyanslarının arttığı gözlemlenmektedir.

Şekil parametresi 0,5 ($\beta = 0,5$) durumunda ise dağılımların yüksek olasılıkla alabildiği değerlerin çoğunun kesiştiği ve dağılımların varyanslarının da çok yüksek olduğu görülmektedir.

Şekil 6.12'de Weibull dağılımının farklı ölçek parametreleri için, gücün şekil parametresine göre değişim grafiği verilmiştir.



Şekil 6.12 Gücün şekil parametresine göre değişim grafiği

Weibull dağılımının şekil parametresi arttıkça gücün azaldığı görülmektedir.

Şekil parametresi aynı olan ortamlarda farklı ölçek parametre değerleri ($\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$) için güç farkı, şekil parametresinin düşük olduğu ortamlarda daha yüksektir. Güç farkı değerinin ortamları ayırt etmede dolaylı olarak önemli bir rolü bulunsa da incelenen bu durum için işe yaramadığı görünmektedir.

Şekil parametresi düşük olduğu ortamlarda güç farkı artmasına rağmen ortamları ayırt etmeyi ve parametre kestirimini zorlaştıracak unsurlar (varyansın artması ve dağılımların yükek olasılıkla alabildiği değerlerin kesişmesi) meydana gelmektedir.

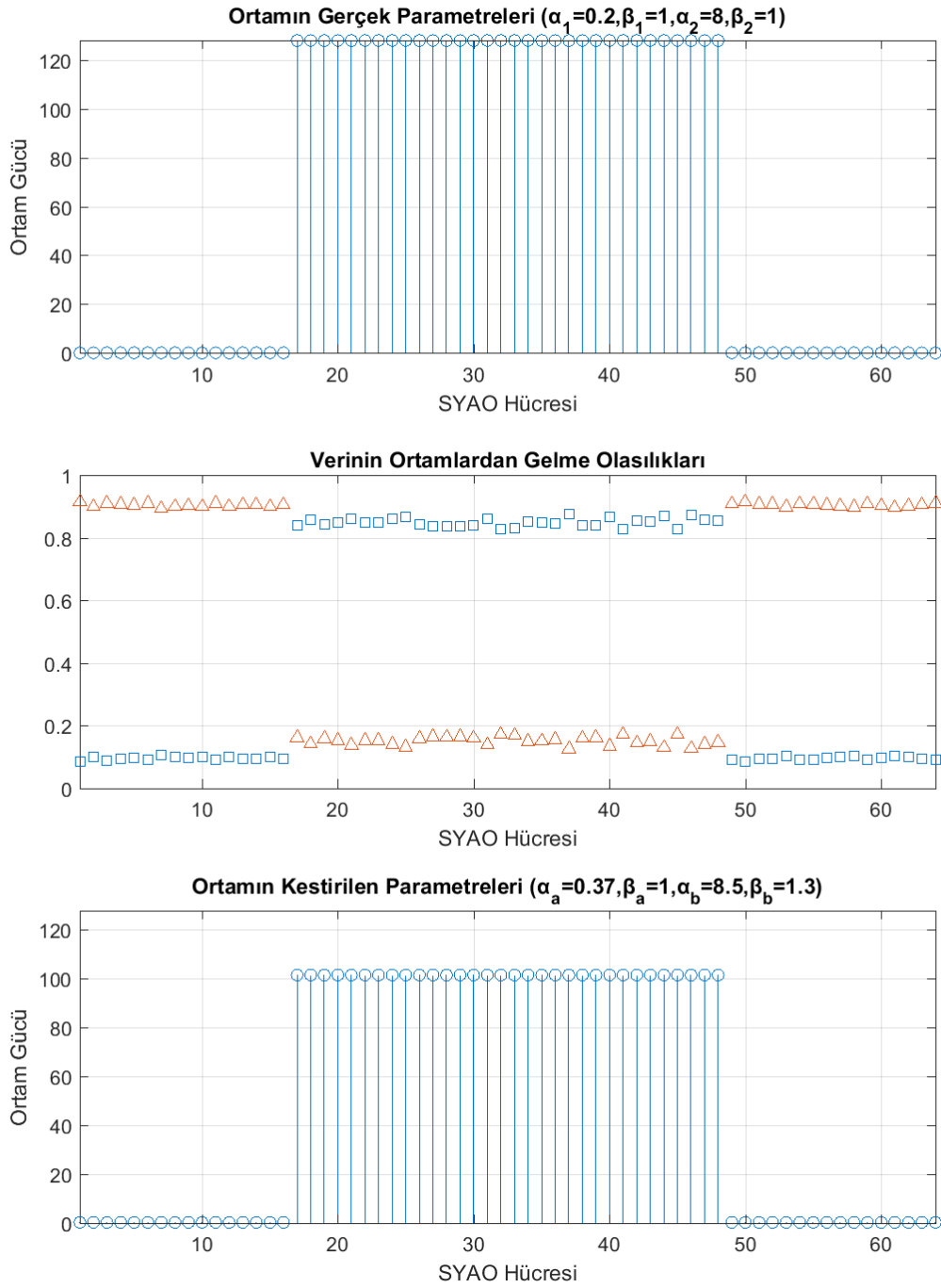
6.2.2 Ölçek parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\beta_1 = \beta_2, \bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$)

Weibull ortamlarda şekil parametrelerinin aynı olduğu ortamlarda ölçek parametrelerinin başarımlar üzerinde etkisini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri			BE algoritması için başlangıç değerleri				
α_1	α_2	$\beta_1 = \beta_2$	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
0,2	8	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
2,5	3,5	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.4 Ölçek parametrelerinin uzaklıklarının etkisini incelemek için bakılan durumlar

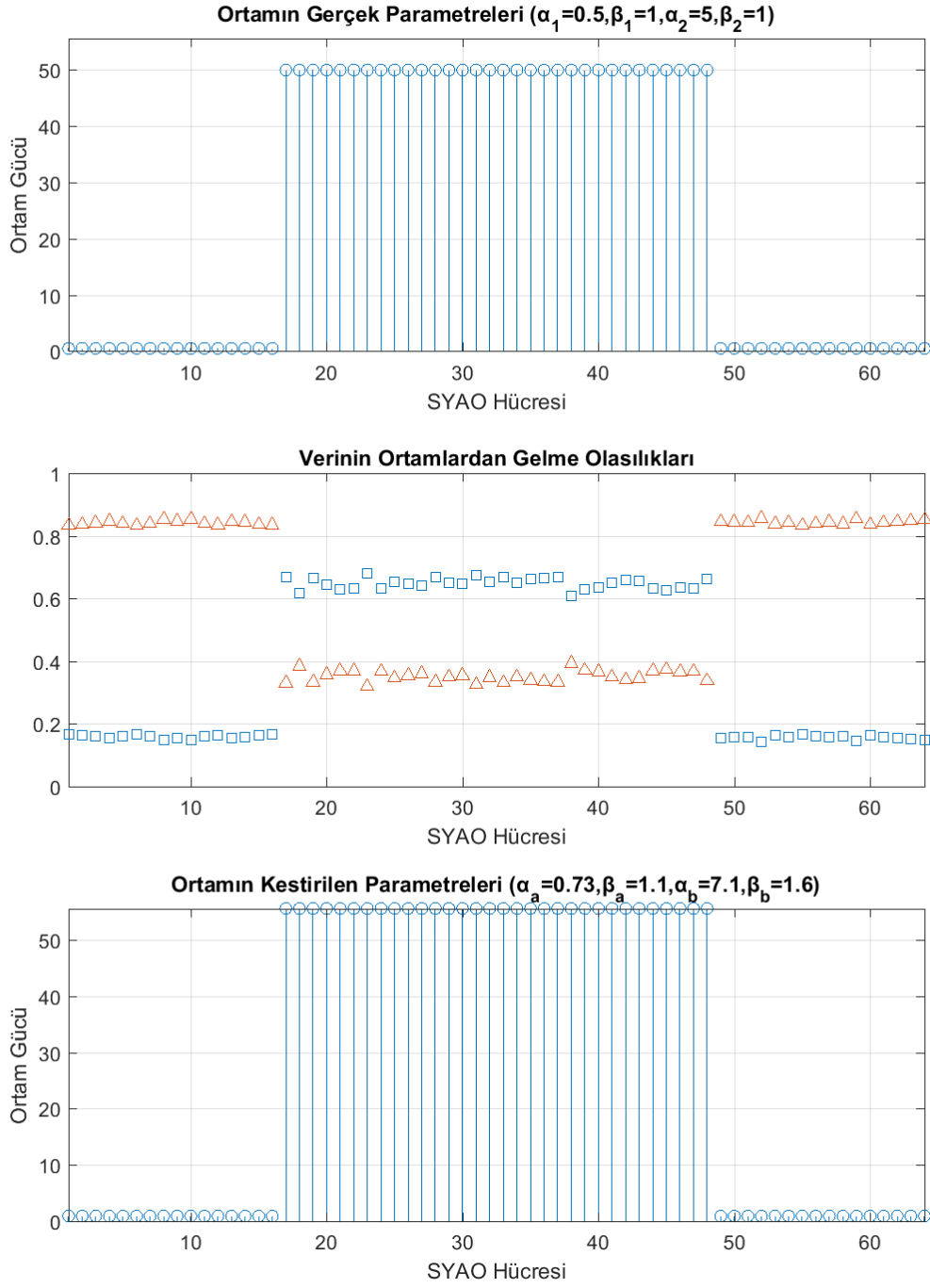
Burada parametrelerin başlangıç değerleri ve ortamdaki dağılımların şekil parametreleri sabit tutularak ölçek parametrelerinin birbirinden ayrık ya da yakın olmasının başarımlar üzerindeki etkisine bakılmıştır.



Şekil 6.13 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 0,2 ve 8 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \theta), \square: p(y = b|x_i, \theta))$$

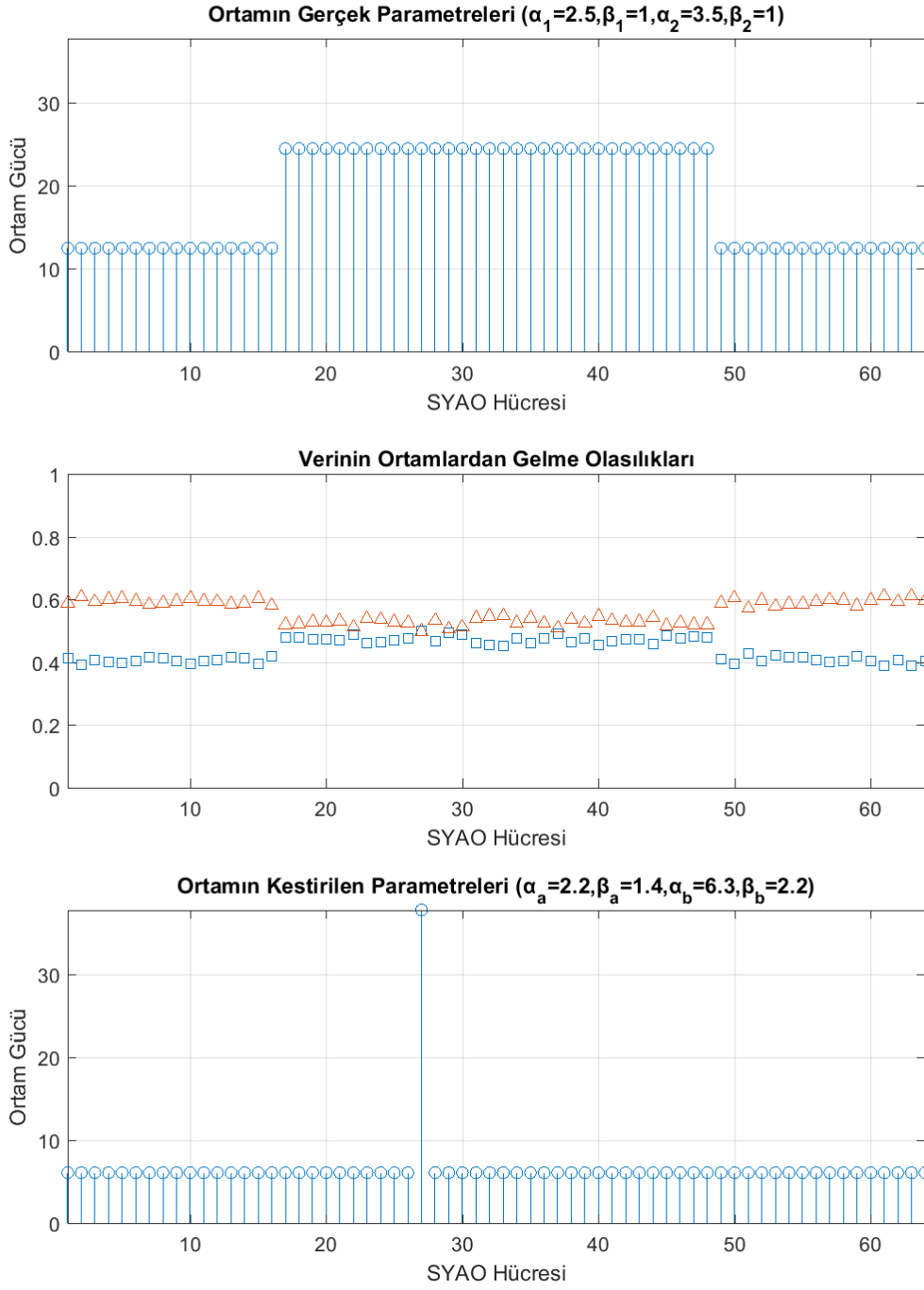
Şekil 6.13'te sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = 0,2$ ve $\alpha_2 = 8$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.14 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 0,5 ve 5 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.14'te sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = 0,5$ ve $\alpha_2 = 5$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.15 $\beta = 1$ iken ölçek parametrelerinin 2,5 ve 3,5 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \theta), \square: p(y = b|x_i, \theta))$$

Şekil 6.15'de sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = 2,5$ ve $\alpha_2 = 3,5$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Yüksek güçlü kargaşalı bölgedeki çoğu hücrenin birinci ortamdaki gelme olasılığı daha yüksek çıktığı için kargaşalı ortam başarılı bir şekilde tespit edilememiştir.

Dağılımların parametreleri				Kestirilen parametreler					Kargaşa tespit başarısı
α_1	α_2	β_1, β_2	q	α_1	α_2	β_1	β_2	q	
0,2	8	1	0,5	0,37	8,5	1	1,3	0,47	32/32
0,5	5	1	0,5	0,73	7,1	1,1	1,6	0,4	32/32
2,5	3,5	1	0,5	2,2	6,3	1,4	2,2	0,44	1/32

Tablo 6.5 Ölçek parametresinin uzaklıklarının etkisi

Tablo 6.5'te görüldüğü üzere ölçek parametreleri birbirine yakınlaştıkça kestirilen parametrelerin hata oranları artmış, ve kargaşalı ortam tespiti zorlaşmıştır.

Bu analizde açıkça görülmektedir ki ölçek parametrelerinin birbirlerine göre uzaklıkları Cramer Rao sınırına yaklaştıkça parametre kestirim başarımları azalmakta buna bağlı olarak kargaşa tespit başarısı da azalmaktadır.

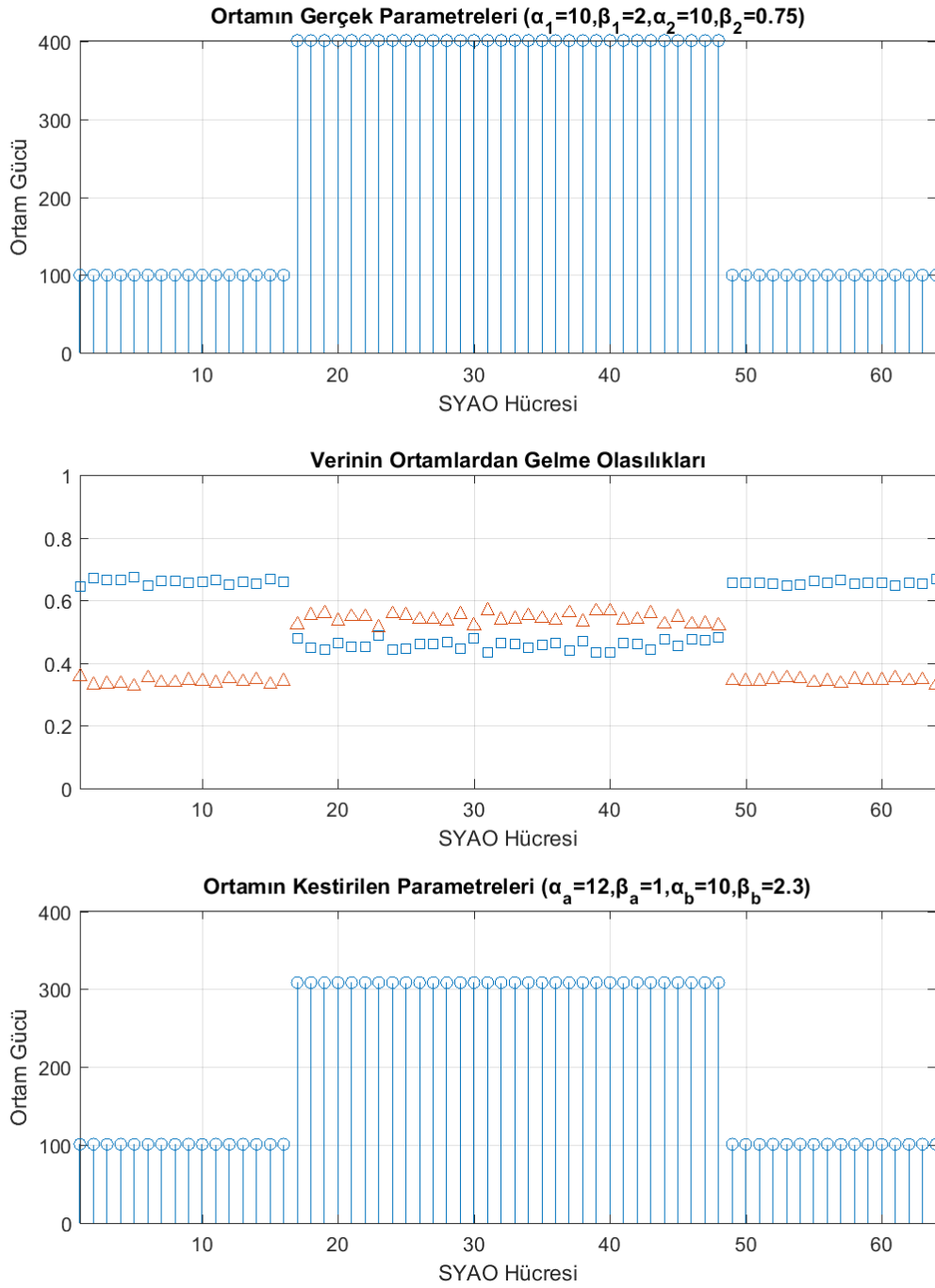
6.2.3 Ölçek parametresinin başarımlar üzerinde etkisi ($\beta_1 \neq \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2 = \vec{c}$)

Weibull dağılımının ölçek parametresinin başarımlar üzerine etkisini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri			BE algoritması için başlangıç değerleri				
$\alpha_1 = \alpha_2$	β_1	β_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
10	2	0,75	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
5	2	0,75	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
1	2	0,75	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.6 Ölçek parametrelerinin etkisini incelemek için bakılan durumlar

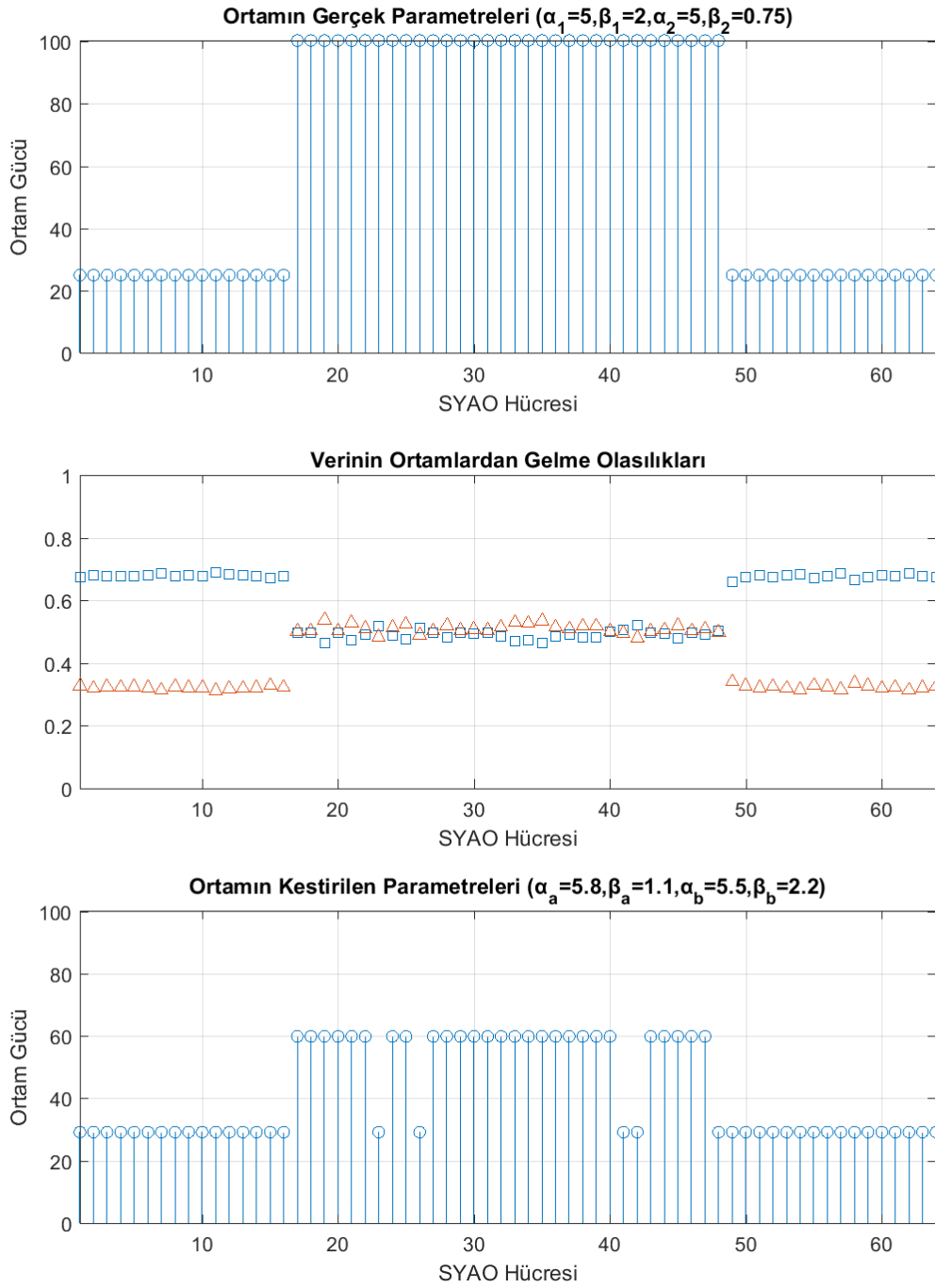
Bu bölümde Weibull dağılımların şekil parametreleri farklı, ölçek parametreleri aynı olan ortamlardaki ölçek parametresinin farklı değerlerinin etkisi incelenmiştir.



Şekil 6.16 Ölçek parametrelerinin 10 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

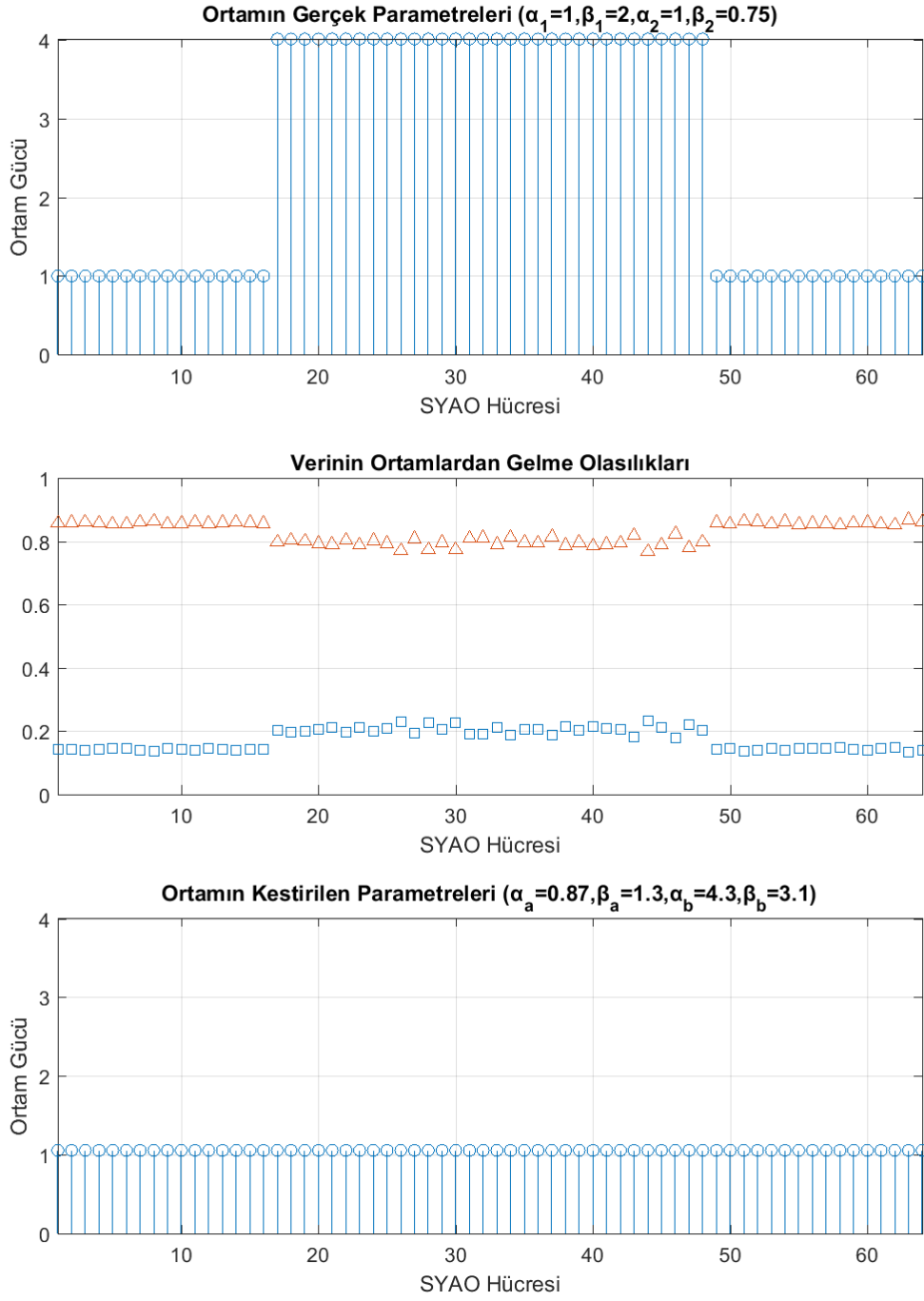
Şekil 6.16'da sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.17 Ölçek parametrelerinin 5 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.17'de sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. İkinci grafikte görüldüğü gibi yüksek güçlü kargaşalı ortamda olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu ve girişim yaşandığı görülmektedir.



Şekil 6.18 Ölçek parametrelerinin 1 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.18'de sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edilemediği görülmektedir.

Tablo 6.7’de görüldüğü üzere ölçek parametresi küçüldükçe kestirilen parametrelerin hata oranları artmış, ve kargaşalı ortam tespiti zorlaşmıştır.

Dağılımların parametreleri				Kestirilen parametreler					Yüksek güçlü bölge tespit başarısı
$\alpha_1 = \alpha_2$	β_1	β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
10	2	0,75	0,5	10	12	2,3	1	0,44	32/32
5	2	0,75	0,5	5,5	5,8	2,2	1,1	0,42	28/32
1	2	0,75	0,5	0,87	4,3	1,3	3,1	0,17	0/32

Tablo 6.7 Ölçek parametresinin (α) kestirim başarımı üzerindeki etkisi

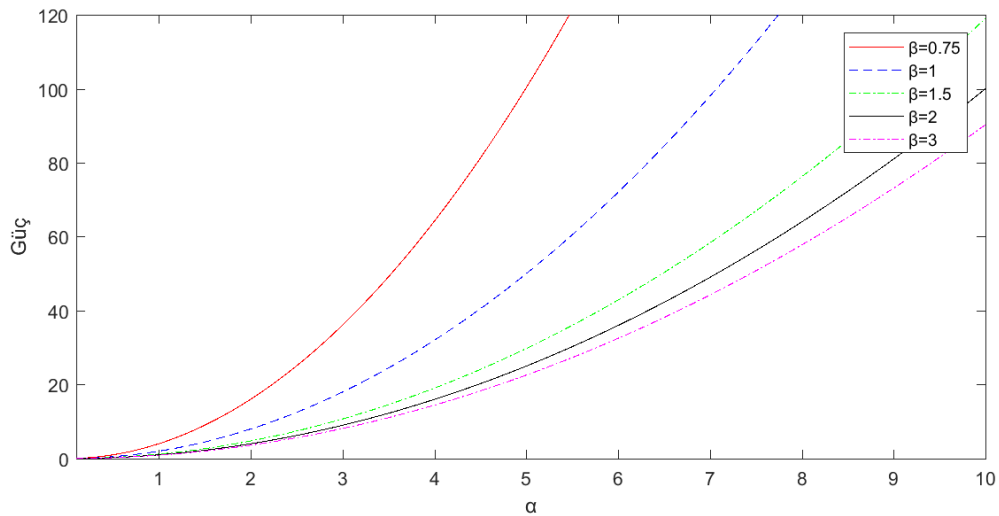
Ortamdaki iki farklı dağılıma sahip bölgelerin güç farkları $\alpha_2 = \alpha_1$ durumu için aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$E[X_1^2] - E[X_2^2] = \alpha_1^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta_1}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta_2}\right) \right) \quad (6.27)$$

Yukardaki ifadede $\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta_1}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta_2}\right) \right)$ terimi incelenen durumlar için sabittir.

Dağılımlar arasındaki güç farkı α_1 'in aldığı değerlerin karesiyle doğru orantılı olduğu görülmektedir.

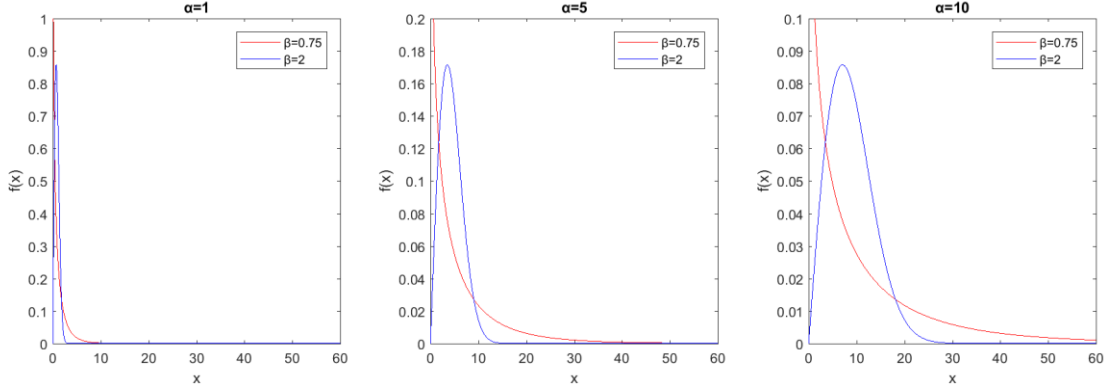
Şekil 6.19’da Weibull dağılımının farklı şekil parametreleri için, gücün ölçek parametresine göre değişim grafiği verilmiştir.



Şekil 6.19 Gücün ölçek parametresine göre değişim grafiği

Ölçek parametresi arttıkça iki farklı şekil parametresine sahip dağılım arasındaki güç farkının da arttığı gözlemlenmektedir.

Şekil 6.20’de ölçek parametresinin üç farklı ($\alpha = 1$, $\alpha = 5$ ve $\alpha = 10$) değer aldığı ortamlarda farklı şekil parametrelerine sahip ($\beta_1 = 0,75$ ve $\beta_2 = 2$) dağılımların yoğunluk fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 6.20 $\beta_1 = 0,75$ ve $\beta_2 = 2$ için dağılımların yoğunluk fonksiyonları

Ölçek parametre değerinin daha yüksek olduğu durumlarda ortamın ayırt edilebilirliğinin arttığı görülmektedir.

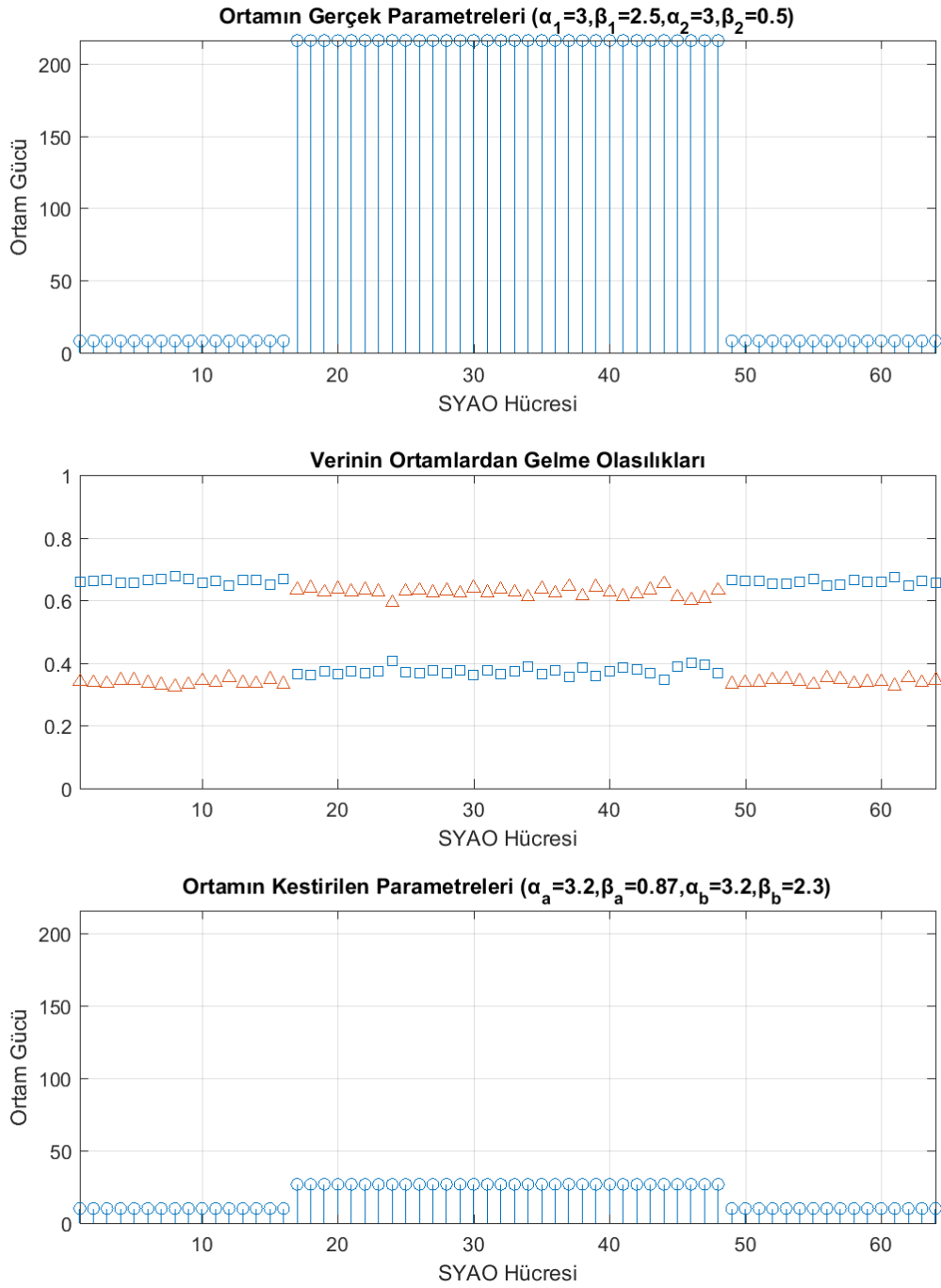
6.2.4 Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisi ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\overline{\beta_1} \neq \overline{\beta_2}$)

Weibull ortamlarda ölçek parametrelerinin aynı olduğu zaman şekil parametrelerinin başarımlar üzerinde etkisini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri			BE algoritması için başlangıç değerleri				
$\alpha_1 = \alpha_2$	β_1	β_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
3	2,5	0,5	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
3	1,8	0,75	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.8 Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisini incelemek için bakılan durumlar

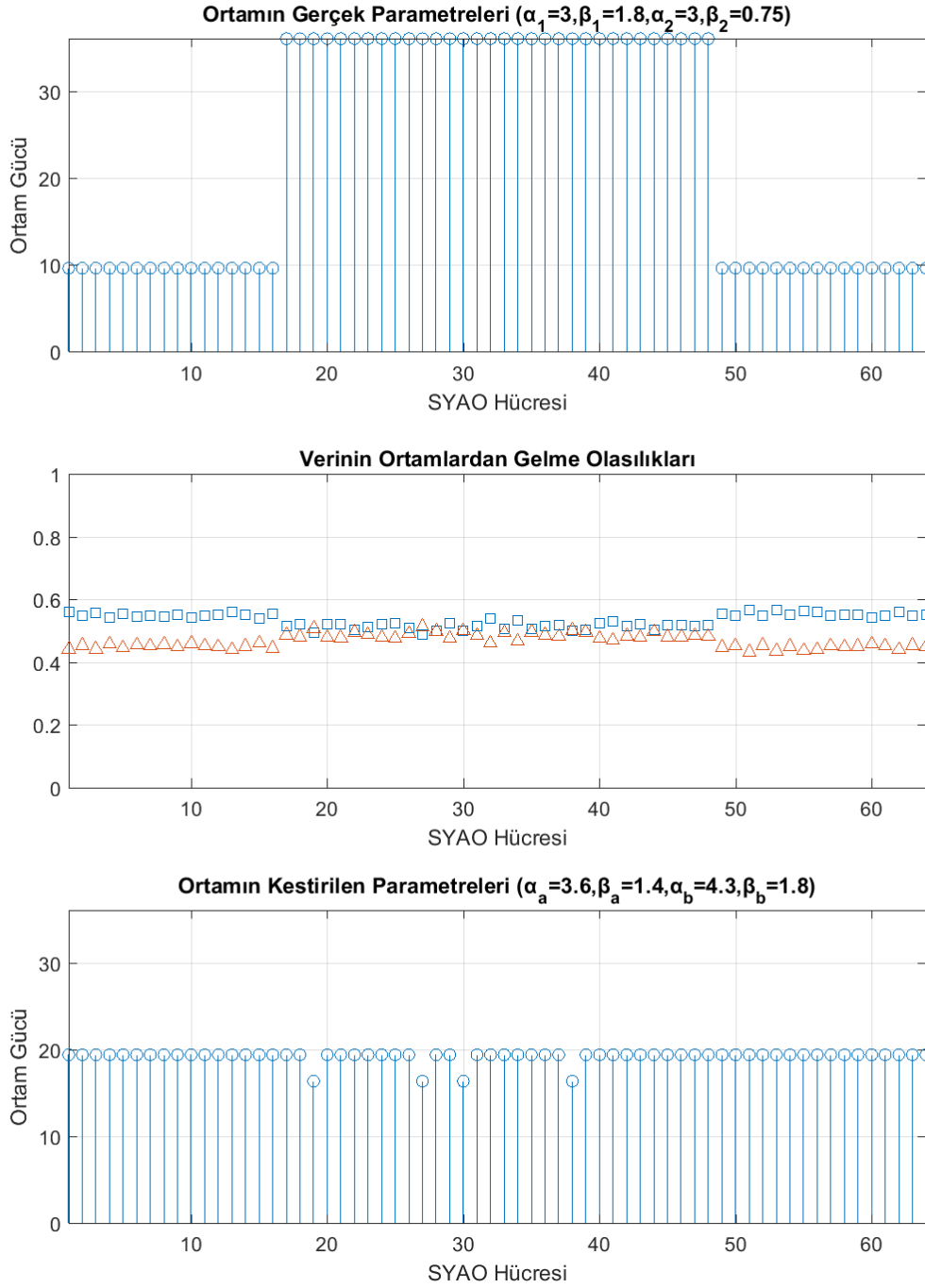
Burada parametrelerin başlangıç değerleri ve ortamdaki dağılımların ölçek parametreleri sabit tutularak şekil parametrelerinin birbirinden ayrık ya da yakın olmasının başarımlar üzerindeki etkisine bakılmıştır.



Şekil 6.21 Şekil parametrelerinin 2,5 ve 0,5 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.21'de sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların şekil parametreleri $\beta_1 = 2,5$ ve $\beta_2 = 0,5$ olan iki farklı dağılımdan oluşan ortam incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.22 Şekil parametrelerinin 1,8 ve 0,75 olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.22’de sonuçları gösterilen çalışmada ortamdaki dağılımların şekil parametreleri $\beta_1 = 1,8$ ve $\beta_2 = 0,75$ olan ortam incelenmiştir. Her bir hücredeki verilerin hangi dağılımdan geldiğini gösteren grafikte olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu, kargaşalı ortamda ise girişim yaşandığı görülmektedir.

Dağılımların parametreleri				Kestirilen parametreler					Yüksek güçlü bölge tespit başarısı
$\alpha_1 = \alpha_2$	β_1	β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
3	2,5	0,5	0,5	3,2	3,2	2,3	0,87	0,48	32/32
3	1,8	0,75	0,5	4,3	3,6	1,8	1,1	0,47	4/32

Tablo 6.9 Şekil parametrelerinin uzaklıklarının etkisi

Tablo 6.9’da görüldüğü üzere şekil parametreleri birbirine yakınlaştıkça kestirilen parametrelerin hata oranları artmış, ve kargaşalı ortam tespiti zorlaşmıştır.

Şekil parametrelerinin birbirlerine göre uzaklıkları Cramer Rao sınırına yaklaştıkça parametre kestirim başarımları azalmakta buna bağlı olarak kargaşa tespit başarısı da azalmaktadır.

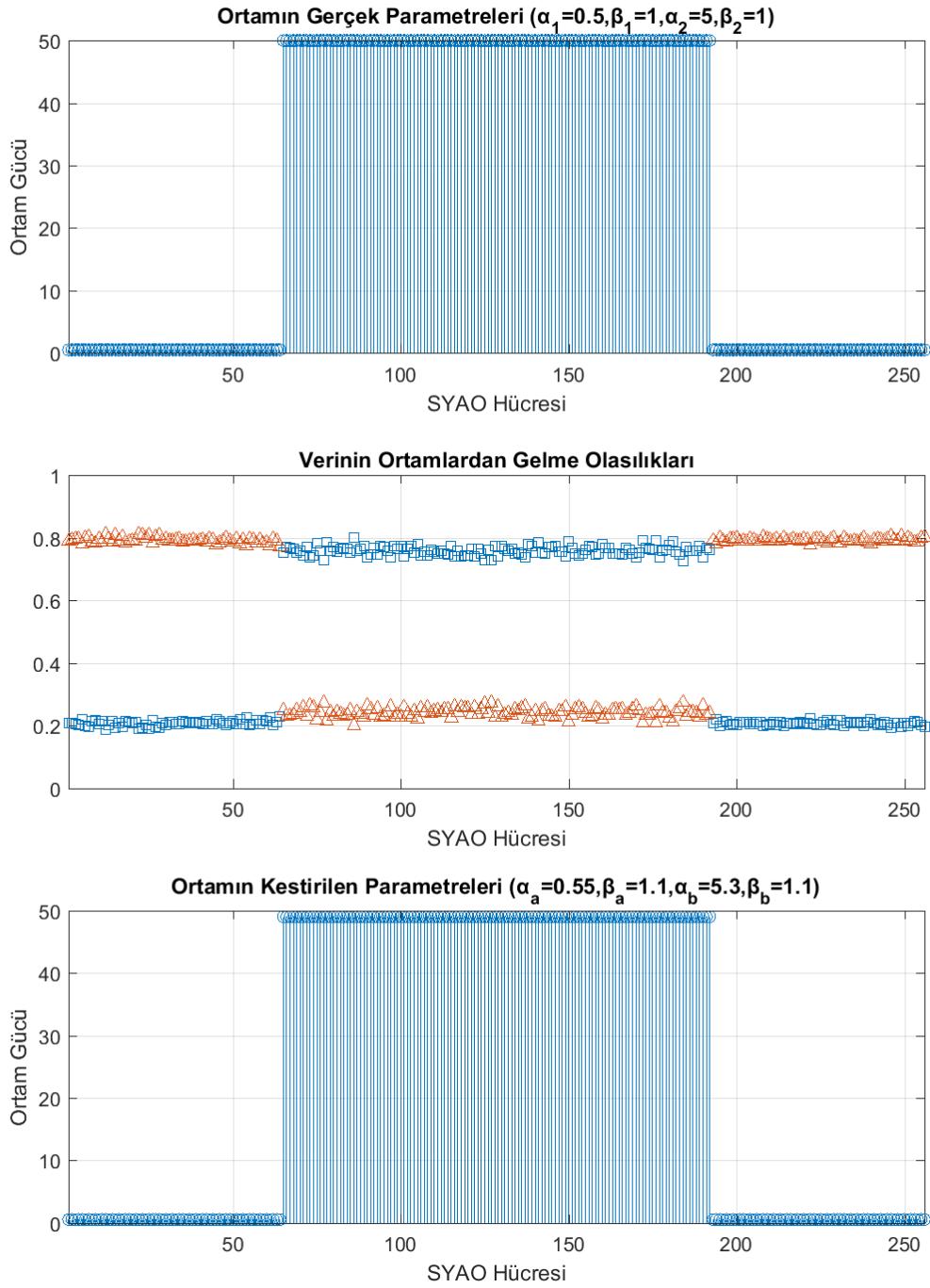
6.2.5 SYAO referans hücre sayısının başarımlar üzerinde etkisi

SYAO referans hücre sayısının BE algoritmasının başarımlar üzerindeki etkisini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri			Hücre sayısı	BE algoritması için başlangıç değerleri			
α_1	α_2	$\beta_1 = \beta_2$		α_1	α_2	$\beta_1 = \beta_2$	q_2
0,5	5	1	256	1,25	3,75	1	0,35
0,5	5	1	128	1,25	3,75	1	0,35
0,5	5	1	64	1,25	3,75	1	0,35
0,5	5	1	32	1,25	3,75	1	0,35
0,5	5	1	16	1,25	3,75	1	0,35

Tablo 6.10 SYAO referans hücre sayısının etkisini incelemek için incelenen durumlar

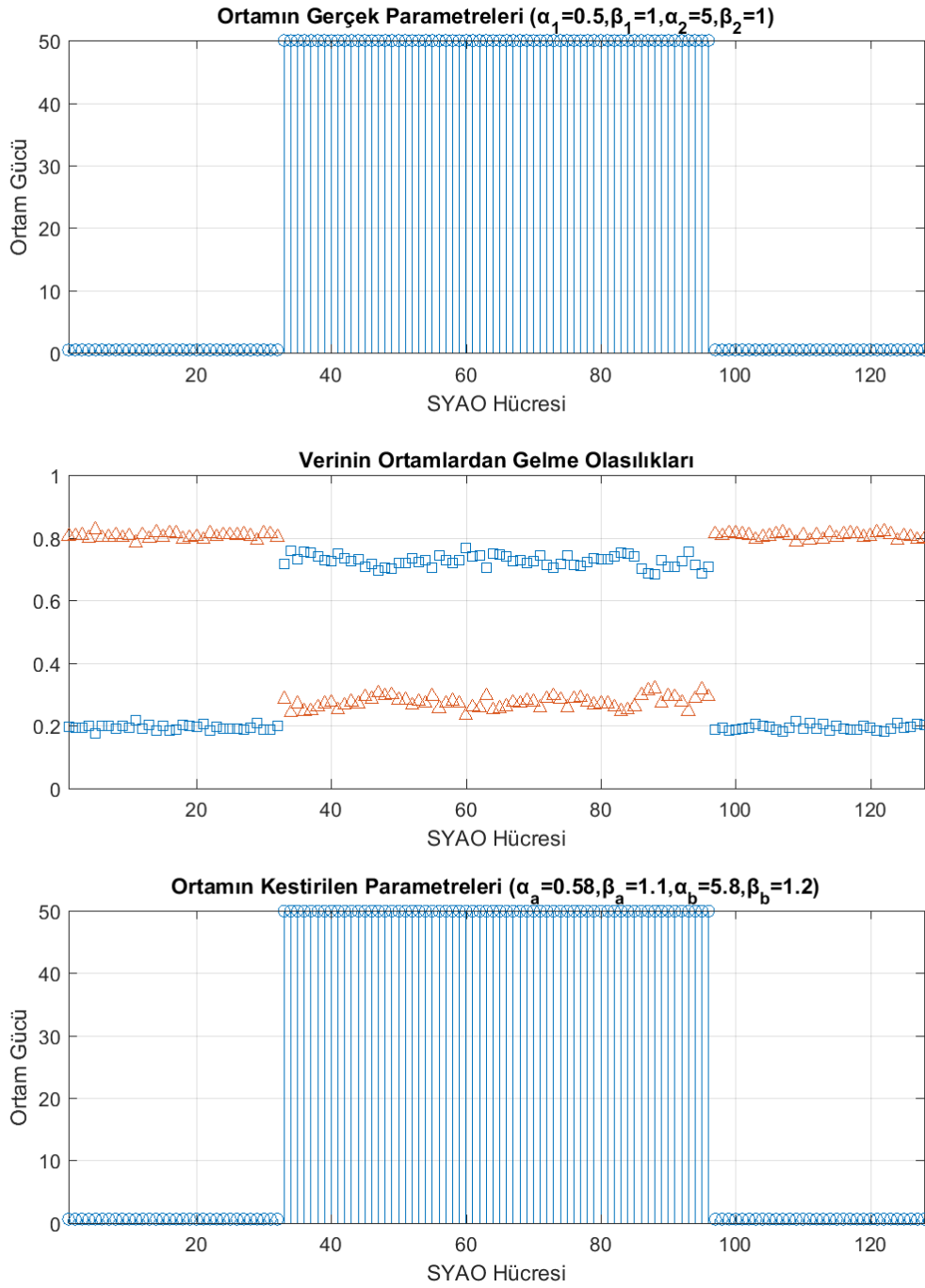
Burada parametrelerin başlangıç değerleri ile ortamdaki dağılımların ölçek ve şekil parametreleri ve kargaşalı ortamın ortamdaki bulunma oranı sabit tutularak SYAO referans hücre sayısının başarımlar üzerindeki etkisine bakılmıştır.



Şekil 6.23 SYAO Referans hücre sayısının 256 olması durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

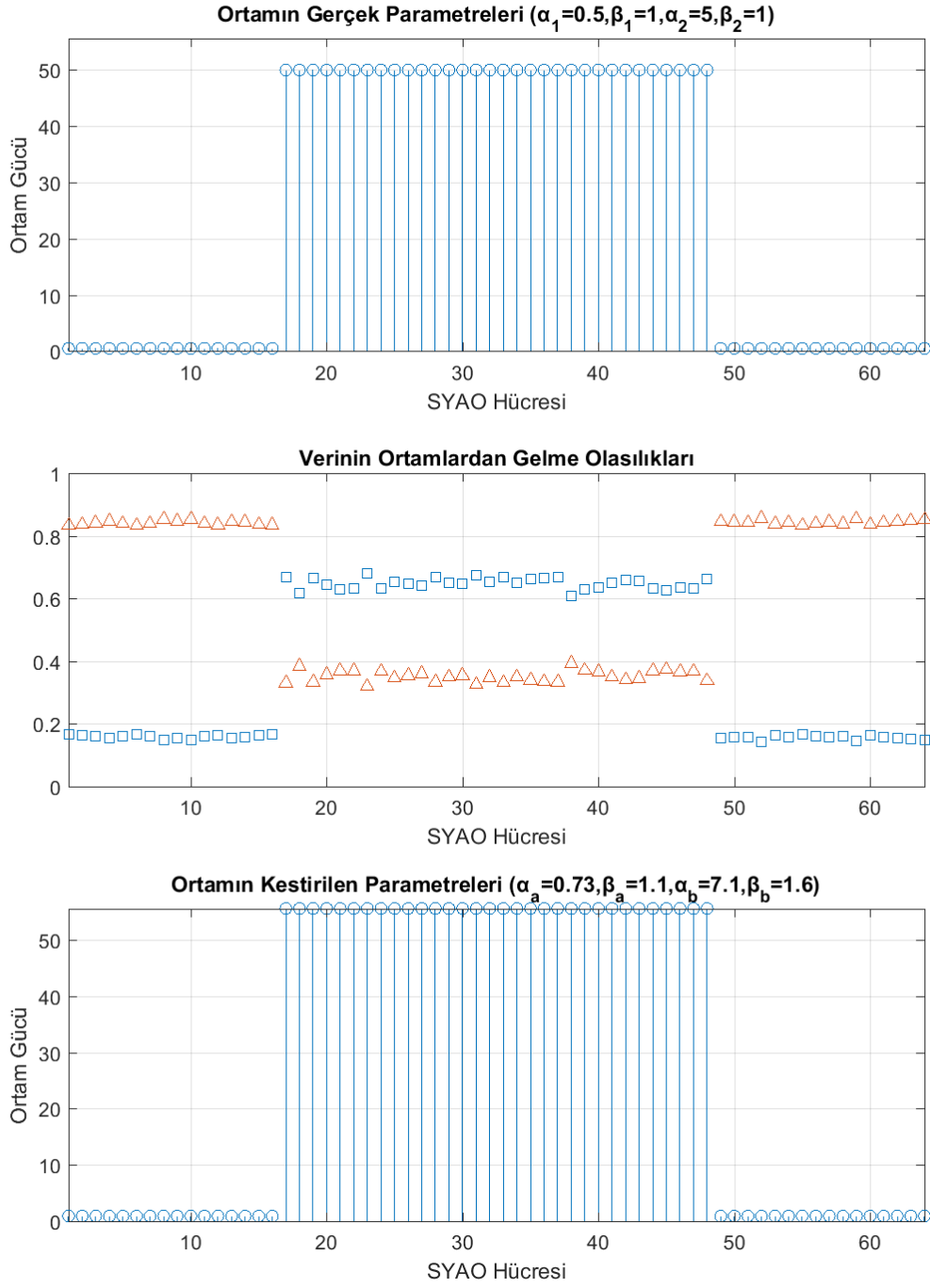
Şekil 6.23'te sonuçları gösterilen çalışmada SYAO referans hücre sayısının 256 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.24 SYAO referans hücre sayısının 128 olması durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

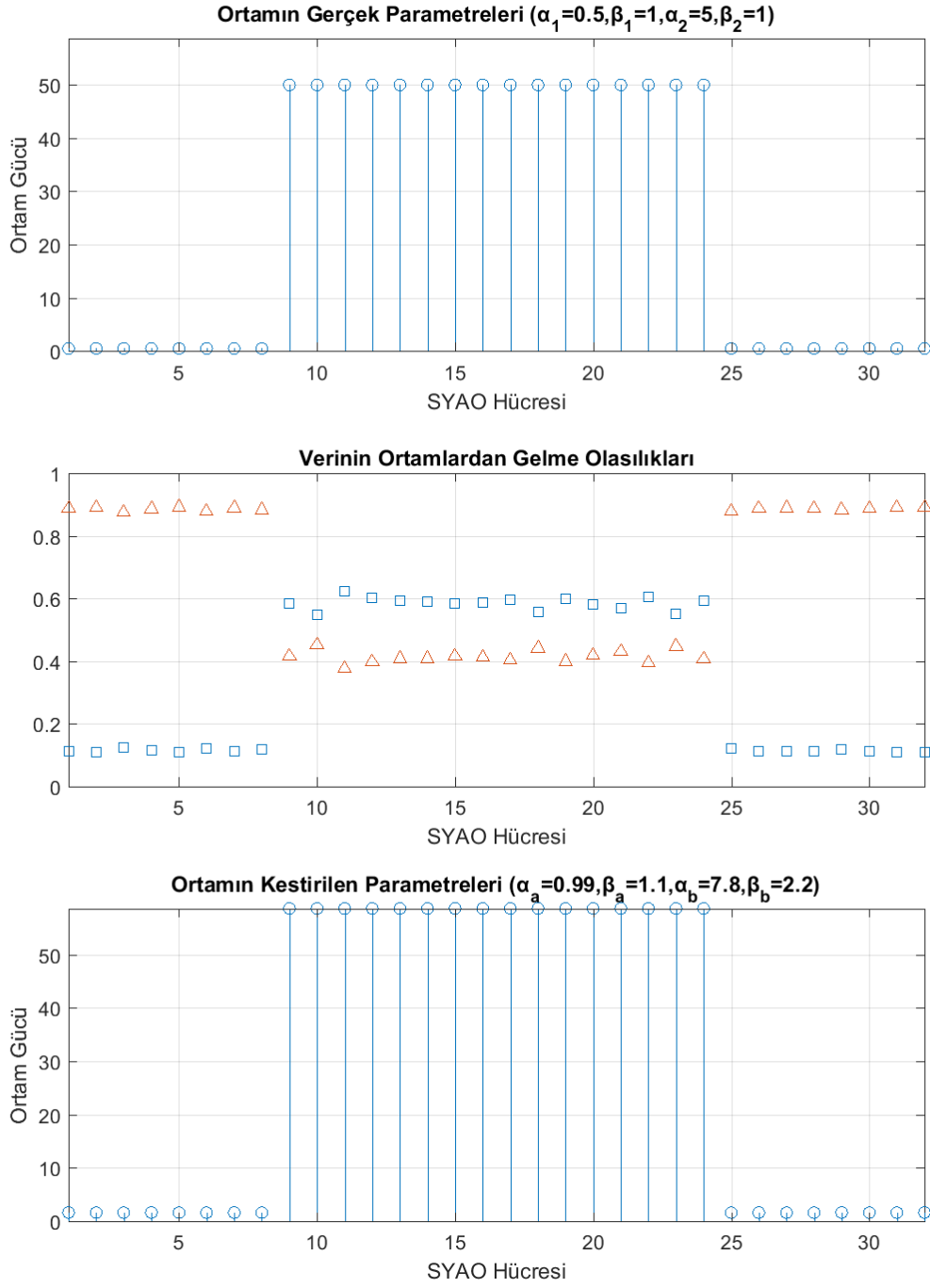
Şekil 6.24'te sonuçları gösterilen çalışmada SYAO referans hücre sayısının 128 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.25 SYAO referans hücre sayısının 64 olması durumu

$$(\Delta: p(\mathbf{y} = \mathbf{a} | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \square: p(\mathbf{y} = \mathbf{b} | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

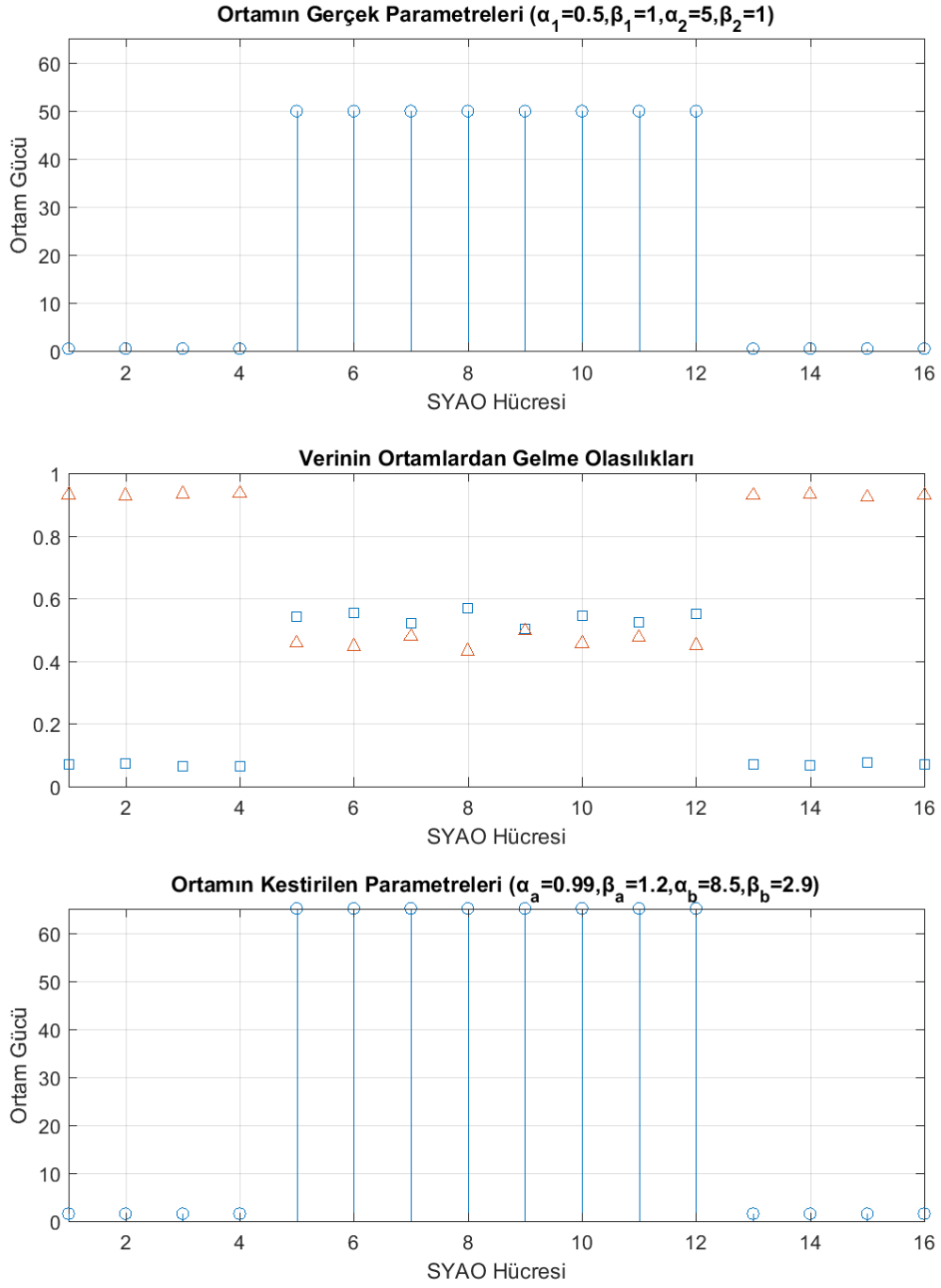
Şekil 6.25'te sonuçları gösterilen çalışmada SYAO referans hücre sayısının 64 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.26 SYAO hücre sayısının 32 olması durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.26'da sonuçları gösterilen çalışmada SYAO hücre sayısının 32 olduğu durum incelenmiştir. Verilerin hangi dağılımdan geldiğini gösteren grafikte kargaşalı ortamda olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu gözlemlenmesine rağmen kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.27 SYAO hücre sayısının 16 olması durumu

$$(\Delta: p(y = a | x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b | x_i, \hat{\theta}))$$

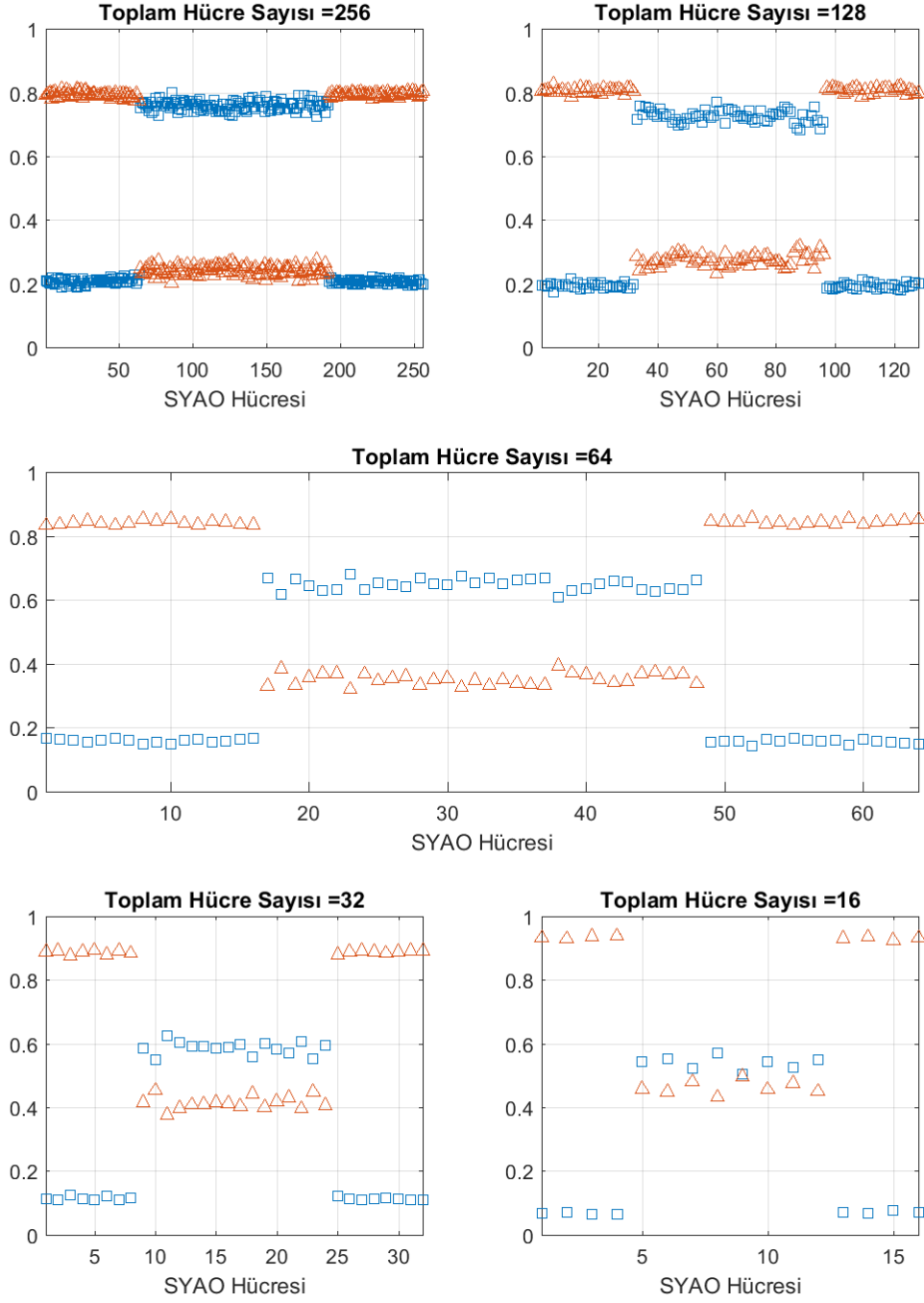
Şekil 6.27'de sonuçları gösterilen çalışmada SYAO hücre sayısının 16 olduğu durum incelenmiştir. Verilerin hangi dağılımdan geldiğini gösteren grafikte kargaşalı ortamda olasılık değerlerinin birbirine yakın olduğu gözlemlenmesine rağmen kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.

Dağılımların parametreleri				Hücre sayısı	Kestirilen parametreler					Yüksek güçlü bölge tespit başarısı
α_1	α_2	β_1, β_2	q_2		α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
0,5	5	1	0,5	256	0,55	5,3	1,1	1,1	0,48	128/128
0,5	5	1	0,5	128	0,58	5,8	1,1	1,2	0,46	64/64
0,5	5	1	0,5	64	0,73	7,1	1,1	1,6	0,4	32/32
0,5	5	1	0,5	32	0,99	7,8	1,1	2,2	0,35	16/16
0,5	5	1	0,5	16	0,99	8,5	1,2	2,9	0,3	8/8

Tablo 6.11 SYAO referans hücre sayısının etkisini incelemek üzere bakılan durumlar

Tablo 6.11’de görüldüğü üzere SYAO referans hücre sayısının azalması durumunda kestirilen parametrelerin hata oranlarının arttığı gözlemlenmiştir.

İncelenen durumlar için verilerin ortamlardan gelme olasılıkları grafikleri bir arada Şekil 6.28’de gösterilmiştir. Hücre sayısı düştükçe kargaşalı ortamın tespitinin zorlaştığı görülmektedir. Örneğin SYAO referans hücre sayısı 256 iken gerçekte kargaşalı bölgedeki bir hücrenin kargaşalı bölgeden gelme olasılığı 0.8’e yakın iken, SYAO referans hücre sayısı azaldıkça bu oran düşmekte ve SYAO referans hücre sayısı 16 iken gerçekte kargaşalı bölgedeki bir hücrenin kargaşalı bölgeden gelme olasılığı 0.5’e yakın bir değer hesaplanmaktadır.



Şekil 6.28 Referans hücre sayısının verilerin ortamlardan gelme olasılıkları üzerindeki etkisi

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

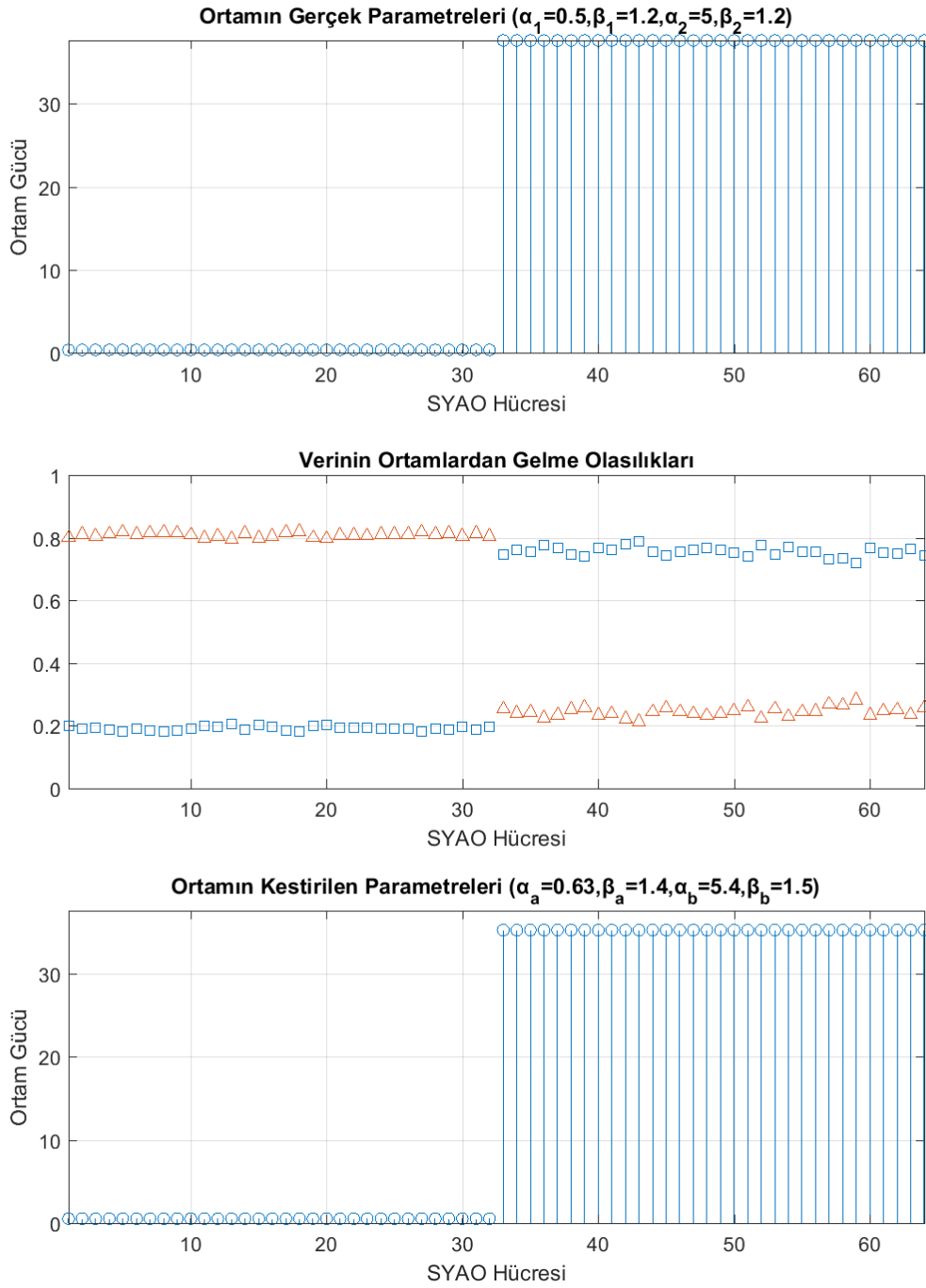
6.2.6 İki seviyeli ortamın dağılım şeklinin başarımlar üzerinde etkisi

Ortamdaki kargaşanın dağılım şeklinin başarımlar üzerine etkisini incelemek için ortamdaki kargaşalı alanın dağılımı değiştirilerek aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri				Dağılımlar arası geçiş sayısı	BE algoritması için başlangıç değerleri				
α_1	α_2	$\beta_1 = \beta_2$	q_2		α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
0,5	5	1,2	0,5	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	1,2	0,5	3	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	1,2	0,5	7	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	1,2	0,5	15	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.12 Dağılım şeklinin etkisini incelemek için bakılan durumlar

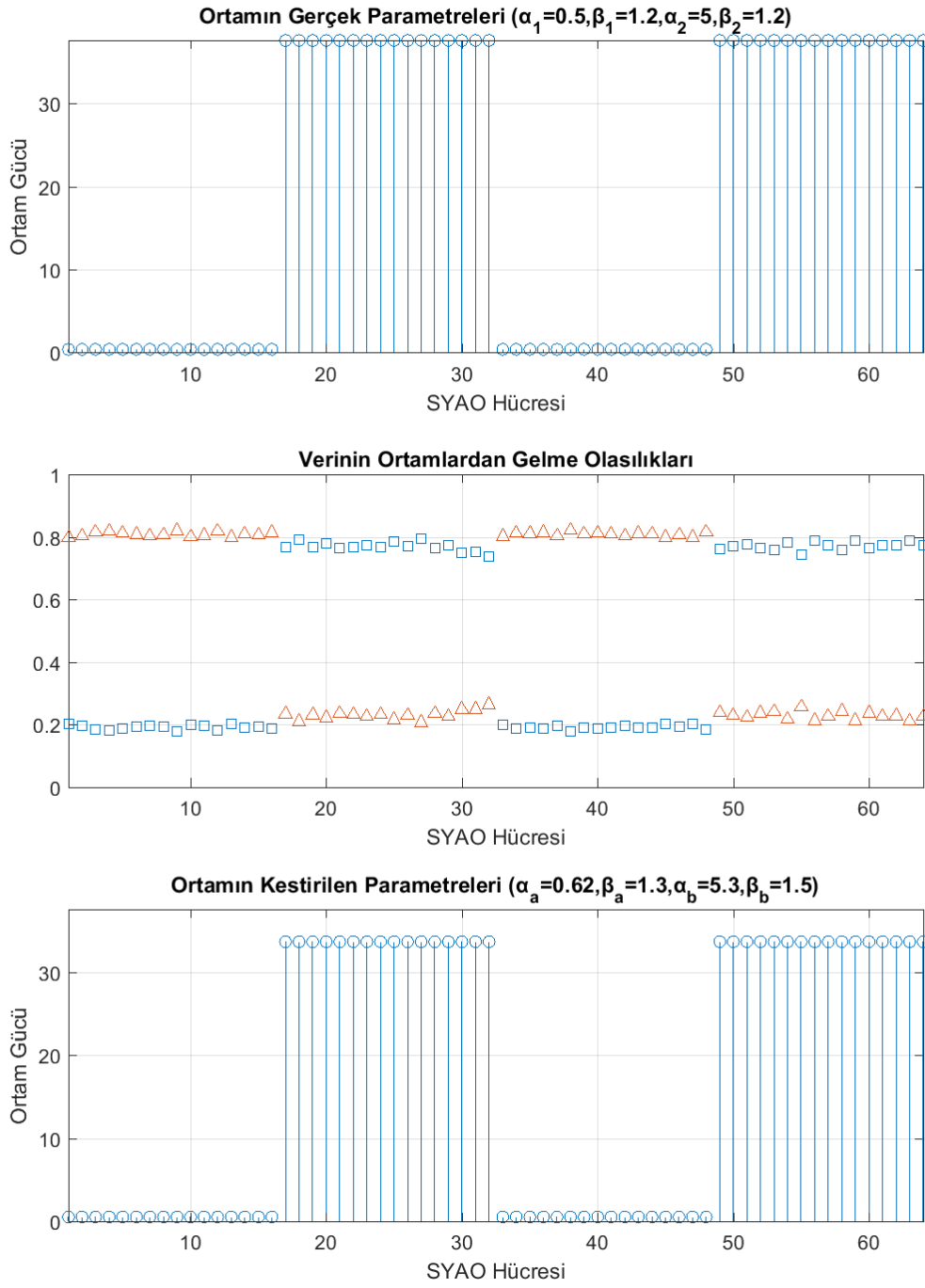
Parametrelerin başlangıç değerleri ile ortamdaki dağılımların ölçek ve şekil parametreleri ile birlikte kargaşalı bölgelerin ortamda bulunma oranları sabit tutularak kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısı değiştirilmiş ve bölgeler arasındaki geçiş sayılarının başarımlar üzerindeki etkisine bakılmıştır.



Şekil 6.29 Dağılımlar arası geçiş sayısının 1 olduğu durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

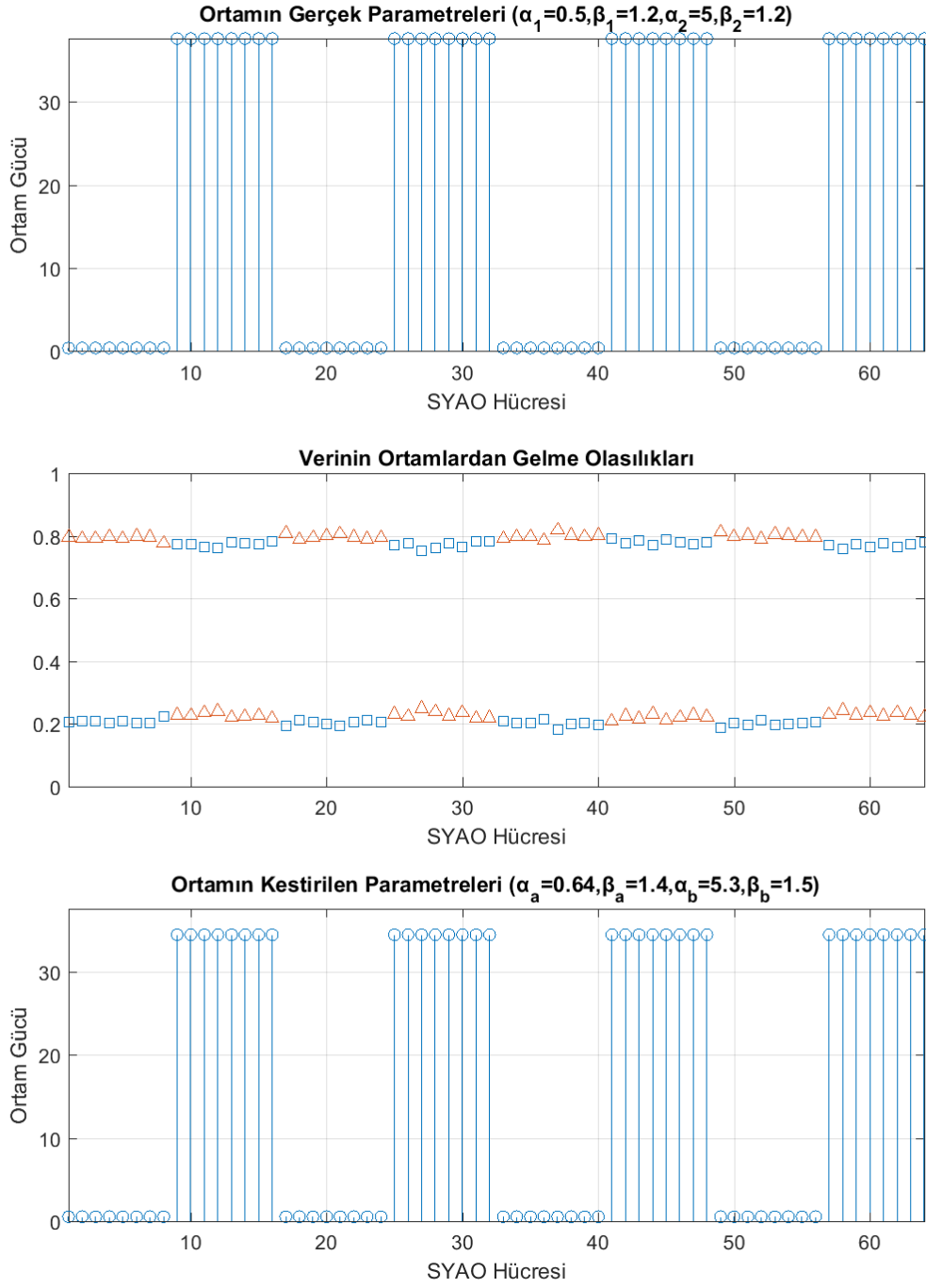
Şekil 6.29'da sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısının 1 olduğu durum incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.30 Dağılımlar arası geçiş sayısının 3 olduğu durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

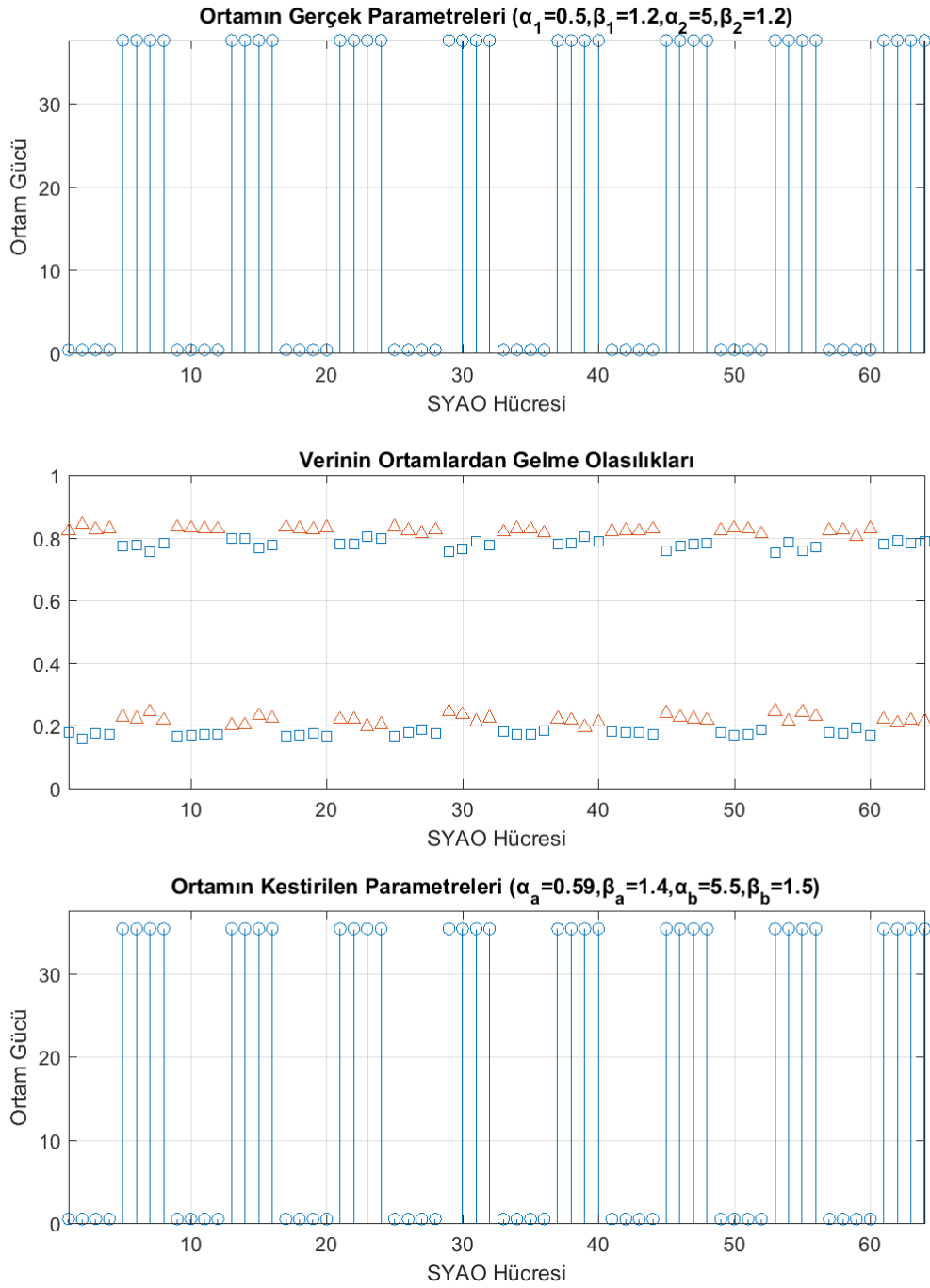
Şekil 6.30'da sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısının 3 olduğu durum incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.31 Dağılımlar arası geçiş sayısının 7 olduğu durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.31’de sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısının 7 olduğu durum incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.32 Dağılımlar arası geçiş sayısının 15 olduğu durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.32’de sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısının 15 olduğu durum incelenmiştir. Yüksek güçlü ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.

Tablo 6.13'de görüldüğü üzere kargaşalı bölgeler arasındaki geçiş sayısı değişse bile BE yöntemiyle başarılı bir şekilde tespit edilebilmektedir. Ortamdaki kargaşanın dağılım şeklinin başarıya üzerine herhangi bir etkisi olmadığı görülmüştür. Ortamdaki yüksek güçlü bölgenin tek bölgede toplanmış olması veya 8 farklı bölgeye dağılmış olması ne parametre kestirimlerini ne de kargaşalı bölgelerin tespitindeki başarıyı etkilememiştir.

Dağılımların parametreleri				Dağılımlar arası geçiş sayısı	Kestirilen parametreler					Yüksek güçlü bölge tespit başarısı
α_1	α_2	β_1, β_2	q_2		α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
0,5	5	1,2	0,5	1	0,63	5,4	1,4	1,5	0,47	32/32
0,5	5	1,2	0,5	3	0,62	5,3	1,3	1,5	0,48	32/32
0,5	5	1,2	0,5	7	0,63	5,3	1,4	1,5	0,49	32/32
0,5	5	1,2	0,5	15	0,59	5,5	1,4	1,5	0,48	32/32

Tablo 6.13 Ortamdaki bölgelerin dağılım şeklinin etkisi

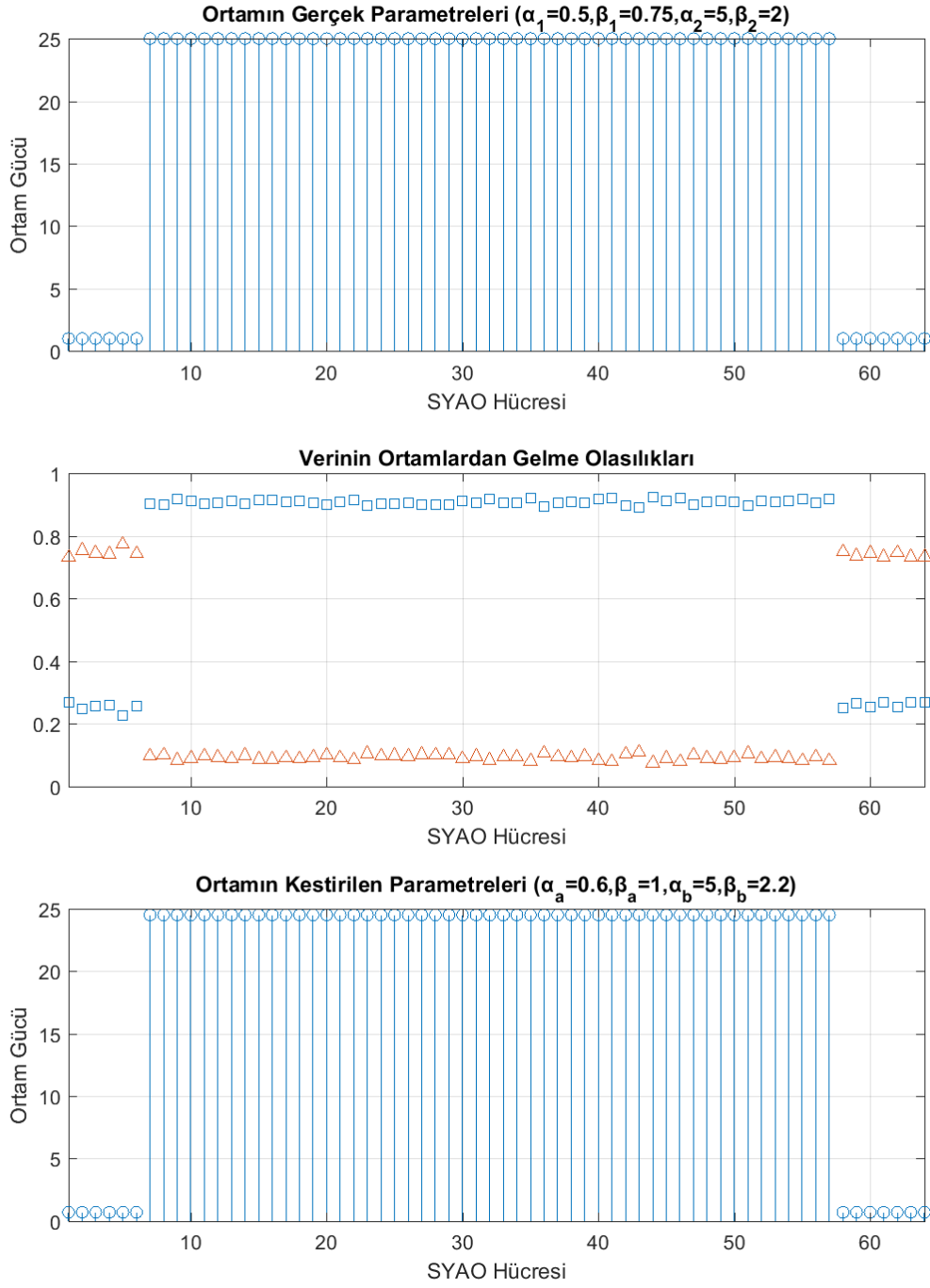
6.2.7 İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisi

Ortamdaki ikinci dağılıma sahip bölge oranının başarımlar üzerinde etkisini incelemek için ortamdaki yüksek güçlü bölge oranı değiştirilerek aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri					BE algoritması için başlangıç değerleri				
α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
0,5	5	0,75	2	0,8	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,75	2	0,6	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,75	2	0,2	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,75	2	0,1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
0,5	5	0,75	2	0,02	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

Tablo 6.14 İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisini incelemek için bakılan durumlar

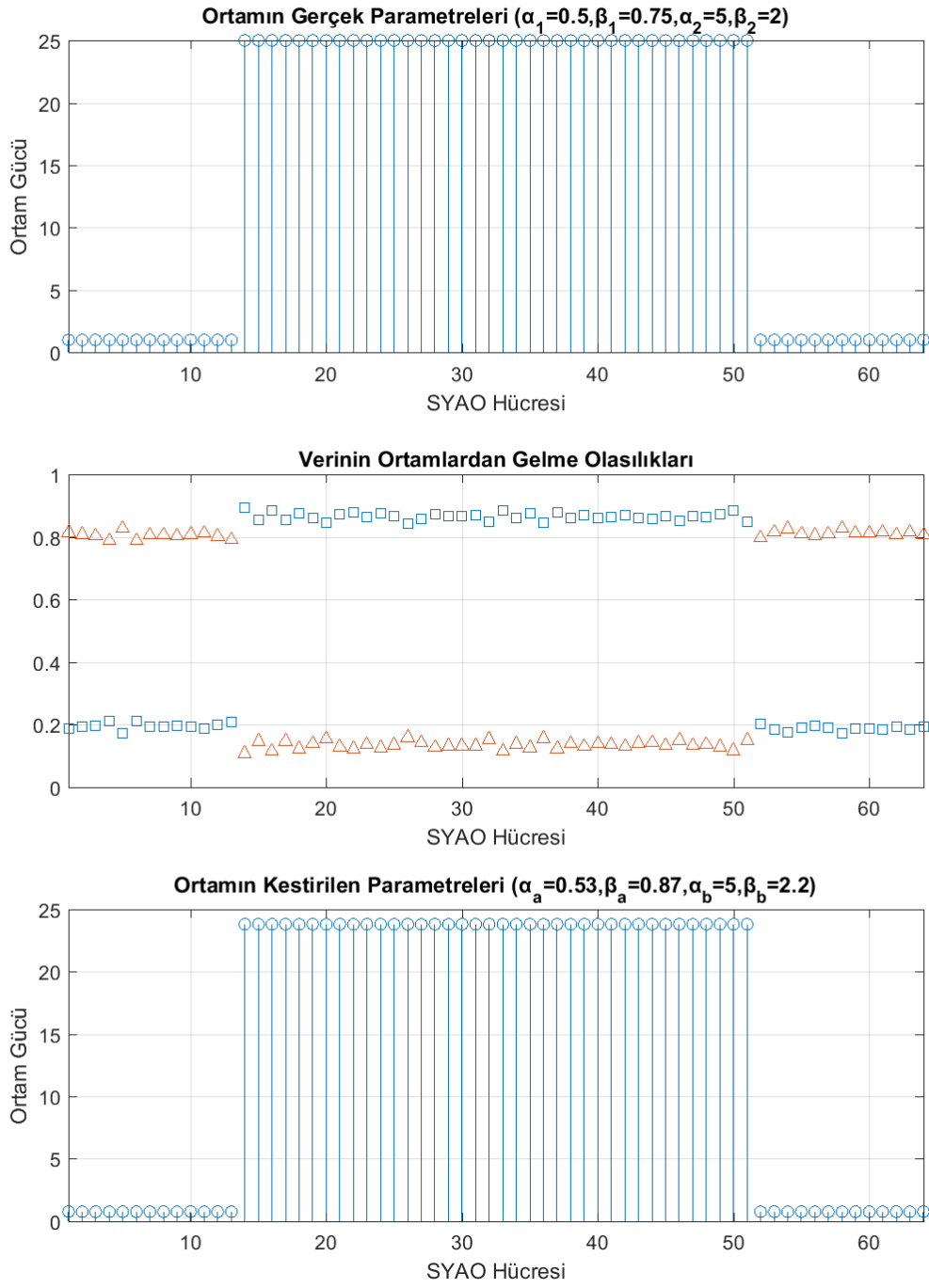
Parametrelerin başlangıç değerleri ile ortamdaki dağılımların ölçek ve şekil parametreleri sabit tutularak kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranı değiştirilerek bu oranın başarımlar üzerindeki etkisine bakılmıştır.



Şekil 6.33 Ortamın %80'inin ikinci dağılımdan gelme durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

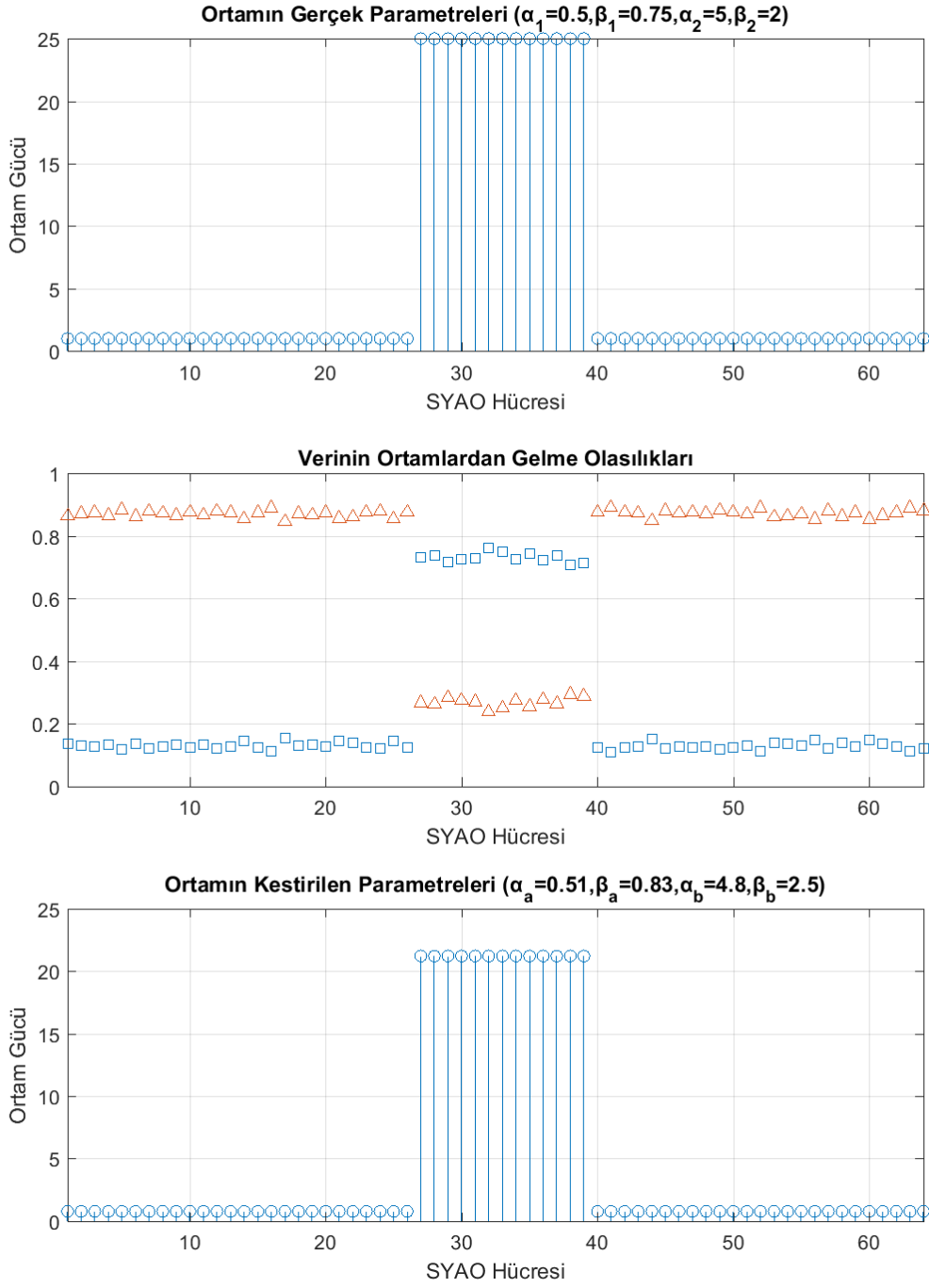
Şekil 6.33'te sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranının %80 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.34 Ortamın %60'ının kargaşalı bölge olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

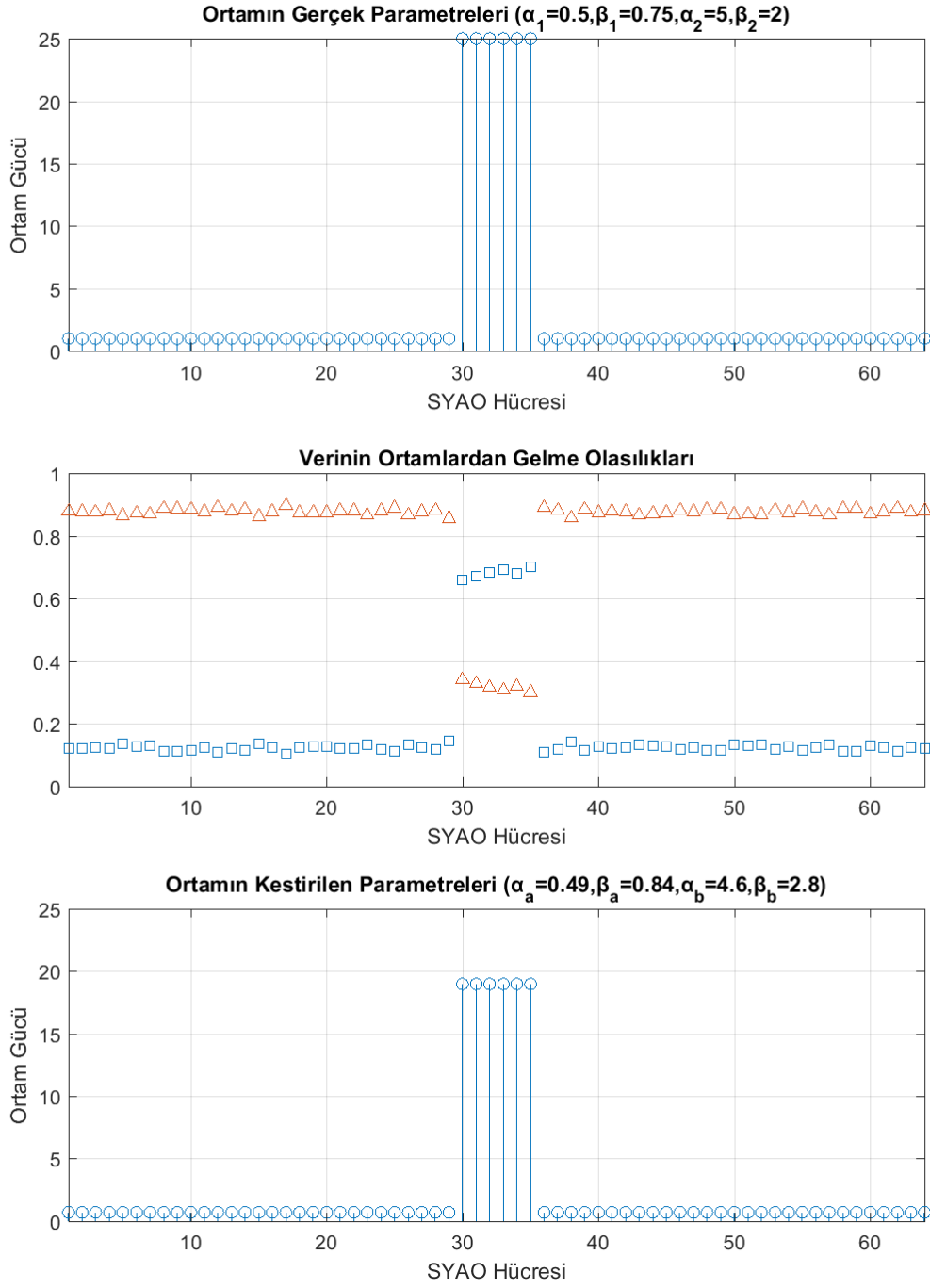
Şekil 6.34'te sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranının %60 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.35 Ortamın %20'sinin kargaşalı bölge olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

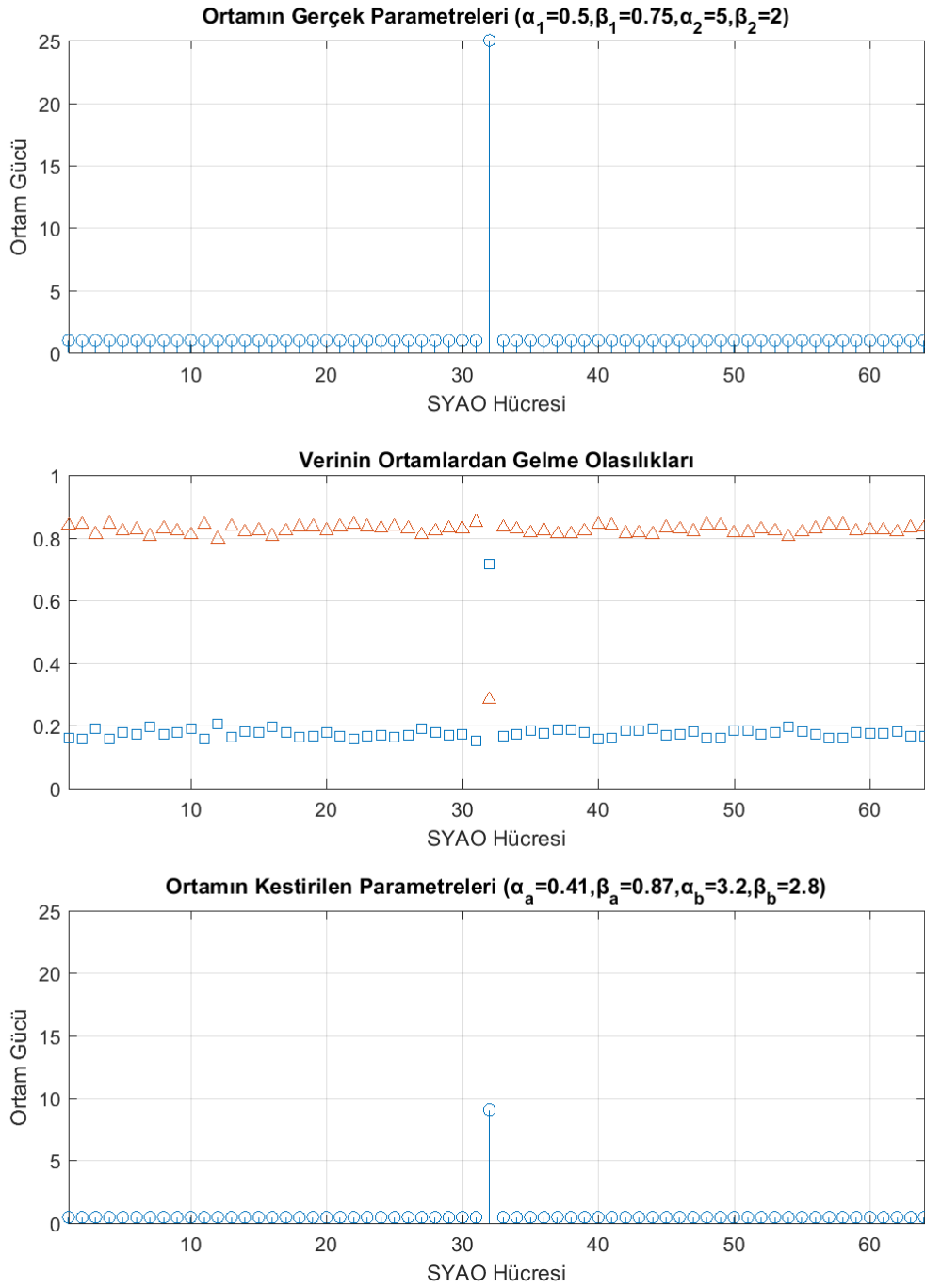
Şekil 6.35'te sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranının %20 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.36 Ortamın %10'unun kargaşalı bölge olma durumu

$$(\Delta: p(y = a | x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b | x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.36'da sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranının %10 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.37 Ortamın %2'sinin kargaşalı bölge olma durumu

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.37'de sonuçları gösterilen çalışmada kargaşalı bölgenin ortamda bulunma oranının %2 olduğu durum incelenmiştir. Kargaşalı ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.

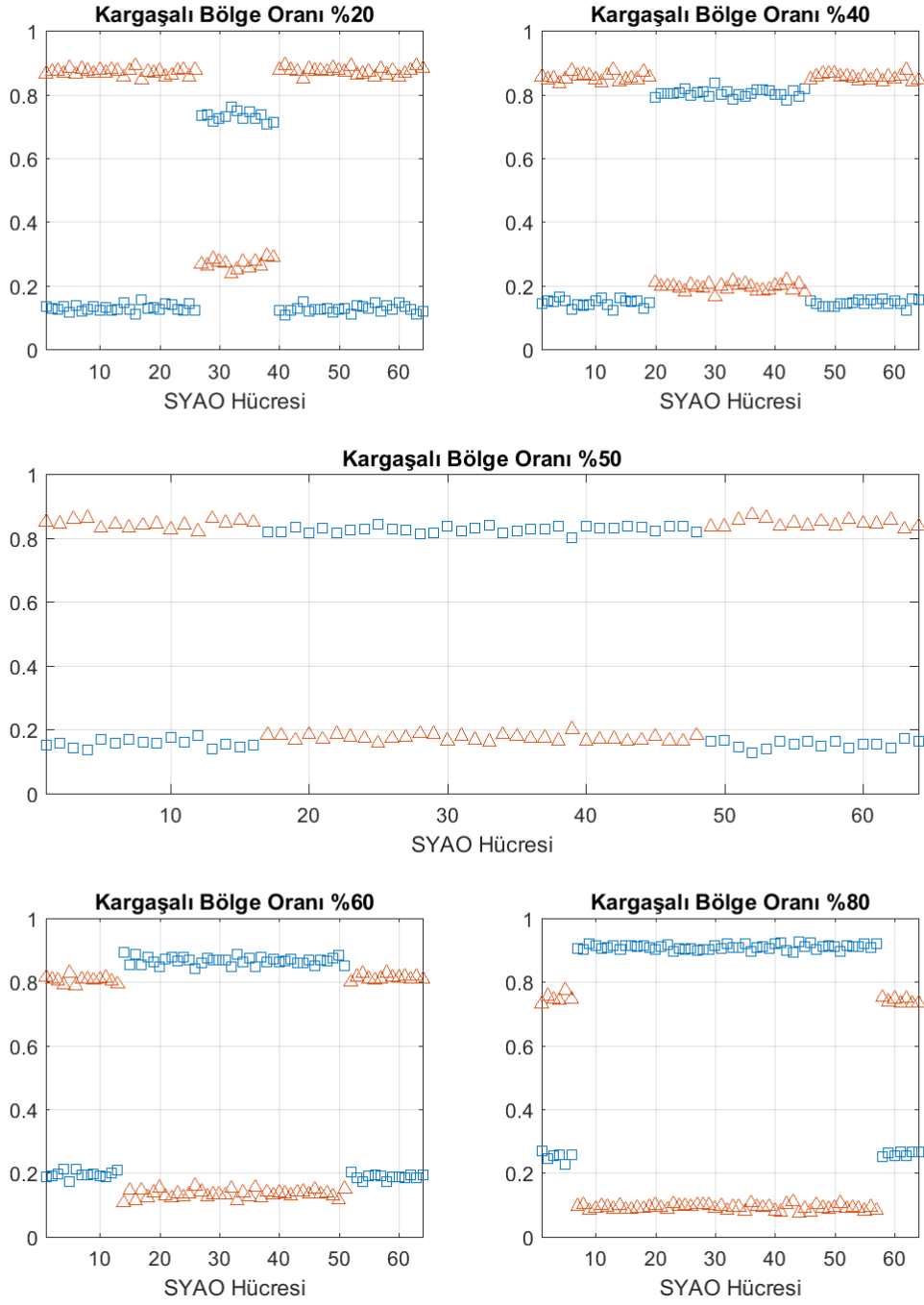
Dağılımların parametreleri					Kestirilen parametreler					Kargaşa tespit başarısı
α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
0,5	5	0,75	2	0,8	0,6	5,	1	2,2	0,78	51/51
0,5	5	0,75	2	0,6	0,53	5	0,87	2,2	0,59	38/38
0,5	5	0,75	2	0,2	0,51	4,8	0,83	2,5	0,25	13/13
0,5	5	0,75	2	0,1	0,49	4,6	0,84	2,8	0,17	6/6
0,5	5	0,75	2	0,02	0,41	3,2	0,87	2,8	0,18	1/1

Tablo 6.15 İki seviyeli ortamın dağılım oranının başarımlar üzerinde etkisini incelemek için bakılan durumların sonuçları

Tablo 6.15'te görüldüğü üzere parametre kestirimi başarısı, ortamda bulunan ilgili dağılıma ait hücre sayısı ile orantılı bir şekilde değişmemektedir. Kargaşanın yoğunlukta olduğu ortamlarda kargaşalı bölgeye ait dağılımın parametreleri daha başarılı bir şekilde bulunurken, kargaşasız bölgenin daha yoğunlukta olduğu ortamlarda da kargaşalı bölgeye ait dağılımın parametreleri daha başarılı bir şekilde bulunduğu gözlemlenmiştir. İki seviyeli ortamlarda BE için en ideal durum ortamın %50'sinin kargaşalı olduğu durumdur.

Belirtilen dağılım parametreleri için kargaşalı bölge, tüm ortamın %2'si olsa bile kargaşalı bölge tespitinin başarılı bir şekilde gerçekleştiği gözlemlenmiştir. "Verinin Ortamdan Gelme Olasılıkları"nın gösteren grafikler incelendiğinde hücre sayısı az olan bölgelerin tespit edilme durumunun belirgin bir şekilde zorlaşmadığı anlaşılmaktadır.

Kargaşanın 5 farklı bulunma oranı için verilerin ortamlardan gelme olasılığı grafikleri Şekil 6.38'de gösterilmiştir. Buna göre kargaşalı ortam yoğunlukta kargaşasız ortamın olasılık değerleri düşerken, kargaşalı ortamın azınlıkta olduğu durumlarda kargaşa bölgelerinde olasılık değeri düştüğü görünmektedir. Örnek sayısı fazla olan bölgelerin parametre kestirimi daha düzgün yapıldığından ilgili bölgede olan hücrelerin tespit edilme durumunun kolaylaştığı görülür. Ancak yine de bu değişim tektüre yakın ortamlarda geçerli olmadığı için, iki seviyeli ortamlarda BE için en ideal durumun ortamın %50'sinin kargaşalı olduğu durum olduğu görülmektedir.



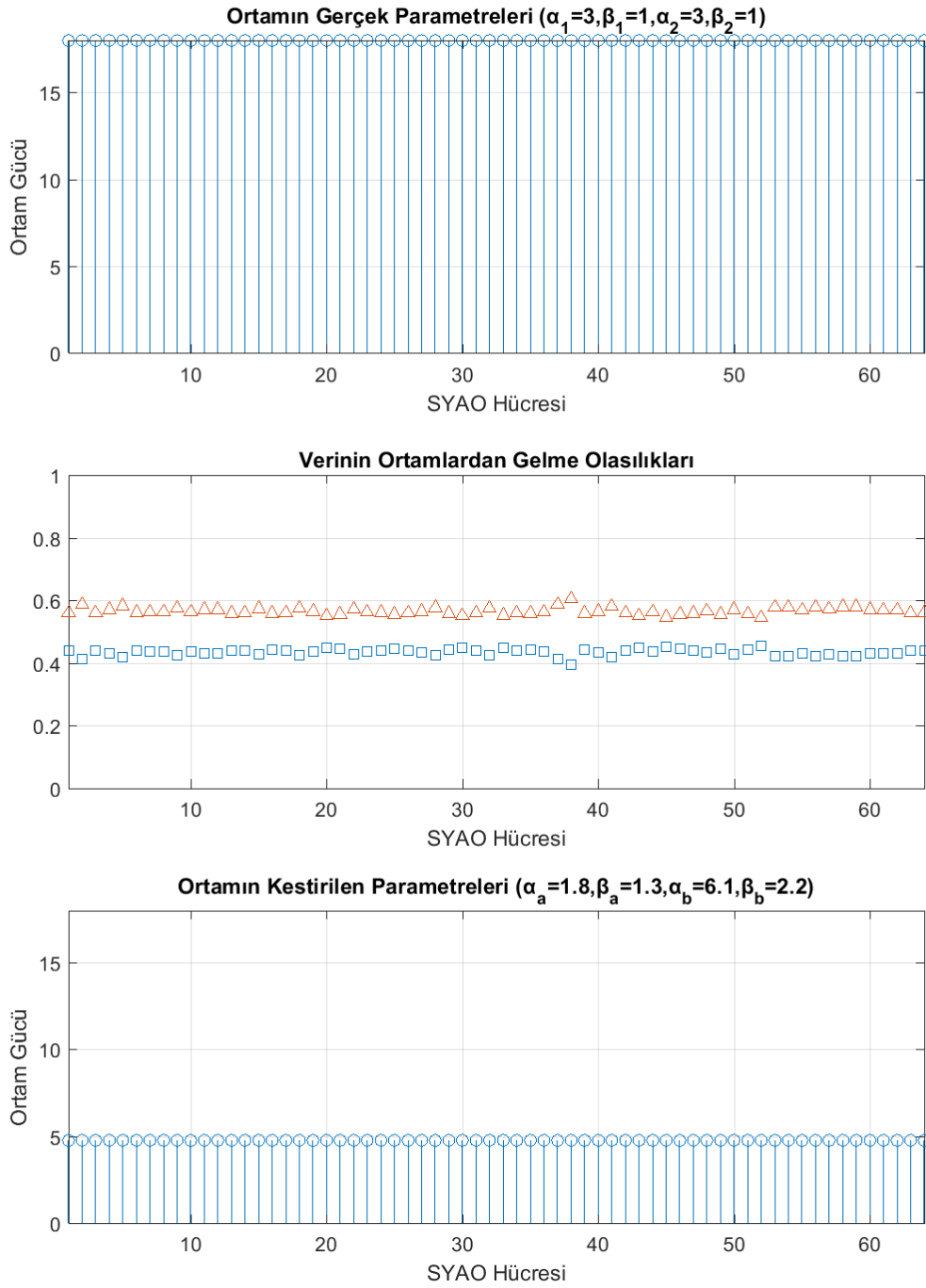
Şekil 6.38 Ortamdaki bölgelerin 5 farklı bulunma oranı için verilerin ortamlardan gelme olasılığı grafikleri

6.2.8 Tektür ortamın tespiti

Tektür ortamın BE algoritması ile başarılı bir şekilde ayırt edilip edilmediğini incelemek için sırasıyla aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

Dağılımların parametreleri		BE algoritması için başlangıç değerleri				
$\alpha_1 = \alpha_2$	$\beta_1 = \beta_2$	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2
3	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35
10	1	1,25	3,75	1,5	2,5	0,35

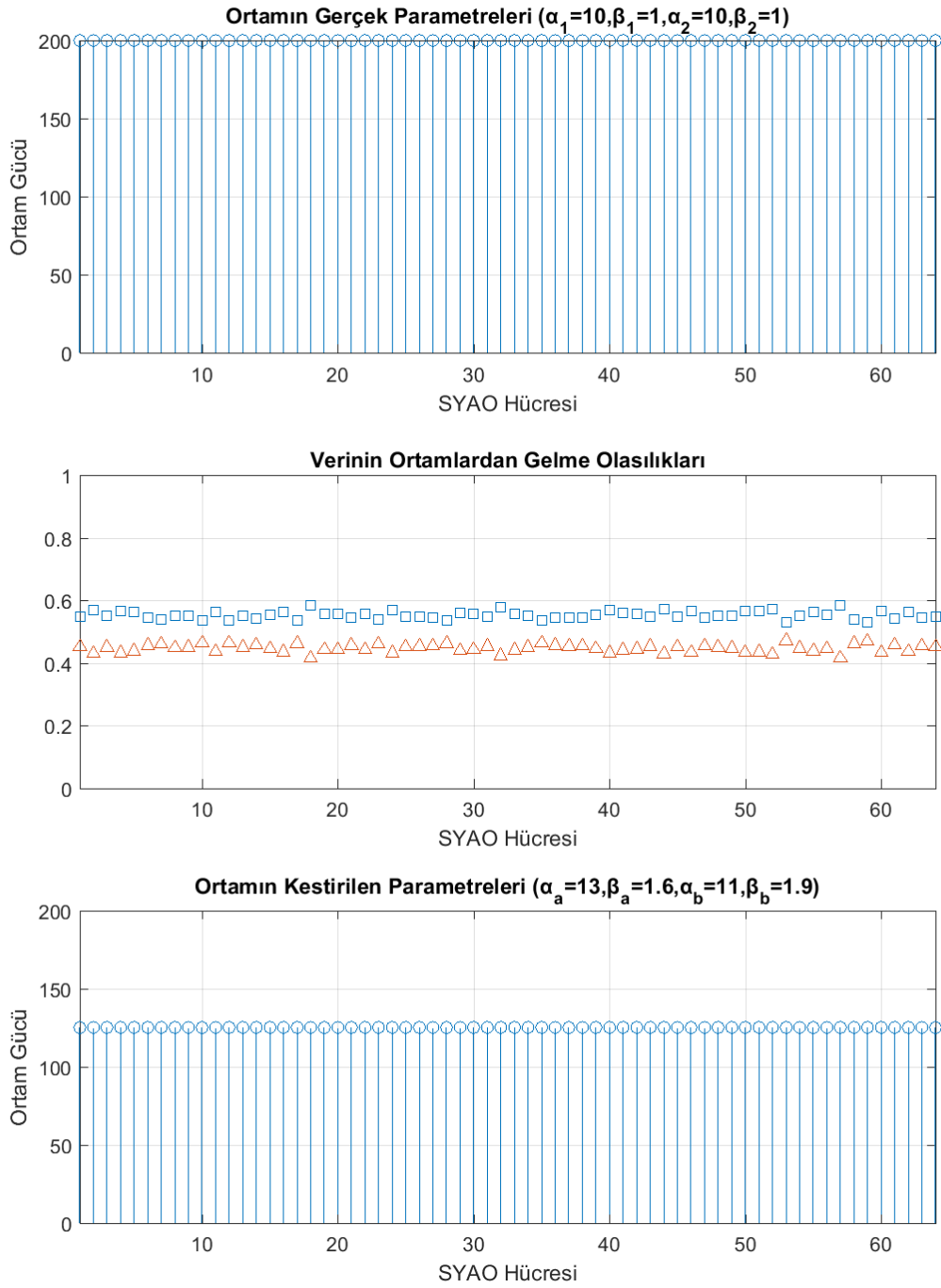
Tablo 6.16 Tektür ortam tespiti için incelenen durumlar



Şekil 6.39 Weibull ölçek parametresi 3 ve şekil parametresi 1 olan tektür ortam

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.39'da sonuçları gösterilen çalışmada $\alpha = 3$ ve $\beta = 1$ parametrelerine sahip tektür ortam incelenmiştir. Tektür ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.



Şekil 6.40 Weibull ölçek parametresi 10 ve şekil parametresi 1 olan tektür ortam

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.40'ta sonuçları gösterilen çalışmada $\alpha = 10$ ve $\beta = 1$ parametrelerine sahip tektür ortam incelenmiştir. Tektür ortamın başarılı bir şekilde tespit edildiği görülmektedir.

Tablo 6.17’de görüldüğü üzere tektür ortamlar BE yöntemiyle başarılı bir şekilde tespit edilebilmektedir. Burada ortamın şekil parametresinin değeri 1 iken ölçek parametresinin daha büyük olduğu ortamda parametre kestirimi daha başarılı olmuştur. Tektür ortamlar için BE parametre kestirimi başarımı ortamdaki dağılımın parametrelerine bağlı olarak değişmektedir.

Dağılımların parametreleri		Kestirilen parametreler					Ortam tespit başarısı
$\alpha_1 = \alpha_2$	$\beta_1 = \beta_2$	α_1	α_2	β_1	β_2	q_2	
3	1	1.8	6,1	1,3	2,2	0,43	64/64
10	1	11	13	1,9	1,6	0,45	64/64

Tablo 6.17 Tektür ortam tespiti sonuçları

6.3 BE YÖNTEMİNİN ÇOK SEVİYELİ WEIBULL ORTAMDAKİ BAŞARIMI

Bu bölümde Beklenti Enbüyültme algoritması geliştirilirken seviye sayısı $M = 5$ olarak belirlenmiştir. Ayrıca bu bölümdeki çalışmalarda kestirilen parametre değerleri birbirinden bağımsız 500 simülasyon tekrarı sonucunda elde edilen parametre değerlerinin ortalaması olarak hesaplanmıştır.

Beklenti Enbüyültme yönteminin başarımı Weibull dağılımına sahip çok seviyeli ortamlar için aşağıdaki senaryolar incelenmiştir.

- Beş seviyeli BE algoritmasının 5 seviyeli Weibull ortamdaki başarımı,
- Beş seviyeli BE algoritmasının 4 seviyeli Weibull ortamdaki başarımı,
- Beş seviyeli BE algoritmasının 3 seviyeli Weibull ortamdaki başarımı,
- Beş seviyeli BE algoritmasının 2 seviyeli Weibull ortamdaki başarımı,
- Beş seviyeli BE algoritmasının 1 seviyeli (tektür) Weibull ortamdaki başarımı.

Yukardaki senaryolar incelenirken şekil parametresinin kestirimi konusunda iki farklı yöntem incelenmiştir. Birinci yöntemde ortamın şekil parametreleri dahil bütün parametrelerin kestirimi yapılmıştır. Burada kullanılacak olan (5.4) eşitliğindeki bilinmeyenlerin çözümü için PSO (Parçacık Sürü Optimizasyonu) algoritması kullanılmıştır. İkinci yöntemde ise ortamdaki şekil parametreleri biliniyor kabul edilmektedir. Sadece diğer parametrelerin kestirimi yapılır. Şekil parametreleri için birbirine Cramer Rao alt sınırından daha uzak olacak şekilde ((6.18) eşitsizliği) 5 farklı şekil parametresi seçilmiştir.

Kısaca senaryolar aşağıdaki iki farklı durum için incelenecektir;

- BE algoritmasındaki bütün parametrelerin kestiriminin yapılması,
- BE algoritmasında önceden seçilen şekil parametrelerinin kullanılması.

Şekil parametrelerinin biliniyor kabul edildiği durumlarda birbirlerine Cramer Rao alt sınırından uzakta olan ve (6.18) kısıtlaması altında hesaplanan $\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$ değerleri kullanılacaktır.

Algoritmadaki başlangıç değerleri bütün senaryolar için aynı tutulmuştur. Hem ölçek hem şekil parametrelerinin başlangıç değerleri seçilirken Cramer Rao alt sınırı eşitsizliklerinden (6.18), (6.26) yararlanılmıştır. Ancak önceden seçilen şekil parametrelerinin kullanılması durumunda şekil parametresi biliniyor kabul edileceğinden başlangıç değerine ihtiyaç duyulmayacaktır.

Tüm senaryolar gerçekleştirilirken iki yöntem için kestirilecek parametrelerin başlangıç değerleri Tablo 6.18 ve Tablo 6.19'de gösterilmiştir.

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	5. Bölge
α	0,75	2,0	6,0	15	22
β	0,6	1,0	1,4	1,9	2,5
q	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Tablo 6.18 5 Seviyeli BE algoritması için başlangıç değerleri

Tablo 6.18'de bütün parametrelerin kestirildiği durumlar için BE algoritmasının başlangıç değerleri verilmiştir.

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	5. Bölge
α	0,75	2,0	6,0	15	22
q	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Tablo 6.19 Şekil parametresi biliniyor kabul edilen durumlar için BE algoritmasının başlangıç değerleri

Önceden belirlenen şekil parametrelerinin ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanıldığı durumlar için parametrelerin başlangıç değerleri Tablo 6.19'da gösterilmiştir.

6.3.1 Beş Seviyeli BE Algoritmasının 5 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı

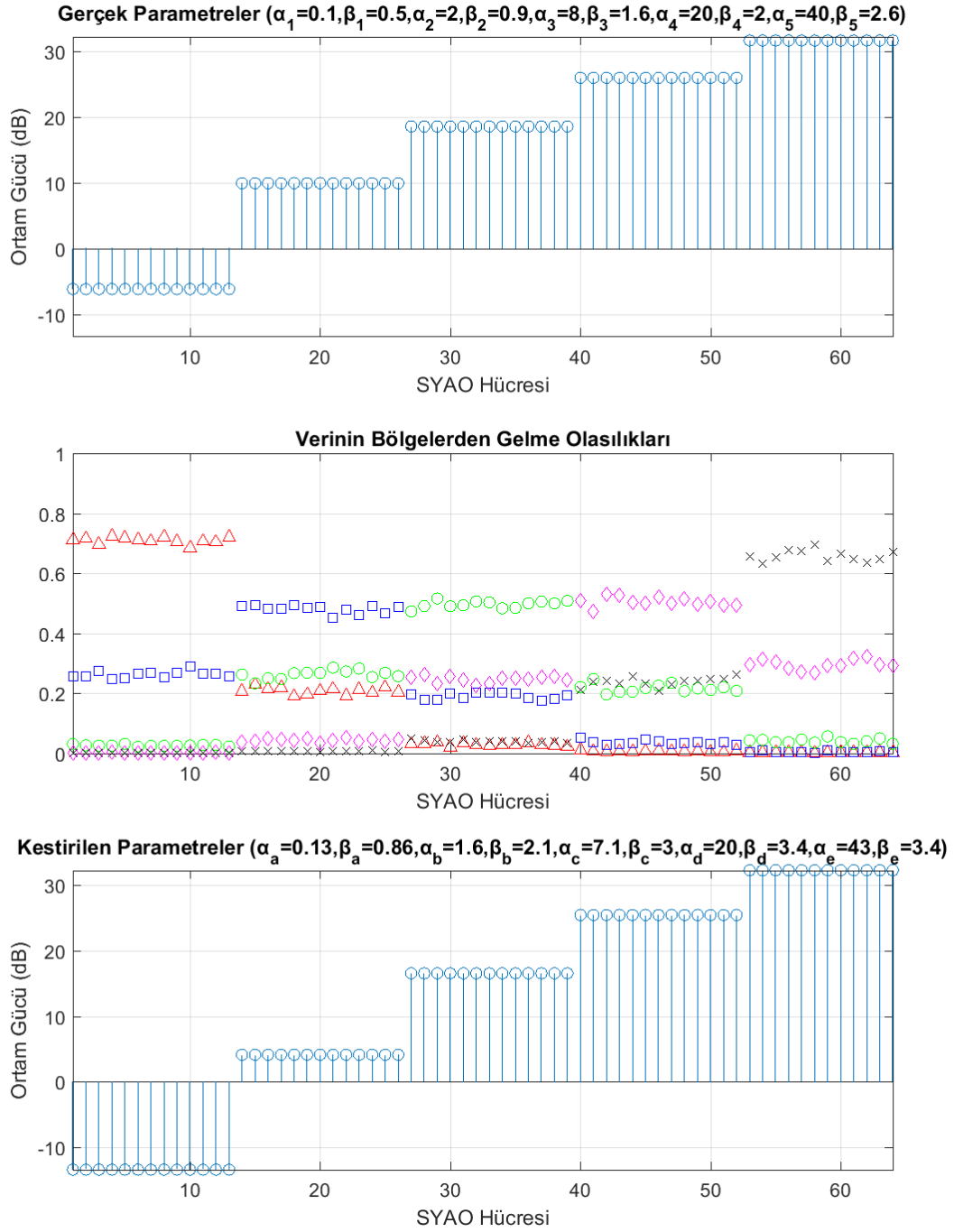
Beş seviyeli BE algoritmasının 5 seviyeli Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki yöntemler kullanılmıştır.

1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	5. Bölge
α	0,1	2,0	8,0	20	40
β	0,5	0,9	1,6	2,0	2,6
q	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Tablo 6.20 Parametrelerin 5 seviyeli ortamdaki değerleri

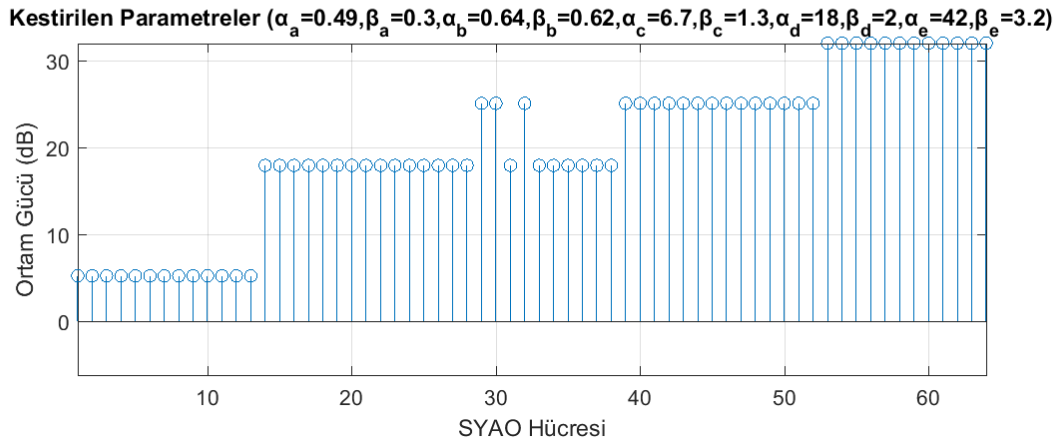
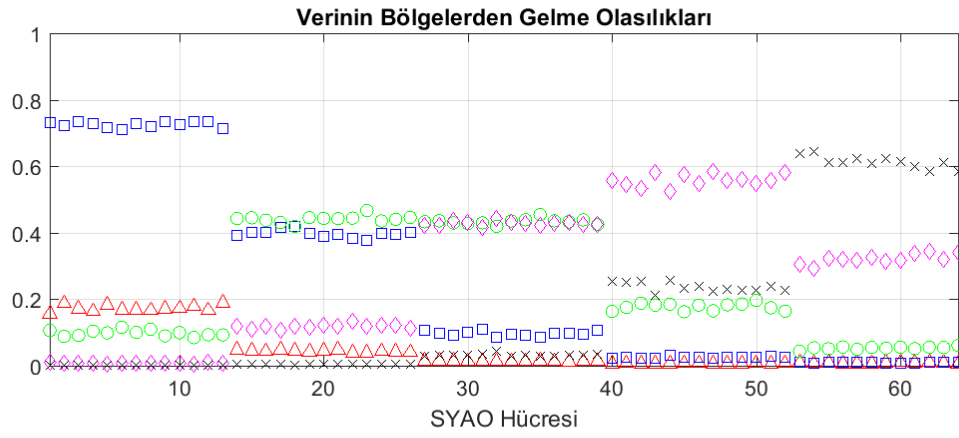
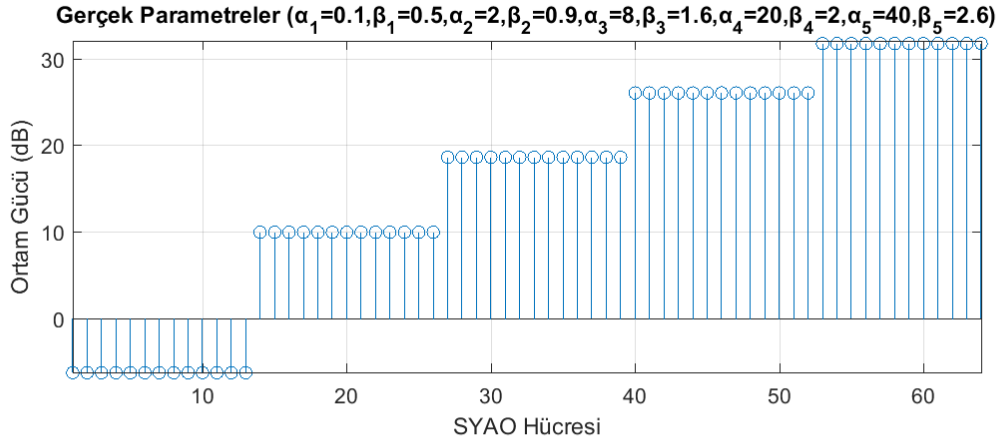
Tablo 6.20'de, belirtilen yöntemlerin uygulandığı ortamın gerçek parametreleri verilmiştir.



Şekil 6.41 Beş seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.41’de sonuçları gösterilen çalışmada 5 seviyeli ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 5 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Şekil 6.42 Beş seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

($\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta})$)

Şekil 6.42'de sonuçları gösterilen çalışmada 5 seviyeli ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 4 seviyeden meydana geldiği tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	5. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,1	2,0	8,0	20	40	5
	β	0,5	0,9	1,6	2,0	2,6	
	q	13/64	13/64	13/64	13/64	12/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,13	1,6	7,1	20	43	5
	β	0,86	2,1	3,0	3,4	3,4	
	Seviye Tespiti	13/13	13/13	13/13	13/13	12/12	

Tablo 6.21 Beş seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu

Bütün parametrelerin ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$) kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.21’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarı düzgün tespit edilmiştir. Parametre kestiriminde ölçek parametreleri başarılı bir şekilde tespit edilebilmelerine rağmen şekil parametrelerinin kestiriminde aynı derecede başarı görülmemektedir. Ortamın gerçek güç seviyesi grafiği ile kestirilen güç seviyesi grafikleri incelendiğinde kestirilen güçlerin özellikle şekil parametrelerinin yüksek olduğu bölgelerde gerçek değerlere daha yakın olduğu gözlenmektedir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	5. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,1	2,0	8,0	20	40	5
	β	0,5	0,9	1,6	2,0	2,6	
	q	13/64	13/64	13/64	13/64	12/64	
2.Yöntem Sonucu	α	0,64	-	6,7	18	42	4
	β	0,62	-	1,3	2,0	3,2	
	Seviye Tespiti	13/13	0/13	23/13	15/13	12/12	

Tablo 6.22 Beş seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$) kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.22'de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı düzgün olarak tespit edilememiş, dolayısıyla bölgelerdeki hücre sayıları da yanlış bulunmuştur.

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yönteminin başarılı olabilmesi için BE algoritmasının seviye sayısının ortamın seviye sayısından fazla olması gerekmektedir. Aksi takdirde önceden belirlenmiş herhangi bir şekil parametresi ortamdaki şekil parametresi ile yaklaşık olarak eşleşmezse bu yöntem başarılı olamaz. Tablo 6.22'de görüldüğü üzere ilk bölgenin şekil parametresi (0,5) kendisine yakın olan 0,62 ile eşleşmiş ancak ortamdaki hiçbir şekil parametresi ile yakın bir değerde olmayan 0,30 olarak belirlenmiş şekil parametresi ile herhangi bir bölge eşleşmemiştir.

6.3.2 Beş Seviyeli BE Algoritmasının 4 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı

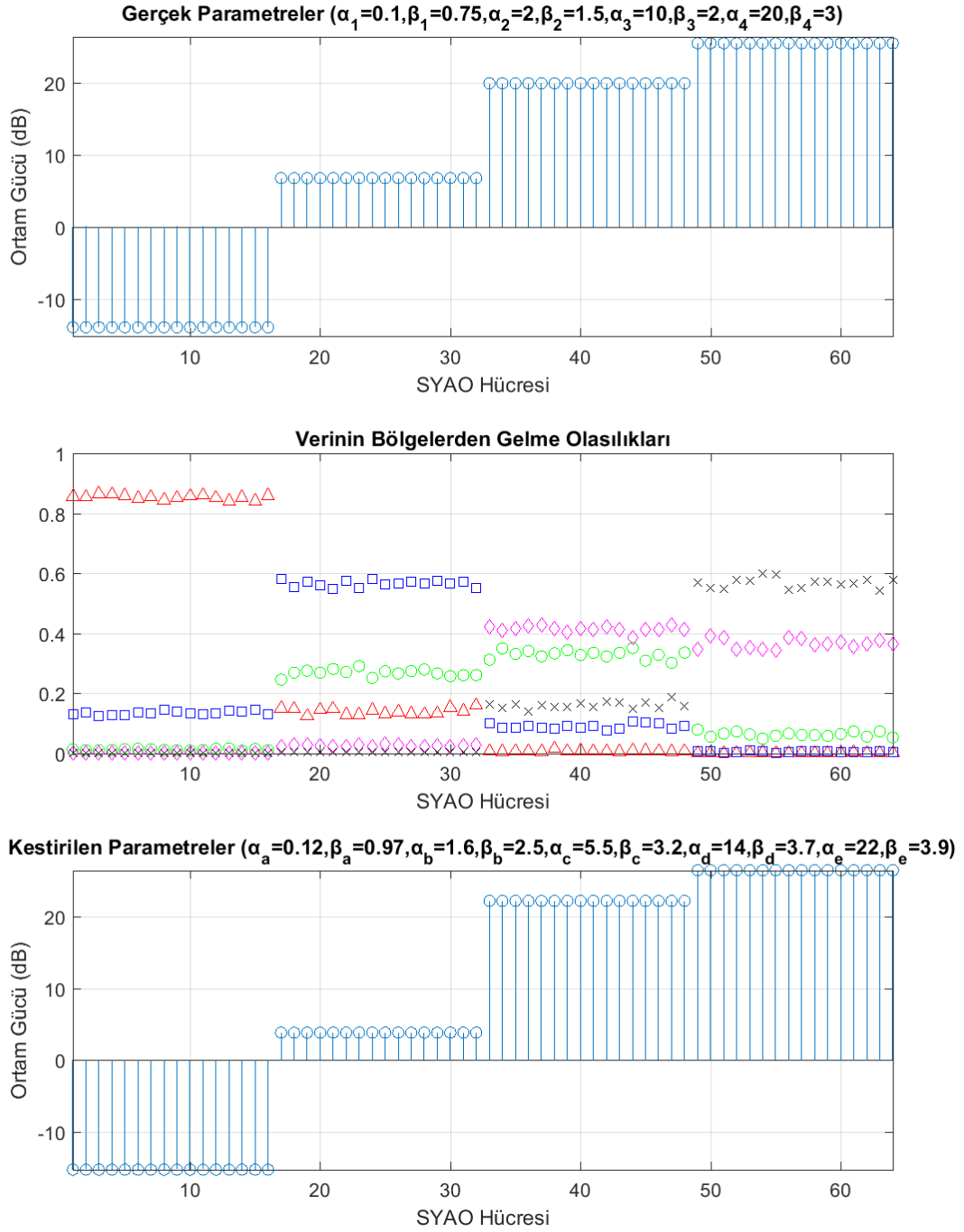
Beş seviyeli BE algoritmasının 4 seviyeli Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge
α	0,1	2,0	10	20
β	0,75	1,5	2,0	3,0
q	0,25	0,25	0,25	0,25

Tablo 6.23 Parametrelerin 4 seviyeli ortamdaki değerleri

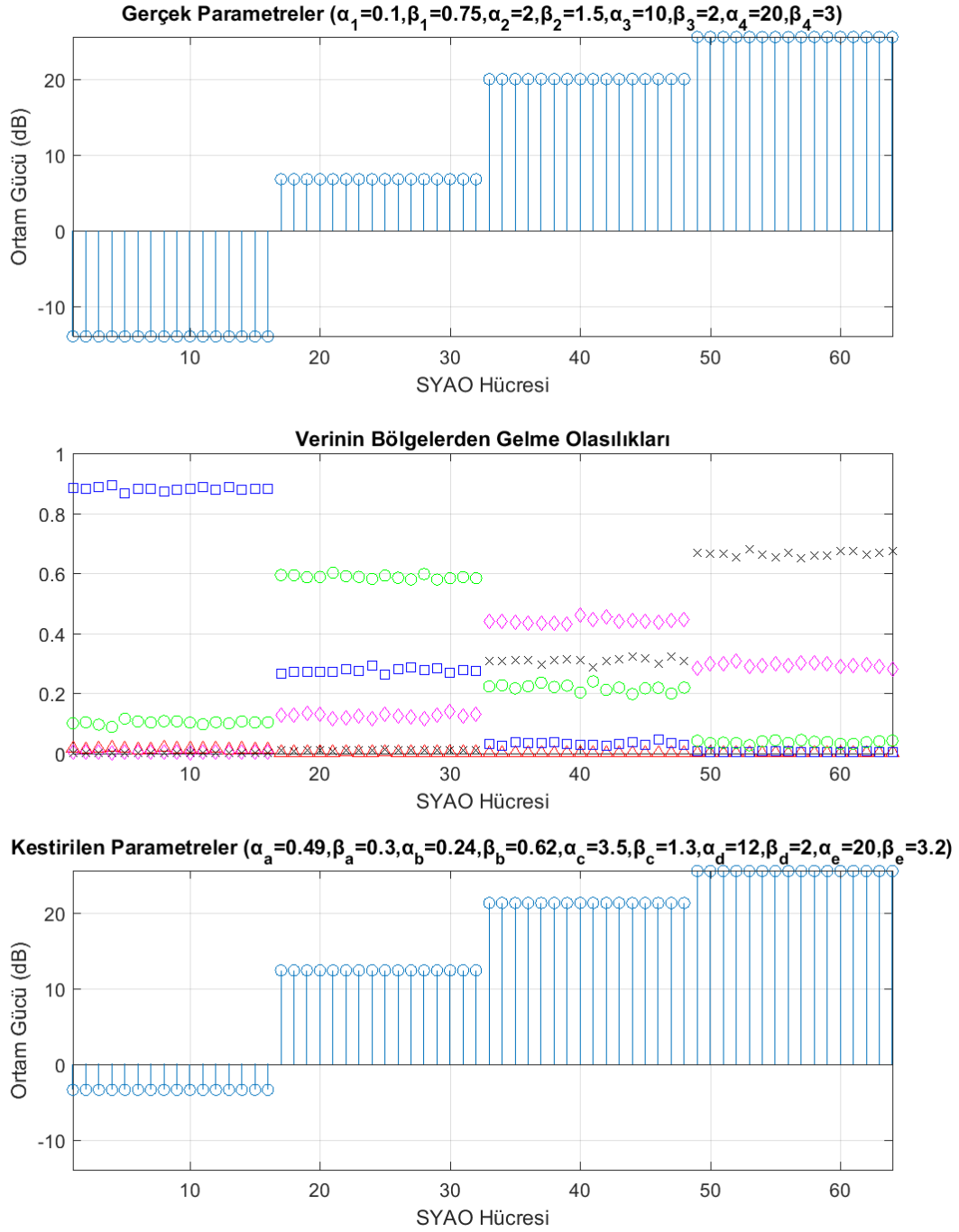
Tablo 6.23'te, belirtilen yöntemlerin uygulandığı ortamın gerçek parametreleri verilmiştir.



Şekil 6.43 Dört seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

$$(\Delta: p(\mathbf{y} = a | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \square: p(\mathbf{y} = b | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \circ: p(\mathbf{y} = c | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \diamond: p(\mathbf{y} = d | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \times: p(\mathbf{y} = e | x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

Şekil 6.43'te sonuçları gösterilen çalışmada 4 seviyeli ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 4 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Şekil 6.44 Dört seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

$$(\Delta: p(\mathbf{y} = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(\mathbf{y} = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(\mathbf{y} = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(\mathbf{y} = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(\mathbf{y} = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.44'te sonuçları gösterilen çalışmada 4 seviyeli ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 4 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,1	2,0	10	20	4
	β	0,75	1,5	2,0	3,0	
	q	16/64	16/64	16/64	16/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,12	1,6	14	22	4
	β	0,97	2,5	3,7	3,9	
	Seviye Tespiti	16/16	16/16	16/16	16/16	

Tablo 6.24 Dört seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu

Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.24'te gösterilmiştir. Bu yöntem ile 5 seviyeli BE algoritması çalıştırılmış olmasına rağmen ortamdaki toplam bölge sayısı 4 olarak düzgün tespit edilmiş ve hücreler olması gereken bölgeler ile başarılı bir şekilde eşleşmiştir. Şekil 6.43'teki Verinin Bölgelerden Gelme Olasılığı grafiğinde bölgelerdeki olasılık değeri arttıkça parametre kestiriminin başarımının arttığı Tablo 6.24'te görünebilir. Buna göre en başarılı parametre kestirimi ilk bölgede olduğu görülürken, en kötü parametre kestiriminin üçüncü bölgede olduğu görülür.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,1	2,0	10	20	4
	β	0,75	1,5	2,0	3,0	
	q	16/64	16/64	16/64	16/64	
2.Yöntem Sonucu	α	0,24	3,5	12	20	4
	β	0,62	1,3	2,0	3,2	
	Seviye Tespiti	16/16	16/16	16/16	16/16	

Tablo 6.25 Dört seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.25'de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarı düzgün tespit edilmiştir. Beklenildiği gibi önceden belirlenen şekil parametrelerinin ortamda kendine en yakın şekil parametresi değerine sahip bölge ile eşleştiği görülmüştür. Bu yöntemin başarısı seçilen şekil parametresi değerleri ile ortamdaki bölgelerin şekil parametrelerinin değerlerinin yakınlık durumuna göre değişmektedir.

6.3.3 Beş Seviyeli BE Algoritmasının 3 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı

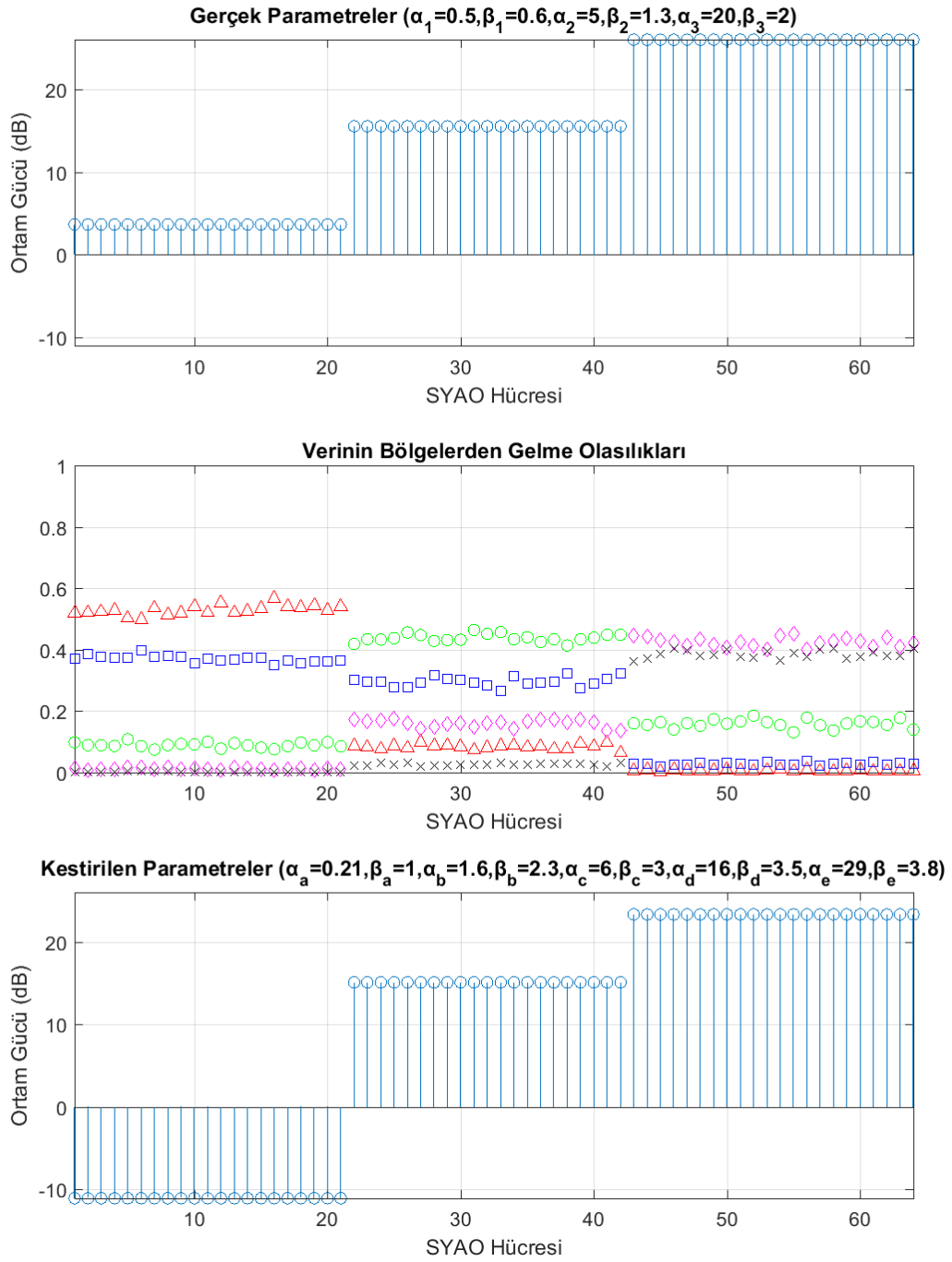
Beş seviyeli BE algoritmasının 3 seviyeli Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge
α	0,5	5,0	20
β	0,6	1,3	2,0
q	21/64	21/64	22/64

Tablo 6.26 Parametrelerin 3 seviyeli ortamdaki değerleri

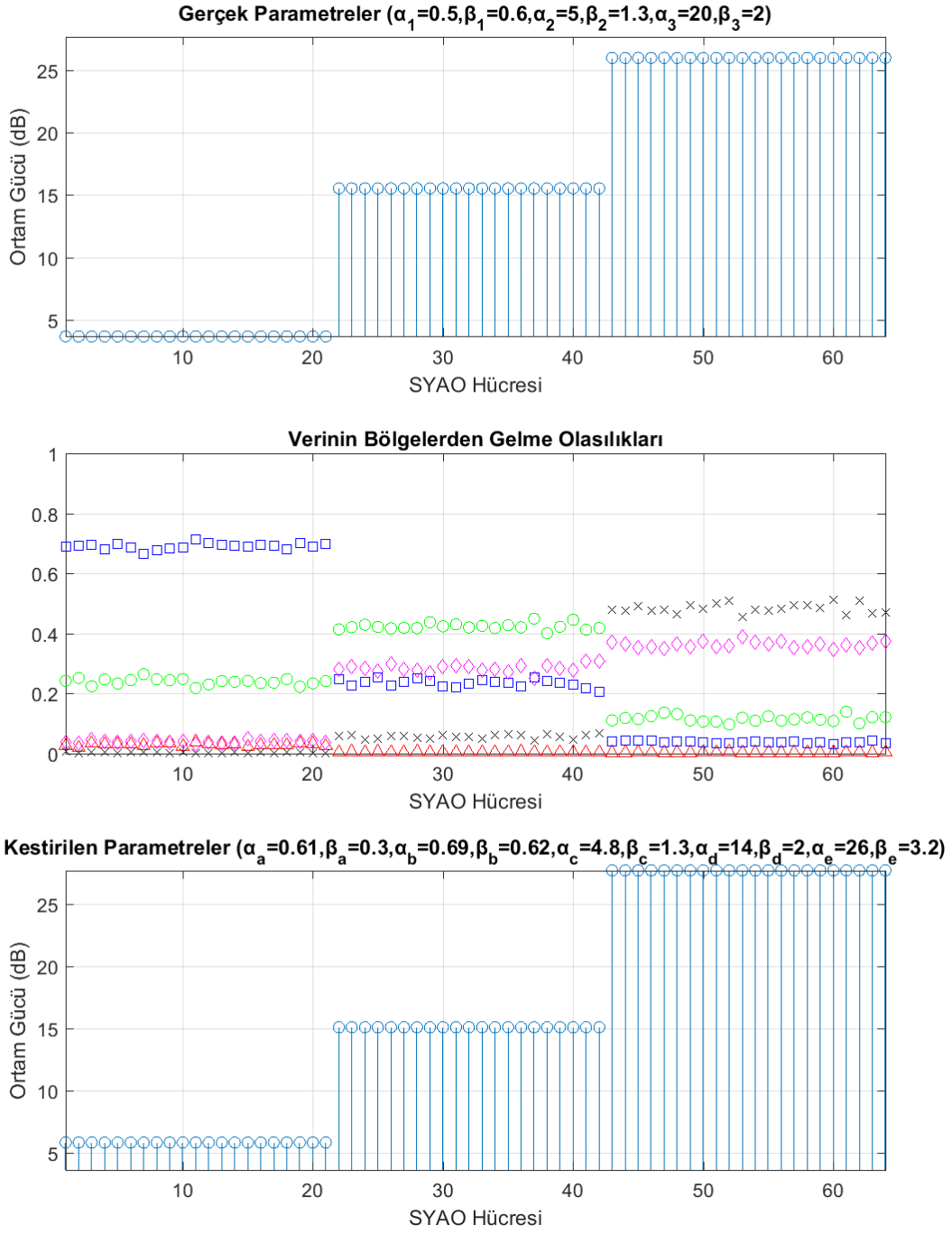
Tablo 6.26'te, belirtilen yöntemlerin uygulandığı ortamın gerçek parametreleri verilmiştir.



Şekil 6.45 Üç seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

$$(\Delta: p(\mathbf{y} = a|x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \square: p(\mathbf{y} = b|x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \circ: p(\mathbf{y} = c|x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \diamond: p(\mathbf{y} = d|x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \times: p(\mathbf{y} = e|x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

Şekil 6.45'te sonuçları gösterilen çalışmada 3 Seviyeli ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 3 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Şekil 6.46 Üç seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.46'da sonuçları gösterilen çalışmada 3 seviyeli ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 3 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	0,5	5	20	3
	β	0,6	1,3	2,0	
	q	21/64	21/64	22/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,21	6	16	3
	β	1	3	3,5	
	Seviye Tespiti	21/21	21/21	22/22	

Tablo 6.27 Üç seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu

Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.27’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile 5 seviyeli BE algoritması çalıştırılmış ve ortamdaki toplam bölge sayısı 3 olarak başarılı bir şekilde tespit edilmiştir. Referans hücreleri bulunduğu bölgeler ile başarılı bir şekilde eşleşmiştir Şekil 6.45’deki Verinin Bölgelerden Gelme Olasılığı grafiğinde 3. bölgede verilerin “d” dağılımından gelme olasılığı ile “e” dağılımından gelme olasılığı birbirlerine çok yakın değerlerde çıktığı görülmektedir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	0,5	5	20	3
	β	0,6	1,3	2,0	
	q	21/64	21/64	22/64	
2.Yöntem Sonucu	α	0,69	4,8	26	3
	β	0,62	1,3	3,2	
	Seviye Tespiti	21/21	21/21	22/22	

Tablo 6.28 Üç seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.28’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarı düzgün tespit edilmiştir. Önceden belirlenen şekil

parametrelerinin ortamda kendine en yakın şekil parametresi değerine sahip bölge ile eşleşmesi beklenirken başlangıç değerlerinin etkisinden dolayı 3. bölgede bu durum gözlemlenmemiştir.

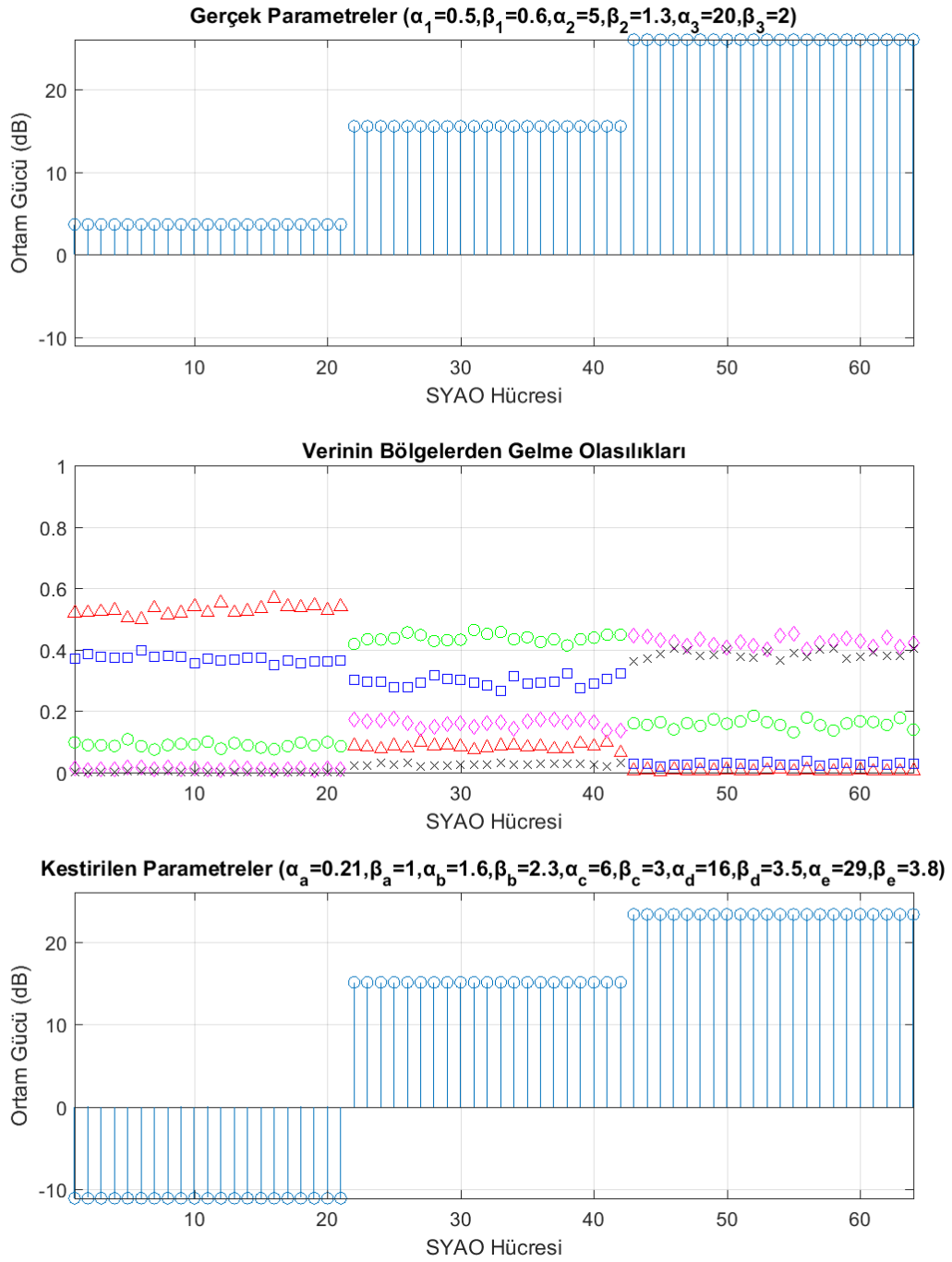
Ortamdaki şekil parametrelerinin hiçbirinin önceden seçilmiş şekil parametreleri ile direk olarak uyuşmadığı bir durumda her iki yöntemin başarımını incelemek için Tablo 6.29'da gösterilen parametrelere sahip ortamda çalışılmıştır.

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge	3. Bölge
α	0,5	10	20
β	1	1,8	2,2
q	21/64	21/64	22/64

Tablo 6.29 Farklı parametrelerle 3 seviyeli ortamın yeniden analizi

Tablo 6.29'da gösterilen parametrelere sahip ortamda beş seviyeli BE algoritmasının 3 seviyeli Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

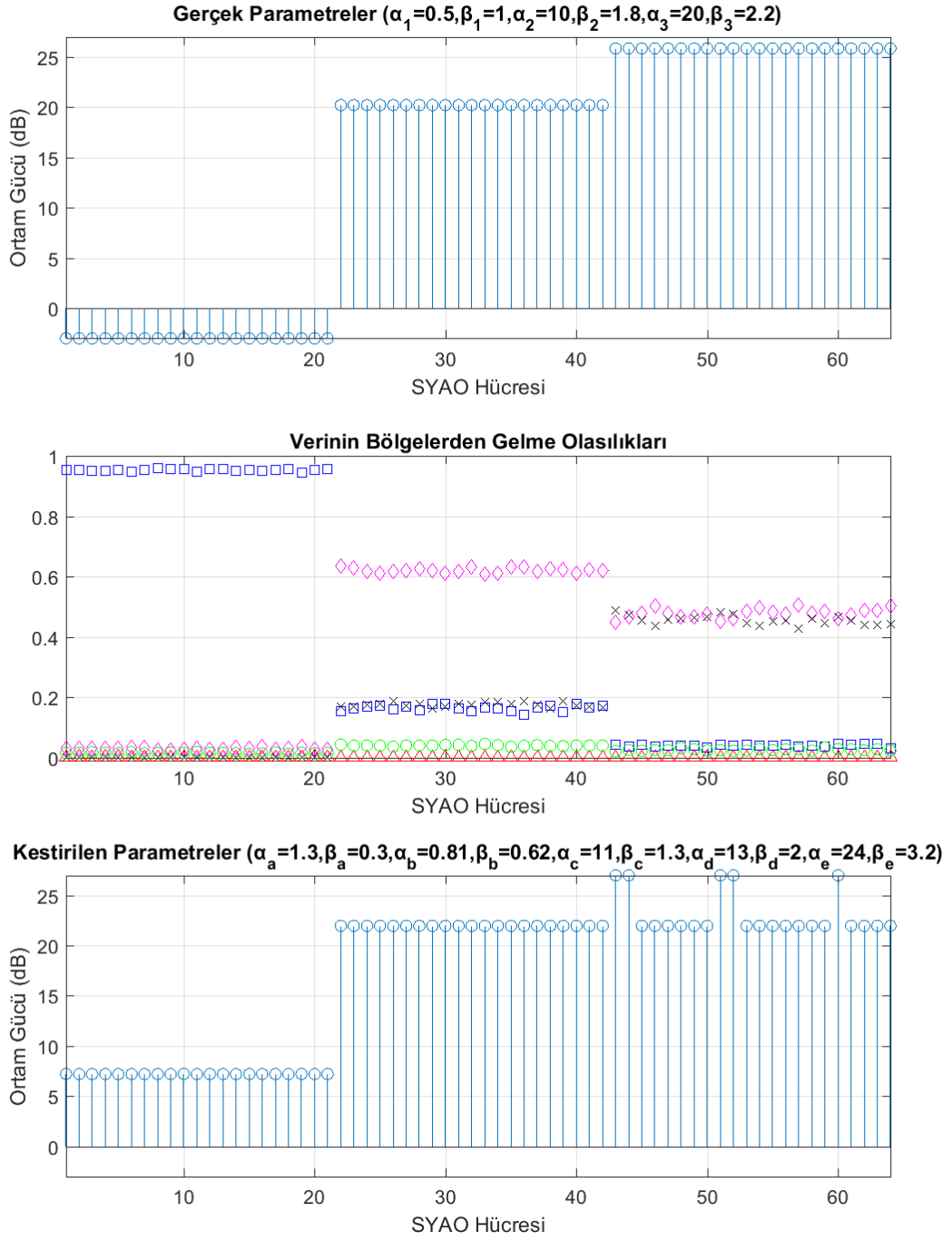
1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)



Şekil 6.47 Üç seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

($\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta})$)

Şekil 6.47’de sonuçları gösterilen çalışmada 3 seviyeli ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 3 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Şekil 6.48 Üç seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.48'de sonuçları gösterilen çalışmada 3 seviyeli ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 3 seviyeden oluştuğu tespit edilmiş ancak kargaşa grafiği yanlış bulunmuştur.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	0,5	10	20	3
	β	1	1,8	2,2	
	q	21/64	21/64	22/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,21	6	16	3
	β	1	3	3,5	
	Seviye Tespiti	21/21	21/21	22/22	

Tablo 6.30 Üç seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu

Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.30'da gösterilmiştir. Bu yöntem ile 5 seviyeli BE algoritması çalıştırılmış ve ortamdaki toplam bölge sayısı 3 olarak başarılı bir şekilde tespit edilmiştir. Referans hücreleri bulunduğu bölgeler ile başarılı bir şekilde eşleşmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	0,5	10	20	3
	β	1	1,8	2,2	
	q	21/64	21/64	22/64	
2.Yöntem Sonucu	α	0,81	1,3	24	3
	β	0,62	0,3	3,2	
	Seviye Tespiti	21/21	38/21	5/22	

Tablo 6.31 Üç seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.31'de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı 3 olarak tespit edilmiş olmasına rağmen referans hücreleri bulunduğu bölgeler ile başarılı bir şekilde eşleşememişlerdir. Önceden belirlenen şekil parametrelerinin ortamda kendine en yakın şekil parametresi değerine sahip bölge ile eşleşmesi beklenirken her üç ortamda da bu durum gerçekleşmemiştir. Ayrıca parametre

kestirimi başarısı dramatik olarak düştüğü görülmektedir. Önceden belirlenmiş şekil parametreleri kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) başarımı, önceden belirlenmiş şekil parametreleri ile ortamdaki şekil parametreleri uyuşmadığı durumlarda ciddi oranda düşmektedir.

6.3.4 Beş Seviyeli BE Algoritmasının 2 Seviyeli Weibull Ortamdaki Başarımı

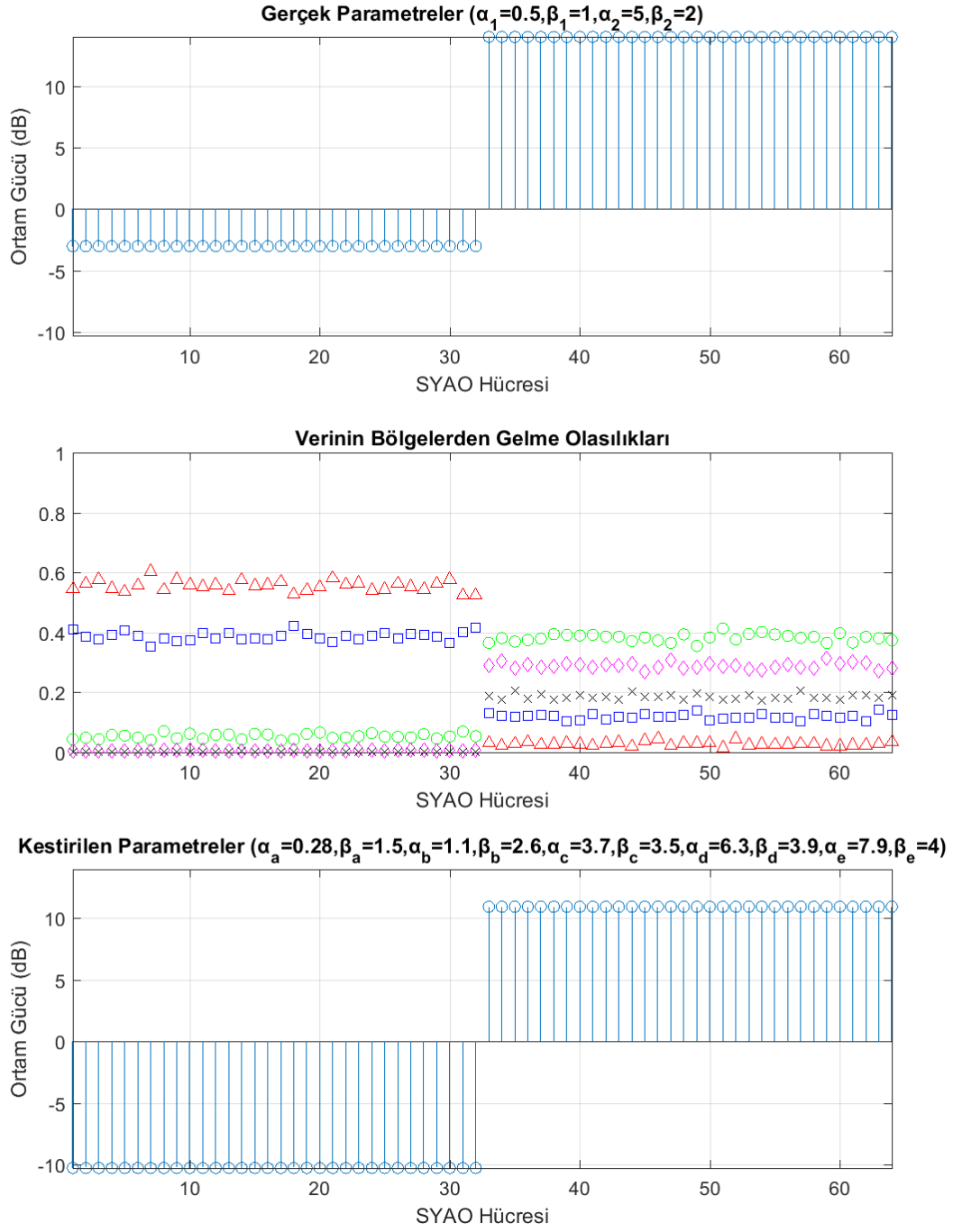
Beş seviyeli BE algoritmasının 2 seviyeli Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)

Parametreler	1.Bölge	2. Bölge
α	0,5	5
β	1	2
q	0,5	0,5

Tablo 6.32 Parametrelerin 2 seviyeli ortamdaki değerleri

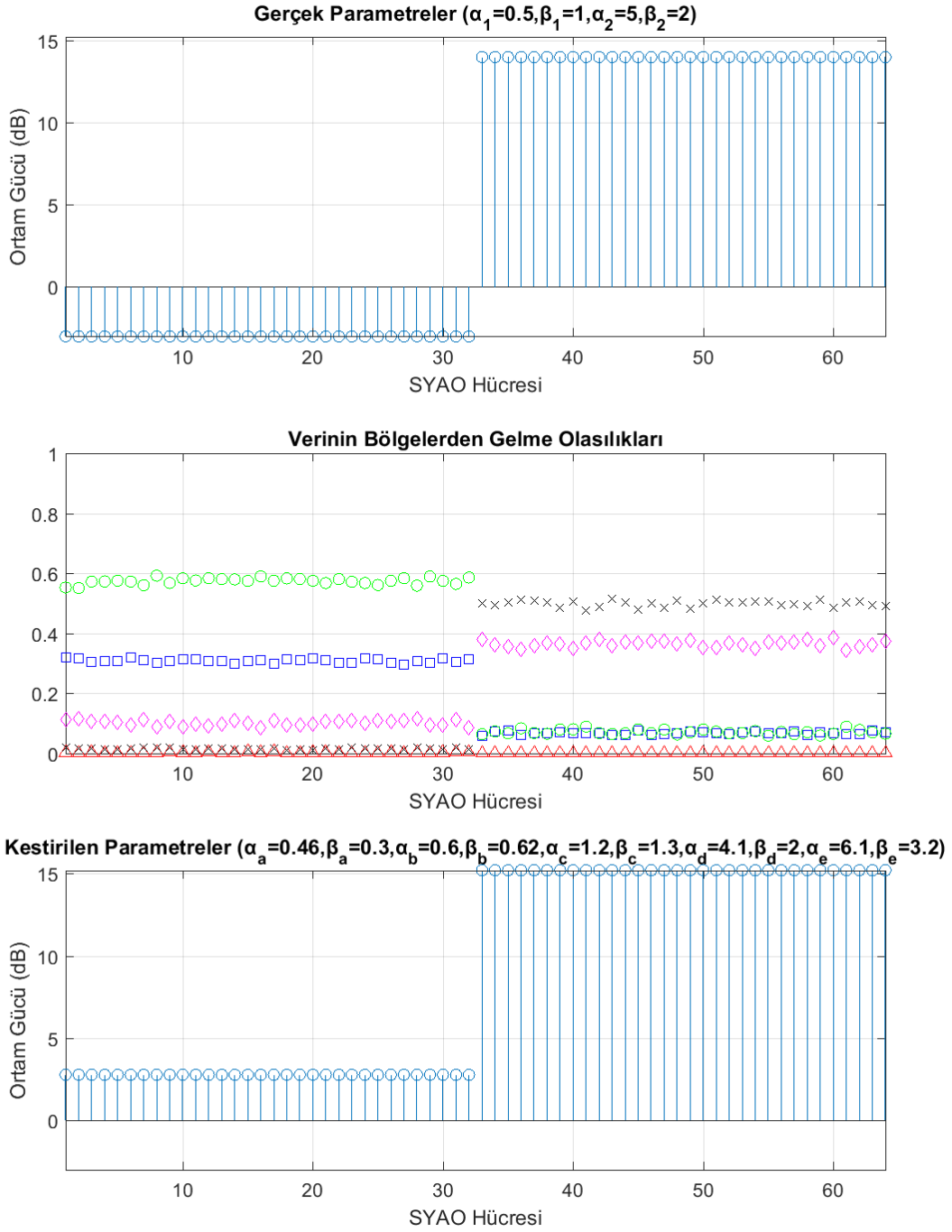
Tablo 6.32'de belirtilen yöntemlerin uygulandığı ortamın gerçek parametreleri verilmiştir.



Şekil 6.49 İki seviyeli ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.49'da sonuçları gösterilen çalışmada 2 seviyeli ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 2 seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Şekil 6.50 İki seviyeli ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.50'de sonuçları gösterilen çalışmada 2 seviyeli ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın 2 seviyeden meydana geldiği tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,5	5	2
	β	1	2	
	q	32/64	32/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,28	3,7	2
	β	1,5	3,5	
	Seviye Tespiti	32/32	32/32	

Tablo 6.33 İki seviyeli ortamda 1. yöntem sonucu

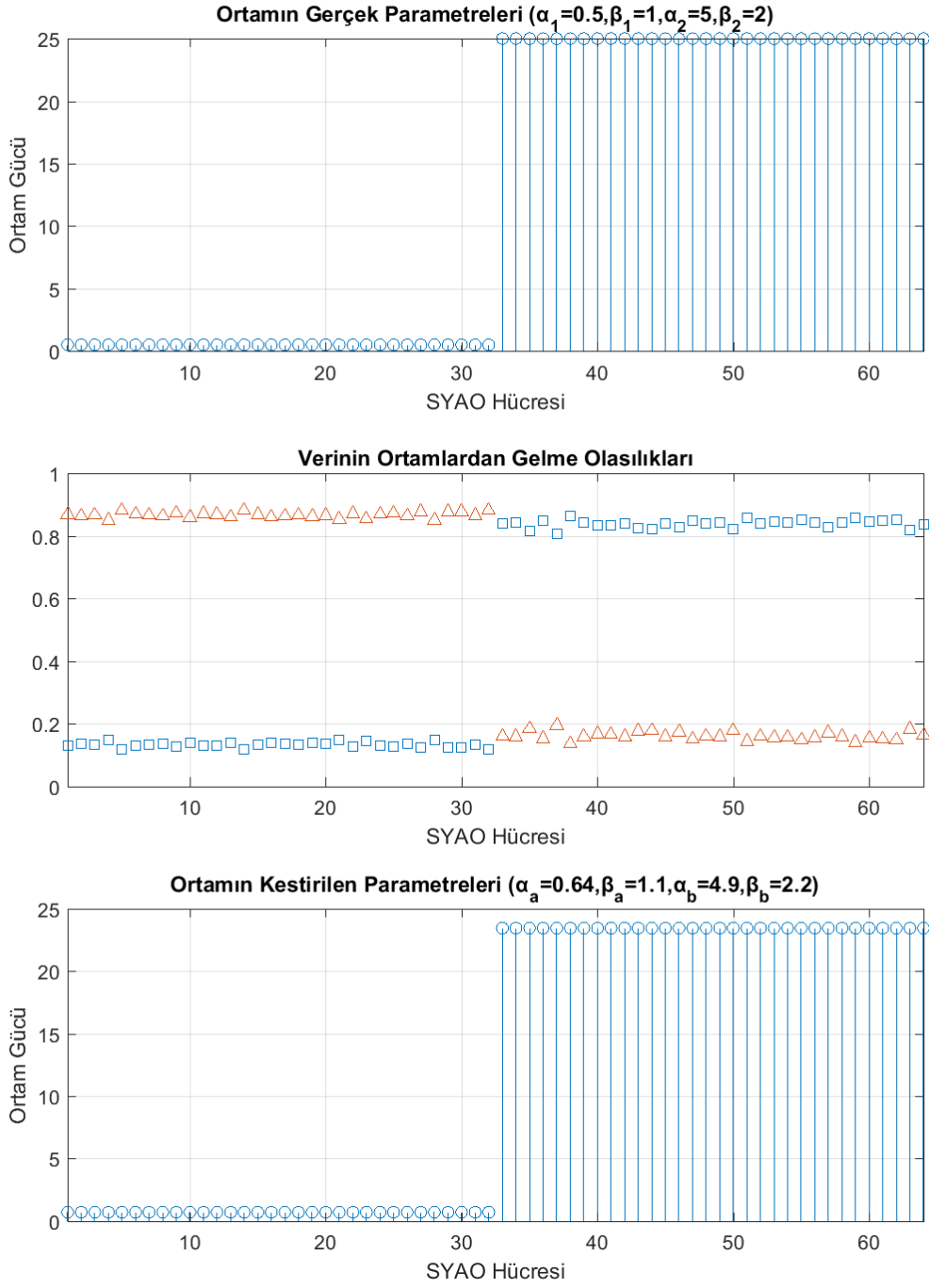
Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.33'te gösterilmiştir. Bu yöntem ile 5 seviyeli BE algoritması çalıştırılmış ve ortamdaki toplam bölge sayısı 2 olarak başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamın Parametre Seti	α	0,5	5	2
	β	1	2	
	q	32/64	32/64	
2.Yöntem Sonucu	α	1,2	6,1	2
	β	1,3	3,2	
	Seviye Tespiti	32/32	32/32	

Tablo 6.34 İki seviyeli ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.34'te gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarı doğru tespit edilmiştir.

Parametre kestiriminin daha iyi yapılabilmesi için ortamdaki seviye sayısı ile algoritmanın seviye sayısı aynı olmalıdır. Seviye tespiti yapıldıktan sonra aynı veriler kullanılarak yeniden BE algoritması çalıştırılabilir.



Şekil 6.51 Seviyesi tespit edilen ortamın parametre kestirimi için yeniden çalıştırılması

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}))$$

Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) parametre kestirimi başarımını arttırmak için ortamın seviyesinin 2 olduğunun tespitinden sonra 2 seviyeli BE algoritması aynı ortam için çalıştırılmıştır.

Tablo 6.35'te açıkça görülmektedir ki iki seviyeli ortamda, 2 seviyeli BE algoritması kullanılarak yapılan parametre kestirimi, 5 seviyeli BE algoritmasının 1. yöntemi kullanılarak yapılan parametre kestirimine göre daha başarılıdır.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	2. Bölge
Ortamın Parametre Seti	α	0,5	5
	β	1	2
5 seviyeli BE algoritma sonucu	α	0,28	3,7
	β	1,5	3,5
2 seviyeli BE algoritma sonucu	α	0,64	4,9
	β	1,1	2,2

Tablo 6.35 İki seviyeli ortamda 5 ve 2 seviyeli BE algoritma sonuçları

Çok seviyeli BE algoritmasının bulunduğu seviye sonucu eğer BE algoritması seviye sayısından küçükse; aynı veriler tekrar kullanılarak bulunan seviyeye göre BE algoritmasının çaiştirilabilir. Bu işlem parametre kestirimi arttırmaktadır yöntemi bütün seviyelerde uygulanabilir.

6.3.5 Beş Seviyeli BE Algoritmasının Tektür Weibull Ortamdaki Başarımı

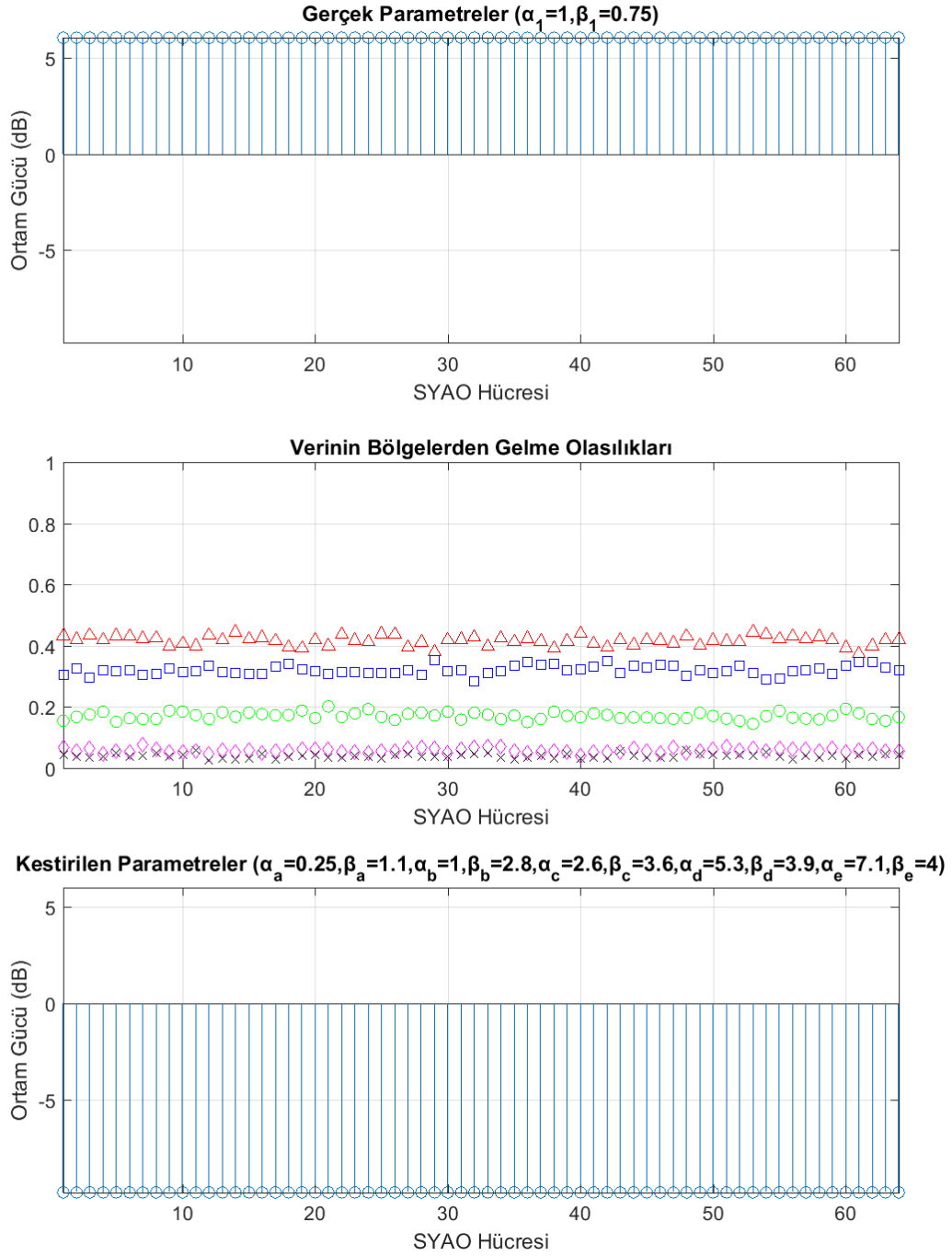
Beş seviyeli BE algoritmasının 1 seviyeli (tektür) Weibull ortamdaki başarımını incelemek için aşağıdaki koşullar incelenmiştir.

1. Bütün parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem)
2. Önceden belirlenmiş şekil parametrelerin kullanıldığı durum (2. yöntem)

Parametreler	1.Bölge
α	0,1
β	0,5
q	1

Tablo 6.36 Parametrelerin 1 seviyeli ortamdaki değerleri

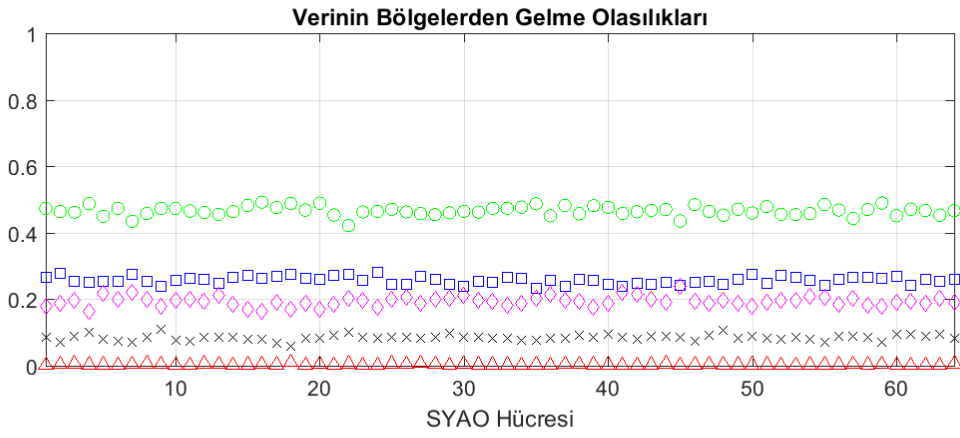
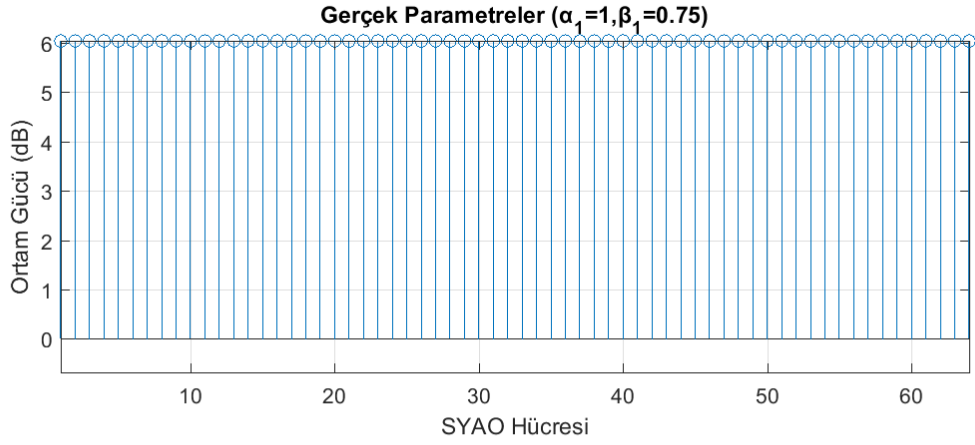
Tablo 6.36'da belirtilen yöntemlerin uygulandığı ortamın gerçek parametreleri verilmiştir.



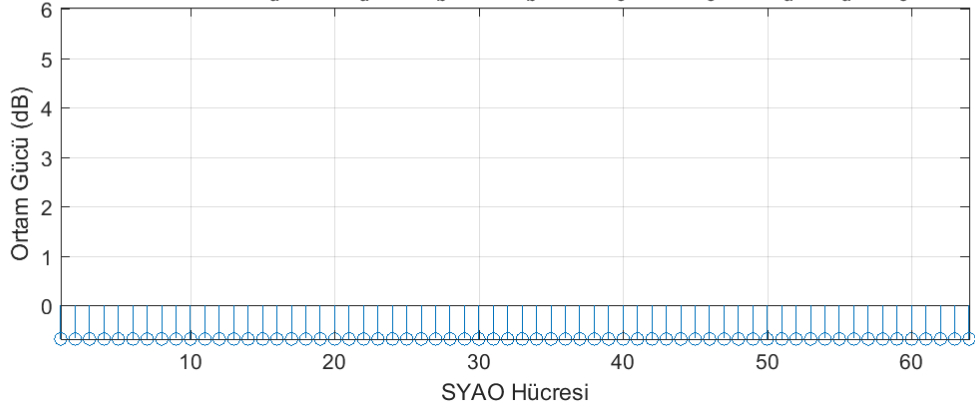
Şekil 6.52 Tektür ortamda hiçbir parametrenin bilinmediği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.52’de sonuçları gösterilen çalışmada tektür ortamda tüm parametrelerin kestirildiği durum (1. yöntem) incelenmiştir. Ortamın tek seviyeden meydana geldiği başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.



Kestirilen Parametreler ($\alpha_a=0.22, \beta_a=0.3, \alpha_b=0.28, \beta_b=0.62, \alpha_c=0.78, \beta_c=1.3, \alpha_d=3, \beta_d=2, \alpha_e=6.4, \beta_e=3.2$)



Şekil 6.53 Tektür ortamda şekil parametresinin biliniyor kabul edildiği durum

$$(\Delta: p(y = a|x_i, \hat{\theta}), \square: p(y = b|x_i, \hat{\theta}), \circ: p(y = c|x_i, \hat{\theta}), \diamond: p(y = d|x_i, \hat{\theta}), \times: p(y = e|x_i, \hat{\theta}))$$

Şekil 6.53'te sonuçları gösterilen çalışmada tektür ortamın önceden belirlenmiş şekil parametreleriyle kestirildiği durum (2. yöntem) incelenmiştir. Ortamın tek seviyeden meydana geldiği tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	1	1
	β	0,75	
	q	64/64	
1.Yöntem Sonucu	α	0,25	1
	β	1,1	
	Seviye Tespiti	64/64	

Tablo 6.37 Tektür ortamda 1. yöntem sonucu

Bütün parametrelerin kestirildiği yöntemin (1. yöntem) sonuçları Tablo 6.37’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile 5 seviyeli BE algoritması çalıştırılmış ve ortamdaki toplam bölge sayısı 1 olarak başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.

Durumlar	Parametre	1. Bölge	Bölge Sayısı
Ortamin Parametre Seti	α	1	1
	β	0,75	
	q	64/64	
2.Yöntem Sonucu	α	0,78	1
	β	1,3	
	Seviye Tespiti	64/64	

Tablo 6.38 Tektür ortamda 2. yöntem sonucu

Önceden belirlenmiş şekil parametreleri ($\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$, $\beta_4 = 2$, $\beta_5 = 3,2$) kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin (2. yöntem) sonuçları Tablo 6.38’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile ortamdaki toplam bölge sayısı 1 olarak başarılı bir şekilde tespit edilmiştir.

7 SONUÇ

Yapılan çalışmada sabit yanlış alarm oranlı radar sistemleri için tektür olmayan ortamlarda Weibull dağılıma sahip çevresel yansıma sinyallerinin dağılım parametrelerinin kestirilmesi ve tektür bölgelerin saptanması amaçlanmıştır. Problemin çözümü için Beklenti Enbüyültme yöntemi kullanılmış ve başarımı incelenmiştir.

Beklenti Enbüyültme yönteminin yüksek çözünürlüklü kargaşa sinyallerini kapsayan Weibull ortama uyarlanması ele alınırken başarımlar analizlerinde iki seviyeli ve beş seviyeli Beklenti Enbüyültme algoritmaları türetilerek kullanılmıştır.

Çalışmalarda Weibull ölçek parametresinin $0,1 < \alpha < 40$ aralığında ve şekil parametresinin $0,5 < \beta < 3$ aralığında değiştiği farklı ortamlardan benzetim yolu ile veriler üretilerek başarımlar analizleri yapılmıştır.

Beklenti Enbüyültme yönteminin iki seviyeli Weibull ortama uygulanışı incelenirken Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin, SYAO referans hücre sayısının ve ortamdaki kargaşalı bölgelerin oranlarının başarımlar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Weibull dağılımının şekil parametresi (β) azaldıkça güç artmakta bununla beraber varyans da artmaktadır. Farklı ölçek parametrelerine sahip fakat şekil parametreleri aynı olan ortamlardaki bölgelerin güç farkı, şekil parametresinin büyüklüğü ile ters orantılıdır. Güç farkı değerinin ortamları ayırt etmede dolaylı olarak önemli bir rolü bulunsa da incelenen bu durum için işe yaramadığı görülmüştür. Şekil parametresi düşük olduğu ortamlarda güç farkı artmasına rağmen ortamları ayırt etmeyi ve parametre kestirimini zorlaştıracak unsurlar (varyansın artması ve dağılımların yüksek olasılıklı bölgelerinin kesişmesi) meydana gelmektedir. Şekil parametresinin değeri azaldıkça kestirilen parametrelerin hata oranları artmakta, buna bağlı olarak bölgelerin ayırt edilebilirliği zorlaşmaktadır.

Weibull dağılımının ölçek parametresi (α) arttıkça iki farklı şekil parametresine sahip dağılım arasındaki güç farkı da artmaktadır. Dağılımlar arasındaki güç farkı α 'nın aldığı değer karesi ile doğru orantılıdır. Ölçek parametresi değerinin daha yüksek olduğu durumlarda ortamın ayırt edilebilirliğinin arttığı görülmüştür. Ölçek parametresinin değeri küçüldükçe kestirilen parametrelerin hata oranları artmakta, ve yüksek güçlü kargaşa ortamının tespiti zorlaşmaktadır.

Ortamdaki dağılımların sahip olduğu ölçek veya şekil parametrelerinin birbirlerine göre uzaklıkları Cramer Rao sınırına yaklaştıkça parametre kestirim başarımı azalmakta buna bağlı olarak farklı güçteki güçlerin tespit başarısı da azalmaktadır.

İki seviyeli ortamın dağılım oranı da başarımı etkileyen parametrelerden biridir. Parametre kestirimi başarısı, ortamda bulunan ilgili dağılıma ait hücre sayısı ile birebir orantılı bir şekilde değişmemektedir. Çalışmalarda belirtilen dağılım parametreleri için yüksek güçlü kargaşalı bölge, tüm ortamın %2'si olsa bile yüksek güçlü kargaşalı bölge tespitinin başarılı bir şekilde gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Örnek sayısı fazla olan bölgelerin parametre kestirimi daha düzgün yapıldığından ilgili bölgede olan hücrelerin tespit edilme durumunun kolaylaştığı görülmüştür. Ancak bu değişimin tektüre yakın ortamlarda geçerli olmadığı gözlenmiştir. İki seviyeli ortamlarda BE'nin en iyi sonuç verdiği durum dağılımların ortamda bulunma oranlarının %50 olduğu durumdur. Dağılım oranının aynı kalması şartıyla ortamdaki ikinci seviyenin parçalı ya da sürekli olması başarımlarını değıştirmemiştir.

Çalışmalarda SYAO referans hücre sayısı genel olarak 64 alınmıştır. Ancak SYAO referans hücre sayısının başarımdaki etkisinin incelenmesi amacıyla aynı ortam 16, 32, 64, 128 ve 256 referans hücreye bölünerek analizler yapılmıştır. SYAO referans hücre sayısının artması durumunda kestirilen parametrelerin hata oranlarının azaldığı gözlemlenmiştir. Referans hücre sayısı düştükçe yüksek güçlü kargaşalı ortamların tespitinin zorlaştığı görülmüştür. Sistemin başarımını arttırmak için SYAO alıcılardaki referans hücre sayısı arttırılabilir. Referans hücre sayısının arttırılmasının maliyeti, yeni hücreleri tutacak olan hafıza tamponlarının sayısının arttırılması olacaktır. Ayrıca referans hücre sayısının arttırılması ortam tespit süresini az da olsa arttıracaktır.

Beklenti Enbüyültme yönteminin çok seviyeli Weibull ortama uygulanışı incelenirken Beklenti Enbüyültme algoritması en çok 5 seviyeyi çözecek şekilde tasarlanmıştır. Beş seviyeli BE algoritması 5 seviyeli, 4 seviyeli, 3 seviyeli, 2 seviyeli ve 1 seviyeli (tektür) ortamlara iki farklı yöntem kullanılarak uygulanmıştır. Birinci yöntem, şekil parametresi dahil tüm parametreleri (ölçek parametresi, hücrelerin ortamlardan gelme olasılığı) kestirerek ortam seviyesini hesaplayan yöntemdir. İkincisi ise önceden belirlenmiş $\beta_1 = 0,30$, $\beta_2 = 0,62$, $\beta_3 = 1,3$,

$\beta_4 = 2$, ve $\beta_5 = 3,2$ şekil parametreleri ile ortamın diğer parametrelerini kestirerek ortam seviyesini hesaplayan yöntemdir.

Beş seviyeli BE algoritması kullanılarak birinci yöntem ile 5 seviyeli ortamdaki tektür ortama kadar incelenen durumlar için ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarları başarıyla tespit edilmiştir. Tespit edilen ortamların dağılımlarının ölçek parametrelerinin kestirim hataları şekil parametrelerinin kestirim hatalarına göre oldukça düşüktür. Ortamın gerçek güç seviyesi grafiği ile kestirilen güç seviyesi grafikleri incelendiğinde kestirilen güçlerin özellikle şekil parametrelerinin yüksek olduğu bölgelerde gerçek değerlere yakın olduğu gözlenmiştir.

Beş seviyeli BE algoritması kullanılarak ikinci yöntem ile 5 seviyeli ortamdaki tektür ortama kadar değişik seviyelerdeki ortamlar incelenmiştir. Ortamdaki toplam bölge sayısı ve her bölgedeki hücre miktarları başarıyla tespit edilemeyen durumlar gözlemlenmiştir. Bu yöntem, önceden belirlenen şekil parametrelerinin ortamda kendine en yakın şekil parametresi değerine sahip bölge ile eşleşmesine dayanmaktadır. Bu yüzden önceden belirlenmiş şekil parametreleri kullanılarak diğer parametrelerin kestirildiği yöntemin başarılı olabilmesi için BE algoritmasının seviye sayısının ortamın seviye sayısından fazla olması gerekmektedir. Aksi takdirde önceden belirlenmiş herhangi bir şekil parametresi ortamdaki şekil parametresi ile yaklaşık olarak eşleşmezse bu yöntem başarılı olamamaktadır. Ayrıca bu yöntemin başarısı, seçilen şekil parametreleri ile ortamdaki şekil parametrelerinin uyumuyla doğrudan ilgilidir. BE algoritmasının seviye sayısının ortamın seviye sayısından fazla olduğu ve seçilen şekil parametreleri ile ortamdaki bölgelerin şekil parametresinin değerlerinin uyduğu durumlarda parametre kestirimi başarısının ilk yöntemle göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Bu yöntemin en çok başarılı olduğu ortam, farklı güç seviyesinin az sayıda bulunduğu durumlar olduğu gözlenmiştir.

BE yönteminin çok seviyeli ortama uygulanışında kullanılan ilk yöntemde seviye tespiti sonrasında bulunan seviye sayısı ile aynı seviyeli BE algoritmasının tekrar çalıştırılması, parametre kestirim sonuçlarını daha başarılı bir noktaya götürdüğü görülmüştür. Parametre kestirim başarısı, hücrelerdeki verinin bölgelerden gelme olasılığı değeri ile birebir ilişkilidir. Bölgelerdeki olasılık değeri arttıkça parametre kestiriminin başarımının arttığı görülmüştür.

BE yönteminde başarımın artırılması için sistem tasarımında SYAO referans hücre sayısının artırılması dışında da iyileştirmeler yapılabilir. Bu çalışmada BE algoritmasının başlangıç değerleri iki seviyeli ve çok seviyeli ortamlar için sabit tutulmuştur. Ancak, algoritmanın başlangıç değerleri özellikle çok seviyeli ortamlarda performansı ciddi oranda etkilemektedir. Farklı başlangıç değerleri ile algoritma birden fazla kere çalıştırılarak çoğunluk kararı yöntemi uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] G. B. Goldstein, "False-Alarm Regulation in Log-Normal and Weibull Clutter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **1973**.
- [2] G. V. Trunk, "Further Results on the Detection of Targets in Non-Gaussian Sea Clutter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **1971**.
- [3] M. Sekine and Y. Mao, *Weibull Radar Clutter*. London: Peter Peregrinus, **1990**.
- [4] J. B. Billingsley and W. A. Publishing, "Low-Angle Radar Land Clutter: Measurements and Empirical Models," *October*. **2002**.
- [5] H. M. Finn and R. S. Johnson, "Adaptive Detection Mode with Threshold Control as a Function of Spatially Sampled Clutter-Level Estimates," *RCA Rev.*, vol. 29, pp. 414–464, **1968**.
- [6] D. C. Schleher, "Radar Detection in Weibull Clutter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **1976**.
- [7] R. Ravid and N. Levanon, "Maximum-likelihood CFAR for Weibull background," *IEE Proc. F - Radar Signal Process.*, **1992**.
- [8] M. A. Richards, *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill, **2005**.
- [9] A. Farina and F. A. Studer, "A review of CFAR detection techniques in radar systems," *Microw. J.*, **1986**.
- [10] M. K. Uner and P. K. Varshney, "CFAR processing in nonhomogeneous background," *Proc. MELECON '94. Mediterr. Electrotech. Conf.*, **1994**.
- [11] B. Chen, P. K. Varshney, and J. H. Michels, "Adaptive CFAR Detection for Clutter-Edge Heterogeneity Using Bayesian Inference," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **2003**.
- [12] A. Pourmottaghi, M. R. Taban, and S. Gazor, "A CFAR detector in a nonhomogenous Weibull clutter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **2012**.
- [13] S. Chabbi, T. Laroussi, and M. Barkat, "Performance analysis of dual automatic censoring and detection in heterogeneous Weibull clutter: A comparison through extensive simulations," *Signal Processing*. **2013**.

- [14] R. L. Streit and P. K. Willett, "Detection of random transient signals via hyperparameter estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, **1999**.
- [15] U. C. Doyuran, "Radar Target Detection in Non-Gaussian Clutter," METU, **2007**.
- [16] U. C. Doyuran and Y. Tanik, "Expectation maximization-based detection in range-heterogeneous Weibull clutter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **2014**.
- [17] P. P. Gandhi and S. A. Kassam, "Analysis of CFAR Processors in Nonhomogeneous Background," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. **1988**.
- [18] V. G. Hansen and J. H. Sawyers, "Detectability loss due to "greatest of selection in a cell-averaging cfar," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **1980**.
- [19] G. V. Trunk, "Range resolution of targets using automatic detectors," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **1978**.
- [20] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm," *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, **1977**.
- [21] J. a. Bilmes, "A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for Gaussian mixture and hidden Markov models," *Int. Comput. Sci. Inst.*, **1998**.
- [22] D. Karlis and E. Xekalaki, "Choosing initial values for the EM algorithm for finite mixtures," *Comput. Stat. Data Anal.*, **2003**.
- [23] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE Int. Conf.*, **1995**.
- [24] Y. Zhang, S. Wang, G. Ji, Y. Zhang, S. Wang, and G. Ji, "A Comprehensive Survey on Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications," *Math. Probl. Eng.*, **2015**.
- [25] C. B. Do and S. Batzoglou, "What is the expectation maximization algorithm?," *Nat. Biotechnol.*, **2008**.
- [26] K. Train, "EM Algorithms," in *Discrete Choice Model with Simulation*, **2009**.

- [27] T. K. Moon, "The expectation-maximization algorithm," *IEEE Signal Process. Mag.*, **1996**.
- [28] S. Sutar, "Parameter estimation of the modified Weibull distribution using Monte Carlo Expectation Maximization algorithm," *Model Assist. Stat. Appl.*, **2016**.
- [29] L. Liang, H. Shen, P. De Camilli, D. K. Toomre, and J. S. Duncan, "Expectation- Maximization," *Neurocomputing*, **2004**.
- [30] C. Wu, "On the convergence properties of the EM algorithm," *Ann. Stat.*, **1983**.
- [31] J. R. Movellan, "Tutorial on Generalized Expectation Maximization," *Interpret. A J. Bible Theol.*, **2004**.
- [32] T. K. Moon, "The expectation-maximization algorithm," *IEEE Signal Process. Mag.*, **1996**.
- [33] H. L. Van Trees, "Detection, estimation, and modulation theory: Detection, estimation, and linear modulation theory," *Most*, **1968**.

EK1. FISHER BİLGİ MATRİSİNİN BULUNMASI

Fisher bilgi matrisini bulmak için aşağıda gösterildiği gibi (6.10) matristeki her terimin beklenen değeri hesaplanır.

$$I(\theta) = -E \left[\begin{array}{cc} \frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta & -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \\ -\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) & -\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2 \end{array} \right] \quad (\text{EK1.1})$$

İlk terimin beklenen değerinin hesaplaması

$$E \left[\frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta \right] = \frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) N E[x_i^\beta] \quad (\text{EK1.2})$$

Yukardaki denklemden tek bilinmeyen $E[x_i^\beta]$ 'yi şu şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} E[x_i^\beta] &= \int_0^\infty x_i^\beta \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \int_0^\infty x_i^\beta x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\ &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^\beta x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \end{aligned} \quad (\text{EK1.3})$$

$u = x_i^\beta$ olsun. $du = \beta x_i^{\beta-1} dx_i$ olur. $dx_i = \frac{du}{\beta x_i^{\beta-1}}$ olduğu görülür. Yeni değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E[x_i^\beta] &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^\infty u x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{u}{\alpha^\beta}\right)} \frac{du}{\beta x_i^{\beta-1}} \\ &= \frac{1}{\alpha^\beta} \int_0^\infty u e^{-\left(\frac{u}{\alpha^\beta}\right)} du \end{aligned} \quad (\text{EK1.4})$$

$\int f dg = fg - \int gdf$ parçalı integral eşitliğinden yararlanılır. $f = u$ ve $dg = e^{-(u/\alpha)^\beta} du$ olsun. Bu durumda $df = du$ ve $g = -\alpha^\beta e^{-(u/\alpha)^\beta}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} E[x_i^\beta] &= \frac{1}{\alpha^\beta} \left[-\alpha^\beta u e^{-(u/\alpha)^\beta} + \int -\alpha^\beta e^{-(u/\alpha)^\beta} du \right] \\ &= \frac{\alpha^\beta}{\alpha^\beta} \left[\int e^{-(u/\alpha)^\beta} du - u e^{-(u/\alpha)^\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{EK1.5})$$

$s = -\frac{u}{\alpha^\beta}$ olsun. $ds = -\frac{1}{\alpha^\beta} du$ olur. $du = -\alpha^\beta ds$ olduğu görülür. Yeni değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E[x_i^\beta] &= - \int e^s \alpha^\beta ds - u e^{-(u/\alpha)^\beta} \\ &= -e^s \alpha^\beta - u e^{-(u/\alpha)^\beta} \end{aligned} \quad (\text{EK1.6})$$

$s = -\frac{u}{\alpha^\beta}$ tekrar yerine yazılır.

$$E[x_i^\beta] = -e^{-\frac{u}{\alpha^\beta}} \alpha^\beta - u e^{-(u/\alpha)^\beta} \quad (\text{EK1.7})$$

$u = x_i^\beta$ tekrar yerine yazılır.

$$\begin{aligned} E[x_i^\beta] &= \left[-e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \alpha^\beta - x_i^\beta e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]_0^\infty \\ &= -e^{-\left(\frac{\infty}{\alpha}\right)^\beta} \alpha^\beta - \infty^\beta e^{-\left(\frac{\infty}{\alpha}\right)^\beta} + e^{-\left(\frac{0}{\alpha}\right)^\beta} \alpha^\beta + 0^\beta e^{-\left(\frac{0}{\alpha}\right)^\beta} \\ &= -0 - 0 + \alpha^\beta + 0 \\ &= \alpha^\beta \end{aligned} \quad (\text{EK1.8})$$

İlk terimin beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E \left[\frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) \sum_{i=1}^N x_i^\beta \right] = \frac{\beta N}{\alpha^2} - \alpha^{-\beta-2} \beta (1 + \beta) N \alpha^\beta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta N}{\alpha^2} - \frac{\beta N}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 N}{\alpha^2} \\
&= -\frac{\beta^2 N}{\alpha^2} \tag{EK1.9}
\end{aligned}$$

İkinci ve üçüncü terimlerin beklenen değerlerinin hesaplaması

$$\begin{aligned}
&E \left[-\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \right] \\
&= -\frac{N}{\alpha} + N E \left[x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \right] \\
&= -\frac{N}{\alpha} + N \alpha^{-\beta-1} E \left[x_i^\beta + \beta x_i^\beta \ln x_i - \beta \ln \alpha x_i^\beta \right] \\
&= -\frac{N}{\alpha} + N \alpha^{-\beta-1} \left(E \left[x_i^\beta \right] + \beta E \left[x_i^\beta \ln x_i \right] - \beta \ln \alpha E \left[x_i^\beta \right] \right) \tag{EK1.10}
\end{aligned}$$

Daha önce $E \left[x_i^\beta \right] = \alpha^\beta$ olduğu bulunmuştu (EK1.8).

$$\begin{aligned}
&E \left[-\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1} (1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha) \right] \\
&= -\frac{N}{\alpha} + N \alpha^{-\beta-1} \left(\alpha^\beta + \beta E \left[x_i^\beta \ln x_i \right] - \beta \ln \alpha \alpha^\beta \right) \\
&= -\frac{N}{\alpha} + N \alpha^{-\beta-1+\beta} + N \alpha^{-\beta-1} \beta E \left[x_i^\beta \ln x_i \right] \\
&\quad - N \alpha^{-\beta-1+\beta} \beta \ln \alpha \\
&= -\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\alpha} + \frac{N\beta}{\alpha^{\beta+1}} E \left[x_i^\beta \ln x_i \right] - \frac{N}{\alpha} \beta \ln \alpha \\
&= \frac{N\beta}{\alpha^{\beta+1}} E \left[x_i^\beta \ln x_i \right] - \frac{N}{\alpha} \beta \ln \alpha \tag{EK1.11}
\end{aligned}$$

Yukardaki denklemde $E \left[x_i^\beta \ln x_i \right]$ bilinmiyor.

$$\begin{aligned}
E[x_i^\beta \ln x_i] &= \int_0^\infty x_i^\beta \ln x_i \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i
\end{aligned} \tag{EK1.12}$$

$u = \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta$ olsun. $du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx_i$ olur. $dx_i = \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha^\beta} x_i^{\beta-1}}$ olduğu görülür. Yeni değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
E[x_i^\beta \ln x_i] &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-u} \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha^\beta} x_i^{\beta-1}} \\
&= \int_0^\infty x_i^\beta \ln x_i e^{-u} du
\end{aligned} \tag{EK1.13}$$

$x_i = u^{\frac{1}{\beta}} \alpha$ eşitliği denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
E[x_i^\beta \ln x_i] &= \int_0^\infty u \alpha^\beta \ln(u^{\frac{1}{\beta}} \alpha) e^{-u} du \\
&= \int_0^\infty u \alpha^\beta \left[\frac{1}{\beta} \ln(u) + \ln(\alpha) \right] e^{-u} du \\
&= \frac{\alpha^\beta}{\beta} \int_0^\infty u \ln(u) e^{-u} du + \ln(\alpha) \alpha^\beta \int_0^\infty u e^{-u} du
\end{aligned} \tag{EK1.14}$$

İntegral tablosundan $\int_0^\infty x^{v-1} e^{-\mu x} \ln x dx = \frac{1}{\mu^v} \Gamma(v) [\Psi(v) - \ln \mu]$, $\mu > 0, v > 0$ eşitliği referans alınır. $\Gamma(\cdot)$ Gama fonksiyonu ve $\Psi(\cdot)$ Digama fonksiyonudur.

$\int_0^\infty u \ln(u) e^{-u} du$ integrali için $v - 1 = 1$, $\mu = 1$ seçildiği zaman benzer bir eşitlik ortaya çıktığı görülür. $\int_0^\infty u e^{-u} du = 1$ olarak hesaplanır.

$$E[x_i^\beta \ln x_i] = \frac{\alpha^\beta}{\beta} \left[\frac{1}{1^2} \Gamma(2) [\Psi(2) - \ln 1] \right] + \ln(\alpha) \alpha^\beta \tag{EK1.15}$$

$\Gamma(2) = (2 - 1)!$, $\Psi(2) = \Psi(1) + 1$ ve $\Psi(1) = -\gamma$ olduğu biliniyor. Buradaki $\gamma = 0.5772$ Euler-Mascheroni sabitidir.

$$E\left[x_i^\beta \ln x_i\right] = \frac{\alpha^\beta}{\beta}(1 - \gamma) + \ln(\alpha)\alpha^\beta \quad (\text{EK1.16})$$

İkinci ve üçüncü terimlerin beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} E\left[-\frac{N}{\alpha} + \sum_{i=1}^N x_i^\beta \alpha^{-\beta-1}(1 + \beta \ln x_i - \beta \ln \alpha)\right] \\ = \frac{N\beta}{\alpha^{\beta+1}} \left[\frac{\alpha^\beta}{\beta}(1 - \gamma) + \ln(\alpha)\alpha^\beta \right] - \frac{N}{\alpha} \beta \ln \alpha \\ = \frac{N}{\alpha}(1 - \gamma) + \frac{N}{\alpha} \beta \ln(\alpha) - \frac{N}{\alpha} \beta \ln \alpha \\ = \frac{N}{\alpha}(1 - \gamma) \end{aligned} \quad (\text{EK1.17})$$

Dördüncü terimin beklenen değerinin hesaplanması

$$\begin{aligned} E\left[-\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2\right] &= -\frac{N}{\beta^2} - NE\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2\right] \\ &= -\frac{N}{\beta^2} - N \int_0^\infty \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\ &= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\ &= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} [\ln x_i - \ln \alpha]^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\ &= -\frac{N}{\beta^2} \\ &\quad - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} [(\ln x_i)^2 - 2 \ln \alpha \ln x_i \\ &\quad + (\ln \alpha)^2] e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N}{\beta^2} \\
&\quad -\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \left[\int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \right. \\
&\quad - 2\ln\alpha \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&\quad \left. + (\ln\alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \right] \\
&= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&\quad + \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} 2\ln\alpha \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&\quad - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln\alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i
\end{aligned} \tag{EK1.18}$$

(EK1.18) eşitliğinde integral hesaplamaları tek tek yapılırsa; ilk integral,

$$-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \tag{EK1.19}$$

için

$u = \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta$ olsun. $du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx_i$ olur. $dx_i = \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha} x_i^{\beta-1}}$ olduğu görülür. Yeni

değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= -\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-u} \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha} x_i^{\beta-1}} \\
&= -\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-u} \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha} x_i^{\beta-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^\beta (\ln x_i)^2 e^{-u} du \\
&= -\frac{N}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^\beta (\ln x_i)^2 e^{-u} du \tag{EK1.20}
\end{aligned}$$

$x_i = u^{\frac{1}{\beta}} \alpha$ eşitliğin denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i = -\frac{N}{\alpha^\beta} \int_0^\infty u \alpha^\beta \left[\ln \left(u^{\frac{1}{\beta}} \alpha \right) \right]^2 e^{-u} du \\
&= -N \int_0^\infty u \left[\frac{1}{\beta} \ln(u) + \ln(\alpha) \right]^2 e^{-u} du \\
&= -N \int_0^\infty u \left[\frac{1}{\beta^2} [\ln(u)]^2 + 2 \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) \ln(u) + [\ln(\alpha)]^2 \right] e^{-u} du \\
&= -N \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty u [\ln(u)]^2 e^{-u} du - 2N \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) \int_0^\infty u \ln(u) e^{-u} du \\
&\quad - N (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty u e^{-u} du \tag{EK1.21}
\end{aligned}$$

İntegral tablosundan $\int_0^\infty u [\ln(u)]^2 e^{-u} du = -2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= -N \frac{1}{\beta^2} \left[-2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] - 2N \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) [1 - \gamma] \\
&\quad - N (\ln \alpha)^2 \tag{EK1.22}
\end{aligned}$$

bulunur.

(EK1.18) eşitliğindeki ikinci integralin hesaplanması:

$$\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} 2 \ln \alpha \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i = \frac{2N \ln \alpha}{\alpha^\beta} \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2N \ln \alpha}{\alpha^\beta} \int_0^\infty x_i^\beta \ln x_i \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= \frac{2N \ln \alpha}{\alpha^\beta} E[x_i^\beta \ln x_i] \\
&= \frac{2N \ln \alpha}{\alpha^\beta} \left[\frac{\alpha^\beta}{\beta} (1 - \gamma) + \ln(\alpha) \alpha^\beta \right] \\
&= 2N \ln \alpha \left[\frac{1}{\beta} (1 - \gamma) + \ln(\alpha) \right] \tag{EK1.23}
\end{aligned}$$

(EK1.18) eşitliğindeki üçüncü integralin hesaplanması:

$$-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \tag{EK1.24}$$

$u = \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta$ olsun. $du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx_i$ olur. $dx_i = \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha^\beta} x_i^{\beta-1}}$ olduğu görülür. Yeni değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= -\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-u} \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha^\beta} x_i^{\beta-1}} \\
&= -\frac{N}{\alpha^\beta} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^\beta e^{-u} du \tag{EK1.25}
\end{aligned}$$

$x_i = u^{\frac{1}{\beta}} \alpha$ eşitliği denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-\frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i = -\frac{N}{\alpha^\beta} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty u \alpha^\beta e^{-u} du \\
&= -N (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty u e^{-u} du \\
&= -N (\ln \alpha)^2 \tag{EK1.26}
\end{aligned}$$

Bulunan (EK1.22),(EK1.23) ve (EK1.26) integral sonuçları (EK1.18)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
E \left[-\frac{N}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right]^2 \right] \\
&= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} (\ln x_i)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&\quad + \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} 2 \ln \alpha \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} \ln x_i e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&\quad - \frac{N\beta}{\alpha^{2\beta}} (\ln \alpha)^2 \int_0^\infty x_i^{2\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} dx_i \\
&= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N}{\beta^2} \left[-2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] - 2N \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) [1 - \gamma] \\
&\quad - N (\ln \alpha)^2 + 2N \ln \alpha \left[\frac{1}{\beta} (1 - \gamma) + \ln(\alpha) \right] - N (\ln \alpha)^2 \\
&= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N}{\beta^2} \left[-2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] - 2N \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) [1 - \gamma] \\
&\quad - N (\ln \alpha)^2 + 2N \frac{1}{\beta} \ln \alpha (1 - \gamma) + 2N \ln(\alpha) \ln(\alpha) \\
&\quad - N (\ln \alpha)^2 \\
&= -\frac{N}{\beta^2} - \frac{N}{\beta^2} \left[-2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] \\
&= -\frac{N}{\beta^2} \left[1 - 2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] \tag{EK1.27}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuçlar bir araya getirilerek (EK1.9),(EK1.17),(EK1.27) ifadeleri (EK1.1) bilgi matrisinde yerine yazılırsa, FBM aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I(\theta) = N \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 & \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} & \frac{\left(1 - 2\gamma + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (\text{EK1.28})$$

EK2. PARAMETRE KESTİRİM HATA VARYANSLARININ BULUNMASI (FISHER BİLGİ MATRİSİNİN TERSİNİN HESAPLANMASI)

$$\begin{aligned}
 J = [I(\theta)]^{-1} &= \left(N \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 & \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} & \frac{1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}}{\beta^2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1/N}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 & \frac{(1-\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(1-\gamma)}{\alpha} & \frac{1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}}{\beta^2} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1/N}{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right) - \frac{(1-\gamma)(1-\gamma)}{\alpha^2}} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1/N}{\frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\alpha^2} - \frac{(1-2\gamma+\gamma^2)}{\alpha^2}} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1/N}{\frac{1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}-1+2\gamma-\gamma^2}{\alpha^2}} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{6\alpha^2}{\pi^2} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6})}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{(\gamma-1)}{\alpha} & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{EK2.1}
 \end{aligned}$$

EK3. WEIBULL DAĞILIMININ BEKLENEN DEĞERİNİN VE VARYANSININ HESAPLANMASI

$$f(x; \beta, \alpha) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, x \geq 0 \quad (\text{EK3.1})$$

Weibull dağılımının beklenen değer ve varyans eşitliklerini bulmak için genel moment denkleminde faydalanır. Weibull dağılımının k. momentini aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \int_0^\infty x f(x; \beta, \alpha) dx \\ &= \int_0^\infty x^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \int_0^\infty x^k x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \int_0^\infty x^{k+\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \end{aligned} \quad (\text{EK3.2})$$

$u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta$ $x = u^{1/\beta} \alpha$ olsun. $du = \beta x^{\beta-1} \alpha^{-\beta} dx$ ve $dx = \frac{1}{\beta(u^{1/\beta} \alpha)^{\beta-1} \alpha^{-\beta}} du$ olduğu

görüür. Yeni değişken integralde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(u^{1/\beta} \alpha\right)^{k+\beta-1} e^{-u} \frac{1}{\beta(u^{1/\beta} \alpha)^{\beta-1} \alpha^{-\beta}} du \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha} u^{\frac{k}{\beta}+1} u^{-1/\beta} \alpha^{k+\beta-1} e^{-u} \frac{1}{\beta(u^{1/\beta} \alpha)^{\beta-1} \alpha^{-\beta}} du \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u^{\frac{k}{\beta}+1} u^{-1/\beta} \alpha^{k+\beta-1} e^{-u} \frac{1}{u u^{-1/\beta} \alpha^{-1}} du \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \alpha^{k+\beta-1} \int_0^\infty u^{\left(\frac{k}{\beta}+1\right)-1} e^{-u} du \end{aligned} \quad (\text{EK3.3})$$

Weibull dağılımının k. momenti aşağıdaki gibi bulunur.

$$E[X^k] = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \quad (\text{EK3.4})$$

Weibull dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıda verilmiştir.

$$E[X] = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (\text{EK3.5})$$

$$\text{Var}(X) = \alpha^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right) \quad (\text{EK3.6})$$

Burada $\Gamma()$, Gama fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \text{ pozitif kompleks sayı} \quad (\text{EK3.7})$$

Weibull dağılımının gücü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \text{Var}(X) + (E[X])^2 \\ &= \alpha^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right) + \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \\ &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \alpha^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 + \alpha^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \\ &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (\text{EK3.8})$$

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Muhammed Hanşeref YAŞIN

Doğum Yeri : Cizre

Medeni Hali : Evli

E-posta : hanseref@gmail.com

Eğitim

Lise : 2001-2004, Cizre Lisesi

Lisans : 2004-2009, Hacettepe Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans : 2010-2018, Hacettepe Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : Çok iyi

İş Deneyimi

2010- : Ortana Elektronik A.Ş. ArGe Teknik Lideri

Deneyim Alanları

Gömülü yazılım, elektronik tasarım, radar sinyal işleme.

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 16./10./2018.

Tez Başlığı / Konusu: **Tektür Olmayan Weibull Dağılımlı Çevresel Yansıma Ortamının Beklenti Enbüyültme Yöntemine Dayalı Analizi**

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam ...137... sayfalık kısmına ilişkin, 15./10./2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10. 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç/dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

16.10.2018

Adı Soyadı: Muhammed Hanşeref Yaşın

Öğrenci No: N10123613

Anabilim Dalı: Elektrik ve Elektronik Mühendisliği

Programı: Elektrik ve Elektronik Mühendisliği-Tezli Yüksek Lisans

Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Dr. Öğretim Üyesi, Mücahit Kani ÜNER.
(Unvan, Ad Soyad, İmza)