HELSON-BEURLING TEOREMİ VE UYGULAMALARI

HELSON-BEURLING THEOREM AND ITS APPLICATIONS

GİZEM TAŞ

DOÇ. DR. UĞUR GÜL
Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2018

GİZEM TAŞ'ın hazırladığı "**Helson-Beurling Teoremi ve Uygulamaları**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
Başkan ....

Doç. Dr. Uğur GÜL
Danışman ....

Prof. Dr. Haşmet GÜRÇAY
Üye ....

Doç. Dr. Özgür MARTİN
Üye ....

Doç. Dr. Mehmet ÜNVER
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin / raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **" Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)

- o Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren .... Ay ertelenmiştir. (2)

- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

27/08/2018

(İmza)

Öğrencinin Adı SOYADI

GIZEM TAŞ PECORARO

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir

(2) Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. Şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü ve fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

(3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.
Madde 7. 2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

* Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yaralanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/09/2018

GİZEM TAŞ

ÖZET

HELSON-BEURLING TEOREMİ VE UYGULAMALARI

Gizem TAŞ
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Uğur GÜL
Eylül 2018, 62 sayfa

Bu tezde L^2 uzayının kaydırma operatörü altında değişmez kalan kapalı alt uzaylarını karakterize eden Helson-Beurling teoremini ele alıyoruz. Aynı zamanda Helson-Beurling teoreminin uygulamaları olarak D. Sarason'un yaptığı Volterra operatörünün değişmez alt uzaylarının karakterizasyonunu, A. Katavolos ve S. Power'ın yaptıklari $L^2(\mathbb{R})$'nin çarpım ve öteleme operatörleri altında değişmez kalan kapalı alt uzaylarının karakterizasyonunu ve yine A. Katavolos ve S. Power'ın yaptıkları $L^2(\mathbb{R})$'nin çarpım ve dilasyon operatörleri altında değişmez kalan kapalı alt uzaylarının karakterizasyonunu da ele alıyoruz.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayları, Kaydırma Operatörü, Tek yönlü kaydırma, Çift yönlü kaydırma, Değişmez alt uzaylar.

ABSTRACT

HELSON-BEURLING THEOREM AND ITS APPLICATIONS

Gizem TAŞ
Master's thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Uğur GÜL

September 2018, 62 pages

In thesis we treat the celebrated Helson-Beurling Theorem which characterizes the closed subspaces of L^2 which are invariant under the shift operator. We also treat the characterization of invariant subspaces of the Volterra operator as an application of Helson-Beurling Theorem due to D. Sarason, characterization of multiplication and translation invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R})$ as an application of Helson-Beurling theorem due to A. Katavolos and S. Power and characterization of multiplication and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R})$ as an application of Helson-Beurling theorem due to A. Katavolos and S. Power.

Key words: Hilbert Spaces, Shift operator, Unilateral shift, Bilateral shift, Invariant subspaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımda ve tezin oluşmasında beni destekleyen, teşvik eden, her türlü fikir ve eleştirilerini sunan değerli tez danışmanım Doç. Dr. Uğur GÜL'e teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmalarımda ve tez yazımında yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Araş. Gör. Dr. Umut Sayın ve Araş. Gör. Ismail Arslan'a yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Bu tezin amacı Hilbert uzaylarında operatör teorisinin en önemli konularından biri olan değişmez alt uzaylarla ilgili bir derleme yapmaktır. Bir Hilbert uzayı operatörü verildiğinde onun değişmez alt uzay latisini karakterize etmek önemli bir problemdir. Ancak bugüne kadar çok az sayıda operatörün değişmez alt uzay latisleri bilinmektedir. Bunların en önemlileri kaydırma (shift) ve Volterra operatörleridir. Bu tezde bu iki önemli operatörün de değişmez alt uzaylarının karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Kaydırma operatörünün değişmez alt uzaylarını karakterize eden Helson-Beurling Teoremi Operatör Teorinin en önemli sonuçlarından biridir. D. Sarason 1960'larda bu önemli sonucu kullanarak ve Paley-Wiener teoremi yardımıyla kaydırma operatörü ile Volterra operatörü arasında beklenmedik ve şık bir bağlantı kurdu ve bu sayede Volterra operatörünün değişmez alt uzaylarının çok şık bir karakterizasyonunu verdi (bakınız [13]). Katavolos ve Power, Helson-Beurling teoremini kullanarak 1997 yılında $L^2(\mathbb{R})$ üzerinde etki eden iki önemli operatör sınıfı olan çarpma ve öteleme operatörleri altında aynı anda değişmez kalan kapalı alt uzayları karakterize ettiler (bakınız [7]). Bu iki yazar aynı teknikleri kullanarak 2002 yılında $L^2(\mathbb{R})$'nin bu sefer hem çarpma hem de dilasyon (çarpmaya göre öteleme) operatörleri altında değişmez kalan kapalı alt uzayları karakterize ettiler (bakınız [8]). Bu tez bu sonuçların bir derlemesinden oluşmaktadır.

Tezin 1. kısmı bu "Giriş" kısmıdır. Tezin 2. kısmında gerekli olacak olan Fonksiyonel Analiz ve Kompleks Analiz ön bilgileri verilmiştir. Özellikle Hardy uzayları teorisine detaylı bir giriş yapılmıştır. Üst yarı düzlemin Hardy uzayı ve Paley-Wiener teoremi detaylı bir şekilde verilmiştir. Ayrıca üst yarı düzlem üzerindeki iç fonksiyonların (inner functions) karakterizasyonu detaylı bir şekilde verilmiştir. 2. kısımda [3],[4],[10],[5] ve [12] kaynaklarından önemli ölçüde faydalanılmıştır. 3. kısımda Helson-Beurling teoremi ve ispatı verilmiştir. Bu kısım [6]'ten alınmıştır. Ayrıca Helson-Beurling teoremi kullanılarak H^2 üzerinde etki eden kaydırma operatörünün eşleniği S^*'ın değişmez alt uzaylarının karakterizasyonuna yer verilmiştir. 4. kısımda D. Sarason'un Paley-Wiener teoremi ve Helson-Beurling teoremini kullanarak yaptığı Volterra operatörünün değişmez alt uzaylarının karakterizasyonu verilmiştir. Bu kısım [13]'den alınmıştır. 5. kısımda Katavolos ve Power'ın çarpma ve öteleme altında değişmez kalan kapalı alt uzayların karakterizasyonu verilmiştir. Bu kısım [7]'dan alınmıştır. Tezin 6. ve son kısmında yine bu iki yazarın bu sefer çarpma ve dilasyon altında değişmez kalan kapalı alt uzayların karakterizasyonu verilmiştir. Bu kısım [8]'den alınmıştır.

2 ÖNBİLGİLER

2.1 Fonksiyonel Analizin Temel Teoremleri

Bu bölümde ele alınan konular [12] kaynağında detaylı olarak mevcuttur. Aşağıda ele alınan bu konular esasen [12] kaynağından alınmıştır.

2.1.1 Zayıf, Zayıf* Topolojiler ve Alaoğlu-Bourbaki Teoremi

Bu tezdeki bütün vektör uzayları $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinden etki eder. Bir X vektör uzayı üzerinde

i-) $\|x\| \leq 0 \; \forall x \in X \quad , \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii-) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

iii-) $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\| \quad \forall x \in X \; , \quad \lambda \in \mathbb{C}$

koşullarını sağlayan $\|.\|$: $X \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu varsa X'e normlu uzay denir ve (i)-(iii) koşullarını sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm adı verilir. X ve Y normlu uzayları üzerinde;

i-) $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty \quad \forall \lambda \epsilon \mathbb{C}, \; x, y \in X$ (doğrusallık)

ii-) $\exists C > 0 \; \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$, $\forall x \in X$ (sınırlılık)

koşullarını sağlayan $T : X \to Y$ fonksiyonuna **sınırlı doğrusal operatör** denir. Bütün sınırlı doğrusal operatörler uzayı

$$B(X, Y) := \{T : T : X \to Y : T \text{ sınırlı doğrusal operatör}\}$$

$$\|T\| := \inf \{C > 0 : \|Tx\| \leq C \|x\| \, \forall x \in X\}$$

ile bir normlu uzaydır. X normlu uzayında;

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n, m > N \;\; \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ dizisine **Cauchy Dizisi** denir. Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu normlu uzaylara ise **Banach Uzayı** denir. Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır. $Y = \mathbb{C}$ özel durumunda $B(X, \mathbb{C}) = X'$ uzayına **X'in çifti**(dual) denir.

X bir normlu uzay olsun. $X' := \{\Phi : X \to \mathbb{C} : \Phi$ doğrusal ve sınırlı$\}$ uzay çifti üzerinde norm topolojisinden başka iki tane daha farklı topoloji dikkatimizi çeker. Bunlardan ilki $\Phi \in X'$ için

$$U_{\Phi,x_1,...,x_n,\epsilon} := \{\Psi \in X' : |\Psi(x_j) - \Phi(x_j)| < \epsilon, \forall j \epsilon \{1,...,n\}\} \subset X', x_1,...,x_n \in X$$

alt kümelerinin taban teşkil ettiği zayıf* topolojisi ve diğeri ise $\tau_1, ...\tau_n \epsilon (X')'$ için

$$V_{\Phi,\tau_1,...,\tau_n,\epsilon} := \{\Psi \in X' : |\tau_j(\Phi) - \tau_j(\Psi)| < \epsilon\} \subset X'$$

alt kümelerinin taban teşkil ettiği zayıf topolojidir. Zayıf topolojinin zayıf* topolojisinden daha ince olduğunu görmek zor değildir, zira

$$\imath : X \to X'', \imath(x) = \hat{x}, \hat{x}(\phi) = \phi(x)$$

kanonik gömmesi altında X, X'''ın bir alt kümesidir. τ^* X' üzerindeki zayıf* topolojisi olsun. Alaoğlu-Bourbaki teoremi aşağıdaki gibidir:

Teorem 1 (Alaoğlu-Bourbaki)**.** *X normlu bir uzay olsun. O halde*

$$\mathbb{B}_{X'} := \{\phi \in X' : \|\phi\| \leq 1\}$$

kapalı birim yuvarı τ^* tıkızdır.

Alaoğlu-Bourbaki teoremi topolojide Tikhonov teoremi olarak bilinen ve herhangi bir tıkız topolojik uzaylar ailesinin kartezyen çarpımının da çarpım topolojisine göre tıkız olduğunu söyleyen genel ve kullanışlı teoremin bir sonucudur. Zayıf* topolojisinin Hausdorff olduğunu görmek zor değildir, gerçekten $\phi, \psi \in X'$ ve $\phi \neq$ ise $\exists x \in X \ni \phi(x) \neq \psi(x)$, o halde $\epsilon = |\phi(x) - \psi(x)| > 0$ için $U_{\phi,x,\frac{\epsilon}{2}} \cap U_{\psi,x,\frac{\epsilon}{2}} = \varnothing$ olur.

Teorem 2 (Tikhonov)**.** *$K_{\imath \in I}$ tıkız topolojik uzaylar olsunlar, o halde $\prod_{\imath \in I} K_\imath$ kartezyen çarpımı çarpım topolojisine göre tıkızdır. Çarpım topolojisi,*

$$p_\imath : \prod_{\alpha \in I} K_\alpha \to K_\imath$$

projeksiyon fonksiyonlarını sürekli yapan en kaba topoloji olarak tanımlanır.

Alaoğlu Bourbaki Teoreminin aşağıdaki ispatı [2]'den alınmıştır.

İspat (Alaoğlu-Bourbaki)**.**

$$\mathbb{B}_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

X'in kapalı birim yuvarı ve $\forall x \in \mathbb{B}_X$ için

$$\mathbb{D}_x := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$\mathbb{C}$'deki kapalı disk olsun.

$$\mathbb{P} := \prod_{x\in\mathbb{B}_X} \mathbb{D}_x$$

kartezyen çarpımı çarpım topolojisi ile donatılmış olsun. Bu topoloji ile $\mathbb{P}$, Tikhonov teoremi gereği tıkız bir topolojik uzay olur.

$$\Gamma : \mathbb{B}_{X'} \to \mathbb{P}, \Gamma(\phi) = \prod_{x\in\mathbb{B}_X} \phi(x)$$

olsun. O halde Γ'nın birebir olduğu (ϕ'ların doğrusal olmasından) açıktır. $\{\phi_\imath\}_{\imath\in I} \subset \mathbb{B}_{X'}$ bir net olsun öyle ki $\phi_\imath \to \phi$ zayıf topolojisinde yakınsasın. O halde $\phi_\imath(x) \to \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{B}_X$ olur ki bu da $\Gamma(\phi_\imath) \to \Gamma(\phi)$, $\mathbb{P}$ de demektir. Yani Γ süreklidir. Ayrıca $\Gamma(\mathbb{B}_{X'}) \subset \mathbb{P}$ de kapalıdır:*

$$\{\Gamma(\phi_\imath)\}_{\imath\in I} \subset \Gamma(\mathbb{B}_{X'})$$

bir net olsun öyle ki $\Gamma(\phi_\imath) \to \psi \in \mathbb{P}$ olsun. $\Psi = \prod_{x\in\mathbb{B}_X} \psi(x)$ ve $\forall x \in \mathbb{B}_X$, $\phi_\imath(x) \to \psi(x)$ x,y ve $x + y \in \mathbb{B}_X$ ise $\phi_\imath(x + y) \to \psi(x + y)$, $\phi_\imath(x) \to \psi(x)$, $\phi_\imath(y) \to \psi(y)$ ve $\phi_\imath(x+y) = \phi_\imath(x)+\phi_\imath(y)$ olduğundan $\psi(x+y) = \psi(x)+\psi(y)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{B}_X$ ve $\lambda_x \in \mathbb{B}_X$ ise benzer şekilde $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$ olduğu görülür. O halde

$$\tilde{\psi} : X \to \mathbb{C}, \tilde{\psi}(x) := \|x\| \, \psi(\frac{x}{\|x\|})$$

şekilde tanımlanan bir fonksiyon için $\tilde{\psi} \in X'$ ve hatta $\tilde{\psi} \in \mathbb{B}_{X'}$ olur ve $\Gamma(\tilde{\psi}) = \psi$ sağlanır. Yani $\psi \in \Gamma(\mathbb{B}_{X'})$ olur. $\Gamma^{-1} : \Gamma(\mathbb{B}_{X'}) \to \mathbb{B}_{X'}$ da süreklidir. $\Gamma(\phi_\alpha) \to \Gamma(\phi)$ $\mathbb{P}$'de yakınsasın. O halde $\forall x \in \mathbb{B}_X$ için $\phi_\alpha(x) \to \phi(x)$ olur. Herhangi bir $x \in X$ için $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$ ve $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{B}_X$ olduğundan,

$$\phi_\alpha(x) = \|x\| \, \phi_\alpha(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\| \, \Gamma^{-1}(\Gamma(\phi_\alpha)(\alpha)) \to \|x\| \, \Gamma^{-1}(\Gamma(\phi)(x)) = \phi(x) \Rightarrow$$

$\phi_\alpha \to \phi$ $(\mathbb{B}_{X'}, \tau^*)$ de yakınsar. Yani Γ bir homeomorfizmadır. Buradan da $\Gamma(\mathbb{B}_{X'}) \subseteq \mathbb{P}$ kapalı olduğundan ve $\mathbb{P}$ tıkız Hausdorff olduğundan $\Gamma(\mathbb{B}_{X'})$ de tıkızdır. O halde $(\mathbb{B}_{X'}, \tau^*)$ da tıkızdır.

Bir X Banach uzayı ve $Y \subset X$ alt uzayı verilsin. Y'nin X'in normuna göre **kapanışı** X'in Y'yi içeren bütün kapalı altuzaylarının kesişimi olarak tanımlanır ve $\overline{Y}$ ile gösterilir.

2.1.2 Banach Uzaylarında Operatörler:Neumann serisi

Bu kısımdaki içerik [9]'den alınmıştır. Yukarıda tanımlanmış olan $B(X,Y)$ sınırlı doğrusal operatörler uzayı, $X = Y$ durumunda $B(X)$ şeklinde gösterilir. $S, T \in B(X)$ için $ST : X \to X$, $ST(x) = S(T(x))$ şeklinde tanımlanır ve bu operatöre S ve T operatörlerinin çarpımı denir. Ayrıca

$$\| ST \| \leq \| S \| \| T \|$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $T \in B(X)$ operatörünün kendisi ile n kere çarpımı T^n için $\| T^n \| \leq \| T \|^n$ eşitsizliği geçerlidir. Bir $T \in B(X)$ operatörü verildiğinde bir $S \in B(X)$ operatörü bulunabiliyorsa ki $ST = TS = I$ sağlanır, T operatörüne tersinir denir(Burada I birim operatörüdür($I(x) = x \quad \forall x \in X$)). Bu durumda S'ye T'nin tersi denir ve $S = T^{-1}$ ile gösterilir. Bir $T \in B(X)$ operatörü için

$$(I-T)(I+T+T^2+...+T^n) = (I+T+T^2+...+T^n)(I-T) = I-T^{n+1} \quad (1)$$

özdeşliğini görmek zor değildir. Bu özdeşlikten eğer $\| T \| < 1$ ise $I - T$'nin tersinir olduğunu söyleyen Neumann teoremi çıkarılabilir:

Neumann Teoremi. *X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ bir operatör olsun. Eğer $\| T \| < 1$ ise $I - T$ tersinirdir ve $I - T$'nin tersi $(I - T)^{-1}$*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad (2)$$

şeklinde bir seri toplamı olarak bulunur.

İspat. *Yukarıdaki (1) nolu özdeşlikten $S_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$ şeklinde tanımlandığında $(I - T)S_n = I - T^{n+1}$ elde edilir(Burada $T^0 = I$ kabul ediliyor). T operatörünün normu $\| T \| = \lambda < 1$ olsun. Eğer $n > m$ ise üçgen eşitsizliği kullanılarak*

$$\| S_n - S_m \| = \| \sum_{k=m+1}^{n} T^k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| T^k \|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \| T \|^k = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda^k \leq \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda}$$

elde edilir ki bu da $\| S_n - S_m \| \to 0$, $n, m \to \infty$ demektir. Yani $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X)$ bir Cauchy dizisidir ve $B(X)$ bir Banach uzayı olduğundan bir $S \in B(X)$ vardır ki $\lim S_n = S$ olur. Aynı zamanda (1) nolu özdeşlikten

$$\lim(I - T)S_n = \lim S_n(I - T) = (I - T)S = S(I - T) = I$$

elde edilir. Yani $S=(I-T)^{-1}$ *ve*

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k$$

dır.

Neumann Teoremindeki (2) nolu özdeşliğe "Neumann Serisi" denir.

2.1.3 Hilbert Uzayları

Bir H vektör uzayı üzerinde,

i-) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x\in H$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

ii-) $\langle \lambda x+y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \quad \forall x,y,z\in H$, $\lambda\in\mathbb{C}$

iii-) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall x,y\in H$

koşullarını sağlayan bir $\langle .,.\rangle : H\times H\to\mathbb{C}$ fonksiyonu varsa, bu şartları sağlayan $\langle .,.\rangle$ fonksiyonuna H **üzerinde bir iç çarpım** denir.

Lemma 3 (**Cauchy-Schwarz Eşitsizliği**). *H bir iç çarpım uzayı olsun. O halde*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle \quad \forall x,y\in H$$

sağlanır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin doğal bir sonucu olarak $\|x\| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonelin H üzerinde bir norm olduğunu gözlemleriz. Eğer bir iç çarpım uzayı H , $\|x\| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ normuna göre bir Banach uzayı oluyorsa, H'ye bir **Hilbert Uzayı** denir.

Hilbert uzaylarının en önemli özelliklerinden biri de kendine eşli (dual) olmasıdır yani eşli uzayının kendisi ile karakterize edilebilmesidir. Bu önemli özellik Riesz Gösterim Teoremi olarak ifade edilir:

Riesz Gösterim Teoremi. *H bir Hilbert uzayı ve* $\phi : H\to\mathbb{C}$ *sınırlı doğrusal bir fonksiyonel olsun. O halde;*

$$\phi(x)=\langle x,h\rangle \quad \forall x\in H$$

koşulunu sağlayan tek bir $h\in H$ *vardır.*

Riesz Gösterim Teoreminin ispatı için [12]'e bakılabilir. H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında tanımlı birebir, örten $U : H_1 \to H_2$ doğrusal operatörü

$$\langle Ux_1, Ux_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

koşulunu sağlıyorsa, H_1 ve H_2'ye **izometrik izomorf** denir.
İki Hilbert uzayının izometrik izomorf olmaları aynı iç çarpım yapısına sahip olmaları anlamına gelir.
H bir Hilbert uzayında $\{e_i\}_{i \in I} \subset H$ tanımlı alt kümesi

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & eğer\ i = j \\ 0, & eğer\ i \neq j \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa bu alt kümeye **ortogonal** denir.
H bir Hilbert uzayı olsun ve $\{e_i\}_{i \in I} \subset H$ ortogonal alt kümesi verilsin. $\forall i \in I$ için $\|e_i\| = 1$ oluyorsa bu alt kümeye **ortonormal** denir.
Bir $K = \{e_i\}_{i \in I} \subset H$ ortonormal alt kümesi için $J = \{f_i\}_{i \in I} \subset H$ ortonormal ve $J \supseteq K \Rightarrow J = K$ koşulu sağlanıyorsa $\{e_i\}_{i \in I}$'ye **maksimal ortonormal** denir. Maksimal ortonormal alt kümelere **ortonormal taban** da denir.
Bir Hilbert uzayı H'nin bir alt kümesi $M \subseteq H$ verildiğinde $M^{\perp} := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $M \subseteq H$ bir alt uzaysa $M^{\perp}$'e M'nin **ortogonal tümleyeni** denir. Her durumda M bir alt uzay olsun veya olmasın, $M^{\perp} \subseteq H$ her zaman kapalı bir alt uzay olur.
Ortonormal tabanları aşağıdaki özellik karakterize eder:

Bir $\{e_\iota\}_{\iota \in J} \subset H$ortonormal kümesi ortonormal tabandır $\Longleftrightarrow (\{e_\iota\}_{\iota \in J})^{\perp} = \{0\}$

Bir H Hilbert uzayının sayılabilir ortonormal tabanı varsa H'ye **ayrılabilir** denir. Bir Hilbert uzayının ortonormal tabanının kardinalitesi Hilbert uzayını karakterize eder. Daha matematiksel olarak ifade etmek gerekirse; H_1 ve H_2 izometrik izomorftur ancak ve ancak H_1'in herhangi bir ortonormal tabanının kardinalitesi ile H_2'nin herhangi bir ortonormal tabanının kardinalitesi aynı ise. Bu durumda bir H Hilbert uzayının ortonormal tabanının kardinalitesi sonlu ise H, $\mathbb{C}^n$ kartezyen uzayına izometrik izomorftur. Burada $n \in \mathbb{N}$ H'nin herhangi bir ortonormal tabanının kardinalitesidir. Eğer H'nin ortonormal tabanının kardinalitesi sonsuz ise aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4. *H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve sonsuz boyutlu ise (yani ortonormal tabanın kardinalitesi sonsuz ise) H $l^2(\mathbb{Z})$'ye izometrik izomorftur.*

$$l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(i)|^2 < +\infty \right\}$$

uzayındaki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i)\overline{g(i)}$$

şeklinde tanımlanır.

H bir Hilbert uzayı ve M, $N \subseteq H$ altuzaylar ise $M \ominus N := M \cap (N)^{\perp}$ şeklinde tanımlanır. Bir $T : H \to H$, Hilbert uzayı H'den kendisine doğrusal sınırlı bir operatör olsun. O halde

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

koşulunu sağlayan tek bir $T^* : H \to H$ sınırlı doğrusal operatörü vardır. Bunu sağlayan $T^* : H \to H$ sınırlı doğrusal operatörüne **T'nin eşleniği(adjoint)** denir. Eşlenik dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $(\lambda T + S)^* = \bar{\lambda} T^* + S^*$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall T, S \in B(H)$
- $(T^*)^* = T$ $\forall T \in B(H)$
- $(ST)^* = T^* S^*$ $\forall S, T \in B(H)$
- $\| T^* T \| = \| T \|^2$ $\forall T \in B(H)$

Burada;
$B(H) := \{T : H \to H : T$ sınırlı doğrusal bir operatördür$\}$ bütün sınırlı doğrusal operatörlerin kümesidir ve $\bar{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$'nin karmaşık eşleniğidir. Bir $T \in B(H)$ sınırlı doğrusal operatörü eğer $\| Tx \| = \| x \|$ $\forall x \in H$ sağlanıyorsa T'ye **izometri** denir. Hilbert uzayları teorisinde en bariz olgulardan biri aşağıdakidir:
$T \in B(H)$ bir izometridir $\Longleftrightarrow$ $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ $\forall x, y \in H$.
Bir $T \in B(H)$ operatörü $T^*T = TT^* = I$ koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **birimsel** (unitary) denir. Burada $Ix = x$ birim operatörüdür. Yukarıdaki olgunun bir sonucu olarak her birimsel operatörün bir izometri olduğunu görmek zor değildir.
Bir $P \in B(H)$ operatörü $P^* = P = P^2$ koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **izdüşüm** (projection) denir. Hilbert uzaylarındaki her izdüşüm operatörünün görüntüsü kapalıdır.

Yani $P \in B(H)$ bir izdüşüm ise $P(H) := \{Px : x \in H\} \subseteq H$'in kapalı bir alt uzayıdır. Bunun tersine verilen her kapalı $M \subseteq H$ alt uzayı için $P(H) = M$ şartını sağlayan tek bir $P \in B(H)$ izdüşümü vardır. Bu özellik Hilbert uzaylarını karakterize eder ve bu uzayları diğer Banach uzaylarından ayıran en önemli özelliktir. Bu sıraladığımız olgular detaylı bir şekilde [12]'de bulunabilir.

2.2 Ölçü Teorisi

Bu kısımda tezimiz için gerekli olduğu kadarıyla ölçü teorisinin temellerini ele alacağız. Bu kısımdaki içerik [5]'den alınmıştır.

Bir boş olmayan X kümesi verilsin. Bu X kümesinin bütün altkümelerinin ailesini $\mathcal{P}(X)$ ile gösterelim. Bu $\mathcal{P}(X)$ ailesine X'in **"kuvvet kümesi"** denir. Eğer $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ altkümeler ailesi (i). her $A \in \mathcal{M}$ için $(X \setminus A) \in \mathcal{M}$ ve (ii). her $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ için $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{M}$'ye X üzerinde bir **σ-cebri** denir. Bir X kümesi verilsin ve $\mathcal{M}$, X üzerinde bir σ-cebri olsun. Bir $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu (i). $\mu(\emptyset) = 0$ ve (ii). $\{A_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{M}$, öyle ki $j \neq k$ iken $A_j \cap A_k = \emptyset$ için $\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j)$ şartlarını sağlıyorsa μ'ye X üzerinde bir **ölçü** denir ve $(X, \mathcal{M}, \mu)$ üçlüsüne bir **ölçü uzayı** denir.

Bir X kümesi üzerinde verilen herhangi bir σ-cebirleri ailesinin kesişimi de bir σ-cebridir. Bir $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ altkümeler ailesinin türettiği σ-cebri $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ ile gösterilir ve $\mathcal{S}$'yi içeren bütün σ-cebirlerinin kesişimi olarak tanımlanır. Eğer özel olarak X ayrıca bir topolojik uzay ise ve $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ bu topolojik uzayın tabanı ise $\mathcal{B}(X) := \mathcal{M}(\tau)$'ya X üzerindeki **Borel σ-cebri** denir, yani topolojinin tabanı tarafından türetilen σ-cebrine Borel σ-cebri denir. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer $X = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ öyle ki her $j \in \mathbb{N}$ için $E_j \in \mathcal{M}$ ve $\mu(E_j) < \infty$ sağlanıyorsa μ ölçüsüne **σ-sonlu** denir. Bir $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu (i). $\nu(\emptyset) = 0$, (ii) ν $-\infty$ ve $+\infty$ değerlerinden sadece bir tanesini alabiliyor ve (iii).$\{A_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{M}$, öyle ki $j \neq k$ iken $A_j \cap A_k = \emptyset$ için $\nu(\cup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(A_j)$ şartını sağlıyor ise ν'ye X üzerinde bir **işaretli ölçü** denir. Boş olmayan bir X kümesi, $\mathcal{M}$ X üzerinde bir σ-cebri ve X üzerinde bir μ işaretli ölçüsü verilmiş olsun. Eğer bir $E \in \mathcal{M}$ kümesi $\forall F \in \mathcal{M}$ ve $F \subseteq E$ için $\mu(F) = 0$ şartını sağlıyorsa E kümesine μ için sıfır kümesi denir. Verilen iki işaretli ölçü μ ve ν için $X = E \cup F$, $E \in \mathcal{M}$, $F \in \mathcal{M}$, $E \cap F = \emptyset$ ve E μ için, F de ν için sıfır kümeleri olacak şekilde E ve F altkümeleri bulunabiliyorsa μ ve ν işaretli ölçülerine birbirlerine göre **tekil ölçüler** denir ve $\mu \perp \nu$ şeklinde gösterilir. Bir $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde bir ρ işaretli ölçüsü verilmiş olsun. Eğer her $E \in \mathcal{M}$ için $\mu(E) = 0 \Rightarrow \rho(E) = 0$ sağlanıyorsa ρ'ya μ'ye göre **mutlak sürekli** denir ve

$\mu \gg \rho$ şeklinde gösterilir. Mutlak sürekli ölçülerin güzel bir karakterizasyonu aşağıdaki "Radon-Nikodym Teoremidir":

Radon-Nikodym Teoremi. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *bir ölçü uzayı ve ρ bu ölçü uzayında bir işaretli ölçü olsun öyle ki μ ve ρ σ-sonlu olsunlar. O halde $\mu \gg \rho \Leftrightarrow$ Bir $f : X \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonu vardır ki $d\rho = f d\mu$ sağlanır.*

Radon Nikodym teoreminde geçen f fonksiyonuna ρ'nun μ'ye göre **Radon-Nikodym türevi** denir ve $f = \frac{d\rho}{d\mu}$ şeklinde gösterilir. Verilen bir işaretli ölçünün ölçü uzayındaki ölçüye göre dekompozisyonunu veren teorem aşağıdaki Lebesgue-Radon-Nikodym teoremidir:

Lebesgue-Radon-Nikodym Dekompozisyon Teoremi. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *bir ölçü uzayı ve ν bu ölçü uzayı üzerinde bir işaretli ölçü olsun öyle ki μ ve ν σ-sonlu olsunlar. O halde μ'ye göre* ***mutlak sürekli*** *olan tek bir σ-sonlu ρ işaretli ölçüsü ve μ'ye göre* ***tekil*** *olan tek bir σ-sonlu λ işaretli ölçüsü vardır öyle ki $\nu = \rho + \lambda$ sağlanır.*

Yukarıdaki gerekli bilgiler [5]'den alınmıştır. Merak eden okuyucu Lebesgue Radon Nikodym teoreminin ispatını [5]'de bulabilir.

2.2.1 L^p Uzayları Ve ilgili Eşitsizlikler

Bu kısımdaki içerik de [5]'den alınmıştır. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ iki ölçü uzayı olsunlar. Eğer bir $f : X \to Y$ fonksiyonu $U \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\} \in \mathcal{M}$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna **ölçülebilir** denir. Özel olarak bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ şartını sağlıyorsa f'ye **Borel ölçülebilir** denir. Burada $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$'nin Borel σ-cebridir. Bir $U \in \mathcal{M}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_U ile gösterilir ve

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer} \quad x \in U \\ \\ 0 & \text{eğer} \quad x \notin U \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu sonlu sayıda değer alıyorsa yani $f(X) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\} \subset \mathbb{R}$'nin sonlu bir alt kümesi ise sonlu tane $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ve sonlu tane $U_1, U_2, .., U_n \in \mathcal{M}$ vardır ki $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{U_k}$ şeklindedir. Bu durumda f'nin integrali $\int f$,

$$\int f := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(U_k)$$

şeklinde tanımlanır. Daha genel olarak bir $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu için eğer $\mu(\{x \in X : f(x) < 0\}) = 0$ ise yani f hemen hemen her yerde pozitif ise ve

$$\sup(\{\int g : g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{U_k}, U_k \in \mathcal{M}, g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X\} < +\infty$$

sağlanıyorsa f'ye **integrallenebilir** denir. Bu durumda f'nin integrali $\int f$,

$$\int f := \sup(\{\int g : g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{U_k}, U_k \in \mathcal{M}, g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımı pozitif olamayan gerçel değerli fonksiyonlara genişletmek mümkündür: Bir $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu için $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ve $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ şeklinde tanımlansınlar. O halde hem f^+ hem de f^- pozitif ve ölçülebilirdirler. O halde $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu için f^+ ve f^- fonksiyonlarının ikisi birden integrallenebilir ise f'ye integrallenebilir denir ve $\int f$,

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

şeklinde tanımlanır. Bir $f : X \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $U \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ şartını sağlıyorsa f'ye Borel ölçülebilir denir. Bir $0 < p < +\infty$ gerçel sayısı için $L^p(X, \mu)$ uzayı

$$L^p(X, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \quad \text{Borel ölçülebilirdir ve} \quad | f |^p \quad \text{integrallenebilirdir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

$L^p(X, \mu)$ kümesinin noktasal toplama işlemi altında kapalı kaldığını gösteren teorem Minkowski eşitsizliği olarak bilinir:

Minkowski Eşitsizliği. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *bir ölçü uzayı ve* $f, g \in L^p(X, \mu)$ *olsun. O halde* $f + g \in L^p(X, \mu)$ *dür ve*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\| f \|_p = (\int_X | f(x) |^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Minkowski eşitsizliğinin bir sonucu olarak $L^p(X,\mu)$'nün noktasal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $\mathbb{C}$ üzerinden bir vektör uzayı olduğunu söyleyebiliriz. Hatta Minkowski eşitsizliğinde geçen $\| f \|_p := (\int_X | f(x) |^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$, $L^p(X,\mu)$ uzayı üzerinde bir normdur ve $L^p(X,\mu)$ bu norm ile bir Banach uzayıdır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, $L^p(X,\mu)$ uzayında iki fonksiyonun eşit olması hemen hemen her yerde eşit olmaları şeklinde tanımlanır, yani $f = g$ $\Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ dır. Bir $p = 2$ özel durumunda $L^2(X,\mu)$, $\langle f, g \rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$ iççarpımına göre bir Hilbert uzayıdır. L^p uzayları ile ilgili bir diğer önemli eşitsizlik Hölder eşitsizliğidir:

Hölder Eşitsizliği. *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $p, q \in (1, +\infty)$ olsun öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde $f \in L^p(X,\mu)$, $g \in L^q(X,\mu)$ ise $fg \in L^1(X,\mu)$ dür ve*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

eşitsizliği geçerlidir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak $1 < p < +\infty$ için $(L^p(X,\mu))' \cong L^q(X,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sonucu çıkar yani L^p'nin çifti(duali) ile L^q birbirlerine izometrik izomorfturlar. Bu izometrik izomorfizma şu şekilde gerçekleşir: Verilen $g \in L^q(X,\mu)$ için $L_g : L^p(X,\mu) \to \mathbb{C}$, $L_g(f) := \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$ olsun. O halde her $L \in (L^p(X,\mu))'$ için tek bir $g \in L^q(X,\mu)$ vardır ki $L = L_g$ olur. Bu kısımdaki teoremlerin ispatı ve daha geniş bilgi için [5]'ye bakılabilir.

2.3 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi

Bu bölümün amacı tezde inceleyeceğimiz analitik fonksiyon uzayları için temel altyapı oluşturmaktadır. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi için önerilen kaynak [1]'dir. Bu kısımdaki içerik esas olarak [1]'den alınmıştır. Kompleks Fonksiyonlar Teorisinin en önemli sonucu kuşkusuz ki Cauchy İntegral Formülüdür. Bu tezde genel olarak birim disk

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

üzerindeki analitik fonksiyonlarla ilgileneceğiz. Bir $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{D}$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

limiti varsa f fonksiyonuna **analitik** denir. Bir

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{D}, t \in [0,1], \alpha(0) = \alpha(1)$$

kapalı eğrisi boyunca $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için α üzerindeki çizgi integrali

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{0}^{1} f(\alpha(t)).\alpha'(t).dt$$

şeklinde tanımlanır.

Cauchy İntegral Formülü: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. O halde $\forall z \in \mathbb{D}$ $1 > r > |z|$ ve $0 \leq t \leq 1$ için

$$2\pi i.f(z) = \int_{\alpha_r} \frac{f(w)dw}{w - z}, \alpha_r(t) := re^{i2\pi t}$$

integral formülü geçerlidir.

Cauchy İntegral formülünün bir sonucu da Ortalama Değer Teoremidir:

Teorem 5. ***Ortalama Değer Teoremi*** *$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. O halde $\forall r \in (0, 1)$ ve*

$$B(z, r) := \{w \in \mathbb{D} : |z - w| < r\} \subset \mathbb{D}$$

için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta \tag{1.1}$$

integral formülü yazılabilir.

Ortalama değer teoreminin bir sonucu olarak Poisson İntegral Formülü türetilebilir. Bunun için verilen $z_0 \in \mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$'yi 0'a ve kendisine bire bir örten bir şekilde götüren

$$\varphi_r : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_r \ , \quad \varphi_r(z) = \frac{r^2(z - z_0)}{r^2 - \bar{z}_0 z}$$

fonksiyonlarına ihtiyacımız olacaktır. Bu fonksiyonun tersi

$$\psi_r(z) = \varphi^{-1}(z) = \frac{r^2(z + z_0)}{r^2 + \bar{z}_0 z}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\psi_r(\mathbb{T}_r) = \varphi_r(\mathbb{T}_r) = \mathbb{T}_r \quad , \quad \mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{D} : |z| = r\}$$

olduğu rahatça gözlemlenebilir.

Teorem 6 (Poisson İntegral Formülü). *$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun ve $z_0 \in \mathbb{D}_r$ olsun. $(r < 1)$ O halde*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})P_{z_0}(e^{i\theta})d\theta \quad , \quad P_{z_0}(e^{i\theta}) := \frac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{i\theta} - z_0|^2}$$

formülü geçerlidir.

İspat. *$g(z) := (f \circ \psi_r)(z)$ olsun. Buradan $g(0) = f(\psi_r(0)) = f(z_0)$ olduğu açıktır. g , $\overline{\mathbb{D}_r}$ üzerine sürekli ve $\mathbb{D}_r$ üzerinde analitiktir. O halde Ortalama Değer Teoremi gereğince;*

$$g(0) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(\psi_r(re^{i\varphi}))d\varphi$$

$\mid \psi_r(re^{i\varphi}) \mid = r$ *olduğundan* $\psi_r(re^{i\varphi}) = re^{i\theta}$ *olur. Yani* $re^{i\theta} = \dfrac{r^2(re^{i\varphi} + z_0)}{r^2 + \bar{z}_0 re^{i\varphi}}$ *olur ki burada her iki tarafın θ'ya göre türevi alınırsa*

$$ire^{i\theta}d\theta = \frac{ie^{i\varphi}r(r^2 + |z_0|^2)}{(r + \bar{z}_0 e^{i\varphi})^2}d\varphi \Longrightarrow$$

$$\frac{r(re^{i\varphi} + z_0)}{r^2 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}d\theta = \frac{re^{i\varphi}(r^2 + |z_0|^2)}{(r + \bar{z}_0 e^{i\varphi})^2}d\varphi \Longrightarrow$$

$$(re^{i\varphi} + z_0)d\theta = \frac{re^{i\theta}(r^2 - |z_0|^2)}{r^2 - \bar{z}_0 re^{i\theta}}d\theta = \frac{e^{i\varphi}(r^2 + |z_0|^2)}{(r + \bar{z}_0 e^{i\varphi})}d\varphi$$

$$re^{i\varphi} = \varphi_r(re^{i\theta}) = \frac{r^2(re^{i\theta} - z_0)}{r^2 - \bar{z}_0 re^{i\theta}} \Longrightarrow$$

$e^{i\varphi} = \dfrac{r(re^{i\theta} - z_0)}{r - \bar{z}_0 re^{i\theta}}$ *yukarıdaki denklemde yerine koyulursa;* $d\varphi = \dfrac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{i\theta} - z_0|^2}d\theta$ *eşitliği elde edilir. Buradan ise;*

$$g(0) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(\psi_r(re^{i\varphi}))d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\frac{d\varphi}{d\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})(r^2 - |z_0|^2)}{|re^{i\theta} - z_0|^2}d\theta$$

elde edilir.

2.3.1 Hardy Uzaylarına Giriş

Hardy uzayları ile ilgili en önemli kaynaklar [3],[4] ve [7]'dir. Bu bölümdeki içerik bu kaynaklardan alınmıştır.

Temel Tanımlar ve Özellikler

Tanım 7. *Bir* $1 \leq p \leq +\infty$ *için* $H^p(\mathbb{D})$ *Hardy uzayı*

$$H^p(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ analitik ve } \sup_{1>r>0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde Hardy uzayı $H^p(\mathbb{D})$'nin $L^p(\mathbb{T})$ uzayına ($1 < p < +\infty$) gömülebileceğini göreceğiz. Burada $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= 1\}$ birim çember ve

$$L^p(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : f \quad \text{ölçülebilirdir ve} \quad \int_0^{2\pi} \mid f(e^{i\theta}) \mid^p d\theta < +\infty\}$$

çemberin L^p uzayıdır. $L^p(\mathbb{T})$ $p \geq 1$ için

$$\| f \|_p := (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \right|^p d\theta)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla bir Banach uzayıdır. Ayrıca $H^p(\mathbb{D})$ uzayı da

$$\| f \|_{H^p} = \sup_{1>r>0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Hardy uzayı $H^p(\mathbb{D})$'nin $L^p(\mathbb{T})$'ye gömülmesinden her $f \in H^p(\mathbb{D})$ için $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ limitinin hemen hemen her $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ noktasında varolmasını ve $\| f \|_{H^p} = \| f^* \|_p$ sağlanmasını anlayacağız. Burada ilk olarak göreceğimiz $H^p(\mathbb{D})$ uzayı $\| f \|_{H^p}$ normu ile bir Banach uzayıdır:

Teorem 8. $H^p(\mathbb{D})$ *uzayı* $1 \leq p \leq +\infty$ *için*

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{1>r>0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. *Öncelikli olarak $H^p(\mathbb{D})$ 'nin $\|.\|_{H^p}$ normu ile normlu bir uzay olduğunu gösterelim:*

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f \in H^p(\mathbb{D})$ olsun. Burada

$$\|\lambda f\|_{H^p} = |\lambda| \, \|f\|_{H^p}$$

sağlanır. Şimdi ise $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ olsun. Öncelikli olarak $f+g \in H^p$ olduğunu görelim: Her $0 < r < 1$ için Minkowski eşitsizliğinden

$$(\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}}+(\int_0^{2\pi} \mid g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \| f \|_{H^p} + \| g \|_{H^p}$$

olduğu görülür. Burada r üzerinden "supremum" alınarak $\| f+g \|_{H^p} < +\infty$ olduğu görülebilir, yani $f+g \in H^p(\mathbb{D})$ dir. O halde $\forall \epsilon > 0$ için $\exists r \in (0,1)$ öyle ki

$$(\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})\right|^p d\theta)^{\frac{1}{p}} \geq \| f+g \|_{H^p} - \epsilon$$

sağlanır. Minkowski eşitsizliği gereği

$$(\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}}+(\int_0^{2\pi} \mid g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan bu iki eşitsizlik birleştirilerek

$$\| f \|_{H^p} + \| g \|_{H^p} \geq (\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}} + (\int_0^{2\pi} \mid g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq (\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta)^{\frac{1}{p}} \geq \| f+g \|_{H^p} - \epsilon$$

elde edilir. Burada $\epsilon \to 0$ alınarak

$$\| f \|_{H^p} + \| g \|_{H^p} \geq \| f+g \|_{H^p}$$

bulunur ki bu da $\| f \|_{H^p}$ 'nin $H^p(\mathbb{D})$ üzerinde bir norm olduğunu gösterir. Şimdi ise göstermemiz gereken, $H^p(\mathbb{D})$ uzayının tam uzay olduğudur. Yani $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^p(\mathbb{D})$ Cauchy dizisinin yani

$$\int_0^{2\pi} \left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta) \longrightarrow 0 \quad , \quad \forall r \in (0,1) \quad , \quad n, m \longrightarrow +\infty$$

şartını sağlayan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^p(\mathbb{D})$ *dizisinin* $H^p(\mathbb{D})$*'de yakınsadığını göstermeliyiz.* K, $\mathbb{D}$*'nin tıkız bir alt kümesi olsun,* $\exists r \in (0,1)$ *için*

$$K \subset \mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| < r\}$$

olur. Cauchy İntegral Formülünden, $\forall z \in K$ *için*

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f_n(\xi) - f_m(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta} - z}$$

olur. O halde

$$|f_n(z) - f_m(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta} - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left| f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) \right| r d\theta}{|re^{i\theta} - z|}$$

sağlanır. Hölder eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) \right| \frac{1}{|re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} \left| f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

ki burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad , \quad p > 1$ *dir.*

$c = \inf \left\{ \left| re^{i\theta} - z \right| : z \in K \right\} \neq 0$ *olsun. O halde*

$$\frac{1}{|re^{i\theta} - z|} \leq \frac{1}{c^q}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{c} \left(\int_0^{2\pi} \left| f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) d\theta \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{c} \|f_n - f_m\|_p$$

olur. $p = 1$ *alınırsa;*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(z) - f_m(z)| \frac{1}{|re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \frac{1}{c} \left(\int_0^{2\pi} \left| f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) d\theta \right| \right) \Longrightarrow$$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{c} \|f_n - f_m\|$$

olur. $z \in K$ *keyfi olduğundan*

$$\sup \{ |f_n(z) - f_m(z)| : z \in K \} \longrightarrow 0 \quad , \quad n, m \longrightarrow +\infty$$

yazılır. Böylelikle $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^p(\mathbb{D})$ *dizisi,* $\mathbb{D}$*'nin her tıkız alt kümesi üzerinde düzgün yakınsak olur. Bu* $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ *fonksiyonunun Weierstrass teoremi gereğince keyfi bir* $z \in \mathbb{D}$ *için analitik olduğu anlamına gelir. Son olarak* $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$ *olduğunu gösterirsek ispatı bitirmiş oluruz. Bu ise* $f \in H^p(\mathbb{D})$ *demektir. Verilen* $\epsilon > 0$ *için* $\exists n \in \mathbb{N}$ *öyleki*

$$\forall n, m > k,\ \forall r \in (0,1)\ ,\ (\int\limits_0^{2\pi} \left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

olur. Tıkız alt küme üzerinde $f_n \to f$ *yakınsaması düzgün olduğundan,*

$$\lim_{n\to\infty} (\int\limits_0^{2\pi} \left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta)^{\frac{1}{p}} = (\int\limits_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \Longrightarrow$$

$$\|f - f_m\|_p < \epsilon \ \ \forall m > k \Longrightarrow$$
$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$$

elde edilir.

Poisson İntegral formülünü $f \in H^p(\mathbb{D})$ $(p > 1)$ fonksiyonuna uygularsak $0 < r < 1$ ve $z \in \mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{D} :| z |< r\}$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})(r^2 - | z |^2)}{| re^{i\theta} - z |^2} d\theta$$

elde ederiz. Şimdi $f \in H^p(\mathbb{D})$, $1 > \rho > 0$ ve $f_\rho(z) := f(\rho z)$ olsun, o halde $f_\rho : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli ve $f_\rho : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir. Bu durumda yukarıdaki Poisson integral formülünde $r = 1$ alınarak herhangi bir $z \in \mathbb{D}$ için

$$f_\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_\rho(e^{i\theta})(1 - | z |^2)}{| e^{i\theta} - z |^2} d\theta = f_\rho(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_\rho(e^{i\theta})(1 - r^2)}{| e^{i\theta} - re^{it} |^2} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_\rho(e^{i\theta})(1 - r^2)}{| r - e^{-i(t-\theta)} |^2} d\theta = (f_\rho * P_r)(e^{it})$$

olur. Burada

$$P_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{| e^{-i\theta} - r |^2}$$

eşitliği ile tanmldr. Ayrıca $(f * g)(e^{it})$ konvolüsyon çarpımıdır ve genel olarak $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ için

$$(f * g)(e^{it}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i(t-\theta)}) g(e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i(t-\theta)}) d\theta$$

şeklinde ifade edilir. Poisson İntegral formülünü kullanmamızın nedeni ise aşağıdaki lemma ile formalize ettiğimiz P_r'nin yaklaşım çekirdeği olma özelliğidir:

Lemma 9. $1 \leq p < +\infty$ *ve* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *olsun. O halde*

$$\lim_{r\to 1^-} \| (P_r * f) - f \|_p = 0$$

limiti vardır.

Bu lemmanın ispatı için [4]'e bakılabilir. Burada $1 < p < \infty$ için $(L^p(\mathbb{T}))' = L^q(\mathbb{T})$ $(p^{-1}+q^{-1} = 1)$ olduğu gözönüne alınırsa $f \in L^q(\mathbb{T})$'yi $L_f \in (L^p(\mathbb{T}))'$, $L_f(g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})}d\theta$'ya eşleyen eşleme birebir örtendir. Bu olguyu yukarıdaki lemma ile birlikte kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 10. $1 < p < +\infty$ *ve* $f \in H^p(\mathbb{D})$ *olsun. O halde bir* $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ *için*

$$\lim_{r\to 1^-} \| f_r - f^* \|_p = 0$$

limiti vardr. Burada $f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta})$ *ile tanımlıdır.*

İspat. *Poisson integral formülü gereği*

$$f_\rho(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f_\rho(e^{it})}{| e^{i(\theta-t)} - r |^2}dt = (P_r * f_\rho)(e^{i\theta})$$

yazılabilir. Burada $\rho < 1$, $f_\rho \in L^p(\mathbb{T})$ *ve* $f \in H^p(\mathbb{D})$ *olduğundan* $\{f_\rho\}_{\rho<1} \in L^p(\mathbb{T})$*'de düzgün sınırlıdır, yani* $\| f_\rho \|_p \leq \| f \|_{H^p(\mathbb{D})}$ $\forall\rho < 1$ *sağlanr. Ayrıca* $p > 1$ *olduğundan* $L^p(\mathbb{T}) \cong (L^q(\mathbb{T}))'$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *sağlanr. Buradan da Alaoğlu-Bourbaki teoremi gereğince* $\{f_\rho\}_{\rho<1} \subset L^p(\mathbb{T}) \cong (L^q(\mathbb{T}))'$*'de zayıf∗ öntıkızdır (yani zayıf∗ topolojisindeki kapanışı tıkızdır). Bu ise bir* $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ *ve* $\{f_{\rho_j}\} \subseteq \{f_\rho\}$ *alt neti için*

$$L_{f_{\rho_j}}(g) \to L_{f^*}(g) \quad \forall g \in L^q(\mathbb{T}), \quad \rho_j \to 1^-$$

anlamına gelir. Burada

$$L_f(g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}g(e^{i\theta})d\theta$$

olur. Şimdi $g(e^{it}) := P_r(e^{i(\theta-t)})$ *alınırsa* $g \in L^q(\mathbb{T})$ *olacağından*

$$\overline{L_{f_\rho}(g)} = (P_r * f_\rho)(e^{i\theta}) = f_\rho(re^{i\theta}) \to \overline{L_{f^*}(g)} = (P_r * f^*)(e^{i\theta}) \quad \rho \to 1^-$$

elde edilir. Aynı zamanda f*,* $\overline{\mathbb{D}_r}$ *üzerinde sürekli olduğundan,* $\lim_{\rho\to1^-} f_\rho(re^{i\theta}) = \lim_{\rho\to1^-} f(\rho re^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$*'ya eşit olur ve bu da* $f(re^{i\theta}) = (P_r * f^*)(e^{i\theta})$ *demektir. Bütün bunları yukarıdaki lemma ile birleştirirsek;*

$$\lim_{r\to1^-} \| f_r - f^* \|_p = \lim_{r\to1^-} \| P_r * f^* - f^* \|_p = 0$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki Teorem 10'da bulduğumuz f^* fonksiyonu $f \in H^p(\mathbb{D})$'nin sınır değer fonksiyonu olmaya adaydır ancak hala şu soruyu sorabiliriz:

$$\| f^* \|_p = \| f \|_{H^p} \quad \text{midir?}$$

Bu sorunun cevabının "evet" olduğunu yukarıdaki Teorem 10'dan ve G. H. Hardy'nin eski bir teoreminden çıkarabiliriz:

Hardy Dışbükeylik Teoremi. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *fonksiyonu analitik olsun ve* $0 < p < \infty$ *olsun. O halde*

$$g(r) = M_p(r, f) := \left(\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu r*'ye göre artandır yani her* $r_1 \geq r_2$ *için* $g(r_1) \geq g(r_2)$ *sağlanır. Ayrıca* $\ln(M_p(r, f))$*,* $\ln r$*'ye göre dışbükeydir yani* $\ln r = \lambda \ln r_1 + (1-\lambda) \ln r_2$*,* $0 < \lambda < 1$ *ve* $r_1, r_2 \in (0, 1)$ *ise* $\ln(M_p(r, f)) \leq \lambda \ln(M_p(r_1, f)) + (1 - \lambda) \ln(M_p(r_2, f))$ *eşitsizliği sağlanır.*

Hardy'nin bu teoremi ve detaylı ispatı [3]'te bulunabilir. O halde Hardy'nin teoremi gereği $\lim_{r\to1^-} \| f_r \|_p = \| f \|_{H^p}$ olmalıdır. Yukarıdaki Teorem 10 gereği $\lim_{r\to1^-} \| f_r - f^* \|_p = 0$ olduğundan $\lim_{r\to1^-} \| f_r \|_p = \| f^* \|_p$ olmalıdır. Sonuç olarak $\| f \|_{H^p} = \| f^* \|_p$ olduğu görülür. Fakat Hardy uzaylarının klasik teorisinde, $\{f_r\} \subset L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonuna daha kuvvetli bir şekilde yani noktasal yakınsadığı gösteririlir:
Yani hemen hemen her $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ için $\lim_{r\to1^-} f_r(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ limiti vardır. Hatta bu yakınsama sadece $\{re^{i\theta}\}_{0<r<1} \subset \mathbb{D}$ yarıçap doğrusu boyunca değil daha geniş bölgelerde de geçerlidir.
Bir $\alpha > 1$ ve $e^{it} \in \mathbb{T}$ için $\Gamma_\alpha(e^{it}) := \{z \in \mathbb{D} : | z - e^{it} | < \alpha(1 - z |)\}$ olsun. Bu $\Gamma_\alpha(e^{it})$'ye $e^{it} \in \mathbb{T}$'nin **teğetsel olmayan yaklaşım bölgesi** (nontangential approach region) denir. Burada $re^{it} \in \Gamma_\alpha(e^{it})$ $\forall r \in (0, 1)$ olduğu açıktır.
P. Fatou'nun aşağıdaki teoremi Hardy uzayları teorisinin bilinen önemli teoremlerinden biridir:

Fatou Teoremi. *$1 \leq p < +\infty$ ve $f \in H^p(\mathbb{D})$ olsun. O halde bir $\alpha > 1$ için*

$$F(e^{i\theta}) := \lim_{z \to e^{i\theta}, z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} f(z)$$

limiti hemen hemen her $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ için vardır, $F \in L^p(\mathbb{T})$'dir ve $\lim_{r \to 1^-} \| f_r - F \|_p = 0$'dır.

Fatou'nun bu güzel teoreminin ispatı için [4]'e bakılabilir. O halde $H^p(\mathbb{D})$'yi $L^p(\mathbb{T})$'nin içine gömülmüş bir şekilde düşünebiliriz. Yani esasen $H^p(\mathbb{D})$, $L^p(\mathbb{T})$'nin kapalı bir alt uzayıdır ve $f \to f^*$, $H^p(\mathbb{D})$'den $L^p(\mathbb{T})$'ye izometrik bir gömmedir. Bu durumda,
"bir $f \in L^p(\mathbb{T})$ için ne zaman f aynı zamanda $H^p(\mathbb{D})$'nin içindedir?" sorusunun cevabını F. Riesz'in çok ünlü bir teoremi ile verebiliriz:

Riesz Teoremi. *$1 \leq p < +\infty$ ve $f \in L^p(\mathbb{T})$ olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

- *$f \in H^p(\mathbb{D})$ yani bir $F \in H^p(\mathbb{D})$ vardır öyle ki $\lim_{r \to 1^-} \| F_r - f \|_p = 0$ gerçeklenir.*
- $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 \ \forall n < 0, \ n \in \mathbb{Z}$

Riesz teoreminin ispatı için [3]'ye bakılabilir. Riesz teoreminde geçen $\hat{f}(n)$, f'nin n. Fourier katsayısıdır. Özet olarak Riesz'in teoremi H^p fonksiyonlarını negatif Fourier katsayıları sıfır olan L^p fonksiyonları olarak karakterize eder. Esas olarak bunlar $z = e^{i\theta}$ değişkeni ile düşündüğümüzde analitik polinomların L^p'de kapanışındaki fonksiyonlardır. O halde

$$H^p(\mathbb{T}) := \overline{\{p(z) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j z^j : \lambda_j \in \mathbb{C}\}} \subset L^p(\mathbb{T})$$

şeklinde tanımlarsak ki buradaki kapanış $\| \ . \ \|_p$ normuna göredir(yani $A \subset L^p(\mathbb{T})$ için $\overline{A}$, A'nın $L^p(\mathbb{T})$'deki kapanışıdır), $f \to f^*$ gömmesi $H^p(\mathbb{D})$'den $H^p(\mathbb{T})$'ye bir izometrik izomorfizma olur.

2.3.2 İç-Dış Faktörizasyon

Bu bölümdeki içerik de [3], [4] ve [10] kaynaklarından alınmıştır. Aşağıdaki Poisson Jensen formülü ve ispatı ise [1]'den alınmıştır:

Poisson Jensen Formülü. *$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu $\rho < 1$ için,*

$$Z(f) \cap \mathbb{D}_\rho = \{z_0, z_1, ..., z_n\}$$

ve

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{D}_\rho = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \rho\}$$

olsun. O zaman,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\rho e^{i\theta})\right| d\theta = \log|f(0)| + \sum_{k=0}^{n} \log\frac{\rho}{|z_k|}$$

formülü sağlanır.

İspat. *Eğer bir $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu için*

$$\forall z \in \mathbb{D}, F(z) \neq 0$$

oluyorsa $\log|F(z)|$ *fonksiyonu harmoniktir ve*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(\rho e^{i\theta})\right| d\theta = \log|F(0)|$$

geçerlidir. Eğer $\{z_0, z_1, ..., z_n\}$ f'nin $|z_k| < \rho$ olacak şekilde tekrarlı sıfırları ise

$$F(z) = f(z).\prod_{k=0}^{n}\frac{\rho^2 - \overline{z_k}.z}{\rho(z - z_k)}$$

fonksiyonunun $|z| < \rho$ için sıfırı yoktur. Aynı zamanda

$$\left|F(\rho e^{i\theta})\right| = \left|f(\rho e^{i\theta})\right|.\prod_{k=0}^{n}\frac{|\ \rho - \overline{z_k}.e^{i\theta}\ |}{|\ \rho.e^{i\theta} - z_k\ |} = \left|f(\rho.e^{i\theta})\right|$$

olur. O halde,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(\rho e^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\rho e^{i\theta})\right| d\theta = \log|F(0)| = \log\left|f(0)\prod_{k=0}^{n}\frac{\rho^2}{\rho.(-z_k)}\right| =$$

$$= \log|f(0)| + \sum_{k=0}^{n}\log\left|\frac{\rho}{z_k}\right| = \log|f(0)| + \sum_{k=0}^{n}\log(\frac{\rho}{|z_k|})$$

(Bu da istenendir.)
Bu ise teoremin ispatını bitirir.

$$\mathcal{N} = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \ f \text{ analitik ve } \sup_{0<r<1} \int \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta < +\infty \right\}$$

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x \ , \text{ eğer } x \geq 1 \\ 0 \ , \text{ eğer } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonların sınıfına *Nevanlinna Sınıfı* denir. Logaritma fonksiyonu *içbükey* olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p. \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \log^+ (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan da $H^p \subset \mathcal{N}$, yani $\forall \ 0 < p < +\infty$ için her Hardy uzayı $H^p(\mathbb{D})$, $\mathcal{N}$'nin içindedir.

Teorem 11. *$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $f \neq 0$ ve $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ f'nin sıfır kümesi olsun. O halde*

$$\sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \right\} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1 - |z_k| < +\infty$$

dir.

İspat. *Poisson-Jensen Formülü gereği $\forall r \in (0,1)$ için,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_k|} = -\sum_{k=1}^{\infty} \log |z_k| < +\infty$$

Ayrıca

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\log x}{1-x} = -1$$

olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log |z_k| < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty$$

olur. (limit karşılaştırma testi) O halde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty$$

Bu durumda eğer $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, $f \in H^p(\mathbb{D})$'nin $(0 < p < +\infty)$ sıfır kümesi ise

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty$$

olmalıdır. Sonsuz çarpımlar için, "$\prod_{k=1}^{\infty}(p_k(z))$ sonsuz çarpımının tıkız kümelerde düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_k(z))$ serisinin tıkız kümelerde düzgün yakınsak olmasıdır." ifadesini hatırlayalım.
Bu gözlem bize *Blaschke Teoremi*ni verir:

Teorem 12 (Blaschke Teoremi). *$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ için $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty$ sağlansın. O halde*

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k|}{z_k}.\frac{z_k - z}{1-\overline{z}_k z}$$

sonsuz çarpımı $\mathbb{D}$'nin tıkız kümelerinde düzgün yakınsar.

İspat. $0 < R < 1$ *olsun. O halde* $|z| < R$ *için*

$$\left|1-\frac{|z_k|}{z_k}.\frac{z_k - z}{1-\overline{z}_k z}\right| = \left|\frac{(z_k + |z_k|\, z)(1-|z_k|)}{z_k(1-\overline{z}_k z)}\right| \leq \frac{2(1-|z_k|)}{1-R}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-(\frac{|z_k|}{z_k}.\frac{z_k - z}{1-\overline{z}_k z}))$$

tıkız kümelerde düzgün yakınsar yani her $0 < R < 1$ *için*

$$\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq R\}$$

kümesinde düzgün yakınsar. O halde,

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mid z_k \mid}{z_k} (\frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z})$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$'de analitik bir fonksiyondur.

B fonksiyonuna *Blaschke Çarpımı* denir. $|z| < 1$ için

$$\left| \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z} \right| < 1$$

olduğundan

$$|z| < 1 \Rightarrow |B(z)| < 1$$

olduğu açıktır. O halde B *sınırlı analitik* bir fonksiyondur. Eğer $f \in H^1(\mathbb{D})$ ise yani f analitik ve

$$\int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta < +\infty, \forall r \in (0,1)$$

ise

$$|f|(z) = |f(z)|$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde alt harmoniktir yani

$$\Delta |f| = \frac{\partial^2 |f|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f|}{\partial y^2} \geq 0' dır.$$

Alt harmonik fonksiyonların en önemli özelliği eğer $U : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonik ve $U(z) = |f|(z)$

$$\forall z \in \mathbb{T}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

ise

$$U(z) \geq |f|(z), \forall |z| < r$$

olmasıdır. O halde eğer $r_1 > r_2 > 0$ ise ve $U : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonik ve

$$U(z) = |f|(z), \forall |z| = r_1$$

şartını sağlıyorsa,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1 e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(r_1 e^{i\theta}) \right| d\theta = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2 e^{i\theta}) d\theta \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r_2e^{i\theta})\right| d\theta \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r_1e^{i\theta})\right| d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r_2e^{i\theta})\right| d\theta$$

olur. $B \in H^1(\mathbb{D})$ olduğundan

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k} . \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}$$

için $\dfrac{B}{B_n} \in H^1(\mathbb{D})$ olur.

$$\mathbb{T}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r\}$$

üzerinde $B_n \to B$'ye düzgün yakınsadığından ve $\left|B_n(e^{i\theta})\right| = 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})}\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|B(e^{i\theta})\right| d\theta \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|B(e^{i\theta})\right| d\theta \geq 1$$

ve $\left|B(e^{i\theta})\right| \leq 1$ olduğundan, hemen hemen her $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$ olmalıdır. Özetlemek gerekirse $f \in H^p(\mathbb{D})$ ise

$$Z(f) = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\}$$

kümesi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty$$

sağlanır. Yani

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} . \frac{(z_k - z)}{(1 - \overline{z}_k z)}$$

Blaschke çarpımı yakınsaktır. Bir $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu hemen hemen her $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ için $\lim_{r \to 1^-} \mid f(re^{i\theta}) \mid = 1$ şartını sağlıyorsa f'ye bir **iç fonksiyon** denir. Blaschke çarpımları iç fonksiyonların önemli örnekleridir. Başka örnekleri ise tekil iç fonksiyonlardır: Eğer birim çemberdeki Lebesgue ölçüsü $d\theta$'ya göre tekil bir $d\mu$ ölçüsü varsa ki

$$f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)}$$

şeklinde yazılıyorsa f'ye **tekil iç fonksiyon** denir. Her iç fonksiyon bir Blaschke çarpımı ile bir tekil iç fonksiyonun çarpımı olarak yazılabilir. O halde öyle bir analitik $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır ki

$$f(z) = B(z).g(z)$$

olur. Burada $\forall z \in \mathbb{D}$, $g(z) \neq 0$ olduğunu görmek zor değildir. Hemen hemen her $\theta \in [0, 2\pi)$ için $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$ olduğundan,

$$\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$$

eşitliği sağlanır. Bulduğumuz bu sıfırı olmayan "g" fonksiyonunun neye benzediğini görebilmemizi için Herglotz'un aşağıdaki gösterim teoremine ihtiyacımız olacaktır:

Teorem 13 (Herglotz Gösterim Teoremi)**.**

1. *$h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, h(0) = 1$ olacak şekilde pozitif bir harmonik fonksiyonu için $\mathbb{T}$ üzerinde bir μ Borel olasılık ölçüsü ($\mu(\mathbb{T}) = 1$) vardır öyle ki bu fonksiyon*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)})d\mu(t)$$

olarak yazılır.

2. *Eğer $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(0) = 1$ ve $\forall z \in \mathbb{D}, \mathrm{Re}(g(z)) \geq 0$ olacak şekilde analitik bir fonksiyon ise $\mathbb{T}$ üzerinde bir μ Borel olasılık ölçüsü(yani $\mu(\mathbb{T}) = 1$ olacak şekilde) vardır ki bu analitik g fonksiyonu*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t), \forall z \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathrm{Re}(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}) = P_z(e^{i(\theta-t)})$$

olduğundan (1) $\Longrightarrow$ (2) rahatlıkla görülebilir.

$g(z) \neq 0$ olduğundan

$$\log(g(z)) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

analitik bir fonksiyondur.

$$\mathrm{Re}(\log(g(z))) = \log|g(z)|$$

olduğundan Herglotz teoremini kullanabilmek için $\log |g(z)|$'i iki pozitif harmonik fonksiyonunun farkı olarak yazabilmemiz gerekir:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)}) \log^+ \left|g(e^{it})\right| dt$$

ve

$$h_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)}) \log^- \left|g(e^{it})\right| dt$$

için

$$\log^- x = \begin{cases} -\log x \text{ , eğer } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ , eğer } x > 1 \end{cases}$$

olsun. O halde

$$\log x = \log^+ x - \log^- x$$

olduğundan

$$\log |g(z)| = h_1(z) - h_2(z)$$

yazılabilir yani h_1 ve h_2 pozitif harmonik fonksiyonlardır. $c_1 = 1 - h_1(0)$ ve $c_2 = 1 - h_2(0)$ olacak şekilde tanımlı c_1 ve c_2 için

$$\widetilde{h}_1(z) = c_1 + h_1(z)$$

ve

$$\widetilde{h}_2(z) = c_2 + h_2(z)$$

tanımlayalım. Burada $\widetilde{h}_1(0) = 1 = \widetilde{h}_2(0)$ ve $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2 > 0$ olduğu açıktır. Şimdi $\widetilde{h}_1$ ve $\widetilde{h}_2$'yi,

$$\widetilde{h}_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)}) d\mu_1(t)$$

ve

$$\widetilde{h}_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)}) d\mu_2(t)$$

şeklinde ifade edebiliriz. O halde $c = c_1 - c_2$ ve $d\mu = d\mu_1 - d\mu_2$ için

$$\log |g(z)| = c + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i(\theta-t)}) d\mu(t)$$

yazabiliriz. Yani $\log(g(z))$ fonksiyonu,

$$\log(g(z)) = c_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)$$

olarak yazılabilir.
μ σ-sonlu işaretli bir ölçü olduğundan $d\theta$'ya göre bir *Lebesgue-Radon-Nikodym dekompozisyonu*na sahiptir. Yani bir $h \in L^1(\mathbb{T})$ için $d\mu = hdt + d\mu_s$ ve $d\mu_s \perp dt$ sağlanır ve $\sup(\mu_s)$ kümesinin Lebesque ölçüsü 0 olur. O halde,

$$\log(g(z)) = c_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} h(e^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu_s(t)$$

olarak yazılır ki bu da

$$f(z) = B(z)g(z) = B(z)e^{c_0}.e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} h(e^{it})dt}.e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu_s(t)}$$

demektir. Burada $\{z_k\} \subset \mathbb{D}$, f'nin sıfırları olmak üzere

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} . \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}$$

Blaschke çarpımı,

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu_s(t)} = S(z)$$

fonksiyonu *tekil iç fonksiyon(singular inner function)* ve

$$O(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} h(e^{it})dt}$$

fonksiyonu ise *dış fonksiyon(outer function)dur.*

$$f(z) = B(z).S(z).O(z)$$

faktörizasyonuna ise *f'nin iç-dış faktörizasyonu* denir.

2.4 Üst Yarı Düzlemin Hardy Uzayı ve Paley-Wiener Teoremi

Üst yarı düzlem

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : Im(z) = y > 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Üst yarı düzlemi birim diske resmeden Cayley dönüşümü

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

şeklinde tanımlanır. Cayley dönüşümü aynı zamanda $\mathbb{H}$'nin sınırı $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$'yi $\mathbb{D}$'nin sınırı $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$'ye tek bir nokta haricinde bire bir ve örten olacak şekilde resmeder. Yani $C : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \setminus \{1\}$, $C(x) = \frac{x-i}{x+i}$ bire bir, örten ve süreklidir. Bu durumda $e^{i\theta} = \frac{x-i}{x+i}$ olacağından her iki tarafın θ'ya göre türevi alınarak

$$ie^{i\theta}d\theta = i(\frac{x-i}{x+i})d\theta = \frac{2i}{(x+i)^2}dx$$

ve buradan da

$$d\theta = \frac{2dx}{x^2 + 1}$$

elde edilir. Yani $\mathbb{T}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü $\mathbb{R}$ üzerinde $d\theta = \frac{2dx}{x^2+1}$ ölçüsüne dönüşür. O halde bir $f \in L^2(\mathbb{T})$ fonksiyonu $\frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}f(\frac{x-i}{x+i})$ fonksiyonuna eşlenirse

$$\langle f, f\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = (\| f \|_{L^2(\mathbb{T})})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(e^{i\theta}) |^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} | f(\frac{x-i}{x+i}) |^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+i}f(\frac{x-i}{x+i})\overline{\frac{1}{x+i}f(\frac{x-i}{x+i})}dx$$

$$= \langle \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}f(\frac{x-i}{x+i}), \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}f(\frac{x-i}{x+i})\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= (\| \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}f(\frac{x-i}{x+i}) \|_{L^2(\mathbb{R})})^2$$

olacağından $\Phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{R})$,

$$\Phi(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}f(\frac{x-i}{x+i})$$

operatörü bir izometrik izomorfizmadır. O halde $f_n := \Phi(\chi_n)$,

$$\chi_n(z) = \chi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta} = z^n$$

için $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$'nin bir ortonormal tabanıdır. Birim çember $\mathbb{T}$'nin Hardy uzayı $H^2(\mathbb{T})$'nin

$$H^2(\mathbb{T}) := \overline{\{\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \chi_j : \lambda_j \in \mathbb{C}, k \geq 0\}} \subset L^2(\mathbb{T})$$

şeklinde tanımlandığını ve bu uzayın $H^2(\mathbb{D})$'ye izometrik izomorfik olduğunu hatırlayalım. Burada $A \subset L^2(\mathbb{T})$ için $\overline{A}$, A'nın $L^2(\mathbb{T})$'deki kapanışıdır.
O halde $\{\chi_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $H^2(\mathbb{T})$'nin bir ortonormal tabanıdır. Benzer şekilde $\mathbb{R}$'nin Hardy uzayı $H^2(\mathbb{R})$,

$$H^2(\mathbb{R}) := \overline{\{\sum_{j=0}^{k} \lambda_j f_j : \lambda_j \in \mathbb{C}, k \geq 0\}} \subset L^2(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $H^2(\mathbb{R})$'nin bir ortonormal tabanıdır. Birim diske benzer bir şekilde üst yarı düzlemin Hardy uzayı

$$H^2(\mathbb{H}) := \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} : f \quad \text{analitik ve} \quad \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x+iy) \mid^2 dx < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki Φ'nin $H^2(\mathbb{D})$'den $H^2(\mathbb{H})$'ye bir izometrik izomorfizma olduğunu görmek zor değildir (bakınız [10]). Bu Φ izometrik izomorfizmasını kullanarak $f^*(x) := \lim_{y\to 0} f(x+iy)$ için $f^* \in L^2(\mathbb{R})$ olduğunu ve $f \to f^*$ eşlemesinin $H^2(\mathbb{H})$'yi $H^2(\mathbb{R})$'ye götüren bir izometrik izomorfizma olduğunu göstermek zor değildir. Zira $H^2(\mathbb{H})$, Φ^{-1} altında $H^2(\mathbb{D})$ ile bire bir örten bir şekilde eşleşir, $H^2(\mathbb{D})$ de $H^2(\mathbb{T})$ ile f'yi sınır değeri f^*'ye götüren eşleme altında aynıdır, son olarak $H^2(\mathbb{T})$ de Φ ile $H^2(\mathbb{R})$'ye bire bir örten bir şekilde eşleşir. Yani $H^2(\mathbb{H})$ ile $H^2(\mathbb{R})$ esasen aynı uzaylardır.
Schwartz sınıfı fonksiyonlar kümesi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \in C_\infty(\mathbb{R}) \quad \text{ve} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \sup\{\mid x^n \frac{d^m f}{dx^m}(x) \mid : \ x \in \mathbb{R}\} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $C_\infty(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{C}$'ye her mertebeden türevi olan fonksiyonların kümesidir. Schwartz sınıfı fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$'de yoğundur, yani $\forall \varepsilon > 0, f \in L^2(\mathbb{R})$ için $\exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni$

$$\| f - g \|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x) - g(x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

sağlanır.
Herhangi bir $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(t) = (\mathcal{F}f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixt} f(x) dx$$

integrali ile tanımlanır. Fourier dönüşümü Schwartz sınıfını kendisine bire bir örten bir şekilde götürür. Fourier dönüşümünün tersi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ için

$$\check{f}(t) = (\mathcal{F}^{-1} f)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} f(x) dx$$

formülü ile verilir. Bu formüle "Fourier Tersinirlik Formülü" denir. İki tane $f,\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fonksiyonunun konvolüsyonu $f * g$,

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Fourier dönüşümü konvolüsyonları çarpıma dönüştürür. Yani,

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{F}(f * g))(x) = (\mathcal{F}(f)(x))(\mathcal{F}(g)(x))$$

özdeşliği geçerlidir. Ayrıca Fourier dönüşümü L^2 normu $\| \, . \, \|_2$'ye göre bir izometridir, yani her $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ için

$$\| \hat{f} \|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} | \hat{f}(t) |^2 \, dt = \| f \|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^2 \, dx$$

özdeşliği geçerlidir. Schwartz sınıfı fonksiyonlar $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$'de yoğun olduklarından dolayı Fourier dönüşümü $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ uzayına $L^2(\mathbb{R})$'den kendisine bire bir örten bir izometrik izomorfizma olarak tek bir şekilde genişler. Fourier dönüşümü ve özellikleri için [14]'e bakınız.

Verilen bir $f \in H^2(\mathbb{H})$ ve $z \in \mathbb{H}$ için aşağıdaki Cauchy integral formülü geçerlidir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(x) dx}{x - z}$$

ki burada $f^*(x) := \lim_{y \to 0} f(x + iy)$ sınır değer fonksiyonudur. Bu formülün ispatı [10]'da vardır. Cauchy integral formülünden $\mathcal{C} : L^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{H})$,

$$\mathcal{C}(f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{=\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - z}, \quad z \in \mathbb{H}$$

operatörünü türetebiliriz. Burada $H^2(\mathbb{H}) \cong H^2(\mathbb{R})$'i $L^2(\mathbb{R})$'ye gömdüğümüzde keyfi $f \in L^2(\mathbb{R})$ için aşağıdaki denklik geçerlidir:
$f \in H^2(\mathbb{R}) \iff$ hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\mathcal{C} f)^*(x) = \lim_{y \to 0} \mathcal{C}(f)(x + iy) = f(x)$$

limiti vardır.
Birim diskteki Hardy uzayı $H^2(\mathbb{D})$'yi incelerken kullandığımız en önemli araçlardan biri Poisson integral formülü olmuştu. Üst yarı düzlemde de bir Poisson integral formülü $\Phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{R})$ izometrik izomorfizması kullanılarak türetilebilir: $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ sürekli ve $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ analitik ise

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{H}$$

Poisson integral formülü geçerlidir. Bu formülün ispati için [10]'a bakınız. O halde birim diskin Hardy uzayı için yapılan Poisson integral formülü üst yarı düzlem için de yapılabilir. Yani $f \in H^2(\mathbb{H})$ için

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf^*(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{H}$$

formülü geçerlidir. O halde $f \in H^2(\mathbb{H})$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(t)dt}{t-(x+iy)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{((t-x)+iy)f^*(t)dt}{(t-x)^2+y^2} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf^*(t)dt}{(x-t)^2+y^2} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f^*(t)dt}{(x-t)^2+y^2}\right) =$$

$$\frac{f(z)}{2} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f^*(t)dt}{(x-t)^2+y^2}$$

eşitliği yazılır. Buradan da

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f^*(t)dt}{(x-t)^2+y^2}$$

eşitliği elde edilmiş olur. O halde hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f^*(x) = \lim_{y\to 0} f(x+iy) = \lim_{y\to 0} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f^*(t)dt}{(x-t)^2+y^2} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(t)dt}{x-t}$$

elde edilir. Son denklemdeki integral konvolüsyon tipi bir integraldir ve Fourier dönüşümü altında çarpıma döner yani

$$\mathcal{F}(f^*)(w) = \mathcal{F}(k * f^*)(w) = \mathcal{F}(k)(w)\mathcal{F}(f^*)(w)$$

olur ki burada $k(x) = \frac{i}{\pi x}$'dir. Bu k fonksiyonun Fourier dönüşümü hesaplandığında

$$\mathcal{F}(k)(w) = \begin{cases} 1 & w > 0 \\ -1 & w < 0 \end{cases}$$

olduğu görülür. O halde hemen hemen her $w < 0$ için $\mathcal{F}(f^*)(w) = 0$ olmalıdır. Yani $f \in H^2(\mathbb{H})$ ise hemen hemen her $w < 0$ için $\mathcal{F}(f^*)(w) = 0$ olur. Buradan $supp(\mathcal{F}(f^*)) \subseteq [0, \infty)$ olmalıdır. Fourier dönüşümü L^2'de tersinir olduğu için tersi de geçerlidir:
Yani $f \in L^2(\mathbb{R})$ ve hemen hemen her $w < 0$ için $\mathcal{F}(f)(w) = 0$ ise $f \in H^2(\mathbb{R})$ olmalıdır. Bu olguya Paley-Wiener Teoremi denir:

Paley Wiener Teoremi. $f \in L^2(\mathbb{R})$ *olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

- $f \in H^2(\mathbb{R})$
- *hemen hemen her* $w < 0$ *için* $\mathcal{F}(f)(w) = 0$.

Paley Wiener Teoreminin bir diğer ifadesi;

$$\mathcal{F}(H^2(\mathbb{R})) = \{\mathcal{F}(f) : f \in H^2(\mathbb{R})\} = L^2((0, \infty)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f\mid_{(-\infty,0)} \equiv 0\}$$

şeklindedir.

2.5 Üst Yarı Düzlem Üzerindeki Tekil İç Fonksiyonların Yapısı

Bu bölümde üst yarı düzlemde tanımlı $I : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ iç fonksiyonlarını inceleyeceğiz. Bu fonksiyonlar $I : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$'ye tanımlı analitik ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$I^*(x) = \lim_{y \to 0} I(x + iy), |I^*(x)| = 1$$

şartını sağlayan fonksiyonlardır. Problemimizi Cayley dönüşümü

$$C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

ile birim diske çekeceğiz. Cayley dönüşümü $C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$'nin $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$'ye

$$C : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \setminus \{1\}, C(x) = \frac{x - i}{x + i}$$

birebir örten bir şekilde genişlediğini görmek zor değildir. Fakat burada dikkat edilmesi gereken nokta C'nin $\mathbb{R}$'yi bütün $\mathbb{T}$'ye değil $\mathbb{T}\setminus\{1\}$'e dönüştürdüğüdür. Cayley dönüşümünün tersinin

$$C^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{H}, C^{-1}(w)=\frac{i(1+w)}{1-w}$$

olduğu görülür. Eğer $I:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ üst yarı düzlem üzerinde bir iç fonksiyon ise

$$\widetilde{I}:\mathbb{D}\to\mathbb{C}, \widetilde{I}=I\circ C^{-1}$$

fonksiyonu da birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde bir iç fonksiyondur. Eğer I'nın $\mathbb{H}$'de sıfırı yoksa $\widetilde{I}$'nın da yoktur. O halde $\mathbb{D}$'deki tekil iç fonksiyonların karakterizasyonundan dolayı bir μ-Lebesque ölçüsüne göre

$$\widetilde{I}(w)=I\left(\frac{i(1+w)}{1-w}\right)=e^{\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)}$$

şeklinde tekil bir ölçü vardır. Burada

$$\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)=\frac{-1}{2\pi}\left(\int\limits_{\{1\}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)+\int\limits_{\mathbb{T}\setminus\{1\}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)\right)$$

şeklinde yazıldığında bir $\alpha\geq 0$ için

$$\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{\{1\}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)=-\alpha\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

olur ve burada α, μ'nün 1 noktasındaki ağırlığıdır. Şimdi yukarıdaki integrali değişken değiştirme ile $\mathbb{R}$'ye çekelim. μ ölçüsü $\mathbb{T}$ üzerindeki Lebesque ölçüsüne göre tekil olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde $\widetilde{\mu}$-Lebesque ölçüsüne göre tekil bir

$$d\mu\underset{\mathbb{T}\setminus\{1\}}{|}\frac{d\widetilde{\mu}(x)}{1+x^2}$$

ölçüsü vardır. Buradan;

$$\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}=\frac{\frac{x-i}{x+i}+w}{\frac{x-i}{x+i}-w}=\frac{x-i+wx+iw}{x-i-wx-iw}$$

yazılır ve $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ konulursa,

$$\frac{x-i+wx+iw}{x-i-wx-iw}=\frac{x-i+(\dfrac{z-i}{z+i})x+i(\dfrac{z-i}{z+i})}{x-i-(\dfrac{z-i}{z+i})x-i(\dfrac{z-i}{z+i})}=\frac{2xz+2}{2i(x-z)}=\frac{xz+1}{i(x-z)}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)=i\alpha z-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}\backslash\{1\}}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\mu(\theta)=i\alpha z+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{xz+1}{i(z-x)}\frac{d\widetilde{\mu}(x)}{1+x^2}$$

elde edilir. O halde $I:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ bir tekil iç fonksiyon ise (yani $\mathbb{H}$'de hiç sıfırı yok ise) $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesque ölçüsüne göre tekil bir σ ölçüsü ve $\alpha\geq 0$ için

$$\forall z\in\mathbb{H}, I(z)=e^{\left(i\alpha z+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{sz+1}{i(z-s)}\frac{d\sigma(s)}{1+s^2}\right)}$$

olur.

3 HELSON-BEURLİNG TEOREMİ

Bu bölümde ele alınan içerik [6] ve [11] kaynaklarından alınmıştır.

$$\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

birim çember ve

$$L^2(\mathbb{T}):=\left\{f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}:\text{f ölçülebilir } ve\int\limits_0^{2\pi}\left|f(e^{i\theta})\right|^2d\theta<+\infty\right\}$$

karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı olsun. $L^2(\mathbb{T})$, $\langle .,.\rangle$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır:

$$\langle f,g\rangle:=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta.$$

$\chi_n:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$, $\chi_n(z)=z^n$ olsun. O halde $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset L^2(\mathbb{T})$'nin bir ortonormal tabanıdır. Yani $L^2(\mathbb{T})$'nin ortonormal tabanı

$$\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}:=\left\{....,z^{-2},z^{-1},1,z,z^2,...\right\}$$

iken $H^2(\mathbb{T})$ 'nin ortonormal tabanı

$$\{\chi_n\}_{n=0}^{+\infty}:=\left\{1,z,z^2,...,z^n,...\right\}$$

olur.

$$S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), (Sf)(z) = zf(z)$$

operatörünü ele alalım. Bu S operatörüne *kaydırma (shift) operatörü* denir.

$S(H^2(\mathbb{T})) \subseteq H^2(\mathbb{T})$ olduğundan S'yi $H^2(\mathbb{T})$ üzerinde bir operatör olarak görmek de mümkündür. Yani

$$S : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}), (Sf)(z) = zf(z)$$

şeklinde tanımlamak da mümkündür. Bu durumda $S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ operatörü birimsel bir operatör iken yani $SS^* = S^*S = I$ iken

$$S : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$$

operatörü birimsel değildir. Her iki durumda da S bir izometridir yani;

$$\langle Sf, Sg\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Sf)(e^{i\theta})\overline{(Sg)(e^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(e^{i\theta})e^{-i\theta}\overline{g(e^{i\theta})}d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta = \langle f, g\rangle$$

olduğundan,

$$\langle Sf, Sg\rangle = \langle f, g\rangle \ , \ \forall f, g \in L^2(\mathrm{T})$$

sağlanır.

$M \subset L^2(\mathbb{T})$ kapalı alt uzayı için $S(M) \subseteq M$ oluyorsa M'ye *değişmez (invariant) alt uzay* denir. S bir izometri olduğundan herhangi bir $M \subset L^2(\mathbb{T})$ kapalı alt uzayının S altındaki görüntüsü $S(M)$ de kapalı bir alt uzaydır. Helson-Beurling teoremi

$$M \subseteq L^2(\mathbb{T})$$

değişmez alt uzaylarının karakterizasyonu ile ilgilidir.

Teorem 14 (Helson-Beurling)**.** *$M \subseteq L^2(\mathbb{T})$ değişmez bir alt uzay olsun. O halde aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:*

1. *$S(M) = M$ olduğu durumda bir $E \subset \mathbb{T}$ Borel ölçülebilir kümesi vardır ki*

   $$M = \chi_E L^2(\mathbb{T}) := \left\{\chi_E f : f \in L^2(\mathbb{T})\right\}$$

   olur. Burada

   $$\chi_E(e^{i\theta}) := \begin{cases} 1 \ , \ \textit{eğer}\ e^{i\theta} \in E \\ 0 \ , \ \textit{eğer}\ e^{i\theta} \notin E \end{cases}$$

   karakteristik fonksiyonudur.

2. $S(M) \neq M$ olduğu durumda hemen hemen her $\theta \in [0, 2\pi)$ için $\left|g(e^{i\theta})\right| = 1$ şartını sağlayan bir $g \in L^2(\mathbb{T})$ vardır öyle ki

$$M = g.H^2(\mathbb{T}) := \left\{g.f : f \in H^2(\mathbb{T})\right\}$$

şeklindedir.

İspat. *1. $S^*S = SS^* = I$ olduğundan $S(M) = M$ ise $S^*(M) = M$ olur. O halde*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, S^n(M) = M$$

olur.

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]\,, \Upsilon(e^{i\theta}) = 1$$

olsun. O halde $\Upsilon \in L^2(\mathbb{T})$'dir. $P_M : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, M üzerinde izdüşüm operatörü olsun. Yani $P_M(L^2(\mathbb{T})) = M$, $P_M^2 = P_M$ ve

$$P_M^* = P_M$$

olsun. $q := P_M(\Upsilon)$ ise $q \in L^2(\mathbb{T})$ olur. Ayrıca $P_M(L^2(\mathbb{T})) = M$ olduğundan $q \in M$ olur. $S^n(M) = M$ olduğundan

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \chi_n.q \in M$$

olur. O halde $(\Upsilon - q)$ ile M ortogonal olduklarından,

$$\langle \Upsilon - q, \chi_n.q\rangle = \langle \chi_n.q, \Upsilon - q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(q - |q|^2)\chi_n d\theta = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

eşitliği yazılır. $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{T})$'nin ortonormal tabanı olduğundan $q - |q|^2 \equiv 0$ olmalıdır. O halde $\forall \theta \in (0, 2\pi]$ için

$$q(e^{i\theta}) = 1$$

veya

$$q(e^{i\theta}) = 0$$

olmalıdır. Yani

$$E := \left\{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : q(e^{i\theta}) = 1\right\}$$

için $q = \chi_E$ dir.

$$M_E := \chi_E.L^2(\mathbb{T}) := \left\{\chi_E.f : f \in L^2(\mathbb{T})\right\}$$

olsun. O halde $M_E \subset L^2(\mathbb{T})$'nin kapalı bir alt uzayıdır, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $q.\chi_n \in M$ olduğundan ve $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $L^2(\mathbb{T})$'nin ortonormal tabanı olduğundan

$M_E \subseteq M$ olmalıdır. $g \in (M_E)^{\perp} \cap M$ olsun. Yani $\langle g, f\rangle = 0$, $\forall f \in M_E$ ve $g \in M$ olsun. O halde

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \langle g\chi_n, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}q\chi_n d\theta = 0$$

ve $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{T})$'nin ortonormal tabanı olduğundan hemen hemen her $\theta \in (0, 2\pi]$ için $\overline{g}.q \equiv 0$'dır. Yani hemen hemen her $\theta \in (0, 2\pi]$ $g.q \equiv 0$ olmadır. Aynı şekilde $g \in M$ için $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\chi_n.g \in M$ ve $1 - q \perp M$ olduğundan

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\langle (1-q), \chi_n.g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-q)\,\overline{g}\chi_n d\theta = 0$ *olmalıdır. $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{T})$'nin ortonormal tabanı olduğundan hemen hemen her $\theta \in (0, 2\pi]$ için $(1-q)\,\overline{g} \equiv 0$ olmalıdır. O halde $(1-q)\,g \equiv 0$ ve hemen hemen her $\theta \in (0, 2\pi]$ için*

$$g.q \equiv 0 \Longrightarrow (1-q)\,g + g.q = g \equiv 0$$

olur. Yani $M_E \subseteq M$ ve

$$(M_E)^{\perp} \cap M = \{0\} \Longrightarrow M_E = M$$

olmalıdır.

2. *$S(M) \subseteq M$ ve $S(M) \neq M$ ise*

$$S(M)^{\perp} \cap M \neq \{0\}$$

olur. $g \in S(M)^{\perp} \cap M$ ve $g \neq 0$ olsun. O halde g'yi $\|g\|_2 = 1$ olacak şekilde seçebiliriz. S bir izometri olduğundan

$$S(M) \subset M \Longrightarrow S^2(M) \subset S(M)$$

olur ve $g \perp S^2(M)$ olur. O halde

$$\forall n \geq 1, g \perp S^n(M)$$

olur. Ayrıca $g \in M$ olduğundan $\chi_n.g \in S^n(M)$ olur. O halde

$$\forall n \geq 1, \langle g, \chi_n.g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^2 \chi_n d\theta = 0$$

olmalıdır. Aynı şekilde,

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^2 \chi_n d\theta = 0 \Longrightarrow \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^2 \chi_n d\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^2 \chi_{-n} d\theta = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $|g|^2$*'nin* 0*. Fourier katsayısı haricinde bütün Fourier katsayıları* 0 *olduğundan* $|g|^2$ *sabit olmalıdır. O halde* $|g|$ *de sabit olmalıdır.* $\|g\|_2 = 1$ *olduğundan hemen hemen her* $\theta \in (0, 2\pi]$ *için* $|g| \equiv 1$ *olmalıdır. Bu durumda* $|g| \equiv 1$ *olduğundan* $\{g.\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $L^2(\mathbb{T})$*'nin ortonormal bir kümesidir. Yani:*

$$\langle g.\chi_n, g.\chi_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\chi_n\overline{g}\chi_{-m} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^2 \chi_{n-m} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{n-m} d\theta = \delta_{nm}$$

yazabiliriz.

$N := \left\langle \overline{\{g.\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}} \right\rangle \subseteq L^2(\mathbb{T})$ *olsun. O halde* $S(N) = N$ *olduğudan*

$$N = \chi_E L^2(\mathbb{T})$$

şeklinde olmalıdır(1. durumdan). $|g| \equiv 1$ *olduğundan* $E = \mathbb{T}$ *ve* $N = L^2(\mathbb{T})$ *olmalıdır. Aynı şekilde* $N_o := \left\langle \overline{\{g.\chi_n\}_{n=0}^{+\infty}} \right\rangle = g.H^2(\mathbb{T})$ *olsun. O halde* $g \in M$ *ve* $S(M) \subset M$ *olduğundan*

$$\forall n \geq 1,\ g.\chi_n \in M \Longrightarrow N_o \subseteq M$$

olmalıdır. $\{g.\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{T})$*'nin ortonormal tabanı olduğundan* $f \in M$ *için tek bir* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *dizisi vardır ki*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n.g.\chi_n$$

olur.

$$\forall n \geq 1,\ \langle g, \chi_n f\rangle = 0$$

olduğundan

$$\forall n \geq 1,\ \langle \chi_{-n}.g, f\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f, \chi -_n .g\rangle = \lambda_{-n} = 0$$

olur. O halde

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{+\infty} \lambda_n.g.\chi_n \in N_o$$

olmalıdır. O halde

$$M \subseteq N_o \Longrightarrow M = N_o = g.H^2(\mathrm{T})$$

olmalıdır. Ayrıca $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{T})$ *fonksiyonları* $|g_1| = |g_2| = 1$ *ve hemen hemen her* $\theta \in (0, 2\pi]$ *için*

$$g_1.H^2(\mathbb{T}) = g_2.H^2(\mathbb{T})$$

şartlarını sağlıyor iseler

$$\overline{g_1} g_1 H^2(\mathbb{T}) = |g_1|^2 H^2(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{T}) = \overline{g_1} g_2 H^2(\mathbb{T})$$

olur. O halde $\overline{g_1} g_2$ *analitiktir. Aynı şekilde* $\overline{g_2} g_1$ *de analitiktir. O halde* $\frac{g_1}{g_2}$ *sabit olmalıdır.*

Helson-Beurling teoremindeki 1.durumu sağlayan yani $S(M) = M$ şartını sağlayan kapalı alt uzaylarla $S(M) \subseteq M$ ve $S^*(M) \subseteq M$ şartlarını sağlayan alt uzaylar aynıdır. Bu tür alt uzaylara S tarafından "**indirgenen**" (reducing) alt uzay denir. Diğer taraftan 2.durumu sağlayan yani

$$S(M) \neq M$$

şartını sağlayan değişmez kapalı alt uzaylar S^* altında değişmez değildirler. Bu tür değişmez alt uzaylara "**basit değişmez**" alt uzay denir. Daha genel olarak bir $T : H \to H$ operatörü altında değişmez kalan $M \subseteq H$ kapalı alt uzayı aynı zamanda T'nin eşleniği T^* altında da değişmez kalıyorsa M'ye T tarafından "**indirgenen**" uzay denir. Eğer T^* altında değişmez kalmıyorsa T'nin "**basit değişmez**"(simply invariant) alt uzayı denir.

3.1 Helson-Beurling Teoremi II

Helson-Beurling Teoreminin bir sonucu da kaydırma operatörü S'nin eşleniği (adjoint) S^*'ın değişmez alt uzaylarının karakterizasyonudur.

Bir $M \subset H$ kapalı alt uzayı $T : H \to H$ doğrusal operatörü altında değişmez ise yani $T(M) \subseteq M$ ise her $x \in M^\perp$ için

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0 \ , \quad \forall y \in M$$

olur. $T^* x \in M^\perp$ yani

$$M^\perp := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall y \in M\}$$

dik tümleyen uzayı da T^* altında değişmezdir. $(T^*)^* = T$ olduğundan bunun tersi de doğrudur yani,

$M \subset H$ T altında değişmezdir $\Longleftrightarrow M^{\perp}$ T^{*} altında değişmezdir

O halde Helson-Beurling Teoremi gereği

$$S : H^2 \to H^2 \ , \ (Sf)(z) = zf(z)$$

operatörünün değişmez alt uzayları

$$\psi \in H^{\infty}, \left|\psi(e^{i\theta})\right| = 1$$

iç fonksiyonu için $\psi.H^2$ şeklinde olduğundan $S^{*} : H^2 \to H^2$ eşlenik operatörünün değişmez alt uzayları

$$H^2 \ominus (\psi.H^2) := H^2 \cap \left(\psi.H^2\right)^{\perp}$$

şeklinde olmalıdır.

Bir $\mathcal{T} \subset B(H)$ operatör ailesi altında değişmez kalan kapalı alt uzaylar ailesine *$\mathcal{T}$'nin değişmez alt uzay latisi* denir ve

$$Lat(\mathcal{T}) := \{M \subseteq H : T(M) \subseteq M \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

şeklinde gösterilir. Daha genel olarak

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

ve

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

koşullarını sağlayan $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri altında kapalı olan herhangi bir X kümesine *latis* denir.

Herhangi bir $\mathcal{T} \subset B(H)$ için $Lat(\mathcal{T})$,

$$M_1 \wedge M_2 := M_1 \cap M_2$$

$$M_1 \vee M_2 := \overline{\langle M_1 \cup M_2 \rangle} := \overline{(M_1 + M_2)}$$

işlemleri altında bir **latistir.**

Burada

$$\langle M_1 \cup M_2 \rangle := \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x \in M_1, y \in M_2\}$$

dir ve $\overline{M}$ ise M'nin H deki norma göre kapanışıdır. Sınırlı analitik fonksiyonlar uzayı $H^{\infty} \hookrightarrow B(H^2)$, H^2 üzerindeki sınırlı operatörler uzayına $\phi \to M_{\phi}$ çarpım operatörü olarak gömülür. Yani $\phi \in H^{\infty}$ ile

$$M_{\phi} : H^2 \to H^2, (M_{\phi}f)(z) = \phi(z).f(z)$$

çarpım operatörünü aynı görebiliriz. Bu kısımda $Lat(H^{\infty}) = Lat(S)$ olduğunuda da göstereceğiz ki burada

$$S : H^2 \to H^2 \ \ (Sf)(z) = z.f(z)$$

kaydırma operatörüdür:

$$\phi_o \in H^{\infty}, \phi_o(z) = z$$

için $S = M_{\phi_o}$ olduğundan $Lat(H^{\infty}) \subseteq Lat(S)$ olduğu açıktır. Eğer bir $\{T_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset B(H)$ dizisi varsa ki $\langle T_n f, g\rangle \to \langle Tf, g\rangle \ \forall f, g \in H$ ve $T_n(M) \subseteq M$, o halde $T(M) \subseteq M$ olduğu açıktır: $g \in M^{\perp}$ ise

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \langle T_n(h), g\rangle = 0 \Longrightarrow \langle T(h), g\rangle = 0$$

$$\forall h \in M \Longrightarrow Th \in M \Longrightarrow T(M) \subseteq M$$

olur. Polinom fonksiyonlar H^{∞} içerisinde zayıf yoğundurlar yani $\forall \phi \in H^{\infty}$ bir $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ dizisi vardır öyle ki

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{M_n} \alpha_{nj} z^j$$

$$\forall z \in \mathbb{D}, \ p_n(z) \to \phi(z)$$

dir.

$$T_n = M_{p_n} = p_n(S)$$

olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}, M \in Lat(S)$ ise $T(M) \subseteq M$ olur. Bir $f \in H^2$ için

$$\forall z \in \mathbb{D}, \langle T_n f, k_z\rangle = p_n(z).f(z) \to \langle \phi f, k_z\rangle = \langle M_{\phi} f, g\rangle$$

olur. $n \to +\infty$ olduğunda ise

$$\forall f, g \in H^2, \langle T_n f, g\rangle \to \langle M_{\phi} f, g\rangle$$

olur. Burada

$$k_z(w) = \frac{1}{1 - w\overline{z}}, k_z \in H^2$$

$z \in \mathbb{D}$'nin üretici çekirdek fonksiyonudur. Üretici çekirdek fonksiyonlar H^2'de yoğundurlar. O halde yukardaki argüman (zayıf operatör topolojide yakınsama) gereğince $M_{\phi}(M) \subseteq M$ olmalıdır. Yani $M \in Lat(H^{\infty})$ olmalıdır.Yani

$$Lat(S) \subseteq Lat(H^{\infty}) \Longrightarrow Lat(S) = Lat(H^{\infty})$$

olur. Aynı şekilde

$$\left\langle \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_{\lambda_j} : a_j \in \mathbb{C} \ , \ \lambda_j \geq 0 \right\} \right\rangle \subseteq H^{\infty}$$

da zayıf yoğun olduğundan yazılabilir ve burada

$$e_{\lambda_j}(x) := e^{i\lambda_j x} \ , Lat(\{M_\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \ , \lambda \geq 0\}) = Lat(H^{\infty}) = Lat(S)$$

dir. Şimdi

$$M_\lambda : H^2 \to H^2, (M_\lambda f)(z) = e^{i\lambda z}.f(z)$$

şeklinde tanımlı M_λ için eğer $M_1, M_2 \in Lat(S)$ ve $M_1 \subseteq M_2$ ise $M_1 = u_1.H^2(\mathbb{R})$ ve $M_2 = u_2.H^2(\mathbb{R})$

$$u_1.H^2(\mathbb{R}) \subseteq u_2.H^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{u}_2.u_1.H^2(\mathbb{R}) \subseteq \overline{u}_2.u_2.H^2(\mathbb{R}) = |u_2|^2 H^2(\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{R})$$

olacağından $\overline{u}_2.u_1 \in H^2(\mathbb{R})$ olmalıdır. Ayrıca hemen hemen her yerde $|\overline{u}_2.u_1| = 1$ olacağından $\overline{u}_2.u_1 = \phi$ bir iç fonksiyon olmalıdır. Yani u_1, u_2 unimodüler fonksiyonları için

$$u_1.H^2(\mathbb{R}) \subseteq u_2.H^2(\mathbb{R})$$

ise bir $\phi \in H^{\infty}$ iç fonksiyonu vardır ki

$$u_1 = \phi.u_2$$

şeklinde yazılır.

4 VOLTERRA OPERATÖRÜ

Operatör teoride en çok çalışılmış operatörlerden biri de Volterra operatörüdür. Volterra operatörü

$$V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), (Vf)(x) := \int_0^x f(t)dt$$

şeklinde tamamlanır. Daha genel olarak bir

$$k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

integrallenebilir fonksiyonu için

$$V_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), (V_k f)(x) = \int_0^x k(x,s)f(s)ds$$

türü integral operatörlerine de *Volterra operatörleri* denir. Özel olarak;

$$k(x,s) := \begin{cases} 1, & \text{eğer s} \leq x \\ 0, & \text{eğer } s > x \end{cases}$$

integrallenebilir fonksiyonu için V_k, V operatörü ile çakışır. Eğer

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |k(x,s)|^2 \, dx.ds < +\infty$$

ise

$$\|V_k\| \leq (\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |k(x,s)|^2 \, dx.ds)^{\frac{1}{2}}$$

olduğunu göstermek zor değildir ([9]'e bakınız). O halde

$$\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

olur ki bu da

$$I + V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$$

operatörünün tersinir olduğu anlamına gelir. (Burada $I : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ birim operatörüdür, $(If)(x) = f(x)$) Buradan bir Neumann serisi argümanı ile

$$(I+V)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n V^n$$

olduğunu görmek mümkündür ki sağdaki seri operatör normunda yakınsar. Aynı şekilde

$$V = I + V - I = (I - (I - (I+V)^{-1}))^{-1} - I =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n ((I+V)^{-1} - I)^n) \right) - I$$

olduğundan V ve $(I+V)^{-1}$ operatörlerinin değişmez alt uzayları aynıdır. Yani bir

$$K \subseteq L^2([0,1]$$

kapalı alt uzayı V altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul $(I+V)^{-1}$ altında değişmez olmasıdır. Bu bölümde Sarason'un yaptığı Helson-Beurling teoremi yardımıyla V'nin değişmez alt uzaylarının karakterizasyonunu ele alacağız.[13] Volterra operatörü V'nin en başta göze çarpan değişmez alt uzayları

$$L^2([a,1]) := \left\{ f \in L^2([0,1]) : f \Big|_{[0,a)} \equiv 0 \right\}$$

şeklindedir. Bu bölümde V'nin bütün değişmez alt uzaylarının bu şekilde olduğunu göstereceğiz. Bu bölümdeki içerik tamamen [13]'den alınmıştır. Paley-Wiener teoreminin bir sonucu olarak

$$\mathcal{F}\left(e^{ix}H^2(\mathbb{R})\right) = L^2([1,+\infty])$$

olduğunu görebiliriz.

$$L^2([0,1]) \cong L^2([0,+\infty]) \ominus L^2([1,+\infty]) = L^2([0,+\infty]) \cap (L^2([1,+\infty]))^{\perp}$$

olduğundan

$$\mathcal{F}\left(H^2(\mathbb{R}) \ominus e^{ix}H^2(\mathbb{R})\right) = L^2([0,+\infty]) \ominus L^2([1,+\infty]) \cong L^2([0,1])$$

olur. Yani $L^2([0,1])$ ile $H^2(\mathbb{R}) \ominus e^{ix}H^2(\mathbb{R})$ uzayları Fourier dönüşümü altında izometrik izomorflardır. Burada

$$\mathcal{F}\left(e^{ix}H^2(\mathbb{R})\right) = L^2([1,+\infty])$$

olduğunu gösterelim:

$f \in H^2(\mathbb{R})$ olsun. O halde eğer $t < 1$ ise

$$\mathcal{F}\left(e^{ix}f\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}f(s)e^{-ixt}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-1)x}f(x)dx =$$

$$= \mathcal{F}(f)(t-1) = 0$$

elde edilir. $\mathcal{F}$ izomorfik izomorfizma olduğundan

$$\mathcal{F}\left(e^{ix}H^2(\mathbb{R})\right) = L^2([1,+\infty])$$

olur. Burada Volterra operatörü V'nin Fourier dönüşümü altında hangi operatöre dönüşeceği önemlidir. Bunun cevabını verebilmek için Volterra operatörünü bir konvolüsyon tipi olarak görüyoruz. Bunun için evvela $L^2([0,1])$'yi $L^2(\mathbb{R})$'ye gömelim:

$$I : L^2([0,1]) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$(If)(x) := \begin{cases} f(x) \text{ eğer } x \in [0,1] \\ 0 \text{ eğer } x \notin [0,1] \end{cases}$$

olsun. O halde

$$\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ eğer } x \in [0,1] \\ 0 \text{ eğer } x \notin [0,1] \end{cases}$$

için

$$P(\chi_{[0,1]} * I(f))(x) = P(\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x-t) I(f)(t) dt) = P(\int_{x-1}^{x} I(f)(t) dt) =$$

$$= \int_{0}^{x} f(t) dt = (Vf)(x)$$

$P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2([0,1])$,

$$Pf = f \mid_{[0,1]} = \begin{cases} f(x) \text{ eğer } x \in [0,1] \\ 0 \text{ eğer } x \notin [0,1] \end{cases}$$

olduğunu görürüz. Yani

$$V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$$

operatörü

$$Vf = P(\chi_{[0,1]} * I(f))$$

şeklinde yazılır. Fourier dönüşümü konvolüsyonları çarpıma dönüştürdüğünden Volterra operatörü Fourier dönüşümü altında bir Toeplitz operatörüne dönüşür:

$$\mathcal{F}^{-1} \circ V \circ \mathcal{F} = \mathcal{P} M_{\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[0,1]})}$$

olur ki burada

$$\mathcal{P} : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}) \ominus e^{ix} H^2(\mathbb{R})$$

ortogonal izdüşümü ve

$$M_{\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[0,1]})} : H^2(\mathbb{R}) \ominus e^{ix} H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R})$$

ise $\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[0,1]})$ ile çarpma operatörüdür. Fourier tersinirlik formülünden

$$\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[0,1]})(x) = \int_{0}^{1} e^{itx} dt = \frac{e^{itx}}{ix}\Big|_0^1 = \frac{e^{ix}-1}{ix} := \omega(x)$$

bulunur. Yukarıdaki Toeplitz operatörünü üst yarı düzlemin Hardy uzayından birim diskin Hardy uzayına geçirmek için bir önceki bölümde ele aldığımız

$$\Phi : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{R})$$

izometrik izomorfizmasını kullanırsak

$$\Phi^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ V \circ \Phi = \mathcal{P} M_{\omega(\frac{i(1+z)}{1-z})}$$

elde ederiz. Burada

$$\varphi(z) := \omega\left(\tfrac{i(1+z)}{1-z}\right) = \frac{z-1}{z+1}.\left(e^{\dfrac{z+1}{z-1}} - 1\right) = (1 - \frac{2}{z+1})\left(e^{\dfrac{z+1}{z-1}} - 1\right)$$

olduğundan ve $\mathcal{P} M_{\frac{z-1}{z+1} e^{\frac{z+1}{z-1}}}$ operatörü

$$H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\dfrac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$$

üzerinde sıfır olduğundan

$$\Phi^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ V \circ \mathcal{F} \circ \Phi = \mathcal{P} M_{\frac{2}{1+z}} - I$$

olur ki buradan da

$$\Phi^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ (I + V) \circ \mathcal{F} \circ \Phi = \mathcal{P} M_{\frac{2}{1+z}}$$

elde edilir. $I + V$ operatörü tersinir olduğundan

$$\Phi^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ (I + V)^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \Phi = \mathcal{P} M_{\frac{z+1}{2}}$$

olmalıdır. O halde $(I+V)^{-1}$ ile V'nin değişmez alt uzayları aynı olduğundan, V'nin değişmez alt uzayları

$$\mathcal{P}.S : H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\dfrac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\dfrac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$$

operatörünün değişmez alt uzaylarının

$$J := \mathcal{F} \circ \Phi$$

altındaki görüntüleridir ki burada

$$\mathcal{P} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\dfrac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$$

ortogonal izdüşümü ve

$$S : H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$$

$$(Sf)(z) = zf(z)$$

kaydırma operatörüdür. Burada $S(e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})) \subseteq e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$ olduğundan yani S, $e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$ alt uzayını değişmez bıraktığından,

$$S^*, K =: H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2(\mathbb{T})$$

alt uzayını kendisine götürür yani

$$S^*(K) \subseteq K$$

olur. O halde $\mathcal{P}.S : K \to K$ operatörünün bütün değişmez alt uzayları $S^* : K \to K$ operatörünün değişmez alt uzaylarının K içerisindeki ortogonal tümleyenleridir. Helson-Beurling teoreminden S^*'ın bütün değişmez alt uzayları

$$H^2(\mathbb{T}) \ominus \psi.H^2(\mathbb{T})$$

şeklindedir. Burada $\psi \in H^2(\mathbb{T})$ bir iç fonksiyonudur yani hemen hemen her $\theta \in [0, 2\pi)$ için $\left|\psi(e^{i\theta})\right| = 1$ olur. O halde

$$H^2(\mathbb{T}) \ominus \psi.H^2(\mathbb{T}) \subseteq K$$

olabilmesi için

$$\psi.H^2(\mathbb{T}) \supseteq \psi_1.H^2(\mathbb{T})$$

olmalıdır ki bu da ψ'nin ψ_1'i bölmesini gerektirir. Burada

$$\psi_1(z) := e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

dir. Bir ψ iç fonksiyonunun ψ_1 tekil iç fonksiyonunu bölebilmesi için birim disk $\mathbb{D}$'de hiç bir sıfırının bulunmaması gerekir. O halde ψ'nin kendisi de bir tekil iç fonksiyondur ve Hardy uzaylarındaki iç dış faktorizasyondan dolayı

$$\psi(z) = e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{e^{is}+z}{e^{is}-z} d\mu(s)}$$

şeklinde olmalıdır ki burada μ , $\mathbb{T}$ üzerinde Lebesque ölçüsü $d\theta$'ya göre tekil olan bir ölçüdür. Ayrıca ψ'nin ψ_1'i bölebilmesi için μ'nün δ_1 Dirac ölçüsüne göre mutlak sürekli olması gereklidir. O halde $d\mu = a.d\delta_1$, $0 \leq a \leq 1$ olmalıdır ki bu da

$$\psi = \psi_a, \psi_a(z) := e^{\frac{a(z+1)}{z-1}}$$

olmalıdır. Sonuç olarak V'nin bütün değişmez alt uzayları

$$K \ominus (H^2(\mathbb{T}) \ominus e^{\overline{\frac{z+1}{z-1}}} H^2(\mathbb{T})) = \psi_a H^2(\mathbb{T}) \ominus \psi_1 H^2(\mathbb{T})$$

kapalı alt uzaylarının $J = \mathcal{F} \circ \Phi$ altındaki görüntü uzaylarıdır ki bu da

$$J(\psi_a H^2(\mathbb{T}) \ominus \psi_1 H^2(\mathbb{T})) = L^2((a,1]) := \left\{ f \in L^2((0,1)) : f \Big|_{[0,a)} \equiv 0 \right\}$$

dır. Bunu bir teorem olarak ifade edelim:
Teorem 15.

$$L^2((0,1)) := \left\{ f : (0,1) \to \mathbb{C} : \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < +\infty \right\}$$

karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı olsun. O halde

$$V : L^2((0,1)) \to L^2((0,1)), (Vf)(x) := \int_0^x f(t)dt$$

Volterra integral operatörünün bütün değişmez alt uzayları

$$L^2((a,1)) = \left\{ f \in L^2((0,1)) : f \Big|_{[0,a)} \equiv 0 \right\}$$

şeklindedir.

5 ÖTELEME VE ÇARPMA OPERATÖRLERİ ALTINDA DEĞİŞMEZ KALAN ALT UZAYLAR

Tezin bu kısmında $\lambda \geq 0$ için

$$M_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), (M_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$$

çarpım operatörleri ve $\mu \geq 0$ için

$$D_\mu : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), (D_\mu f)(x) = f(x-\mu)$$

öteleme operatörleri altında değişmez kalan $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzaylarını karakterize edeceğiz. Bu karakterizasyon [7] makalesinden alınmıştır. Böyle bir $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzayı M_λ tarafınfan indirgenen bir alt uzay ise Helson-Beurling teoremi gereği

$$M := \chi_E.L^2(\mathbb{R}) = L^2(E)$$

şeklinde olmalıdır. Burada $E \subseteq \mathbb{R}$'nin bir Borel alt kümesidir.

$$\forall \mu \geq 0, D_\mu(M) \subseteq M,$$

olduğundan

$$\forall \mu \geq 0, mu + E \subseteq E$$

olmalıdır. Bu da bir $a \in \mathbb{R}$ için $E = [a, +\infty)$ olması demektir. O halde M_μ'ler tarafından indirgenen ve D_μ altında değişmez kalan $(\lambda, \mu \geq 0)$ $L^2(\mathbb{R})$ haricinde $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ alt uzayları

$$M := \chi_{[a,+\infty)}.L^2(\mathbb{R}) := L^2([a, +\infty)), a \in \mathbb{R}$$

şeklinde olmalıdır. Bir $s > 0$ için $\phi_s(x) = e^{-is\frac{x^2}{2}}$ olsun. O halde

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\phi_s(x)| = 1$$

olur, yani ϕ_s bir ünimodüler fonksiyondur. Fakat $\phi_s \notin H^\infty$ yani ϕ_s üst yarı düzlemde analitik değildir. Çarpma operatöreri M_λ altında *basit değişmez* kalan

$$M := \phi_s.e_\lambda.H^2(\mathbb{R}), e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \lambda, s \geq 0$$

kapalı alt uzayını ele alalım:

$$D_\mu M_{\phi_s} = \phi_s(\mu) M_{\phi_s} D_\mu$$

olduğundan

$$D_\mu(M) = M_{\phi_s} M_{\lambda_s} D_\mu(e_\lambda.H^2(\mathbb{R})) = M_{\phi_s} M_{\mu_s}(e_\lambda.H^2(\mathbb{R})) \subseteq M_{\phi_s}(e_\lambda.H^2(\mathbb{R})) = M$$

olur yani M , D_μ altında değişmez kalır. Bütün M_λ, $\lambda \geq 0$ operatörleri altında basit değişmez kalan ve D_μ altında değişmez kalan $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ alt uzaylarının hepsi yukarıdaki gibidir. Bunu aşağıdaki teorem ile göstereceğiz (Aşağıdaki teorem ve ispatı [7]'den alınmıştır):

Teorem 16. *Bir $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzayı $\lambda \geq 0$ için*

$$M_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), (M_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$$

operatörleri altında basit değişmez ve $\mu \geq 0$ için $(D_\mu f)(x) = f(x-\mu)$ öteleme operatörleri altında değişmez kalıyorsa, bir $s \geq 0$ ve $\lambda \geq 0$ için

$$M = \phi_s.e_\lambda.H^2(\mathbb{R})$$

şeklinde olmalıdır. Burda $\phi_s(x) = e^{-is\frac{x^2}{2}}$ ve $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ 'dir.

İspat. $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$, M_λ *operatörleri altında basit değişmez kaldığından bir u unimodüler fonksiyonu için*

$$M = u.H^2(\mathbb{R})$$

olmalıdır. Ayrıca $\forall t > 0$ için $D_t(M) \subseteq M$ olduğundan ve $D_t(M) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzayı da M_λ'ler altında basit değişmez olduğundan $D_t(M) = u_t H^2(\mathbb{R})$ şeklinde olmalıdır ki u_t bir ünimodüler fonksiyondur.

$$u_t H^2(\mathbb{R}) \subseteq u H^2(\mathbb{R})$$

olduğundan bir $w_t \in H^\infty$ iç fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon $u_t = w_t.u$ şeklindedir. Aynı zamanda

$$D_t(u.H^2(\mathbb{R})) = u(x-t)H^2(\mathbb{R}) = w_t.u.H^2(\mathbb{R})$$

olduğunda bir $c_t \in \mathrm{T}$ sabiti için

$$u(x-t) = c_t.w_t(x).u(x)$$

olmalıdır. Burada w_t'yi renormalize ederek $c_t = 1$ alabiliriz. O halde

$$w_t(x) = \frac{u(x-s-t)}{u(x)} = \frac{u(x-s-t)}{u(x)}.\frac{u(x-t)}{u(x)} = w_t(x-s).w_s(x)$$

elde edilir. O halde $0 < t < s$ ve $0 < r < s-t$ için $w_t(x-r)$, w_s'i böler. Bu da $z_0 \in \mathbb{H}$ w_t'nin bir sıfırı ise $z_0 + r$'nin $\forall 0 < r < s-t$ için w_s'nin sıfırları olması demektir. w_s üst yarı düzlemde analitik olduğundan sıfırları yığılma yapamaz o halde w_t'nin üst yarı düzlemde hiç bir sıfırı olamaz. Yani w_t tekil bir iç fonksiyon olmak zorundadır:

$$w_t(z) = \alpha e^{i\beta z}.e^{(i\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{sz+1}{s-z}\frac{d\mu(s)}{s^2+1})}, z \in \mathbb{H}$$

şeklinde olmalıdır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $d\mu \perp dx$ yani μ Lebesque ölçüsüne göre tekildir. $s > t > 0$ ve $\alpha^{'}, \beta^{'}$ ve ν w_s fonksiyonuna karşılık gelen parametreler olsun yani

$$w_s(z) = \alpha^{'} e^{i\beta^{'} z} e^{\left(i \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{sz+1}{s-z} \frac{d\nu(s)}{1+s^2}\right)}$$

şeklinde ifade edilsin. O halde $w_t(x-r)$, $w_s(z)$'yi böldüğünden

$$\frac{w_s(z)}{w_t(z-r)} = e^{-u_r}$$

olur ve burada u_r, $\mathrm{Re}(u_r) \geq 0$ olduğundan üst yarıdüzlemde analitik fonksiyondur. Biraz hesapla

$$\mathrm{Re}(u_r(z)) = \left(\beta^{'} - \beta\right) y + \int \frac{y}{(s-x)^2 + y^2} \left(d\upsilon(s) - d\mu(s-r)\right)$$

elde edilir. Burada $z = +iy$ dir. $\mathrm{Re}(u_r)$ pozitif bir harmonik fonksiyon olduğundan $d\upsilon(s) - d\mu(s-r) \geq 0$ pozitif bir ölçü olmalıdır. Ayrıca $\beta^{'} - \beta \geq 0$ olmalıdır. O halde her $A \subseteq \mathbb{R}$ Borel alt kümesi için ve $0 < r < s-t$ için $\mu(A-r) \leq \nu(A)$ olmalıdır.

$$\mu_0(A) := \int\limits_0^{s-t} \mu(A-r)dr$$

şeklinde bir μ_0 ölçüsü tanımlayalım. $f \in C_\infty(\mathbb{R})$, $f \geq 0$ ve

$$\int f(x)dx = 0$$

olsun. O halde

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_0 \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_0^{s-t} f(x) d\mu(-r) \right) dx \right| = \left| \int\limits_0^{s-t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx \right) d\mu(-r) \right| = 0$$

olduğundan $d\mu_0 >> dx$ yani μ_0 , dx 'e göre mutlak süreklidir. Aynı zamanda

$$|\mu_0(A)| = \left| \int\limits_0^{s-t} \mu(A-r)dr \right| \leq \nu(A).(s-t)$$

ve $d\nu \perp dx$ olduğundan $d\mu_0 \perp dx$ olur. Yani μ_0, dx Lebesque ölçüsününe göre tekildir. O halde $\mu_0 \equiv 0$ olmalıdır ki bu da $\mu \equiv 0$ olması demektir. O halde

$$w_t(z) = \alpha(t).e^{i\beta(t).z}$$

şeklinde olmalıdır. Burada

$$w_{t+s}(x) = w_t(x-s).w_s(x)$$

olduğu hatırlanırsa

$$\alpha(s+t)e^{i\beta(s+t).x} = \alpha(t)e^{i\beta(t).(x-s)}\alpha(s)e^{i\beta(s).x}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\alpha(s+t) = \alpha(s).\alpha(t)e^{-i\beta(t).x}$$

ve

$$\beta(s+t) = \beta(s) + \beta(t)$$

elde edilir. Yani

$$\frac{u(x-t)}{u(x)} = \alpha(t)e^{i\beta(t).x}$$

olduğundan x *sabit tutulursa* α*'nın* t*'ye göre ölçülebilir bir fonksiyon olduğu görülür. Ayrıca* β *artan ve doğrusal olduğundan bir* $\rho > 0$ *sabiti için*

$$\beta(t) = \rho t$$

olmalıdır. Bir γ *fonksiyonu*

$$\gamma(t) := \alpha(t)e^{i\rho\frac{t^2}{2}}$$

şeklinde tanımlandığında

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)e^{-i\rho s}$$

olduğu dikkate alınarak

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

olduğu görülür. γ *ölçülebilir bir fonksiyon ve*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\gamma(t)| = 1$$

olduğundan $\gamma(t) = e^{i\sigma t}$ *şeklinde olmalıdır. Burada* $\sigma \in \mathbb{R}$*'dir. O halde*

$$\alpha(t) = e^{i(-\rho\frac{t^2}{2}+\sigma t)}$$

ve

$$w_t(x) = \frac{u(x-t)}{u(x)} = e^{i(-\rho\frac{t^2}{2}+\sigma t+\rho tx)}$$

olmalıdır. Burada $x = x_0$ alınırsa

$$u(x_0 - t) = u(x_0).e^{i(-\rho\frac{t^2}{2}+\sigma t+\rho t x_0)}$$

eşitliği doğru olur. $x_0 - t$'yi x ile değiştirirsek yukarıdaki ifade

$$u(x) = c.e^{i(-\rho\frac{x^2}{2}-\sigma x)} = c.e^{-i\rho\frac{x^2}{2}}.e^{i\lambda x} \ (\lambda = -\sigma)$$

şeklinde olur ve burada $c \in \mathbb{T}$'dir. Genelliği kaybetmeden $c = 1$ alabiliriz. Bu durumda

$$u(x) = e^{-is\frac{x^2}{2}}.e^{i\lambda x}(s = \rho)$$

olur ki bu da

$$M = u.H^2(\mathbb{R}) = \phi_s.e_\lambda.H^2(\mathbb{R})$$

olması demektir.

6 DİLASYON VE ÇARPMA OPERATÖRLERİ ALTINDA DEĞİŞMEZ KALAN ALT UZAYLAR

Tezin bu kısmında

$$M_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \lambda \geq 0, (M_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$$

çarpım operatörleri ve

$$V_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), t \geq 0, (V_t f)(x) = e^{\frac{t}{2}}.f(e^t.x)$$

dilasyon operatörleri altında değişmez kalan $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzaylarını karakterize edeceğiz. Bu karakterizasyon [8] makalesinden alınmıştır. Böyle bir $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ kapalı alt uzayı M_λ tarafından indirgenen bir alt uzay ise Helson-Beurling teoremi gereği

$$M = \chi_E.L^2(\mathbb{R}) = L^2(E)$$

şeklinde olmalıdır. Burada $E \subset \mathbb{R}$'nin bir Borel alt kümesidir.

$$V_t(M) \subseteq M \ \forall t \geq 0$$

olduğundan

$$e^{-t}.E \subseteq E, \forall t \geq 0$$

olmalıdır. Bu da $a, b \geq 0$ için $E = [-a, b]$ olması demektir. O halde M_λ'ler tarafından indirgenen ve V_t altında değişmez kalan $(\lambda, t \geq 0)$ $L^2(\mathbb{R})$ haricinde $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ alt uzayları

$$M = \chi_E.L^2(\mathbb{R}) = L^2([-a, b]), a, b \geq 0$$

şeklinde olmalıdır. Bir $\theta \in \mathbb{T}$ için $u_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$u_\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ eğer } x > 0 \\ \theta \text{ eğer } x \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $s > 0$ için

$$g_{s,\theta} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, g_{s,\theta}(x) = u_\theta(x). \left|x\right|^{is}$$

şeklinde tanımlanan $g_{s,\theta}$ fonksiyonu,

$$g_{s,\theta}(x) = \begin{cases} e^{is\ln|x|}, \text{ eğer } x > 0 \\ \theta.e^{is\ln|x|} \text{ eğer } x \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. $g_{s,\theta}$ fonksiyonunun unimodüler olduğu yani

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g_{s,\theta}(x)| = 1$$

olduğu açıktır. (Burada $\theta \in \mathbb{T}$'dır.) O halde $g_{s,\theta}.H^2(\mathbb{R})$ alt uzayları Helson-Beurling teoremi gereği M_λ'lar altında basit değişmez kalan alt uzaylardır. Aynı zamanda $\forall f \in H^2(\mathbb{R})$ için

$$V_t(g_{s,\theta}.f) = e^{ist}g_{s,\theta}.V_t(f)$$

ve

$$V_t(H^2(\mathbb{R})) = H^2(\mathbb{R})$$

olduğundan

$$V_t(g_{s,\theta}.H^2(\mathbb{R})) \subseteq g_{s,\theta}.H^2(\mathbb{R})$$

'dır. Yani $g_{s,\theta}.H^2(\mathbb{R})$, V_t'ler altında değişmez kalır. Ayrıca $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $e_{\lambda,\mu} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$e_{\lambda,\mu}(x) = e^{i(\lambda x + \frac{\mu}{x})}$$

şeklinde tanımlansın. $e_{\lambda,\mu} \in H^\infty$ olabilmesi için $\lambda \geq 0$ ve $\mu \leq 0$ olmalıdır. Bu durumunda $e_{\lambda,\mu}$ br iç fonksiyon olur ki $\lambda \geq 0$ ve $\mu \leq 0$ iken

$$e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R}) \subseteq H^2(\mathbb{R})$$

olur. Ayrıca $e_{\lambda,\mu}$'nün ünimodüler olduğu da açıktır. O halde $e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R})$, M_λ'lar altında basit değişmez kalan alt uzaylardır.

$$V_t.M_\lambda = M_\lambda.e^tV_t$$

olduğundan ve
$$V_t(H^2(\mathbb{R})) = H^2(\mathbb{R})$$
olduğundan $t, \lambda, \mu \geq 0$ için
$$V_t(e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R})) = e^{i\lambda e^t x} e^{i\frac{\mu e^{-t}}{x}}.H^2(\mathbb{R}) = e_{\lambda,\mu}(x).(e^{i\lambda(e^t-1)x}.e^{i\frac{\mu(e^{-t}-1)}{x}})H^2(\mathbb{R}) \subseteq e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R})$$
olur. $\lambda(e^t - 1) \geq 0$ ve $\mu(e^{-t} - 1) \leq 0$ olduğundan
$$e^{i\lambda(e^t-1)x} \in H^\infty$$
'dur. O halde
$$g_{s,\theta}.e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R})$$
kapalı alt uzayları $s \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}$, $\lambda, \mu \geq 0$, M_λ'lar altında basit değişmez ve V_t'ler altında değişmez kalır. Bu dört parametreye bağlı kapalı alt uzaylar ailesinden başka M_λ'lar altında basit değişmez ve V_t'ler altında değişmez kalan kapalı alt uzaylar olmadığını aşağıdaki teoremle göstereceğiz. (Aşağıdaki teorem ve ispatı [8]'den alınmıştır):

Teorem 17. *$M \subseteq L^2(\mathbb{R})$"'nin*
$$M_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \lambda \geq 0, (M_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$$
çarpım operatörleri altında basit değişmez kalan ve $V_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $(V_t f)(x) = e^{\frac{t}{2}} f(e^t x)$, $t \geq 0$ dilasyon operatörleri altında değişmez kalan kapalı bir alt uzayı olsun. O halde $\lambda, \mu \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$ ve $\theta \in \mathbb{T}$ için
$$M = g_{s,\theta}.e_{\lambda,\mu}.H^2(\mathbb{R})$$
şeklindedir.

İspat. *Helson-Beurling teoremi gereği $M \subseteq L^2(\mathbb{R})$ M_λ'lar altında basit değişmez olduğundan bir $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ünimodüler fonksiyonu için*
$$M = u.H^2(\mathbb{R})$$
şeklinde olmalıdır. $\forall t \geq 0$ için $V_t(M)$ de M_λ'lar altında basit değişmez kalır:
$$M_\lambda(V_t(M)) = V_t(M_{e^{-t}_\lambda}(M)) \subseteq V_t(M)$$
O halde
$$V_t(M) = u_t.H^2(\mathbb{R})$$
şeklinde olmalıdır. Burada u_t bir ünimodüler fonksiyondur. Ayrıca
$$V_t(M) \subseteq M$$

olduğundan

$$u_t.H^2(\mathbb{R}) \subseteq u.H^2(\mathbb{R})$$

ise bir $w_t \in H^\infty$ *iç fonksiyonu vardır ki* $u_t = uw_t$ *olur. Ayrıca*

$$V_t(M) = V_t\left(u.H^2(\mathbb{R})\right) = u(e^t x)V_t(H^2(\mathbb{R})) = u(e^t x)H^2(\mathbb{R}) = u_t.H^2(\mathbb{R}) = w_t u.H^2(\mathbb{R})$$

olduğundan bir $c_t \in \mathbb{T}$ *için*

$$u(e^t.x) = c_t.w_t.u(x)$$

olmalıdır. Burada genelliği kaybetmeden $c_t = 1$ *alınabilir. O halde*

$$u(e^t.x) = w_t(x).u(x)$$

olmalıdır. Buradan da

$$w_{s+t}(x) = \frac{u(e^{(s+t)}x)}{u(x)} = \frac{u(e^{(s+t)}x)}{u(e^t.x)}.\frac{u(e^t x)}{u(x)} = w_s(e^t x).w_t(x) = w_t(e^s x).w_s(x)$$

elde edilir. Buradan $\forall r > s+t$ *için* $w_t(e^s x)$*'in* w_{s+t}*'yi böldüğü sonucu çıkar. O halde* $r > s+t$ *için sabit tutarsak bir* h_s *iç fonksiyonu için*

$$\forall z \in \mathbb{H},$$

$w_t(e^s z).h_s(z) = w_r(z)$

olur. Eğer $z_0 \in \mathbb{H}$ *,* w_t*'nin sıfırı ise*

$$w_t(e^{-s}z_0) = w_t(z_0).h_s(e^{-s}z) = 0, \forall s < r-t$$

olur ve bu da w_r *iç fonksiyonunun sıfırlarının yığılma yapması demektir. Bu ise mümkün olamayacağı için* w_t*'nin* $\mathbb{H}$*'de sıfırı olamaz. O halde*

$$w_t(z) = \alpha e^{i\beta z}.e^{(i\int_{\mathbb{R}} \frac{sz+1}{s-z}\frac{d\mu(s)}{s^2+1})}, z \in \mathbb{H}$$

şeklinde olmalıdır. Burada $d\mu$ *Lebesque ölçüsüne göre tekil bir ölçü ve* $\nu > t$ *için*

$$w_r(z) = \alpha' e^{i\beta' z}.e^{(i\int_{\mathbb{R}} \frac{sz+1}{s-z}\frac{d\nu(s)}{s^2+1})}$$

ise bir önceki bölümdeki argüman gereği tekrardan w_t*,* w_r*'yi böldüğünden* $d\nu \geq d\mu\left(e^t\right)$ $\forall 0 < s < r-t$ *ve*

$$\mu_0(A) := \int_0^{r-t} \mu(e^s.A)ds$$

şeklinde μ_0 *ölçüsü* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$*'da tanımlanabilir.* μ_0 *ölçüsüne göre mutlak sürekli ve* $\mu_0 \leq (r-t).\nu$ *sağlandığından ve aynı zamanda Lebesque ölçüsüne göre tekil olduğundan* 0 *iermeyen* A *Borel alt kümeleri için,*

$$\mu_0 \equiv 0 \Rightarrow \mu_0(A) = \int_0^{r-t} \mu(e^s.A)ds \Rightarrow \mu(e^s.A) = 0, \forall s \in (0, r-t), A \subseteq \mathbb{R}$$

yazılır. O halde

$$\sup(\mu) = \{0\}$$

olmalıdır yani

$$\mu(A) = \gamma > 0$$

eğer $0 \in A$ *ve* $\mu(A) = 0$ *eğer* $0 \notin A$ *olmalıdır. Bu durumda*

$$w_t(x) = \alpha.e^{i\beta z}.e^{\frac{-i\gamma}{x}}$$

şeklinde olmalıdır. Burada α, β *ve* γ t*'ye bağlı olduğundan*

$$w_t(x) = \alpha(t).e^{i\beta(t)x}.e^{\frac{-i\gamma(t)}{x}}$$

şeklinde yazılır. Burada $\alpha(t) \in \mathbb{T}$ *,* $\beta(t), \gamma(t) \geq 0$ *sağlanır.*

$$w_{s+t}(x) = w_t(e^{st}.x)w_s(x)$$

özdeşliğinden

$$\alpha(s+t).e^{i\beta(s+t)x}.e^{\frac{-i\gamma(s+t)}{x}} = \alpha(t).e^{i\beta(t)e^s.x}.e^{\frac{-i\gamma(t)}{e^s x}}.\alpha(s).e^{i\beta(t).x}.e^{\frac{-i\gamma(s)}{x}}$$

ve buradan da

$$\alpha(s+t) = \alpha(s).\alpha(t)$$
$$\beta(s+t) = \beta(t)e^s + \beta(s)$$
$$\gamma(s+t) = \gamma(t).e^{-s} + \gamma(s)$$

bağıntıları elde edilir. Burada $r > t$ *için* w_t, w_r*'yi böldüğünden* $\beta(r) > \beta(t)$ *ve* $\gamma(r) > \gamma(t)$ *olmalıdır yani* β *ve* γ *artan fonksiyonlardır. Buradan da* β *ve* γ*'nın türevlenebilir olduğu sonucuna varırız. Yukarıdaki denklemlerde* $s = 0$ *alınırsa*

$$\beta(0) = \gamma(0) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde her iki taraftan $\beta(s)$ *çıkarıldığında*

$$\beta(s+t) - \beta(s) = \beta(t).e^s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(s+t)-\beta(s)}{t} = \frac{\beta(t)}{t}.e^s$$

$$\Rightarrow \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\beta(s+t)-\beta(s)}{t} = (\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\beta(t)}{t}).e^s = \beta^{'}(0)+\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\beta^{'}(0) \Rightarrow \beta(t) = \beta^{'}(0).(e^t-1) = \lambda(e^t-1)$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\gamma(t) = \gamma^{'}(0).(1-e^{-t}) = \mu.(1-e^{-t})$$

eşitliği yazılır. Burada $t > 0$ *için*

$$\beta(t) > \beta(0) = 0$$

olduğundan $\lambda \geq 0$ *olmalıdır. Aynı şekilde* $\mu \geq 0$ *olmalıdır. O halde*

$$w_t(x) = \frac{u(e^t x)}{u(x)} = \alpha(t).e^{i\lambda(e^t-1)x}.e^{-i\mu\frac{(1-e^{-t})}{x}}$$

olduğundan x *sabit tutulduğunda* $\dfrac{u(e^t x)}{u(x)}$ *ifadesi* t*'ye göre ölçülebilir olduğundan* α *fonksiyonu ölçülebilirdir.* $\alpha(0) = 1$ *olduğundan* α *türevlenebilir olur. O halde*

$$\alpha(t) = e^{i\sigma t}, \sigma \in \mathbb{R}$$

şeklinde olmalıdır. Yani

$$\frac{u(e^t x)}{u(x)} = e^{i\sigma t}e^{i(e^t-1)\lambda x}.e^{\frac{i(e^t-1)\mu}{x}}$$

olmalıdır. Bir u_1 *ünimodüler fonksiyonu*

$$u_1(x) := e^{(i\sigma \ln|x|)}.e^{i\lambda x}.e^{\frac{i\mu}{x}}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\frac{u(e^t x)}{u(x)} = \frac{u_1(e^t x)}{u_1(x)} = w_t(x)$$

olur. O halde

$$u(e^t x).u_1(x) = u_1(e^t x).u(x) \Rightarrow u(e^t x).u_1(x).\overline{u_1(x)} = u(e^t x) = u_1(e^t x).u(x).\overline{u_1(x)} \Rightarrow$$

$$u(e^t x).\overline{u_1(e^t x)} = u(x).\overline{u_1(x)}$$

elde edilir. Yani

$$v(x) := u(x).\overline{u_1(x)}$$

için

$$v(e^t x) = v(x), \forall t \geq 0$$

ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için sağlar. Şimdi

$$f(t,x) := \left|v(e^t.x) - v\,(x)\right|$$

olsun. O halde $\forall t \geq 0$ için bir $A_t \subseteq \mathbb{R}$ vardır öyle ki $|\mathbb{R}\backslash A_t| = 0$ ve

$$\forall x \in A_t,\ f(t,x) = 0,$$

O halde,

$\forall t \geq 0, \int\limits_{\mathbb{R}} f(t,x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^+} (\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,x)dx)dt) = 0$ *olur. Fubini-Tonelli teoremi gereği hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,x)dx)dt) = \int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}^+} f(t,x)dt)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^+} f(t,x)dt = 0$$

olur. $x_1 > 0$ ve $x_2 < 0$ alalım öyle ki

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+} f(t,x_1)dt = \int\limits_{\mathbb{R}^+} f(t,x_2)dt = 0$$

olsun. O halde hemen hemen her $t \geq 0$ için,

$$f(t,x_1) = \left|v(e^t.x_1) - v\,(x_1)\right| = 0$$
$$f(t,x_2) = \left|v(e^t.x_2) - v\,(x_2)\right| = 0$$

sağlanır. Eğer $x > 0$ ve $x < 0$ ise $v(x) = v(x_1)$ ve $v(x) = v(x_2)$ sağlanır. O halde

$$v(x) = u(x).\overline{u_1(x)} = \begin{cases} 1, \text{eğer } x > 0 \\ \theta, \ \text{eğer } x < 0 \end{cases} \ |\theta| = 1$$

sağlanmalıdır. Bu da

$$u(x) = (g_{\sigma,\theta}.e_{\lambda,\mu})(x) = u_\theta(x).\left|x\right|^{i\sigma}.e^{i\lambda x}.e^{\frac{i\mu}{x}}$$

$$u_\theta(x) := \begin{cases} 1, \text{eğer } x > 0 \\ \theta, \ \text{eğer } x < 0 \end{cases}$$

şeklinde olması demektir.

KAYNAKÇA

[1] Ahlfors L.V., *Complex analysis* Third edition. McGraw-Hill, New York, **1978**

[2] Douglas R., *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* Springer, **1997.**

[3] Duren P., *Theory of H^p spaces,* Academic Press, **1970.**

[4] Garnett J.B., *Bounded Analytic Functions,* Springer, **2007.**

[5] Folland G.B., *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, John-Wiley Sons, **1984**

[6] Helson, H., *Lectures on Invariant Subspaces,* Academic Press, **1964**.

[7] Katavalos A., Power S., The Fourier Binest Algebra, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **(1997) ,** 122, 525-539.

[8] Katavalos A., Power S., Translation and Dilation Invariant Subspaces of $L^2(\mathbb{R})$, J. Reine Angew. Math. 552 (**2002**), 101-129.

[9] Lax P., *Functional Analysis,* JohnWiley& Sons,**2002.**

[10] Koosis P., *Introduction to H^p spaces,* Cambridge Univ. Press, **1998.**

[11] Radjavi H., Roshental P. , *Invariant Subspaces,* Dover Pub. **, 1973.**

[12] Rudin W.,*Functional Analysis,* Second Edition, MacGraw Hill,**1991.**

[13] Sarason D., Invariant Subspaces, *Topics in Operator Theory,* pp. 1-47, Math. Surveys, No:13, AMS, **1974.**

[14] Stein E. M., Shakarchi R., *Fourier analysis. An introduction,* Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, **2003.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik bilgileri:
Adı Soyadı : Gizem TAŞ PECORARO

Doğum Yeri : Adana

Medeni Hali : Evli

E-posta : giz.tas@gmail.com

Adresi : -

Eğitim

Lise : 2003-2007 Seyhan Rotary Anadolu Lisesi

Lisans : 2007-2011 Mersin Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi :

İngilizce, İyi İtalyanca, B1.1.

İş Deneyimi

1. Öğretmen, Arte Koleji Ankara
   2013-2014,
2. Öğretmen, Jale Tezer Özel Ortaokulu
   2015-2016,
3. Öğretmen, TED Ankara Koleji Vakfı Özel Ortaokulu
   2016-

Deneyim Alanları : -

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi :-

Tezden Üretilmiş Yayınlar :-

Tezden Üretilmiş Poster Sunumu ve/veya Katıldığı Toplantılar :-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/~~DOKTORA~~ TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 20/09/2018

Tez Başlığı / Konusu: Helson-Beurling Teoremi ve Uygulamaları

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 62 sayfalık kısmına ilişkin, 18/09/2018. tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 13 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
20/09/2018

Adı Soyadı: Gizem TAŞ
Öğrenci No: N10321105
Anabilim Dalı: MATEMATİK
Programı: YÜKSEK LİSANS
Statüsü: ■ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Uğur GÜL
(Unvan, Ad Soyad, İmza)