q-HİPERKONVEKS T_0-METRİKİMSİ UZAYLAR

q-HYPERCONVEX T_0-QUASI-METRIC SPACES

ENES DEVECİO

PROF. DR. FİLİZ YILDIZ

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

Haziran 2022

ÖZET

q-HİPERKONVEKS T_0-METRİKİMSİ UZAYLAR

Enes DEVECİO
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Filiz YILDIZ
Haziran 2022, 72 sayfa

Bu tez çalışmasında, öncelikle metrik uzaylarda hiperkonvekslik kavramı verilmiş, bunu takiben hiperkonvekslik kavramının T_0-metrikimsi uzaylara genelleştirmesi olan q-hiperkonvekslik teorisi üzerine çalışılmıştır.

Beş bölümden oluşan tezin birinci bölümünde, tezin amacından ve temel fikirlerden bahsedilerek teze giriş yapılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, üçüncü ve dördüncü bölümde kullanılacak olan metrik ve T_0-metrikimsi uzayların temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise hiperkonveks ve injektif metrik uzay kavramları verilerek bu iki kavramın denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir metrik uzayın hiperkonveks kabuğunun çeşitli özelliklerine değinilmiştir.

Tezin ana fikrini oluşturan dördüncü bölümde, yarı-metrikimsi uzaylar için q-hiperkonvekslik kavramı verilerek, fonksiyon çiftleri uzayları yardımıyla bir T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks kabuğu kavramı incelenmiştir.

Son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen bazı sonuçlar sunularak tez tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hiperkonveks uzay, İnjektif uzay, Hiperkonveks kabuk, T_0-metrikimsi, q-Hiperkonveks uzay, Isbell-tam, Di-injektif uzay, q-Hiperkonveks kabuk

ABSTRACT

q-HYPERCONVEX T_0-QUASI-METRIC SPACES

Enes DEVECİO
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Filiz YILDIZ
July 2022, 72 pages

In this thesis, firstly the concept of hyperconvexity in metric spaces is given and then the q-hyperconvexity theory, which is the generalization of the concept of hyperconvexity to T_0-quasi-metric spaces, is studied.

In the first part of the thesis, which consists of five parts, an introduction to the thesis was made by mentioning the main purpose and the basic ideas of the thesis.

In the second part of the thesis, the basic properties of metric and T_0-quasi-metric spaces that will be used in the third and fourth chapters are given.

In the third chapter, the concepts of hyperconvex and injective metric spaces are given and it is shown that these two concepts are equivalent. In addition, various properties of the hyperconvex hull of a metric space are mentioned.

In the fourth chapter, which constitutes the main idea of the thesis, the concept of q-hyperconvexity for quasi-metric spaces is given and the concept of q-hyperconvex hull of a T_0-quasi-metric space is examined with the help of function pairs spaces.

In the last part, the thesis is completed by presenting some results obtained in the thesis study.

Keywords: Hyperconvex space, Injective space, Hyperconvex hull, T_0-quasi-metric, q-Hyperconvex space, Isbell-complete, Di-injective space, q-Hyperconvex hull

TEŞEKKÜR

Çalışma süresince sabır ve anlayış ile emek gösteren, ilgisini ve zamanını ayıran değerli hocam Prof. Dr. Filiz YILDIZ’a,

Gösterdikleri sevgi ile çalışmamın her aşamasında destek olan annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Page

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iv
İÇİNDEKİLER v
SİMGELER VE KISALTMALAR vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 2
   2.1. Metrik Uzaylar 3
   2.2. T_0-Metrikimsi Uzaylar 5
3. HİPERKONVEKS UZAYLAR 7
   3.1. Hiperkonveks Uzaylar 7
   3.2. Hiperkonveks Altuzaylar 16
   3.3. İnjektif Uzaylar 21
   3.4. Bir Metrik Uzayın Hiperkonveks Kabuğu 23
4. q-HİPERKONVEKS UZAYLAR 31
   4.1. q-Hiperkonveks Uzaylar 31
   4.2. Fonksiyon Çiftleri Uzayı 37
   4.3. Bir T_0-Metrikimsi Uzayın q-Hiperkonveks Kabuğu 40
5. SONUÇ 59

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$a \dot{-} b$	:	$a - b$ ve 0 ın maksimumu
$x \vee y$	:	x ve y nin en küçük üst sınırı
d^t	:	d nin duali
d^s	:	d nin simetrizasyon metriği
d_A	:	d nin A kümesi üzerine kısıtlanması
$B[x, r]$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı disk
$\bar{f}$	:	f nin genişlemesi
$\epsilon_d(X, d)$	:	(X, d) metrik uzayının hiperkonveks kabuğu
$\mathcal{A}(X, d)$	:	(X, d) nin geniş dönüşümleri kümesi
$\epsilon_q(X, d)$	:	(X, d) nin q-hiperkonveks kabuğu

1. GİRİŞ

Fonksiyonel Analizde önemli bir role sahip Hahn-Banach Teoreminin metrik uzaylara bir genişlemesi üzerine çalışmalar sonucunda, metrik uzaylarda bir çeşit arakesit özelliği olarak hiperkonvekslik kavramı ilk olarak 1956 yılında Aronszajn and Panitchpakdi tarafından [1] de keşfedilmiştir. Buna göre; (X, d) bir metrik uzay, $\{x_i\}_{i \in I}$ bu uzaydaki elemanların bir kümesi ve $\{r_i\}_{i \in I}$ negatif olmayan reel sayıların bir kümesi olsun. Eğer,

$$Her\ i, j \in I\ için\ d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

önermesi sağlanıyor ise (X, d) metrik uzayına **hiperkonveks uzay** denir.

Bir metrik uzayın hiperkonveks oluşu, tanımdan da görüleceği gibi bir arakesit özelliğidir. Hiperkonveksliğin önemli bir diğer özelliği, herhangi bir metrik uzayın bir genişlemeyen dönüşümünün genişlemesine dayalı bir kavram olan injektif uzay kavramına denk oluşudur. Bu denklik [1] de kanıtlanmıştır. Yine [1] de hiperkonveksliğin önemli bir özelliği olarak hiperkonveks metrik uzayların tam olduğu da görülmüştür. Ayrıca bir metrik uzayın tam ve metrik olarak konveks oluşunun hiperkonveks oluşunu gerektirdiği aynı makalede gösterilmiştir.

Sabit- nokta teorisinde de önemli bir rol oynayan Hiperkonveks metrik uzayların arakesitleri üzerine bazı yaklaşımlar, bu alanda en ilgi çekici yapılardan biri olan hiperkonveks kabuk (hull) kavramının, [2] ‘de doğmasına neden olmuştur. Her metrik uzayın bir hiperkonveks kabuğunun var olduğu ve bir metrik uzayın hiperkonveks kabuklarının izometriye göre tek olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir metrik uzayın hiperkonveks kabuğunun, uzayı içeren minimal hiperkonveks küme olduğu kanıtlanmıştır.

Hiperkonvekslik kavramının, asimetrik topolojide önemli bir yere sahip T_0-metrikimsi uzayların teorisine taşınması fikri son yıllarda çalışılmaya başlanmıştır. Bu çerçevede; hiperkonveks kavramı, T_0-metrikimsi uzaylara 2012 yılında yayınlanan [3] makalesi ile **q-hiperkonveks T_0-metrikimsi uzay** adı altında genelleştirilmiştir. Ayrıca metrik uzaylardaki injektiflik kavramına benzer olarak di-injektiflik tanımlanmış ve bir T_0-metrikimsi uzayın di-injektif oluşu ile q-hiperkonveks oluşunun denk olduğu gösterilmiştir.

Bunlara ek olarak, q-hiperkonvekslik teorisi içinde q-hiperkonveks kabuk kavramı verilerek, her T_0-metrikimsi uzayın bir q-hiperkonveks kabuğunun var olduğu, minimalliği ve izometriye göre tek olduğu gibi önemli özellikleri kanıtlanmıştır.

Diğer yandan, ilgili teoriler üzerine çalışmalara [4] ve [5] te devam edilmiş ve özel olarak [5] te, her q-hiperkonveks T_0-metrikimsi uzayın uygun koşulları sağlayacak biçimde tanımlanmış doğal bir Takahashi konvekslik yapısı ile donatılabileceği sonucu elde edilmiştir.

Yukarıda sunulan literatür özeti çerçevesinde bu tezin temel amaçları olarak; metrik uzaylarda tanımlanan hiperkonvekslik kavramının, sonlu çarpım uzaylarına taşındığı, sonlu alt uzayların hiperkonveks olmadığı ve hiperkonveks kümelerin birleşiminin hiperkonveks olmak zorunda olmadığı gibi bazı temel sonuçlara yer verilecektir. Ayrıca asimetrik topoloji ortamında son zamanlarda popüler olan q-hiperkonveks T_0-metrikimsi uzaylar üzerinde tanımlanan q-hiperkonvekslik kavramının; uzayın Isbell-tamlığı, metrik olarak konveks oluşu ve karma ikili ara kesit özelliğine sahip olması arasındaki ilişkiler ele alınacaktır. Son olarak, ekstremal fonksiyonlar ile tanımlanan q-hiperkonveks kabuk kavramının kullanışlı topolojik özellikleri incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerideki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Metrik uzaylarla ilgili bölüm için [6] ve [7] nolu kaynaklar, T_0-metrikimsi uzaylarla ilgili bölüm için [5], [8], [9] ve [10] nolu kaynaklar kullanılmıştır.

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar ise d fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine ise bir *metrik uzay* denir.

$(M1)$ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

$(M2)$ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$(M3)$ Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Örnek 2.1.2 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x-y|$ şeklinde tanımlı; $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerindeki *standart (Euclid) metriği* denir.

Örnek 2.1.3 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ;\ x = y \\ 1 & ;\ x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlansın. d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe *ayrık metrik* denir.

Örnek 2.1.4. l_∞, sınırlı reel sayı dizilerinin kümesi olmak üzere,

$$d_\infty(x_n, y_n) = sup\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ile tanımlı $d_\infty : l_\infty \times l_\infty \to \mathbb{R}$ fonksiyonu l_∞ üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.5. (X, d) ve (Y, e) iki metrik uzay ve $f : (X, d) \to (Y, e)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$e(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna *genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive mapping)* denir.

Tanım 2.1.6. (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$a)$ $B(a,r)=\{x\in X \mid d(x,a)<r\}$ kümesine r *yarıçaplı* a *merkezli açık disk (yuvar)* denir.

$b)$ $B[a,r]=\{x\in X \mid d(x,a)\leq r\}$ kümesine r *yarıçaplı* a *merkezli kapalı disk (yuvar)* denir.

$c)$ $S(a,r)=\{x\in X \mid d(x,a)=r\}$ kümesine r *yarıçaplı* a *merkezli kapalı disk yüzeyi* denir.

Tanım 2.1.7. (X,d) bir metrik uzay ve $G\subseteq X$ olsun. Eğer her $x\in G$ için $B(x,r)\subseteq G$ olacak şekilde bir $r>0$ reel sayısı varsa G kümesine bir *açık küme* denir.

Teorem 2.1.8. (X,d) bir metrik uzay ve τ_d açık kümelerin kümesi olsun. Yani

$$\tau_d=\{G\subseteq X \mid Her\ x\in G\ için\ B(x,r)\subseteq G\ olacak\ şekilde\ bir\ r>0\ vardır.\}$$

olsun. O zaman τ_d, X üzerinde bir topolojidir. Bu τ_d topolojisine *metrik topoloji* veya d *metriğinin ürettiği topoloji* denir.

Tanım 2.1.9. (X,d) bir metrik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Eğer her $x,y\in A$ için $d(x,y)<r$ olacak şekilde bir $r>0$ reel sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir.

Tanım 2.1.10. X bir topolojik uzay, (Y,d) bir metrik uzay ve $\mathcal{F}\subseteq C(X,Y)=\{f \mid f: X\to Y\ sürekli\}$ olsun. Bir $a\in X$ noktasını sabitleyelim. Eğer $\epsilon>0$ için

$$\forall f\in\mathcal{F}(x\in U\to d(f(x),f(a))<\epsilon)$$

önermesinin sağlandığı bir $a\in U\subseteq X$ açık kümesi varsa, $\mathcal{F}$ ye a *da eşsürekli* denir. Eğer $\mathcal{F}$ her a da eşsürekli ise, $\mathcal{F}$ ye *eşsürekli* denir.

Teorem 2.1.11. (Arzelà) X kompakt bir topolojik uzay ve her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n: X\to\mathbb{R}^n$ sürekli olsun. Eğer (f_n) dizisi sınırlı ve eşsürekli ise o zaman bu dizinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır.

Teorem 2.1.12. (Ascoli) X kompakt bir topolojik uzay olsun. $C(X, \mathbb{R}^n) = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}^n\}$ metrik uzayının bir alt kümesi kompakttır ancak ve ancak bu alt küme kapalı, sınırlı ve eşsüreklidir.

2.2. T_0-Metrikimsi Uzaylar

Tanım 2.2.1 X bir küme ve $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

(1) $d(x, x) = 0$,

(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşulları sağlanıyorsa, d 'ye *yarı-metrikimsi* denir. Ek olarak, her $x, y \in X$ için,

$$d(x, y) = 0 = d(y, x) \Longrightarrow x = y$$

oluyorsa d 'ye T_0*-metrikimsi* denir. Ayrıca, d *'nin duali*

$$d^t : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d^t(x, y) = d(y, x)$$

biçiminde tanımlanır. Açıkça, $d = d^t$ ise d metriktir.
Diğer yandan, d *'nin simetrizasyon metriği* d^s, her $x, y \in X$ için

$$d^s(x, y) = d(x, y) \vee d^t(x, y)$$

yani, kısaca $d^s = d \vee d^t$ eşitliği ile tanımlanır.

Örnek 2.2.2 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; \ x \geq y \\ 0 & ; \ x < y \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. d, $\mathbb{R}$ üzerinde bir T_0-metrikimsidir. Bu d T_0-metrikimsisine, $\mathbb{R}$ üzerindeki *standart* T_0-metrikimsi denir.

Örnek 2.2.3. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \; x \leq y \\ 1 & ; \; x > y \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. d, $\mathbb{R}$ üzerinde bir T_0-metrikimsidir.

Kanıt. $i)$ Her $x \in \mathbb{R}$ için $d(x,x) = 0$ olduğu açıktır.

$ii)$ Üçgen eşitsizliğini gösterelim: $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. İki durumda inceleyelim:

$a)$ $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, bu durumda $x \leq z$ dir. O halde d nin tanımı gereğince $d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 0$ ve $d(x,z) = 0$ dır. Böylece

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

eşitsizliği sağlanır.

$b)$ $x \nleq y$ veya $y \nleq z$ ise, bu durumda $x > y$ veya $y > z$ dir. O halde d nin tanımı gereğince

$$d(x,y) + d(y,z)$$

toplamı 1 ya da 2 dir. $d(x,z)$ değeri en fazla 1 olacağından,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

eşitsizliği sağlanır. □

Önerme 2.2.4 Bir T_0-metrikimsinin ürettiği topoloji T_0 uzayıdır.

Kanıt. d, X üzerinde bir T_0-metrikimsi olsun. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. O zaman

$$d(x, y) \neq 0 \; ya \; da \; d(y, x) \neq 0$$

dır. Genelliği bozmadan $d(x, y) \neq 0$ alalım. $\epsilon = d(x, y)$ olsun. O halde $B(x, \epsilon/2)$, x elemanını içeren fakat y elemanını içermeyen bir açık kümedir. O halde (X, τ_d) bir T_0 uzayıdır. □

3. HİPERKONVEKS UZAYLAR

Bu bölümde hiperkonveks uzaylarla ilgili temel bilgiler ve sonuçlar verilecektir. Burada [1], [11] , [12], [13], [14] ve [15] nolu kaynaklar kullanılmıştır.

3.1. Hiperkonveks Uzaylar

Tanım 3.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α, β pozitif reel sayıları için

$$d(x, y) \leq \alpha + \beta \Rightarrow z \in B[x, \alpha] \cap B[y, \beta]$$

önermesini sağlayan bir $z \in X$ var ise (X, d) metrik uzayına *metrik olarak konveks* denir.

Tanım 3.1.2. (X, d) bir metrik uzay, $\{x_i\}_{i \in I}$ bu uzaydaki elemanların bir kümesi ve $\{r_i\}_{i \in I}$ negatif olmayan reel sayıların bir kümesi olsun. Eğer,

$$Her \; i, j \in I \; \text{için} \; d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

önermesi sağlanıyor ise (X, d) metrik uzayına *hiperkonveks uzay* denir.

Örnek 3.1.3. Ayrık metrik uzay hiperkonveks değildir.

Kanıt. (X, d) ayrık metrik uzay ve $x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in X$ olsun. $r_1 = r_2 = 1/2$ seçelim. O zaman

$$1 = d(x_1, x_2) \leq r_1 + r_2 = 1/2 + 1/2 = 1$$

eşitsizliği sağlanır fakat $B[x_1, r_1] = \{x_1\}$ ve $B[x_2, r_2] = \{x_2\}$ olduğundan $B[x_1, r_1] \cap B[x_2, r_2] = \emptyset$ olur. $\square$

Teorem 3.1.4. Hiperkonveks metrik uzay tamdır.

Kanıt. (X, d) bir hiperkonveks metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. $n \geq 1$ için, $r_n = sup\{d(x_n, x_m) | m \geq n\}$ olsun. $\{B[x_n, r_n]\}_{n \geq 1}$ kapalı diskler koleksiyonunu göz önüne alalım. X hiperkonveks uzay olduğundan $\bigcap_{n \geq 1} B[x_n, r_n] \neq \emptyset$ dır. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$ dır. O halde $\bigcap_{n \geq 1} B[x_n, r_n]$ arakesiti, (x_n) in limiti olan tek bir noktaya indirgenir. $\square$

Örnek 3.1.5 $(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzayının $(0, 1)$ alt uzayı tam olmadığından hiperkonveks değildir.

Tanım 3.1.6.(X, d) metrik uzay ve $\{B[x_i, r_i] \mid i \in I\}$ kapalı disklerin herhangi ikisinin arakesiti boş küme olmayan bir ailesi olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

ise (X, d) uzayı *ikili arakesit özelliğini* sağlıyor denir.

Teorem 3.1.7. Bir metrik uzay hiperkonvekstir ancak ve ancak metrik olarak konvekstir ve ikili arakesit özelliğini sağlar.

Kanıt. $(\Rightarrow)$: (X, d) bir hiperkonveks metrik uzay olsun. (X, d) nin metrik olarak konveks olduğu açıktır. Şimdi ikili arakesit özelliğini sağladığını gösterelim. Elemanlarının herhangi ikisinin kesişimi boş kümeden faklı $\{B[x_i, r_i] \mid i \in I\}$ ailesini alalım. O halde her $i, j \in I$ için $B[x_i, r_i] \cap B[x_j, r_j] \neq \emptyset$ dir. $z \in B[x_i, r_i] \cap B[x_j, r_j]$ olsun. O halde

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, z) + d(z, x_j) \leq r_i + r_j$$

olur. (X,d) hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{i\in I} B[x_i,r_i] \neq \emptyset$$

dir. Böylece ikili arakesit özelliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$: (X,d) metrik olarak konveks olsun ve ikili arakesit özelliğini sağlasın. I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $x_i \in X$ ve $r_i > 0$ elemanları her $i,j \in I$ için

$$d(x_i,x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliğini sağlasın. (X,d) metrik olarak konveks olduğundan her $i,j \in I$ için

$$B[x_i,r_i] \cap B[x_j,r_j] \neq \emptyset$$

olur. Yani $\{B[x_i,r_i] \mid i \in I\}$ ailesinin herhangi iki elemanının kesişimi boş küme değildir. O halde (X,d) metrik uzayı ikili arakesit özelliğini sağladığından dolayı

$$\bigcap_{i\in I} B[x_i,r_i] \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda (X,d) uzayı hiperkonvekstir. □

Önerme 3.1.8. $\{I_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$, kapalı ve sınırlı aralıkların herhangi ikisi ayrık olmayan bir ailesi olsun. O zaman

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha \neq \emptyset$$

dir.

Kanıt. $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ olsun. $A = sup\{a_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ ve $B = inf\{b_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ olsun. $\alpha, \beta \in \Gamma$ herhangi iki eleman ise

$$[a_\alpha, b_\alpha] \cap [a_\beta, b_\beta] \neq \emptyset$$

ve $a_\alpha \leq b_\beta$ olur. Böylece a_α sayısı, $\{b_\beta \mid \beta \in \Gamma\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. B, $\{b_\beta \mid \beta \in \Gamma\}$ kümesinin alt sınırlarının en büyüğü olduğundan $a_\alpha \leq B$ olur. Benzer şekilde b_α sayısı $\{a_\beta \mid \beta \in \Gamma\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. A, $\{a_\beta \mid \beta \in \Gamma\}$ kümesinin üst sınırlarının en küçüğü olduğundan $A \leq b_\alpha$ olur. $A \leq B$ olduğundan $[A, B] \neq \emptyset$ dir ve her $\alpha \in \Gamma$ için

$$[A, B] \subseteq [a_\alpha, b_\alpha]$$

olur. Böylece

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha \neq \emptyset$$

elde edilir. $\square$

Önerme 3.1.9. $(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzayı metrik olarak konvekstir.

Kanıt. $x, y \in \mathbb{R}$ elemanları α, β pozitif sayıları için

$$d(x, y) = |x - y| \leq \alpha + \beta$$

eşitsizliğini sağlasın. $x < y$ varsayabiliriz. Şimdi

$$B[x, \alpha] \cap B[y, \beta] = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. $B[x, \alpha] = [x - \alpha, x + \alpha]$ ve $B[y, \beta] = [y - \beta, y + \beta]$ olduğundan

$$[x - \alpha, x + \alpha] \cap [y - \beta, y + \beta] = \emptyset$$

dir. O halde $x + \alpha < y - \beta$ dır. $r = d(x + \alpha, y - \beta) > 0$ olsun. O zaman

$$d(x, y) = d(x, x + \alpha) + d(x + \alpha, y - \beta) + d(y - \beta, y) = \alpha + r + \beta$$

dır. Bu ise $d(x, y) \leq \alpha + \beta$ oluşu ile çelişir. O halde $B[x, \alpha] \cap B[y, \beta] = \emptyset$ varsayımı yanlıştır. Böylece

$$B[x, \alpha] \cap B[y, \beta] \neq \emptyset$$

dir. □

Sonuç 3.1.10. $(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzayı hiperkonvekstir.

Kanıt. Önerme 3.1.8. gereğince $(\mathbb{R}, d)$ ikili arakesit özelliğini sağlar. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$, Önerme 3.1.9. gereğince metrik olarak konvekstir. Böylece Teorem 3.1.7. den ikili arakesit özelliğini sağlayan ve metrik olarak konveks olan uzay hiperkonveks olduğundan $(\mathbb{R}, d)$ hiperkonvekstir. □

Önerme 3.1.11. $\mathbb{R}^n$ Euclid metrik uzayının hiperkonveks olması için gerek ve yeter koşul $n = 1$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Leftarrow)$: $n = 1$ ise $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ uzayının hiperkonveks olduğu Sonuç 3.1.10. da gösterildi.

$(\Rightarrow)$: $n > 1$ ise $\mathbb{R}^n$ uzayının hiperkonveks olmadığını gösterelim: Bunun için $x_1 = (0, \ldots, 0)$, $x_2 = (2, 0, \ldots, 0)$, $x_3 = (1, \sqrt{3}, 0, \ldots, 0)$ olsun. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ alalım. $\{B[x_1, r_1], B[x_2, r_2], B[x_3, r_3]\}$ sınıfını düşünelim.

$$B[x_1, r_1] \cap B[x_2, r_2] = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$$

$$B[x_1, r_1] \cap B[x_3, r_3] = \{(1/2, \sqrt{3}/2, 0, \ldots, 0)\}$$

ve

$$B[x_2, r_2] \cap B[x_3, r_3] = \{(3/2, \sqrt{3}/2, 0, \ldots, 0)\}$$

olduğundan $\{B[x_1, r_1], B[x_2, r_2], B[x_3, r_3]\}$ sınıfının herhangi iki elemanının kesişimi boş kümeden farklıdır. Fakat

$$B[x_1, r_1] \cap B[x_2, r_2] \cap B[x_3, r_3] = \emptyset$$

dir. O halde $\mathbb{R}^n$ uzayı ikili arakesit özelliğini sağlamaz. Böylece $\mathbb{R}^n$ hiperkonveks değildir. □

Not. 3.1.12. $\mathbb{R}^n$, öklid metriği ile hiperkonveks olmamasına karşın, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ uzayı hiperkonvekstir. Burada d_∞ metriği, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

olarak tanımlıdır.

Önerme 3.1.13. (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) iki hiperkonveks metrik uzay olsun. $X = X_1 \times X_2$ olmak üzere, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için

$$d(x, y) = \sup\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

ile tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}$ metriği ile (X, d) çarpım uzayı hiperkonvekstir.

Kanıt. (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) hiperkonveks uzaylar olsun. Her $i \in I$ için $x^i = (x_1^i, x_2^i) \in X$ ve $r_i \geq 0$ olmak üzere, her $i, j \in I$ için

$$d(x^i, x^j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman her $i, j \in I$ için

$$d_1(x_1^i, x_1^j) \leq r_i + r_j \; ve \; d_2(x_2^i, x_2^j) \leq r_i + r_j$$

dir. Burada (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{i \in I} B_{d_1}[x_1^i, r_i] \neq \emptyset \; ve \; \bigcap_{i \in I} B_{d_2}[x_2^i, r_i] \neq \emptyset$$

dir. Diğer yandan her $i \in I$ için

$$B_d[x^i, r_i] = B_{d_1}[x_1^i, r_i] \times B_{d_2}[x_2^i, r_i]$$

olduğundan

$$\bigcap_{i \in I} B_d[x^i, r_i] = \bigcap_{i \in I} \big(B_{d_1}[x_1^i, r_i] \times B_{d_2}[x_2^i, r_i]\big) \neq \emptyset$$

dir. O halde (X, d) hiperkonvekstir. □

Sonuç 3.1.14. $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_n, d_n)$ hiperkonveks metrik uzaylar olsun. $X = X_1 \times X_2, \cdots, X_n$ olmak üzere, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ için

$$d(x, y) = \sup\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \cdots, d_n(x_n, y_n)\}$$

ile tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}$ metriği ile (X, d) çarpım uzayı hiperkonvekstir.

Kanıt. Bir önceki önerme ve tümevarımdan açıktır. $\square$

Önerme 3.1.15. A bir indis kümesi olmak üzere, $\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ailesi, l_∞ uzayının kapalı disklerinin herhangi ikisinin kesişimi boş kümeden farklı olan bir ailesi olsun. O zaman

$$\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \neq \emptyset$$

olur.

Kanıt. L_n kümesini

$$L_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in l_\infty \mid \ i \neq n \ ise \ x_i = 0\}$$

olarak tanımlayalım. L_n ile $\mathbb{R}$ 'nin izometrik olduğunu gösterelim.$f : L_n \to \mathbb{R}$ dönüşümünü $f(\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots)) = x_n$ olarak tanımlayalım. Açıkça f bire-bir ve örtendir. Şimdi f nin bir izometri olduğunu gösterelim. d, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği olmak üzere her **x,y** $\in L_n$ için

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = |f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})| = |x_n - y_n| = sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\} = d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur. O halde f bir izometridir. Ayrıca $\{B_\alpha \cap L_n \mid \alpha \in A\}$ ailesi, L_n alt uzayının herhangi ikisi kesişen kapalı disklerinin bir ailesidir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bigcap_{\alpha \in A} (B_\alpha \cap L_n) \neq \emptyset$$

olur. O halde

$$\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \neq \emptyset$$

olduğu görülür. □

Önerme 3.1.16. (l_∞, d_∞) uzayı metrik olarak konvekstir.

Kanıt. $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \in l_\infty$ dizileri, r_α, r_β pozitif reel sayıları için

$$d_\infty(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$$

özelliğini sağlasın. Eğer $\mathbf{x}_\alpha = (x_1, x_2, \cdots)$ ve $\mathbf{x}_\beta = (y_1, y_2, \cdots)$ ise her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$|x_i - y_i| \leq r_\alpha + r_\beta$$

olur. Şimdi her $i = 1, 2, \ldots$ için $z_i = \frac{r_\beta x_i + r_\alpha y_i}{r_\alpha + r_\beta}$ olarak tanımlayalım. O halde her $i = 1, 2, \cdots$ için $|x_i - z_i| \leq r_\alpha$ ve $|z_i - y_i| \leq r_\beta$ olur. Buradan $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots)$ olmak üzere

$$d_\infty(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{z}) \leq r_\alpha$$

ve

$$d_\infty(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{z}) \leq r_\beta$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde

$$\mathbf{z} \in B[x_\alpha, r_\alpha] \cap B[x_\beta, r_\beta]$$

olur. □

Sonuç 3.1.17. (l_∞, d_∞) uzayı hiperkonvekstir.

Kanıt. Önerme 3.1.15. gereğince (l_∞, d_∞) ikili arakesit özelliğini sağlar. Ayrıca (l_∞, d_∞), Önerme 3.1.16. gereğince metrik olarak konvekstir. Böylece Teorem 3.1.7. den ikili arakesit özelliğini sağlayan ve metrik olarak konveks olan uzay hiperkonveks olduğundan (l_∞, d_∞) hiperkonvekstir. □

Tanım 3.1.18. (X, d) bir metrik uzay ve I, $card(I) < m$ olacak şekilde bir indeks kümesi olsun. $\{x_i \mid i \in I\}$ bu uzaydaki elemanların kümesi ve $\{r_i \mid i \in I\}$ negatif olmayan reel sayıların bir kümesi olmak üzere eğer

$$Her\ i, j \in I\ için\ d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

önermesi sağlanıyor ise (X, d) metrik uzayına *m-hiperkonveks* denir.

Tanım 3.1.19. Eğer bir (X, d) metrik uzayında kardinalitesi bir m sayısından küçük yoğun bir alt küme var ise bu uzaya *m-ayrılabilir* denir.

Teorem 3.1.20. Bir metrik uzay hem m-hiperkonveks hem de m-ayrılabilir ise hiperkonvekstir.

Kanıt. (X, d) m-hiperkonveks ve m-ayrılabilir bir metrik uzay, $\{x_i \mid i \in I\}$ bu uzaydaki noktaların bir kümesi ve $\{r_i \mid i \in I\}$ negatif olmayan reel sayıların bir kümesi olsun. (X, d) m-ayrılabilir olduğundan $card(K) < m$ olacak şekilde bir K yoğun alt kümesi vardır. Ayrıca $\{p_k \mid k \in K\}$, K tarafından indekslenmiş yoğun bir küme olsun. $r_k^{'}$ sayısını, en az bir $i \in I$ için

$$B[x_i, r_i] \subseteq B[p_k, r]$$

olacak şekildeki $r > 0$ sayılarının infimumu olarak tanımlayalım. $k, l \in K$ keyfi iki eleman ve $\epsilon > 0$ olsun. $r_k^{'}$ sayısının tanımı gereğince öyle $i, j \in I$ vardır ki

$$B[x_i, r_i] \subseteq B[p_k, r_k^{'} + \epsilon]$$

ve

$$B[x_j, r_j] \subseteq B[p_l, r_l^{'} + \epsilon]$$

olur. $B[x_i, r_i]$ ve $B[x_j, r_j]$ kapalı diskleri m-hiperkonvekslik şartlarını sağlar. Bundan dolayı

$$q \in B[x_i, r_i] \cap B[x_j, r_j]$$

ve dolayısıyla da

$$q \in B[p_k, r_k^{'} + \epsilon] \cap B[p_l, r_l^{'} + \epsilon]$$

olacak şekilde bir q elemanı vardır. O halde

$$d(p_k, p_l) \leq d(p_k, q) + d(p_l, q) \leq r_k^{'} + r_l^{'} + 2\epsilon.$$

ϵ keyfi olduğundan $\{B[p_k, r_k^{'}] \mid k \in K\}$ için m-hiperkonvekslik şartı sağlanır, böylece $x \in \bigcap_{k\in K} B[p_k, r_k^{'}]$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Şimdi her $i \in I$ için $x \in B[x_i, r_i]$ olduğunu gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. $\{p_k \mid k \in K\}$ yoğun bir küme olduğundan öyle bir p_k elemanı vardır ki her x_i için

$$d(x_i, p_k) < \epsilon.$$

Bundan dolayı da

$$B[x_i, r_i] \subseteq B[p_k, r_i + \epsilon]$$

olur. Böylece

$$r_k^{'} \leq r_i + \epsilon$$

ve

$$d(x, x_i) \leq d(x, p_k) + d(p_k, x_i) < r_k^{'} + \epsilon \leq r_i^{'} + 2\epsilon$$

elde edilir. O halde, ϵ keyfi olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

3.2. Hiperkonveks Altuzaylar

Tanım 3.2.1. (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve A üzerine indirgenen metrik $d|_A$ olsun. Eğer $(A, d|_A)$ metrik uzayı hiperkonveks ise A kümesine *hiperkonveks alt uzay* denir.

Örnek 3.2.2. (X, d) metrik uzayında $a \in X$ olmak üzere, tek elemanlı $A = \{a\}$ kümesi hiperkonvekstir.

Örnek 3.2.3. $(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzayında rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ hiperkonveks değildir.

Kanıt. $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ olsun. $r_1 = \sqrt{2} - 1$ ve $r_2 = 2 - \sqrt{2}$ için

$$d(x_1, x_2) = r_1 + r_2$$

dir. Fakat

$$B[x_1, r_1] \cap B[x_2, r_2] \cap \mathbb{Q} = [2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap [\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

dir. $\square$

Teorem 3.2.4. Hiperkonveks bir metrik uzayın keyfi sayıdaki kapalı disklerinin kesişimi hiperkonvekstir.

Kanıt. (X, d) hiperkonveks bir metrik uzay ve $A = \bigcap_{j \in J} B[x_j, r_j]$ olsun. $A = \emptyset$ ise, A nın hiperkonveks olduğu açıktır. $A \neq \emptyset$ olsun. Şimdi $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq A$ elemanları ve $\{r_i\}_{i \in I}$ negatif olmayan reel sayıları, her $i, j \in I$ için

$$d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada I ve J indis kümelerinin ayrık olduğunu varsayabiliriz. A boş küme olmadığından her $i \in I$ ve her $j \in J$ için

$$x_i \in B[x_j, r_j]$$

dir. O halde her $i, j \in I \cup J$ için

$$d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$$

dir. X hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{i\in I} B_A[x_i, r_i] = A \cap \bigcap_{i\in I} B[x_i, r_i] = \bigcap_{i\in J} B[x_i, r_i] \cap \bigcap_{i\in I} B[x_i, r_i] = \bigcap_{i\in I\cup J} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

elde edilir. □

Bu teorem gereğince hiperkonveks bir metrik uzayın herhangi bir kapalı diski hiperkonvekstir.

Önerme 3.2.5. Bir metrik uzayın en az iki elemanlı sonlu alt kümeleri hiperkonveks değildir.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay ve $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ kümesi tek elemandan oluşmayan sonlu bir alt küme olsun. A'nın metrik konveks olmadığını gösterelim: Bunun için $\epsilon = min\{d(a_i, a_j) \mid i \neq j \; ve \; i, j = 1, 2, \cdots, n\}$ ve ϵ'a karşılık gelen elemanlar $a_k, a_l \in A$ olsun. Böylece

$$d(a_k, a_l) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2$$

olur. Fakat $B_A[a_k, \frac{\epsilon}{2}] \cap B_A[a_l, \frac{\epsilon}{2}] = \emptyset$ dir. □

Örnek 3.2.6. Bir metrik uzayda iki hiperkonveks kümenin birleşimi hiperkonveks olmak zorunda değildir.

Kanıt. (X, d) metrik uzay ve $a \neq b$ ve $a, b \in X$ olsun. $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümeleri hiperkonveks olmasına rağmen bu kümelerin birleşimi $\{a, b\}$ kümesi Önerme 3.2.5. gereğince hiperkonveks değildir. □

Tanım 3.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $R : X \to A$ fonksiyonu her $x \in A$ için $R(x) = x$ eşitliğini sağlıyor ise R ye *geri çekme dönüşümü (retraction)* denir. Eğer R geri çekme dönüşümü, her $x, y \in X$ için

$$d\big(R(x), R(y)\big) \leq d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa R ye *genişlemeyen geri çekme dönüşümü* denir.

Tanım 3.2.8. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer X den A ya bir genişlemeyen geri çekme dönüşümü varsa A ya X uzayının bir *genişlemeyen geri çekilmesi* denir.

Teorem 3.2.9. Hiperkonveks bir metrik uzayın genişlemeyen geri çekilmesi hiperkonvekstir.

Kanıt. (X, d) hiperkonveks bir metrik uzay ve $R : X \to A$ bir genişlemeyen geri çekme dönüşümü olsun. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq A$ elemanları ve $\{r_i\}_{i\in I}$ negatif olmayan reel sayıları, her $i, j \in I$ için

$$d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliğini sağlasın. X hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{i\in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

dır. $y \in \bigcap_{i\in I} B[x_i, r_i] \neq \emptyset$ olsun. O zaman $R(y) \in A$ dır. Böylece her $i \in I$ için

$$d(R(y), x_i) = d(R(y), R(x_i) \leq d(y, x_i) \leq r_i$$

olup

$$R(y) \in \bigcap_{i\in I} B_A[x_i, r_i]$$

dır. O halde

$$\bigcap_{i\in I} B_A[x_i, r_i] \neq \emptyset$$

elde edilir. $\square$

Eğer hiperkonveks kümeler azalan bir dizi oluşturursa o zaman bu kümelerin kesişimi hiperkonvekstir. Bunu kanıtlamadan önce aşağıdaki teoremi kanıtsız olarak verelim. Bu teoremin kanıtı [11] de verilmiştir.

Teorem 3.2.10. (X, d) sınırlı ve hiperkonveks bir metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to X$ genişlemeyen dönüşüm ise, o zaman T nin sabit noktaları kümesi $Fix(T) = \{x \in X \mid T(x) = x\}$ boş kümeden farklıdır ve hiperkonvekstir.

Teorem 3.2.11. (X,d) sınırlı ve hiperkonveks bir metrik uzay olsun. Eğer $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ boş olmayan hiperkonveks alt kümelerin azalan bir dizisi ise

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

kesişimi boş kümeden farklı ve hiperkonvekstir.

Kanıt. $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ ve $\mathcal{H} = \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ olsun. $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{H}$ için

$$d(x,y) = \sup\{d(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \cdots\}$$

tanımını yapalım. d, $\mathcal{H}$ üzerinde bir metriktir. $(\mathcal{H}, d)$ nin sınırlı ve hiperkonveks olduğu açıktır. $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dönüşümünü

$$T\big((x_n)\big) = (x_{n+1})$$

olarak tanımlayalım. T nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. O halde Teorem 3.2.10. dan T nin bir sabit noktası vardır. Böylece $n = 1, 2, \cdots$ için $x_n = x_{n+1}$ dir. Buradan $x_n = x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ olup

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n \neq \emptyset$$

dir. Şimdi H nin hiperkonveks olduğunu gösterelim: $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq H$ ve $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ elemanları, her $i, j \in I$ için

$$d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliğini sağlasın. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq H_n$ ve H_n hiperkonveks ve

$$\Big(\bigcap_{i\in I} B[x_i, r_i]\Big) \cap H_n$$

kümesi H_n deki kapalı kümelerin kesişimi olduğundan Teorem 3.2.5. gereğince hiperkonvekstir. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\big[\big(\bigcap_{i\in I}B[x_i,r_i]\big)\cap H_n\big]=\big(\bigcap_{i\in I}B[x_i,r_i]\big)\cap H\neq\emptyset$$

dir. O halde H hiperkonvekstir. □

3.3. İnjektif Uzaylar

Tanım 3.3.1. M ve X birer metrik uzay olsun. Eğer X'in her bir Y alt uzayı için $f : Y \to M$ genişlemeyen dönüşümünün, $\overline{f} : X \to M$ genişlemeyen genişlemesi var ise M metrik uzayına *injektif* denir.

Teorem 3.3.2. Bir metrik uzayın hiperkonveks olması için gerek ve yeter koşul injektif olmasıdır.

Kanıt. H bir hiperkonveks uzay, D bir metrik uzay ve $T : D \to H$ genişlemeyen dönüşüm olsun. M, D'yi içeren bir metrik uzay olmak üzere

$$\mathcal{C}=\{(T_F,F)\mid T_F:F\to M\ ve\ D\subseteq F\subseteq H\}$$

kümesini göz önüne alalım. Burada T_F, T'nin genişlemeyen genişlemesidir. $(T,D)\in\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C}$ kümesi boş kümeden farklıdır. Şimdi $\mathcal{C}$ üzerinde aşağıdaki gibi bir kısmi sıralama inşa edelim:

$$(T_F,F)\preceq(T_G,G)\ ancak\ ve\ ancak\ F\subseteq G\ ve\ T_G\ nin\ F\ ye\ \text{kısıtlanışı}\ T_F\ dir.$$

$\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ de bir zincir olsun. $\cup\mathcal{G}$'nin $\mathcal{C}$ de olduğunu görmek kolaydır. O halde $\mathcal{C}$ ailesi Zorn önsavının koşullarını sağlar. Bundan dolayı $\mathcal{C}$ bir maksimal elemana sahiptir. Bu maksimal eleman (T_1,F_1) olsun. $F_1=M$ olduğunu göstereceğiz: Aksini varsayalım, $F_1\neq M$ ve $z\in M-F_1$ olsun. $\{B[T_1(x),d(x,z)]\mid x\in F_1\}$ ailesini göz önüne alalım. T_1 bir genişlemeyen dönüşüm olduğundan her $x, y \in F_1$ için

$$d(T_1(x), T_1(y)) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

elde edilir. O halde, H bir hiperkonveks uzay olduğundan

$$\bigcap_{x \in F_1} B[T_1(x), d(x, z)] \neq \emptyset$$

dir. Bu kesişimde bir z_1 elemanı alalım. $T^* : F \to H$ dönüşümünü

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1(x) & ; \, x \neq z \\ z_1 & ; \, x = z \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkca $(T^*, F) \in \mathcal{C}$, $(T_1, F_1) \preceq (T^*, F)$ ve $(T_1, F_1) \neq (T^*, F)$ dir. Bu ise (T_1, F_1)'in maksimal oluşu ile çelişir. O halde $F_1 = M$. Diğer bir ifade ile T'nin genişlemeyen bir genişlemesi vardır.

Tersine H injektif olsun. Yani her $Y \subseteq X$ için $T : Y \to H$ genişlemeyen dönüşüm ise T'nin genişlemeyen $T^* : X \to H$ genişlemesi vardır. H nin hiperkonveks olduğunu gösterelim: Önce genelliği bozmadan $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ olduğunu kabul edelim. $D = \{x_i \mid i \in I\}$ ve $\mathcal{F} = \{f : D \to \mathbb{R} \mid d(x_i, x_j) \leq f(x_i) + f(x_j)\}$ kümelerini tanımlayalım. Böylece $r(x_i) = r_i$ ile tanımlı $r : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{F}$ kümesindedir. $\mathcal{F}$ kümesi noktasal olarak kısmi sıralı bir kümedir. Açıkça, elemanları $\mathcal{F}$ kümesinde olan bir zincirin bir alt sınırı vardır. O halde Zorn Lemma gereğince $\mathcal{F}$'nin bir minimal f elemanı vardır. $r \in \mathcal{F}$ olduğundan dolayı her $i \in I$ için $f(x_i) \leq r(x_i)$ dir.

Şimdi f'nin minimal oluşunu kullanarak her $i, j \in I$ için $f(x_i) \leq d(x_i, x_j) + f(x_j)$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım, o zaman $f(x_{j_0}) + d(x_{i_0}, x_{j_0}) < f(x_{i_0})$ olacak şekilde $i_0, j_0 \in$

I vardır. Şimdi $F : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$F(x_i) = \begin{cases} f(x_{i_0}) & ;\ i \neq i_0 \\ d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(j_0) & ;\ i = i_0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $F \leq f$ ve $F \neq f$ dir. Bu ise f nin minimal oluşu ile çelişir. $\omega \notin D$ olacak şekilde bir $\omega \in H$ seçelim. $D^* = D \cup \{\omega\}$ kümesini göz önüne alalım ve bu yeni nokta için $d(\omega, x_i) = f(x_i)$ olsun. Böylece D^*, D'yi içeren bir metrik uzaydır. Varsayımdan dolayı birim fonksiyonun bir genişlemeyen R genişlemesi vardır. Böylece her $i \in I$ için $d(R(x_i), R(\omega)) = d(x_i, R(\omega) \leq f(x_i) \leq r_i$ ve

$$R(\omega) \in \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) \cap H$$

elde edilir. $\square$

3.4. Bir Metrik Uzayın Hiperkonveks Kabuğu

Tanım 3.4.1. (X, d) metrik uzay olsun. Eğer $f : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise f fonksiyonuna *ekstremal fonksiyon* denir.

$a)$ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq f(x) + f(y)$ dir.

$b)$ Eğer $g : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$her\ x, y \in X\ için\ d(x, y) \leq g(x) + g(y)\ ve\ her\ x \in X\ için\ g(x) \leq f(x)$$

şartını sağlarsa $f = g$ dir.

Tanım 3.4.2. (X, d) metrik uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm ekstremal fonksiyonların kümesi $\epsilon_d(X, d)$ e X uzayının *hiperkonveks kabuğu* denir. $\epsilon_d(X, d)$ i bazen ϵX olarak göstereceğiz.

$E : \epsilon X \times \epsilon X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $f, g \in \epsilon X$ için

$$E(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

olarak tanımlayalım. E, ϵX üzerinde bir metriktir. ϵX uzayı hakkında konuşurken E metriğini göz önüne alacağız.

Teorem 3.4.3 (X, d) metrik uzay ve ϵX bu uzayın hiperkonveks kabuğu olsun. O zaman X ile ϵX arasında bir izometri vardır.

Kanıt. $e : X \to \epsilon X$ dönüşümünü, $f_x = d(a, x)$ olmak üzere, $e(x) = f_x$ olarak tanımlayalım. Böylece her $a, b \in X$ için,

$$sup\{|f_x(a) - f_x(b)| : \ x \in X\} = sup\{|d(a,x) - d(b,x)| \ : x \in X\} = d(a,b)$$

olur. O halde $e : X \to \epsilon X$ bir izometridir. $\square$

Önerme 3.4.4. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $r : A \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in A$ için

$$d(x,y) \leq r(x) + r(y)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman r nin her $x, y \in X$ için

$$d(x,y) \leq R(x) + R(y)$$

olacak şekilde bir $R : X \to [0, \infty)$ genişlemesi vardır. Ayrıca her $x \in X$ için $f(x) \leq R(x)$ olacak şekilde bir f ekstremal fonksiyonu vardır.

Kanıt. $r : A \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in A$ için $d(x,y) \leq r(x) + r(y)$ eşitsizliğini sağlasın. $a \in A$ sabit bir eleman olsun. $R : X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$R(x) = \begin{cases} r(a) + d(x,a) & ; \ x \notin A \\ r(x) & ; \ x \in A \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $x, y \in X$ olsun. Eğer $x, y \in A$ ise, R nin tanımı gereği

$$d(x, y) \leq R(x) + R(y)$$

dir. Eğer $x \notin A$ ve $y \in A$ ise, üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(x, a) + r(a) + r(y) = R(x) + R(y)$$

elde edilir. Eğer $x \in A$ ve $y \notin A$ ise, eşitsizlik yukarıdakine benzer şekilde kanıtlanabilir. O halde her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq R(x) + R(y)$$

dir. Önermenin ikinci iddiası için eğer her $x \in X$ için $f(x) \leq R(x)$ eşitsizliğini sağlayan f yoksa $f = R$ alabiliriz. □

Teorem 3.4.5. (X, d) metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) $f \in \epsilon X$ ise, her $x, y \in X$ için $f(x) \leq d(x, y) + f(y)$ dir.

(b) $f \in \epsilon X$ olsun. O zaman her $\delta > 0$ ve her $x \in X$ için

$$f(x) + f(y) < d(x, y) + \delta$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

(c) X kompakt ise ϵX de kompakttır.

(d) $s : \epsilon X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir ekstremal fonksiyon ve $e : X \to \epsilon X$ fonksiyonu $e(x) = f_x$ ile tanımlı olmak üzere $s \circ e : X \to \mathbb{R}$ bir ekstremal fonksiyondur.

Kanıt. (a) Aksini varsayalım. O zaman $d(x_0, y_0) + f(y_0) < f(x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ vardır. $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \neq x_0 \\ d(x_0, y_0) + f(y_0) & ; \ x = x_0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O halde her $x \in X$ için $g(x) \leq f(x_0)$ olur. Özel olarak $x = x_0$ için $g(x_0) < f(x_0)$ olduğundan $f \neq g$ dir. Şimdi her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq g(x) + g(y)$$

olduğunu gösterelim: $x, y \neq x_0$ ise eşitsizliği görmek kolaydır. Bu yüzden $x = x_0$ ve $y \neq x_0$ olsun. O halde

$$d(x, y) = d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \leq \underbrace{d(x_0, y_0) + f(y_0)}_{g(x_0)} + \underbrace{f(y)}_{g(y)}$$

olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq g(x) + g(y)$$

olur. Böylece f minimal olduğundan $f = g$ dir. Bu ise $f \neq g$ ile çelişir.

(b) Aksini varsayalım. Bu durumda öyle bir $a \in X$ ve $\delta_1 > 0$ vardır ki her $y \in X$ için

$$d(a, y) + \delta_1 \leq f(a) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \neq a \\ f(a) - \delta_1 & ; \ x = a \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $f \neq h$ olur. Ayrıca her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq h(x) + h(y)$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $h \leq f$ dir. f minimal olduğundan $f = h$ olur. Bu ise $f \neq h$ ile çelişir.

(c) (a)'dan dolayı her $x, y \in X$ için

$$f(x) - f(y) \leq d(x, y)$$

dir. Burada x ve y nin yerleri değiştirilerek

$$f(y) - f(x) \leq d(y, x) = d(x, y)$$

eşitsizliği, yani

$$-d(x, y) \leq f(x) - f(y)$$

elde edilir. O halde her $x, y \in X$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

dir. Şimdi ϵX in eşsürekli olduğunu gösterelim: $a \in X$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı ve her $f \in \epsilon X$ için

$$Her\ x \in X\ için\ d(a, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstermeliyiz. Her $x, y \in X$ için $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ eşitsizliği sağlandığından δ yı ϵ a eşit seçmek yeterldir. Böylece ϵX kümesi eşsüreklidir. O halde Arzela-Ascoli teoremi gereğince ϵX kümesi kompakttır.

(d) s, ϵX üzerinde ekstremal fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = d(f_x, f_y) \leq s(f_x) + s(f_y) = s \circ e(x) + s \circ e(y)$$

dir. $s \circ e$ nin X üzerinde ekstremal olmadığını kabul edelim. O zaman öyle bir $h \in \epsilon X$ vardır ki her $x \in X$ için $h(x) \leq s \circ e(x)$ ve bir $a \in X$ için $h(a) < s \circ e(a)$ dır. $t : \epsilon X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$t(f) = \begin{cases} s(f) & ;\ f \neq e(a) \\ h(a) & ;\ f = e(a) \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Şimdi her $f, g \in \epsilon X$ için

$$d(f, g) \leq t(f) + t(g)$$

eşitsizliğini sağladığını göstereceğiz. Bunun için yukarıdaki eşitsizliğin $g = e(a)$ için sağlandığını, yani

$$d(f, e(a)) \leq t(f) + t(e(a))$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Öncelikle her $\delta > 0$ için $f(a) + f(y) < d(a, y) + \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $y \in X$ vardır. Eğer $y = a$ ise $f(a) < (1/2)\delta$ dır. Böylece

$$d(f, e(a)) + f(a) \leq \frac{1}{2}\delta + t(f) + t(e(a))$$

dır. Diğer yandan $y \neq a$ ve $f \neq e(a)$ ise

$$d(f, e(a)) + f(y) - \delta = f(a) + f(y) - \delta < d(a, y)$$

ve

$$d(a, y) \leq h(a) + h(y) \leq h(a) + s \circ e(y) = t(e(a)) + t(e(y))$$

dir. s ekstremal fonksiyon olduğundan

$$t(e(y)) = s(e(y)) \leq s(f) + d(f, e(y)) = t(f) + f(y)$$

ve f ekstremal olduğundan $d(f, e(y)) = f(y)$ dir. Böylece

$$d(f, e(a)) + f(y) - \delta < t(e(a)) + t(e(y))$$

ve

$$t(e(y)) \leq t(f) + f(y)$$

dir. Bu son iki eşitsizliği birleştirerek

$$d(f, e(a)) + f(y) - \delta + t(e(y)) < t(e(a)) + t(e(y)) + t(f) + f(y)$$

elde edilir. Buradan ise

$$d(f, e(a)) - \delta < t(e(a)) + t(f)$$

dir. δ keyfi olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki iki teorem hiperkonveks kabuk kavramının temel özelliklerini verir.

Teorem 3.4.6. Bir metrik uzayın hiperkonveks kabuğu hiperkonvekstir.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay ve ϵX, bu uzayın hiperkonveks kabuğu olsun. $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \epsilon X$ elemanları ve $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq [0, \infty)$ reel sayıları, her $i, j \in I$ için

$$d_\infty(f_i, f_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliğini sağlasın. $r : \{f_i\}_{i\in I} \to [0, \infty)$ fonksiyonunu $r(f_i) = r_i$ olarak tanımlayalım. Önerme 3.4.4. den dolayı r fonksiyonunu her $f, g \in \epsilon X$ için

$$d_\infty(f, g) \leq r(f) + r(g)$$

olacak şekilde genişletebiliriz. Yine Önerme 3.4.4. den $h \leq r$ olacak şekilde ϵX üzerinde h ekstremal fonksiyonu vardır. Ayrıca Teorem 3.4.5. den $h \circ e$, X üzerinde ekstremaldir. Yani $h \circ e \in \epsilon X$ dir. Buradan her $x \in X$ için

$$h \circ e(x) - f(x) = h \circ e(x) - d_\infty(f, e(x)) \leq h(f) \leq r(f)$$

ve

$$f(x) - h \circ e(x) = d_\infty(f, e(x)) - h \circ e(x) \leq h(f) \leq r(f)$$

dir. Böylece her $f \in \epsilon X$ için

$$d_\infty(f, h \circ e) \leq r(f)$$

olur. Yani

$$h \circ e \in \bigcap_{f\in\epsilon X} B[f, r(f)]$$

dir. Ayrıca

$$\bigcap_{f\in\epsilon X} B[f, r(f)] \subseteq \bigcap_{i\in I} B[f_i, r_i]$$

olduğundan

$$h \circ e \in \bigcap_{i \in I} B[f_i, r_i]$$

dir. O halde

$$\bigcap_{i \in I} B[f_i, r_i] \neq \emptyset$$

elde edilir. □

Teorem 3.4.7. Bir metrik uzayın hiperkonveks kabuğu, bu uzayı içeren minimal hiperkonveks uzaydır.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay ve H, ϵX in X i içeren hiperkonveks bir alt kümesi olsun. ϵX hiperkonveks olduğundan $R : \epsilon X \to H$ genişlemeyen geri çekilme dönüşümü vardır. $f \in \epsilon X$ olsun. O zaman her $x \in X$ için

$$d(R(f), e(x)) = R(f)(x) \leq d(f, e(x)) = f(x)$$

dir. f ekstremal fonksiyon olduğundan $R(f) = f$ dir. O halde $H = \epsilon X$ dir. Böylece ϵX in, X i içeren öz alt kümesi yoktur. □

Teorem 3.4.8. Bir metrik uzayın iki hiperkonveks kabuğu izometriktir.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay, H_1 ve H_2, X in iki hiperkonveks kabuğu olsun. H_1 ve H_2 hiperkonveks olduğundan injektif uzaylardır. Bundan dolayı X'e kısıtlanışı birim fonksiyon olan bir $T_1 : H_1 \to H_2$ genişlemeyen dönüşümü vardır. Benzer şekilde yine X'e kısıtlanışı birim fonksiyon olan $T_2 : H_2 \to H_1$ genişlemeyen dönüşümü vardır. Şimdi $T_1 \circ T_2$'in H_2 üzerinde birim fonksiyon olduğunu gösterelim: $T_1 \circ T_2$, H_2'den H_2'ye bir dönüşümdür ve X'e kısıtlanması X'in birim fonksiyonudur. O zaman $Fix(T_1 \circ T_2) = \{x \in H_1 \mid T_1 \circ T_2(x) = x\}$ olmak üzere $X \subseteq Fix(T_1 \circ T_2)$ olur. T genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan Teorem 3.2.10. gereğince $Fix(T)$ hiperkonvekstir. Böylece $Fix(T_1 \circ T_2)$, X'i içeren hiperkonveks bir kümedir. H_2 minimal olduğundan $Fix(T_1 \circ T_2) = H_2$ dir. Benzer şekilde $T_2 \circ T_1$ in, H_1 üzerinde birim dönüşüm olduğu gösterilebilir. O halde T_1 ve T_2 den biri diğerinin tersidir. Böylece H_1 ve H_2 izometriktir. □

4. q-HİPERKONVEKS UZAYLAR

Bu bölümde, yarı-metrikimsi uzaylar için tanımlanan q-hiperkonvekslik kavramı incelenerek bir yarı-metrikimsi uzayın q-hiperkonveksliği ile bu uzayın simetrizasyon metrik uzayının hiperkonveksliği arasındaki ilişkiye yer verilmiştir. Bu bölüm boyunca [3] nolu kaynak temel alınmıştır. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ standart T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks oluşu özgün olarak kanıtlanmıştır.

4.1. q-Hiperkonveks Uzaylar

Tanım 4.1.1 (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay, $\{x_i \mid i \in I\}$ bu uzaydaki noktaların kümesi, $\{r_i \mid i \in I\}$ ve $\{s_i \mid i \in I\}$ negatif olmayan reel sayıların birer kümesi olsun. Eğer her $i, j \in I$ için

$$d(x_i, x_j) \leq r_i + s_j \Rightarrow \bigcap_{i \in I} (B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) \neq \emptyset$$

oluyor ise (X, d) uzayına *q-hiperkonveks (Isbell-convex)* denir.

Örnek 4.1.2. Bir (X, d) yarı-metrikimsi uzayda $a \in X$ olmak üzere, $\{a\}$ tek nokta kümesi q-hiperkonvekstir.

Örnek 4.1.3. $(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzay q-hiperkonveks değildir.

Kanıt. Her $i \in [0, 1]$ için $r_i = \frac{1}{4}$ ve $s_i = \frac{3}{4}$ olarak seçelim. Böylece her $i, j \in [0, 1]$ için $d(i, j) \leq 1 = r_i + s_j$ olur, ama

$$\bigcap_{i \in [0,1]} (B_d[i, r_i] \cap B_d[i, s_i]) \subseteq B_d[0, \frac{1}{4}] \cap B_d[1, \frac{1}{4}] = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cap [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}] = \emptyset$$

dir. □

Tanım 4.1.4. (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her r, s pozitif reel sayıları için

$$d(x, y) \leq r + s \Rightarrow d(x, z) \leq r \; ve \; d(z, y) \leq s$$

önermesini sağlayan bir $z \in X$ var ise (X, d) uzayına *metrik olarak konveks* denir.

Tanım 4.1.5. (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay olsun. $\mathcal{A} = \{B_d[x_i, r_i], B_{d^t}[x_i, s_i] \mid i \in I,\ x_i \in X,\ r_i, s_i > 0\}$ kapalı yuvarların bir ailesi olmak üzere, eğer her $i, j \in I$ için

$$B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_j, s_j] \neq \emptyset$$

ise $\mathcal{A}$ ya *karma ikili arakesit özelliğine* sahiptir denir.

Tanım 4.1.6. (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay olsun. Eğer karma ikili arakesit özelliğine sahip her $\{B_d[x_i, r_i], B_{d^t}[x_i, s_i] \mid i \in I,\ x_i \in X,\ r_i, s_i > 0\}$ ailesi için,

$$\bigcap_{i \in I} (B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) \neq \emptyset$$

ise (X, d) uzayına *Isbell-tam* denir.

Teorem 4.1.7. Bir yarı-metrikimsi uzay q-hiperkonvekstir ancak ve ancak metrik olarak konvekstir ve Isbell-tamdır.

Kanıt. (X, d) q-hiperkonveks yarı-metrikimsi uzay olsun. Önce metrik olarak konveks olduğunu gösterelim. r ve s pozitif reel sayılar olmak üzere $x, y \in X$ elemanları $d(x, y) \leq r + s$ eşitsizliğini sağlasın. $d(x, z) \leq r$ ve $d(z, y) \leq s$ eşitsizliklerini sağlayan bir $z \in X$ olduğunu göstereceğiz. (X, d) q-hiperkonveks olduğundan $B_d[x, r] \cap B_{d^t}[y, s] \neq \emptyset$ olur. Bu kesişimden alınan bir z elemanı istenilen özelliği sağlar. Isbell-tam olduğunu göstermek için karma ikili arakesit özelliğini sağlayan bir $\{(B_d[x_i, r_i], B_{d^t}[x_i, s_i]) \mid i \in I,\ x_i \in X,\ r_i, s_i > 0\}$ ailesini alalım. Bu aile için karma ikili arakesit özelliği sağlandığından her $i \in I$ için $B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i] \neq \emptyset$ olur. Buradan her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + s_j$ dir. (X, d) hiperkonveks olduğundan $\bigcap_{i \in I}(B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) \neq \emptyset$ dir ve böylece (X, d) Isbell-tamdır.

Tersine (X, d) metrik olarak konveks ve Isbell-tam olsun. $\{x_i \mid i \in I\}$ uzayın elemanlarının bir kümesi, $\{r_i \mid i \in I\}$ ve $\{s_i \mid i \in I\}$ pozitif reel sayıların kümesi olsun öyle ki her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + s_j$ eşitsizliği sağlansın. O zaman (X, d) metrik olarak konveks olduğundan her $i, j \in I$ için $B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_j, s_j] \neq \emptyset$ olur. Böylece $\{B_d[x_i, r_i], B_d[x_i, s_i] \mid i \in I\}$ sınıfı karma ikili arakesit özelliğini sağlar. (X, d) aynı zamanda Isbell-tam olduğundan

$$\bigcap_{i \in I} (B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) \neq \emptyset$$

olur. O halde (X, d) q-hiperkonvekstir. $\Box$

Önerme 4.1.8. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $d(x, y) = \max\{x - y, 0\}$ T_0-metrikimsisi ile $(\mathbb{R}, d)$ uzayı Isbell-tamdır.

Kanıt. $\{B_d[x_i, r_i], B_{d^t}[x_i, s_i] \mid i \in I,\ x_i \in \mathbb{R},\ r_i, s_i > 0\}$ ailesi karma ikili arakesit özelliğini sağlasın. Yani her $i, j \in I$ için $B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_j, s_j] \neq \emptyset$ olsun ve

$$\bigcap_{i \in I} (B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) \neq \emptyset$$

olduğunu gösterelim: $B_d[x_i, r_i] = [x_i - r_i, \infty)$ ve $B_{d^t}[x_j, s_j] = (-\infty, x_j + s_j]$ olduğundan her $i, j \in I$ için $B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_j, s_j] \neq \emptyset$ ise, her $i, j \in I$ için

$$[x_i - r_i, \infty) \cap (-\infty, x_j + s_j] \neq \emptyset$$

olur. O halde $[x_i - r_i, \infty) \cap (-\infty, x_j + s_j] = [x_i - r_i, x_j + s_j]$ dir. $j = i$ alınırsa her $i \in I$ için

$$B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i] = [x_i - r_i, \infty) \cap (-\infty, x_j + s_j] = [x_i - r_i, x_i + s_i]$$

elde edilir. $\{x_i - r_i \mid i \in I\}$ kümesi sabit bir $x_i + s_i$ ile üstten sınırlıdır. Benzer şekilde $\{x_i + s_i \mid i \in I\}$ kümesi sabit bir $x_i - r_i$ ile alttan sınırlıdır. Şimdi $A = sup\{x_i - r_i \mid i \in I\}$ ve $B = inf\{x_i + s_i \mid i \in I\}$ olsun. O halde her $i \in I$ için

$$[A, B] \subseteq [x_i - r_i, x_i + s_i]$$

olur ve buradan

$$[A, B] \subseteq \bigcap_{i \in I} [x_i - r_i, x_i + s_i]$$

dir, yani

$$\bigcap_{i \in I} (B_d[x_i, r_i] \cap B_{d^t}[x_i, s_i]) = \bigcap_{i \in I} [x_i - r_i, x_i + s_i] \neq \emptyset$$

elde edilir. □

Önerme 4.1.9. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $d(x, y) = \max\{x - y, 0\}$ T_0-metrikimsisi ile $(\mathbb{R}, d)$ uzayı metrik olarak konvekstir.

Kanıt. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $s, r > 0$ için

$$d(x, y) \leq r + s \Rightarrow d(x, z) \leq r \; ve \; d(z, y) \leq s$$

önermesini sağlayan bir $z \in \mathbb{R}$ olduğunu göstermeliyiz. Üç durumda inceleyelim:

(i) $x = y$ ise. Bu durumda $z = x = y$ olarak alınırsa $d(x, y) = 0, d(x, z) = 0, d(z, y) = 0$ olacağından her $r, s > 0$ için

$$d(x, y) \leq r + s \Rightarrow d(x, z) \leq r \; ve \; d(z, y) \leq s$$

önermesi sağlanır.

(ii) $x > y$ ise. $d(x, y) \leq r + s$ olsun. $x > y$ olduğundan

$$d(x, y) = x - y \leq r + s$$

olur. $z = y + s$ olsun. O halde

$$d(x, z) = x - z = x - (y + s) = x - y - s \leq r + s - s = r$$

ve

$$d(z, y) = d(y + s, y) = (y + s) - y = s \leq s$$

olur.

(iii) $x < y$ ise. $d(x,y) = 0$ olacağından her $r, s > 0$ için $d(x,y) \leq r + s$ eşitsizliği sağlanır. $z = y$ olsun. O halde

$$d(x,z) = d(x,y) = 0 \leq r$$

ve

$$d(z,y) = d(y,y) = 0 \leq s$$

olur. □

Sonuç. 4.1.10. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $d(x,y) = \max\{x - y, 0\}$ T_0-metrikimsisi ile $(\mathbb{R}, d)$ uzayı q-hiperkonvekstir.

Kanıt. $(\mathbb{R}, d)$, Önerme 4.1.9. dan dolayı metrik olarak konvekstir ve Önerme 4.1.8. den dolayı Isbell-tamdır. Teorem 4.1.7. gereğince metrik olarak konveks ve Isbell-tam bir uzay q-hiperkonveks olduğundan $(\mathbb{R}, d)$ q-hiperkonvekstir. □

Lemma 4.1.11. (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay, $x \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. O zaman

$$B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r] = B_{d^s}[x,r]$$

sağlanır.

Kanıt. $y \in B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r]$ olsun. O zaman kapalı disklerin tanımları gereği

$$d(x,y) \leq r \; ve \; d^t(x,y) \leq r$$

olur. Böylece $d^s(x,y) = max\{d(x,y), d^t(x,y)\} \leq r$ dir. Yani $y \in B_{d^s}[x,r]$ dir. y keyfi olduğundan

$$B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r] \subseteq B_{d^s}[x,r]$$

sağlanır. Şimdi $y \in B_{d^s}[x,r]$ olsun. O halde $d^s(x,y) = max\{d(x,y), d^t(x,y)\} \leq r$ olur. Böylece

$$d(x,y) \leq r \; ve \; d^t(x,y) \leq r$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan $y \in B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r]$ elde edilir. y keyfi olduğundan

$$B_{d^s}[x,r] \subseteq B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r]$$

sağlanır. O halde $B_d[x,r] \cap B_{d^t}[x,r] = B_{d^s}[x,r]$ dir. $\square$

Önerme 4.1.12. Eğer bir (X,d) yarı-metrikimsi uzayı q-hiperkonveks ise (X,d^t) yarı-metrikimsi uzayı da q-hiperkonvekstir.

Kanıt. Tanımdan açıktır.

Önerme 4.1.13. Eğer bir (X,d) yarı-metrikimsi uzayı q-hiperkonveks ise (X,d^s) metrik uzayı hiperkonvekstir.

Kanıt. (X,d) q-hiperkonveks uzay olsun. $\{x_i \mid i \in I\}$, bu uzaydaki elemanların kümesi ve $\{r_i \mid i \in I\}$ pozitif reel sayıların kümesi olsun öyle ki her $i,j \in I$ için

$$d^s(x_i,x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliği sağlansın. Bu eşitsizlik sağlandığından dolayı aynı zamanda her $i,j \in I$ için

$$d(x_i,x_j) \leq r_i + r_j$$

eşitsizliği de sağlanır. (X,d) q-hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{i\in I}(B_d[x_i,r_i] \cap B_{d^t}[x_i,r_i]) \neq \emptyset$$

olur. Lemma 4.1.11. den dolayı $B_d[x_i,r_i] \cap B_{d^t}[x_i,r_i] = B_{d^s}[x_i,r_i]$ dir. Buradan

$$\emptyset \neq \bigcap_{i\in I}(B_d[x_i,r_i] \cap B_{d^t}[x_i,r_i]) = \bigcap_{i\in I} B_{d^s}[x_i,r_i]$$

olur. O halde (X,d^s) metrik uzayı hiperkonvekstir. $\square$

Bu önerme gereğince, simetrizasyon metriği hiperkonveks olmayan uzay q-hiperkonveks olamaz. Bununla ilgili aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.1.14. $\mathbb{R}$ üzerinde $d(x, y) = max\{x - y, 0\}$ ile tanımlanan T_0-metrikimsiyi düşünelim. $(0, 1)$ açık aralığı $(\mathbb{R}, d^s)$ metrik uzayında hiperkonveks olmadığından $(\mathbb{R}, d)$ uzayında q-hiperkonveks değildir.

4.2. Fonksiyon Çiftleri Uzayı

Bu alt bölümde q-hiperkonveks kabuk kavramı için gerekli olan birkaç önerme verilmiştir. Tezin geri kalan bölümlerinde "$\dot{-}$" gösterimi, a ve b reel sayıları için

$$a \dot{-} b = max\{a - b, 0\}$$

anlamında kullanılacaktır.

Önerme 4.2.1 (X, d) bir yarı-metrikimsi uzay ve $\mathcal{FP}(X, d) = \{f = (f_1, f_2) \mid f_i : X \to [0, \infty),\ i = 1, 2\}$ olmak üzere

$$D(f, g) = \sup_{x \in X}(f_1(x) \dot{-} g_1(x)) \vee \sup_{x \in X}(g_2(x) \dot{-} f_2(x))$$

ile tanımlı $D : \mathcal{FP}(X, d) \times \mathcal{FP}(X, d) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathcal{FP}(X, d)$ üzerinde bir T_0-metrikimsidir.

Kanıt. $i)$ Her $f \in \mathcal{FP}(X, d)$ için $D(f, f) = 0$ olduğu açıktır.

$ii)$ Her $f, g, h \in \mathcal{FP}(X, d)$ için

$$D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$$

olduğunu gösterelim. Kolaylık olması için $\sup_{x \in X}(f(x) \dot{-} g(x))$ yerine $\sup f \dot{-} g$ yazalım.

$$\sup(f_1 \dot{-} g_1) \leq \sup(f_1 \dot{-} h_1) + \sup(h_1 \dot{-} g_1)$$

ve

$$\sup(g_2 \dot{-} f_2) \leq \sup(g_2 \dot{-} h_2) + \sup(h_2 \dot{-} f_2)$$

olduğundan

$$\sup(f_1 \dot{-} g_1) \vee \sup(g_2 \dot{-} f_2) \leq (\sup(f_1 \dot{-} h_1) + \sup(h_1 \dot{-} g_1)) \vee (\sup(g_2 \dot{-} h_2) + \sup(h_2 \dot{-} f_2))$$

dır. Şimdi $a = \sup(f_1 \dot{-} h_1)$, $b = \sup(h_1 \dot{-} g_1)$, $c = \sup(g_2 \dot{-} h_2)$, $d = \sup(h_2 \dot{-} f_2)$ tanımlarını yapalım ve

$$(a + b) \vee (c + d) \leq (a \vee d) + (b \vee c)$$

olduğunu gösterelim. Açıkça;

$$a \leq a \vee d \; ve \; b \leq b \vee c$$

olduğundan

$$(a + b) \leq (a \vee d) + (b \vee c)$$

dir. Benzer şekilde

$$c \leq b \vee c \; ve \; d \leq a \vee d$$

olduğundan

$$(c + d) \leq (a \vee d) + (b \vee c)$$

dir. Böylece

$$(a + b) \vee (c + d) \leq (a \vee d) + (b \vee c)$$

eşitsizliği sağlanır. □

Önerme 4.2.2 (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. O zaman her $a, b \in X$ için $d(a, b) = D(f_a, f_b)$ dir.

Kanıt. Önce $sup\{d(a,x)-d(b,x) \mid x \in X\} = d(a,b)$ eşitliğini gösterelim. Üçgen eşitsizliği gereğince her $x \in X$ için

$$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan ise her $x \in X$ için

$$d(a,x) - d(b,x) \leq d(a,b)$$

elde edilir. Böylece $sup\{d(a,x) - d(b,x) \mid x \in X\} \leq d(a,b)$ dir. Diğer yandan her $x \in X$ için

$$d(a,x) - d(b,x) \leq sup\{d(a,x) - d(b,x) \mid x \in X\}$$

eşitsizliği sağlandığı için özel olarak $x = b$ için de sağlanır. Böylece

$$d(a,b) \leq sup\{d(a,x) - d(b,x) \mid x \in X\}$$

olur. O halde $sup\{d(a,x) - d(b,x) \mid x \in X\} = d(a,b)$ dir. Benzer şekilde $sup\{d(x,a) - d(x,b) \mid x \in X\} = d(a,b)$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $d(a,b) = D(f_a, f_b)$ olduğunu gösterelim:

$$D(f_a, f_b) = \sup_{x \in X}((f_a)_1(x) \dot{-} (f_b)_1(x)) \vee \sup_{x \in X}((f_b)_2(x) \dot{-} (f_a)_2(x))$$

olduğundan f_a ve f_b tanımları dikkate alınarak

$$D(f_a, f_b) = \sup_{x \in X}(d(a,x) \dot{-} d(b,x)) \vee \sup_{x \in X}(d(x,b) \dot{-} d(x,a))$$

dir. Böylece

$$D(f_a, f_b) = d(a,b) \vee d(a,b) = d(a,b)$$

elde edilir. □

Önerme 4.2.3. (X,d) bir yarı-metrikimsi uzay olsun. $e_X(a) = f_a$ ile tanımlı $e_X : (X,d) \to (\mathcal{FP}(X,d), D)$ fonksiyonu bir izometridir.

Kanıt. Bir önceki önermeden açıktır. □

4.3. Bir T_0-Metrikimsi Uzayın q-Hiperkonveks Kabuğu

Tanım 4.3.1 (X,d) bir yarı-metrikimsi ve $f=(f_1,f_2)\in\mathcal{FP}(X,d)$ olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(x,y)\leq f_2(x)+f_1(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna *geniş fonksiyon çifti* denir. (X,d) uzayının tüm geniş fonksiyon çiftleri kümesi $\mathcal{A}(X,d)$ ile gösterilir.

Önerme 4.3.2 (X,d) yarı-metrikimsi uzayında her $a\in X$ için f_a geniş bir fonksiyon çiftidir.

Kanıt. Her $x,y\in X$ için

$$d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)$$

eşitsizliği sağlanır. $(f_a)_2(x)=d(x,a)$ ve $(f_a)_1(y)=d(a,y)$ olduğundan, her $x,y\in X$ için

$$d(x,y)\leq (f_a)_2(x)+(f_a)_1(y)$$

eşitsizliği sağlanır. □

Tanım 4.3.3. (X,d) bir yarı-metrikimsi uzay ve $f=(f_1,f_2)\in\mathcal{FP}(X,d)$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa f fonksiyonuna *ekstremal fonksiyon çifti* denir

$a)$ f geniş fonksiyon çiftidir.

$b)$ Her g geniş fonksiyon çifti ve her $x\in X$ için

$$g_1(x)\leq f_1(x)\ ve\ g_2(x)\leq f_2(x)\implies g=f$$

dir.

Tanım 4.3.4. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. (X, d) üzerinde tanımlı tüm ekstremal fonksiyon çiftlerinin $\epsilon_q(X, d)$ kümesine, (X, d) nin *q-hiperkonveks kabuğu (Isbell-hull)* denir. $\epsilon_q(X, d)$ i bazen $\epsilon_q(X)$ olarak göstereceğiz.

Burada $\epsilon_q(X)$ üzerindeki T_0-metrikimsiyi Önerme 4.2.1. de tanımlanan D T_0-metrikimsisi olarak alacağız.

Önerme 4.3.5.(X, d) yarı-metrikimsi uzay ve$f$ bir ekstremal fonksiyon çifti olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$f_1(x) - f_1(y) \leq d^t(x, y) \; ve \; f_2(x) - f_2(y) \leq d(x, y)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt. İkinci eşitsizliği gösterelim. Aksini varsayalım. $f_2(x_0) - f_2(y_0) > d(x_0, y_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var olsun. $g_2 : X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$g_2(x) = \begin{cases} f_2(x) & ; \; x \neq x_0 \\ d(x_0, y_0) + f_2(y_0) & ; \; x = x_0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $(f_1, g_2) < (f_1, f_2)$ olduğu açıktır. Şimdi (f_1, g_2) fonksiyon çiftinin geniş fonksiyon olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ olsun. İki durumda inceleyelim:

$i)$ $x \neq x_0$ ise (f_1, f_2) geniş olduğundan

$$d(x, y) \leq f_2(x) + f_1(y) = g_2(x) + f_1(y)$$

dir.

$ii)$ $x = x_0$ ise

$$d(x, y) = d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \leq f_2(y_0) + f_1(y) \leq g_2(x) + f_1(y)$$

dir. O halde (f_1, g_2) fonksiyon çifti geniştir. Bu ise (f_1, f_2) nin minimal oluşu ile çelişir. Böylece her $x, y \in X$ için

$$f_2(x) - f_2(y) \leq d(x, y)$$

dir. Diğer eşitsizlik ise benzer şekilde gösterilebilir. □

Aşağıdaki önermelerde $[0, \infty)$ üzerindeki T_0-metrikimsiyi $\mathbb{R}$ üzerindeki standart T_0-metrikimsi olarak alacağız.

Önerme 4.3.6. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $f = (f_1, f_2)$ bu uzay üzerinde geniş bir fonksiyon çifti olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa f bir ekstremal fonksiyon çiftidir.

$a)$ $f_1 : (X, d^t) \to [0, \infty)$ ve $f_2 : (X, d) \to [0, \infty)$ genişlemeyen fonksiyonlardır.

$b)$ $\lim_{n\to\infty} f_1(a_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} f_2(a_n) = 0$ olacak şekilde X de bir (a_n) dizisi vardır.

Kanıt. Aksini varsayalım. O zaman $g < f$ olacak şekilde bir g geniş fonksiyon çifti vardır. $g_2 < f_2$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan $g_2(x_0) < f_2(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. f_2 genişlemeyen bir fonksiyon olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_2(x_0) \dot{-} f_2(a_n) \leq d(x_0, a_n)$$

dir. Diğer yandan $f_2(x_0) - f_2(a_n) \leq f_2(x_0) \dot{-} f_2(a_n)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_2(x_0) - f_2(a_n) \leq d(x_0, a_n)$$

dir. g geniş fonksiyon olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_0, a_n) \leq g_2(x_0) + g_1(a_n)$$

olur. Ayrıca $g < f$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_2(x_0) + g_1(a_n) \leq f_2(x_0) + f_2(a_n)$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_2(x_0) - f_2(a_n) \leq d(x_0, a_n) \leq g_2(x_0) + g_1(a_n) < f_2(x_0) + f_2(a_n)$$

dir. Buradan ise limit alınırsa

$$f_2(x_0) = \lim_{n \to \infty} d(x_0, a_n) = g_2(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $f_2(x_0) < g_2(x_0)$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. f ekstremal fonksiyon çiftidir. □

Önerme 4.3.7. Her $a \in X$ için f_a fonksiyon çifti ekstremaldir.

Kanıt. f_a nın geniş olduğu Önerme 4.3.2 de gösterildi. Ekstremal olduğunu göstermek için Önerme 4.3.5 i kullanacağız. Bunun için önce

$$(f_a)_1 : (X^t, d) \to [0, \infty) \; ve \; (f_a)_2 : (X, d) \to [0, \infty)$$

fonksiyonlarının genişlemeyen fonksiyonlar olduğunu gösterelim: Üçgen eşitsizliğinden her $x, y \in X$ için

$$d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$$

dir. Yani her $x, y \in X$ için

$$(f_a)_2(x) - (f_a)_2(y) \leq d(x, y)$$

dir. Buradan ise her $x, y \in X$ için

$$(f_a)_2(x) \dot{-} (f_a)_2(y) \leq d(x, y)$$

olur. O halde $(f_a)_2$ genişlemeyen fonksiyondur. Benzer şekilde $(f_a)_1$ in genişlemeyen fonksiyon olduğu gösterilebilir. Diğer yandan, Önerme 4.3.6. da $a_n = a$ olarak alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} (f_a)_1(a_n) = 0 \; ve \; \lim_{n\to\infty} (f_a)_2(a_n) = 0$$

olur. O halde f_a ekstremal fonksiyon çiftidir. □

Önerme 4.3.8. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve $f = (f_1, f_2) \in \epsilon_q(X, d)$ olsun. Eğer $f_1(a) = 0 = f_2(a)$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa $f = f_a$ dır.

Kanıt. (f_1, f_2) geniş olduğundan her $x \in X$ için

$$d(x, a) \leq f_2(x) + 0 \; ve \; d(a, x) \leq 0 + f_1(x)$$

dir. Böylece $f_a \leq f$ olur. f ekstremal olduğundan $f = f_a$ dır. □

Önerme 4.3.9. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve (f_1, f_2) ekstremal fonksiyon çifti olsun. O zaman

$$f_2(x) = \sup_{y\in X}(d(x, y) \dot{-} f_1(y))$$

ve

$$f_1(x) = \sup_{y\in X}(d(y, x) \dot{-} f_2(y)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. İkinci eşitliği gösterelim. (f_1, f_2) geniş fonksiyon çifti olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(y, x) - f_2(y) \leq f_1(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan ise

$$\sup_{y\in X}(d(y, x) - f_2(y)) \leq f_1(x)$$

dir. Şimdi

$$\sup_{y\in X}(d(y,x_0)\dot{-}f_2(y))<f_1(x_0)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_0\in X$ olduğunu varsayalım. $h_1:(X,d)\to[0,\infty)$ fonksiyonunu

$$h_1(x)=\begin{cases} f_1(x) & ;\ x\neq x_0\\ \sup_{y\in X}(d(y,x_0)\dot{-}f_2(y)) & ;\ x=x_0\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Her $y\in X$ için

$$d(y,x_0)-f_2(y)\leq\sup_{a\in X}(d(a,x_0)-f_2(a))$$

olduğundan her $y\in X$ için

$$d(y,x_0)\leq f_2(y)+\sup_{a\in X}(d(a,x_0)\dot{-}f_2(a))=f_2(y)+h_1(x_0)$$

dır. Böylece (h_1,f_2) bir geniş fonksiyon çiftidir. Diğer yandan $(h_1,f_2)<(f_1,f_2)$ dir. Bu ise (f_1,f_2) nin ekstremal oluşu ile çelişir. O halde her $x\in X$ için

$$f_1(x)=\sup_{y\in X}(d(y,x)\dot{-}f_2(y))$$

dir. Diğer eşitlik ise benzer şekilde gösterilebilir. □

Önerme 4.3.10. (X,d) bir T_0-metrikimsi uzay, (f_1,f_2) ve (g_1,g_2) iki ekstremal fonksiyon çifti olsun. O zaman

$$D((f_1,f_2),(g_1,g_2))=\sup_{x\in X}(f_1(x)\dot{-}g_1(x))=\sup_{x\in X}(g_2(x)\dot{-}f_2(x))$$

dir.

Kanıt. Önce $f_1(x)-g_1(x)>0$ olacak şekilde bir $x\in X$ olduğunu kabul edelim. $a\in X$ olsun. (g_1,g_2) geniş olduğundan

$$f_1(x)-g_1(x)=d(a,x)-g_1(x)+f_1(x)-d(a,x)\leq g_2(a)+f_1(x)-d(a,x)$$

dir. $\epsilon > 0$ olsun. $f_1(x)$ pozitif olduğundan Önerme 4.3.9. gereğince $f_1(x) = \sup_{a\in X}(d(a,x) - f_2(a))$ dir. Buradan

$$f_1(x) - \epsilon \leq d(a,x) - f_2(a)$$

olacak şekilde $a \in X$ vardır. Böylece

$$f_1(x) - g_1(x) \leq g_2(a) + f_1(x) - d(a,x) \leq g_2(a) - f_2(a) + \epsilon \leq \sup_{x\in X}(g_2(x) - f_2(x)) + \epsilon$$

olacak şekilde $a \in X$ vardır. O zaman

$$\sup_{x\in X}(f_1(x) - g_1(x)) \leq \sup_{x\in X}(g_2(x) - f_2(x)) + \epsilon$$

dir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\sup_{x\in X}(f_1(x) - g_1(x)) \leq \sup_{x\in X}(g_2(x) - f_2(x))$$

olarak sonuçlanır. Benzer şekilde

$$\sup_{x\in X}(g_2(x) - f_2(x)) \leq \sup_{x\in X}(f_1(x) - g_1(x))$$

olduğu gösterilebilir. □

Önerme 4.3.11. (X,d) T_0-metrkimsi uzay, $f = (f_1, f_2)$ ekstremal fonksiyon çifti ve $a \in X$ olsun. O zaman

$$D(f, f_a) = f_1(a) \; ve \; D(f_a, f) = f_2(a)$$

dır.

Kanıt. Her $y \in X$ için

$$f_1(y) - (f_a)_1(y) \leq \sup_{x\in X}(f_1(x) - (f_a)_1(x))$$

dir. $(f_a)_1(x) = d(a,x)$ olduğu göz önüne alınırsa $y = a$ için

$$f_1(a) \leq \sup_{x \in X}(f_1(x) - d(a,x))$$

elde edilir. Diğer yandan Önerme 4.3.5. gereğince her $x \in X$ için

$$f_1(x) - f_1(a) \leq d^t(x,a)$$

dir. Yani her $x \in X$ için

$$f_1(x) - d(a,x) \leq f_1(a)$$

dır. Buradan ise

$$\sup_{x \in X}(f_1(x) - d(a,x)) \leq f_1(a)$$

elde edilir. O halde

$$D(f, f_a) = \sup_{x \in X}(f_1(x) - d(a,x)) = f_1(a)$$

dır. Diğer eşitlik ise benzer şekilde gösterilebilir. □

Tanım 4.3.12. (Y, d_Y) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer her (X, d_X) T_0-metrikimsi uzayı ve her $A \subseteq X$ için, $f : A \to (Y, d_Y)$ genişlemeyen fonksiyonunun $\bar{f} : X \to Y$ genişlemeyen genişlemesi var ise (Y, d_Y) uzayına *di-injektif* uzay denir.

Teorem 4.3.13. Bir T_0-metrikimsi uzay q-hiperkonvekstir ancak ve ancak di-injektiftir.

Kanıt. (X, d) bir q-hiperkonveks T_0-metrikimsi uzay olsun. (M, q) T_0-metrikimsi uzay, $A \subseteq M$ ve $T : A \to X$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. $\mathcal{C} = \{(T_F, F) \mid A \subseteq F \subseteq M \ ve\ T_F : F \to X,\ T\ nin\ \ genişlemeyen\ genişlemesidir.\}$ kümesini göz önüne alalım. $(T, A) \in \mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C}$ boş kümeden farklıdır. Şimdi $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde bir kısmi sıralama inşa edelim:

$$(T_F, F) \preceq (T_G, G)\ ancak\ ve\ ancak\ F \subseteq G\ ve\ T_G\ nin\ F\ ye\ kısıtlanışı\ T_F\ dir.$$

$(\mathcal{C}, \preceq)$ nin Zorn Lemma'nın koşullarını sağladığını görmek kolaydır. Böylece $(\mathcal{C}, \preceq)$ nin bir maksimal elemanı vardır. (T_1, F_1) maksimal eleman olsun. $F_1 = M$ olduğunu gösterelim. $F_1 \neq M$ varsayalım. $z \in M \backslash F_1$ ve $F = F_1 \cup \{z\}$ olsun. T_1 i F ye genişletelim.

$$\{B_d[T_1(x), q(x,z)], B_{d^t}[T_1(x), q^t(x,z)] \mid x \in F_1\}$$

sınıfını gözönüne alalım. Burada her $x, y \in F_1$ için

$$d(T_1(x), T_1(y)) \leq q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y)$$

ve X q-hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{x \in F_1} \left[B_d[T_1(x), q(x,z)] \cap B_{d^t}[T_1(x), q^t(x,z)]\right] \neq \emptyset$$

dır. z_1 bu kesişimde bir eleman olsun. $T^* : F \to X$ fonksiyonunu

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1(x) & ; \, x \neq z \\ z_1 & ; \, x = z \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $x, y \in F$ olsun. Burada

$$x = z, \; y \neq z \Longrightarrow d\big(T^*(x), T^*(y)\big) = d\big(z_1, T_1(y)\big),$$

$$x, y \neq z \Longrightarrow d\big(T^*(y), T^*(x)\big) = d\big(T_1(y), T_1(x)\big),$$

ve

$$x = z, \; y \neq z \Longrightarrow d\big(T^*(y), T^*(x)\big) = d\big(T_1(y), z_1\big)$$

dir. Böylece her $x, y \in F$ için

$$d\big(T^*(x), T^*(y)\big) \leq q(x,y)$$

dir. O halde T^* genişlemeyen bir dönüşümdür. Bu ise $(T^*, F) \in \mathcal{C}$ anlamına gelir. Diğer yandan $(T_1, F_1) \preceq (T^*, F)$ ve $(T_1, F_1) \neq (T^*, F)$ dir. Bu ise (T_1, F_1) nin maksimal oluşu ile çelişir. O halde $F_1 = M$ ve T nin genişlemeyen genişlemesi vardır. Böylece (X, d) di-injektiftir.

Tersine olarak (X, d) di-injektif olsun. X in q-hiperkonveks olduğunu göstereceğiz. Her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + s_j$ olacak şekilde $(x_i)_{i\in I}$ elemanları ve $(r_i)_{i\in I}$, $(s_i)_{i\in I}$ negatif olmayan reel sayılar verilsin. $A = \{x_i \mid i \in I\}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{A}(A, d)$ kümesi A üzerindeki geniş fonksiyon çiftlerinin kümesi olsun. O halde $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{A}(A, d)$ ise, her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq f_2(x_i) + f_1(x_j)$ dir. Burada

$$r(x_i) = r_i \; ve \; s(x_i) = s_i$$

ile tanımlı $r, s : A \to [0, \infty)$ fonksiyonları için varsayım gereğince $(r, s) \in \mathcal{A}(A, d)$ dir. Diğer yandan $\mathcal{A}(A, d)$ kümesi fonksiyon çiftlerinin noktasal sıralamasına göre kısmi sıralı bir kümedir. $\mathcal{A}(A, d)$ nin bir zincirinin alt sınıra sahip olduğu kolayca görülebilir. Böylece Zorn Lemma'dan $\mathcal{A}(A, d)$ nin bir minimal $f = (f_1, f_2)$ elemanı vardır. f minimal olduğundan her $i \in I$ için

$$f_1(x_i) \leq s(x_i) \; ve \; f_2(x_i) \leq r(x_i)$$

dir. Şimdi aşağıdaki iki durumu inceleyelim:

(1) Her $x \in A$ için

$$(e_A(a))(x) = (d(a, x), d(x, a)) = (f_1(x), f_2(x))$$

olacak şekilde bir $a \in A$ olsun. O zaman

$$a \in \bigcap_{i\in I} \big(B_d[x_i, r_i] \cap B[x_i, s_i]\big) \neq \emptyset$$

dır.

(2) Her $a \in A$ için $(f_1, f_2) \neq e_A(a)$ olsun. (f_1, f_2) nin minimal oluşunu kullanarak Önerme

4.3.5. den her $i, j \in I$ için

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j) + d(x_j, x_i) \; ve \; f_2(x_i) \leq d(x_i, x_j) + f_2(x_j)$$

dir. Şimdi ω, A da olmayan bir eleman olsun. $A^* = A \cup \{\omega\}$ kümesini göz önüne alalım. Her $i \in I$ için $d(\omega, x_i) = f_1(x_i)$, $d(x_i, \omega) = f_2(x_i)$ ve ayrıca $d(\omega, \omega) = 0$ olsun. Burada f nin ekstremal oluşunu kullanarak d nin A^* üzerinde üçgen eşitsizliğini sağladığını görmek kolaydır. Önerme 4.3.8. den, her $a \in A$ için $f_1(a)$ ya da $f_2(a)$ pozitiftir. Böylece (A^*, d), A yı içeren bir T_0-metrikimsi uzaydır. Ayrıca (X, d) di-injektif olduğundan $I : A \to X$ birim dönüşümünün $R : A^* \to X$ genişlemeyen genişlemesi vardır. Böylece her $i \in I$ için

$$d(x_i, R(\omega)) = d(R(x_i), R(\omega)) \leq d(x_i, \omega) = f_2(x_i) \leq r_i$$

ve

$$d(R(\omega), x_i) = d(R\omega), R(x_i)) \leq d(\omega, x_i) = f_1(x_i) \leq s_i$$

dir. Buradan

$$R(\omega) \in \bigcap_{i \in I} \big(B_d[x_i, r_i] \cap B[x_i, s_i]\big) \neq \emptyset$$

dır. O halde (X, d) q-hiperkonvekstir. $\square$

Aşağıdaki önerme, bir T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks kabuğu ile bu uzayın dualinin q-hiperkonveks kabuğunun izometrik izomorfik olduğunu gösterir.

Önerme 4.3.14. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. O zaman $(f_1, f_2) \in \epsilon_q(X, d)$ ise $(f_2, f_1) \in \epsilon_q(X, d^t)$ dir. Ayrıca

$$s((f, g)) = (g, f)$$

ile tanımlı $s : \big(\epsilon_q(X, d), D\big) \to \big(\epsilon_q(X, d^t), D^t\big)$ dönüşümü bire-bir ve örten bir izometridir.

Kanıt. $(f_1, f_2) \in \epsilon_q(X, d)$ olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$d(y, x) \leq f_2(y) + f_1(x)$$

olduğundan, her $x, y \in X$ için

$$d^t(x,y) \leq f_1(x) + f_2(y)$$

dir. (f_1, f_2), (X, d) üzerinde ekstremal ise (f_2, f_1) nin (X, d^t) üzerinde ekstremal olduğu açıktır. Aynı zamanda $(d^t)^t = d$ olduğundan $s : \big(\epsilon_q(X,d), D\big) \to \big(\epsilon_q(X,d^t), D^t\big)$ dönüşümü bire-bir ve örtendir. Diğer yandan

$$D^t(s(f_1,f_2), s(g_1,g_2)) = D((g_2,g_1),(f_2,f_1)) = D((f_1,f_2),(g_1,g_2))$$

olduğundan s bir izometridir. $\square$

Önerme 4.3.15. Bir metrik uzayın hiperkonveks kabuğu, q-hiperkonveks kabuğuna izometrik olarak gömülebilir.

Kanıt. (X, m) bir metrik uzay olsun. E metriği, $f, g \in \epsilon_m(X,m)$ için

$$E(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

olmak üzere, $h : (\epsilon_m(X,m), E) \to (\epsilon_q(X,m), D)$ fonksiyonunu $h(f) = (f, f)$ olarak tanımlayalım. $f \in \epsilon_m(X,m)$ ise tanım gereği her $x, y \in X$ için

$$m(x,y) \leq f(x) + f(y)$$

dir. Böylece (f, f) geniş bir fonksiyon çiftidir. $(f,f) \in \epsilon_q(X,m)$ olduğunu göstermek için (f, f) in minimal olduğunu göstereceğiz. Bunun için bir (k_1, k_2) geniş fonksiyon çifti için

$$k_1 \leq f \; ve \; k_2 \leq f$$

olduğunu varsayalım. (k_1, k_2) geniş olduğundan her $x, y \in X$ için

$$m(x,y) \leq k_2(x) + k_1(y)$$

dir. Yine her $x, y \in X$ için

$$m(y, x) \leq k_2(y) + k_1(x)$$

dir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak

$$m(x, y) + m(y, x) \leq (k_1(x) + k_2(x)) + (k_1(y) + k_2(y))$$

elde edilir. m bir metrik olduğundan her $x, y \in X$ için $m(x, y) = m(y, x)$ eşitliği sağlandığı için yukarıdaki eşitsizlik

$$m(x, y) \leq \frac{k_1(x) + k_2(x)}{2} + \frac{k_1(y) + k_2(y)}{2}$$

eşitsizliğine denktir. Böylece $(\frac{k_1+k_2}{2}, \frac{k_1+k_2}{2})$ geniş fonksiyon çiftidir. f minimal olduğundan $\frac{k_1+k_2}{2} = f$ dir. Burada $k_1 \leq f$ ve $k_2 \leq f$ olduğundan $k_1 = k_2 = f$ olarak sonuçlanır. O halde $(f, f) \in \epsilon_q(X, m)$ dir. Şimdi h nin bir izometri olduğunu gösterelim. $f, g \in \epsilon_m(X, m)$ olsun. O zaman

$$E(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} (f(x) \dot{-} g(x)) \vee (g(x) \dot{-} f(x)) = D((f, f), (g, g))$$

dir. Böylece h bir izometridir. □

Önerme 4.3.16. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay, A, X in boştan farklı alt kümesi ve $(r_1, r_2) : A \to [0, \infty)$ fonksiyon çifti her $x, y \in A$ için

$$d(x, y) \leq r_2(x) + r_1(y)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman (r_1, r_2) çiftinin öyle bir $(R_1, R_2) : X \to [0, \infty)$ genişlemesi vardır ki her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq R_2(x) + R_1(y)$$

sağlanır. Ayrıca her $x \in X$ için $f_1 \leq R_1(x)$ ve $f_2 \leq R_2(x)$ eşitsizliklerini sağlayan bir (f_1, f_2) ekstremal fonksiyon çifti vardır.

Kanıt. $a \in A$ sabit olsun. $R_1, R_2 : X \to [0, \infty)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$R_1(x) = \begin{cases} r_1(x) & ; \ x \in A \\ r_1(a) + d(a, x) & ; \ x \notin A \end{cases}$$

ve

$$R_2(x) = \begin{cases} r_2(x) & ; \ x \in A \\ r_2(a) + d(a, x) & ; \ x \notin A \end{cases}$$

olsun. (R_1, R_2) nin geniş olduğunu göstereceğiz. $x, y \in X$ olsun. Dört durumda inceleyeceğiz:

1. Durum: $x, y \in A$ ise tanım gereğince $d(x, y) \leq R_2(x) + R_1(y)$ dir.

2.Durum: $x \notin A, y \in A$ ise üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(x, a) + r_2(a) + r_1(y) \leq R_2(x) + R_2(y)$$

elde edilir.

3. Durum: $x \in A, y \notin A$ ise 2. Duruma benzer olarak

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(a, y) + r_2(x) + r_1(a) \leq R_2(x) + R_2(y)$$

dir.

4. Durum $x \notin A, y \notin A$ ise yine üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(x, a) + r_2(a) + r_1(a) + d(a, y) \leq R_2(x) + R_1(y)$$

elde edilir.

O zaman (R_1, R_2), (r_1, r_2) nin her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq R_2(x) + R_1(y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir genişlemesidir. Böylece (R_1, R_2) geniş fonksiyon çiftidir. $\mathcal{A}(X, d)$ fonksiyon çiftlerinin noktasal sıralamasına göre kısmi sıralı bir küme olduğu için Zorn

Lemma'dan dolayı her $x \in X$ için

$$f_1(x) \leq R_1(x) \; ve \; f_2(x) \leq R_2(x)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir (f_1, f_2) fonksiyon çifti vardır. $\square$

Önerme 4.3.17. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Eğer $s = (s_1, s_2)$, $\epsilon_q(X)$ üzerinde ekstremal fonskiyon çifti ise, $e_X(a) = f_a$ olmak üzere $s \circ e_X$ fonksiyon çifti, X üzerinde bir ekstremal fonksiyon çiftidir.

Kanıt. $s = (s_1, s_2)$, $\epsilon_q(X)$ üzerinde bir ekstremal fonksiyon çifti olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = D(f_x, f_y) = D(e_X(x), e_X(y)) \leq s_2(e_X(x)) + s_1(e_X(y))$$

dir. O halde $s \circ e_X$, X üzerinde geniştir. Şimdi $e \circ e_X$ in ekstremal olmadığını varsayalım. O zaman öyle bir $(h_1, h_2) \in \epsilon_q(X)$ vardır ki her $x, y \in X$ için

$$h_1(x) \leq s_1(e_X(x)) \; ve \; h_2(x) \leq s_2(e_X(x))$$

dir ve bir $a \in X$ için

$$h_1(a) < s_1(e_X(a)) \; veya \; h_2(a) < s_2(e_X(a))$$

dır. $h_1(a) < s_1(e_X(a))$ olduğunu varsayalım. $\epsilon_q(X)$ üzerinde (t_1, t_2) fonksiyon çiftini şöyle tanımlayalım: Her $f \in \epsilon_q(X)$ için

$$t_2(f) = s_2(f)$$

ve

$$t_1(f) = \begin{cases} s_1(f) & ; \; f \neq e_X(a) \\ h_1(a) & ; \; f = e_X(a) \end{cases}$$

olsun. Şimdi (t_1, t_2) çiftinin her $f, g \in \epsilon_q(X)$ için

$$D(f,g) \leq t_2(f) + t_1(g)$$

eşitsizliğini sağladığını gösterelim: $g \neq e_X(a)$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. O halde $g = e_X(a)$ için eşitsizliğin sağlandığını göstermeliyiz. $f \in \epsilon_q(X)$ sabit olsun. Önerme 4.3.11. den

$$f_1(a) = D(f, e_X(a))$$

dır. Eğer $f_1(a) = 0$ ise

$$D(f, e_X(a)) \leq t_2(f) + t_1(g)$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. $f_1(a) > 0$ olduğunu varsayalım. Önerme 4.3.9. dan

$$f_1(a) = \sup_{y \in X}(d(y,a) - f_2(y))$$

dir. Bu eşitlikten her $\delta > 0$ için öyle bir $y \in X$ vardır ki $f_1(a) - \delta \leq d(y,a) - f_2(y)$ dir. Buradan

$$f_2(y) + D(f, e_X(a)) - \delta = f_2(y) + f_1(a) - \delta \leq d(y,a)$$

ve

$$d(y,a) \leq h_2(y) + h_1(a) \leq s_2(e_X(y)) + t_1(e_X(a))$$

dır. Ayrıca (s_1, s_2) ekstremal fonksiyon çifti olduğundan, Önerme 4.3.5. gereğince

$$s_2(e_X(y)) \leq s_2(f) + D(e_X(y), f) = t_2(f) + f_2(y)$$

dir. O halde

$$f_2(y) + D(f, e_X(a)) - \delta \leq s_2(e_X(y)) + t_1(e_X(a)) \; ve \; s_2(e_X(y)) \leq t_2(f) + f_2(y)$$

dir. Bu son iki eşitsizliği birleştirerek

$$D(f, e_X(a)) - \delta \leq t_2(f) + t_1(e_X(a))$$

elde ederiz. δ keyfi olduğundan

$$D(f, e_X(a)) \leq t_2(f) + t_1(e_X(a))$$

olarak sonuçlanır. Bu ise (s_1, s_2) nin $\epsilon_q(X)$ üzerinde ekstremal fonksiyon çifti olması ile çelişir. O halde (h_1, h_2) çiftinin var olması varsayımı yanlıştır. Böylece $s \circ e_X$, X üzerinde ekstremal fonksiyon çiftidir. □

Teorem 4.3.18. Bir T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks kabuğu q-hiperkonvekstir.

Kanıt. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay olsun. $\epsilon_q(X)$ in q-hiperkonveks olduğunu kanıtlayacağız. I bir indis kümesi olmak üzere, $f_i = ((f_i)_1, (f_i)_2) \in \epsilon_q(X)$ elemanları ve $(r_i)_{i \in I}, (s_i)_{i \in I}$ negatif olmayan reel sayıları, her $i, j \in I$ için

$$D(f_i, f_j) \leq r_i + s_j$$

eşitsizliğini sağlasın. Şimdi $Y = \{f_i \mid i \in I\}$ alalım. $r, s : Y \to [0, \infty])$ fonksiyonlarını

$$s(f_i) = s_i \, ve \, r(f_i) = r_i$$

olarak tanımlayalım. Önerme 4.3.16. dan (r, s) çiftini her $f, g \in \epsilon_q(X)$ için

$$D(f, g) \leq R(f) + S(g)$$

olacak şekilde (R, S) çiftine genişletebiliriz. Yine Önerme 4.3.16. dan

$$h_2 \leq R \, ve \, h_1 \leq S$$

olacak şekilde $\epsilon_q(X)$ üzerinde $h = (h_1, h_2)$ ekstremal fonksiyon çifti vardır. Önerme 4.3.17. den dolayı $h \circ e_X \in \epsilon_q(X)$ dir. Burada $h \circ e_X$ ile $f = (f_1, f_2) \in \epsilon_q(X)$ arasındaki D mesafesinin

$$D(h \circ e_X, f) = \sup_{x \in X}(h_1(e_X(x)) \dot{-} f_1(x)) \vee \sup_{x \in X}(f_2(x) \dot{-} h_2(e_X(x)))$$

olarak tanımlandığını hatırlatalım. Önerme 4.3.8. i kullanarak $f_1(x) = D(f, e_X(x))$ ve $f_2(x) = D(e_X(x), f)$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (h_1, h_2), $\epsilon_q(X)$ üzerinde bir ekstremal fonksiyon çifti olduğundan Önerme 4.3.5. ten

$$h_1\big(e_X(x)\big) - D\big(f, , e_X(x)\big) \leq h_1(f)$$

dir. (h_1, h_2) geniş olduğundan

$$D\big(f, , e_X(x)\big) - h_1\big(e_X(x)\big) \leq h_1(f)$$

dir. $h = (h_1, h_2)$ nin seçiminden dolayı

$$h_1(f) \leq S(f)$$

dir. Böylece her $f \in \epsilon_q(X)$ için

$$D(h \circ e_X, f) \leq h_1(f) \leq S(f)$$

elde edilir. Benzer biçimde her $f \in \epsilon_q(X)$ için

$$D(f, h \circ e_X) \leq h_2(f) \leq R(f)$$

olduğu gösterilebilir. O halde

$$h \circ e_X \in \bigcap_{f \in \epsilon_q(X)} \Big(C_D\big(f, R(f)\big) \cap C_{D^t}\big(f, S(f)\big)\Big)$$

dir. Diğer yandan

$$\bigcap_{f\in\epsilon_q(X)} \big(C_D\big(f, R(f)\big) \cap C_{D^t}\big(f, S(f)\big)\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} \big(C_D(f_i, r_i) \cap C_{D^t}(f_i, s_i)\big)$$

olduğu için

$$h \circ e_X \in \bigcap_{i\in I} \big(C_D(f_i, r_i) \cap C_{D^t}(f_i, s_i)\big)$$

dir. Böylece

$$\bigcap_{i\in I} \big(C_D(f_i, r_i) \cap C_{D^t}(f_i, s_i)\big) \neq \emptyset$$

olup $\epsilon_q(X)$ q-hiperkonvekstir. □

Teorem 4.3.19. Bir T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks kabuğu, bu T_0-metrikimsi uzayı kapsayan en küçük q-hiperkonveks kümedir. Ayrıca bir T_0-metrikimsi uzayın q-hiperkonveks kabuğu izometriye göre tektir.

Kanıt. (X, d) bir T_0-metrikimsi uzay ve H kümesi $X \subseteq H \subseteq \epsilon_q(X)$ olacak şekilde q-hiperkonveks bir küme olsun. H q-hiperkonveks olduğundan Teorem 4.3.13. den di-injektiftir. O zaman $i : X \to H$ birim dönüşümünün $R = (R_1, R_2) : \epsilon_q(X) \to H$ genişlemeyen bir genişlemesi vardır. Önerme 4.3.11. den her $x \in X$ için

$$\big(R_1(f)\big)(x) = D\big(R(f), f_x\big) = D\big(R(f), R(f_x)\big) \leq D(f, f_x) = f_1(x)$$

dir. Benzer biçimde her $x \in X$ için

$$\big(R_2(f)\big)(x) \leq f_2(x)$$

olur. $f = (f_1, f_2)$, X üzerinde ekstremal fonksiyon çifti olduğu için $R_1(f) = f_1$ ve $R_2(f) = f_2$ dir. Bu ise R nin $\epsilon_q(X)$ üzerinde birim dönüşüm ve $H = \epsilon_q(X)$ olmasını gerektirir. O halde $\epsilon_q(X)$ in, X i içeren q-hiperkonveks hiçbir alt kümesi yoktur.

Şimdi $\epsilon_q(X)$ in izometriye göre tek olduğunu gösterelim: H, X i alt uzay olarak içeren ve hiçbir q-hiperkonveks alt uzayının X i içermediği q-hiperkonveks bir T_0-metrikimsi uzay olsun. Her $x \in X$ için $i(e_x(x)) = x$ ile tanımlı $i : e_X(X) \to H$ izometri dönüşümünün $\phi : \epsilon_q(X) \to H$ genişlemeyen genişlemesini göz önüne alalım. Ayrıca $\psi : H \to \epsilon_q(X)$ genişlemeyen dönüşümü, $i^{-1} : X \to \epsilon_q(X)$ dönüşümünün genişlemesi olsun. Buradan $\psi \circ \phi : \epsilon_q(X) \to \epsilon_q(X)$ genişlemeyen dönüşümü, $e_X(X)$ üzerindeki birim dönüşümün genişlemesidir. Böylece $\psi \circ \phi$, $\epsilon_q(X)$ üzerindeki birim dönüşümdür. Diğer yandan ϕ ve ψ genişlemeyen dönüşümler olduğundan ϕ izometridir. O halde $\phi(\epsilon_q(X))$, H nin X i içeren q-hiperkonveks alt uzayıdır. H nin tanımından $\phi(\epsilon_q(X)) = H$ dir ve böylece ϕ örtendir. O halde $\epsilon_q(X)$ ve H izometriktir. □

5. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle, topoloji literatüründe tarihi uzun yıllara dayanan konvekslik teorisinin metrik uzaylara özgü özel bir türü olarak tanımlanan hiperkonvekslik teorisi ve metrik uzaylar için tanımlanan hiperkonveks kabuk kavramı detaylarıyla incelenerek, bazı önemli ve kullanışlı özellikleri sunulmuştur.

Değinilen bu yapıları takiben ise, hiperkonvekslik teorisinin Asimetrik (Simetrisiz) Topolojide yer alan T_0-metrikimsi uzaylar çerçevesinde uygun ve doğal bir genelleştirmesi ele alınmıştır. Bu genelleştirme, T_0-metrikimsi uzaylar ve genişlemeyen dönüşümlerin oluşturduğu kategori içerisinde son yıllarda popüler olarak çalışılan “q-hiperkonvekslik ” adı altında, tezin ana fikrini oluşturan temel konu olarak çalışılmıştır. Ayrıca bu çerçevede, T_0-metrikimsi uzaylar için q-hiperkonveks kabuk kavramı ele alınarak, çeşitli özellikleri ve karakterizasyonlarına yer verilmiştir.

İlgili alanda önemli bir çalışma sorusu olarak; T_0- metrikimsilere uygun Takahashi ve diğer konvekslik türleri ile q-hiperkonveksliğin, ayrıca konveks kabuklar ile q-hiperkonveks kabukların arasında yeni ilişkiler bulunması ileriye dönük problemler arasında yer almaktadır.

Türkiye‘de, hiperkonveks uzayların asimetrik topolojide karşılığı olan q-hiperkonvekslik teorisi çerçevesinde detaylı hazırlanmış ilk kaynak olan bu tez çalışmasında ele alınan kavramlar, teoremler ve sonuçların, özellikle Asimetrik Topoloji literatürüne ve alandaki araştırmacılara matematiksel yönden yeni bir bakış açısı ve katkı kazandıracağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi. Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 6(3):405–439, **1956**.

[2] J.R. Isbell. Six theorems about injective metric spaces. *Commentarii mathematici Helvetici*, 39:65–76, **1964/65**.

[3] E. Kemajou, H. P. A. Künzi, and O. O. Otafudu. The Isbell-hull of a di-space. *Topology and its Applications*, 159(9):2463–2475, **2012**.

[4] H. P. A. Künzi and O. O. Otafudu. The ultra-quasi-metrically injective hull of a T_0-ultra-quasi-metric space. *Applied Categorical Structures*, 21(6):651–670, **2013**.

[5] H.P. A. Künzi and F. Yıldız. Convexity structures in T_0-quasi-metric spaces. *Topology and its Applications*, 200:2–18, **2016**.

[6] A. Nesin. *Analiz IV*. Nesin Yayıncılık, **2019**.

[7] Y. Soykan. *Metrik Uzaylar*. **2012**.

[8] N. Javanshır. *T_0-Metrikimsi Uzayların Simetrisizliğine Yaklaşım Teorileri*. Ph.D. thesis, Hacettepe Üniversitesi, **2021**.

[9] Filiz Yıldız and Nezakat Javanshir. Certain observations on antisymmetric T_0-quasi-metric spaces. *Topology and its Applications*, 309:107915, **2022**.

[10] F. Yıldız and H. P. A. Künzi. Symmetric connectedness in T_0-quasi-metric spaces. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 26(5):659–679, **2019**.

[11] R. Espínola and M. A. Khamsi. Introduction to hyperconvex spaces. In *Handbook of metric fixed point theory*, pages 391–435. Springer, **2001**.

[12] M. Borkowski. *Theory of Hyperconvex Metric Spaces. A Beginner's Guide*, volume 14. Juliusz Schauder University Centre for Nonlinear Studies Nicolaus Copernicus University, **2015**.

[13] S. Almezel and M. A. Ansari, Q. H. Khamsi. *Topics in fixed point theory*, volume 5. Springer, **2014**.

[14] M. A. Khamsi and W. A. Kirk. *An introduction to metric spaces and fixed point theory*. John Wiley & Sons, **2011**.

[15] A. Razafindrakoto. *Hyperconvex Metric Spaces*. Master's thesis, Stellenbosch University, **2010**.