BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON-KONVEKSİYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION-CONVECTION EQUATIONS

KERİME KALLI

PROF. DR. KAMAL SOLTANOV
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2014

Kerime KALLI'nın hazırladığı "**Bir Sınıf Doğrusal Olmayan Difüzyon-Konveksiyon Denklemlerinin İncelenmesi**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Tanıl ERGENÇ
Başkan ....

Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Danışman ....

Prof. Dr. Emil NOVRUZOV
Üye ....

Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU
Üye ....

Doç. Dr. İsmet YURDUŞEN
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/05/2014

KERİME KALLI

ÖZET

BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON-KONVEKSİYON DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Kerime KALLI
Doktora, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV
Mayıs 2014, 77 sayfa

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan difüzyon-konveksiyon tipli denklem için konulmuş üçüncü sınıf (Robin) sınır değer probleminin çözülebilirliği, çözümün tekliği ve davranışı incelenmiştir. Birinci bölümde, incelediğimiz problem tanımlanmış ve son zamanlarda difüzyon-konveksiyon tipli denklemler üzerine yapılmış çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

Tezimizin ikinci bölümünde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlar, teoremler, lemmalar ve eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, problem başlangıç koşulu sıfır iken, lineer olmayan kısma bağlı olarak alt lineer, lineer ve üst lineer durumlarda incelenmiştir. Bu üç durumda da, problemin genelleşmiş çözümünün varlığı ve tekliği için katsayı fonksiyonları üzerine yeterli koşullar bulunmuştur. Bu koşullar altında [31]'deki genel bir teorem kullanılarak genelleşmiş çözümün varlığı ve lineer olmayan kısmın model bir durumunda da tekliği ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde, başlangıç koşulu sıfırdan farklı iken, alt lineer, lineer ve üst lineer durumlarda problemin genelleşmiş çözümünün varlığı, birinci alt bölümde kullanılan yöntemle ispatlanmıştır. Ayrıca, problemin genelleşmiş çözümünün tekliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, denklem ve sınır koşulunun homojen olduğu durumda, problemin çözümünün $L_2(\Omega)$ uzayındaki davranışı üzerine sonuç elde edilmiştir. Daha sonra, problemin homojen olmayan, otonom durumunda $L_2(\Omega)$ ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzaylarında yutan kümenin varlığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Difüzyon-Konveksiyon denklemi, 3. sınıf sınır koşulu, Yutan küme, Varlık ve teklik.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFUSION-CONVECTION EQUATIONS

Kerime KALLI

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

May 2014, 77 pages

In this dissertation, the solvability, uniqueness and long-time behavior of solution of the nonlinear diffusion-convection equation with 3. type (Robin) boundary condition on the bounded domain have been investigated. In the first chapter, the problem that is investigated is defined and some studies on the diffusion-convection type equations are mentioned.

In the second chapter, some basic notions, theorems, lemmas and inequalities used in this work are given.

The third chapter is composed of two subsections. In the first subsection, when the initial condition is zero, the problem is investigated in sub linear, linear and super linear cases, depending on the nonlinear part. In these three cases, for the solvability and uniqueness of the solution, sufficient conditions are obtained. Under these conditions, existence of the generalized solution and in a model case uniqueness of the solution are proved using a general theorem in [31]. In the second subsection, when the initial condition is nonzero, the existence of the generalized solution is proved in sub linear, linear and super linear cases using the same method in the previous subsection. Additionally, the uniqueness of the solution is investigated.

In the fourth chapter, firstly, when equation and boundary condition are homogeneous, some results are obtained on the behavior of the solution in $L_2(\Omega)$. Then, in the nonhomogeneous, autonomous case of the problem, the existence of the absorbing sets in the spaces $L_2(\Omega)$ and $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ is proved.

Keywords: Diffusion-Convection equation, Third type boundary condition, Absorbing set, Existence and uniqueness.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken yaptığım çalışmalarda yanımda olup bana yol gösteren, emek veren değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Kamal SOLTANOV'a;

önemli yorum ve değerlendirmeleri ile katkıda bulunan jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. Tanıl ERGENÇ'e, Sayın Prof. Dr. Emil NOVRUZOV'a, Sayın Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU'na, Sayın Doç. Dr. İsmet YURDUŞEN'e;

çalışmamın her aşamasında tüm sıkıntılarıma ortak olup desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Eylem ÖZTÜRK ve Gamze DÜZGÜN'e;

tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu süreçte de her zaman yanımda olan ve bana sonsuz güvenen sevgili Annem ve Babama;

aramızdaki uzak mesafelere rağmen her zaman varlığını ve desteğini yanımda hissettiğim sevgili eşim Kaan KALLI'ya

içtenlikle teşekkür ederim.

Son olarak, canım kızım BİLGE'm;

Gelişinle hayatımdaki çok büyük bir boşluğu doldurdun ve beni tamamladın. Bana gerçek anlamda huzur ve mutluluğu yaşattın. Beni motive ettiğin ve daha bu minik halinle sabretme olgunluğunu gösterdiğin için teşekkürlerin en büyüğünü sen hak ediyorsun. İyi ki varsın.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Difüzyon-Konveksiyon denklemleri; parçacık, enerji ya da diğer fiziksel değerlerin bir ortama aktarımı gibi fiziksel olayları konveksiyon ve difüzyon süreçleri yoluyla açıklayan parabolik kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Difüzyon terimi, bir akışkanın moleküllerinin başka bir akışkanın ya da maddenin içinde yayılması; Konveksiyon ise, difüzyon zamanında bir akışkanın, diğer bir akışkanın içine uyumlu dağılması olarak kısaca açıklanabilir.

Difüzyon-Konveksiyon, matematiksel modellemenin önemli olduğu fizik ve mühendislik alanlarındaki pek çok problemde ortaya çıkan bir olgudur. Bu konu, özellikle akışkan dinamiği ve transport problemlerinde araştırma odağı olmuştur.

Bu çalışmada, aşağıdaki difüzyon-konveksiyon tipli denklem için konulmuş 3. sınıf sınır ve başlangıç değer problemi gözönüne alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + g(x,t,u) = h(x,t),\ (x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T], T > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x,t)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \Gamma_T \equiv \partial\Omega \times [0,T]. \tag{1.3}$$

Burada, $n \geq 3$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge; u bilinmeyen fonksiyon ve L, aşağıdaki gibi tanımlanmış 2. mertebeden *diverjans* formda, doğrusal, düzgün eliptik diferansiyel ifadedir;

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}\,(x,t)\,D_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x,t)\,D_i u + c(x,t)u.$$

Bu ifadede; a_{ij}, b_i ve c verilen katsayı fonksiyonlarıdır ve $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ dir, $(i,j = 1,...,n)$.

(1.1)-(1.3) probleminde $g : Q_T \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer olmayan verilen fonksiyon; $k : \Gamma_T \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ verilen fonksiyonlardır; ν, L operatörüne bağlı birim normal vektör ve $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x,t)\,D_j u\ \nu_i$ şeklindedir; h ve φ genelleştirilmiş fonksiyonlardır.

Difüzyon Konveksiyon denklemlerinin genel formu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(d \cdot \nabla u) + \mathtt{b} \cdot \nabla u = f(x,t,u)$$

şeklindedir. Bilinmeyen fonksiyon $u(x,t)$, ısı transferi için sıcaklığı, kütle transferi için tür çeşitliliğini temsil eder. $d > 0$ difüzyon katsayısı, $\mathtt{b}$ konveksiyon katsayısı,

f fonksiyonu ise u değerinin kaynağını gösterir. Konveksiyon terimi, daha genel olarak $\nabla \cdot (\mathtt{b}u)$ olarak alınır. Ancak, daha fazla incelenen durum $\nabla \cdot \mathtt{b} = 0$ olduğu durumdur. Örneğin, bilinmeyen fonksiyonun bir nehirdeki tuzluluk oranını gösterdiği durumda, b suyun akış hızını gösterir. Ayrıca, Isı, Navier-Stokes, Porous Medium, Hamilton-Jacobi, Reaksiyon-Difüzyon denklemlerinin özel ortamlardaki durumları, bu tipteki denklemlere örnek olarak verilebilir [9].

Genellikle, akışkan hareketi, ısı transferi, astrofizik, okyanus bilimi, meteoroloji, iletkenler ile ilgili taşıma süreçlerini tanımlamak için kullanılan Difüzyon Konveksiyon denklemleri üzerine pek çok çalışma (Tsutsumi (1972), Pao (1976, 1978), Veron (1984), Zuazua (1991), Soltanov (1993) gibi) yapılmıştır. Bu tipteki denklemler, birçok bilim insanı tarafından incelenmekte ve önemli sonuçlar elde edilmektedir.

Biz de bu tezde, difüzyon konveksiyon olayının bir matematiksel modeli olarak aldığımız problem (1.1)-(1.3)'ün genelleşmiş çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdikten sonra çözümün uzun zaman davranışını inceledik.

İlk olarak, Difüzyon Konveksiyon denklemleri üzerine son zamanlarda yapılan bazı çalışmalardan kısaca bahsedeceğiz.

Souplet [34] 2001'de Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bölge olmak üzere, homojen Dirichlet sınır koşullu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{p-1}u - b|\nabla u|^q, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

problemini incelemiştir. Burada, $p > 1$, $q \geq 1$ ve $b > 0$ olmak üzere, bu problemin yerel olmayan çözümünün uzun zaman davranışı incelenmiştir.

Boni [4] 2001 yılında yaptığı çalışmasında, Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge olmak üzere, lineer olmayan sınır koşullu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - Lu + a(x)f(u) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial N} + b(x)g(u) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

problemini gözönüne almıştır. Burada, $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j})$ şeklinde düzgün eliptik diferensiyel ifadedir. $s > 0$ için $f(s)$ ve $g(s)$ pozitif artan fonksiyonlar; $a(x)$ ve $b(x)$ negatif olmayan fonksiyonlardır. Bu problemin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışı incelenmiştir.

Soltanov [30,32] 2001 ve 2006 yıllarında yaptığı çalışmalarda, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölgesinde

$$\frac{\partial \rho(u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} D_i[(a_i\,(t,x,u)\,D_i u) + b_i\,(t,x,u,Du) + c_i(t,x,u)] + f(t,x,u) = 0$$

biçimindeki lineer olmayan parabolik denklemleri homojen olmayan başlangıç koşulu ve Dirichlet sınır koşulu altında incelemiştir. Gözönüne alınan problemlerin verileri üzerine alınan koşullarla, çözümünün varlığı ispatlanmıştır.

Ding ve Li'nin [7] 2005'teki çalışmalarında, homojen 3. sınıf sınır koşulu altında lineer olmayan parabolik denklem gözönüne alınmıştır. Ω, $\mathbb{R}^n$'de, $(n \geq 2)$, sınırlı düzgün bir bölge olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(a(u)b(x)\nabla u) + g(x,t)f(u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sigma(x,t)u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) > 0, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

probleminin lineer olmayan terimler ve onların katsayılarının türevleri üzerine alınan koşullarla yerel olmayan çözümünün varlığını göstermişlerdir.

2008 yılındaki çalışmalarında, Chen, Fila ve Guo [5]; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = D \geq 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Dirichlet sınır koşullu bu problem için, ε ve A pozitif sabitler olmak üzere

$$uf(u) \geq (2+\varepsilon)\int_0^u f(v)dv > 0, \quad \forall u \geq A$$

koşulu altında, klasik çözümün varsa sınırlı olduğunu elde etmişlerdir.

Song, He ve Zhang [33] 2008'de; homojen Dirichlet sınır koşulu altında

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u + g(x,u) = 0, & (x,t) \in \Omega \times R^+, \\ u = 0, & \partial\Omega \text{ üzerinde}, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

problemini incelemişlerdir. Burada, $d > 0$'dır ve $a > 0$, $1 \leq p \leq 3$, $b_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$g(x,u) = a|u|^{p-1}u + \sum_{j=1}^{p-1} b_j(x)u^j$$

biçiminde Caratheodory fonksiyonudur. Bu problemin çözümünün uzun zaman davranışı incelenmiştir.

2010 yılında Ma [22], $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere homojen Dirichlet sınır koşullu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, \quad \partial\Omega \times [0,T) \text{ üzerinde}, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

problemini incelemiştir. $n \geq 3$ için $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ ve $n = 1, 2$ için $p < \infty$ olmak üzere, bu problemin yerel olmayan çözümünün varlığını göstermiştir.

Porzio [26] 2011 yılındaki çalışmasında; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bir bölge olmak üzere, homojen Dirichlet sınır koşullu

$$\begin{cases} u_t - div(a(x,t,u,\nabla u)) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), T > 0, \\ u = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

probleminin

- $\alpha|\xi|^p \leq a(x,t,s,\xi)\xi$, $\alpha > 0, 1 < p < n$
- $|a(x,t,s,\xi)| \leq \beta\,[|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + h(x,t)]$, $\beta > 0$
- $[a(x,t,s,\xi) - a(x,t,s,\eta)][\xi - \eta] > 0$, $\xi \neq \eta$

koşulları altında zayıf çözümünün varlığını ve tekliğini göstermiş; ayrıca, çözümün davranışını incelemiştir.

2012'deki çalışmalarında Li ve Li [18]; lineer olmayan divergence formda parabolik denklemi homojen olmayan Neumann sınır koşulu altında incelemişlerdir:

$$\begin{cases} u_t = \sum\limits_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} - f(u), \quad x \in \Omega, t \in (0,\infty), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i}\eta_j = g(u), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

f ve g üzerine yeterli koşullar bulunarak, bu problemin negatif olmayan çözümünün varlığını göstermişlerdir.

Yaptığımız bu tez çalışmasında, sınırlı bir bölgede, genel formda difüzyon konveksiyon tipli denklem için konulmuş 3. Sınıf sınır ve başlangıç değer problemi incelenmiştir. Yukarıda bahsedilen, son zamanlarda yapılan çalışmalardan görüldüğü gibi, çoğunlukla;

• x'e bağlı kısım Laplace operatörü olarak alınmıştır;

• sınır koşulu olarak Dirichlet ya da Neuman sınır koşulu alınmıştır;

• göz önüne alınan problemler çoğunlukla homojendir;

• 3. Sınıf sınır koşulu çok az incelenmiştir; bu tipteki sınır koşulu altında incelenen denklemler yukarıda bahsedilen durumlarda ele alınmıştır;

• lineer olmayan terim üstel fonksiyon ya da üstel fonksiyona benzer, monotonluk koşulunu sağlayan formda alınmıştır.

Bahsedilen tüm bu durumlardan farklı olarak, bu çalışmada homojen olmayan ve daha genel bir denklem için homojen olmayan 3. Sınıf sınır koşulu göz önüne alınmıştır. Genelleşmiş çözümün varlığı için yeterli koşullar elde edilerek varlık ispatlanmıştır. Genel durumda, yukarıda bahsedilen çalışmalarda elde edilen sonuçlar, bu çalışmada alınan sonuçlardan elde edilmektedir. Ancak, özel durumlarda, lineer olmayan kısım üzerine daha iyi koşullar elde edilebilir.

Ayrıca, bu çalışmada, çözümün var olduğu uzayda tekliği araştırılmış ve iki sonuç elde edilmiştir.

Son olarak, göz önüne alınan problemin, otonom durumda, çözümünün uzun zaman davranışı iki durumda incelenmiştir:

• Varlık ve Tekliğin elde edildiği sınıftaki çözümün, $L_2(\Omega)$ uzayında $t \to \infty$ iken sınırlı kümeye yaklaştığı (yutan kümenin varlığı) gösterilmiştir.

• Denklem basitleştirilerek ve çözümün daha iyi özelliğe sahip olduğu kabul edilerek $W_2^1(\Omega) \cap L_{q_1}(\Omega)$, $(q_1 > 1)$, uzayında yutan kümenin varlığı gösterilmiştir.

2 ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

LİNEER UZAYLAR

X, bir reel lineer uzay olsun.

Tanım 2.1 *([9])* $\|.\| : X \to [0, \infty)$ *aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun:*
(i) $\|x\| = 0$ *ancak ve ancak* $x = 0$*'dır.*
(ii) $\forall x \in X$ *ve* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *için* $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$*'dir.*
(iii) $\forall x, y \in X$ *için* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*'dir.*
Bu durumda X*'e normlu lineer uzay,* $\|.\|$ *dönüşümüne norm denir.*

Tanım 2.2 *([9])* X *normlu lineer uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun. Eğer* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ *ise o zaman* x_n *dizisi* x*'e yakınsıyor denir ve* $x_n \to x$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.3 *([9])* X *normlu lineer uzay,* $\{x_n\} \subset X$ *olsun. Eğer* $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$$

olacak şekilde bir $N > 0$ *varsa* $\{x_n\}$ *dizisine Cauchy dizisi denir.*

Tanım 2.4 *([9])* X *normlu lineer uzay olsun. X'ten alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise* X*'e tam uzay denir.*

Tanım 2.5 *([9]) Tam, normlu bir lineer uzaya* ***Banach*** *uzayı denir.*

Tanım 2.6 *([1])* X *normlu lineer uzayı sayılabilir yoğun alt kümeye sahipse* X *uzayına* ***ayrılabilir*** *uzay denir.*

Tanım 2.7 *([1])* X *reel lineer uzay olsun.* X*, üzerindeki iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzayı ise* X*'e* ***Hilbert*** *uzayı denir.*

Tanım 2.8 *([12])* X *normlu lineer uzay olsun.* X *üzerindeki tüm doğrusal ve sınırlı fonksiyoneller uzayına* X *uzayının duali denir ve* X^* *ile gösterilir.* $x' \in X^*$ *olmak üzere* X^* *üzerindeki norm*

$$\|x'\|_{X^*} = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\langle x',\ x\rangle}{\|x\|_X}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.9 *([9]) X Banach uzayı olsun. Eğer $(X^*)^* \equiv X$ ise, X' e* ***yansımalı*** *uzay denir. Daha açık olarak, her $u^{**} \in (X^*)^*$ için*

$$\langle u^{**},\ u^* \rangle = \langle u^*,\ u \rangle\ ,\ \forall u^* \in X^*$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ varsa X ***yansımalı*** *uzaydır denir.*

Tanım 2.10 *([11]) X Banach uzayı ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. Eğer her $f \in X^*$ için $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \underset{X}{\rightharpoonup} x$ biçiminde gösterilir.*

Tanım 2.11 *([11]) X, Y normlu lineer uzaylar ve $X \subset Y$ olsun. Her $u \in X$ için*

$$\|u\|_{\ Y} \le c \quad \|u\|_{\ X}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir.

Tanım 2.12 *([11]) X Banach uzayı olmak üzere $X \subset Y$ olsun. Eğer X uzayında $u_0 \in X$' e zayıf yakınsayan keyfi $\{u_n\} \subset X$ dizisi, Y uzayında u_0' a güçlü yakınsıyorsa X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.*

Ayrıca, X yansımalı Banach uzayı ve Y keyfi Banach uzayı ise X' in Y' ye kompakt gömülmesi aşağıdaki koşulların sağlanmasına denktir:

(a) $X \subset Y$

(b) X'den alınan keyfi sınırlı bir alt küme Y'de kompakt bir alt küme tarafından kapsanır.

Teorem 2.13 *([11]) Banach uzayında zayıf yakınsak bir dizi sınırlıdır.*

Teorem 2.14 *([38]) X yansımalı Banach uzayı ve $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. O zaman bu diziden öyle bir alt dizi seçebiliriz ki bu uzayda zayıf yakınsar.*

Teorem 2.15 *([21]) X ve Y normlu lineer uzaylar ve $A : X \to Y$ lineer operatör ise A operatörünün sınırlılığı ve sürekliliği denktir.*

Teorem 2.16 *([21]) X ve Y Banach uzaylar ve $A : X \to Y$ lineer sürekli operatör olsun. O zaman $A : X \to Y$ zayıf süreklidir.*

Tanım 2.17 *([11])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *açık, sınırlı bölge ve* $T > 0$ *olmak üzere* $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$ *olsun.* L, *2. mertebeden kısmi türevli operatörü*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x,t\right)u_{x_i} + c\left(x,t\right)u$$

şeklinde ise divergence formda;

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x,t\right)u_{x_i} + c\left(x,t\right)u$$

şeklinde ise divergence olmayan formdadır. Burada, a_{ij}, b_i, c, $(i,j = 1,..,n)$, *katsayı fonksiyonlarıdır.*

Ayrıca, eğer her $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$ *ve* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta\left|\xi\right|^2$$

olacak biçimde $\theta > 0$ *sabiti varsa, kısmi türevli* $\frac{\partial}{\partial t} + L$ *operatörü* ***parabolik****tir.*

Tanım 2.18 *([11])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge ve* $h = h\left(x,\xi\right)$ *hemen hemen her* $x \in \Omega$ *ve her* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *için tanımlı olsun. Eğer*

(i) her $\xi \in \mathbb{R}^n$ *için* $h_\xi\left(x\right) = h\left(x,\xi\right)$ Ω*'da ölçülebilir*

(ii) hemen hemen her $x \in \Omega$ *için* $h_x\left(\xi\right) = h\left(x,\xi\right)$ $\mathbb{R}^n$*'de sürekli*

oluyorsa, h *fonksiyonu Caratheodary özelliğine sahiptir denir.*

ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

Tanım 2.19 *([17])* (Ω, Σ, μ) *ölçü uzayı,* $\{f_n\}$ *ve* f Ω *üzerinde tanımlı, gerçel değerli* Σ*- ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere;*

$\forall\varepsilon > 0$ *ve* $\forall n \geq N$ *için*

$$\mu\left\{x : \left|f\left(x\right) - f_n\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N > 0$ *sayısı bulunabiliyorsa,* $\{f_n\}$ *dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor denir ve*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

olarak gösterilir.

Önerme 2.20 *([17])* (Ω, Σ, μ) *ölçü uzayı,* $\mu(\Omega) < \infty$, $\{f_n\}$ *ve* f *gerçel değerli ölçülebilir fonksiyonlar,* f_n f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor olsun. O zaman öyle* $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ *alt dizisi vardır ki* $f_{n_k} \overset{hhy}{\rightarrow} f$ *sağlanır.*

Teorem 2.21 *([17])* $\{f_n\}$, $L_p(\Omega)$*' da fonksiyonlar dizisi olsun ve* $f_n \underset{L_p(\Omega)}{\rightarrow} f$ *olsun. O zaman* $\{f_n\}$ *fonksiyonlar dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsar.* .

LEBESGUE UZAYLARI

Tanım 2.22 *([1])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge ve* $p \geq 1$ *pozitif bir gerçel sayı olmak üzere* Ω *üzerinde tanımlanmış*

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u *fonksiyonlar sınıfına,* $L_p(\Omega)$ *uzayı denir. Bu lineer uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.23 *([1])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölgesinde hemen hemen heryerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına* $L_\infty(\Omega)$ *uzayı denir. Bu uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.24 *([1]) Eğer* $1 \leq p \leq \infty$ *ise,* $L_p(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.25 *([1]) Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ise,* $L_p(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.26 *([1])* $1 < p < \infty \Leftrightarrow L_p(\Omega)$ *yansımalı uzaydır.*

Tanım 2.27 *([9])* X *bir Banach uzayı,* $1 \leq p < \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *olmak üzere*

$$\int\limits_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u : (a, b) \to X$ *fonksiyonlarından oluşan uzaya* $L_p(a, b; X)$ *uzayı denir.* $L_p(a, b; X)$ *bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = (\int\limits_a^b \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.28 *([9]) X bir Banach uzayı, $p = \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı $u : (a, b) \to X$ fonksiyonlarından oluşan uzaya $L_\infty(a, b; X)$ uzayı denir. $L_\infty(a, b; X)$ bir lineer normlu uzaydır ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \sup_{t\in(a,b)} \|u(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 2.29 *([9]) X ve Y Banach uzayları olsunlar. $L_p(a, b; X)$ aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $p \in [1, \infty]$ için $L_p(a, b; X)$ bir Banach uzayıdır.

(ii) $p \in [1, \infty)$ için $L_p(a, b; X)$ ayrılabilir uzaydır ancak ve ancak X ayrılabilir uzaydır.

(iii) $p \in (1, \infty)$ için X yansımalı uzay ise $L_p(a, b; X)$ bir yansımalı uzaydır.

(iv) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $X \subset Y$ sürekli gömülmesi varsa, $L_q(a, b; X) \subset L_p(a, b; Y)$ sürekli gömülmesi vardır.

Teorem 2.30 *([20]) B_0, B, B_1 aşağıdaki koşulları sağlayan Banach uzayları olsunlar:*

(i) $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 ve B_1 yansımalı uzaylar olsunlar.

(ii) $B_0 \hookrightarrow B$ kompakt gömülsün.

Bu durumda $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1$ olmak üzere

$$\{v : v \in L_{p_0}(0, T; B_0), \frac{dv}{dt} \in L_{p_1}(0, T; B_1)\} \hookrightarrow L_{p_0}(0, T; B)$$

kompakt gömülmesi vardır.

Lemma 2.31 *([19]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ sınırlı bölge, $p > 1$, $q > 1$ olmak üzere*

$$f : L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$$

sınırlı bir dönüşüm ve

$$f(x, .) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca, $\{u_m\} \subset L_p(\Omega)$ ve $u_0 \in L_p(\Omega)$ için

$$u_m \underset{L_p(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

ve

$$u_m \overset{hhy}{\underset{\Omega}{\rightarrow}} u_0$$

olsun. O zaman $\exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ *altdizisi vardır ki*

$$f(x, u_{m_k}) \underset{L_q(\Omega)}{\rightharpoonup} f(x, u_0)$$

sağlanır.

SOBOLEV UZAYLARI

Tanım 2.32 *([1])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge,* $m > 0$ *bir tamsayı ve* $1 \leq p \leq \infty$ *olsun.*

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Burada

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

ve

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu doğrusal uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. $m = 0$ *için* $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ *dır.*

$p = 2$ *ise* $W_2^m(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım*

$$\langle u, v\rangle_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) \; D^\alpha v(x) \, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.33 *([1])* $W_p^m(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.34 *([1]) Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ise,* $W_p^m(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.35 *([1]) Eğer* $1 < p < \infty$ *ise,* $W_p^m(\Omega)$ *yansımalı uzaydır.*

Teorem 2.36 *([17]) $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ya da C^1 sınıfına ait açık sınırlı küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler süreklidir:*

(i) *Eğer $1 \le p < n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$.*

(ii) *Eğer $p = n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$.*

(iii) *Eğer $p > n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$.*

Teorem 2.37 *([1]) Ω, $\mathbb{R}^n$' de uniform C^m-regularity özelliğine sahip olsun. Eğer $mp < n$ ve $p \le q \le \frac{(n-1)p}{n-pm}$ ise*

$$W^m_p(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Eğer $mp = n$ ise, $p \le q < \infty$ için bu gömülme vardır.

(Uniform C^m-regularity özelliği: Eğer $\partial\Omega$ sınırının yerel bir sonlu açık örtüsü $\{U_j\}$ ve ona karşılık gelen birebir, m-smooth dönüşümlerin bir dizisi $\{\Phi_j\}$ varsa öyle ki Φ_j, U_j'yi $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ kümesine götürüyor ve şu özellikler sağlanıyor:

(i) Bazı $\delta > 0$ için, $\cup_{j=1}^{\infty}\Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}) \supset \Omega_\delta$, $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.

(ii) Bazı sonlu R için, U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş arakesite sahiptir.

(iii) Her j için, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) $(\Phi_{j,1}, .., \Phi_{j,n})$ ve $(\Psi_{j,1}, .., \Psi_{j,n})$, Φ_j ve Ψ_j'nin bileşenlerini temsil etmek üzere, öyle bir sonlu M sayısı vardır ki, her α için $|\alpha| \le m$, her i için $1 \le i \le n$ ve her j için, $|D^\alpha \Phi_{j,i}(x)| \le M$, $x \in U_j$ ve $|D^\alpha \Psi_{j,i}(y)| \le M$, $y \in B$'dir.

o zaman Ω, uniform C^m-regularity özelliğine sahiptir.)

Teorem 2.38 *([17]) Ω, C^1 sınıfına ait açık ve sınırlı bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler kompakttır:*

(i) *Eğer $p < n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$*

(ii) *Eğer $p = n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $p = n$, $q \in [1, \infty)$*

(iii) *Eğer $p > n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$*

Teorem 2.39 *([9]) Ω, sınırı C^1' e ait sınırlı bölge olsun. Öyle bir doğrusal sınırlı*

$$T : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L_p(\partial\Omega)$$

operatörü vardır ki aşağıdakiler sağlanır:

(i) $Tu = u\mid_{\partial\Omega}, u \in W_p^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$.

(ii) $\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \forall u \in W_p^1(\Omega), c = c\,(p, \Omega)$.

Teorem 2.40 *([1]) Eğer $u \in W_p^m(\Omega)$ ise, $v = u|_{\partial\Omega}$ $W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ uzayına aittir ve*

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$$

sağlanır. Tersine eğer $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ise, o zaman $\exists\ u \in W_p^m(\Omega)$ vardır ki $v = u|_{\partial\Omega}$ ve

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq K_2 \|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}$$

sağlanır.

Tanım 2.41 *([9]) X bir Banach uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere*

$$W_p^1(a, b; X) = \{u \in L_p(a, b; X) | u' \in L_p(a, b; X)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya $W_p^1(a, b; X)$ uzayı denir. Bu uzay bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{W_p^1(a,b;X)} = \begin{cases} (\int\limits_a^b \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{t\in(a,b)} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X), & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.42 ***(Coercive Operatör)*** *([11]) X Banach uzayı, X^* onun dual uzayı olmak üzere $f : X \to X^*$ operatörü $u \in X$ için*

$$\|u\|_X \to \infty \quad iken \quad \frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_X} \to \infty$$

ise f operatörüne coercivedir denir.

Teorem 2.43 ***(Varlık Teoremi)****([31]) X ve Y Banach uzayları, X^* ve Y^* sırasıyla dual uzayları olsun. $\mathcal{M}_0 \subseteq X$ zayıf tam "reflexive"pn-uzay , $X_0 \subseteq \mathcal{M}_0 \cap Y$ ayrılabilir topolojik vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(I) $f : P_0 \to L_q(0,T;Y)$ *zayıf sürekli bir dönüşümdür, burada*

$$P_0 \equiv L_p(0,T;\mathcal{M}_0) \cap W_q^1(0,T;Y) \cap \{x(t) \mid x(0) = 0\}$$

$1 < \max\{q, q'\} \leq p < \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$;

(II) $s \geq 0$, $m \geq 1$ *olmak üzere* $A : W_m^s(0,T;X_0) \to W_m^s(0,T;Y^*)$ *lineer sürekli operatörü vardır ki;* A, $\frac{\partial}{\partial t}$ *ile değişmelidir ve* $ker(A^*) = \{0\}$*'dır;*

(III) f *ve* A *operatörleri, genelleşmiş anlamda,* $L_p(0,T;X_0)$ *uzayı üzerinde coercive ikili oluşturur, yani öyle bir* $r > 0$ *sayısı ve* $\Psi : R_+^1 \to R_+^1$ *fonksiyonu vardır ki* $\tau \to \infty$ *iken* $\Psi(\tau)/\tau \to \infty$ *ve her* $x \in L_p(0,T;X_0)$ *için* $[x]_{L_p(\mathcal{M}_0)} \geq r$ *koşulu altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_0^T \langle f(t,x(t)), Ax(t) \rangle dt \geq \Psi\left([x]_{L_p(\mathcal{M}_0)}\right)$$

(IV) *öyle* $C_0 > 0$, $C_1, C_2 \geq 0$, $\nu > 1$ *sabitleri vardır ki her* $x \in W_p^1(0,T;X_0)$ *ve* $\xi \in L_p(0,T;X_0)$ *için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \xi(t), A\xi(t) \rangle dt &\geq C_0 \|\xi\|_{L_q(0,T;Y)}^{\nu} - C_2, \\
\int_0^t \langle \frac{dx}{d\tau}, Ax(\tau) \rangle d\tau &\geq C_1 \|x\|_Y^{\nu}(t) - C_2, \quad h.h.h.\ t \in [0,T].
\end{aligned}$$

(I) - (IV) koşulları sağlansın. Bu taktirde

$$\int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt} + f(t,x(t)), y^*(t) \right\rangle dt = \int_0^T \langle y(t), y^*(t) \rangle dt, \quad \forall y^* \in L_{q'}(0,T;Y^*),$$

eşitliği her $y \in M \subset L_q(0,T;Y)$ *için* P_0*'da çözülebilirdir. Burada*

$$M = \left\{ y \in L_q(0,T;Y) : \sup \left\{ \frac{1}{[x]_{L_p(0,T;\mathcal{M}_0)}} \int_0^T \langle y(t), Ax(t) \rangle\ dt \ \mid x \in L_p(0,T;X_0) \right\} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Lemma 2.44 ***(Kısmi İntegrasyon Formülü)*** *([9])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık bir alt küme ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun.* η^i *sınırın birim normal vektörünün* ($\eta = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$) *i. bileşeni olmak üzere* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *olsun. O zaman;*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

dir $(i = 1...n)$.

Teorem 2.45 ***(Green Formülü)*** *([9])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık bir alt küme ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun.* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, ν $\partial\Omega$*'nın dış birim normal vektörü olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:*

(i) $\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$

(ii) $\int\limits_{\Omega} Dv.Du dx = - \int\limits_{\Omega} u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS$

(iii) $\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS$

Tanım 2.46 ***(Test Fonksiyonu)*** *([28])* φ*, kompakt support'a sahip gerçel değerli ve her mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ise* $(\varphi \in C_c^\infty(\Omega))$ φ*'ye test fonksiyonu denir.*

Bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile test fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır (bu uzayı D ile göstereceğiz).

Tanım 2.47 ***(Genelleştirilmiş Fonksiyon)*** *([28])* f*,* D *üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan* f*'e genelleştirilmiş fonksiyon denir:*

(a) Her α_1 *ve* α_2 *gerçel (veya kompleks) sayıları ve her* φ_1, $\varphi_2 \in D$ *için*

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$$

(b) Her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\} \subseteq D$ *dizisi için* $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ *dizisi sıfıra yakınsar.*

Yukarıdaki tanımdan çıkar ki, integrallenebilir bir f fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş fonksiyondur. Gerçekten, her $\varphi \in D$ için

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden yukarıdaki tanımın koşulları sağlanır.

Tanım 2.48 ***(Zayıf Türev)*** *([9])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *açık bir bölge ve* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *(*$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}|$ *her* $V \subset\subset \Omega$ *için* $u \in L^1(V)\}$*),* α *multiindex olmak üzere eğer her test fonksiyonu* φ *için*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, v'ye u'nun $|\alpha|$*. zayıf kısmi türevi denir (*$D^\alpha u = v$*).*

Lemma 2.49 ***(Hölder Eşitsizliği)*** *([9])* $1 \le p_1, ..., p_m \le \infty$ *,* $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ *olsun.* $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$ *,* $k = 1, ..., m$ *ise*

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m| \, dx \le \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L_{p_k}(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.50 ***(Young Eşitsizliği)*** *([9])* $1 < p, \; q < \infty$*,* $1/p + 1/q = 1$ *olsun. Bu durumda*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \;\; (a, \; b > 0)$$

veya

$$ab \le \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \;\; (\varepsilon > 0)$$

olur.

Lemma 2.51 *([1]) Eğer* $1 \le p < \infty$ *ve* $a \ge 0$*,* $b \ge 0$ *ise, o zaman*

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.52 [33] *Her* $u \in W_2^1(\Omega)$ *için en az bir* $c = c(\Omega)$ *sabiti vardır öyle ki,*

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \le c(\int_\Omega |Du|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, dx')$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.53 *Her* $u \in W_2^1(\Omega)$ *için en az bir* $\widetilde{c} = \widetilde{c}(\Omega)$ *sabiti vardır öyle ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ \leq \widetilde{c}(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)})$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2.54 *Her* $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ *için en az bir* $c' = c'(\Omega)$ *sabiti vardır öyle ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c' \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

X bir Banach uzayı olmak üzere, $\mathcal{B}$, X'in tüm sınırlı alt kümelerinin ailesini göstersin:

Tanım 2.55 ***(Yarı Akış)****([36])* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, X *üzerinde tanımlı operatörler ailesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:*
i) $S(0) = I$,
ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\ t, s \in R_+$
iii) $S(t) : X \to X$ *dönüşümü* $\forall t \geq 0$ *için süreklidir.*
O zaman $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *ailesine sürekli* ***yarı akış*** *denir.*

Tanım 2.56 ***(Yutan Küme)****([36])* $S(t) : X \to X, \quad t \in R_+$ *bir yarı akış ve* $B_0 \subset X$ *olsun.* $\forall\ B \in \mathcal{B}$ *için*

$$S(t)B \subset B_0, \ \forall t \geq T_1(B)$$

olacak şekilde $\exists\ T_1(B) > 0$ *sayısı varsa,* B_0 *kümesine* ***yutan küme*** *denir.*

Çalışmamızda kullanacağımız diğer sabitler aşağıdaki eşitsizliklerden gelmektedir:

Bu çalışma boyunca, $2^* := \frac{2n}{n-2}$ ve $(2^*)' := \frac{2^*}{2^*-1}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 2.11'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_0 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_{2^*}(\Omega)} \leq c_0 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

Teorem 2.37'ye göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_1 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.3}$$

Teorem 2.53'e göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_2 > 0$ sayısı vardır ki

$$c_2 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \tag{2.4}$$

Teorem 2.39'a göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_3 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_3 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.5}$$

Teorem 2.40'a göre $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\exists c_4 > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_4 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

3 BİR SINIF DOĞRUSAL OLMAYAN DİFÜZYON-KONVEKSİYON DENKLEMLERİ İÇİN 3. SINIF SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Bu bölümde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge olmak üzere, aşağıdaki problemin uygun uzaylarda çözümünün varlığı incelenecektir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + g(x,t,u) = h(x,t),\ (x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T), T > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x,t)u\right)\right|_{\Gamma_T} = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \Gamma_T \equiv \partial\Omega \times [0,T]. \tag{1.3}$$

Burada, genel olarak $q > 1$ olmak üzere $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_q(Q_T)$, $\varphi \in L_2(0,T;(W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $q_1 > 1$ olmak üzere $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{q_1}(\Omega)$ alınacaktır.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(1) $a_{ij} \in L_\infty(\overline{Q_T})$ olmak üzere $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i,j = 1,...,n)$ ve öyle $\theta > 0$ vardır ki $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ ve hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2$$

sağlanır.

(2) g, $Q_T \times \mathbb{R}^1$'de Caratheodary fonksiyonu olmak üzere öyle $\alpha > 0$ sayısı ve g_0, g_1 fonksiyonları vardır ki $\forall (x,t,\tau) \in Q_T \times \mathbb{R}^1$ için

$$|g(x,t,\tau)| \leq g_1(x,t)\,|\tau|^\alpha + g_0(x,t)$$

sağlanır. Burada, g_0, g_1 fonksiyonları aşağıdaki uzaylara aittir:

$$g_1 \in \begin{cases} L_\infty(Q_T), & \alpha > 1 \\ L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega)), & \alpha = 1 \\ L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)), & \alpha < 1 \end{cases} ;\ g_0 \in \begin{cases} L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T), & \alpha > 1 \\ L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega)), & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(3) $k \in L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))$'dir.

Gözönüne alınan problemin çözümü aşağıdaki formda anlaşılacaktır. Öncelikle, aşağıdaki uzayı tanımlayalım:

$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$.

Tanım 3.1 *$u \in P_0$ fonksiyonu, keyfi $v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ için,*

$$-\int_0^T\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial t}dxdt+\int_\Omega u(x,T)v(x,T)dx-\int_\Omega u(x,0)v(x,0)dx+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,D_juD_ivdxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\,D_iu\,vdxdt+\int_0^T\int_\Omega c(x,t)uvdxdt+\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)vdxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x,t)uvdxdt$$

$$=\int_0^T\int_\Omega hvdxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi vdxdt$$

eşitliğini sağlarsa, u fonksiyonuna problem (1.1)-(1.3)'ün genelleşmiş çözümü denir.

P_0 uzayı, (1.1) denklemindeki lineer olmayan g dönüşümünün bilinmeyen fonksiyonuna bağlılık mertebesi olan α sayısına göre belirlenmiştir. Eğer $\alpha \leq 1$ ise, P_0 uzayının tanımında yer alan ilk iki uzay için $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$ sağlanır. Bu durumda $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ olacaktır.

Dolayısıyla, problem (1.1)-(1.3)'ü, Üst Lineer ($\alpha > 1$), Alt Lineer ($0 < \alpha < 1$) ve Lineer ($\alpha = 1$) olmak üzere üç durumda inceleyeceğiz. Öncelikle, bu üç durumda, başlangıç koşulu sıfır olduğunda problemin genelleşmiş çözümünün varlığını ve (model bir durumda) tekliğini ispatlayacağız. Daha sonra, yine bu üç durumda, başlangıç koşulu sıfırdan farklı iken problemin genelleşmiş çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlayacağız.

3.1 Başlangıç Koşulu Sıfır iken Problem (1.1)-(1.3)'ün İncelenmesi

Bu bölümde, başlangıç koşulu sıfır ($u_0(x) = 0$) iken problem (1.1)-(1.3)'ün genelleşmiş çözümünün varlığını ve özel bir durumda tekliğini araştıracağız.

3.1.1 Üst Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Bu alt bölümde, problem (1.1)-(1.3)'ü $\alpha > 1$ iken inceleyeceğiz. Bu durumda, $h \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ olacaktır ve Tanım 3.1'deki P_0 uzayı aşağıdaki gibidir:

$P_0 = L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$.

Teorem 3.2 *$\alpha > 1$ için (1)-(3) koşulları sağlansın. Ayrıca, aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:*

(i) $b_i \in L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T), (\forall i = 1, ..., n)$ ve $c \in L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)$ olsun.

(ii) Öyle $\widetilde{g_1} > 0$ ve $\widetilde{g_0} \geq 0$ sayıları vardır ki $\forall \xi \in \mathbb{R}$ için

$$g(x,t,\xi)\xi \geq \widetilde{g_1} |\xi|^{\alpha+1} - \widetilde{g_0}$$

sağlanır.

(iii) k fonksiyonu için $k(x,t) \geq -k_0$ olacak şekilde $k_0 > 0$ sayısı vardır ki $k_0 < \frac{\theta_1}{c_3}$ sağlanır. Burada, $\theta_1 < \min\{\theta, \widetilde{g_1}\}$ dir.

O zaman, her $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı için Teorem 2.43'ü kullanacağız. Bunun için önce problem (1.1)-(1.3)'ün yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım:

$$f_1(u) := Lu + g(x,t,u), \quad f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x,t)u$$

olmak üzere

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \to [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

ve

$$A \equiv Id : P_0 \to P_0$$

olsun. Bu dönüşümlerin uygun uzaylarda Teorem 2.43'ün koşullarını sağladığını görmek için aşağıdakileri lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.3 *f dönüşümü Teorem 3.2'nin koşulları altında P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f_1 ve f_2 dönüşümlerinin uygun uzaylarda zayıf sürekli olduğunu göstereceğiz. Önce

$$f_1 : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

dönüşümünü inceleyelim.

L, lineer operatörünün zayıf sürekliliğini göstermek için uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayındaki norm tanımını kullanalım.

$u, v \in P_0$ alalım.

$$\|Lu\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}\leq 1} |\langle Lu, v\rangle| \tag{3.1}$$

olmak üzere bu eşitsizliğin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz.

$$|\langle Lu, v\rangle| = \left| \int_0^T \int_\Omega - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)D_j u)\ vdxdt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t) D_i u\ vdxdt + \int_0^T \int_\Omega c(x,t)uvdxdt \right| \tag{3.2}$$

(3.2)'deki ilk terim için önce kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\left| \int_0^T \int_\Omega - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)D_j u)\ vdxdt \right| \leq \left| \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j u D_i v dxdt \right|$$

$$+ \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j u\ \nu_i\ vdxdt \right| \tag{3.3}$$

(3.3)'ün sağ tarafındaki ilk terimde uygun Hölder eşitsizliği kullandıktan sonra aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j u D_i v dxdt \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} \|D_j u\|_{L_2(Q_T)} \|D_i v\|_{L_2(Q_T)}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.4}$$

(3.3)'ün sağ tarafındaki ikinci terimde Tanım 2.8'i ve (2.6) eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\left|\int_0^T\int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_ju\ \nu_i\ vdxdt\right| \le \int_0^T\int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)D_ju\ v|\,dxdt$$

$$\le \int_0^T\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}\|D_ju\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}dt \le \int_0^T\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}dt$$

$$\le \int_0^T c_4^2\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}dt \le c_4^2\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)}\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.5}$$

(3.2)'deki ikinci terim için uygun Hölder eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki değerlendirme alınır.

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ vdxdt\right| \le \int_0^T\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(\Omega)}\|D_iu\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}dt$$

$$\le \sup_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}\|Du\|_{L_2(Q_T)}\|v\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} \le \sup_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\|v\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} \tag{3.6}$$

(3.2)'deki son terim için uygun Hölder eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki değerlendirme alınır.

$$\left|\int_0^T\int_\Omega c(x,t)uvdxdt\right| \le \|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)}\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\|v\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} \tag{3.7}$$

(3.4), (3.5), (3.6) ve (3.7)'yi (3.2)'de gözönüne alırsak,

$$|\langle Lu,v\rangle| \le (\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} + c_4^2\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)} + \sup_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)} + \|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)})$$

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik,

$$\gamma_1 := \sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} + c_4^2\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)} + \sup_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)} + \|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)}$$

olmak üzere,

$$|\langle Lu,v\rangle| \le \gamma_1\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

şeklinde yazılır.$\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)} \leq 1$ olmak üzere supremuma geçersek, (3.1)'e göre

$$\|Lu\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \leq \gamma_1 \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

elde edilir. Böylece, L dönüşümünün sınırlılığı elde edilir. Lineer sınırlı olduğundan süreklidir (Teorem 2.15) ve dolayısıyla zayıf sürekli olduğu açıktır (Teorem 2.16).

Lineer olmayan g dönüşümünün P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$'a zayıf sürekli olduğunu göstermek için P_0'dan olan $\{u_m\}$ dizisi $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$ olduğunda $g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$ olacak şekilde $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi bulmak yeterlidir. Bunun için Lemma 2.31'i kullanacağız. O halde Lemma 2.31'in koşullarının sağlandığını gösterelim.

Önce, bu dönüşümün $L_{\alpha+1}(Q_T)$'den $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterelim. $\forall u \in L_{\alpha+1}(Q_T)$ için (2) koşulunu gözönüne alır ve uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_0^T\int_\Omega |g(x,t,u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}dxdt \leq 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_0^T\int_\Omega |\, g_1\,|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}|u|^{\alpha+1}dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\, g_0\,|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}dxdt\right)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|g_1\|_{L_\infty(Q_T)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}^{\alpha+1} + \|g_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)$$

Dolayısıyla,

$$\|g(x,t,u)\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|g_1\|_{L_\infty(Q_T)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}^{\alpha+1} + \|g_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)$$

eşitsizliğinden açıktır ki $g : L_{\alpha+1}(Q_T) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ sınırlı dönüşümdür.

Ayrıca, g Caratheodary fonksiyonu olduğundan hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için

$$g(x,t,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir.}$$

$u_m \in P_0$ ve $u_m \rightharpoonup u_0$ olsun. $P_0 \subset L_{\alpha+1}(Q_T)$ olduğundan $u_m \underset{L_{\alpha+1}(Q_T)}{\rightharpoonup} u_0$ olur.

$$P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T)$$

kompakt gömülmesini gözönüne alırsak, $\exists\, \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki Q_T' de hemen hemen heryerde $u_{m_l} \longrightarrow u_0$ vardır.

Böylece, Lemma 2.31'den

$$g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$$

olacak şekilde $\exists\ \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi vardır.

$$L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

olduğundan

$$g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$$

zayıf yakınsaması elde edilir. Dolayısıyla,

$$g : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

zayıf süreklidir.

Böylece L ve g'nin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından

$$f_1 : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

zayıf sürekli olduğu elde edilir.

Şimdi, $f_2 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğunu gösterelim. f_2 lineer dönüşüm olduğundan uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için $L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ uzayındaki norm tanımını kullanalım. $u, v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ alalım.

$$\|f_2(u)\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \leq 1} |\langle f_2(u), v\rangle| \tag{3.8}$$

olmak üzere eşitliğin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz.

$$|\langle f_2(u), v\rangle| = \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x,t) u v dx dt \right|$$

$$= \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j u\ \nu_i\ v dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x,t) u v dx dt \right| \tag{3.9}$$

eşitliğindeki ilk terim için aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j u\ \nu_i\ v dx dt \right| \leq \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} D_j u\ v|\, dx dt$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)} \|D_j u\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty\ (\Gamma_T)} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \tag{3.10}$$

(3.9)'daki ikinci terime uygun Hölder eşitsizliğini uygular ve (2.4) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} k(x,t)uvdxdt \right| \leq \int_0^T \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} dt$$

$$\leq c_2^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.11)'i (3.9)'da gözönüne alırsak

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \leq (\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty\ (\Gamma_T)} + c_2^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}) \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\gamma_2 := \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty\ (\Gamma_T)} + c_2^2 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}$$

olmak üzere

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \leq \gamma_2 \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

şeklinde yazılır. $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \leq 1$ olmak üzere supremuma geçersek, (3.8)' e göre

$$\|f_2(u)\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \leq \gamma_2 \|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

elde edilir. Böylece, $f_2 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ dönüşümü sınırlıdır. Lineer sınırlı olduğundan süreklidir; dolayısıyla, zayıf süreklidir. f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından f'in P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$ uzayına zayıf sürekli olduğu elde edilir. ■

Lemma 3.4 *f ve A dönüşümleri Teorem 3.2' nin koşulları altında $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. A dönüşümü birim dönüşüm olarak tanımlandığından *coercive* ikililik adi *coercive*liğe denktir. f dönüşümünün *coercive* olduğunu göstermek için $u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ olmak üzere aşağıdaki dual forma bakalım.

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} = \int_0^T \int_\Omega - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x,t)D_ju)\ udxdt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)D_iu\ udxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt$$

Bu eşitlikte ilk terime sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygularsak

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T}=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_juD_iudxdt+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x,t)u^2dxdt \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki her terimi ayrı değerlendireceğiz. İlk terim için Koşul (1)'i gözönüne alırsak

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_juD_iudxdt\geq\theta\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}$$

elde edilir. (3.12)'deki ikinci terim için uygun Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt\geq-\int_0^T\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(\Omega)}\|D_iu\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}dt$$

elde edilir. Burada, $\sigma:=\sup\limits_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}$ gösterimini kullanıp uygun Young eşitsizliklerini uygularsak

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt\geq-\sigma\|Du\|_{L_2(Q_T)}\|u\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$\geq-\varepsilon_1\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_1)\sigma^2\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\geq-\varepsilon_1\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}-\varepsilon_2\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_2)(c(\varepsilon_1)\sigma^2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

alınır. (3.12)'deki üçüncü terim için uygun Hölder ve Young eşitsizlikleri kullanılarak

$$\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt\geq-\int_0^T\|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}dt\geq-\varepsilon_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_3)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)}$$

alınır. (3.12)'deki dördüncü terim için (ii) koşulunu gözönüne alırsak

$$\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt\geq\tilde{g}_1\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\tilde{g}_0Tmes\Omega$$

elde edilir. (3.12)'deki son terim için (iii) koşulunu kullanırsak

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}k(x,t)u^2dxdt\geq-k_0\|u\|^2_{L_2(\Gamma_T)}$$

alınır. Elde edilen tüm bu değerlendirmeleri (3.12)'de gözönüne alırsak

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq (\theta-\varepsilon_1)\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + (\widetilde{g_1}-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - k_0\|u\|^2_{L_2(\Gamma_T)}$$

$$-c(\varepsilon_2)(c(\varepsilon_1)\sigma^2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} - c(\varepsilon_3)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} - \widetilde{g_0}Tmes\Omega$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_1 < \theta$ ve $\varepsilon_2+\varepsilon_3 < \widetilde{g_1}$ olacak şekilde $\varepsilon_i, (i=1,2,3)$ seçilir ve ayrıca, $K := c(\varepsilon_2)(c(\varepsilon_1)\sigma^2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c(\varepsilon_3)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} + \widetilde{g_0}Tmes\Omega$ gösterimi kullanılırsa

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \min\{(\theta-\varepsilon_1),(\widetilde{g_1}-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}\left(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right) - k_0c_3\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

şeklinde yazılır. Burada, $\theta_1 := \min\{(\theta-\varepsilon_1),(\widetilde{g_1}-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}$ ile gösterip Sonuç 2.54'ü kullanırsak

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \theta_1\left(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right) - k_0c_3\left(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + c'\right) - K$$

$$\geq (\theta_1 - k_0c_3)\left(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right) - k_0c_3c' - K$$

$$\geq \frac{\theta_1 - k_0c_3}{2}\left(\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right) - \frac{\theta_1 - k_0c_3}{2}c' - k_0c_3c' - K$$

değerlendirmesi elde edilir. Teoremin (iii) koşulundan açıktır ki $\theta_1 - k_0c_3 > 0$ olur. O halde, son eşitsizlikten f dönüşümünün $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında *coercive* olduğu görülür. ■

Ayrıca, A dönüşümü birim dönüşüm olduğundan Teorem 2.43'ün (II) koşulunu sağlar. (IV) koşulunun sağlandığı aşağıdaki eşitsizliklerden açıktır. $u \in W_2^1(Q_T)$ için

$$\int_0^T \langle u,u\rangle_\Omega\, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)}dt \geq c_6\|u\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)}$$

h.h.h. $t \in [0,T]$ için

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u\right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2}c_7\|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t)$$

($c_6, c_7 > 0$ Sobolev gömülme eşitsizliklerinden gelmektedir.)

Böylece Teorem 2.43'ün tüm koşulları sağlandığından, bu teoremi problem (1.1)-(1.3)'e uygulayabiliriz. O halde,

$$\sup\left\{\frac{1}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}}\int_0^T \langle h,u\rangle_\Omega + \langle \varphi,u\rangle_{\partial\Omega}\,dt : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)\right\} < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)]\times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0'da çözümü vardır.

Burada, h ve φ genelleşmiş fonksiyonlarının

$$\|h\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} = \sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)}} : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)\right\}$$

$$\|\varphi\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = \sup\left\{\frac{\langle \varphi,u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))\right\}$$

norm tanımlarını gözönüne alırsak, her $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)] \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0'da çözümünün varlığı elde edilir. ■

3.1.2 Alt Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Bu bölümde, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümünün varlığını $0 < \alpha < 1$ için inceleyeceğiz. Bu durumda, Tanım 3.1'deki P_0 uzayı aşağıdaki gibidir:

$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i′) $b_i \in L_\infty(0,T;L_n(\Omega))$, $(\forall i = 1,...,n)$, olsun ve bu fonksiyonlar için $\sup\limits_i \|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))} \equiv \sigma$ tanımlansın.

(ii′) c ve k fonksiyonları, $c \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$ ve k, Koşul (3)'teki gibi olmak üzere aşağıdakilerden biri sağlansın:

(a) Öyle bir $\widetilde{c} > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $c(x,t) \geq \widetilde{c}$ sağlanır ve

$$\sigma c_0 + c_1 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < \min\{\theta, \widetilde{c}\}$$

olacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

(b) Öyle bir $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in \Gamma_T$ için $k(x,t) \geq k_0$ sağlanır ve

$$\sigma c_0 + c_0^2 \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < c_2 \min\{\theta, k_0\}$$

olacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

Teorem 3.5 $0 < \alpha < 1$ *için (1)-(3) ve (i′), (ii′) koşulları sağlansın. O zaman, her* $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *için problem (1.1)-(1.3)'ün* P_0 *uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

İspat. Bu teoremin ispatı için Teorem 2.43'ü kullanacağız. Bunun için önce problem (1.1)-(1.3)'ün yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f_1(u) := Lu + g(x,t,u), \quad f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x,t)u$$

olmak üzere

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

ve

$$A \equiv Id : P_0 \to P_0$$

olsun. Bu dönüşümlerin uygun uzaylarda Teorem 2.43'ün koşullarını sağladığını görmek için aşağıdakileri lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.6 *f dönüşümü Teorem 3.5'in koşulları altında P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf süreklidir.*

İspat. f_1 ve f_2 dönüşümlerinin uygun uzaylarda zayıf sürekli olduğunu göstereceğiz. Önce

$$f_1 : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

dönüşümünü inceleyelim.

L lineer operatörünün zayıf sürekliliğini göstermek için uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayındaki norm tanımını kullanarak normun sınırlılığını gösterelim.

$u, v \in P_0$ alalım.

$$\|Lu\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} \equiv \sup_{\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\leq 1} |\langle Lu, v\rangle| \tag{3.13}$$

olmak üzere bu eşitsizliğin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz.

$$|\langle Lu, v\rangle| = \left| \int_0^T \int_\Omega -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)D_j u)\ vdxdt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_i u\ vdxdt + \int_0^T \int_\Omega c(x,t)uvdxdt \right| \tag{3.14}$$

(3.14)'teki ilk terim için Lemma 3.3'ün ispatında elde edilen (3.4) ve (3.5) değerlendirmelerini gözönüne alacağız. Şimdi, (3.14)'teki ikinci terim için uygun Hölder eşitsizliğini kullanır ve (i′) koşulunu gözönüne alırsak

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_i u\ vdxdt \right| \leq \int_0^T \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L_n(\Omega)} \|D_i u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$$

$$\leq \sigma c_0 \|Du\|_{L_2(Q_T)} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq \sigma c_0 \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.14)'teki üçüncü terim için uygun Hölder eşitsizliklerini kullanırsak

$$\left| \int_0^T \int_\Omega c(x,t)uvdxdt \right| \leq \int_0^T \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L_{2^*}(\Omega)} \|v\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$$

$$\leq c_0^2 \int_0^T \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} dt \leq c_0^2 \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.4), (3.5), (3.15) ve (3.16)'yı, (3.14)'te gözönüne alırsak

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} + c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)} + \sigma c_0 + c_0^2 \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \right)$$
$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

eşitsizliği alınır. Bu eşitsizlik,

$$\gamma_3 := \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)} + c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Gamma_T)} + \sigma c_0 + c_0^2 \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}$$

olmak üzere,

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq \gamma_3 \, \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \, \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

şeklinde yazılır. $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq 1$ olmak üzere supremuma geçersek, (3.12)'ye göre

$$\|Lu\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} \leq \gamma_3 \, \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir. Böylece, L dönüşümünün sınırlılığı ispatlanmış olur. L dönüşümü lineer sınırlı olduğundan süreklidir (Teorem 2.15) ve dolayısıyla zayıf sürekli olduğu açıktır (Teorem 2.16).

Lineer olmayan g dönüşümünün P_0'dan $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$'a zayıf sürekli olduğunu göstermek için P_0'dan olan $\{u_m\}$ dizisi $u_m \underset{P_0}{\rightharpoonup} u_0$ olduğunda $g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$ olacak şekilde $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi bulmak yeterlidir. Bunun için Lemma 2.31'i kullanacağız. O halde Lemma 2.31'in koşullarının sağlandığını gösterelim.

Önce, bu dönüşümün $L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$'dan $L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))$ uzayına sınırlı olduğunu gösterelim. $u \in L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$ için Koşul (2)'yi gözönüne alır ve uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|g(x,t,u)\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))} = \int_0^T \left(\int_\Omega |g(x,t,u)|^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq \int_0^T \left(2^{(2^*)'-1} \int_\Omega |\, g_1\,(x,t)|^{(2^*)'} |u|^{\alpha(2^*)'} + |\, g_0\,(x,t)|^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq \int_0^T \left[2^{(2^*)'-1} \left(\|g_1\|^{(2^*)'}_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)} \|u\|^{\alpha(2^*)'}_{L_{2^*}(\Omega)} + \|\, g_0\|^{(2^*)'}_{L'_{2^*}(\Omega)} \right) \right]^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq 2\int_0^T \left(\|g_1\|^2_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)} \|u\|^{2\alpha}_{L_{2^*}(\Omega)} + \| \ g_0\|^2_{L'_{2^*}(\Omega)} \right) dt$$

$$\leq 2\left(\|g_1\|^2_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} \|u\|^{2\alpha}_{L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))} + \| \ g_0\|^2_{L_2(0,T;L'_{2^*}(\Omega))} \right)$$

Yukarıdaki eşitsizlikten açıktır ki, $g : L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))$ sınırlı dönüşümdür.

Ayrıca, g Caratheodary fonksiyonu olduğundan hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için

$$g(x,t,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir.}$$

$u_m \in P_0$ ve $u_m \rightharpoonup u_0$ olsun. $P_0 \subset L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$ olduğundan $u_m \underset{L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))}{\rightharpoonup} u_0$ olur.

$$P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \circlearrowleft L_2(Q_T)$$

kompakt gömülmesini gözönüne alırsak, $\exists \ \{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki Q_T' de hemen hemen heryerde $u_{m_l} \longrightarrow u_0$ vardır.

Böylece, Lemma 2.31'den

$$g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$$

olacak şekilde $\exists \ \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi vardır.

$$L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega)) \subset L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

olduğundan

$$g(x,t,u_{m_k}) \underset{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} g(x,t,u_0)$$

zayıf yakınsaması elde edilir. Dolayısıyla,

$$g : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

zayıf süreklidir.

Böylece L ve g'nin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından

$$f_1 : P_0 \to L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

zayıf sürekli olduğu elde edilir.

$f_2 : P_0 \subset L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \longrightarrow L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğu Lemma 3.3'ün ispatında gösterilmişti. Dolayısıyla, f_1 ve f_2 dönüşümlerinin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından f'in P_0 uzayından $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$ uzayına zayıf sürekli olduğu elde edilir. ■

Lemma 3.7 *f ve A dönüşümleri Teorem 3.5' in koşulları altında $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. A dönüşümü birim dönüşüm olarak tanımlandığından *coercive* ikililik adi *coerciveliğe* denktir. f dönüşümünün *coercive* olduğunu göstermek için
$u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ olmak üzere aşağıdaki dual forma bakalım.

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} = \int_0^T\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)D_ju)\ udxdt + \int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt$$

Bu eşitlikte ilk terime sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygularsak

$$\langle f(u), u\rangle_{Q_T} = \int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_juD_iudxdt + \int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x,t)u^2dxdt \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki her terimi ayrı ayrı değerlendireceğiz. İlk terim için Koşul (1)'i gözönüne alırsak

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_juD_iudxdt \geq \theta\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}$$

eşitsizliği alınır. (3.17)'deki ikinci terim için uygun Hölder ve Young eşitsizlikleri kullanılıp (i') koşulu gözönüne alınırsa

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iu\ udxdt \geq -\int_0^T\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_n(\Omega)}\|D_iu\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$\geq -\int_0^T \sigma\|Du\|_{L_2(\Omega)}c_0\|u\|_{W_2^1(\Omega)}dt \geq -\sigma c_0\int_0^T \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = -\sigma c_0\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

elde edilir. (3.17)'deki üçüncü terimi Teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde,

Durum (a) için

$$\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt \geq \widetilde{c}\|u\|^2_{L_2(Q_T)}$$

eşitsizliği ve **Durum (b)** için

$$\int_0^T\int_\Omega c(x,t)u^2dxdt \geq -\int_0^T \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{2^*}(\Omega)} \geq -c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.17)'deki dördüncü terim için Koşul (2)'yi gözönüne alıp uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullandığımızda aşağıdaki değerlendirme alınır:

$$\int_0^T\int_\Omega g(x,t,u)udxdt \geq -\int_0^T\int_\Omega g_1(x,t)|u|^{\alpha+1}dxdt - \int_0^T\int_\Omega g_0(x,t)udxdt$$

$$\geq -\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{2^*}(\Omega)}dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}\|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$\geq -\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}c_0^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{W_2^1(\Omega)}dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}c_0\|u\|_{W_2^1(\Omega)}dt$$

$$\geq -\varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - \varepsilon_2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}$$

(3.17)'deki son terimi Teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde,

Durum (a) için

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x,t)u^2dxdt \geq -\int_0^T \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}dt$$

$$\geq -c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

ve **Durum (b)** için

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega} k(x,t)u^2dxdt \geq k_0\|u\|^2_{L_2(\Gamma_T)}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıda elde edilen tüm değerlendirmeleri (3.17)'de gözönüne alalım. Teoremin (ii') koşuluna dayanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Durum (a) için

$$\begin{aligned}\langle f(u),u\rangle_{Q_T} &\geq \theta\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} - \left(\sigma c_0 + c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\ &+\widetilde{c}\|u\|^2_{L_2(Q_T)} - c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))} \\ &\geq \left(\min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\ &-c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}\end{aligned}$$

Burada, $\varepsilon_1+\varepsilon_2 < \min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}$ olacak şekilde ε_1 ve ε_2 seçilir. Ayrıca, $K := c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} + c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}$ ile gösterilirse

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \left(\min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

eşitsizliği elde edilir.

Durum (b) için

$$\begin{aligned}\langle f(u),u\rangle_{Q_T} &\geq \theta\|Du\|^2_{L_2(Q_T)} - \sigma c_0\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)} \\ &-\varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - \varepsilon_2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\ &-c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))} + k_0\|u\|^2_{L_2(\Gamma_T)} \\ &\geq \min\{\theta,k_0\}(\|Du\|^2_{L_2(Q_T)}+\|u\|^2_{L_2(\Gamma_T)}) - (\sigma c_0 + c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\ &-c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}\end{aligned}$$

Burada, (2.6) eşitsizliğini kullanalım. Ayrıca, $K := c(\varepsilon_1)c_0^{\frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} + c(\varepsilon_2)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}$ ile gösterilirse

$$\langle f(u),u\rangle_{Q_T} \geq \left(c_2\min\{\theta,k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla, teoremin (ii') koşulundan açıktır ki, iki durumda da f dönüşümü $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$'da *coercive*dir. ■

Ayrıca, A birim dönüşüm olarak alındığından Teorem 2.43'ün (II) koşulunu sağlamaktadır. (IV) koşulunun sağlandığı aşağıdaki eşitsizliklerden görülür; keyfi $u \in W_2^1(Q_T)$ için

$$\int_0^T \langle u, u\rangle_\Omega \, dt = \int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Omega)} dt \geq c_8 \|u\|^2_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)}$$

$h.h.h.$ $\quad t \in [0, T]$ için

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right\rangle_\Omega d\tau = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \geq \frac{1}{2} c_8 \|u\|^2_{(W_2^1(\Omega))^*}(t),$$

sağlanır. ($c_8 > 0$ Sobolev gömülme eşitsizliğinden gelmektedir.)

Böylece Teorem 2.43'ün tüm koşulları sağlandığından teoremi problem (1.1)-(1.3)'e uygulayabiliriz. O halde,

$$\sup \left\{ \frac{1}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} \int_0^T \langle h, u\rangle_\Omega + \langle \varphi, u\rangle_{\partial\Omega} \, dt : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \right\} < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi $(h, \varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0'da çözümü vardır. Burada, h ve φ genelleşmiş fonksiyonlarının

$$\|h\|_{L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)} = \sup \left\{ \frac{\langle h, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \right\}$$

$$\|\varphi\|_{L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = \sup \left\{ \frac{\langle \varphi, u\rangle}{\|u\|_{L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}} : u \in L_2(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \right\}$$

norm tanımlarını gözönüne alırsak, her $(h, \varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0'da çözümünün varlığı elde edilir. ■

3.1.3 Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Bu bölümde, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümünün varlığını $\alpha = 1$ için inceleyeceğiz. Bu durumda P_0 uzayı aşağıdaki gibidir:

$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i$_0$) $b_i \in L_\infty(0,T;L_n(\Omega))$, $(\forall i = 1,...,n)$, olsun ve bu fonksiyonlar için $\sup_i \|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))} \equiv \sigma$ tanımlansın.

(ii$_0$) g_1, c ve k fonksiyonları; $c \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$, g_1, Koşul (2)'deki gibi ve k, Koşul (3)'teki gibi olmak üzere aşağıdakilerden biri sağlansın:

(a) Öyle bir $\widetilde{c} > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $(c - g_1)(x,t) \geq \widetilde{c}$ sağlanır ve

$$\sigma c_0 + c_1 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < \min\{\theta, \widetilde{c}\}$$

olacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

(b) Öyle bir $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in \Gamma_T$ için $k(x,t) \geq k_0$ sağlanır ve

$$\sigma c_0 + c_0^2 \|c - g_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < c_2 \min\{\theta, k_0\}$$

olacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

Teorem 3.8 *$\alpha = 1$ için, (1)-(3),(i$_0$) ve (ii$_0$) koşulları sağlansın. O zaman, her $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

İspat. Bu varlık teoreminin ispatı, Teorem 3.5'in ispatına benzer şekilde yapılacaktır. Farklı olan kısımları burada göstereceğiz. Lemma 3.6'nın ispatında g dönüşümünün $L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$'dan $L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))$ uzayına sınırlı olduğunu $\alpha = 1$ için aşağıdaki gibi gösterelim.

$u \in L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$ için Koşul (2)'yi gözönüne alır ve uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\|g(x,t,u)\|^2_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))} = \int_0^T \left(\int_\Omega |g(x,t,u)|^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq \int_0^T \left(2^{(2^*)'-1} \int_\Omega | \ g_1 \ (x,t)|^{(2^*)'} |u|^{(2^*)'} + | \ g_0 \ (x,t)|^{(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq \int_0^T \left[2^{(2^*)'-1} \left(\|g_1\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}^{(2^*)'} \|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}^{(2^*)'} + \| \ g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}^{(2^*)'} \right) \right]^{\frac{2}{(2^*)'}} dt$$

$$\leq 2 \left(\|g_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}^2 \|u\|_{L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))}^2 + \| \ g_0\|_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}^2 \right)$$

Bu eşitsizlikten g dönüşümünün $L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))$'dan $L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))$ uzayına sınırlı olduğu görülür.

Lemma 3.7'nin ispatında $c(x,t)$ fonksiyonu için alınan değerlendirmeler $(c-g_1)(x,t)$ fonksiyonu için alınır ve böylece ispat tamamlanır. ■

3.1.4 Model bir Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözümünün Tekliği

Bu kısımda, problem (1.1)-(1.3)'te yer alan g dönüşümünün model bir durumunda problemin çözümünün tekliğini göstereceğiz. $\rho > 0$ ve $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$g(x,t,\tau) = d(x,t)\,|\tau|^{\rho-1}\,\tau \tag{3.18}$$

olmak üzere, hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $d(x,t) \geq 0$ ve

$$d \in \begin{cases} L_{\frac{2}{1-\rho}}(0,T; L_{\frac{2^*}{2^*-\rho-1}}(\Omega)) & ,0 < \rho < 1 \\ L_\infty(0,T; L_{\frac{n}{2}}(\Omega)) & ,\rho = 1 \\ L_\infty(Q_T) & ,\rho > 1 \end{cases}$$

olsun.

Bu durumda, P_0 uzayı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_{\rho+1}(Q_T) \cap W_2^1(0,T; (W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = 0\}$$

.

Teorem 3.9 *Problem (1.1)-(1.3)'te yer alan g dönüşümü (3.18)'de olduğu gibi tanımlansın. Ayrıca, (1),(3),(i′) ve (ii′) koşulları sağlansın. O zaman, problem (1.1)-(1.3)'ün* P_0 *uzayında genelleşmiş çözümü varsa tektir.*

İspat. Problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayından olan iki farklı çözümü u ve v olsun. O zaman,

$$\begin{cases} \frac{\partial(u-v)}{\partial t} + L(u-v) + d(x,t)\,|u|^{\rho-1}\,u - d(x,t)\,|v|^{\rho-1}\,v = 0, \\ u(x,0) - v(x,0) = 0, \\ \left(\frac{\partial(u-v)}{\partial \nu} + k(x,t)(u-v)\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $w := u - v$ alınırsa,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + Lw + d(x,t)\left(|u|^{\rho-1}\,u - |v|^{\rho-1}\,v\right) = 0, \\ w(x,0) = 0, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + k(x,t)w\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0 \end{cases}$$

problemi elde edilir. Şimdi bu problemin sıfırdan farklı çözümü olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki $w(x,t)$ bu problemin sıfırdan farklı bir çözümüdür.

$$\langle \frac{\partial w}{\partial t} + Lw + d(x,t)\left(|u|^{\rho-1}\,u - |v|^{\rho-1}\,v\right), w\rangle_{Q_T} = 0$$

sağlanır. Burada kısmi integrasyon uygulayıp gerekli işlemleri yaparsak

$$0=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_jwD_iwdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iw\ wdxdt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega c(x,t)w^2dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega d(x,t)\left(|u|^{\rho-1}u-|v|^{\rho-1}v\right)wdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} k(x,t)w^2dxdt$$

$$\geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(T)+\theta\|Dw\|^2_{L_2(Q_T)}-\sigma c_0\|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega c(x,t)w^2dxdt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega d(x,t)\left(|u|^{\rho-1}u-|v|^{\rho-1}v\right)wdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} k(x,t)w^2dxdt$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $d(x,t)\left(|u|^{\rho-1}u-|v|^{\rho-1}v\right)(u-v)>0$ olduğunu gözönüne alalım. Teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde; Durum (a) için

$$0\geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(T)+\left(\min\{\theta,\widetilde{c}\}-\sigma c_0-c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\right)\|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}>0$$

ve Durum (b) için

$$0\geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}(T)+\left(c_2\min\{\theta,k_0\}-\sigma c_0-c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\right)\|w\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}>0$$

çelişkileri elde edilir. Dolayısıyla $w=0$, yani $u=v$ bulunur. ■

3.2 Başlangıç Koşulu Sıfırdan Farklı iken Problem (1.1)-(1.3)'ün İncelenmesi

Bu bölümde, problem (1.1)-(1.3)'ü sıfırdan farklı bir başlangıç koşulu ($u_0(x) \neq 0$) altında inceleyeceğiz. Önceki bölümde olduğu gibi; problem (1.1)-(1.3)'ün genelleşmiş çözümünün varlığını, Üst Lineer, Alt Lineer ve Lineer durumlar için ayrı ayrı araştıracağız.

3.2.1 Üst Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Burada, problem (1.1)-(1.3)'ü $\alpha > 1$ iken inceleyeceğiz. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $b_i \in L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T), (\forall i = 1, ..., n)$ ve $c \in L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)$ olsun.

(ii) Öyle $\widetilde{g_1} > 0$ ve $\widetilde{g_0} \geq 0$ sayıları vardır ki $\forall \xi \in \mathbb{R}$ için

$$g(x, t, \xi)\xi \geq \widetilde{g_1} \, |\xi|^{\alpha+1} - \widetilde{g_0}$$

sağlanır.

(iii) k fonksiyonu için $k(x, t) \geq -k_0$ olacak şekilde $k_0 > 0$ sayısı vardır ki $k_0 < \frac{\theta_1}{c_3}$ sağlanır. Burada, $\theta_1 < \min\{\widetilde{\theta}, \widetilde{g}\}$ öyle ki $\widetilde{\theta} < \theta$ ve $\widetilde{g} < \widetilde{g_1}$ dir.

Teorem 3.10 *$\alpha > 1$ için (1)-(3) ve (i)-(iii) koşulları sağlansın. O zaman, her $(h, \varphi) \in [L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)] \times L_2(0, T; W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

İspat. Bu teoremin ispatında, önceki bölümde olduğu gibi Teorem 2.43'ü kullanacağız. Bu teoremi uygulayabilmek için problem (1.1)-(1.3)'ü başlangıç koşulu sıfır olacak şekilde yeniden yazalım. $v(x, t) := u(x, t) - u_0(x)$ fonksiyonunu tanımlarsak $v(x, 0) = 0$ olur ve problem (1.1)-(1.3)'te $u(x, t) = v(x, t) + u_0(x)$ yerine yazarsak,

$$\frac{\partial(v + u_0)}{\partial t} + L(v + u_0) + g(x, t, v + u_0) = h(x, t), \ (x, t) \in Q_T \tag{3.19}$$

$$v(x, 0) = 0, \ x \in \Omega \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{\partial(v + u_0)}{\partial \nu} + k(x, t)(v + u_0)\right)\Bigg|_{\Gamma_T} = \varphi(x, t), \ (x, t) \in \Gamma_T \tag{3.21}$$

problemi elde edilir. Şimdi, problem (3.19)-(3.20) için Teorem 2.43'ü uygulayabiliriz. Bunun için uygun uzayları ve dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f_1(v) := L(v+u_0) + g(x,t,v+u_0)$$

$$f_2(v) := \frac{\partial(v+u_0)}{\partial\nu} + k(x,t)(v+u_0)$$

olmak üzere

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \longrightarrow L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)$$

ve

$$A \equiv Id : P_0 \longrightarrow P_0$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşümler için ilk bölümde Lemma 3.3'ün ispatında u yerine $v+u_0$ alınırsa sınırlılık ve zayıf süreklilik elde edilir. Şimdi, f ve A dönüşümlerinin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında *coercive* ikili oluşturduğunu gösterelim.
$v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ olmak üzere aşağıdaki dual forma bakalım.

$$\int_0^T \langle f(v), v\rangle_\Omega dt = \int_0^T \langle f(v), v+u_0\rangle_\Omega dt - \int_0^T \langle f(v), u_0\rangle_\Omega dt$$

$$= \int_0^T \langle L(v+u_0) + g(x,t,v+u_0), v+u_0\rangle_\Omega dt - \int_0^T \langle L(v+u_0) + g(x,t,v+u_0), u_0\rangle_\Omega dt$$

$$= \int_0^T \langle -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)\, D_j(v+u_0)) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, D_i(v+u_0) + c(x,t)(v+u_0) + g(x,t,v+u_0), v+u_0\rangle_\Omega dt$$

$$- \int_0^T \langle -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x,t)\, D_j(v+u_0)) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, D_i(v+u_0) + c(x,t)(v+u_0) + g(x,t,v+u_0), u_0\rangle_\Omega dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, D_j(v+u_0) D_i(v+u_0) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, D_j(v+u_0) D_i u_0\right] dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, D_i(v+u_0)(v+u_0) - \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, D_i(v+u_0) u_0\right] dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \left[c(x,t)(v+u_0)^2 - c(x,t)(v+u_0)u_0\right] dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega [g(x,t,v+u_0)(v+u_0)-g(x,t,v+u_0)u_0]\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega} \left[k(x,t)(v+u_0)^2-k(x,t)(v+u_0)u_0\right]dxdt \qquad (3.22)$$

Bu eşitlikteki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim.

İlk terim için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\int_0^T\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,D_j(v+u_0)D_i(v+u_0)-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,D_j(v+u_0)D_iu_0\right]dxdt$$

$$\geq \theta\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)}\|D(v+u_0)\|_{L_2(Q_T)}\|Du_0\|_{L_2(Q_T)}$$

$$\geq \theta\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-\varepsilon_1\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_1)(\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)})^2\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$=(\theta-\varepsilon_1)\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-K_1 \qquad (3.23)$$

elde edilir. Burada, $K_1=c(\varepsilon_1)(\sum\limits_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q_T)})^2\|Du_0\|^2_{L_2(Q_T)}$ dir.

(3.22)'deki ikinci terim için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\int_0^T\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\,D_i(v+u_0)(v+u_0)-\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\,D_i(v+u_0)u_0\right]dxdt$$

$$\geq -\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}\|D_i(v+u_0)\|_{L_2(Q_T)}\|v+u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}\|D_i(v+u_0)\|_{L_2(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$\geq -\sigma\|D(v+u_0)\|_{L_2(Q_T)}\|v+u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\sigma\|D(v+u_0)\|_{L_2(Q_T)}\|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$\geq -\varepsilon_2\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_2)\sigma^2\|v+u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-\varepsilon_3\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_3)\sigma^2\|u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$\geq -(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-\varepsilon_4\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-c(\varepsilon_4)(c(\varepsilon_2)\sigma^2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}-c(\varepsilon_3)\sigma^2\|u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}T$$

$$=-(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-\varepsilon_4\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}-K_2 \qquad (3.24)$$

eşitsizliği alınır. Burada, $K_2=c(\varepsilon_4)(c(\varepsilon_2)\sigma^2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+c(\varepsilon_3)\sigma^2\|u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}T$ ve $\sigma:=\sup\limits_i\|b_i\|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}}(Q_T)}$ dir.

(3.22)'deki üçüncü terim için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanarak

$$\int_0^T \int_\Omega \left[c(x,t)(v+u_0)^2 - c(x,t)(v+u_0)u_0\right] dxdt$$

$$\geq \int_0^T \left(-\|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)} \|v+u_0\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} - \|c\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)} \|v+u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \right) dt$$

$$\geq -\varepsilon_5 \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - c(\varepsilon_5)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} - \varepsilon_6 \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - c(\varepsilon_6)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} \|u_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$= -(\varepsilon_5 + \varepsilon_6)\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - K_3 \tag{3.25}$$

elde edilir. Burada, $K_3 = c(\varepsilon_5)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} + c(\varepsilon_6)\|c\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(Q_T)} \|u_0\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$dir.

(3.22)'deki dördüncü terim için Koşul (2)'yi ve teoremin (ii) koşulunu gözönüne aldıktan sonra uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\int_0^T \int_\Omega \left[g(x,t,v+u_0)(v+u_0) - g(x,t,v+u_0)u_0\right] dxdt$$

$$\geq \widetilde{g_1}\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \int_0^T \int_\Omega \widetilde{g_0} dxdt - \int_0^T \int_\Omega g_1(x,t)|v+u_0|^\alpha u_0 dxdt - \int_0^T \int_\Omega g_0(x,t) u_0 dxdt$$

$$\geq \widetilde{g_1}\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \|g_1\|_{L_\infty(Q_T)} \|v+u_0\|^{\alpha}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$- \|g_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \widetilde{g_0} T mes\Omega$$

$$\geq \widetilde{g_1}\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \varepsilon_7 \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - c(\varepsilon_7)\|g_1\|^{\alpha+1}_{L_\infty(Q_T)} \|u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$- \|g_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \widetilde{g_0} T mes\Omega = (\widetilde{g_1} - \varepsilon_7)\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - K_4 \tag{3.26}$$

elde edilir. Burada, $K_4 = c(\varepsilon_7)\|g_1\|^{\alpha+1}_{L_\infty(Q_T)} \|u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + \int_0^T \|g_0\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} dt + \widetilde{g_0} T mes\Omega$ dir.

(3.22)'deki son terim için teoremin (iii) koşulunu gözönüne alıp uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanarak

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[k(x,t)(v+u_0)^2 - k(x,t)(v+u_0)u_0\right] dxdt$$

$$\geq -k_0 \|v+u_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \int_0^T \|v+u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} dt$$

$$\geq -k_0\|v+u_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}\int_0^T c_1\|v+u_0\|_{W_2^1(\Omega)}dt$$

$$\geq -k_0c_3\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_8\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

$$= -(k_0c_3+\varepsilon_8)\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_5 \qquad (3.27)$$

alınır. Burada, $K_5 = c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$dir.

(3.23)-(3.27)'de alınan değerlendirme sonuçlarını (3.22)'de gözönüne aldığımızda

$$\int_0^T \langle f(v),v\rangle dt \geq (\theta-\varepsilon)\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + (\widetilde{g_1}-\varepsilon')\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-(k_0c_3+\varepsilon_8)\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

elde edilir. Burada, $K := \sum_{i=1}^{5}K_i$, $\varepsilon := \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i$ ve $\varepsilon' := \sum_{i=4}^{7}\varepsilon_i$ dir. Yukarıdaki eşitsizlikte Sonuç 2.54'ü kullanıp gerekli işlemleri yaptığımızda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_0^T \langle f(v),v\rangle dt \geq (\theta-\varepsilon)\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + (\widetilde{g_1}-\varepsilon')\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}$$

$$-(k_0c_3+\varepsilon_8)\left[\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + c'T\right] - K$$

$$\geq \min\{\theta-\varepsilon,\widetilde{g_1}-\varepsilon'\}\left[\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right]$$

$$-(k_0c_3+\varepsilon_8)\left[\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)} + c'T\right] - K$$

$$\geq \frac{\theta_1-k_0c_3}{2}\left[\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right] - K'$$

Burada, $\theta_1 := \min\{\theta-\varepsilon,\widetilde{g_1}-\varepsilon'\}$ ve $K' = (\theta_1-k_0c_3)c'T + K$ dir. Buradan,

$$\int_0^T \langle f(v),v\rangle dt \geq \frac{\theta_1-k_0c_3}{2}\left(\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \|u_0\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\right)^2$$

$$+\frac{\theta_1-k_0c_3}{2}\left(\|v\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)} - \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)^2 - \frac{\theta_1-k_0c_3}{2} - K'$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten açıktır ki,

$$\int_0^T \langle f(v),v\rangle dt \geq \frac{\theta_1-k_0c_3}{4}\left(\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v\|_{L_{\alpha+1}(Q_T)}\right)^2 - K''$$

olacak şekilde K'' sabiti vardır.

Son eşitsizlikten $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_{\alpha+1}(Q_T)$ uzayında *coercivelik* elde edilir. Böylece, Teorem 2.43'ü probleme uygularsak elde edilir ki, her $(h,\varphi) \in [L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(Q_T)] \times L_2(0,T;(W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (3.19)-(3.21)'in $v \in P_0$ çözümü vardır. Dolayısıyla, $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x)$, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümüdür. ∎

3.2.2 Alt Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Bu durumda, $0 < \alpha < 1$ olduğunda problem (1.1)-(1.3)'ü inceleyeceğiz. Tanım 3.1'deki P_0 uzayı aşağıdaki gibidir;

$\mathbf{P_0} \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i′) $b_i \in L_\infty(0,T;L_n(\Omega))$, ($\forall i = 1,...,n.$) olsun ve bu fonksiyonlar için $\sup\limits_i \|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))} \equiv \sigma$ tanımlansın.

(ii′) c ve k fonksiyonları, $c \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$ ve k, Koşul (2)'deki gibi olmak üzere aşağıdakilerden birini sağlasın:

(a) Öyle bir $\widetilde{c} > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $c(x,t) \geq \widetilde{c}$ sağlanır ve $\theta_1 < \theta$ olmak üzere

$$\sigma c_0 + c_1 \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < \min\{\theta_1, \widetilde{c}\}$$

sağlanacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

(b) Öyle bir $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in \Gamma_T$ için $k(x,t) \geq k_0$ sağlanır ve $\theta_1 < \theta$ olmak üzere

$$\sigma c_0 + c_0^2 \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < c_2 \min\{\theta_1, k_0\}$$

sağlanacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

Teorem 3.11 *$0 < \alpha < 1$ için (1)-(3) ve (i′), (ii′) koşulları sağlansın. O zaman, her $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

İspat. Burada, Teorem 3.10'un ispatında tanımlanan başlangıç koşulu sıfır olan problem (3.19)-(3.21)'i gözönüne alacağız ve bu problem için Teorem 2.43'ü kullanacağız. Bunun için uygun uzayları ve dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f_1(v) := L(v + u_0) + g(x,t,v + u_0)$$

$$f_2(v) := \frac{\partial(v + u_0)}{\partial\nu} + k(x,t)(v + u_0)$$

olmak üzere

$$f := \{f_1, f_2\} : P_0 \longrightarrow L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*)$$

ve

$$A \equiv Id : P_0 \longrightarrow P_0$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşümler için ilk bölümde Lemma 3.6'nın ispatında u yerine $v+u_0$ alınırsa sınırlılık ve zayıf süreklilik elde edilir. Şimdi, f ve A dönüşümlerinin $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında *coercive* ikili oluşturduğunu gösterelim.

$v \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ olmak üzere $\int\limits_0^T \langle f(v),v\rangle_\Omega dt$ dual formu için elde edilen (3.22) eşitliğini gözönüne alalım. Bu eşitlikteki terimler için ayrı ayrı değerlendirme yapalım. İlk terim için elde edilen (3.23) eşitsizliğini burada da gözönüne alacağız. Şimdi (3.22)'deki ikinci terimi değerlendireceğiz. (i$'$) koşulunu gözönüne alıp uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[\sum_{i=1}^n b_i\,(x,t)\,D_i(v+u_0)(v+u_0)-\sum_{i=1}^n b_i\,(x,t)\,D_i(v+u_0)u_0\right]dxdt$$

$$\geq \int\limits_0^T\left(-\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_n(\Omega)}\|D_i(v+u_0)\|_{L_2(\Omega)}\|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L_n(\Omega)}\|D_i(v+u_0)\|_{L_2(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}\right)dt$$

$$\geq \int\limits_0^T\Big(-\sigma c_0\|D(v+u_0)\|_{L_2(\Omega)}\|v+u_0\|_{W_2^1(\Omega)}-\sigma\|D(v+u_0)\|_{L_2(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}\Big)\,dt$$

$$\geq -\sigma c_0\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\varepsilon_2\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-c(\varepsilon_2)\sigma^2T\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$= -\sigma c_0\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-\varepsilon_2\|D(v+u_0)\|^2_{L_2(Q_T)}-K_2 \qquad (3.28)$$

elde edilir. Burada, $K_2=c(\varepsilon_2)\sigma^2T\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$ dir.

(3.22)'deki üçüncü terimi teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde **Durum (a).** için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[c(x,t)(v+u_0)^2-c(x,t)(v+u_0)u_0\right]dxdt$$

$$\geq \widetilde{c}\|v+u_0\|^2_{L_2(Q_T)}-\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\int\limits_0^T\|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$\geq \widetilde{c}\|v+u_0\|^2_{L_2(Q_T)}-\varepsilon_3\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}-c(\varepsilon_3)c_0^2T\|c\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$= \widetilde{c}\|v+u_0\|^2_{L_2(Q_T)} - \varepsilon_3\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_3 \tag{3.29}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $K_3 = c(\varepsilon_3)c_0^2 T\|c\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$ dir.

Durum (b). için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullandığımızda

$$\int_0^T\int_\Omega \left[c(x,t)(v+u_0)^2 - c(x,t)(v+u_0)u_0\right]dxdt$$

$$\geq -\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{2^*}(\Omega))} - \|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\int_0^T \|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$\geq -c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_3\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_3)c_0^2T\|c\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$= -(c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} + \varepsilon_3)\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_3 \tag{3.30}$$

alınır. Burada, $K_3 = c(\varepsilon_3)c_0^2T\|c\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$ dir.

(3.22)'deki dördüncü terim için Koşul (2)'yi gözönüne aldıktan sonra uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\int_0^T\int_\Omega \left[g(x,t,v+u_0)(v+u_0) - g(x,t,v+u_0)u_0\right]dxdt$$

$$\geq -\int_0^T\int_\Omega g_1(x,t)|v+u_0|^\alpha(v+u_0)dxdt - \int_0^T\int_\Omega g_0(x,t)(v+u_0)dxdt - \int_0^T\int_\Omega g_1(x,t)|v+u_0|^\alpha u_0dxdt$$

$$-\int_0^T\int_\Omega g_0(x,t)u_0dxdt$$

$$\geq -\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}\|v+u_0\|^{\alpha+1}_{L_{2^*}(\Omega)}dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}\|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$-\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}\|v+u_0\|^{\alpha}_{L_{2^*}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$\geq -\varepsilon_4\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_4)c_0^{\frac{2}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} - \varepsilon_5\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$-c(\varepsilon_5)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{2^{*\prime}}(\Omega))} - \varepsilon_6\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_6)c_0^{\frac{2}{2-\alpha}}\int_0^T \|g_1\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}\|u_0\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L_{2^*}(\Omega)}dt$$

$$-\int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt = -\varepsilon_7\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_4 \tag{3.31}$$

elde edilir. Burada, $K_4 = c(\varepsilon_4)c_0^{\frac{2}{1-\alpha}}\|g_1\|^{\frac{2}{1-\alpha}}_{L_{\frac{2}{1-\alpha}}(0,T;L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega))} + c(\varepsilon_5)c_0^2\|g_0\|^2_{L_2(0,T;L_{2^{*\prime}}(\Omega))}$ $+c(\varepsilon_6)c_0^{\frac{2}{2-\alpha}}\int\limits_0^T\|g_1\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L_{\frac{2^*}{2^*-\alpha-1}}(\Omega)}\|u_0\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L_{2^*}(\Omega)}dt + \int\limits_0^T\|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)}\|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)}dt$ ve $\varepsilon_7 := \sum\limits_{i=4}^{6}\varepsilon_i$ dir.

(3.22)'deki son terimi teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde **Durum (a).** için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[k(x,t)(v+u_0)^2 - k(x,t)(v+u_0)u_0\right]dxdt \\
&\geq -\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega))} \\
&\quad -\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}\int_0^T\|v+u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}dt \\
&\geq -c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\
&\quad -\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}\int_0^T c_1\|v+u_0\|_{W_2^1(\Omega)}dt \\
&\geq -c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_8\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \\
&\quad -c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \\
&= -(c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} + \varepsilon_8)\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_5
\end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $K_5 = c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$ dir.

Durum (b). için ise gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[k(x,t)(v+u_0)^2 - k(x,t)(v+u_0)u_0\right]dxdt \\
&\geq k_0\|v+u_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} - \|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}\int_0^T\|v+u_0\|_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}dt \\
&\geq k_0\|v+u_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} - \varepsilon_8\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \\
&= k_0\|v+u_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} - \varepsilon_8\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K_5
\end{aligned} \tag{3.33}$$

alınır. Burada, $K_5 = c(\varepsilon_8)Tc_1^2\|k\|^2_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\|u_0\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$ dir.

Yukarıdaki değerlendirmelerden alınan sonuçları birleştirdiğimizde teoremin (ii') koşuluna dayanarak aşağıdaki değerlendirmeler elde edilir: **Durum (a).** için

$$\int_0^T \langle f(v), v\rangle dt \geq (\min\{\theta-\varepsilon, \widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} - \varepsilon')\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

eşitsizliği ve **Durum (b).** için

$$\int_0^T \langle f(v), v\rangle dt \geq (c_2\min\{\theta-\varepsilon, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} - \varepsilon')\|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliklerde $K := \sum\limits_{i=1}^{5} K_i$, $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ve $\varepsilon' := \varepsilon_3 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$ dir. Her iki durumda da teoremin (ii') koşulundan $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ uzayında *coercivelik* elde edilir. Böylece, her $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;(W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ için problem (3.19)-(3.21)'in $v \in P_0$ çözümü vardır. Dolayısıyla, $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x)$, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümüdür. ■

3.2.3 Lineer Durumda Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözülebilirliği

Bu durumda, $\alpha = 1$ olmak üzere aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i$_0$) $b_i \in L_\infty(0,T;L_n(\Omega))$, $\forall i = 1,...,n$. Bu fonksiyonlar için $\sup\limits_i \|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))} \equiv \sigma$ tanımlansın.

(ii$_0$) g_1, c ve k fonksiyonları, $c \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$, g_1 Koşul (3)'teki gibi ve k, Koşul (2)'deki gibi olmak üzere aşağıdakilerden birini sağlasın:

(a) Öyle bir $\widetilde{c} > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in Q_T$ için $(c-g_1)(x,t) \geq \widetilde{c}$ sağlanır ve $\theta_1 < \theta$ olmak üzere

$$\sigma c_0 + c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < \min\{\theta_1, \widetilde{c}\}$$

sağlanacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

(b) Öyle bir $k_0 > 0$ sayısı vardır ki hemen hemen her $(x,t) \in \Gamma_T$ için $k(x,t) \geq k_0$ sağlanır ve $\theta_1 < \theta$ olmak üzere

$$\sigma c_0 + c_0^2\|c - g_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \leq \widetilde{\theta} < c_2\min\{\theta_1, k_0\}$$

sağlanacak şekilde $\widetilde{\theta} > 0$ vardır.

Teorem 3.12 *$\alpha = 1$ için (1)-(3) ve (i_0), (ii_0) koşulları sağlansın. O zaman, her $(h,\varphi) \in L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \times L_2(0,T;W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ve $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ için problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümü vardır.*

İspat. Bu varlık teoreminin ispatı, Teorem 3.11'in ispatına benzer şekilde yapılacaktır. Farklı olan kısımlar burada gösterilecektir. Teorem 3.11'in ispatında yer alan (3.31) değerlendirmesi yerine aşağıdaki değerlendirme gözönüne alınacaktır.

$$\int_0^T \int_\Omega [g(x,t,v+u_0)(v+u_0) - g(x,t,v+u_0)u_0]dxdt$$

$$\geq -\int_0^T \int_\Omega g_1(x,t)|v+u_0|^2 dxdt - \int_0^T \int_\Omega g_0(x,t)(v+u_0)dxdt - \int_0^T \int_\Omega g_1(x,t)|v+u_0|u_0 dxdt$$

$$-\int_0^T \int_\Omega g_0(x,t)u_0 dxdt$$

$$\geq -\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|v+u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)} dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)} \|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$$

$$-\int_0^T \|g_1\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|v+u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$$

$$\geq -c_0^2 \|g_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon_1 \|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_1)c_0^2 \|g_0\|_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))}$$

$$-\varepsilon_2 \|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - c(\varepsilon_2)Tc_0^2 \|g_1\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)} - \int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$$

$$= -(c_0^2 \|g_1\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|v+u_0\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} - K$$

Burada, $K = c(\varepsilon_1)c_0^2 \|g_0\|_{L_2(0,T;L_{(2^*)'}(\Omega))} + c(\varepsilon_2)Tc_0^2 \|g_1\|^2_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))} \|u_0\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$
$+\int_0^T \|g_0\|_{L_{(2^*)'}(\Omega)} \|u_0\|_{L_{2^*}(\Omega)} dt$ dir.

Dolayısıyla, $c(x,t)$ fonksiyonu üzerine alınan değerlendirmeler $(c-g_1)(x,t)$ fonksiyonu üzerine alınarak ispat tamamlanır. Böylece, lineer durumda da problem (1.1)-(1.3)'ün P_0 uzayında genelleşmiş çözümünün varlığı ispatlanmış olur. ■

3.2.4 Problem (1.1)-(1.3)'ün Çözümünün Tekliği

Bu alt bölümde, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümün tekliğini araştıracağız. Önce, lineer olmayan kısmın son değişkenine göre türevlenebilir olduğu durumda teklik teoremini aşağıdaki gibi ifade edelim.

Teorem 3.13 *(1)-(3) ve (i′), (ii′) koşulları sağlansın. Ayrıca,* $g_\xi \in L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))$ *olmak üzere hemen hemen her* $(x,t) \in Q_T$*,* $\forall \xi \in \mathbb{R}$ *için* $g_\xi(x,t,\xi) \geq -\widetilde{g}$ *olacak şekilde* $\widetilde{g} > 0$ *var olsun. O zaman, problem (1.1)-(1.3)'ün* P_0 *uzayında çözümü tektir.*

İspat. u ve v, problem (1.1)-(1.3)'ün iki farklı çözümü olsun.O zaman,

$$\begin{cases} \frac{\partial(u-v)}{\partial t} + L(u-v) + g(x,t,u) - g(x,t,v) = 0, \ (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) - v(x,0) = 0, \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \left(\frac{\partial(u-v)}{\partial \nu} + k(x,t)(u-v)\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $w := u - v$ alınırsa,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + Lw + g(x,t,u) - g(x,t,v) = 0, \ (x,t) \in Q_T \\ w(x,0) = 0, \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + k(x,t)w\right)\big|_{\Gamma_T} = 0 \end{cases}$$

problemi elde edilir. Başlangıç koşulu sıfır olan bu problemin sıfırdan farklı çözümü olamayacağını gösterelim. $w(x,t)$ sıfırdan farklı bir çözüm olsun.

$$\langle \frac{\partial w}{\partial t} + Lw + g(x,t,u) - g(x,t,v), w \rangle_\Omega = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada, kısmi integrasyon uygulayıp gerekli işlemleri yaparsak

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) D_j w D_i w dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t) D_i w w dx + \int\limits_\Omega c(x,t) w^2 dx$$

$$+ \int\limits_\Omega [g(x,t,u) - g(x,t,v)] w dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x,t) w^2 dx = 0 \tag{3.34}$$

alınır. Bu eşitlikteki terimleri alttan değerlendirelim. Bu değerlendirmeyi teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda yapacağız.

Durum (a). için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \leq -\theta \|Dw\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L_n(\Omega)} \|D_i w\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_{2^*}(\Omega)} - \widetilde{c}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\int_{\Omega}[g(x,t,u)-g(x,t,v)]wdx+\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|w\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

elde edilir. Buradaki integral için Ortalama Değer Teoremini ve teoremin koşulunu kullanırsak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \le -\min\{\theta,\widetilde{c}\}\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\sup_i\|b_i\|_{L_n(\Omega)}c_0\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}+c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\le -\left[\min\{\theta,\widetilde{c}\}-\sup_i\|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))}c_0-c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right]\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le -\left[\min\{\theta,\widetilde{c}\}-\sigma c_0-c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}\right]\|w\|^2_{L_2(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le -(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde edilir. Burada $\widetilde{\theta}:=\min\{\theta,\widetilde{c}\}-\sigma c_0-c_1\|k\|_{L_\infty(0,T;L_{n-1}(\partial\Omega))}$ dir.

Dolayısıyla,

$$\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)}e^{-2(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})t}$$

eşitsizliği elde edilir.Buradan da $w=0$ olduğu görülür.

Durum (b). için de gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \le -\theta\|Dw\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L_n(\Omega)}\|D_iw\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{L_{2^*}(\Omega)}+\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|w\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}-k_0\|w\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$\le -c_2\min\{\theta,k_0\}\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\sup_i\|b_i\|_{L_n(\Omega)}c_0\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le -\left[c_2\min\{\theta,k_0\}-\sup_i\|b_i\|_{L_\infty(0,T;L_n(\Omega))}c_0-c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right]\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le -\left[c_2\min\{\theta,k_0\}-\sigma c_0-c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}\right]\|w\|^2_{L_2(\Omega)}+\widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le -(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde edilir. Burada $\widetilde{\theta}:=c_2\min\{\theta,k_0\}-\sigma c_0-c_0^2\|c\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{n}{2}}(\Omega))}$ dir.

Dolayısıyla,

$$\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)}e^{-2(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})t}$$

eşitsizliği elde edilir.Buradan da $w=0$ olduğu görülür. ■

Şimdi, lineer olmayan kısmın son değişkenine göre türevlenebilir olmadığı durumda problem (1.1)-(1.3)'ün çözümünün tekliğini inceleyeceğiz. Bu durumdaki teklik teoremini aşağıdaki gibi ifade edelim.

Teorem 3.14 *(1)-(3) ve (i′), (ii′) koşulları sağlansın. Ayrıca,* $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$, $1 \le \alpha \le \frac{n}{n-2}$ *ve* $g_1 \in L_\infty(Q_T)$ *için*

$$|g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta)| \le g_1(x,t)(|\xi|^{\alpha-1} + |\eta|^{\alpha-1})|\xi - \eta|$$

sağlansın. O zaman, problem (1.1)-(1.3)'ün

$$L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;(W_2^1(\Omega))^*) \cap \{u : u(x,0) = u_0\}$$

sınıfından olan çözümü tektir.

İspat. Bu teoremin ispatı için, Teorem 3.13'ün ispatından farklı olarak lineer olmayan kısım için aşağıdaki değerlendirmeyi yapacağız. Lineer olmayan kısım için teoremin koşulunu gözönüne alır ve uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanırsak

$$\langle g(x,t,u) - g(x,t,v), w\rangle_\Omega = \int_\Omega [g(x,t,u) - g(x,t,v)]wdx$$

$$\ge -\int_\Omega g_1(x,t)(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})|u-v|wdx$$

$$= -\int_\Omega g_1(x,t)|u|^{\alpha-1}wwdx - \int_\Omega g_1(x,t)|v|^{\alpha-1}wwdx$$

$$\ge -\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{L_{2^*}(\Omega)} - \|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\|v\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$\ge -\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\left(c_0\|u\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{W_2^1(\Omega)} + c_0\|v\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

$$= -c_0\|w\|_{W_2^1(\Omega)}\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)}\left(\|u\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)} + \|v\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\right)$$

$$\ge -\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)c_0^2\|g_1\|^2_{L_\infty(\Omega)}\left(\|u\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)} + \|v\|^{\alpha-1}_{L_{(\alpha-1)n}(\Omega)}\right)^2\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\ge -\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)c_0^2\|g_1\|^2_{L_\infty(Q_T)}\left(\|u\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;L_{(\alpha-1)n}(\Omega))} + \|v\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;L_{(\alpha-1)n}(\Omega))}\right)^2\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\ge -\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g}\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde ederiz. Burada, $\widetilde{g} := c(\varepsilon)c_0^2\|g_1\|^2_{L_\infty(Q_T)}(\|u\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;L_{(\alpha-1)n}(\Omega))} + \|v\|^{\alpha-1}_{L_\infty(0,T;L_{(\alpha-1)n}(\Omega))})^2$ dir. Bu eşitsizliği, (3.34)'te gözönüne alır ve diğer terimler için Teorem 3.9'un ispatında yapılan değerlendirmeleri kullanırsak, Durum (a) ve Durum (b) için sonuç olarak

$$\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)}e^{-2(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})t}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da $w = 0$ olduğu görülür. ■

Sonuç 3.15 *Problem (1.1)-(1.3), başlangıç koşullarına sürekli bağlıdır.*

İspat. $u(x,t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu + g(x,t,u) = h(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x,t)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \varphi(x,t) \end{cases}$$

probleminin çözümü,

$v(x,t)$ fonksiyonu ise

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + Lv + g(x,t,v) = h(x,t) \\ v(x,0) = v_0(x) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + k(x,t)v\right)\Big|_{\Gamma_T} = \varphi(x,t) \end{cases}$$

probleminin çözümü olsun. $w = u - v$ olmak üzere Teorem 3.13'ün ispatından görülür ki

$$\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|w(0)\|^2_{L_2(\Omega)} e^{-2(\widetilde{\theta}-\widetilde{g})t}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan da çözümün başlangıç koşullarına sürekli bağlı olduğu açıktır. ■

4 ÇÖZÜMÜN DAVRANIŞI

Bu bölümde, başlangıç koşulu sıfırdan farklı olduğunda, problem (1.1)-(1.3)'ün çözümünün uzun zaman davranışını, üst lineer durumda ($\alpha > 1$ iken) ve problem (1.1)-(1.3)'te yer alan fonksiyonların t değişkenine bağlı olmadığı durumda inceleyeceğiz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)\, D_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i u + c(x)u + g(x,u) = h(x), \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \varphi(x). \tag{4.3}$$

Bu bölüm boyunca, Teorem 3.10 (Varlık Teoremi) ve Teorem 3.13 (Teklik Teoremi) koşullarının sağlandığını kabul edeceğiz.

4.1 Denklem ve Sınır Koşulunun Homojen Olduğu Durum

Burada, problem (4.1)-(4.3)'te yer alan h ve φ fonksiyonlarının sıfır olduğunu kabul edelim.

Teorem 4.1 *$\alpha > 1$ olmak üzere (ii) koşulu sağlansın öyle ki $\widetilde{g_0} = 0$ olsun. O zaman, h ve φ sıfır iken, problem (4.1)-(4.3)'ün P_0 uzayından olan u(x,t) çözümü; eğer $u_0 = 0$ ise, sıfırdır; eğer $u_0 \neq 0$ ise,*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{2\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} e^{-K_0 t}}{\left[-\frac{K_1}{K_0}\|u_0\|^{\alpha-1}_{L_2(\Omega)}(e^{(\frac{1-\alpha}{2})K_0 t} - 1) + 2^{\frac{\alpha-1}{2}}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, $K_0 = K_0(\theta, \sigma, \widetilde{c}, k_0, \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}, \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}, c_0, c_1, c_2) > 0$ ve $K_1 = K_1(\widetilde{g_1}, c_5, \alpha) > 0$dir. ($c_5$, Sobolev Gömülme Eşitsizliğinden gelen sabittir [1].)

İspat. $u(x,t)$, problem (4.1)-(4.3)'ün çözümü olmak üzere

$$F(t) := \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

fonksiyonelini inceleyeceğiz. $F'(t) = \int\limits_{\Omega} u u_t dx$ olduğundan burada u_t terimi için (4.1) eşitliğini gözönüne alıp kısmi integrasyonla birlikte gerekli işlemleri yaparsak

$$F'(t) = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_j u D_i u dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i u\ u dx - \int\limits_{\Omega} c(x) u^2 dx$$

[1] $\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \geq c_5 \|u\|_{L_2(\Omega)}$

$$-\int_{\Omega} g(x,u)udx - \int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$\leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L_n(\Omega)}\|D_iu\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}-\widetilde{g}_1\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}-\int_{\Omega} c(x)u^2dx-\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$\leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)} - \int_{\Omega} c(x)u^2dx - \int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

elde edilir. Bu eşitsizliği teoremin (ii') koşuluna dayanarak iki durumda incelediğimizde;
Durum (a). için uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanıp gerekli işlemleri yaparsak

$$F'(t) \leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+\sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}-\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}-\widetilde{c}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

$$\leq -\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}$$

$$\leq -\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}$$

$$= -2\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)F(t) - 2\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

alınır. Burada, $K_1 = 2\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}$ ve $K_2 = 2\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)$ olarak gösterirsek

$$F'(t) \leq -K_2F(t) - K_1F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Durum (b). için de benzer işlemler yapıldığında

$$F'(t) \leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+\sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}-\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}+\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}-k_0\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$\leq -\left(c_2min\{\theta,k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}$$

$$\leq -\left(c_2min\{\theta,k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_2(\Omega)}$$

$$= -2\left(c_2min\{\theta,k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)F(t) - 2\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

elde edilir. Burada, $K_1 = 2\widetilde{g}_1 c_5^{\alpha+1}$ ve $K_3 = 2\left(c_2min\{\theta,k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)$ olarak gösterirsek

$$F'(t) \leq -K_3F(t) - K_1F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

İki durum için elde edilen eşitsizliklerde, $K_0 := \max\{K_2, K_3\}$ ile gösterirsek ve $p := \frac{\alpha+1}{2} > 1$ tanımlarsak, $F(t)$ için

$$F'(t) \leq -K_0 F(t) - K_1 F(t)^p$$

$$F(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Cauchy problemi elde edilir. $v := F(t)^{1-p}$ dönüşümünü kullanırsak

$$v(t) \geq v(0)e^{(p-1)K_0 t} - \frac{K_1}{K_0}(1 - e^{(p-1)K_0 t})$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $F(t)$ için

$$F^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) \geq F^{\frac{1-\alpha}{2}}(0)e^{\frac{\alpha-1}{2}K_0 t} - \frac{K_1}{K_0}(1 - e^{\frac{\alpha-1}{2}K_0 t})$$

eşitsizliği; dolayısıyla, teoremdeki eşitsizlik elde edilir. ∎

Sonuç 4.2 *Teorem 4.1'in koşulları altında, problem (4.1)-(4.3)'ün çözümü için*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} e^{-K_0 t}$$

sağlanır. Burada, $K_0 = K_0(\theta, k_0, \sigma, c_0, c_1, c_2, \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}, \widetilde{c}, \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}) > 0$*dir.*

İspat. Teorem 4.1'in ispatında $F(t)$ için elde edilen $F'(t) \leq -K_0 F(t) - K_1 F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$ eşitsizliğinde $K_1 > 0$ olduğunu gözönüne alırsak, $F'(t) \leq -K_0 F(t)$ sağlanır. Bu eşitsizliği $F(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$ koşuluyla birlikte gözönüne alırsak istenen eşitsizlik elde edilir. ∎

Sonuç 4.3 *Teorem 4.1'in koşulları altında, problem (4.1)-(4.3)'ün çözümü için*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\left[(\alpha-1)\|u_0\|^{\alpha-1}_{L_2(\Omega)} K_1 t + 2^{\frac{\alpha+1}{2}}\right]^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$

sağlanır. Burada, $K_1 = K_1(\widetilde{g_1}, c_5, \alpha) > 0$*dir.*

İspat. Teorem 4.1'in ispatında $F(t)$ için elde edilen $F'(t) \leq -K_0 F(t) - K_1 F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$ eşitsizliğinde $K_0 > 0$ olduğunu gözönüne alırsak, $F'(t) \leq -K_1 F(t)^{\frac{\alpha+1}{2}}$ sağlanır. Bu eşitsizliği $F(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$ koşuluyla birlikte gözönüne alırsak istenen eşitsizlik elde edilir. ∎

Sonuç 4.4 *Teorem 4.1'in koşulları altında, problem (4.1)-(4.3)'ün çözümü, u_0 başlangıç koşulundan bağımsız olarak, $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır.*

İspat. Teorem 4.1'deki eşitsizliğin sağ tarafı $t \to \infty$ iken u_0'dan bağımsız olarak sıfıra yaklaştığı için $u(x,t)$ de sıfıra yaklaşır. ∎

4.2 Homojen Olmayan, Otonom Durum

Teorem 3.10 (Varlık Teoremi) ve Teorem 3.13 (Teklik Teoremi) koşulları altında, problem (4.1)-(4.3)'ün her $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ ve her $T > 0$ için P_0 uzayında tek çözümü vardır. O halde, $u_0 \to u(t)$ tanımlı dönüşüm vardır ve Sonuç 3.15'ten açıktır ki bu dönüşüm $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında süreklidir. Bu dönüşümü $S(t)$ ile gösterirsek, $S(t)$'nin yarı akış koşullarını sağladığı açıktır. Dolayısıyla, $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında, $S(t)u_0 = u(t)$ ile tanımlı $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı akış ailesi vardır. Bu bölümde, $h = h(x)$ ve $\varphi = \varphi(x)$ fonksiyonları sıfırdan farklı olduğunda problem (4.1)-(4.3)'ün ürettiği $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı akışı için iki farklı uzayda yutan kümenin varlığı incelenecektir.

4.2.1 $L_2(\Omega)$'da Yutan Kümenin Varlığı

Burada, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı akışı için $L_2(\Omega)$'da yutan kümenin varlığını gösterelim.

Bu alt bölüm boyunca, $\|h\| = \|h\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}$ ve $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{W_2^{\frac{-1}{2}}(\partial\Omega)}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 4.5 *Problem (4.1)-(4.3)'ün ürettiği $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarı akışı her $h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ ve her $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $L_2(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahiptir. Yani; öyle sınırlı $B_0 := \{u \in L_2(\Omega) : \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{K}\}$, $(K = K(\tilde{g}_1, \tilde{g}_0, mes\Omega, \|h\|, \|\varphi\|, \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}, \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}, \alpha, \theta, k_0, \tilde{c}, \sigma, c_0, c_1, c_2, c_4) > 0)$, kümesi vardır ki, her $\delta > 0$ sayısı ve keyfi sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ kümesi için öyle $t_0 = t_0(B, \delta) > 0$ sayısı bulunur ki $\forall t \geq t_0$ için $S(t)B \subset B_0^\delta$ sağlanır.*

İspat. $u_0 \to u(t)$ dönüşümünün davranışını $L_2(\Omega)$'da incelediğimizden Teorem 4.1'in ispatında olduğu gibi, $u(x,t)$ problem (4.1)-(4.3)'ün çözümü olmak üzere

$$F(t) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

fonksiyonelini gözönüne alacağız. $F'(t) = \int\limits_\Omega u u_t dx$ olduğundan burada u_t terimi için (4.1) eşitliğini gözönüne alıp gerekli işlemleri yaptığımızda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$F'(t) = -\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u D_i u dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u \, u dx - \int\limits_\Omega c(x) u^2 dx$$
$$-\int\limits_\Omega g(x,u) u dx - \int\limits_{\partial\Omega} k(x) u^2 dx + \int\limits_\Omega h(x) u dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) u dx$$

$$\leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g_1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \widetilde{g_0}mes\Omega - \int\limits_{\Omega} c(x)u^2dx$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} k(x)u^2dx + \int\limits_{\Omega} h(x)udx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)udx \qquad (4.4)$$

Bu eşitsizlikteki son iki terimi değerlendirelim. Uygun Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanıp gerekli işlemleri yaparsak

$$\int\limits_{\Omega} h(x)udx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)udx \leq \|h\|\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|\varphi\|\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

$$\leq \varepsilon_1(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)})^2 + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$\leq 2\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

elde edilir. Bu değerlendirmeyi (4.4)'te gözönüne alırsak

$$F'(t) \leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g_1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \widetilde{g_0}mes\Omega - \int\limits_{\Omega} c(x)u^2dx$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} k(x)u^2dx + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2 \qquad (4.5)$$

eşitsizliği alınır. Bu eşitsizliğin sağ tarafını teoremin (ii') koşuluna dayanarak farklı durumlarda inceleyeceğiz.

Durum (a) için gerekli işlemleri yaptığımızda

$$F'(t) \leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g_1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \widetilde{g_0}mes\Omega - \widetilde{c}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$\leq -\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g_1}\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$+2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$\leq -\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (\widetilde{g_1} - 2\varepsilon_1)\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$+\widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_1 < \frac{\widetilde{g_1}}{2}$ ve $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}$ olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ seçelim. O halde,

$$F'(t) \leq -\left(min\{\theta,\widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$= -2\left(min\{\theta, \widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) F(t) + \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

elde edilir. Burada, $K_0 = 2\left(min\{\theta, \widetilde{c}\} - \sigma c_0 - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) > 0$ ve $K_1 = \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$ olarak gösterirsek

$$F'(t) \leq -K_0F(t) + K_1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikle birlikte $F(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}e^{-K_0t} + 2\frac{K_1}{K_0}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\delta > 0$ olmak üzere $t_0 = \frac{1}{K_0}\ln(\frac{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta})$ seçilirse $\forall t \geq t_0$ için

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \leq \delta + 2\frac{K_1}{K_0}$$

elde edilir. O halde, $\delta > 0$ için

$$B_0^\delta := \{u \in L_2(\Omega) : \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{\delta + 2\frac{K_1}{K_0}}\}$$

teoremin koşulunu sağlayan kümedir.

Durum (b) için (4.5) eşitsizliğini değerlendirirsek

$$F'(t) \leq -\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma c_0\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \widetilde{g_1}\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \widetilde{g_0}mes\Omega + \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$-k_0\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$\leq -\left(c_2min\{\theta, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - (\widetilde{g_1} - 2\varepsilon_1)\|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$+\widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_1 < \frac{\widetilde{g_1}}{2}$ ve $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < c_2min\{\theta, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}$ olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ seçelim. O halde,

$$F'(t) \leq -\left(c_2min\{\theta, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

$$\leq -2\left(c_2min\{\theta, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)F(t) + \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0}mes\Omega$$

$$+c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$$

elde edilir. Burada, $K_0' = 2\left(c_2 min\{\theta, k_0\} - \sigma c_0 - c_0^2\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) > 0$ ve $K_1 = \widetilde{g_1} + \widetilde{g_0} mes\Omega + c(\varepsilon_1)\|h\|^2 + c(\varepsilon_2)c_4^2\|\varphi\|^2$ olarak gösterirsek

$$F'(t) \leq -K_0' F(t) + K_1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikle birlikte $F(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$ olduğunu gözönüne alıp Durum (a)'da yapılan işlemlere benzer işlemler yapıldığında, $L_2(\Omega)$'da yutan kümenin varlığı ispatlanmış olur. ∎

4.2.2 $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$'da Yutan Kümenin Varlığı

Bu bölümde, daha iyi sonuç elde etmek için çözümün ve verilerin daha iyi sınıftan olduğunu kabul ederek çalışacağız. Ayrıca, L diferensiyel operatörünü $\forall i = 1, ..., n$ için $b_i \equiv 0$ olmak üzere aşağıdaki gibi özel durumda alacağız:

$$Lu := -\sum_{i=1}^{n} D_i(a_i(x) D_i u) + c(x)u$$

Bu durumda (4.1)-(4.3) problemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} D_i(a_i(x) D_i u) + c(x)u + g(x,u) = h(x) \tag{4.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{4.7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + k(x)u\right)\bigg|_{\Gamma_T} = \varphi(x) \tag{4.8}$$

Aşağıdaki koşulun sağlandığını kabul edelim.

(ii_1) (ii) koşulu sağlansın öyle ki $g(x,0) = 0$ olsun ve $G(x,u) := \int_0^u g(x,\tau)d\tau$ olmak üzere $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ ve $\alpha > 1$ için

$$0 < (\alpha+1)G(x,\xi) \leq g(x,\xi)\xi$$

sağlansın.

Not 4.6 *Yukarıdaki koşul altında, öyle $g_3, g_4 > 0$ sabitleri vardır ki $\forall \xi \in \mathbb{R}$ için $G(x,\xi) \geq g_3|\xi|^{\alpha+1} - g_4$ sağlanır.*

Teorem 4.7 *(ii_1) koşulu sağlansın. O zaman, (4.6)-(4.8) probleminin ürettiği $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı akışı her $h \in L_2(\Omega)$ ve her $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ için $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahiptir. Yani; öyle sınırlı*

$B_0 := \{u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) : \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq K'\}$,
($K' = K'(K, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}, g_3, g_4) > 0$), kümesi vardır ki her sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ kümesi için öyle $t_1 = t_1(B) > 0$ sayısı bulunur ki $\forall t \geq t_1$ için $S(t)B \subset B_0$ sağlanır.

İspat. $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında yutan kümenin varlığını göstermek için, (4.6) denklemini $u_t(x,t)$ ile çarpıp Ω üzerinde integral alırsak

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n D_i(a_i(x)\, D_i u) u_t dx + \int\limits_\Omega c(x) u u_t dx + \int\limits_\Omega g(x,u) u_t dx = \int\limits_\Omega h(x) u_t dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. İkinci terimde sınır koşulunu gözönüne alarak kısmi integrasyon uygulayıp gerekli işlemleri yaparsak

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\, D_i u D_i u_t dx + \int\limits_\Omega c(x) u u_t dx + \int\limits_\Omega g(x,u) u_t dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x) u u_t dx$$

$$= \int\limits_\Omega h(x) u_t dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) u_t dx$$

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\,(D_i u)^2 dx + \int\limits_\Omega c(x) u^2 dx + 2\int\limits_\Omega G(x,u)dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x) u^2 dx\right.$$

$$\left. -2\int\limits_\Omega h(x) u dx - 2\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) u dx\right] = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$y(t) := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\,(D_i u)^2 dx + \int\limits_\Omega c(x) u^2 dx + 2\int\limits_\Omega G(x,u)dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x) u^2 dx - 2\int\limits_\Omega h(x) u dx - 2\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) u dx$$

olarak tanımlarsak, $\frac{dy(t)}{dt} \leq 0$, yani $y(t)$'nin artmayan olduğu elde edilir.
Şimdi, (4.6) denklemini $u(x,t)$ ile çarpıp Ω üzerinde integral aldıktan sonra kısmi integrasyon uygularsak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\,(D_i u)^2 dx + \int\limits_\Omega c(x) u^2 dx + \int\limits_\Omega g(x,u) u dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x) u^2 dx$$

$$= \int\limits_\Omega h(x) u dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) u dx$$

elde edilir. Burada, Koşul (1)'i gözönüne alırsak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega c(x)u^2dx + \int_\Omega g(x,u)udx + \int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$\leq \int_\Omega h(x)udx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)udx \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği, teoremin (ii') koşuluna dayanarak aşağıdaki gibi farklı durumlarda inceleyeceğiz:

Durum (a). (4.9) eşitsizliğinin son 3 terimi için $0 < A < 1$ olmak üzere aşağıdaki gibi ayırma işlemi yapalım:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int_\Omega c(x)u^2dx + 2\int_\Omega g(x,u)udx + 2\frac{A}{2}\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$-2A\int_\Omega h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx \leq 2(1-A)\int_\Omega h(x)udx + 2(1-A)\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx - 2(1-\frac{A}{2})\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx \tag{4.10}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı değerlendireceğiz. İlk terim için uygun Hölder ve Young eşitsizlikleri kullanılarak

$$2(1-A)\int_\Omega h(x)udx \leq 2(1-A)\|u\|_{L_2(\Omega)}\|h\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\leq \varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.10)'daki ikinci terim için uygun işlemler yapıldığında

$$2(1-A)\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx \leq 2(1-A)\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$\leq \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_3^2 4(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$= \varepsilon_2(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)}) + c(\varepsilon_2)c_3^2 4(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.10)'daki üçüncü terim için

$$2(1-\frac{A}{2})\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx \leq 2(1-\frac{A}{2})\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

$$\leq 2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = 2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)}) \tag{4.13}$$

alınır. Elde edilen (4.11)-(4.13) değerlendirmelerini (4.10)'da gözönüne alırsak

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+2\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+2\int\limits_\Omega c(x)u^2dx+2\int\limits_\Omega g(x,u)udx+2\frac{A}{2}\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx$$

$$-2A\int\limits_\Omega h(x)udx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\le\left(2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\left(2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+\varepsilon_2\right)\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)}+c(\varepsilon_2)c_3^24(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

elde edilir. Burada (ii_1) koşulunu gözönüne alıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\left(2\theta-2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}-\varepsilon_2\right)\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}+2\int\limits_\Omega c(x)u^2dx$$

$$+2(\alpha+1)\int\limits_\Omega G(x,u)dx+A\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx-2A\int\limits_\Omega h(x)udx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx$$

$$\le\left(2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)}+c(\varepsilon_2)c_3^24(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

alınır. Bu eşitsizliği, $t\ge t_0$ olmak üzere t'den $t+1$'e integre ederek Teorem 4.5'i kullanırsak

$$\int\limits_t^{t+1}\Bigg\{\left(2\theta-2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}-\varepsilon_2\right)\int\limits_\Omega|Du|^2dx+2\int\limits_\Omega c(x)u^2dx$$

$$+2(\alpha+1)\int\limits_\Omega G(x,u)dx+A\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx-2A\int\limits_\Omega h(x)udx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\Bigg\}d\tau$$

$$\le\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}+1\right)(\delta+K)+c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+c(\varepsilon_2)c_3^24(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafını $K_1=K_1(K,c_3,\delta,\|h\|_{L_2(\Omega)},\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)})$ ile gösterelim. Koşul (1)'den açıktır ki hemen hemen her $x\in\Omega$ ve $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ için $\theta_1\,|\xi|^2\ge\sum\limits_{i=1}^n a_i(x)\xi_i^2$ olacak şekilde $\theta_1>0$ vardır. Bu sonucu gözönüne alırsak

$$\int\limits_t^{t+1}\Bigg\{\frac{1}{\theta_1}\left(2\theta-2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}-\varepsilon_2\right)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n a_i\,(x)\,(D_iu)^2dx+2\int\limits_\Omega c(x)u^2dx$$

$$+2(\alpha+1)\int_{\Omega} G(x,u)dx + A\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx - 2A\int_{\Omega} h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega} \varphi(x)udx \Bigg\} d\tau \le K_1$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_2 = 2\theta - 2(1-\frac{A}{2})c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - A\theta_1$ olacak şekilde seçilir. O halde buradan

$$\int_t^{t+1}\Bigg\{ A\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)(D_iu)^2dx + A\int_{\Omega} c(x)u^2dx + 2A\int_{\Omega} G(x,u)dx + A\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$-2A\int_{\Omega} h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx \Bigg\} d\tau \le K_1$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten çıkar ki $\forall t \ge t_0$ için

$$\int_t^{t+1} y(\tau)d\tau \le \frac{K_1}{A}$$

sağlanır. Burada, y'nin artmayan olduğunu da gözönüne alırsak, $\forall t \ge t_0 + 1$ için

$$y(t) \le K_2$$

olacak şekilde $K_2 > 0$ vardır. Dolayısıyla,

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)(D_iu)^2dx + \int_{\Omega} c(x)u^2dx + 2\int_{\Omega} G(x,u)dx + \int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$-2\int_{\Omega} h(x)udx - 2\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx \le K_2$$

sağlanır. Burada, Not 4.6'yı gözönüne alırsak aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \tilde{c}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2g_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} - 2g_4 mes\Omega$$

$$\le K_2 + \varepsilon_2\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 4c(\varepsilon_1)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + 4c(\varepsilon_2)c_3^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

Buradan, $K_3 = K_3(K, g_3, g_4, c_3, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)})$ olmak üzere

$$\Big(min\{\theta, \tilde{c} - \varepsilon_1\} - c_1\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} - \varepsilon_2\Big)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2g_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \le K_3$$

sağlanır. O halde, öyle $K_4 = K_4(K_3) > 0$ vardır ki

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \le K_4$$

sağlanır.

Dolayısıyla, öyle $K' = K'(K, g_3, g_4, c_3, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) > 0$ vardır ki $t_1 = t_0 + 1$ olmak üzere $\forall t \geq t_1$ ve her sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için

$$B_0 = \{u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) : \|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq K'\}$$

olmak üzere $S(t)B \subset B_0$ sağlanır.

Durum (b). Şimdi, (4.9) eşitsizliğinde $0 < A < 1$ olmak üzere aşağıdaki gibi ayırma işlemi yapalım:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\frac{A}{2}\int_\Omega c(x)u^2dx + 2\int_\Omega g(x,u)udx + 2\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx$$

$$-2A\int_\Omega h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx \leq 2(1-A)\int_\Omega h(x)udx + 2(1-A)\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx - 2(1-\frac{A}{2})\int_\Omega c(x)u^2dx \tag{4.14}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son terim için

$$2(1-\frac{A}{2})\int_\Omega c(x)u^2dx \leq 2(1-\frac{A}{2})\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L_{2^*}(\Omega)}$$

$$\leq 2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = 2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)})$$

elde edilir. Bu eşitsizliği ve Durum (a)'da elde edilen (4.11),(4.12) değerlendirmelerini (4.14)'te gözönüne alırsak

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(2\theta - 2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - \varepsilon_2\right)\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + A\int_\Omega c(x)u^2dx$$

$$+2(\alpha+1)\int_\Omega G(x,u)dx + 2\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx - 2A\int_\Omega h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx$$

$$\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon_2)c_3^2 4(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği, $t \geq t_0$ için t'den $t+1$'e integre ederek Teorem 4.5'i kullanırsak

$$\int_t^{t+1}\left\{\left(2\theta - 2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - \varepsilon_2\right)\int_\Omega |Du|^2dx + A\int_\Omega c(x)u^2dx\right.$$

$$\left.+2(\alpha+1)\int_\Omega G(x,u)dx + 2\int_{\partial\Omega} k(x)u^2dx - 2A\int_\Omega h(x)udx - 2A\int_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\right\}d\tau$$

$$\leq (\varepsilon_1+\varepsilon_2+2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}+1)(\delta+K)+c(\varepsilon_1)4(1-A)^2\|h\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+c(\varepsilon_2)c_3^2 4(1-A)^2\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

alınır. Bu eşitsizliğin sağ tarafını $K_1=K_1(K,c_3,\delta,\|h\|_{L_2(\Omega)},\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)})$ ile gösterelim. Koşul (1)'den açıktır ki hemen hemen her $x\in\Omega$ ve $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ için $\theta_1|\xi|^2\geq\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)\xi_i^2$ olacak şekilde $\theta_1>0$ vardır. Bu sonucu gözönüne alırsak

$$\int\limits_t^{t+1}\left\{\frac{1}{\theta_1}\left(2\theta-2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}-\varepsilon_2\right)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\left(D_iu\right)^2dx+A\int\limits_\Omega c(x)u^2dx\right.$$
$$\left.+2(\alpha+1)\int\limits_\Omega G(x,u)dx+2\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx-2A\int\limits_\Omega h(x)udx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\right\}\leq K_1$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon_2=2\theta-2(1-\frac{A}{2})c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}-A\theta_1$ olacak şekilde seçilir. O halde buradan

$$\int\limits_t^{t+1}\left\{A\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\left(D_iu\right)^2dx+A\int\limits_\Omega c(x)u^2dx+2A\int\limits_\Omega G(x,u)dx+A\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx\right.$$
$$\left.-2A\int\limits_\Omega h(x)udx-2A\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\right\}d\tau\leq K_1$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten çıkar ki $\forall t\geq t_0$ için

$$\int\limits_t^{t+1}y(\tau)d\tau\leq\frac{K_1}{A}$$

sağlanır. Burada, y'nin artmayan olduğunu da gözönüne alırsak, $\forall t\geq t_0+1$ için

$$y(t)\leq K_2$$

olacak şekilde $K_2>0$ vardır. Dolayısıyla,

$$\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\left(D_iu\right)^2dx+\int\limits_\Omega c(x)u^2dx+2\int\limits_\Omega G(x,u)dx+\int\limits_{\partial\Omega}k(x)u^2dx$$
$$-2\int\limits_\Omega h(x)udx-2\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)udx\leq K_2$$

sağlanır. Burada, Not 4.6'yı gözönüne alırsak aşağıdaki değerlendirme alınır.

$$\theta\|Du\|^2_{L_2(\Omega)}-c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}+k_0\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}+2g_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}-2g_4mes\Omega$$

$$\leq K_2 + \varepsilon_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \varepsilon_2 \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + 4c(\varepsilon_1)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} + 4c(\varepsilon_2)\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

Buradan, $K_3 = K_3(K, g_3, g_4, c_3, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)})$ olmak üzere

$$\left(c_2 min\{\theta, k_0 - \varepsilon_2\} - c_0\|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} - \varepsilon_1\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2g_3\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq K_3$$

sağlanır. O halde, öyle $K_4 = K_4(K_3) > 0$ vardır ki

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq K_4$$

sağlanır.

Dolayısıyla, öyle $K' = K'(K, g_3, g_4, c_3, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) > 0$ vardır ki $t_1 = t_0 + 1$ olmak üzere $\forall t \geq t_1$ ve her sınırlı $B \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için

$$B_0 = \{u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) : \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq K'\}$$

olmak üzere $S(t)B \subset B_0$ sağlanır. ■

SONUÇ

Bu çalışmada Difüzyon-Konveksiyon tipli denklemler için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, bu konuda çalışan bilim insanlarının araştırmalarına katkı sağlayacaktır.

Biz bu çalışmanın devamı olarak, gözönüne alınan problemin çözümünün uzun zaman davranışını daha genel ve otonom olmayan durumda inceleyeceğiz.

KAYNAKLAR

[1] Adams R. A.; *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, **1975**.

[2] Babin A. V., Vishik M. I.; *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, **1992**.

[3] Bandle C., Levine H. A., Zhang Qi S.; Critical exponents of Fujita type for Inhomogeneous Parabolic Equations and systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 624-648, **2000**.

[4] Boni T. K.; On the Asymptotic Behavior of Solutions for Some Parabolic and Elliptic Equations of Second Order with Nonlinear Boundary Conditions, *Nonlinear Analysis* 45, 895-908, **2011**.

[5] Chen X., Fila M., Guo J-S.; Boundedness of Global Solutions of a Supercritical Parabolic Equation, *Nonlinear Analysis* 68, 621-628, **2008**.

[6] Ding J.; Global and Blow-up Solutions for Nonlinear Parabolic Equations with Robin Boundary Conditions, *Computers and Mathematics with Applications* 65, 1808-1822, **2013**.

[7] Ding J., Li S.; Blow-up Solutions and Global Solutions for a Class of Quasilinear Parabolic Equations with Robin Boundary Conditions, *Computers and Mathematics with Applications* 49, 689-701, **2005**.

[8] Escobedo M., Zuazua E.; Large Time Behavior for Convection Diffusion Equations in $\mathbb{R}^N$, *Journal of Functional Analysis* 100, 119-161, **1991**.

[9] Evans L. C.; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, **1998**.

[10] Fang W., Ito K.; Nonhomogeneous Inıtıal-Boundary Value Problems for Nonlinear Diffusion-Convection Equations, *Nonlinear Analysis* 48, 303-322, **2002**.

[11] Fucik S., Kufner A.; *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, New York, **1980**.

[12] Gilbarg D., Trudinger N. S.; *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, **1983**.

[13] Gmira A., Veron L.; Large Time Behavior of the Solutions of a Semilinear Parabolic Equation in $\mathbb{R}^N$, *Journal of Differential Equations* 53, 258-276, **1984**.

[14] Heibig A., Moussaoui M.; Generalized and Classical Solutions of Nonlinear Parabolic Equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* Vol. 24, No. 6, pp. 789-794, **1995**.

[15] Kallı K., Soltanov K. N.; On Some Semilinear Elliptic Equations, *AIP Conference Proceedings*, 1168, 298-301, **2009**.

[16] Kallı K., Soltanov K. N.; Some BVP for a General Semilinear Parabolic Equation in Divergence Form, *Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation*, Vol. 2, 16, **2011**.

[17] Kesavan S.; *Topics in Functional Analysis And Applications*, John Wiley and Sons, India,**1989**.

[18] Li F., Li J.; Global Existence and Blow-up Phenomena for Nonlinear Divergence Form Parabolic Equations with Inhomogeneous Neumann Boundary Conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385, 1005-1014, **2012**.

[19] Lions J. L.; *Quelques méthodes de resolution des problémes aux Limities non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris **1969**.

[20] Lions J.L., Magenes E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, vol. I, Springer-Verlag, Berlin, **1972**.

[21] Lusternik L. A., Sobolev V. J.; *Elements of Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, **1961**.

[22] Ma L.; Boundary value problem for a classical semilinear parabolic equation, arXiv:1012.5861v1 [math.AP] (2010)

[23] Pao C. V.; Positive Solutions of a Nonlinear Boundary Value Problem of Parabolic Type, *Journal of Differential Equations* 22, 145-163, **1976**.

[24] Pao C. V.; Asymptotic Behavior and Nonexistence of Global Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems of Parabolic Type, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 65, 616-637, **1978**.

[25] Payne L.E., Schaefer P.W.; Blow-up in parabolic problems under Robin boundary conditions, *Applicable Analysis* Vol. 87, No. 6, **2008**.

[26] Porzio M. M.; Existence, Uniqueness and Behavior of Solutions for a Class of Nonlinear Parabolic Problems, *Nonlinear Analysis* 74, 5359-5382, **2011**.

[27] Rao M. M.; *Measure Theory And Integration*, John Wiley and Sons, New York, **1984**.

[28] Shilov G. E., Gel'fand I. M.; *Generalized Functions*, vol I, Academic Press, **1964**.

[29] Soltanov K. N.; Existence and Nonexistence of the Global Solutions Some Nonlinear Elliptic-Parabolic Equations, *Differential Equations* 29, 4, 550-563, (translation), **1993**.

[30] Soltanov K. N.; On Some Nonlinear Boundary Value Problems and Embedding Theorems, *Proceeding of Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling*, 76-85, **2001**.

[31] Soltanov K. N.; On some modification on Navier-Stokes equations, *Nonlinear Analysis- Theory Methods and Applications*, Volume: 52 Issue: 3 Pages: 769-793, **2003**.

[32] Soltanov K. N.; Some Nonlinear Equations of the Nonstable Filtration Type and Embedding Theorems, *Nonlinear Analysis* 65, 2103-2134, **2006**.

[33] Song L., He Y., Zhang Y.; The Existence of Global Attractors for Semilinear Parabolic Equation in H^k Spaces, *Nonlinear Analysis* 68, 3541-3549, **2008**.

[34] Souplet P.; Recent Results and Open Problems on Parabolic Equations with Gradient Nonlinearities, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2001, No. 20, 1-19, **2001**.

[35] Struwe M.; *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian*, Springer-Verlag, **1990**.

[36] Temam R.; *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Springer-Verlag, New York, **1997**.

[37] Tsutsumi M.; Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Parabolic Equations, *Publication of RIMS*, Kyoto Univ.,8, 211-229, **1972/73**.

[38] Yosida K.; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, **1980**.

[39] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A*, Springer-Verlag, New York, **1990**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Kerime KALLI

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Evli

E-posta : kerime@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniv., Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise : 1998-1999 Bolu Anadolu Öğretmen Lisesi, Bolu

1999-2001 Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2005-2008 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Doktora : 2008-2014 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce (İleri Düzey)

İş Deneyimi

2006 Temmuz- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

Üniversite

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

TÜBİTAK destekli 110T558 numaralı "Matematiksel Fiziğin Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerinin Çözülebilirliği, Tam İntegrallenebilirliği ve Çözüm Manifoldlarının Analitik Özellikleri" isimli Türkiye-Ukrayna ikili işbirliği projesi, Bütçe: 155.541TL (proje henüz sonuçlanmamıştır).

Tezden Üretilmiş Yayınlar

"Some BVP for a General Semilinear Parabolic Equation in Divergence Form", Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation,Vol. 2, 16, 2011 (Kamal N. Soltanov ile birlikte)

Tezden Üretilmiş Tebliğ veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1. 5th International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Bulgaristan, 2010.

2. 8th International Congress for the International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC), Moskova, Rusya, 2011.