



**LES-C MODELİ İLE AKIŞKAN-AKIŞKAN ETKİLEŞİMİ  
PROBLEMLERİNDE MODELLEME HATASININ  
AZALTILMASI**

**REDUCING THE MODELING ERROR IN THE  
FLUID-FLUID INTERACTION PROBLEMS WITH LES-C  
MODEL**

**EDA ÖNAL**

**DOÇ. DR. MUSTAFA AĞGÜL**

**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2023

## ÖZET

### LES-C MODELİ İLE AKIŞKAN-AKIŞKAN ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNDE MODELLEME HATASININ AZALTILMASI

**Eda Önal**

**Yüksek Lisans, Matematik**

**Danışman: Doç. Dr. Mustafa AĞGÜL**

**Mart 2023, 57 sayfa**

Bu tez çalışmasında, iki akışın lineer olmayan ortak bir yüzey boyunca kenetlendiği ve bu akışlardan birinin ya da her ikisinin de yüksek Reynold sayılarında olduğu bir akışkan-akışkan etkileşimi problemi ele alınmaktadır. Rijit-sınır koşulu olarak bilinen lineer olmayan kenetlenme denklemi, atmosfer-okyanus etkileşimi problemlerinde çeşitli zorluklar yaratmaktadır. Bu etkileşim problemi için LES-C modelleri ailesinden yeni bir türbülans modeli olan NS- $\omega$ -C modeli önerilmektedir. NS- $\omega$ -C modeli Geometrik Ortalama (GA) olarak bilinen ayrıştırma metodu ile birleştirildiğinde, temel nümerik özelliklere sahip olduğu gösterilen NS- $\omega$ -C-GA modeli elde edilmektedir. Öncelikle atmosfer-okyanus problemleri uygulamalarında alt bölgeler için bir önceki çözücülerin kullanımına olanak sağlanmaktadır. Ayrıca, LES-C türbülans modelleri LES modellerinin modelleme hatasını verimli bir şekilde azaltmak için hata düzeltme yaklaşımını kullandığından NS- $\omega$ -C modelinin NS- $\omega$  modelinden daha iyi sonuçlar verdiği nümerik olarak gösterilmektedir. Bu çalışma sonucunda, önerilen yöntemin yüksek doğrulukta kararlı sonuçlar verdiği hem teorik olarak ispatlanacak hem de nümerik olarak doğrulanacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** akışkan-akışkan etkileşimi, yüksek Reynold sayısı, türbülans modeli, yüksek doğruluk, kararlılık

## ABSTRACT

### REDUCING THE MODELING ERROR IN THE FLUID-FLUID INTERACTION PROBLEMS WITH LES-C MODEL

Eda Önal

Master of Science, Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa AĞGÜL

March 2023, 57 pages

In this study, a numerical method is proposed for a fluid-fluid interaction problem where two flows are coupled through a nonlinear joint interface and one or both of these flows are at high Reynolds numbers. It is known that the nonlinear coupling equation, known as the rigid-lid condition, creates some difficulties for atmosphere-ocean problems. For this interaction problem, a novel turbulence model NS- $\omega$ -C is proposed from the family of LES- models. Combining this NS- $\omega$ -C model with the Geometric Averaging partitioning method (GA), the NS- $\omega$ -C-GA model is obtained, which is shown to have essential numerical properties. First of all, the previous solvers can be used for the subdomains in applications of atmosphere-ocean problems. Furthermore, it is numerically shown that the NS- $\omega$ -C model gives better results than the NS- $\omega$  model, as LES-C turbulence models use the defect correction approach to efficiently reduce the modeling error of the LES models. It will be proved both theoretically and numerically that the proposed method gives stable results with high accuracy.

**Keywords:** fluid-fluid interaction, high Reynolds number, turbulence model, high accuracy, stability

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans serüvenimin başından sonuna kadar bana her konuda yardım eden, yol gösteren ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Mustafa Ağgöl'e sonsuz teşekkür ve minnetlerimi sunuyorum. Güler yüzü, sabrı ve pozitif enerjisi eşliğinde çalışmak benim için bu süreci çok kolaylaştırdı.

Değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Songül Kaya Merdan, Doç. Dr. Derya Altıntan, Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk ve Dr. Öğr. Üyesi Talha Arıkan'a ayrıca teşekkür ediyorum. Düzeltmeleri, önerileri ve eleştirileri bana çok şey kazandırdı.

Bu yolda bana verdikleri destek için başta annem Tahire Önal ve babam Osman Önal olmak üzere tüm aileme ve tüm arkadaşlarıma ne kadar teşekkür etsem az. Sizleri çok seviyorum.

Son olarak, bu tezimi 6 Şubat 2023 tarihinde yaşadığımız depremde hayatını, evini ve sevdiklerini kaybeden başta memleketim Osmaniye'nin insanları olmak üzere tüm insanlara ithaf ediyorum. Sizleri asla unutmayacağız.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	i
TEŞEKKÜR .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
TABLolar .....	iv
ŞEKİLLER .....	v
1 GİRİŞ .....	1
2 NOTASYON VE ÖN HAZIRLIKLAR .....	8
3 NÜMERİK ANALİZ .....	12
4 HESAPLAMALAR .....	30
4.1. Yakınsama Oranları.....	30
4.2. Dairesel Engeli Geçen Akış.....	32
4.3. Bir Basamağı Geçen Akış.....	36
5 SONUÇLAR .....	38

## TABLÖLAR

	<u>Sayfa</u>
Table 4.1 $\nu_1 = 0.5, \nu_2 = 0.1, a = 1.$ .....	31
Table 4.2 $\nu_1 = 0.005, \nu_2 = 0.001, a = 1/\nu_1.$ .....	31
Table 4.3 $\nu_1 = 0.00005, \nu_2 = 0.00001, a = 1/\nu_1.$ .....	31
Table 4.4 Problem parametreleri .....	33



## ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Figure 1.1 $I$ arayüzü boyunca kenetlenmiş örnek alt bölgeler ve $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ birim normal vektörleri. ....	1
Figure 4.1 $\kappa = 1$ için MM-BDF2, NS- $\omega$ ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri	34
Figure 4.2 $\kappa = 10$ için NS- $\omega$ ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri. (MM-BDF2 yakınsamıyor.) ....	35
Figure 4.3 $\kappa = 1000$ için NS- $\omega$ ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri. (MM-BDF2 yakınsamıyor.) ....	35
Figure 5.1 $\kappa = 1$ için beklenen hız büyüklükleri. ....	39
Figure 5.2 $\kappa = 1000$ için beklenen hız büyüklükleri. ....	40

## **KISALTMALAR**

**ADM** : **A**pproximate **D**econvolution **M**odel

**AO** : **A**tmosphere **O**cean

**GA** : **G**eometric **A**veraging

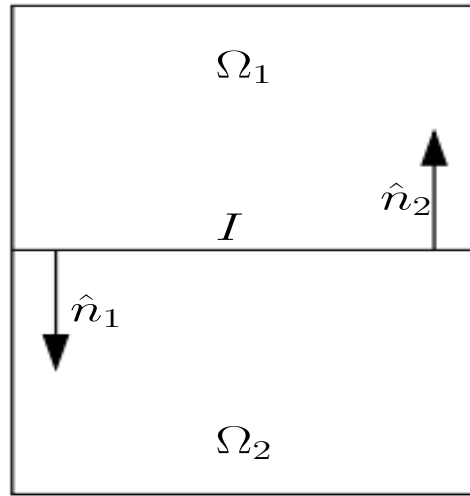
**LES** : **L**arge **E**ddy **S**imulation

# 1 GİRİŞ

Atmosfer-okyanus etkileşim modeli Lions, Temam ve Wang tarafından geliştirilmiştir [1, 2]. Bu çalışmalarda fizik kanunları ve var olan kabullerden yola çıkılarak bir model sunulmuştur. Literatürde yaygın bir şekilde kullanılan bu yöntem, geniş çevreler tarafından kabul görmüş ve kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında akışkan-akışkan etkileşimi problemi için NS- $\omega$  türbülans modeli önerilmektedir. Bu önerilen modelin, modelleme hatasını azaltması ve ayrıca zamanda yüksek doğruluk elde etmesi beklenmektedir. Önerilen model her ne kadar ısı transferi, tuzluluk vs. gibi etkenleri ele alsada bu çalışmada sadece momentum transferi dikkate alınacaktır. Diğer etkiler daha az soruna neden olduklarından, önerilen yöntemle birlikte kolayca tekrar ele alınabilirler.

$\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  olmak üzere iki bölgeden oluşan,  $I$  arayüzü boyunca kenetlenmiş iki boyutlu  $\Omega$  bölgesi ele alınsın. Şekil 1.1'de gösterilen bu bölge, akışkan-akışkan ve akışkan-yapı etkileşimi problemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. [3, 4]. Aşağıda tanımlanan akışkan-akışkan etkileşimi problemi, türbülanslı atmosfer-okyanus



Şekil 1.1  $I$  arayüzü boyunca kenetlenmiş örnek alt bölgeler ve  $\hat{n}_1$ ,  $\hat{n}_2$  birim normal vektörleri.

problemlerinin incelenmesinde önemli bir ilk adım problemi olarak görülmektedir. Rijit-sınır (Rigid-Lid) koşulu olarak bilinen lineer olmayan kenetlenme denklemi, sistemin global

enerjisi korunurken alt bölgeler arasında enerji alışverişine izin vermek için Lions ve diğerleri tarafından tanıtılmıştır [1, 2]. Buradaki lineer olmayan sınır koşulu, hem problemin sayısal analizinde hem de türbülans modellerinin formüle edilmesinde ciddi zorluklar ortaya çıkarmaktadır. Bu zorluklar arasında kenetlenmiş sistemin kararlı bir şekilde ayrıştırılması da bulunmaktadır. Bu doğrultuda [5] çalışması ve devamında [6–8] çalışmaları Geometrik Ortalama (Geometric Averaging) GA ayrıştırma yöntemi kullanılarak yapılmış ve sistem kararlı bir şekilde ayrıştırılabilmektedir. Her ne kadar ayrıştırma yöntemleri ile ilgili çalışmalar devam ediyor olsa da, bu sistem için türbülans modeli geliştirilme çalışmaları henüz başlangıç aşamasındadır.

Bu etkileşimi modelleyen problem, hız-basınç  $(u, p)$  ikilisi için şu şekilde verilsin:

$$\nu_i > 0, f_i : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega_i)^d, u_i(0) \in H^1(\Omega_i)^d \text{ ve } \kappa \in \mathbb{R}, (i = 1, 2)$$

$u_i : \Omega_i \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  ve  $p_i : \Omega_i \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $0 < t \leq T$ ) aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$u_{i,t} = \nu_i \Delta u_i - u_i \cdot \nabla u_i - \nabla p_i + f_i, \quad (\Omega_i \text{ 'de}), \quad (1)$$

$$-\nu_i \hat{n}_i \cdot \nabla u_i \cdot \tau = \kappa |u_i - u_j| (u_i - u_j) \cdot \tau, \quad (I \text{ üzerinde}) \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$u_i \cdot \hat{n}_i = 0 \quad (I \text{ üzerinde}) \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u_i = 0, \quad (\Omega_i \text{ 'de}) \quad (4)$$

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad (\Omega_i \text{ 'de}), \quad (5)$$

$$u_i = 0, \quad (\Gamma_i \text{ üzerinde}) = \partial\Omega_i \setminus I. \quad (6)$$

Bu denklemdeki  $\hat{n}_i$  vektörleri  $\partial\Omega_i$  üzerinde birim normal ve  $\tau$  vektörü ise  $\tau \cdot \hat{n}_i = 0$  olacak şekilde herhangi bir vektördür.  $\nu_i$  parametleri kinematik viskoziteyi temsil etmektedir. Sisteme etki eden diğer girdileri (sıcaklık farkı, tuzluluk, yer çekimi vb.) genelleştirmek için  $f_i$  ile temsil edilen kuvvet eklenmektedir.

Buradaki  $\kappa$  sayısı ise, akışkanın direnç katsayısı ile orantılıdır ([1]: (1.22) - (1.25) denklemlerinde arayüz koşullarının türetilmesine ve özellikle, yatay rüzgar kuvveti için olan formüle dikkat edilmelidir) bu nedenle, (1) - (6) sisteminin davranışını farklı  $\kappa$  değerlerinde araştırmak uygun olacaktır. Özellikle, bir okyanus alanı üzerinde hızlı bir hava akışı

modellenirken büyük bir  $\kappa$  değerinin dikkate alınması gerekebilmektedir. Büyük  $\kappa$  değerleri, okyanus ve atmosfer arasındaki bağlantıyı güçlendirdiği için, bölgelerden herhangi birinde ortaya çıkan karmaşıklığın diğerinde de eş zamanlı olarak görülmesine neden olabilir. Bu senaryoların bir kısmı nümerik hesaplamalarla tekrar ele alınacaktır.

(2)-(3) ile verilen rijit sınır koşulu atmosfer-okyanus etkileşimi modellemesinde yaygın olarak kullanılan yaklaşımla tutarlıdır. Bu yöntemde, sınır tabakalarını detaylı bir şekilde çözmek yerine, var olan çözümler atmosfer-okyanus için ayrı ayrı kullanılmaktadır. Bu iki bölgenin etkileşimine sebep olacak veriler belirli aralıklarla bir bölgeden diğer bölgeye aktarılmaktadır. Bu aktarım mekanizması, Hükümetler Arası İklim Değişikliği Paneli [9] tarafından ele alınan Küresel Sirkülasyon Modellerinde ve Bölgesel Okyanus Modellerinde [10–13] kullanılmaktadır.

Gerçek hayattaki birçok akışkan-akışkan etkileşimi yüksek Reynold sayılarında meydana gelmektedir. Bu tür etkileşimlere kasırgaların ve musonların modellenmesi, hava tahmini gibi örnekler verilebilir. Özel olarak, bir su yüzeyi üzerinde yüksek hızda ve düşük irtifada uçan nesnelere etki eden akışın modellenmesi de bu etkileşimler arasında yer almaktadır. Bu uygulamalara yönelik ilk olarak (1)-(6) problemi için düşük viskozitelerde bir model oluşturmak hedeflenmektedir.

Akışkan-akışkan etkileşimi konusunda nispeten geniş bir literatür mevcuttur. Örnek olarak, [8–17] çalışmaları gösterilebilir. Ancak, bu çalışmaların sadece küçük bir kısmı akışkan-akışkan etkileşimi problemlerinin türbülans modellemesini ele almıştır. [6, 18–20], literatürde türbülans modellemesini ele alan örnek çalışmalar olarak gösterilebilir. Özellikle [19] çalışmasında, girdap viskozitesi kapatma modeli (eddy viscosity closure model) ile grup ortalaması türbülans modellemesi (ensemble turbulence modeling) ele alınmakta ve bu yaklaşım (1)-(6) denklemlerinin bir uyarlamasına uygulanarak, ayrıştırma yönteminin ortalama akış davranışına iyi yakınsadığı sonucuna varılmaktadır. Ancak bu sonuç, akışkan-akışkan etkileşimi dahil edilmeden önce dahi, grup ortalaması türbülans modelinin maruz kaldığı problemler nedeniyle uzun vadeli bir çözüm olamamaktadır.

[6, 20] çalışmalarında, Büyük Girdap Simülasyonu (Large Eddy Simulation) ailesinden geleneksel bir türbülans modeli ile GA ayrıştırma metodu birleştirilerek farklı bir yol izlenmiştir. Özel olarak [20] çalışmasında ise Yaklaşık Dekonvülasyon Modeli (Approximate Deconvolution Model) denilen LES modeli kullanılmıştır. (2) sınır koşulundan kaynaklanan lineer olmama durumu, (1)-(6) için ADM uygulanırken kabul edilebilecek bir değil, üç olası formülasyonun olduğunu göstermiştir. Bu modellerden ikisinin kararlı olduğu kanıtlanmıştır. Ancak en iyi sonuçlar, filtrelenen hızın arayüz terimlerindeki filtrelenmemiş hızın yakınsaması ile değiştirildiği üçüncü formülasyonla elde edilmiştir. Burada, başarılı bir LES modelinin arayüz terimlerinde filtrelenmemiş hızın kullanılmasından kaynaklı olabileceği sonucuna varılmıştır. Böylece, ADM modelinin (1)-(6) için en uygun model olmadığı ortaya çıkmıştır ve bu konu hakkındaki araştırmalar devam etmiştir. [6] çalışmasında, LES ailesinin başka bir üyesinin [21, 22]'de tanıtılan NS- $\omega$  modelinin (1)-(6)'daki lineer olmayan yüzey etkileşimi için uygun model olduğu fark edilmiştir. GA ayrıştırma metodu ile ele alınan NS- $\omega$  modelinin kararlı olduğu ve arayüzde filtrelenmemiş hızın kullanımına olanak verdiği gösterilmiştir.

[6, 20]'de kullanılan [5]'in GA ayrıştırma yöntemi kararlıdır. Ancak, yalnızca birinci mertebeden doğruluğa sahip olması bir zorluk olarak belirtilmektedir [23]. Dahası, (1)-(6) için türbülans test problemlerinin (Benchmark Problems) eksikliği NS- $\omega$  modelinin [6] nümerik olarak geçerliliğini savunmayı zorlaştırmaktadır. Yüksek doğruluklu sonuçlar elde edebilmek için sunulan türbülans modeli, denklemlerin aynı ızgara üzerinde iki defa çözüldüğü bir hata düzeltme tekniği ile birleştirilmektedir. Birinci (tahmin) çözüm; ikinci (düzeltme) denklemin sağ tarafını düzeltmek için kullanılmakta ve bu uygulama modelin doğruluğunu arttırmaktadır. Bu doğrultuda, LES-C yöntemi ele alınacaktır.

Türbülans modellerinin yeni bir ailesi olan LES-C, modelleme hatasını azaltmak için LES yaklaşımını hata düzeltme yöntemi ile birleştirmektedir [24]. Ayrıca [23]'te, aşamalı düzeltme metodu (zamanda sonlu farkların kullanılması nedeniyle oluşan hatayı azaltmayı hedefleyen hata düzeltme fikri) GA metodunun doğruluğunu birinci mertebeden ikinci mertebeye taşıyabilmektedir. Bu çalışmada, akışkan-akışkan etkileşimi için LES-C türbülans modelleri ailesinden NS- $\omega$ -C modeli geliştirilecektir. Bu model, [23]'te sunulan

zamandaki yüksek doğruluk kavramı ile [25]'te sunulan modelleme hatasını düzeltme fikrini birleştireceği için, kararlılık sabit tutulurken modelin doğruluğu birinci mertebeden ikinci mertebeye yükseltilecektir. Yeni modelin, [6]'da sunulan NS- $\omega$ -GA modeline kıyasla daha düşük modelleme hatası ve zamansal ayrıklaştırma hatasına sahip olduğu gösterilecektir.

Aşağıda, sırası ile [5]'teki GA ayrıştırma yöntemi ve yüksek Reynold sayılarında (1)-(6) için yeni NS- $\omega$ -C modeli sunulacaktır. Bu kısımlarda kullanılan notasyonlar ve boşluklar, 2. bölümde açıklanacaktır.

**Algoritma 1.1** (Geometrik Ortalama (GA) Algoritması).  $\Delta t > 0$ ,  $M = \frac{T}{\Delta t}$  ve  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  olsun. Burada, verilen bir  $u_i^n$  için;

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + \nu_i (\nabla u_i^{n+1}, \nabla v_i) + \kappa \int_I |u^n| u_i^{n+1} v_i ds - \kappa \int_I u_j^n |u^n|^{1/2} |u^{n-1}|^{1/2} v_i ds \\ - (p_i^{n+1}, \nabla \cdot v_i) + b_i^*(u_i^{n+1}; u_i^{n+1}, v_i) = (f_i^{n+1}, v_i), \quad \forall v_i \in X_{i,h} \quad (7) \end{aligned}$$

eşitliğini sağlayacak bir  $u_i^{n+1} \in X_i^h$ ,  $i, j = 1, 2, i \neq j, n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  bulunmalıdır.

[21, 22]'de önerilen NS- $\omega$  modeli ele alınsın. Bu model,  $\bar{\omega}$  filtrelenmiş vortisite olmak üzere,  $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u}$  ve  $\bar{u} - \delta^2 \Delta \bar{u} = u$  iken;

$$\begin{aligned} u_t + \bar{\omega} \times u - \nu \Delta u + \nabla q = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Geometrik Ortalama metodu ile NS- $\omega$  modeli birlikte ele alındığında aşağıdaki denklem sistemleri oluşmaktadır:

Her  $(v_i, \xi_i, \chi_i) \in (X_i^h, X_i^h, Q_i^h)$ ,  $i = 1, 2$  için,  $(X_i^h, X_i^h, Q_i^h)$ 'de bir  $(\hat{u}_i^{n+1}, \bar{\hat{u}}_i^{n+1}, \hat{q}_i^{n+1})$ , çözümü bulunmalıdır öyle ki;

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + \nu_i (\nabla \hat{u}_i^{n+1}, \nabla v_i) \quad (9) \\
& + \kappa \int_I |[\hat{u}^n]| \hat{u}_i^{n+1} v_i ds - \kappa \int_I \hat{u}_j^n |[\hat{u}^n]|^{1/2} |[\hat{u}^{n-1}]|^{1/2} v_i ds \\
& - (\hat{q}_i^{n+1}, \nabla \cdot v_i) + b_\omega (\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; v_i) = (f_i(t^{n+1}), v_i), \quad \forall v_i \in X_{i,h}, \\
& \delta_i^2 (\nabla \bar{u}_i^{n+1}, \nabla \xi_i) + (\bar{u}_i^{n+1}, \xi_i) = (\hat{u}_i^{n+1}, \xi_i), \quad \forall \xi_i \in X_{i,h}, \\
& (\nabla \cdot \hat{u}_i^{n+1}, \chi_i) = 0, \quad \forall \chi_i \in Q_{i,h},
\end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Burada,  $b_\omega(u, v; w) = ((\nabla \times u) \times v, w)$ ,  $\forall u, v, w \in X_{i,h}$  olarak tanımlanmaktadır. Tahmin adımı (9), [6]'da NS- $\omega$ -GA modeli olarak ele alınmış ve detaylı bir şekilde analizi yapılmıştır. Bu adımda bulunan çözümün modelleme hatasını ve zamandaki sonlu farklar hatasını azaltmak, NS- $\omega$ -C modelinin düzeltme adımı ile mümkündür. Bu şekilde elde edilecek olan NS- $\omega$ -C-GA aşağıdaki gibidir:

Her  $(v_i, \xi_i, \chi_i) \in (X_i^h, X_i^h, Q_i^h)$  için  $(X_i^h, X_i^h, Q_i^h)$ 'de  $(\check{u}_i^{n+1}, \bar{u}_i^{n+1}, \check{q}_i^{n+1})$  bulunmalıdır öyle ki;

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\check{u}_i^{n+1} - \check{u}_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + \nu_i (\nabla \check{u}_i^{n+1}, \nabla v_i) + b_\omega (\bar{u}_i^{n+1}, \check{u}_i^{n+1}; v_i) \quad (10) \\
& + \kappa \int_I |[\check{u}^n]| \check{u}_i^{n+1} v_i ds - \kappa \int_I \check{u}_j^n |[\check{u}^n]|^{1/2} |[\check{u}^{n-1}]|^{1/2} v_i ds - (\check{q}_i^{n+1}, \nabla \cdot v_i) \\
& = \left( \frac{f_i(t^{n+1}) + f_i(t^n)}{2}, v_i \right) + \frac{\nu_i \Delta t}{2} \left( \nabla \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right), \nabla v_i \right) - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\hat{q}_i^{n+1} - \hat{q}_i^n}{\Delta t}, \nabla \cdot v_i \right) \\
& + b_\omega (\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; v_i) - \frac{1}{2} b_\omega (\hat{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; v_i) - \frac{1}{2} b_\omega (\hat{u}_i^n, \hat{u}_i^n; v_i) \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \int_I |[\hat{u}^n]| \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right) v_i ds - \frac{\kappa}{2} \Delta t \int_I \hat{u}_i^{n+1} \left( \frac{|[\hat{u}^{n+1}]| - |[\hat{u}^n]|}{\Delta t} \right) v_i ds \\
& - \kappa \int_I \hat{u}_j^n |[\hat{u}^n]|^{1/2} |[\hat{u}^{n-1}]|^{1/2} v_i ds + \frac{\kappa}{2} \int_I |[\hat{u}^{n+1}]| \hat{u}_j^{n+1} v_i ds + \frac{\kappa}{2} \int_I |[\hat{u}^n]| \hat{u}_j^n v_i ds, \quad \forall v_i \in X_{i,h}, \\
& \delta_i^2 (\nabla \bar{u}_i^{n+1}, \nabla \xi_i) + (\bar{u}_i^{n+1}, \xi_i) = (\check{u}_i^{n+1}, \xi_i), \quad \forall \xi_i \in X_{i,h}, \\
& (\nabla \cdot \check{u}_i^{n+1}, \chi_i) = 0, \quad \forall \chi_i \in Q_{i,h}.
\end{aligned}$$



Tahmin (9) ve düzeltme (10) adımları, paralel olarak hesaplanabilirler. Ancak, tahmin adımında bulunan verilerin düzeltme adımında kullanılması nedeniyle, düzeltme adımının tahmin adımının hemen ardından (en az bir zaman seviyesi geriden) ilerlemesi gerekmektedir. Bu durum doğal bir süreçtir ve paralel hesaplama üzerine herhangi bir kısıtlama sunmamaktadır. Zamana bağlı denklemlerin çözümleri için sonlu elemanlar yöntemi ile çalışılırken, katsayılar matrisinin her bir zaman adımında yeniden oluşturulması, hesaplama süresinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Önerilen yöntemin hesaplamalarda sağladığı ek avantajlardan birisi ise, (9) ve (10)'un sol taraflarının neredeyse aynı olmasıdır. Böylece tahmin adımı için kullanılan katsayılar matrisinde birtakım güncellemeler yapılarak düzeltme adımı için kullanılacak katsayılar matrisi elde edilebilir. Bu şekilde, bu matrisin yeniden oluşturulması için gereken süreden kazanım sağlanacaktır.

(9)-(10) ile tanımlanan NS- $\omega$ -C-GA modeli, sonraki bölümlerde tüm detaylarıyla ele alınacaktır. 2. bölümde notasyonlar tanıtılacak ve teorik ön hazırlık yapılacaktır. 3. bölüm yeni modelin sayısal analizini içermektedir. 4. bölümde NS- $\omega$ -C modelinin çeşitli durumlarda NS- $\omega$  modelinden daha iyi performans gösterdiğini ortaya koyan test sonuçları gösterilecektir.

## 2 NOTASYON VE ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel notasyonlar, teoremler ve tekniklerin genel bir özeti verilecektir. Bu amaçla, [21, 26, 27] referanslı çalışmalardan bazı önemli tanım ve teoremler belirtilmiştir.

Okunabilirlik için  $\| \cdot \|$  notasyonu normları ifade etmek için aşağıdaki anlamlarıyla kullanılacaktır:

$$\|x\| = \begin{cases} \|x\|_{\Omega_1} & x, \Omega_1 \text{ dışında } 0 \text{ ise} \\ \|x\|_{\Omega_2} & x, \Omega_2 \text{ dışında } 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

**Tanım 2.1.**

$$L^2(\Omega) := \{u : \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty\}$$

$L^2$ -uzayı olarak tanımlanmaktadır.  $L^2$ -normu ise,

$$\|u\| := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır.

**Tanım 2.2.**  $i = 1, 2$  olmak üzere,

$$X_i := \{v_i \in H^1(\Omega_i)^d : v_i = 0 \text{ } (\Gamma_i \text{ üzerinde}), i = 1, 2, v_i \cdot \hat{n}_i = 0 \text{ } (I \text{ üzerinde})\}$$

hız uzayı olarak tanımlanır.

**Tanım 2.3.**  $i = 1, 2$  olmak üzere,

$$Q_i = \{q_i \in L^2(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} q_i d\Omega_i = 0\}$$

basınç uzayı olarak tanımlanır.

**Tanım 2.4.**  $u, v, w \in X_i$  fonksiyonları için,  $\Omega_i$  üzerinde lineer olmayan ters simetrik form:

$$b_i^*(u; v, w) = \frac{1}{2}(u \cdot \nabla v, w)_{\Omega_i} - \frac{1}{2}(u \cdot \nabla w, v)_{\Omega_i} \quad (11)$$

ile tanımlanır. Ayrıca, yukarıdaki trilineer terimin rotasyonel versiyonu:

$$b_\omega(u, v; w) = ((\nabla \times u) \times v, w), \forall u, v, w \in X_{i,h}$$

olarak tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.5** (Sürekli Diferansiyel Filtre).  $\phi \in L^2(\Omega)$  ve  $\alpha > 0$  olmak üzere,  $\phi$ 'ye uygulanan filtre operatörü,  $\bar{\phi}$  ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$-\alpha^2 \Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} = \phi.$$

Burada,  $A := -\alpha^2 \Delta + I$  şeklinde bir operatör tanımlanırsa,  $\bar{v} = A^{-1}v$  olur.

Bu filtreleme operatörü periyodik ve homojen sınır koşulu altında türev operatörüyle değişmelidir. Bu çalışmada, sınır koşullarının homojen veya periyodik olduğu kabul edilecektir.

**Tanım 2.6** (Ayrık Diferansiyel Filtre).  $v \in L^2(\Omega)$  ve filtreleme yarıçapı  $\alpha > 0$  olmak üzere,  $\bar{v}^h = A_h^{-1}v$  ifadesi  $X^h$  uzayında

$$\alpha^2 (\nabla \bar{v}^h, \nabla \chi) + (\bar{v}^h, \chi) = (v, \chi), \quad \forall \chi \in X^h$$

eşitliğinin tek çözümüdür.

**Teorem 2.7** (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği).  $u, v \in L^2(\Omega)$  olmak üzere,

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

**Teorem 2.8** (Young Eşitsizliği).  $a, b \geq 0, p, q \leq 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Aşağıda verilen eşitsizlikler, nümerik yöntemlerin teorik bulgularında kullanılacaktır.

**Lemma 2.9.**  $v \in X_i$  fonksiyonu için:

$$\begin{aligned}\|\bar{v}\|_{\Omega_i} &\leq \|v\|_{\Omega_i}, \\ \|\nabla \bar{v}\|_{\Omega_i} &\leq \|\nabla v\|_{\Omega_i}, \\ \|\nabla \times \bar{v}\|_{\Omega_i} &\leq \|\nabla v\|_{\Omega_i}.\end{aligned}$$

*İspat.* [21] çalışmasındaki Lemma 2.8'de sunulmuştur. □

**Lemma 2.10.**  $u, v, w \in X_i$  fonksiyonları için:

$$\begin{aligned}b_\omega(u, v; w) &\leq \|\nabla \times u\| \|v\|_\infty \|w\|, \\ b_\omega(u, v; w) &\leq \|\nabla \times u\|_\infty \|v\| \|w\|, \\ b_\omega(u, v; w) &\leq C \|\nabla \times u\|_{\Omega_i} \|\nabla v\|_{\Omega_i} \|\nabla w\|_{\Omega_i}, \\ b_\omega(u, v; w) &\leq C \|\nabla u\|_{\Omega_i} \|\nabla v\|_{\Omega_i} \|w\|_{\Omega_i}^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{\Omega_i}^{\frac{1}{2}}, \\ b_\omega(u, v; v) &= 0.\end{aligned}$$

*İspat.* İlk dört eşitsizlik [21]'deki Lemma 2.2'de sunulmuştur. Son eşitlik ise,  $b_\omega(u, v; v)$  tanımından basit bir hesaplama ile doğrudan elde edilebilmektedir:  $(\nabla \times u) \times v$  vektörel çarpımı  $v$ 'ye ortogondur. Dolayısıyla, bu vektörel çarpımın  $v$  ile skaler çarpımı sıfır olacaktır. □

**Tanım 2.11.** Her  $\chi \in X_i^h$  için

$$(\Pi_i^h u - u, \chi) = 0 \tag{12}$$

eşitliğini sağlayan  $\Pi_i^h u \in X_i^h$  elemanına,  $u \in X_i$  vektörünün  $X_i^h$ 'deki  $L^2$ -projeksiyonu denir.

**Lemma 2.12** ( $X_i^h$ 'deki  $L^2$ -Projeksiyonunun Kararlılığı). Her  $u \in X_i$  elemanının  $X_i^h$ 'deki  $L^2$ -projeksiyonu;

$$\|\Pi_i^h u\|_{\Omega_i} \leq \|u\|_{\Omega_i} \tag{13}$$

ile sınırlıdır.

*İspat.* (12) eşitliğinde  $\chi = \Pi_i^h u$  alınıp, Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak sonuç ortaya çıkar.  $\square$

**Lemma 2.13** ( $X_i^h$ 'deki  $L^2$ -Projeksiyonunun Doğruluğu). *Her  $u \in X_i$  için,  $X_i^h$ 'deki  $L^2$ -projeksiyonun hatası,  $\|\Pi_i^h u - u\|$ , aşağıdaki eşitlik ile sınırlandırılır:*

$$\|\Pi_i^h u - u\|_{\Omega_i} \leq 2 \inf_{r_i^h \in X_i^h} \{\|r_i^h - u\|_{\Omega_i}\}. \quad (14)$$

*İspat.* Öncelikle,  $\zeta_i^h \in X_i^h$  olmak üzere  $\Pi_i^h u - u = \xi_i + \zeta_i^h$  yazılır. Sonra  $\chi = \zeta_i^h$  seçilip bir önceki ispatın adımları uygulanırsa,  $\|\zeta_i^h\| \leq \|\xi_i\|$  eşitsizliği elde edilir. Daha sonra her iki tarafa  $\|\xi_i\|$  terimi eklenir. Sol tarafta üçgen eşitsizliğini uygulamak ve  $\xi_i$ 'nin uygun seçimini yapmak ispatı tamamlar.  $\square$

Aşağıdaki ayrı Gronwall lemması (bkz. [28]) teorik analizlerde kullanılacaktır.

**Lemma 2.14** (Gronwall Lemması).  *$k, M, a_\mu, b_\mu, c_\mu$  ve  $\gamma_\mu$  sayıları;*

$$a_n + k \sum_{\mu=0}^n b_\mu \leq k \sum_{\mu=0}^n \gamma_\mu a_\mu + k \sum_{\mu=0}^n c_\mu + M, \quad n \geq 0 \quad (15)$$

*eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan sayılar olsun. Her  $\mu$  için  $k\gamma_\mu < 1$  olduğu kabul edilsin ve  $\sigma_\mu \equiv (1 - k\gamma_\mu)^{-1}$  olarak tanımlansın. O zaman,*

$$a_n + k \sum_{\mu=0}^n b_\mu \leq \exp \left( k \sum_{\mu=0}^n \sigma_\mu \gamma_\mu \right) \left\{ k \sum_{\mu=0}^n c_\mu + M \right\}, \quad n \geq 0 \quad (16)$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*İspat.* Bkz. [28].  $\square$

### 3 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde önerilen modelin kararlılığı ve doğruluğu gibi teorik sonuçlar kanıtlanacaktır. İlk olarak tahmin adımının kararlılığını ve yakınsamasını gösteren iki teorem ile başlanacaktır. Bu teoremlerin ispatları, [6]'da bulunabilir.

**Teorem 3.1** (Tahmin Adımının Koşulsuz Kararlılığı).  $(\hat{u}_i, \bar{\hat{u}}_i, q_i) \in (X_{i,h}, X_{i,h}, Q_{i,h})$  ifadesi (9)'un çözümü olarak kabul edilsin. Ayrıca,  $f_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_i))$  olsun. Öyleyse çözüm koşulsuz kararlıdır ve aşağıdaki kararlılık sınırı geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left( \|\hat{u}_i^{n+1}\|^2 + \nu_i \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \|\nabla \hat{u}_i^k\|^2 \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \int_I (|\hat{u}_1^{n+1}|^2 + |\hat{u}_2^{n+1}|^2) |\hat{u}_1^n - \hat{u}_2^n| ds \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \int_I \left( \hat{u}_1^{k+1} |\hat{u}_1^k - \hat{u}_2^k|^{1/2} - \hat{u}_2^k |\hat{u}_1^{k-1} - \hat{u}_2^{k-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \int_I \left( \hat{u}_2^{k+1} |\hat{u}_1^k - \hat{u}_2^k|^{1/2} - \hat{u}_1^k |\hat{u}_1^{k-1} - \hat{u}_2^{k-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& \leq \sum_{i=1}^2 \left( \|u_i^1\|^2 + \frac{1}{4\nu_i} \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \|f_i(t^k)\|_{-1}^2 \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \int_I (|u_1^0|^2 + |u_2^0|^2) |u_1^0 - u_2^0| ds.
\end{aligned}$$

Aşağıda tanımlanan ifade, bir sonraki teoremin zaman adımını sınırlandırırken kullanılacaktır. Böyle bir kısıtlama Grönwall Lemma'sının kullanıldığı bir çok çalışmada karşımıza çıkmaktadır.

$$E^k = \frac{C\kappa^4}{\min\{\nu_1, \nu_2\}^3} \left( \|\nabla u_1(t^k)\|_{\Omega_1}^4 + \|\nabla u_2(t^k)\|_{\Omega_2}^4 + \|\nabla u_1^k\|_{\Omega_1}^4 + \|\nabla u_2^k\|_{\Omega_2}^4 \right), k = 1, 2, \dots, n+1.$$

**Teorem 3.2** (Tahmin Adımının Doğruluğu).  $(\hat{u}_i, \bar{\hat{u}}_i, q_i) \in (X_{i,h}, X_{i,h}, Q_{i,h})$  ifadesi, (9)'un çözümü olsun. Ayrıca  $f_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_i))$  olsun. Verilen doğru çözümün regülerliği

$u_i \in L^2(0, T; X_i)$ ,  $\bar{u}_i \in L^2(0, T; H^3(\Omega_i))$ ,  $u_{i,t} \in L^2(0, T; X_i)$  ve  $u_{i,tt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_i))$  olarak kabul edilsin. Öyleyse  $\Delta t \leq E^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$  için aşağıdaki doğruluk sınırı geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left( \|\hat{u}_i^{n+1} - u_i(t^{n+1})\|^2 + \nu_i \Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla(\hat{u}_i^{k+1} - u_i(t^{k+1}))\|^2 \right) \\ \leq & C \sum_{i=1}^2 \left( \|\hat{u}_i^0 - u_i(t^0)\|^2 + \|\hat{u}_i^1 - u_i(t^1)\|^2 + \frac{\delta_i^4}{\nu_i} + \left( \frac{1}{\nu} + \frac{\kappa^2}{\nu^2} \right) \Delta t^2 \right. \\ & + \nu_i \|\nabla(\hat{u}_i^0 - u_i(t^0))\|^2 + \nu_i \|\nabla(\hat{u}_i^1 - u_i(t^1))\|^2 \\ & + \frac{\Delta t}{\nu} \sum_{k=1}^n \left( \inf_{r_i^h \in X_i^h} \{ \|\nabla(u_i(t^{k+1}) - r_i^h)\|^2 \} \right. \\ & \left. \left. + \inf_{q_i^h \in Q_i^h} \{ \|p_i(t^{k+1}) - q_i^h\|^2 \} \right) \right). \end{aligned}$$

Bu aşamada ilk olarak düzeltme adımının doğruluğunun ispatı için gerekli olan bazı ön koşullar değerlendirilecektir. Filtrelenmiş doğru hız, (1)-(6)'nın zayıf formunun aşağıda verilen yeniden düzenlenmiş eşitliğini sağlayacaktır.  $i = 1, 2$ ,  $i \neq j$  olmak üzere her  $t \in [0, T]$  ve ayrık zaman düzeylerinin her biri için, her  $(v_i, \xi_i, \chi_i) \in (X_i, X_i, Q_i)$  olmak üzere  $(u_i(t), \bar{u}_i(t), p_i(t)) \in (X_i, X_i, Q_i)$  ile tanımlanan doğru çözüm;

$$\left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + \nu_i (\nabla u_i^{n+1}, \nabla v_i) + \kappa \int_I u_i^{n+1} |[u^{n+1}]| v_i dS \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & - \kappa \int_I u_j^{n+1} |[u^{n+1}]| v_i dS - (p_i^{n+1}, \nabla \cdot v_i) \\ & + b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; v_i) - \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=t^{n+1}}, v_i \right) = (f_i(t^{n+1}), v_i) \\ & + b_\omega(\bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; v_i) \end{aligned}$$

$$\delta_i^2 (\nabla \bar{u}_i^{n+1}, \nabla \xi_i) + (\bar{u}_i^{n+1}, \xi_i) = (u_i^{n+1}, \xi_i) \quad (18)$$

$$(\nabla \cdot u^{n+1}, \chi_i) = 0 \quad (19)$$

eşitliklerini sağlar. Burada,  $u_i^{n+1} = u_i(t^{n+1})$  ve  $p_i^{n+1} = p_i(t^{n+1})$  notasyonları herhangi ayırık zaman düzeyleri için tanımlanmaktadır.  $e_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}$  olarak tanımlanan notasyon ise NS- $\omega$  yaklaşımındaki hata için tanımlanmaktadır.

**Teorem 3.3** (Tahmin Adımının Zaman Türevinin Doğruluğu).  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  olsun.  $(u_i, \bar{u}_i, q_i) \in (X_{i,h}, X_{i,h}, Q_{i,h})$  ifadesi (9)'un çözümü olsun ve Teorem 3.1 ve 3.2'nin diğer varsayımlarının sağlandığı kabul edilsin. Doğru çözümün regüleriği  $u(x, t) \in H^2(0, T; H^3(\Omega)) \cup H^3(0, T; L^2(\Omega))$  olarak ifade edilsin. Arayüz terimlerini ele almak için tanımlanan  $\alpha$  pozitif sabiti,  $\alpha < \|[u]\|$  koşulunu sağlayan bir reel sayı,  $C_f$  Teorem 3.2'de tanımlanan sabit ve  $\nu = \min\{\nu_1, \nu_2\}$  olmak üzere,  $\max\{\Delta t, h\} \leq \alpha C_f^{-1/4}$  ve  $\min\{\Delta t, h\} \leq \nu \kappa^{-1}$  olsun. Öyleyse,  $\Delta t < \kappa^2 \nu^{-1}$  aşağıdaki doğruluk sınırını gerektirir:

$$C\Delta t \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n \left( \delta^4 + \Delta t^2 + \left\| \frac{\nabla(e_i^1 - e_i^0)}{\Delta t} \right\|^2 + \inf_{r \in X_i} \left\| \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - r_i \right\|_{\Omega_{i,-1}}^2 + \inf_{q \in Q_i} \left\| \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} - q_i \right\|^2 \right) \leq \sum_{i=1}^2 \left( \left\| \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} \right\|^2 + \nu_i \Delta t \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\nabla(e_i^{k+1} - e_i^k)}{\Delta t} \right\|^2 \right)$$

*İspat.*  $\phi_i^{n+1} \in X_i$  olmak üzere,

$$e_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1} = \phi_i^{n+1} - \eta_i^{n+1}$$

ve

$$s_i^{n+1} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \quad \text{ve} \quad r_i^{n+1} = \frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t}$$

tanımlasın. Daha sonra, (9)'un momentum dengesi  $(n + 1)$ 'inci zaman düzeyinde (17)'den çıkarılsın ve  $n$ 'inci zaman düzeyi için de aynı işlem yapılsın.  $v_i = s_i^{n+1}$  seçilsin, denklem yeniden düzenlensin ve terimler gruplandırılsın. Böylece, zaman tutarlılığı hatası:

$$\rho_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - u_{i,t}^{n+1}$$



olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|s_i^{n+1}\|^2 + \nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2 &= (s_i^n, s_i^{n+1}) + (r_i^{n+1} - r_i^n, s_i^{n+1}) + \nu_i \Delta t (\nabla r_i^{n+1}, \nabla s_i^{n+1}) \quad (20) \\ &+ \Delta t \left( \frac{(p_i^{n+1} - \hat{q}_i^{n+1}) - (p_i^n - \hat{q}_i^n)}{\Delta t}, \nabla \cdot s_i^{n+1} \right) \\ &+ (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n, s_i^{n+1}) - I_1 + I_2 - N \end{aligned}$$

ifadesi başlangıç noktası olmaktadır. Her biri (17) denkleminin arayüz veya lineer olmayan terimlerinden birine karşılık gelen  $I_1, I_2$  ve  $N$  terimleri ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} I_1 &= \kappa \int_I u_i^{n+1} |[u^{n+1}]| s_i^{n+1} ds - \kappa \int_I \hat{u}_i^{n+1} |[\hat{u}^n]| s_i^{n+1} ds \\ &- \kappa \int_I u_i^n |[u^n]| s_i^n ds + \kappa \int_I \hat{u}_i^n |[\hat{u}^{n-1}]| s_i^n ds \\ I_2 &= \kappa \int_I u_j^{n+1} |[u^{n+1}]| s_i^{n+1} dS - \kappa \int_I \hat{u}_j^n |[\hat{u}^n]|^{1/2} |[\hat{u}^{n-1}]|^{1/2} s_i^{n+1} ds \\ &- \kappa \int_I u_j^n |[u^n]| s_i^{n+1} dS + \kappa \int_I \hat{u}_j^{n-1} |[\hat{u}^{n-1}]|^{1/2} |[\hat{u}^{n-2}]|^{1/2} s_i^{n+1} ds \\ N &= b_\omega(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1}) - b_\omega(u_i^n - \bar{u}_i^n, u_i^n; s_i^{n+1}) \\ &+ b_\omega(\bar{e}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1}) + b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, e_i^{n+1}; s_i^{n+1}) \\ &- b_\omega(\bar{e}_i^n, u_i^n; s_i^{n+1}) - b_\omega(\bar{u}_i^n, e_i^n; s_i^{n+1}). \end{aligned}$$

Bu terim gruplarının her biri için birinci mertebeden sınırlar elde etmek amaçlanmaktadır.

Lineer olmayan grup aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} N &= \Delta t b_\omega \left( \frac{(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}) - (u_i^n - \bar{u}_i^n)}{\Delta t}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1} \right) - \Delta t b_\omega \left( u_i^n - \bar{u}_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; s_i^{n+1} \right) \\ &+ \Delta t b_\omega(\bar{s}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1}) + \Delta t b_\omega(\bar{r}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1}) + \Delta t b_\omega \left( \bar{e}_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; s_i^{n+1} \right) \\ &+ \Delta t b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, s_i^{n+1}; s_i^{n+1}) + \Delta t b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, r_i^{n+1}; s_i^{n+1}) + \Delta t b_\omega \left( \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t}, e_i^n; s_i^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Yukarıdaki altıncı terim Lemma 2.10 ile yok edilir. Kalan terimler, [6] çalışmasında verilen Teorem 2'de yapıldığı gibi Lemma 2.9 kullanılarak sınırlandırılmıştır. İlk terim Taylor

teoreminin bir uygulamasıyla sınırlandırılmış ve filtre diferansiyellenerek değiştirilmiştir.

$\bar{\theta}^{n+1} \in [t^n, t^{n+1}]$  olsun. Terimler için üst sınırlar sırasıyla:

$$\begin{aligned} \Delta t \left| b_\omega \left( \frac{(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}) - (u_i^n - \bar{u}_i^n)}{\Delta t}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1} \right) \right| &\leq \frac{C\delta_i^4 \Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla \Delta u_{i,tt}(\bar{\theta}^{n+1})\|^2 \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 \\ &\quad + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2, \\ \Delta t \left| b_\omega \left( u_i^n - \bar{u}_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; s_i^{n+1} \right) \right| &\leq \frac{C\delta_i^4 \Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla \Delta u_i^n\|^2 \left\| \frac{\nabla(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t} \right\|^2 \\ &\quad + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

$$\Delta t |b_\omega(\bar{s}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1})| \leq \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}^3 \nu_i^3} \|\nabla u_i^{n+1}\|^4 \|s_i^{n+1}\|^2 + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2,$$

$$\Delta t |b_\omega(\bar{r}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; s_i^{n+1})| \leq \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla r_i^{n+1}\|^2 \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta t |b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, r_i^{n+1}; s_i^{n+1})| &\leq \Delta t |b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, r_i^{n+1}; s_i^{n+1})| + \Delta t |b_\omega(\hat{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}, r_i^{n+1}; s_i^{n+1})| \\ &\leq \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 \|\nabla r_i^{n+1}\|^2 + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2 \\ &\quad + \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla r_i^{n+1}\|^2 \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta t \left| b_\omega \left( \bar{e}_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; s_i^{n+1} \right) \right| &\leq \frac{C}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \left\| \nabla \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 (\Delta t \|\nabla e_i^n\|^2) \\ &\quad + \epsilon_{i,1}\nu_i \Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde  $N$  için sınırları belirtirler. Son terimi ele almak için Lemma 2.10'daki sınırların daha keskin versiyonu gereklidir. Böylece eşitsizlik aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \Delta t \left| b_\omega \left( \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}, u_i^n - \hat{u}_i^n; s_i^{n+1} \right) \right| &\leq \Delta t \left| b_\omega \left( \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}}{\Delta t}, u_i^n - \hat{u}_i^n; s_i^{n+1} \right) \right| \\ &\quad + \Delta t |b_\omega(\bar{r}_i^{n+1}, u_i^n - \hat{u}_i^n; s_i^{n+1})| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta t |b_\omega(\bar{s}_i^{n+1}, u_i^n - \hat{u}_i^n; s_i^{n+1})| \\
& \leq \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \left\| \nabla \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla e_i^n\|^2 \\
& + \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla r_i^{n+1}\|^2 \|\nabla e_i^n\|^2 \\
& + \frac{C\Delta t}{\epsilon_{i,1}^3\nu_i^3} \|\nabla e_i^n\|^4 \|s_i^{n+1}\|^2 + 3\epsilon_{i,1}\nu_i\Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

$I_1$  ve  $I_2$  terimlerinin uygun işleyişi [23] çalışmasında yer almaktadır. (20) eşitliğinin sağ tarafında kalan terimlere Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanır,  $\epsilon_{i,j}$  katsayılarının her birinin uygun seçimi yapılır ve 2 ile çarpılırsa

$$F_i^k = (1 + \kappa)\Delta t\nu_i^{-3} \|\nabla e_i^{k-1}\|^4 + \kappa\Delta t\nu_i^{-3} \|\nabla e_j^{k-1}\|^4$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\|s_i^{n+1}\|^2 - \|s_i^{n+1}\|^2 + \nu_i\Delta t \|\nabla s_i^{n+1}\|^2 & \leq C\Delta t \left( \delta^4 + \Delta t^2 + \left\| \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\Delta t} \right\|_{-1}^2 \right. \\
& + \left\| \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right\|_{-1}^2 + \left\| \frac{(p_i^{n+1} - \hat{q}_i^{n+1}) - (p_i^n - \hat{q}_i^n)}{\Delta t} \right\|_{-1}^2 + F_i^{n+1} \|s_i^{n+1}\|^2 \\
& \left. + \kappa^2\nu^{-1} \left( \|s_i^n\|^2 + \|s_j^n\|^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki dördüncü terimin  $\Delta t^2$  mertebesine sahip olduğunu doğrulamak için Taylor teoreminin başka bir uygulaması gerekmektedir. [29] çalışmasında belirtilen teknik,  $F_i^{n+1}$  teriminin küçüklüğünü göstermek için yeterli olmaktadır. Daha sonra her bir  $r_i^{n+1}$ ,  $r_i^n$ ,  $r_i^{n-1}$ ,  $\hat{q}_i^{n+1}$ , ve  $\hat{q}_i^n$  terimleri için uygun seçimin yapılması, tüm zaman düzeylerinde ve her iki alt domain üzerinde toplanması, uygun zaman adımı kısıtlaması altında Grönwall lemmasının ve ardından ters üçgen eşitsizliğinin uygulanması ispatı tamamlar.  $\square$

Nümerik analizde ihtiyaç duyulan bir sonraki yardımcı sonuç, tahmin adımının hatası ile bu

adımın filtrelenmiş hatası arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu noktada gerçek çözümün regülerliği hakkında bazı ek varsayımların yapılması gerekmektedir.

**Gerçek Çözüm Üzerinde Varsayım:**

$$C_u = \max_{i=1,2} \sup_{t \in [0,T]} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_i} |u_i(t, \mathbf{x})|$$

$$C_{\nabla \times \bar{u}} = \max_{i=1,2} \sup_{t \in [0,T]} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_i} |\nabla \times \bar{u}_i(t, \mathbf{x})|$$

$$C_{[u]} = \sup_{t \in [0,T]} \sup_{\mathbf{x} \in I} |[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})]|$$

$$C_{[u_{tt}]} = \sup_{t \in [0,T]} \sup_{\mathbf{x} \in I} |[\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x})]|$$

olmak üzere,  $C_u$ ,  $C_{\nabla \times \bar{u}}$ ,  $C_{[u]}$  ve  $C_{[u_{tt}]}$  sonlu pozitif sabitlerdir.

Aşağıdaki analizde filtrelenmiş hızdaki hata  $g_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1} = \bar{e}_i^{n+1}$  olarak ifade edilecektir.

**Teorem 3.4** (Tahmin Adımı Hatasının Filtrelenmiş Hatayla İlişkisi). *Teorem 3.1'den Teorem 3.3'e tüm şartlar sağlanıyor olsun. Ek olarak,  $i = 1, 2$  için  $\delta_i^4 \leq \Delta t^2 < h$  olduğu kabul edilsin. O zaman, aşağıdaki doğruluk sınırı sağlanır:*

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left( \delta_i^{-2} \|e_i^{n+1} - g_i^{n+1}\|^2 + \|\nabla g_i^{n+1}\|^2 \right. \\
& \quad \left. + \nu_i \delta_i^{-4} \sum_{k=2}^n \|e_i^{k+1} - g_i^{k+1}\|^2 + \nu_i \delta_i^{-2} \sum_{k=2}^n \|\nabla(e_i^{k+1} - g_i^{k+1})\|^2 \right) \\
& \leq \frac{C\kappa^2}{\nu^3} \sum_{i=1}^2 \left( T \max_{l=0, \dots, n} \inf_{r_i \in X_i^h} \|\nabla(u_i^{l+1} - r_i)\|^2 \right. \\
& \quad \left. + T \max_{l=0, \dots, n} \inf_{q_i \in Q_i^h} \|p_i^{l+1} - q_i\|^2 + \|e_i^0\|^2 + \|e_i^1\|^2 + \|\nabla e_i^0\|^2 + \|\nabla e_i^1\|^2 \right) \\
& + \Delta t \sum_{k=2}^n \left( \delta_i^4 + \Delta t^2 + \inf_{r_i \in X_i^h} \|\nabla(u_i^{n+1} - r_i)\|^2 + \inf_{v_i \in X_i^h} \|\nabla(\bar{u}_i^{n+1} - v_i)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

*İspat.*  $i = 1, 2$  için filtrelenmiş hızdaki hata  $\psi_i^{n+1} = \Pi^h \bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1} \in X_i^h$  olmak üzere,  $g_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1} = \psi_i^{n+1} - \mu_i^{n+1}$  olacak şekilde ayrıştırılsın. Ayrıca  $\phi_i^{n+1} = \Pi^h u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1} \in X_i^h$  iken, hız hatası  $e_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1} = \phi_i^{n+1} - \eta_i^{n+1}$  olarak ayrıştırılsın. Şimdi, (9)'un momentum dengesi (17)'den çıkarılır ve  $v_i = \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})$  seçilirse;

$$\begin{aligned}
\delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1}, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) &= \delta_i^{-2} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 + \delta_i^{-2} (\psi_i^{n+1}, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}), \\
\delta_i^{-2} (\phi_i^n, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) &= \delta_i^{-2} (\phi_i^n - \psi_i^n, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) + \delta_i^{-2} (\psi_i^n, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}), \\
\delta_i^{-2} \nu_i (\nabla \phi_i^{n+1}, \nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) &= \delta_i^{-2} \nu_i \|\nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 \\
& \quad + \delta_i^{-2} \nu_i (\nabla \psi_i^{n+1}, \nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bir sonraki adımda (9)'un ikinci denklemi (18)'den çıkarılmalıdır. Denklemler yeniden düzenlenir,  $\xi_i$ 'nin uygun seçimleri yapılır (ilk terimler için  $\psi_i^{n+1}$  ve son terimler için  $\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}$ ) ve Tanım 2.11 kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1}, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) &= \delta_i^{-2} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 + \|\nabla \psi_i^{n+1}\|^2 - (\nabla \mu_i^{n+1}, \nabla \psi_i^{n+1}) \\
\delta_i^{-2} (\phi_i^n, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) &= \delta_i^{-2} (\phi_i^n - \psi_i^n, \phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) + (\nabla \psi_i^n, \nabla \psi_i^{n+1}) \\
& \quad - (\nabla \mu_i^n, \nabla \psi_i^{n+1}) \\
\delta_i^{-2} \nu_i (\nabla \phi_i^{n+1}, \nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) &= \delta_i^{-2} \nu_i \|\nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 + \delta_i^{-4} \nu_i \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

$$+ \delta_i^{-2} \nu_i (\nabla \mu_i^{n+1}, \nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, Cauchy-Schwarz, Young ve üçgen eşitsizlikleri uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_i^{-2} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 - \delta_i^{-2} \|\phi_i^n - \psi_i^n\|^2}{2\Delta t} + \frac{\|\nabla \psi_i^{n+1}\|^2 - \|\nabla \psi_i^n\|^2}{2\Delta t} + \delta_i^{-2} \nu_i \|\nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 \\ & + \nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 \leq \|\nabla \psi_i^{n+1}\|^2 + \frac{1}{4} \left\| \nabla \left( \frac{\mu_i^{n+1} - \mu_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \\ & + 2\epsilon \nu_i \delta_i^{-2} \|\nabla (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 + \frac{\nu_i}{4\epsilon \delta_i^2} \|\nabla (\mu_i^{n+1} - \eta_i^{n+1})\|^2 + \frac{d}{4\epsilon \nu_i \delta_i^2} \|p_i^{n+1} - q_i^{n+1}\|^2 \\ & + \hat{\epsilon} \nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 + \frac{1}{4\hat{\epsilon} \nu_i} \|\rho_i^{n+1}\|^2 \\ & + \left| \kappa \int_I u_i^{n+1} |u^{n+1}| \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) ds - \kappa \int_I [\hat{u}^n] |\hat{u}^{n+1}| \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) ds \right| \\ & + \left| \kappa \int_I u_j^{n+1} |u^{n+1}| \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) ds - \kappa \int_I \hat{u}_j^n |[\hat{u}^n]|^{1/2} |[\hat{u}^{n-1}]|^{1/2} \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) ds \right| \\ & + \left| b_\omega(u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) - b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Burada, Teorem 3.3'deki gibi  $\rho_i^{n+1} := \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - u_{i,t}^{n+1}$  zamanda global olarak birinci mertebeden doğru bir ifadedir,  $q_i^{n+1}$  basınç uzayının keyfi bir elemanıdır ve  $d = 2, 3$  ifadesi  $\Omega$ 'nın boyutunu göstermektedir. Teorem 3.3'ün sonucu dikkate alındığında sağ taraftaki ikinci terim uygun doğruluktur. Lineer olmayan terim çifti;

$$\begin{aligned} & \left| b_\omega(u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) - b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) \right| \\ & \leq \left| b_\omega(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) \right| \\ & + \left| b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) - b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \delta_i^{-2} (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) \right| \end{aligned}$$

olacak şekilde yeniden yazılabilir. Bu terimlerin her biri Lemma 2.10 ve Teorem 3.2 kullanılarak aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
|b_\omega(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))| &\leq \frac{C \cdot C_u^2 \delta_i^4}{\nu_i} \|\Delta \nabla u_i^{n+1}\|^2 + \hat{\epsilon} \nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2, \\
|b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) - b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))| \\
&\leq |b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, e_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))| + |b_\omega(g_i^{n+1}, \bar{u}_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))| \\
&\quad + |b_\omega(g_i^{n+1}, e_i^{n+1}; \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}))| \\
&\leq 2\hat{\epsilon} \nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 + \epsilon \nu_i \delta_i^{-2} \|\nabla(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 \\
&\quad + \frac{C \cdot C_{\nabla \times \bar{u}}}{4\epsilon \nu_i} \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 + \frac{C \cdot C_{\bar{u}}}{4\epsilon \nu_i} \|\nabla g_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{4\epsilon \nu_i} \delta_i^{-2} \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 \|\nabla g_i^{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

İspatın son adımında  $\Delta t$  ile çarpılarak, ilk iki terimi ve üçüncü terimdeki ikinci çarpanı sınırlandırmak için Teorem 3.2 uygulanır ve böylece gerekli doğruluk sağlanır. Teorem 3.2 uygulanırken Lemma 2.9'dan faydalanılır ve böylece filtrelenmiş hızdaki hatanın  $H^1(\Omega_i)$  normu da dahil olmak üzere, filtrelenmiş hatayı ( $g_i^{n+1}$ ) içeren terimlerin, filtrelenmemiş karşılıkları tarafından sınırlandırılması sağlanır. Üçüncü terimin yeterince doğru olduğundan emin olmak için;  $\delta_i$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  arasındaki ilişkilere yönelik varsayımlar dikkate alınır:

$$\begin{aligned}
\delta_i^{-2} \|\nabla g_i^{n+1}\|^2 &\leq \delta_i^{-4} \Delta t \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 \leq \\
\delta_i^{-4} O(\delta_i^4 + \Delta t^2 + h^k) &\leq O\left(1 + \frac{\Delta t^2}{\delta_i^4} + \frac{h^k}{\delta_i^4}\right) \leq O(1 + h^{k-1})
\end{aligned}$$

Burada,  $k > 1$  seçilen sonlu eleman uzayının doğruluğunu göstermektedir.

Arayüz terimleri de sınırlı olmalıdır. Sınır ve arayüz terimleri burada [6] çalışmasında ele alındığı gibi yazılacaktır. (21)'deki arayüz terimlerinin ilk çifti  $I_1$  ve  $I_2$  ele alındığında;

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \kappa \left| \int_I u_i^{n+1} (|[u^{n+1}]| - |[\hat{u}^n]|\delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})) dS \right| + \kappa \left| \int_I e_i^{n+1} |[\hat{u}^n]|\delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| \\
&\leq \frac{C \cdot C_u \kappa^2}{4\hat{\epsilon}\nu_i} \left( \Delta t^2 \left( \left\| \nabla \left( \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 + \left\| \nabla \left( \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) + \|\nabla e_1^{n+1}\|^2 + \|\nabla e_2^{n+1}\|^2 \right) \\
&\quad + 2\hat{\epsilon}\nu_i \delta_i^4 \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 \\
&\quad + \frac{C \cdot C_{[u]}\kappa^2}{4\hat{\epsilon}\nu_i} \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 + \frac{C\kappa^2}{4\epsilon\nu_i} \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 \delta_i^{-2} (\|\nabla e_1^n\|^2 + \|\nabla e_2^n\|^2) \\
&\quad + \epsilon\nu_i \delta_i^{-2} \|\nabla(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 + \hat{\epsilon}\nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \kappa \left| \int_I e_j^n |[u^{n+1}]\delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| + \kappa \left| \int_I (u_j^{n+1} - u_j^n) |[u^{n+1}]\delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| \\
&\quad + \kappa \left| \int_I \hat{u}_j^n \left( \frac{1}{2} (|[u^n]| - |[u^{n-1}]|) \right) (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| + \frac{3\kappa}{2} \left| \int_I \hat{u}_j^n [e^n] \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| \\
&\quad + \frac{3\kappa}{2} \left| \int_I \hat{u}_j^n [e^{n-1}] (\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| \\
&\quad + \kappa \left| \int_I \hat{u}_j^n \left( |[u^{n+1}]| - \frac{1}{2} (|[u^n]| + |[u^{n-1}]|) \right) \delta_i^{-2}(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) dS \right| \\
&\leq \frac{C \cdot C_{[u]}\kappa^2}{4\hat{\epsilon}\nu_i} \|\nabla e_j^n\|^2 + \frac{C \cdot C_{[u]}\kappa^2 \Delta t^2}{4\epsilon\nu_i} \left\| \nabla \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 + 2\hat{\epsilon}\nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 \\
&\quad + \frac{C \cdot C_{[u_{tt}]}\kappa^2 \Delta t^2}{16\hat{\epsilon}\nu_i} \|\nabla \hat{u}_j^n\|^2 + \frac{9C \cdot C_u \kappa^2}{16\hat{\epsilon}\nu_i} (\|\nabla e_1^n\|^2 + \|\nabla e_2^n\|^2 + \|\nabla e_1^{n-1}\|^2 + \|\nabla e_2^{n-1}\|^2) \\
&\quad + 2\hat{\epsilon}\nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2 \\
&\quad + \frac{9C\kappa^2}{16\epsilon\nu_i} \delta_i^{-2} \|\nabla e_j^n\|^2 (\|\nabla e_1^n\|^2 + \|\nabla e_2^n\|^2 + \|\nabla e_1^{n-1}\|^2 + \|\nabla e_2^{n-1}\|^2) + \epsilon\nu_i \delta_i^{-2} \|\nabla(\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1})\|^2 \\
&\quad + \frac{C \cdot C_{[u_{tt}]}\kappa^2 \Delta t^2}{4\epsilon\nu_i} \|\nabla \hat{u}_j^n\|^2 + \hat{\epsilon}\nu_i \delta_i^{-4} \|\phi_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilmektedir. Yukarıdaki ifadelerin tümü daha sonrasında Teorem 3.2'deki lineer olmayan terimlerle aynı şekilde sınırlandırılabilir. Burada yine ispatın son adımı  $\Delta t$  ile



çarpılacaktır. Yukarıdaki sınırların tümünü toplamak, her iki tarafı  $2\Delta t$  ile çarpmak, her  $\epsilon$  ve  $\hat{\epsilon}$  için uygun seçimi yapmak, önceki tüm zaman düzeylerini ve her iki alt domainde toplamak ve ardından üçgen eşitsizliğini uygulamak ispatı tamamlar.  $\square$

Şimdi, nümerik kararlılıktan başlamak üzere düzeltme adımının kararlılığı ve doğruluğu kanıtlanacaktır.

**Teorem 3.5** (Düzeltilme Adımının Kararlılığı).  $(\tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{q}) \in (X_{i,h}, X_{i,h}, Q_{i,h})$  kabul edilsin. Aynı zamanda Teorem 3.1-3.4'ün koşulları sağlansın.  $O$  zaman aşığıdaki sınır koşulu geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left( \|\tilde{u}_i^{n+1}\|^2 + \nu_i \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \|\nabla \tilde{u}_i^k\|^2 \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \int_I (|\tilde{u}_1^{n+1}|^2 + |\tilde{u}_2^{n+1}|^2) |\tilde{u}_1^n - \tilde{u}_2^n| ds \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \int_I \left( |\tilde{u}_1^k - \tilde{u}_2^k|^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1^{k+1} - \tilde{u}_2^k |\tilde{u}_1^{k-1} - \tilde{u}_2^{k-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \int_I \left( |\tilde{u}_1^k - \tilde{u}_2^k|^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_2^{k+1} - \tilde{u}_1^k |\tilde{u}_1^{k-1} - \tilde{u}_2^{k-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& \leq C \sum_{i=1}^2 \left( \|u_i^1\|^2 + \frac{1}{4\nu_i} \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \left\| \frac{f_i(t^k) + f_i(t^{k-1})}{2} \right\|_{-1}^2 \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \int_I (|u_1^1|^2 + |u_2^1|^2) |u_1^0 - u_2^0| ds.
\end{aligned}$$

*İspat.* (10) eşitliğinde,  $v_i = \tilde{u}_i^{n+1}$  seçilsin. Böylece sol taraftaki basınç terimi ve lineer olmayan terim kaybolmaktadır. Sol taraftaki arayüz terimleri, [6] çalışmasının tahmin adımındaki gibi ele alınabilmektedir. Lineer olmayan arayüz terimleri, Teorem 3.2-3.4 kullanılarak standart şekilde sınırlandırılmaktadır. Aynı zamanda, kalan diğer terimlere Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliklerini uygulayarak ve terimleri  $\Delta t$  ile çarparak;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\|\tilde{u}_i^{n+1}\|^2 - \|\tilde{u}_i^n\|^2}{2} + \nu_i \Delta t \|\nabla \tilde{u}_i^{n+1}\|^2 \right) \\
& + \frac{\kappa \Delta t}{2} \int_I (|\tilde{u}_1^{n+1}|^2 + |\tilde{u}_2^{n+1}|^2) |\tilde{u}_1^n - \tilde{u}_2^n| ds - \frac{\kappa \Delta t}{2} \int_I (|\tilde{u}_1^n|^2 + |\tilde{u}_2^n|^2) |\tilde{u}_1^{n-1} - \tilde{u}_2^{n-1}| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa \Delta t}{2} \int_I \left( |\check{u}_1^n - \check{u}_2^n|^{\frac{1}{2}} \check{u}_1^{n+1} - \check{u}_2^n |\check{u}_1^{n-1} - \check{u}_2^{n-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& + \frac{\kappa \Delta t}{2} \int_I \left( |\check{u}_1^n - \check{u}_2^n|^{\frac{1}{2}} \check{u}_2^{n+1} - \check{u}_1^n |\check{u}_1^{n-1} - \check{u}_2^{n-1}|^{1/2} \right)^2 ds \\
& \leq \Delta t \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{8\nu_i \epsilon_{i,1}} \left\| \frac{f_i(t^{n+1}) + f_i(t^n)}{2} \right\|_{-1}^2 + \frac{\nu_i \Delta t^2}{4\epsilon} \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right. \\
& + 10\epsilon \nu_i \|\check{u}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{4\epsilon \nu_i} \|\nabla(\hat{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1})\|^2 \|\nabla \hat{u}_i^{n+1}\|^2 + \frac{2C \Delta t^2}{4\epsilon \nu_i} \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla \hat{u}_i^{n+1}\|^2 \\
& + \frac{C \kappa^2 \Delta t^2}{16\epsilon \nu_i} \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 (\|\nabla \hat{u}_1^n\|^2 + \|\nabla \hat{u}_2^n\|^2) \\
& + \frac{C \kappa^2 \Delta t^2}{16\epsilon \nu_i} \left( \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_1^{n+1} - \hat{u}_1^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 + \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_2^{n+1} - \hat{u}_2^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) \|\nabla \hat{u}_i^{n+1}\|^2 \\
& + \frac{C \kappa^2 \Delta t^2}{4\epsilon \nu_i} \|\nabla \hat{u}_j^n\|^2 \left( \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_1^n - \hat{u}_1^{n-1}}{\Delta t} \right) \right\|^2 + \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_2^n - \hat{u}_2^{n-1}}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) \\
& + \frac{C \kappa^2 \Delta t^2}{16\epsilon \nu_i} (\|\nabla \hat{u}_1^{n+1}\|^2 + \|\nabla \hat{u}_2^{n+1}\|^2) \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \\
& \left. + \frac{C \kappa^2 \Delta t^2}{16\epsilon \nu_i} \|\nabla \hat{u}_j^n\|^2 \left( \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_1^{n+1} - \hat{u}_1^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 + \left\| \nabla \left( \frac{\hat{u}_2^{n+1} - \hat{u}_2^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

sınırı elde edilmektedir.

Üçgen eşitsizliği ve Young eşitsizlikleri kullanılarak, daha sonra doğru çözüm üzerine kabul edilen regülerlik koşulları ile ispatlanmış doğruluk sınırları uygulanarak sağ taraftaki terimler sınırlandırılır. Örneğin:

$$\|\nabla(\hat{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1})\|^2 \leq 2\|\nabla(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1})\|^2 + 2\|\nabla(e_i^{n+1} - g_i^{n+1})\|^2.$$

$\epsilon = \frac{1}{20}$  seçmek, iki ile çarpmak, ardından terimleri yeniden düzenlemek ve önceki tüm zaman düzeyleri üzerinde toplama yapmak ispatı tamamlar.  $\square$

Şimdi, yeni modelin yüksek doğruluğu gösterilecektir. İki komşu zaman düzeyinde gerçek çözümün ortalaması alınarak ve yeniden düzenlenerek, her  $v_i \in X_i$  için  $(u_i^{n+1}, p_i^{n+1})$  gerçek çözümü

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + \nu_i (\nabla u_i^{n+1}, \nabla v_i) + \kappa \int_I u_i^{n+1} |[u^n]| v_i ds - \kappa \int_I u_j^n |[u^n]|^{1/2} |[u^{n-1}]|^{1/2} v_i ds \\
& - (p_i^{n+1}, \nabla \cdot v_i) + b_\omega(\bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; v_i) - \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} (u_{i,t}^{n+1} + u_{i,t}^n), v_i \right) \\
& = \left( \frac{f_i(t^{n+1}) + f_i(t^n)}{2}, v_i \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\nabla(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t}, v_i \right) \\
& + b_\omega(\bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}, u_i^{n+1}, v_i) + \frac{1}{2} b_\omega(u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; v_i) - \frac{1}{2} b_\omega(u_i^n, u_i^n; v_i) \\
& + \frac{\kappa}{2} \Delta t \int_I |[u^n]| \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) v_i ds - \frac{\kappa}{2} \Delta t \int_I u_i^{n+1} \left( \frac{|[u^{n+1}]| - |[u^n]|}{\Delta t} \right) v_i ds \\
& - \kappa \int_I u_j^n |[u^n]|^{1/2} |[u^{n-1}]|^{1/2} v_i ds + \frac{\kappa}{2} \int_I u_j^{n+1} |[u^{n+1}]| v_i ds + \frac{\kappa}{2} \int_I u_j^n |[u^n]| v_i ds
\end{aligned} \tag{22}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Eğer zaman tutarlılığı hatası terimi göz ardı edilir ve (22) eşitliğinin sağ tarafındaki tüm terimler sola kaydırılırsa, standart Crank-Nicolson yaklaşımı elde edilmektedir. Böylece, zamanda artan doğruluğun nedeni görülebilmektedir. Burada  $\delta_i$ 'deki ekstra doğruluğun sebebi de açıklığa kavuşturulacaktır. Filtrelenmiş hız sol taraftaki lineer olmayan terimin ilk değişkeninde görülmektedir. Bu durum sol tarafta algoritma ile eşleşmeyi mümkün kılacaktır. Eşitliğin sağ tarafında ise bu filtrelenmiş hızın hata düzeltme adımı çözümüyle eşleştirilecek bir terimi vardır. Bir sonraki teoremden ana sonucu kanıtlamak için kullanılacak olan yapı bu olacaktır.

**Teorem 3.6** (Düzeltilme Adımının Doğruluğu).  $(\check{u}, \check{u}, \check{q}) \in (X_{i,h}, X_{i,h}, Q_{i,h})$  olsun ve Teorem 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4'teki koşullar sağlansın. Öyleyse, aşağıdaki sınır koşulu geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left( \|u_i^{n+1} - \check{u}_i^{n+1}\|^2 + \nu_i \|\nabla(u_i^{n+1} - \check{u}_i^{n+1})\|^2 \right) \leq \\
& \frac{C\kappa^2}{\min_{i=1,2} \nu_i^3} \sum_{i=1}^2 \left( T\delta_i^4 \max_{l=0,\dots,n} \inf_{r_i \in X_i^h} \|\nabla(u_i^{l+1} - r_i)\|^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +T\delta_i^4 \max_{l=0,\dots,n} \inf_{q_i \in Q_i^h} \|p_i^{l+1} - q_i\|^2 + \|\check{e}_i^0\|^2 + \|\check{e}_i^1\|^2 + \|\nabla \check{e}_i^0\|^2 + \|\nabla \check{e}_i^1\|^2 \\
& + \Delta t \sum_{i=2}^n \left( \delta_i^8 + \delta_i^4 \Delta t^2 + \Delta t^4 + \inf_{r_i \in X_i^h} \|\nabla(u_i^{n+1} - r_i)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

*İspat.* Teorem 3.3'ün ispatına benzer şekilde,  $\check{\phi}_i^{n+1} = \Pi_i^h u_i^{n+1} - \check{u}_i^{n+1} \in X_i^h$  olmak üzere  $u_i^{n+1} - \check{u}_i^{n+1} = \check{e}_i^{n+1} = \check{\phi}_i^{n+1} - \check{\eta}_i^{n+1}$  yaklaşımında hata ayrışımı yapılır. Daha sonra  $v_i = \check{\phi}_i^{n+1}$  seçilerek, (10) eşitliğinin ilk denklemini (22) eşitliğinden çıkarılır. Sol tarafta arayüz terimleri dışında tüm terimler tahmin adımının doğruluğunu kanıtlamada olduğu gibi [6] ele alınabilir. Sağ taraftaki terimlere düzeltme adımına özel Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanarak ve geriye kalan lineer olmayan arayüz terimleri gruplandırılarak,  $\check{\theta} \in [t^n, t^{n+1}]$  için

$$\lambda_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} (u_{i,t}^{n+1} + u_{i,t}^n) = C \Delta t^2 u_{i,ttt}(\check{\theta})$$

ifadesi Crank-Nicolson zaman tutarlılığı hatası olmak üzere;

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\check{\phi}_i^{n+1}\|^2 - \|\check{\phi}_i^n\|^2}{2\Delta t} + \nu_i \|\nabla \check{\phi}_i^{n+1}\|^2 \leq 4\epsilon_{i,1}\nu_i \|\check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\nabla \check{\eta}_i^{n+1}\|^2 + \frac{d}{4\epsilon_{i,1}\nu_i} \|p_i^{n+1} - \check{q}_i^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{4\epsilon_{i,1}\nu_i} \|\lambda_i^{n+1}\|_{-1,\Omega_i}^2 + \frac{1}{16\epsilon_{i,1}\nu_i} \left\| \frac{\nabla(e_i^{n+1} - e_i^n)}{\Delta t} \right\|^2 \\
& \quad + \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1}, \check{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& \quad + \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& \quad + \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}, \hat{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& \quad + \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( u_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \check{u}_i^n, \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& \quad + \kappa \left| \int_I u_i^{n+1} |[u^n]| \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I \check{u}_i^{n+1} |[\check{u}^n]| \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \kappa \left| \int_I u_j^n |[u^n]|^{1/2} |[u^{n-1}]|^{1/2} \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I \check{u}_j^n |[\check{u}^n]|^{1/2} |[\check{u}^{n-1}]|^{1/2} \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \frac{\kappa}{2} \Delta t \left| \int_I |[u^n]| \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I |[\hat{u}^n]| \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \frac{\kappa}{2} \Delta t \left| \int_I u_i^{n+1} \left( \frac{|[u^{n+1}]| - |[u^n]|}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I \hat{u}_i^{n+1} \left( \frac{|[\hat{u}^{n+1}]| - |[\hat{u}^n]|}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \frac{\kappa}{2} \Delta t \left| \int_I |[u^n]| \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I |[\hat{u}^n]| \left( \frac{\hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \frac{\kappa}{2} \Delta t \left| \int_I u_j^{n+1} \left( \frac{|[u^{n+1}]| - |[u^n]|}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I \hat{u}_j^{n+1} \left( \frac{|[\hat{u}^{n+1}]| - |[\hat{u}^n]|}{\Delta t} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds \right| \\
& \quad + \kappa \left| \int_I u_j^n \left( |[u^n]| - |[u^n]|^{1/2} |[u^{n-1}]|^{1/2} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds - \int_I \check{u}_j^n \left( |[\check{u}^n]| - |[\check{u}^n]|^{1/2} |[\check{u}^{n-1}]|^{1/2} \right) \check{\phi}_i^{n+1} ds \right|
\end{aligned} \tag{23}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki her bir arayüz terim çifti bu çalışmada ve referans [6], [23] çalışmalarında gösterilen yöntemlerle ele alınabilmektedir. Bu bölüm, yukarıda görüldükleri

sırayla her bir doğrusal olmayan terim çifti üzerinde bir sınır ile sonuçlandırılacaktır. Bu sınır;

$$\begin{aligned}
& \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1}, \check{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \left| b_\omega \left( \bar{\eta}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& + \left| b_\omega \left( \bar{\phi}_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| + \left| b_\omega \left( \bar{\phi}_i^{n+1}, \check{\eta}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| + \left| b_\omega \left( \bar{\eta}_i^{n+1}, \check{\eta}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& + \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1}, \check{\eta}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq 5\epsilon\nu_i \|\nabla \check{u}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{4\epsilon\nu_i} \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 \|\nabla \check{\eta}_i^{n+1}\|^2 \\
& \frac{C}{\epsilon^3\nu_i^3} \|\nabla u_i^{n+1}\|^4 \|\check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{\epsilon^3\nu_i^3} \|\nabla \check{\eta}_i^{n+1}\|^4 \|\check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{4\epsilon\nu_i} \|\nabla \check{\eta}_i^{n+1}\|^4 + \frac{C}{4\epsilon\nu_i} \|\nabla \check{\eta}_i^{n+1}\|^2 \|\nabla u_i^{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}, \hat{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& \left| b_\omega \left( g_i^{n+1} - e_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| + \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}, e_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& \left| b_\omega \left( g_i^{n+1} - e_i^{n+1}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| + \left| b_\omega \left( \bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}, e_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& + \left| b_\omega \left( g_i^{n+1} - e_i^{n+1}, e_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& 3\epsilon\nu_i \|\nabla \check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C \cdot C_u}{4\epsilon\nu_i^2} \delta_i^4 (\nu_i \delta_i^{-4} \|e_i^{n+1} - g_i^{n+1}\|^2) \\
& + \frac{C}{4\epsilon\nu_i^2} \delta_i^4 \|\Delta \nabla u_i^{n+1}\|^2 (\nu_i \|\nabla e_i^{n+1}\|^2) + \frac{C}{4\epsilon\nu_i^3} (\nu_i \delta_i^{-2} \|\nabla (e_i^{n+1} - g_i^{n+1})\|^2) (\nu_i \delta_i^2 \|\nabla e_i^{n+1}\|^2)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadelerin son iki satırı Teorem 3.2 ve 3.4 kullanılarak sınırlandırılabilir. Lineer olmayan terimlerin son iki çifti ise;

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}, \hat{u}_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t}, u_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| + \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, e_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \\
& \quad + \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t}, e_i^{n+1}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& \quad 3\epsilon\nu_i \|\nabla \check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \Delta t^2 \left\| \nabla \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \Delta t^2 \left\| \nabla \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \left( \Delta t \left\| \nabla \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) (\Delta t \|\nabla e_i^{n+1}\|^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t}{2} \left| b_\omega \left( u_i^n, \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) - b_\omega \left( \check{u}_i^n, \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}; \check{\phi}_i^{n+1} \right) \right| \leq \\
& \quad 3\epsilon\nu_i \|\nabla \check{\phi}_i^{n+1}\|^2 + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \Delta t^2 \left\| \nabla \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla u_i^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \Delta t^2 \left\| \nabla \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \|\nabla e_i^{n+1}\|^2 \\
& \quad + \frac{C}{16\epsilon\nu_i} \left( \Delta t \left\| \nabla \left( \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} \right) \right\|^2 \right) (\Delta t \|\nabla e_i^{n+1}\|^2)
\end{aligned}$$

ile sınırlandırılır. Son terimlerin tümü sınırlıdır ve Teorem 3.2, 3.3'te istenen  $O(\Delta t^4 + \delta_i^4 \Delta t^2)$  doğruluğunu sağlamaktadır. Tüm sınırları (23) eşitsizliğinde toplamak,  $2\Delta t$  ile çarpmak, Lemma 2.14'ü ve ardından üçgen eşitsizliğini uygulamak ispatı tamamlamaktadır.  $\square$

## 4 HESAPLAMALAR

Bu bölümdeki tüm hesaplamalar, açık kaynaklı bir sonlu elemanlar kütüphanesi olan deal.II [30] kullanılarak yapılmıştır.

### 4.1. Yakınsama Oranları

Bu bölüm, nümerik hata tahminleri ve yakınsama oranı analizi ile başlamaktadır. Bu amaçla,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 'de  $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  ve  $\Omega_2 = [0, 1] \times [0, -1]$  ile;

$$u_{1,1} = a\nu_1 e^{-2t}(1-x)^2(1+y)x^2 + ae^{-t}(1-x)x\nu_1/\sqrt{\kappa a}$$

$$u_{1,2} = a\nu_1 e^{-2t}(2+y)(1-x)(2x-1)xy + ae^{-t}(2x-1)y\nu_1/\sqrt{\kappa a}$$

$$u_{2,1} = a\nu_1 e^{-2t}(1-x)^2\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}y\right)x^2$$

$$u_{2,2} = a\nu_1 e^{-2t}(1-x)(2x-1)\left(2 + \frac{\nu_1}{\nu_2}y\right)xy.$$

olacak şekilde gerçek bir çözüm ele alınmaktadır.

Ayrıca, geleneksel bir yöntem olan [6, 7, 23] her iki bölgede de basıncın sıfır olması göz önünde bulundurularak problem verileri kesin çözümle uyumlu olacak şekilde seçilir. Kenetlenme katsayısı  $\kappa = 1$  ve son zaman  $T = 1$  olarak alınır. Yüksek olmayan Reynold sayılarında yakınsama oranlarını elde edebilmek için önce  $\nu_1 = 0.5$ ,  $\nu_2 = 0.1$  ve  $a = 1$  olarak seçilir. Ardından, sunulan yöntemi, zorluk seviyesi artmış bir durumda test edebilmek için azalan viskozite değerleri ve  $a = 1/\nu_1$  için hesaplamalar tekrarlanır.

$\Delta t = h = 1/N$ ,  $\delta = \sqrt{h}/32$  olarak seçilir ve ardından  $N$  değeri her yeni çözümde yarıya indirilir. Böylece, daha yüksek doğruluklu çözümler elde edilir. Bu şekilde art arda elde edilen çözümlerin hata oranları doğruluk mertebelerinin hesaplanmasında kullanılabilir. NS- $\omega$  ile birinci mertebeden doğruluk ve NS- $\omega$ -C ile ikinci mertebeden doğruluk beklenir.



Tablolarda,  $L^2 - L^2 = \|u - u^h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$  ve  $L^2 - H^1 = \|u - u^h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$  hata değerleri olarak temsil edilmektedir. Yakınsama oranları CR ile gösterilmiştir.

Tablo 4.1  $\nu_1 = 0.5, \nu_2 = 0.1, a = 1$ .

1/h	Tahmin Adımı				Düzelme Adımı			
	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR
8	4.11953e-04	-	8.50472e-03	-	1.01226e-04	-	7.67579e-03	-
16	2.03524e-04	1.02	2.70832e-03	1.65	1.51884e-05	2.73	1.97315e-03	1.96
32	1.01785e-04	1.00	1.05270e-03	1.36	2.96769e-06	2.36	5.01399e-04	1.98
64	5.09369e-05	1.00	4.79119e-04	1.14	7.01584e-07	2.08	1.26683e-04	1.98
128	2.54945e-05	1.00	2.33153e-04	1.04	1.77424e-07	1.98	3.19387e-05	1.99

Tablo 4.2  $\nu_1 = 0.005, \nu_2 = 0.001, a = 1/\nu_1$ .

1/h	Tahmin Adımı				Düzelme Adımı			
	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR
8	1.94534e-03	-	5.21231e-02	-	1.19799e-03	-	5.18072e-02	-
16	8.10025e-04	1.26	1.72017e-02	1.60	1.72664e-04	2.79	1.55092e-02	1.74
32	3.96054e-04	1.03	5.51475e-03	1.64	1.63580e-05	3.40	3.00804e-03	2.37
64	1.97319e-04	1.01	2.46784e-03	1.16	1.41591e-06	3.53	4.87807e-04	2.62
128	9.84947e-05	1.00	1.22070e-03	1.02	2.39417e-07	2.56	8.66997e-05	2.49

Tablo 4.3  $\nu_1 = 0.00005, \nu_2 = 0.00001, a = 1/\nu_1$ .

1/h	Tahmin Adımı				Düzelme Adımı			
	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR	$L^2 - L^2$	CR	$L^2 - H^1$	CR
8	2.28773e-03	-	6.93553e-02	-	1.59673e-03	-	6.85926e-02	-
16	9.67960e-04	1.24	3.77867e-02	0.88	4.00720e-04	1.99	3.60697e-02	0.93
32	4.59428e-04	1.08	2.02999e-02	0.90	9.68945e-05	2.05	1.78679e-02	1.01
64	2.25652e-04	1.03	1.09554e-02	0.89	2.43767e-05	1.99	8.25683e-03	1.11
128	1.11834e-04	1.01	6.19037e-03	0.82	1.01257e-05	1.27	4.56130e-03	0.86

Tablo 4.1-4.3 teorik bulguları doğrulamaktadır, yani NS- $\omega$  modeli birinci mertebeden ve NS- $\omega$ -C ise bu tabloların çoğu için ikinci mertebeden doğruluğa sahiptir. Hem LES hem de LES-C modellerindeki yakınsama oranlarının yüksek Reynold sayılarında azalması bilinen bir olgudur [31, 32]. Bu durumun muhtemel bir açıklaması, olası doğruluk sonuçlarının sağ taraflarında  $\nu^{-3}$  ifadesinin olmasıdır. Düzeltme adımı tahmin adımının doğruluğuna bağlı olduğundan, bu durum düzeltme adımının doğruluğu için daha kötü bir sonuç oluşturmaktadır. Ancak NS- $\omega$ -C çözümündeki (en ince ızgaradaki) hatanın büyüklüğü,  $L^2$ -normundaki NS- $\omega$  hatasından on kat daha küçüktür. Ayrıca, bir önceki kaba ızgara seviyesindeki düzeltme çözümünün doğruluğunun, en ince ızgaradaki tahmin adımının doğruluğundan daha iyi olduğu görülmektedir. Bu durum, kullanıcının NS- $\omega$ -C modeli ile istenen toleransı NS- $\omega$  modeline göre çok daha hızlı elde etmesini sağlamaktadır.

## 4.2. Dairesel Engeli Geçen Akış

(1)-(6) için türbülans test problemlerinin yetersizliğinde, dairesel bir cismin su yüzeyi üzerinde yüksek hızda ve alçak irtifada uçtuğu bir ortamı araştırmak önerilmektedir. Bu amaçla; su bölgesi cismin ardında gelişmesi gereken girdap yolunu etkiler mi, eğer öyleyse yol nasıl değişir ve NS- $\omega$  ya da NS- $\omega$ -C çözümlerinin doğru olup olmadığına nasıl karar verilir, son olarak bu girdap yolu alt bölgelerde bir tutarlı yapı yaratır mı, gibi sorular sorulmalıdır.

Bu amaçla bir karşılaştırma noktası sunulmaktadır. Hesaplama açısından maliyetli monolitik bir yöntem (iki bölgeyi ayrıştırmadan birlikte çözen), türbülans modellemesi olmadan daha küçük zaman adımlı ve daha ince bir ızgara üzerinde kullanılmaktadır. Yüksek olmayan Reynold sayıları kullanıldığı takdirde bu durum "gerçek çözüm" olarak görülebilmektedir çünkü bu çözüm ayrıştırma hatalarını veya türbülans modellemesinden kaynaklanan hataları ortaya çıkarmamaktadır.

NS- $\omega$ , NS- $\omega$ -C ve zamanda ikinci mertebeden doğruluğa sahip monolitik yöntem MM-BDF'nin nitel bir karşılaştırması şu şekilde sunulmaktadır: Her  $(v_{h,i}, q_{h,i}) \in (X_i^h, Q_i^h)$

olmak üzere;

$$\left( \frac{3u_{h,i}^{n+1} - 4u_{h,i}^n + u_{h,i}^{n-1}}{2\Delta t}, v_{h,i} \right) + \nu_i (\nabla u_{h,i}^{n+1}, \nabla v_{h,i}) + b_i^* (u_{h,i}^{n+1}; u_{h,i}^{n+1}, v_i) - (p_{h,i}^{n+1}, \nabla \cdot v_{h,i}) + (\nabla \cdot u_{h,i}^{n+1}, q_{h,i}) + \kappa \int_I |[\mathbf{u}_h^{n+1}]| [\mathbf{u}_h^{n+1}] v_{h,i} ds = (f_i^{n+1}, v_{h,i}), (24)$$

eşitliğini sağlayacak bir  $(u_{h,i}^{n+1}, p_{h,i}^{n+1}) \in (X_i^h, Q_i^h)$  bulunmalıdır.

Problem,

$$u_{1,1}(0, y, t) = u_{1,1}(2.2, y, t) = \frac{6}{0.41^2} \sin(\pi t/8) y (0.41 - y),$$

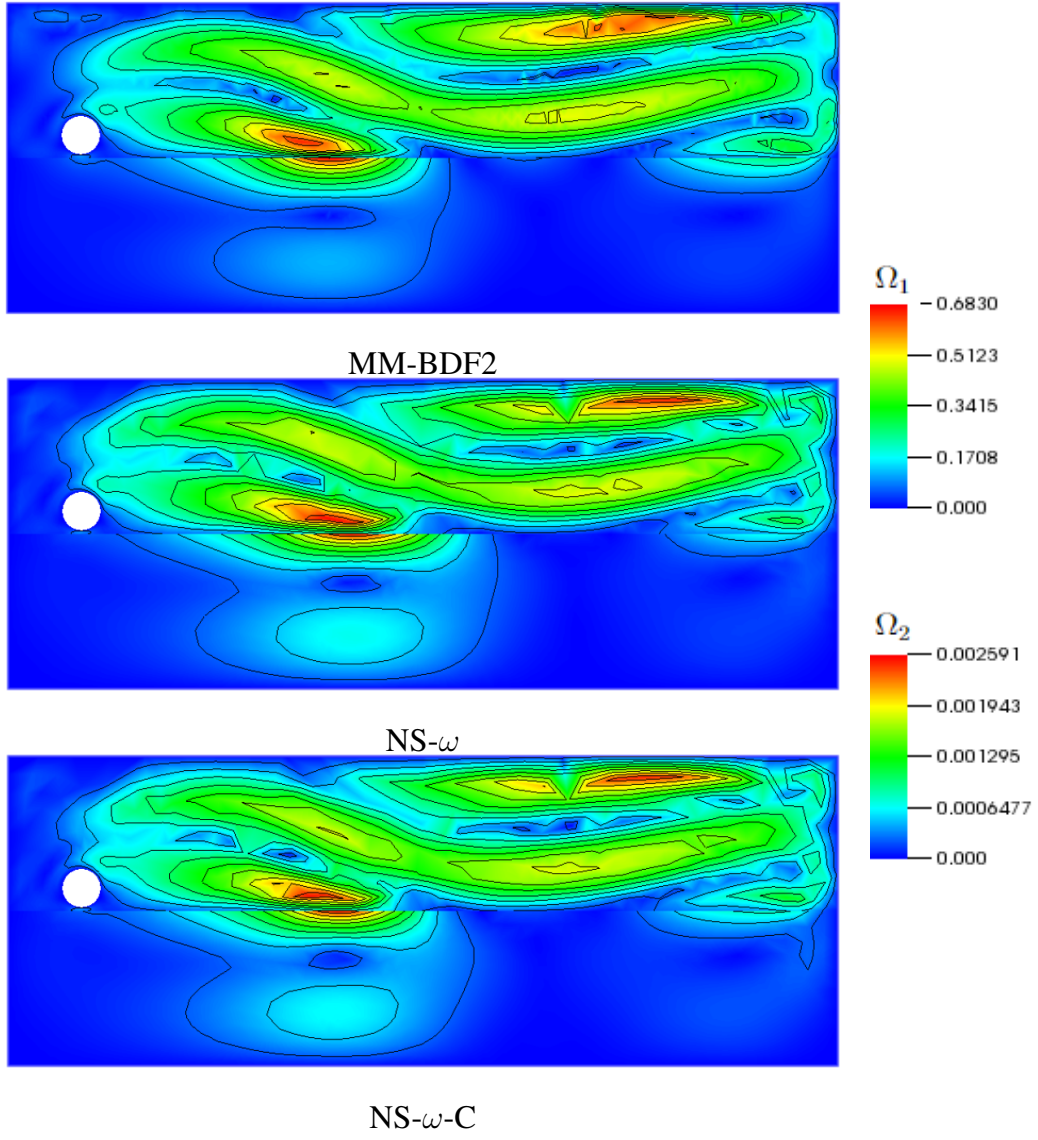
$$u_{1,2}(0, y, t) = u_{1,2}(2.2, y, t) = 0,$$

üst bölgede parabolik olarak giren akışın (aynı parabolik çıkış ile) (0.2,0.06) merkezli ve 0.05 yarıçaplı dairesel bir engeli geçeceği şekilde yapılandırılmıştır. Her iki bölge de  $2.2 \times 4.1$  dikdörtgenlerdir. Homojen Dirichlet sınır koşulları, arayüz hariç alt bölgenin duvarlarında ve üst bölgenin üst duvarında uygulanmaktadır. Her iki bölgedeki akışkanların başlangıç hızları sıfırdır.  $\nu_1 = 1e - 03$ ,  $\nu_2 = 1$  ve son zaman  $T=8$  olarak belirlenmiştir. Bilinmeyen sayıları (# of DoFs) ve problem parametreleri de Tablo 4.4'te verilmiştir.

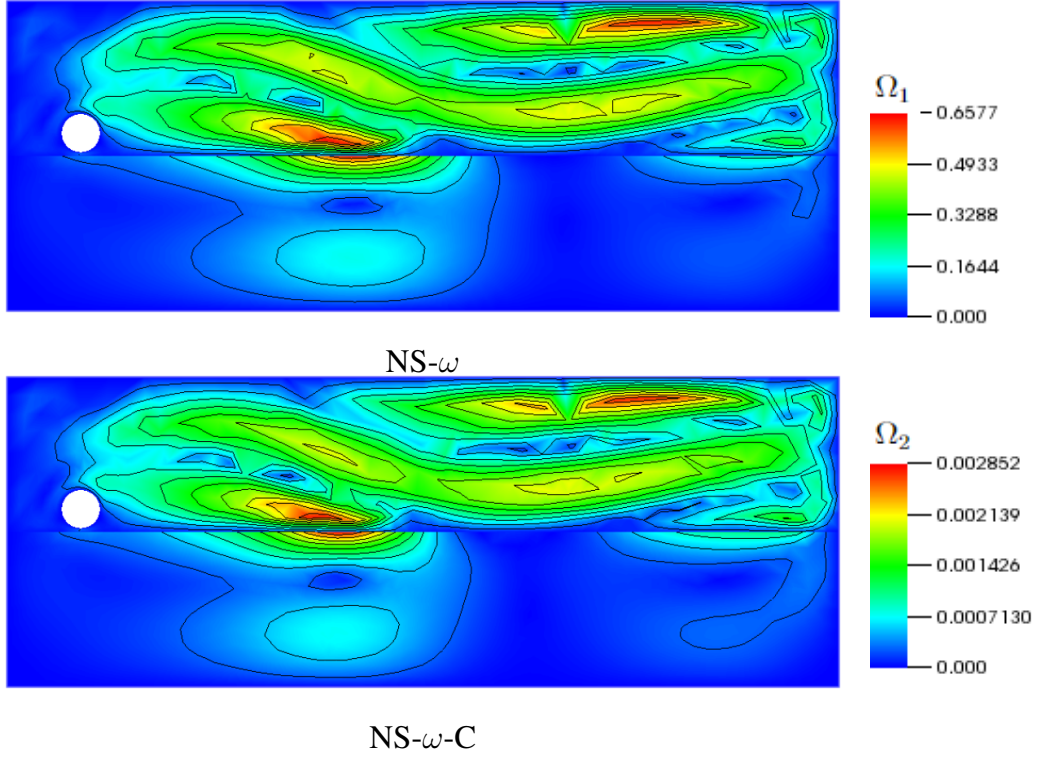
Tablo 4.4 Problem parametreleri

	# of DoFs (kalın ızgara)			# of DoFs (ince ızgara)			$\Delta t$	$\delta$
	$v$	$\xi$	$\chi$	$v$	$\xi$	$\chi$		
MM	x	x	x	39822	-	5115	0.005	-
NS- $\omega$	11786	11786	1547	x	x	x	0.1	0.01
NS- $\omega$ -C	11786	11786	1547	x	x	x	0.1	0.01

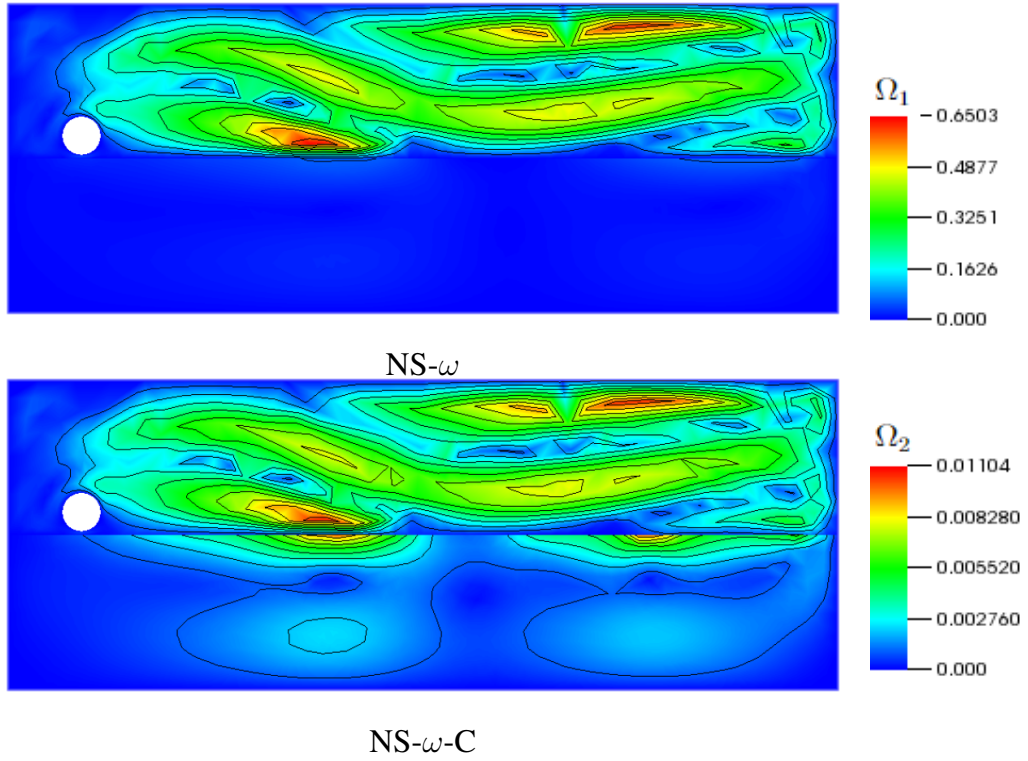
$\kappa$  değeri Şekil 4.1'den Şekil 4.3'e kademeli olarak arttırılmıştır. Bu yolla bölgeler arasındaki bağlantı güçlendikçe, MM-BDF2'nin  $\kappa > 1$  için başarısız olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1  $\kappa = 1$  için MM-BDF2, NS- $\omega$  ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri



Şekil 4.2  $\kappa = 10$  için NS- $\omega$  ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri. (MM-BDF2 yakınsamıyor.)



Şekil 4.3  $\kappa = 1000$  için NS- $\omega$  ve NS- $\omega$ -C ile beklenen hız büyüklükleri. (MM-BDF2 yakınsamıyor.)

Hem NS- $\omega$  hem de NS- $\omega$ -C modelleri üst bölgede karşılaştırılabilir sonuçlar üretmektedir. Girdap yolunun yönündeki yataydan eğimli yöne olan değişimi yakalarlar ve bu,  $\kappa = 1$  için MM-BDF2 yöntemi ile doğrulanmaktadır. Ancak, alt bölgeler arasındaki akış alışverişini arttırdıkça, Şekil 4.1'den Şekil 4.3'e kadar alt bölgede daha fazla yapının ortaya çıkması ve gelişmesi beklenmektedir. NS- $\omega$ -C modeli tam olarak bu tür bir davranışı gösterirken, NS- $\omega$  çözümü çok daha az tatmin edici olmaktadır ve alt bölgede çok az akışkan yapısı oluşturmaktadır (Şekil 4.2, 4.3).

### 4.3. Bir Basamağı Geçen Akış

Burada, bir basamak üzerinden geçen akışta beklenen hız büyüklüklerinin nitel davranışları NS- $\omega$ , NS- $\omega$ -C ve MM ile karşılaştırılmaktadır. Bu düzenleme, gerçek hayattaki bir simülasyonda bir sahil dağı, uçurum vb. tanımı olabilmektedir. Benzer problemler için [6, 20, 33] çalışmalarına bakılabilir.

Bu düzenlemede; basamakta, üst bölgenin üst duvarı ve alt bölgenin dikey duvarları üzerinde homojen Dirichlet sınır koşulları uygulanmaktadır. Parabolik giren akış  $u_1(0, y, t) = (4(y - 1)(2 - y), 0)$  ve çıkan akış  $u_1(8, y, t) = (y(2 - y)/2, 0)$  üst bölgedeki akışı yönlendirmektedir. Bu bölge sadece giren ve çıkan akışa sahip olduğundan ve diğer sınırlarda normal yönünde akış olmadığından verilen sınır değer seçimlerinin sıkıştırılmazlık kısıtlamasıyla uyumlu olduğu gösterilebilir:

$$\int_{\Omega_1} \nabla \cdot u_1 dx = \int_{\text{giren akış sınırı}} u_1 \cdot nds + \int_{\text{çıkan akış sınırı}} u_1 \cdot nds = 0.$$

Geriye kalan problem parametreleri ise  $\nu_2 = 10$ ,  $\nu_1 = 5e - 03$ ,  $T = 15$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $h \approx 0.2$  olarak verilmektedir.

Şekil 5.1,  $\kappa = 1$  ile NS- $\omega$ , NS- $\omega$ -C ve MM ile elde edilen hız konturlarını göstermektedir. Üst bölgede resirkülasyon bölgesi basamağın arkasında görüldüğünden ve akışların değişimi alt bölgede ters yönde dönen bir girdap yaratılmasına yol açtığından, kalitatif özellikleri birbirleriyle uyumlu görünmektedir.

Ancak,  $\kappa = 1000$  seçmek bu uyumu bozmaktadır. NS- $\omega$ -C ve MM benzer hız büyüklükleri üretirken, NS- $\omega$  monolitik çözümde gözlemlenmeyen ekstra sirkülasyonlarla birlikte gelmektedir (bkz. Şekil 5.2). Bu durum, NS- $\omega$ -C modelinin (1)-(6) akışkan-akışkan etkileşimi problemi için en doğal rakibi olan NS- $\omega$  modelinden daha iyi performans gösterdiğinin bir başka kanıtı olmaktadır.

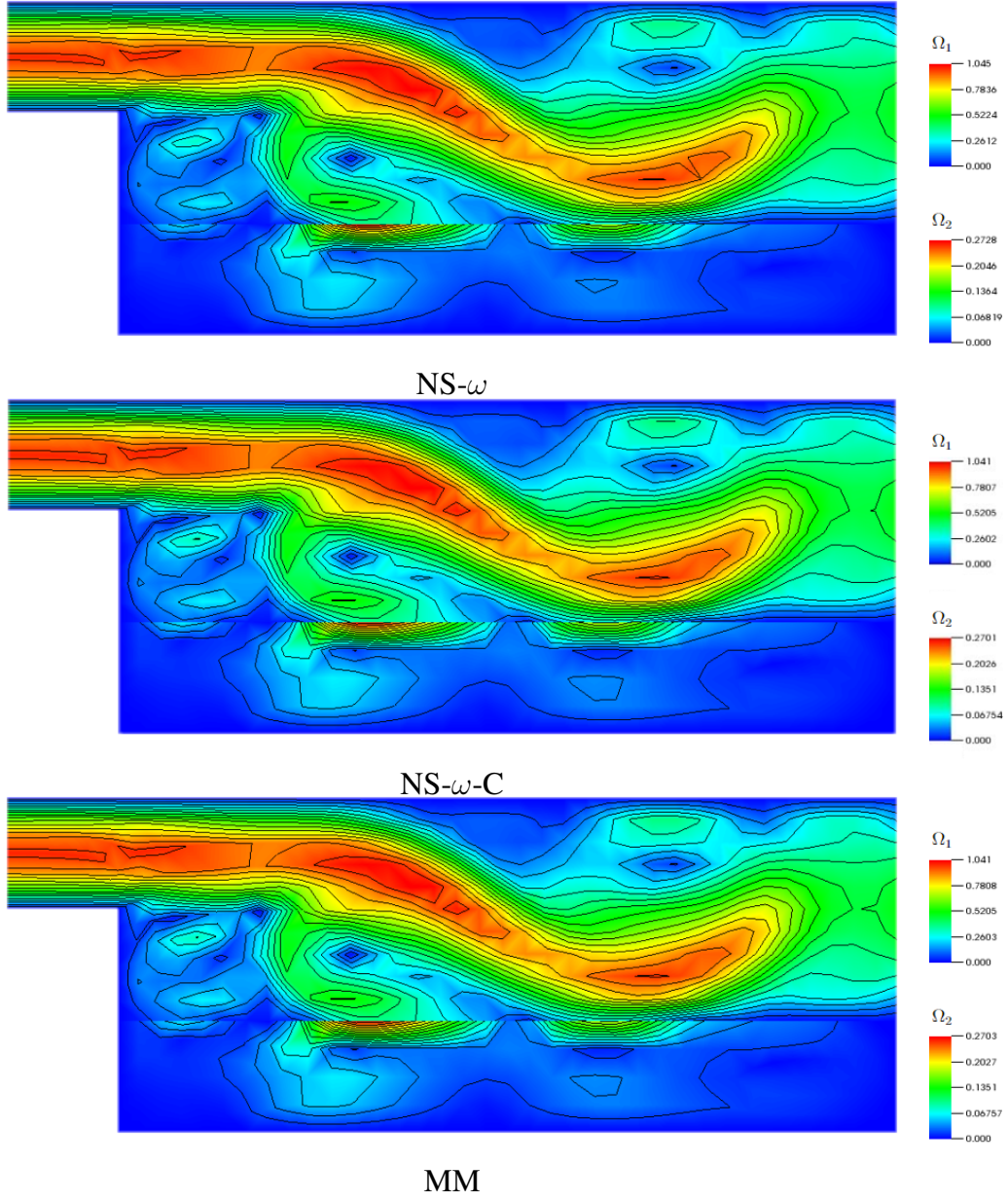
## 5 SONUÇLAR

Bu çalışmada, iki akışkanın etkileşimi için yeni bir türbülans modeli sunulmuştur. Bu model, literatürde geniş yer bulan ve akışkan-akışkan etkileşimini ayrıştırma tekniği olan geometrik ortalama yöntemini kullanarak ve bu yöntemi büyük girdap simülasyonun en yeni üyelerinden NS- $\omega$ -C ile birleştirerek yüksek Reynold sayılarında çözüm sunmaktadır. NS- $\omega$ -C-GA olarak adlandırılan bu yöntem, çeşitli atmosfer-okyanus etkileşimi modellerinde sıklıkla kullanılan lineer olmayan kenetlenme koşulu ile (1)-(6) test problemine uygulanmıştır. Yeni modelin rakibi olarak görülebilecek olan model [6] çalışmasındaki NS- $\omega$ -GA modelidir. NS- $\omega$ -C-GA modelinde kullanılan hata düzeltme yönteminin, teorik olarak hem modelleme hem de kenetlenme hatalarını azaltarak daha yüksek doğrulukta çözüm ürettiği gösterilmiştir. Genel tahmin-düzeltilme yaklaşımına uygun olarak, hem tahmin hem de düzeltme adımının çözümleri aynı ızgara üzerinde hesaplanmakta ve benzer bir CPU zamanı gerektirmektedir. Bu durumun sebebi, bu denklemler arasındaki tek farkın düzeltme adımının sağ tarafının değiştirilmiş olmasıdır. Kabaca iki çekirdekli bir makine örnek verilecek olursa, NS- $\omega$ -C modeli; tahmin adımı için bir çekirdek, düzeltme adımı için ise diğer çekirdek ile ve düzeltme adımı tahmin adımının bir zaman düzeyi gerisinde kalacak şekilde doğal olarak paralelleştirilebilmektedir.

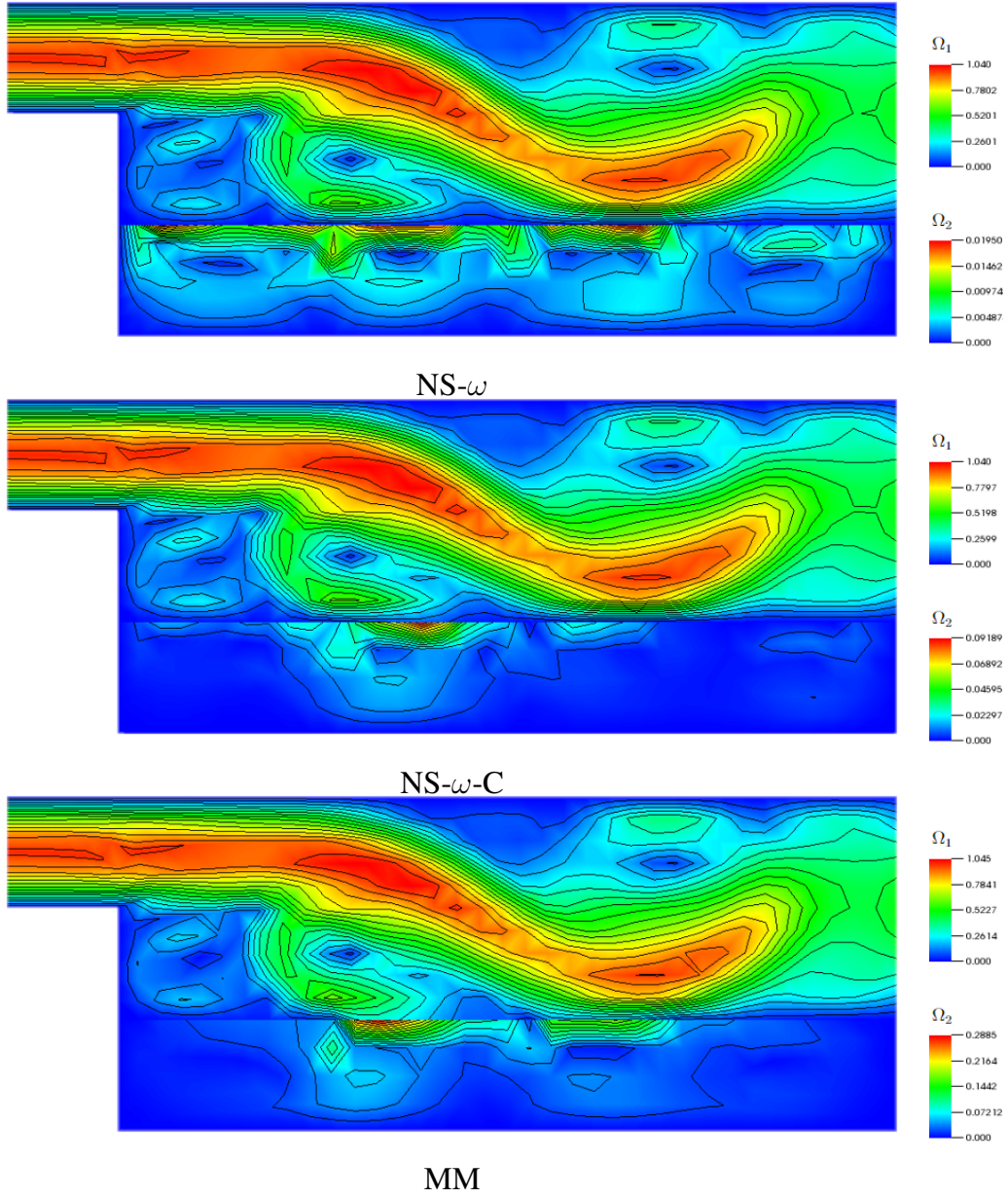
Düzeltilme adımının etkileri 4. bölümdeki üç sayısal testin tümünde fazlaca vurgulanmıştır. İlk olarak Tablo 4.1-4.3'e bakılarak, NS- $\omega$ -C modelinin "hesaplama çabası başına doğruluk" değeri açısından NS- $\omega$  modelinden daha iyi performans sergilediği çıkarımı yapılmaktadır. Düzeltilme adımı, aynı ızgarayı kullanırken, hatanın önemli ölçüde azaltılmasına izin vermektedir. Ayrıca bu tablolardan, seyrek bir ızgaradaki düzeltme adımı çözümünün doğruluğunu elde etmek amacıyla tahmin adımı için çok daha sık bir ızgaranın gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu durum, yalnızca tahmin adımının (NS- $\omega$  modeli) kullanılması durumunda aynı kalitede sonuçların elde edilmesi için daha fazla hesaplama çabası (CPU zamanı, depolama, bellek) gerekeceği anlamına gelmektedir. İkinci olarak, NS- $\omega$ -C çözümünün NS- $\omega$  çözümüne göre niteliksel gelişimi, bir basamağı geçen akış ve dairesel



bir nesnenin üst bölgede yüksek hızda ve alçak irtifada uçuşu ile verilen iki test probleminde açıkça gösterilmiştir.



Şekil 5.1  $\kappa = 1$  için beklenen hız büyüklükleri.



Şekil 5.2  $\kappa = 1000$  için beklenen hız büyüklükleri.

## KAYNAKÇA

- [1] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. Models of the coupled atmosphere and ocean (CAO I). *Comput. Mech. Adv.*, 1:5–54, **1993**.
- [2] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. Numerical analysis of the coupled atmosphere and ocean models (CAO II). *Comput. Mech. Adv.*, 1:55–120, **1993**.
- [3] D. Bresch and J. Koko. Operator-splitting and lagrange multiplier domain decomposition methods for numerical simulation of two coupled Navier-Stokes. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 16:419–429, **2006**.
- [4] E. Burman and M. A. Fernández. Stabilization of explicit coupling in fluid–structure interaction involving fluid incompressibility. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5):766–784, **2009**.
- [5] J.M. Connors, J.S. Howell, and W.J. Layton. Decoupled time stepping methods for fluid-fluid interaction. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(3):1297–1319, **2012**.
- [6] M. Aggul, A. E. Labovsky, and K. J. Schwiebert.  $Ns-\omega$  model for fluid–fluid interaction problems at high reynolds numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 395:115052, **2022**.
- [7] M. Aggul and S. Kaya. Defect-deferred correction method based on a subgrid artificial viscosity model for fluid-fluid interaction. *Applied Numerical Mathematics*, 160:178–191, **2021**.
- [8] M. Aggul. A grad-div stabilized penalty projection algorithm for fluid-fluid interaction. *Applied Mathematics and Computation*, 414:126670, **2022**.
- [9] D.A. Randall, R.A. Wood, S. Bony, R. Colman, T. Fichefet, J. Fyfe, V. Kattsov, A. Pitman, J. Shukla, J. Srinivasan, R.J. Stouffer, A. Sumi, and K.E. Taylor. Climate models and their evaluation., **2007**.

- [10] P. A. Mooney, D. O. Gill, F. J. Mulligan, and C. L. Bruyère. Hurricane simulation using different representations of atmosphere-ocean interaction: the case of irene. *Atmospheric Science Letters*, 17:415–421, **2016**.
- [11] J. Nelson, R. He, J. C. Warner, and J. Bane. Air-sea interactions during strong winter extratropical storms. *Ocean Dynamics*, 64:1233–1246, **2014**.
- [12] F. Lemarié, P. Marchesiello, L. Debreu, and E. Blayo. Sensitivity of ocean-atmosphere coupled models to the coupling method: example of tropical cyclone erica. *Doctoral dissertation*, **2014**.
- [13] S. D. Nicholls and S. G. Decker. Impact of coupling an ocean model to wrf nor'easter simulations. *Monthly Weather Review*, 143.12:4997–5016, **2018**.
- [14] J.-W. Bao, J. M. Wilczak, J.-K. Choi, and L. H. Kantha. Numerical simulations of air-sea interaction under high wind conditions using a coupled model: A study of hurricane development. *Monthly Weather Review*, 128:2190–2210, **2000**.
- [15] F. O. Bryan, B. G. Kauffman, W. G. Large, and P. R. Gent. The near cesm flux coupler. *Tech. Report NCAR/TN-424+STR*, National Center for Atmosphere Research, **1996**.
- [16] F. Lemarié, E. Blayo, and L. Debreu. Analysis of ocean-atmosphere coupling algorithms: Consistency and stability. *Procedia Computer Science*, 51:2066–2075, **2015**.
- [17] N. Perlin, E. D. Skyllingstad, R. M. Samelson, and P. L. Barbour. Numerical simulation of air-sea coupling during coastal upwelling. *J. Phys. Oceanography*, 37:2081–2093, **2007**.
- [18] C. Bernardi, T. Chacon-Rebello, M. Gomez, and R. Lewandowski. A model of two coupled turbulent fluids, part ii: Numerical approximations by spectral discretization. *SIAM Jour. Num. Analysis*, 40:2368–2394, **2002**.

- [19] J. Connors. An ensemble-based conventional turbulence model for fluid-fluid interaction. *IJNAM*, 15:492–519, **2018**.
- [20] M. Aggul and A. Labovsky. Approximate deconvolution models for turbulent fluid-fluid interaction problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 117:113–126, **2022**.
- [21] W. Layton, C. Manica, M. Neda, and L. Rebholz. Numerical analysis and computational comparisons of the NS-alpha and NS-omega regularizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:916–931, **2010**.
- [22] W. Layton, I. Stanculescu, and C. Trenchea. Theory of the NS- $\omega$  model: a complement to the ns- $\alpha$  model. *Communications on pure and Applied Analysis*, 10(6):1763–1777, **2011**.
- [23] M. Aggul, J. Connors, D. Erkmén, and A. Labovsky. A defect-deferred correction method for fluid-fluid interaction. *SIAM J. Numer. Anal.*, 56:2484–2512, **2018**.
- [24] A. Labovsky. Approximate deconvolution with correction: A member of a new class of models for high Reynolds number flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(5):3068–3090, **2020**.
- [25] Y. Batugedara, A. Labovsky, and K. Schwiebert. Higher temporal accuracy for LES-C turbulence models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 377:113696, **2021**.
- [26] V. John. Finite element methods for incompressible flow problems. *Springer Series in Computational Mathematics*, 51, **2016**.
- [27] L.R. Scott S.C. Brenner. The mathematical theory of finite element methods. *Texts in Applied Mathematics*, vol. 15, Springer-Verlag, New York, **1994**.
- [28] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite-elements approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem part iv: Error analysis for second-order discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):353–384, **1990**.

- [29] M. Gunzburger and A. Labovsky. Effects of approximate deconvolution models on the solution of the stochastic navier-stokes equations. *Journal of Computational Mathematics*, 29:131–140, **2011**.
- [30] W. Bangerth, D. Davydov, T. Heister, L. Heltai, G. Kanschat, M. Kronbichler, M. Maiera, B. Turcksin, and D. Wells. The deal.ii library, version 8.4. *Journal of Numerical Mathematics*, 25:135–141, **2016**.
- [31] M. Aggul, S. Kaya, and A. Labovsky. Two approaches to creating a turbulence model with increased temporal accuracy. *Applied Mathematics and Computation*, 358:25–36, **2019**.
- [32] M. Aggul. Defect correcting extrapolation technique for oseen and navier–stokes flows. *Computers & Mathematics with Applications*, 80:1029–1049, **2020**.
- [33] M. Aggul, F. G. Eroglu, A. Labovsky, and S. Kaya. A projection based variational multiscale method for a fluid–fluid interaction problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 365:112957, **2020**.